T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANALİTİK FONKSİYONLARIN BELLİ ALTSINIFLARININ KATSAYI VE FEKETE-SZEGÖ PROBLEMLERİ

Muharrem Can GÜNDÜZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

Temmuz- 2019
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANALİTİK FONKSİYONLARIN BELLİ ALTSINIFLARININ KATSAYI VE FEKETE-SZEGÖ PROBLEMLERİ

Muharrem Can GÜNDÜZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

Temmuz- 2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Muharrem Can GÜNDÜZ' ün Prof. Dr. Nizami MUSTAFA'nın danışmanlığında Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı" Analitik Fonksiyonlarını Belli AltSınıflarının Katsayı ve Fekete-Szegö Problemleri" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy . . . . birliği . . . . ile kabul edilmiştir.

04 / 07 / 2019

		Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	:	Prof. Dr. Nizami MUSTAFA	
Üye	:	Prof. Dr. Erhan DENİZ	
Üye	:	Doç. Dr. Ali Hikmet DEĞER	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 2019 gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu yezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Muharrem Can GÜNDÜZ

04/07/2019

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

Analitik Fonksiyonlarin Belli Altsınıflarının Katsayı ve Fekete-Szegö Problemleri

Muharrem Can GÜNDÜZ

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

Bu yüksek lisans tez çalışmasında analitik ve ünivalent fonksiyonların belli bir alt sınıfının katsayı problemi incelendi. Çalışmada bu sınıfa ait olan fonksiyonun ters fonksiyonunun katsayı problemi ve logaritmik katsayı problemi de ele alındı. Ayrıca, tezde tanımlanan sınıfın Fekete-Szegö problemi de incelendi.

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, ünivalent fonksiyon, yıldızıl fonksiyon, konveks fonksiyon, katsayı problemi, logaritmik katsayı, Fekete-Szegö problemi.

2019, 50 Sayfa

ABSTARCT

(M. Sc. Thesis)

The Fekete-Szegö and Coefficient Problems for the Certain Class of Analytic Functions

Muharrem Can GÜNDÜZ

Kafkas University

Graduate School of Applied and Natural Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

In this master thesis, the coefficient problem of a certain subclass of analytical and univalent functions was examined. In the study, the coefficient problem of the inverse function and the logarithmic coefficient problem of the function belonging to this class were also examined. In addition, the Fekete-Szegö problem of the class defined in the thesis was also investigated.

Key Words: Analytic function, univalent function, starlike function, convex function, coefficient problem, logarithmic coefficient, Fekete-Szegö problem.

2019, 50 Pages

ÖNSÖZ

Tez çalışması sırasında her türlü bilgi, teşvik ve deneyimleri ile yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Nizami MUSTAFA'ya ve yüksek lisans eğitimim süresince her türlü maddi ve manevi destekleri ile göstermiş oldukları sabırdan dolayı aileme şükranlarımı bir borç bilirim.

Muharrem Can GÜNDÜZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
U	$U=\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert<1\}$ merkezil açık birim disk
$f(U)$	U açık birim diskinin f fonksiyonu altında görüntüsü
A	U 'da analitik ve $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulunu sağlayan $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n, a_n\in\mathbb{C}, n=2,3,...$ fonksiyonlarının sınıfı
S	A 'nın ünivalent fonksiyonlarından oluşan alt sınıfı
C	U 'da konveks fonksiyonların sınıfı
S^*	U 'da yıldızıl (Starlike) fonksiyonların sınıfı
$U(z_0,\varepsilon)$	z_0 noktasının ε komşuluğu
$S^*(\alpha)$	$S^*(\alpha)=\left\{f\in S:\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\alpha,\ 0\le\alpha<1,\ z\in U\right\}$
$C(\alpha)$	$C(\alpha)=\left\{f\in S:\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f(z)}\right\}>\alpha,\ 0\le\alpha<1,\ z\in U\right\}$
$M_\beta(\alpha)$	$M_\beta(\alpha)=\left\{f\in S:\mathrm{Re}\left[(1-\beta)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\beta\frac{(zf'(z))'}{f'(z)}\right]>\alpha,\ 0\le\alpha<1,\ z\in U\right\}$
M_β	$M_\beta=\left\{f\in S:\mathrm{Re}\left[(1-\beta)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\beta\frac{(zf'(z))'}{f'(z)}\right]>0, z\in U\right\}$

1. GENEL BİLGİLER

1.1. GİRİŞ

Analitik fonksiyonlar teorisinin çok çalışılan konuları analitik fonksiyonların belli bir sınıfının katsayı problemi (fonksiyonun katsayılarının modüllerinin bir üst sınırının bulunması problemi), Fekete-Szegö problemi (fonksiyonun katsayıları yardımıyla tanımlanan ve Fekete-Szegö fonksiyoneli adlandırılan fonksiyonelin modülünün üst sınırının bulunması problemi), katsayılar yardımıyla tanımlanan ve ikinci Hankel determinantı olarak bilinen bir fonksiyonelin modülünün üst sınırının bulunmasıdır. Bu konularda farklı alt sınıflar için çok sayıda çalışmalar mevcuttur (önek için bakınız [1 - 16]).

Ayrıca, analitik ve ünivalent fonksiyonların belli alt sınıfları da araştırma konusudur. Hatta bi-ünivalent fonksiyon sınıfı olarak bilinen tersi de ünivalent olan analitik fonksiyonlar sınıfı için de çok sayıda çalışma bulunmaktadır (bakınız [11, 15, 17]).

Analitik ve ünivalent fonksiyonların belli alt sınıflarına ait olan fonksiyonların katsayı problemi de ilgi çekici konulardandır. Bu konuyla ilgili Thomas'ın [1] çalışmalarını örnek gösterebiliriz.

Analitik fonksiyonlar teorisinin bir ilginç konusu da logaritmik katsayı problemi denilen problemdir. Bu belli bir sınıftan olan fonksiyonun değişkene oranının logaritmasının katsayılarının modülünün üst sınırının bulunmasıdır (bakınız [1]).

Geometrik fonksiyonlar teorisindeki çalışmaların hemen tamamına yakını merkezil birim açık diskte yapılmaktadır. Bunun ana sebeplerinden biri analitik fonksiyonların merkezil birim açık diskte yakınsak seriye açılabilmesidir. Ayrıca, ileride de görüleceği üzere tanımlanan analitik fonksiyon sınıflarının açık birim diskte verilmesidir. Bütün bunların esas sebebi karmaşık fonksiyonlar teorisinden bilinen Riemann dönüşüm teoremidir. Riemann dönüşüm teoremi bize belli bir bölgede çalışmaktansa birim diskte çalışma kolaylığı sağlıyor. Öyle ki bu teoreme göre karmaşık düzlemin basit bağlantılı bir bölgesini birim diske konform dönüştüren bir fonksiyon vardır. Ayrıca, konform dönüşüm altında bölgelerin geometrik özellikleri sağlandığı da bilinmektedir. Bu sebepten karmaşık düzlemin belli bir bölgesinde çalışmak yerine birim açık diskte çalışmak tercih edilmektedir.

Bütün bu sebeplerden dolayı analitik fonksiyonlar teorisinde çalışmalar karmaşık düzlemin $U=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$ açık birim diskinde ünivalent ve $f(0)=f'(0)-1=0$ *normelleştirme* koşulunu sağlayan $f(z)$ analitik fonksiyonlarının oluşturduğu bir S sınıfının alt sınıfları üzerinde yoğunlaşmıştır.

Biz bu tez çalışmasında aşağıdaki konuları ele aldık:

1. Analitik ve ünivalent fonksiyonların belli bir alt sınıfı için katsayı problemi çalışıldı. Tez çalışmamızda, analitik ve ünivalent fonksiyonların belli bir alt sınıfının ilk üç katsayıları için değerlendirmeler elde edildi.

2. Analitik ve ünivalent fonksiyonların belli bir alt sınıfının ters fonksiyonlarının katsayı problemi çalışıldı. Tez çalışmasında ters fonksiyonların ilk üç katsayıları için değerlendirmeler elde edildi.

3. $f(z)$ tezde tanımlanan sınıftan olmak üzere $\log\left(\frac{f(z)}{z}\right)=g(z)$ fonksiyonunun katsayı problemi incelendi.

4. Tezde tanımlanan sınıf için Fekete-Szegö problemi incelendi ve Fekete-Szegö fonksiyonelinin bir üst sınırı verildi.

Bu yüksek lisans tezi birinci bölümü kuramsal temeller, ikinci bölümü materyal ve yöntemleri ve üçüncü bölüm araştırma bulguları olmak üzere üç bölümden oluşur.

1.2. KURAMSAL TEMELLER

1.2.1. Genel Kavramlar

Yüksek lisans tezimizin bu kısmında temel bilgiler verildi.

Tanım 1.2.1.1 ($\varepsilon -$komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. $\varepsilon > 0$ için

$$U\left(z_0, \varepsilon\right) = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - z_0\right| < \varepsilon\right\}$$

kümesine z_0 noktasının $\varepsilon -$ *komşuluğu* denir.

Tanım 1.2.1.2 (İç Nokta): Karmaşık düzlemde verilen bir kümenin bir noktası belli bir komşuluğu ile bu kümeye ait ise bu noktaya kümenin bir *iç noktası* denir.

Tanım 1.2.1.3 (Açık Küme): Karmaşık düzlemin sadece iç noktalarından oluşan kümesine *açık küme* denir.

Tanım 1.2.1.4 (Tümleyen): Kümeye ait olmayan noktalardan oluşan kümeye kümenin *tümleyeni* denir.

Tanım 1.2.1.5 (Kapalı küme): Tümleyeni açık olan kümeye *kapalı küme* denir.

Tanım 1.2.1.6 (Bağlantılı Küme): Herhangi iki nokasını birleştiren doğru parçası kümeye ait ise bu kümeye (doğrusal) *bağlantılı küme* denir.

Tanım 1.2.1.7 (Bölge): Karmaşık düzlemin açık ve bağlantılı kümesine bir bölge denir.

1.2.2. Analitik Fonksiyonlar ve Bazı Alt Sınıfları

Tanım 1.2.2.1 (Analitik Fonksiyon): $f(z)$ karmaşık değişkenli ve karmaşık değerli fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer, sonlu

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa bu fonksiyona z_0 noktasında türevlenebilir (veya diferensiyellenebilir) denir. Eğer, bir fonksiyon tanımlı olduğu bir noktanın belli bir komşuluğunda türevlenebilirse bu fonksiyona bu noktada *analitik fonksiyon* denir [18].

Tanım 1.2.2.2 (Tam Fonksiyon): $\mathbb{C}$ karmaşık düzlemin her noktasında analitik olan fonksiyona *tam fonksiyon* denir.

Tam fonksiyona örnek olarak e^z, $\sin z$, $\cos z$, $az+b, a,b \in \mathbb{C}$ gibi bir çok fonksiyon gösterilir.

Tanım 1.2.2.3 (Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı): $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşulunu sağlayan $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna *normalize edilmiş analitik fonksiyon* denir [19].

U birim diskinde normalize edilmiş analitik fonksiyon

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n,\ a_n \in \mathbb{C}, n = 2,3,... \qquad (1.2.2.1)$$

şekilli açılıma sahip olup bu $f(z)$ fonksiyonlarının sınıfı A ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde yazılır

$$A=\left\{ f:\forall z\in U \text{ için } f\left(z\right)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \;\; \mathrm{a}_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

<u>Tanım 1.2.2.4</u> (Ünivalent fonksiyon): Kompleks düzlemin bir D altkümesi üzerinde tanımlanmış bir $f\left(z\right)$ analitik fonksiyonu, kendi $f\left(D\right)$ resmi üzerine birebir oluyorsa bu fonksiyona D bölgesinde *ünivalent fonksiyon* denir.

Bir başka deyişle $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere $f\left(z_1\right)=f\left(z_2\right)$ olduğunda $z_1=z_2$ ya da $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f\left(z_1\right)\neq f\left(z_2\right)$ oluyorsa $f\left(z\right)$ fonksiyonuna D bölgesinde *ünivalent fonksiyon* denir [19].

U bölgesinde analitik ve ünivalent olan (1.2.2.1) şekilli fonksiyonların sınıfı S olsun. Yani, $S=\left\{ f\in A: f-\text{ünivalenttir}\right\}$ yazılır [20].

<u>Tanım 1.2.2.5</u> (Yıldızıl (Starlike) Bölge): Karmaşık düzlemde bir bölgenin belli bir noktasını keyfi noktasıyla birleştiren doğru parçası bu bölgeye ait ise bu bölgeye bu *noktaya göre yıldızıl (starlike) bölge* denir. Karmaşık düzlemi orijine göre yıldızıl bölgesine (kısaca) *yıldızıl bölge* denir [20].

<u>Tanım 1.2.2.6</u> (Görüntü Kümesi): Bir fonksiyonun tanım kümesinden alınan noktanın bu fonksiyonun değer kümesindeki karşılığına bu noktanın bu fonksiyon altındaki görüntüsü ve bu fonksiyonun tanım kümesinden alınan noktalarının bu fonksiyon altında görüntülerinin oluşturduğu kümeye bu fonksiyonun *görüntü kümesi* denir.

<u>Tanım 1.2.2.7</u> (Yıldızıl fonksiyon): Karmaşık düzlemde tanımlı görüntü kümesi yıldızıl olan bir analitik ünivalent fonksiyona *yıldızıl fonksiyon* denir [20].

<u>Not</u>: Bu tez çalışmasında açık birim diskte yıldızıl fonksiyonlar sınıfını araştıracağız.

<u>Teorem 1.2.2.1</u> (Yıldızıl fonksiyonların analitiklik karakterizasyonu): $f\in S$ fonksiyonunun U ’da yıldızıl olabilmesi için gerek ve yeter şart her $z\in U$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

sağlanmasıdır. Normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir.
Yani,

$$S^* = \left\{ f \in S : \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0 \right\}$$

olarak tanımlanır [20].

<u>Tanım 1.2.2.8</u> (α mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı): $f \in S$ olsun. Eğer U kümesinde $\alpha \geq 0$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna α *mertebeden yıldızıl fonksiyon* denir ve α mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı $S^*(\alpha)$ ile gösterilir.
Yani,

$$S^*(\alpha) = \left\{ f \in S : \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha,\ 0 \leq \alpha < 1 \right\}$$

olarak tanımlanır [21].
<u>Tanım 1.2.2.9</u> (Konveks bölge): B karmaşık düzlemde bir bölge olmak üzere B'deki her nokta çiftini birleştiren doğru parçası yine B bölgesinde kalıyorsa B'ye *konveks bölge* denir [20].

Tanım 1.2.2.10 (Konveks fonksiyon): $f \in A$ olmak üzere $f(U)$ bölgesi bir konveks bölge ise, $f(z)$ fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir [20].

Teorem 1.2.2.2 (Konveks fonksiyonların analitik karakterizasyonu): $f \in S$ fonksiyonunun U 'da konveks olması için gerekli ve yeterli şart her $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0$$

sağlanmasıdır. Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir.
Yani,

$$C=\left\{f \in S:\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f(z)}\right\}>0\right\}$$

şeklinde tanımlanır [20].

Tanım 1.2.2.11 (α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı): $f \in S$ olsun. Eğer U diskinde $\alpha \geq 0$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna α *mertebeden konvekstir* denir ve α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı $C(\alpha)$ ile gösterilir.
Yani,

$$C(\alpha)=\left\{f \in S:\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f(z)}\right\}>\alpha\right\}$$

[22].

Konveks ve yıldızıl fonksiyonlar arasındaki ilişki aşağıda teoremde verilmiştir.

Teorem 1.2.2.3 (Alexander teoremi): $f \in C \Leftrightarrow zf' \in S^*$ [19].

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Materyaller

Bu bölümde, tez çalışmamızda kullanacağımız bazı ön bilgileri verdik.

Burada Her $f \in S$ fonksiyonu için Koebe Çeyrek Teoremi'ne göre $D = \{w : |w| < r_0(f)\}$, $r_0(f) \geq 1/4$ diskinde tanımlanan ve

$$f^{-1}(w) = w + A_2 w^2 + A_3 w^3 + A_4 w^4 + \cdots, \; w \in D, \tag{2.1.1}$$

$A_2 = -a_2$, $A_3 = 2a_2^2 - a_3$, $A_4 = -5a_2^3 + 5a_2 a_3 - a_4$, şekilli açılıma sahip analitik $f^{-1}(w)$ ters fonksiyonu vardır (örneğin bakınız [17]).

Bilindiği üzere, (1.2.2.1) şekilli analitik fonksiyonların bazı ilk katsayılarının değerlendirilmesine geometrik fonksiyonlar teorisinde katsayı problemi denir. Katsayı probleminin yanı sıra ters fonksiyonun katsayılarının değerlendirilmesi de literatürde önemli bir yer almaktadır (örneğin bakınız [1]).

Bununla beraber, $f \in S$ olmak üzere $\log\left(f(z)/z\right)$ fonksiyonunun katsayıları için kesin değerlendirmelerin bulunması önemli problemlerdendir (örneğin bakınız [1]).

Bu tez çalışmamızda analitik ve ünivalent fonksiyonların aşağıda tanımlanan bazı alt sınıflarını inceledik.

<u>Tanım 2.1.1:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f \in S$ fonksiyonlarının

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\beta)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \beta\frac{\left(zf'(z)\right)'}{f'(z)}\right\} > \alpha, \; z \in U$$

koşulunu sağlayan alt sınıfına $M_\beta(\alpha),\ \alpha,\beta \geq 0$ sınıfı denir.

Hatırlatma 2.1.1: Özel durumda Tanım 2.1.1'de $\beta = 0$ alınırsa iyi bilinen $M_0(\alpha) = S^*(\alpha),$ sınıfı ve $\beta = 1$ yazılırsa $M_1(\alpha) = C(\alpha), \alpha \geq 0$ sınıfı elde edilir.

Tanım 2.1.2: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f \in S$ fonksiyonlarının

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\beta)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \beta\frac{\left(zf'(z)\right)'}{f'(z)}\right\} > 0$$

koşulunu sağlayan alt sınıfına $M_\beta,\ \beta \geq 0$ sınıfı denir.

Hatırlatma 2.1.2: Özel durumda Tanım 2.1.2'de $\beta = 0$ yazılırsa iyi bilinen $M_0 = S^*$ sınıfını ve $\beta = 1$ yazılırsa $M_1 = C$ sınıfını elde ederiz.

2.2. Yöntemler

Bu alt bölümde tezde kullanılacak olan bazı lemmalar verilecektir.

P fonksiyonların U açık birim diskte analitik, $p(0) = 1,\ \operatorname{Re} p(z) > 0$ koşullarını sağlayan,

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots,\ z \in U. \qquad (2.2.1)$$

seri açılımlı $p(z)$ foksiyonlarının sınıfı olsun.

Lemma 2.2.1 ([22]): $p \in \mathrm{P}$ fonksiyonunun katsayıları için $|p_n| \leq 2,\ n = 1,2,3,...$ eşitsizliği kesindir ayrıca $|z| \leq 1$ ve $|w| \leq 1$ olmak üzere z ve w karmaşık parametrelerinin bazı değerleri için

$$2p_2 = p_1^2 + \left(4 - p_1^2\right)z, \tag{2.2.2}$$

$$4p_3 = p_1^3 + 2\left(4 - p_1^2\right)p_1 z - \left(4 - p_1^2\right)p_1 z^2 + 2\left(4 - p_1^2\right)\left(1 - |z|^2\right)w \tag{2.2.3}$$

eşitlikleri doğrudur.

Lemma 2.2.2 ([2, 23]): Eğer $p \in \mathrm{P}$ ise

$$\left|p_2 - \frac{\nu}{2} p_1^2\right| \leq 2 \cdot \max\{1, |\nu - 1|\} = 2\begin{cases} 1 & \text{eğer } \nu \in [0,2], \\ |\nu - 1|, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

dir.

Lemma 2.2.3 ([2, 23]): Eğer $p \in \mathrm{P}$ ve $0 \leq B \leq 1$, $B(2B - 1) \leq D \leq B$ ise

$$\left|p_3 - 2Bp_1p_2 + Dp_1^3\right| \leq 2.$$

dir.

Lemma 2.2.4 ([2, 23]): $p \in \mathrm{P}$ olsun. Bu durumda,

$$\left|p_3 - (1+\lambda)p_1p_2 + \lambda p_1^3\right| \leq 2 \cdot \max\begin{cases} 1 & \lambda \in [0,1], \\ |2\lambda - 1|, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

dir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Bazı Analitik Fonksiyon Sınıfları İçin Katsayı Problemi

3.1.1 $M_\beta(\alpha)$ Altsınıfı İçin Katsayı Problemi

Tez çalışmamızın bu bölümünde, $M_\beta(\alpha)$ altsınıfına ait olan fonksiyonların bazı ilk katsayılarının modülleri için kesin eşitsizlikler verildi.

<u>Teorem 3.1.1.1:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $M_\beta(\alpha)$, $\alpha\in[0,1)$, $\beta\geq 0$ altsınıfından ise bu fonksiyonun ilk üç katsaysı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_2|\leq\frac{2(1-\alpha)}{1+\beta},\quad |a_3|\leq\frac{1-\alpha}{1+2\beta}\left[1+\frac{2(1+3\beta)(1-\alpha)}{(1+\beta)^2}\right]$$

ve

$$|a_4|\leq\frac{2(1-\alpha)}{3(1+3\beta)}\left[1+\frac{3(1+5\beta)(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+2\beta)}+\frac{2(17\beta^2+6\beta+1)(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^3(1+2\beta)}\right].$$

<u>İspat:</u> $f\in M_\beta(\alpha)$, $\alpha\in[0,1)$, $\beta\geq 0$ olduğunu farz edelim. Bu demek olur ki,

$$(1-\beta)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\beta\frac{(zf'(z))'}{f'(z)}=\alpha+(1-\alpha)p(z),\ z\in U \tag{3.1.1.1}$$

$p\in \mathrm{P}$ olacak şekilde $p\in \mathrm{P}$ fonksiyonu vardır.

Eğer,

$$f'(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}=1+2a_2z+3a_3z^2+4a_4z^3+\cdots,$$

$$zf'(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n}=z+2a_2z^2+3a_3z^3+4a_4z^4+\cdots,$$

$$\left(zf'(z)\right)' = \left(z + 2a_2z^2 + 3a_3z^3 + 4a_4z^4 + \cdots\right)' = 1 + 4a_2z + 9a_3z^2 + 16a_4z^3 + \cdots$$

eşitlikleri dikkate alınırsa basit hesaplamalarla (3.1.1.1) eşitliği

$$\begin{aligned}
&1 + (1+\beta)a_2z + \left[2(1+2\beta)a_3 - (1+3\beta)a_2^2\right]z^2 \\
&+ \left[3(1+3\beta)a_4 - 3(1+5\beta)a_2a_3 + (1+7\beta)a_2^3\right]z^3 + \cdots \\
&= 1 + (1-\alpha)\,p_1z + (1-\alpha)\,p_2z^2 + (1-\alpha)\,p_3z^3 + \cdots .
\end{aligned} \tag{3.1.1.2}$$

şeklinde yazılır.

(3.1.1.2) eşitliğinde z değişkeninin aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse

$$(1+\beta)a_2 = (1-\alpha)\,p_1, \tag{3.1.1.3}$$

$$2(1+2\beta)a_3 - (1+3\beta)a_2^2 = (1-\alpha)\,p_2, \tag{3.1.1.4}$$

$$3(1+3\beta)a_4 - 3(1+5\beta)a_2a_3 + (1+7\beta)a_2^3 = (1-\alpha)\,p_3. \tag{3.1.1.5}$$

elde edillir.

Böylece, (3.1.1.3) – (3.1.1.4) eşitliklerinden

$$a_2 = \frac{1-\alpha}{1+\beta}\,p_1, \tag{3.1.1.6}$$

$$a_3 = \frac{1-\alpha}{2(1+2\beta)}\,p_2 + \frac{1+3\beta}{2(1+2\beta)}\,a_2^2,$$

$$a_4 = \frac{1-\alpha}{3(1+3\beta)}\,p_3 + \frac{1+5\beta}{1+3\beta}\,a_2a_3 - \frac{1+7\beta}{3(1+3\beta)}\,a_2^3$$

yazılır, a_2’nin ifadesi ikinci eşitlikte, a_2 ve a_3’ün ifadeleri de üçüncü eşitlikte yerine yazılırsa a_3 ve a_4 katsayıları

$$a_3=\frac{1-\alpha}{2(1+2\beta)}p_2+\frac{(1+3\beta)(1-\alpha)^2}{2(1+\beta)^2(1+2\beta)}p_1^2, \tag{3.1.1.7}$$

$$\begin{aligned} a_4=&\frac{1-\alpha}{3(1+3\beta)}p_3+\frac{(1+5\beta)(1-\alpha)^2}{2(1+\beta)(1+2\beta)(1+3\beta)}p_1p_2\\ &+\frac{(17\beta^2+6\beta+1)(1-\alpha)^3}{6(1+\beta)^3(1+2\beta)(1+3\beta)}p_1^3. \end{aligned} \tag{3.1.1.8}$$

şeklinde bulunur.

Görüldüğü üzere, her $\alpha\in[0,1)$ ve her $\beta\geq 0$ için (3.1.1.6), (3.1.1.7) ve (3.1.1.8) eşitliklerinde p_1, p_2, p_3, p_1p_2, p_1^2 ve p_1^3 parametrelerinin katsayıları pozitiftir. Buna göre, (3.1.1.6), (3.1.1.7) ve (3.1.1.8) eşitliklerine üçgen eşitsizliği uygulanırsa $|a_2|$, $|a_3|$ ve $|a_4|$ için

$$|a_2|=\frac{1-\alpha}{1+\beta}|p_1|,$$

$$|a_3|\leq\frac{1-\alpha}{2(1+2\beta)}|p_2|+\frac{(1+3\beta)(1-\alpha)^2}{2(1+\beta)^2(1+2\beta)}|p_1|^2,$$

$$|a_4|\leq\frac{1-\alpha}{3(1+3\beta)}|p_3|+\frac{(1+5\beta)(1-\alpha)^2}{2(1+\beta)(1+2\beta)(1+3\beta)}|p_1||p_2|+\frac{(17\beta^2+6\beta+1)(1-\alpha)^3}{6(1+\beta)^3(1+2\beta)(1+3\beta)}|p_1|^3.$$

elde edilir.

Diğer taraftan, Lemma 2.2.1 gereğince $|p_n|\leq 2$, $n=1,2,3,...$ olduğundan, sonuncu eşitsizliklerden

$$|a_2|\leq\frac{2(1-\alpha)}{1+\beta},$$

$$|a_3|\leq\frac{1-\alpha}{1+2\beta}\left[1+\frac{2(1+3\beta)(1-\alpha)}{(1+\beta)^2}\right],$$

$$|a_4| \le \frac{2(1-\alpha)}{3(1+3\beta)}\left[1+\frac{3(1+5\beta)(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+2\beta)}+\frac{2(17\beta^2+6\beta+1)(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^3(1+2\beta)}\right]$$

bulunur.

Bununla teoremde verilen eşitsizliklerin doğruluğu ispatlandı.

Şimdi eşitsizliklerin kesin olduğunu görelim.
Gerçekten de $p_1 = p_2 = p_3 = 2$ alınırsa (3.1.1.6) – (3.1.1.8) eşitliklerinden görüldüğü üzere eşitsizliklerin üçü de eşitlik olarak gerçekleşir.

Öte yandan

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \ ,$$

dolayısıyla bu fonksiyon için $p_n = 2$, $n = 1,2,3,...$ olduğu açıktır.

O halde, (3.1.1.1) koşulunda $p(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ alır ve bu koşul yeniden düzenlenirse

$$\beta(1-z)zyy'' + (1-\beta)(1-z)z(y')^2 - \left[(1+\beta-2\alpha)z+1-\beta\right]yy' = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Böylece, bu diferansiyel denklemin bir özel çözümü için teoremde elde edilen eşitsizlikler kesindir.

Bununla Teorem 3.1.1.1'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.1.1.1'den aşağıdaki sonuçlar özel durum olarak elde edilir.

Teorem 3.1.1.2: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $M_\beta, \quad \beta \geq 0$ altsınıfından ise bu fonksiyonun ilk üç katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_2| \leq \frac{2}{1+\beta}, \quad |a_3| \leq \frac{1}{1+2\beta}\left[1+\frac{2(1+3\beta)}{(1+\beta)^2}\right]$$

ve

$$|a_4| \leq \frac{2}{3(1+3\beta)}\left[1+\frac{3(1+5\beta)}{(1+\beta)(1+2\beta)}+\frac{2(17\beta^2+6\beta+1)}{(1+\beta)^3(1+2\beta)}\right].$$

Teorem 3.1.1.3: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $S^*(\alpha), \quad \alpha \in [0,1)$ altsınıfından ise bu fonksiyonun ilk üç katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_2| \leq 2(1-\alpha), \quad |a_3| \leq (1-\alpha)(3-2\alpha)$$

ve

$$|a_4| \leq \frac{2(1-\alpha)\left[1+(1-\alpha)(5-2\alpha)\right]}{3}.$$

Teorem 3.1.1.4: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $C(\alpha), \quad \alpha \in [0,1)$ altsınıfından ise bu fonksiyonun ilk üç katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_2| \leq 1-\alpha, \quad |a_3| \leq \frac{(1-\alpha)(3-2\alpha)}{3}$$

ve

$$|a_4| \le \frac{(1-\alpha)\left[1+(1-\alpha)(5-2\alpha)\right]}{6}.$$

Sonuç 3.1.1.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu S^* altsınıfından ise bu fonksiyonun ilk üç katsaysı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_n| \le n, \quad n = 2,3,4.$$

Sonuç 3.1.1.2: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu C, altsınıfından ise bu fonksiyonun ilk üç katsaysı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_n| \le 1, \quad n = 2,3,4.$$

3.1.2 $M_\beta(\alpha)$ Altsınıfına Ait olan Fonksiyonun Tersi İçin Katsayı Problemi

Bu bölümde, biz (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f \in M_\beta(\alpha)$ fonksiyonun f^{-1} tersinin ilk birkaç katsayısı için değerlendirmeler vereceğiz.

Teorem 3.1.2.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $M_\beta(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$, $\beta \ge 0$ altsınıfından ise bu fonksiyonun f^{-1} tersinin ilk üç katsaysı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|A_2| \le \frac{2(1-\alpha)}{1+\beta}, \quad \beta \ge 0.$$

$\beta \in \left[0, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$ için

$$|A_3| \le \frac{1-\alpha}{(1+\beta)^2(1+2\beta)} \begin{cases} 2(3+5\beta)(1-\alpha)-(1+\beta)^2 & \text{eğer } \alpha \in [0,\beta_0), \\ (1+\beta)^2 & \text{eğer } \alpha \in [\beta_0,1), \end{cases}$$

burada $\beta_0 = \dfrac{2+3\beta-\beta^2}{3+5\beta}$.

$\beta \geq \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ için

$$|A_3| \leq \frac{1-\alpha}{1+2\beta}.$$

Ayrıca,

$$|A_4| \leq \frac{2(1-\alpha)}{3(1+3\beta)}\left[1+\frac{6(2+5\beta)(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+2\beta)}+\frac{4(31\beta^2+33\beta+8)(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^3(1+2\beta)}\right].$$

<u>İspat:</u> $f \in M_\beta(\alpha)$, $\alpha \in [0,1), \beta \geq 0$ olsun. Bu durumda, $M_\beta(\alpha) \subset S$ olduğundan f fonksiyonunun $D = \{w : |w| < r_0(f)\}$, $r_0(f) \geq \dfrac{1}{4}$ açık birim diskinde tanımlı ve

$$f^{-1}(w) = w + A_2 w^2 + A_3 w^3 + A_4 w^4 + \cdots$$

şekilli bir f^{-1} tersi vardır, burada

$$A_2 = -a_2,\ A_3 = 2a_2^2 - a_3,\ A_4 = -5a_2^3 + 5a_2 a_3 - a_4. \tag{3.1.2.1}$$

Böylece, (3.1.2.1)'in birinci eşitliğinden ve Teorem 3.1.1.1'den A_2 için yazarız:

$$A_2 = -\frac{1-\alpha}{1+\beta} p_1. \tag{3.1.2.2}$$

Sonuncu eşitlikten

$$|A_2| \leq \frac{2(1-\alpha)}{1+\beta}$$

elde ederiz.

Şimdi, $|A_3|$ için bir değerlendirme bulalım. (3.1.2.1)'in ikinci eşitliğinden ve (3.1.1.6), (3.1.1.7)'den yazarız:

$$A_3 = -\frac{1-\alpha}{2(1+2\beta)}\left[p_2 - \frac{(3+5\beta)(1-\alpha)}{(1+\beta)^2}p_1^2\right]. \tag{3.1.2.3}$$

Buradan

$$|A_3| = \frac{1-\alpha}{2(1+2\beta)}\left|p_2 - \frac{(3+5\beta)(1-\alpha)}{(1+\beta)^2}p_1^2\right|$$

ya da $\nu = \frac{2(3+5\beta)(1-\alpha)}{(1+\beta)^2}$ omak üzere,

$$|A_3| = \frac{1-\alpha}{2(1+2\beta)}\left|p_2 - \frac{\nu}{2}p_1^2\right|$$

yazarız.

Şimdi sonuncu eşitliğe Lemma 2.2.2'yi uygulayalım.

$\nu > 0$ olduğu açıktır. Ayrıca, eğer $\beta \geq \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ ise her $\alpha \in [0,1)$ için $\nu \leq 2$ olur.

O halde, $\beta \geq \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ için Lemma 2.2.2 gereğince yazarız:

$$|A_3| \le \frac{1-\alpha}{1+2\beta}.$$

Şimdi $\beta \in \left[0, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$ olsun. Bu durumda,

$$\nu \le 2 \iff \alpha \in [\beta_0, 1)$$

ve

$$\nu > 2 \iff \alpha \in [0, \beta_0),$$

burada

$$\beta_0 = \frac{2+3\beta-\beta^2}{3+5\beta}.$$

Buna gore, Lemma 2.2.2 gereğince $\beta \in \left[0, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$ durumunda aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz

$$|A_3| \le \begin{cases} \dfrac{(1-\alpha)(\nu-1)}{1+2\beta} & \text{eğer } \alpha \in [0, \beta_0), \\ \dfrac{1-\alpha}{1+2\beta} & \text{eğer } \alpha \in [\beta_0, 1), \end{cases}$$

burada

$$\beta_0 = \frac{2+3\beta-\beta^2}{3+5\beta}.$$

Bununla $|A_3|$ için teoremde verilen eşitsizlik ispatlandı.

Şimdi, $|A_4|$’ün değerlendirmesini bulalım. (3.1.2.1)’in üçüğncü eşitliğinden ve (3.1.1.6) – (3.1.1.8) eşitliklerinden A_4 için yazarız:

$$A_4 = -\frac{1-\alpha}{3(1+3\beta)}\left[p_3 - \frac{3(2+5\beta)(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+2\beta)} p_1 p_2 + \frac{(31\beta^2+33\beta+8)(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^3(1+2\beta)} p_1^3 \right]. \quad (3.1.2.4)$$

(3.1.2.4) eşitliğinde üçgen eşitsizliğine geçer ve $|p_n| \le 2$, $n = 1,2,3$ olduğu dikkate alınırsa $|A_4|$ için istenen eşitsizlik elde edilir.

Bununla teoremde istenen eşitsizlikler ispatlandı.

Şimdi bulunan sonuçların kesin olduğunu gösterelim.

Doğrudan da $p_1 = 2$ alınırsa her $\beta \ge 0$ için $|A_2|$ için bulduğumuz eşitsizliğin kesin olduğu (3.1.2.2) eşitliğinden görülür.

$\beta \in \left[0, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$ için $\alpha \in [0, \beta_0)$ durumunda $p_1 = p_2 = 2$ ve $\alpha \in [\beta_0, 1)$ durumunda $p_1 = p_2 - 2 = 0$ alınırsa (3.1.2.3) eşitliğinden $|A_3|$ için bulduğumuz eşitsizliğin kesin olduğu görülür.

Ayrıca, $p_1 - 2 = p_2 + 2 = p_3 - 2 = 0$ seçilirse $|A_4|$ için elde edilen eşitsizliğin kesin olduğu (3.1.2.4) eşitliğinden görülür.

Bununla Teorem 3.1.2.1'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.1.2.1'den aşağıdaki sonuçları özel durum olarak elde ederiz.

<u>Teorem 3.1.2.2:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu M_β, $\beta \ge 0$ altsınıfından ise bu fonksiyonun f^{-1} tersinin ilk üç katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|A_2| \le \frac{2}{1+\beta}, \ \beta \ge 0.$$

$\beta \in \left[0, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$ için

$$|A_3| \le \frac{5+8\beta-\beta^2}{(1+\beta)^2(1+2\beta)}$$

ve $\beta \ge \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ için

$$|A_3| \le \frac{1}{1+2\beta}.$$

Ayrıca,

$$|A_4| \le \frac{2}{3(1+3\beta)}\left[1+\frac{6(2+5\beta)}{(1+\beta)(1+2\beta)}+\frac{4(31\beta^2+33\beta+8)}{(1+\beta)^3(1+2\beta)}\right].$$

<u>Teorem 3.1.2.3:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $S^*(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$ altsınıfından ise bu fonksiyonun f^{-1} tersinin ilk üç katsaysı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|A_2| \le 2(1-\alpha),$$

$$|A_3| \le (1-\alpha)\begin{cases} 5-6\alpha \text{ eğer } \alpha \in \left[0, \frac{2}{3}\right), \\ 1 \qquad \text{ eğer } \alpha \in \left[\frac{2}{3}, 1\right). \end{cases}$$

Ayrıca,

$$|A_4| \le \frac{2(1-\alpha)\left[1+4(1-\alpha)(11-8\alpha)\right]}{3}.$$

Teorem 3.1.2.4: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $C(\alpha),\ \alpha\in[0,1)$ altsınıfından ise bu fonksiyonun f^{-1} tersinin ilk üç katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|A_2|\le 1-\alpha\,,$$

$$|A_3|\le\frac{1-\alpha}{3}\begin{cases}3-4\alpha & \text{eğer } \alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\\ 1 & \text{eğer } \alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right).\end{cases}$$

Ayrıca,

$$|A_4|\le\frac{(1-\alpha)\left[1+(1-\alpha)(19-12\alpha)\right]}{6}.$$

Sonuç 3.1.2.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu S^* altsınıfından ise bu fonksiyonun f^{-1} tersinin ilk üç katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|A_2|\le 2\,,\ |A_3|\le 5 \text{ ve } |A_4|\le 30\,.$$

Sonuç 3.1.2.2: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu C altsınıfından ise bu fonksiyonun f^{-1} tersinin ilk üç katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|A_2|\le 1,\ |A_3|\le 3 \text{ ve } |A_4|\le\frac{10}{3}.$$

3.1.3 $M_\beta(\alpha)$ Altsınıfı İçin Logaritmik Katsayı Problemi

Bu bölümde, (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f \in M_\beta(\alpha)$ fonksiyonu için $g(z)=\log\left(\frac{f(z)}{z}\right)$ fonksiyonunun katsayı problemi incelenmiştir.

Bilindiği üzere, f fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki eşitlikten tanımlanan δ_n, $n=1,2,3,4,...$ parametrelerine f 'nin logaritmik katsayıları denir [1]

$$g(z)=\log\left(\frac{f(z)}{z}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n z^n . \tag{3.1.3.1}$$

Aşağıdaki teoremde $f \in M_\beta(\alpha)$ fonksiyonunun ilk birkaç logaritmik katsayısı için değerlendirmeler verilir.

<u>Teorem 3.1.3.1:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $M_\beta(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$, $\beta \geq 0$ altsınıfından ise (3.1.3.1) eşitliği ile tanımlanan g fonksiyonunun ilk üç katsayılar için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|\delta_1| \leq \frac{1-\alpha}{1+\beta}, \quad |\delta_2| \leq \frac{1-\alpha}{2(1+2\beta)}\left\{1+\frac{2\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)^2}\right\}$$

ve

$$|\delta_3| \leq \frac{1-\alpha}{3(1+3\beta)}\left(1+\frac{6\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+2\beta)}+\frac{4\left(11\beta^2+11\beta+2\right)(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^3(1+2\beta)}\right).$$

<u>İspat:</u> $f \in M_\beta(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$, $\beta \geq 0$ olsun. (3.1.3.1) eşitliğinden δ_n, $n=1,2,3,4,...$ katsayılarını bulalım. Bunun için (3.1.3.1) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\frac{zf'(z)-f(z)}{zf(z)}=2\sum_{n=1}^{\infty}n\delta_n z^{n-1}=2\left(\delta_1+2\delta_2 z+3\delta_3 z^2+4\delta_4 z^3+\cdots\right)$$

yazılır.

Ayrıca,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots$$

ve

$$zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n = z + 2a_2 z^2 + 3a_3 z^3 + 4a_4 z^4 + \cdots$$

olduğu dikkate alınırsa sonuncu eşitlik şöyle yazılır:

$$a_2 z^2 + 2a_3 z^3 + 3a_4 z^4 + \cdots = 2\delta_1 z^2 + \left(4\delta_2 + 2\delta_1 a_2\right) z^3 + \left(6\delta_3 + 4\delta_2 a_2 + 2\delta_1 a_3\right) z^4 + \cdots .$$

Sonuncu eşitlikten

$$2\delta_1 = a_2 ,$$

$$4\delta_2 + 2\delta_1 a_2 = 2a_3 ,$$

$$6\delta_3 + 4\delta_2 a_2 + 2\delta_1 a_3 = 3a_4 ,$$

dolayısıyla,

$$\delta_1 = \frac{a_2}{2} ,$$

$$\delta_2 = \frac{1}{4}\left(2a_3 - a_2^2\right),$$

$$\delta_3 = \frac{1}{6}\left(3a_4 - 3a_2 a_3 + a_2^3\right)$$

elde edilir.

Eğer, (3.1.1.6) – (3.1.1.8) eşitliklerinden a_2, a_3 ve a_4'ün ifadeleri sonuncu eşitliklerde dikkate alınırsa

$$\delta_1 = \frac{1-\alpha}{2(1+\beta)} p_1, \tag{3.1.3.2}$$

$$\delta_2 = \frac{1-\alpha}{4(1+2\beta)} \left\{ p_2 + \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)^2} p_1^2 \right\}, \tag{3.1.3.3}$$

$$\delta_3 = \frac{1-\alpha}{6(1+3\beta)} \left(p_3 + \frac{3\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+2\beta)} p_1 p_2 - \frac{(11\beta^2 + 11\beta + 2)(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^3(1+2\beta)} p_1^3 \right) \tag{3.1.3.4}$$

bulunur.

(3.1.3.2) – (3.1.3.4) eşitliklerinde üçgen eşitsizlikleri ve $|p_n|$, $n = 1,2,3$ olduğu göz önünde bulundurulursa $|\delta_n|$, $n = 1,2,3$ için bulunur:

$$|\delta_1| \le \frac{1-\alpha}{1+\beta},$$

$$|\delta_2| \le \frac{1-\alpha}{2(1+2\beta)} \left\{ 1 + \frac{2\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)^2} \right\},$$

$$|\delta_3| \le \frac{1-\alpha}{3(1+3\beta)} \left(1 + \frac{6\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+2\beta)} + \frac{4(11\beta^2 + 11\beta + 2)(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^3(1+2\beta)} \right).$$

Bununla teoremde verilen eşitsizliklerin doğruluğu ispatlandı.

Şimdi bulduğumuz eşitsizliklerin kesin olduğunu gösterelim.
Gerçekten de (3.1.3.2) ve (3.1.3.3) eşitliklerinde $p_1 = p_2 = 2$ seçilirse $|\delta_1|$ ve $|\delta_2|$ için bulunan eşitsizliklerin kesin olduğu görülür.

Ayrıca, (3.1.3.4)'de $p_1 + 2 = p_2 + 2 = p_3 - 2 = 0$ seçilirse $|\delta_3|$ için elde edilen eşitsizlik kesin olur.

Bununla Teorem 3.1.3.1'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.1.3.1'den aşağıdaki sonuçlar özel durum olarak elde edilir.

Teorem 3.1.3.2: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu M_β, $\beta \geq 0$ altsınıfından ise (3.1.3.1) eşitliği ile tanımlanan g fonksiyonunun ilk üç katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler doğrudur

$$|\delta_1| \leq \frac{1}{1+\beta}, \quad |\delta_2| \leq \frac{\beta^2+4\beta+1}{2(1+\beta)^2(1+2\beta)}$$

ve

$$|\delta_3| \leq \frac{1}{3(1+3\beta)}\left(1+\frac{6\beta}{(1+\beta)(1+2\beta)}+\frac{4(11\beta^2+11\beta+2)}{(1+\beta)^3(1+2\beta)}\right).$$

Teorem 3.1.3.3: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $S^*(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$ altsınıfından ise (3.1.3.1) eşitliği ile tanımlanan g fonksiyonunun ilk üç katsayılar için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|\delta_1| \leq 1-\alpha, \quad |\delta_2| \leq \frac{1-\alpha}{2}$$

ve

$$|\delta_3| \leq \frac{(1-\alpha)(8\alpha^2-16\alpha+9)}{3}.$$

Teorem 3.1.3.4: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $C(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$ altsınıfından ise (3.1.3.1) eşitliği ile tanımlanan g fonksiyonunun ilk üç katsayılar için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|\delta_1| \le \frac{1-\alpha}{2}, \ |\delta_2| \le \frac{(1-\alpha)(3-\alpha)}{12}$$

ve

$$|\delta_3| \le \frac{(1-\alpha)\left[1+(1-\alpha)(5-4\alpha)\right]}{12}.$$

<u>Sonuç 3.1.3.1:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu S^* altsınıfından ise (3.1.3.1) eşitliği ile tanımlanan g fonksiyonunun ilk üç katsayılar için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|\delta_1| \le 1, \ |\delta_2| \le \frac{1}{2} \text{ ve } |\delta_3| \le 3.$$

<u>Sonuç 3.1.3.2:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu C altsınıfından ise (3.1.3.1) eşitliği ile tanımlanan g fonksiyonunun ilk üç katsayılar için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|\delta_1| \le \frac{1}{2}, \ |\delta_2| \le \frac{1}{4} \text{ ve } |\delta_3| \le \frac{1}{2}.$$

3.2. Fekete - Szegö Problemi

3.2.1. $M_\beta(\alpha)$ Altsınıfı İçin Fekete - Szegö Problemi

Bilindiği üzere, (1.2.2.1) seri açılımlı analitik bir f fonksiyonunun katsayıları yardımıyla tanımlanan $E(a_2, a_3) = |a_3 - a_2^2|$ fonksiyoneline Fekete - Szegö fonksiyoneli denir. Genel olarak Fekete - Szegö fonksiyoneli, μ bir reel ya da karmaşık sayı olmak üzere, $E(a_2,a_3;\mu)=|a_3-\mu a_2^2|$ olarak da bilinmektedir. Bu fonksiyonelin bir üst sınırının bulunması problemi analitik fonksiyonlar teorisinde Fekete – Szegö problemi olarak bilinir.

Tez çalışmamızın bu bölümünde, $M_\beta(\alpha)$ altsınıfının Fekete - Szegö problemini inceliyoruz.

İlk önce $\mu\in\mathbb{C}$ durumunda $|a_3-\mu a_2^2|$ Fekete-Szegö problemini ele alalım.

Teorem 3.2.1.1: f (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $M_\beta(\alpha)$, $\beta\geq 0$, $\alpha\in[0,1)$ sınıfından bir fonksiyon ve $\mu\in\mathbb{C}$ olsun. Bu durumda f fonksiyonun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$|a_3-\mu a_2^2|\leq\begin{cases}\dfrac{4(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2}\left|\dfrac{(1+\beta)^2+2(1-\alpha)(1+3\beta)}{4(1-\alpha)(1+2\beta)}-\mu\right|, \\ \qquad\text{eğer } \left|\dfrac{(1+\beta)^2+2(1-\alpha)(1+3\beta)}{4(1-\alpha)(1+2\beta)}-\mu\right|\geq\dfrac{(1+\beta)^2}{4(1-\alpha)(1+2\beta)}, \\ \dfrac{1-\alpha}{1+2\beta}, \quad \text{eğer } \left|\dfrac{(1+\beta)^2+2(1-\alpha)(1+3\beta)}{4(1-\alpha)(1+2\beta)}-\mu\right|\leq\dfrac{(1+\beta)^2}{4(1-\alpha)(1+2\beta)}.\end{cases}$$

İspat: $f\in M_\beta(\alpha)$, $\beta\geq 0$, $\alpha\in[0,1)$ ve $\mu\in\mathbb{C}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, (3.1.1.6) ve (3.1.1.7) eşitliklerinden $a_3-\mu a_2^2$ ifadesi için

$$a_3-\mu a_2^2=\frac{1-\alpha}{2(1+2\beta)}p_2+\frac{(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2}\left[\frac{(1+3\beta)}{2(1+2\beta)}-\mu\right]p_1^2 \tag{3.2.1.1}$$

elde edilir.

Lemma 2.2.1 formüle (2.2.2)'den $|x|<1$ koşulunu sağlayan bazı x değerleri için

$$p_2=\frac{1}{2}\left[p_1^2+\left(4-p_1^2\right)x\right] \tag{3.2.1.2}$$

yazılır. Bu ifadeyi (3.2.1.1)'de yerine koyup üçgen eşitsizliğini kullanır ve $|x|=\xi$, $|p_1|=t\in[0,2]$ alınırsa $|a_3-\mu a_2^2|$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$|a_3-\mu a_2^2|\leq \frac{(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2}\left|\frac{(1+\beta)^2+2(1-\alpha)(1+3\beta)}{4(1-\alpha)(1+2\beta)}-\mu\right|t^2+\frac{(1-\alpha)(4-t^2)}{4(1+2\beta)}\xi\,,\ \xi\in[0,1].$$

Buradan açıkça

$$|a_3-\mu a_2^2|\leq(1-\alpha)\left\{\left[\frac{1-\alpha}{(1+\beta)^2}\left|\frac{(1+\beta)^2+2(1-\alpha)(1+3\beta)}{4(1-\alpha)(1+2\beta)}-\mu\right|-\frac{1}{4(1+2\beta)}\right]t^2+\frac{1}{1+2\beta}\right\} \tag{3.2.1.3}$$

yazılır.

Şimdi

$$h(t)=\left\{\left[\frac{1-\alpha}{(1+\beta)^2}\left|\frac{(1+\beta)^2+2(1-\alpha)(1+3\beta)}{4(1-\alpha)(1+2\beta)}-\mu\right|-\frac{1}{4(1+2\beta)}\right]t^2+\frac{1}{1+2\beta}\right\} \tag{3.2.1.4}$$

şekilde $h:[0,2]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayalım. $h(t)$ fonksiyonunun $[0,2]$ aralığında maksimumunu inceleyeceğiz.

$h(t)$ fonksiyonunun ifadesinden görüldüğü üzere eğer,

$$\left|\frac{(1+\beta)^2+2(1-\alpha)(1+3\beta)}{4(1-\alpha)(1+2\beta)}-\mu\right|\geq\frac{(1+\beta)^2}{4(1-\alpha)(1+2\beta)} \tag{3.2.1.5}$$

koşulu sağlanırsa $h'(t)\geq 0$ ve eğer,

$$\left|\frac{(1+\beta)^2+2(1-\alpha)(1+3\beta)}{4(1-\alpha)(1+2\beta)}-\mu\right|\leq\frac{(1+\beta)^2}{4(1-\alpha)(1+2\beta)} \tag{3.2.1.6}$$

koşulu sağlanırsa $h'(t) \leq 0$ olacaktır.

Dolayısıyla, (3.2.1.5) koşulu sağlanırsa $h(t)$ fonksiyonu monoton artan ve (3.2.1.6) koşulu sağlanırsa monoton azalandır. Buna göre, (3.2.1.3) ve (3.2.1.4)'den aşağıdaki eşitsizlikler yazılır:

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \leq \begin{cases} \dfrac{4(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2}\left|\dfrac{(1+\beta)^2 + 2(1-\alpha)(1+3\beta)}{4(1-\alpha)(1+2\beta)} - \mu\right|, \\ \qquad\qquad \text{eğer } \left|\dfrac{(1+\beta)^2 + 2(1-\alpha)(1+3\beta)}{4(1-\alpha)(1+2\beta)} - \mu\right| \geq \dfrac{(1+\beta)^2}{4(1-\alpha)(1+2\beta)}, \\ \dfrac{1-\alpha}{1+2\beta}, \quad \text{eğer } \left|\dfrac{(1+\beta)^2 + 2(1-\alpha)(1+3\beta)}{4(1-\alpha)(1+2\beta)} - \mu\right| \leq \dfrac{(1+\beta)^2}{4(1-\alpha)(1+2\beta)}. \end{cases}$$

Teoremin ispatı tamamdır.

Teorem 3.2.1.1'den özel durumda aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

<u>Teorem 3.2.1.2:</u> f (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan M_β, $\beta \geq 0$ sınıfından bir fonksiyon ve $\mu \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda f fonksiyonun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \leq \frac{4}{(1+\beta)^2}\begin{cases} \left|\dfrac{\beta^2 + 8\beta + 3}{4(1+2\beta)} - \mu\right|, \ \text{eğer } \left|\dfrac{\beta^2 + 8\beta + 3}{4(1+2\beta)} - \mu\right| \geq \dfrac{(1+\beta)^2}{4(1+2\beta)}, \\ \dfrac{(1+\beta)^2}{4(1+2\beta)}, \qquad \text{eğer } \left|\dfrac{\beta^2 + 8\beta + 3}{4(1+2\beta)} - \mu\right| \leq \dfrac{(1+\beta)^2}{4(1+2\beta)}. \end{cases}$$

<u>Teorem 3.2.1.3:</u> f (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $S^*(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$ sınıfından bir fonksiyon ve $\mu \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda f fonksiyonun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right| \le 4(1-\alpha)^2 \begin{cases} \left|\dfrac{3-2\alpha}{4(1-\alpha)}-\mu\right|, \text{eğer } \left|\dfrac{3-2\alpha}{4(1-\alpha)}-\mu\right| \ge \dfrac{1}{4(1-\alpha)}, \\ \dfrac{1}{4(1-\alpha)}, \qquad \text{eğer } \left|\dfrac{3-2\alpha}{4(1-\alpha)}-\mu\right| \le \dfrac{1}{4(1-\alpha)}. \end{cases}$$

<u>Teorem 3.2.1.4:</u> f (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $C(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$ sınıfından bir fonksiyon ve $\mu \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda f fonksiyonun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right| \le (1-\alpha)^2 \begin{cases} \left|\dfrac{3-2\alpha}{3(1-\alpha)}-\mu\right|, \text{ eğer } \left|\dfrac{3-2\alpha}{3(1-\alpha)}-\mu\right| \ge \dfrac{1}{3(1-\alpha)}, \\ \dfrac{1}{3(1-\alpha)}, \qquad \text{eğer } \left|\dfrac{3-2\alpha}{3(1-\alpha)}-\mu\right| \le \dfrac{1}{3(1-\alpha)}. \end{cases}$$

<u>Sonuç 3.2.1.1:</u> f (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan S^* sınıfından bir fonksiyon ve $\mu \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda f fonksiyonun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right| \le \begin{cases} |3-4\mu|, \text{ eğer } |3-4\mu| \ge 1, \\ 1, \qquad \text{eğer } |3-4\mu| \le 1. \end{cases}$$

<u>Sonuç 3.2.1.2:</u> f (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan C sınıfından bir fonksiyon ve $\mu \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda f fonksiyonun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right| \le \begin{cases} |1-\mu|, \text{ eğer } |1-\mu| \ge \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{3}, \qquad \text{eğer } |1-\mu| \le \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Aşağıdaki teoremde $\left|a_3-\mu a_2^2\right|$ Fekete-Szegö fonksiyoneli μ parametresinin reel değerleri için inceleniyor.

Teorem 3.2.1.5: f (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $M_\beta(\alpha)$, $\beta \geq 0$, $\alpha \in [0,1)$ sınıfından bir fonksiyon ve $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda f fonksiyonun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right| \leq \begin{cases} \dfrac{4(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2}\left|\dfrac{(1+\beta)^2+2(1-\alpha)(1+3\beta)}{4(1-\alpha)(1+2\beta)}-\mu\right|, \\ \text{eğer } \mu \leq \dfrac{(1-\alpha)(1+3\beta)}{2(1-\alpha)(1+2\beta)} \text{ ya da } \mu \geq \dfrac{(1+\beta)^2+(1-\alpha)(1+3\beta)}{2(1-\alpha)(1+2\beta)}, \\ \dfrac{1-\alpha}{1+2\beta}, \text{ eğer } \dfrac{(1-\alpha)(1+3\beta)}{2(1-\alpha)(1+2\beta)} \leq \mu \leq \dfrac{(1+\beta)^2+(1-\alpha)(1+3\beta)}{2(1-\alpha)(1+2\beta)}. \end{cases}$$

İspat: Teorem 3.2.1.5'in ispatı Teorem 3.2.1.1'in ispatına çok benzediği için fazla detaylara girmeden farklılıkları vererek ispatı tamamlayacağız.

Teorem 3.2.1.1'de tanımlanan $h(t)$ fonksiyonunun ifadesinden görüldüğü üzere $\mu \in \mathbb{R}$ durumunda (3.2.1.5) koşulu

$$\mu \leq \frac{(1-\alpha)(1+3\beta)}{2(1-\alpha)(1+2\beta)}$$

ya da

$$\mu \geq \frac{(1+\beta)^2+(1-\alpha)(1+3\beta)}{2(1-\alpha)(1+2\beta)} \qquad (3.2.1.7)$$

koşuluna ve (3.2.1.6) koşulu da

$$\frac{(1-\alpha)(1+3\beta)}{2(1-\alpha)(1+2\beta)} \leq \mu \leq \frac{(1+\beta)^2+(1-\alpha)(1+3\beta)}{2(1-\alpha)(1+2\beta)} \qquad (3.2.1.8)$$

koşuluna denk olacaktır.

Böylece, μ parametresinin reel değerlerinde (3.2.1.7) koşulu sağlanırsa $h(t)$ fonksiyonu monoton artan ve (3.2.1.8) koşulu sağlanırsa monoton azalandır. Buna göre, (3.2.1.3) ve (3.2.1.4)'den aşağıdaki eşitsizlikler yazılır:

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right| \le \begin{cases} \dfrac{4(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2}\left|\dfrac{(1+\beta)^2+2(1-\alpha)(1+3\beta)}{4(1-\alpha)(1+2\beta)}-\mu\right|, \\ \text{eğer } \mu \le \dfrac{1+3\beta}{2(1+2\beta)} \text{ ya da } \mu \ge \dfrac{(1+\beta)^2+(1-\alpha)(1+3\beta)}{2(1-\alpha)(1+2\beta)}, \\ \dfrac{1-\alpha}{1+2\beta}, \quad \text{eğer } \dfrac{1+3\beta}{2(1+2\beta)} \le \mu \le \dfrac{(1+\beta)^2+(1-\alpha)(1+3\beta)}{2(1-\alpha)(1+2\beta)}. \end{cases}$$

Bununla teoremin ispatı tamamdır.

Aşağıdaki üç teorem Teorem 3.2.1.5'den özel durum olarak kolayca elde edilir.

<u>Teorem 3.2.1.6:</u> f (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan M_β, $\beta \ge 0$ sınıfından bir fonksiyon ve $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda f fonksiyonun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right| \le \frac{4}{(1+\beta)^2}\begin{cases} \left|\dfrac{\beta^2+8\beta+3}{4(1+2\beta)}-\mu\right|, & \text{eğer } \mu \le \dfrac{1+3\beta}{2(1+2\beta)} \text{ ya da } \mu \ge \dfrac{\beta^2+5\beta+2}{2(1+2\beta)}, \\ \dfrac{(1+\beta)^2}{4(1+2\beta)}, & \text{eğer } \quad \dfrac{1+3\beta}{2(1+2\beta)} \le \mu \le \dfrac{\beta^2+5\beta+2}{2(1+2\beta)}. \end{cases}$$

<u>Teorem 3.2.1.7:</u> f (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $S^*(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$ sınıfından bir fonksiyon ve $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda f fonksiyonun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right| \leq 4(1-\alpha)^2 \begin{cases} \left|\dfrac{3-2\alpha}{4(1-\alpha)}-\mu\right|, & \text{eğer } \mu \leq \dfrac{1}{2} \text{ ya da } \mu \geq \dfrac{2-\alpha}{2(1-\alpha)}, \\ \dfrac{1}{4(1-\alpha)}, & \text{eğer } \dfrac{1}{2} \leq \mu \leq \dfrac{2-\alpha}{2(1-\alpha)}. \end{cases}$$

Teorem 3.2.1.8: f (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $C(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$ sınıfından bir fonksiyon ve $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda f fonksiyonun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right| \leq (1-\alpha)^2 \begin{cases} \left|\dfrac{3-2\alpha}{3(1-\alpha)}-\mu\right|, & \text{eğer } \mu \leq \dfrac{2}{3} \text{ ya da } \mu \geq \dfrac{2(2-\alpha)}{3(1-\alpha)}, \\ \dfrac{1}{3(1-\alpha)}, & \text{eğer } \dfrac{2}{3} \leq \mu \leq \dfrac{2(2-\alpha)}{3(1-\alpha)}. \end{cases}$$

Sonuç 3.2.1.3: f (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan S^* sınıfından bir fonksiyon ve $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda f fonksiyonun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right| \leq \begin{cases} |3-4\mu|, & \text{eğer } \mu \leq \dfrac{1}{2} \text{ ya da } \mu \geq 1, \\ 1, & \text{eğer } \dfrac{1}{2} \leq \mu \leq 1. \end{cases}$$

Sonuç 3.2.1.4: f (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan C sınıfından bir fonksiyon ve $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda f fonksiyonun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right| \leq \begin{cases} |1-\mu|, & \text{eğer } \mu \leq \dfrac{2}{3} \text{ ya da } \mu \geq \dfrac{4}{3}, \\ \dfrac{1}{3}, & \text{eğer } \dfrac{2}{3} \leq \mu \leq \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Teorem 3.2.1.5'de $\mu = 0$ alınırsa $|a_3|$ için aşağıdaki sonuç elde edilir.

<u>Sonuç 3.2.1.5:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $M_\beta(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$, $\beta \geq 0$ sınıfından ise bu fonksiyonun a_3 katsayısının modülü için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur

$$|a_3| \leq \frac{1-\alpha}{1+2\beta}\left[1+\frac{2(1+3\beta)(1-\alpha)}{(1+\beta)^2}\right].$$

<u>Not 3.2.1.1:</u> Sonuç 3.2.1.5'de $|a_3|$ için bulunan sonuç Teorem 3.1.1.1'de elde edilen sonucun aynısıdır.

Öte yandan, Teorem 3.2.1.5'den özel durumda $|a_3 - a_2^2|$ Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

<u>Teorem 3.2.1.9:</u> f (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $M_\beta(\alpha)$, $\beta \geq 0$, $\alpha \in [0,1)$ sınıfından bir fonksiyon olsun. O halde $|a_3 - a_2^2|$ Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme geçerlidir

$$|a_3 - a_2^2| \leq \frac{1-\alpha}{1+2\beta}$$

<u>Teorem 3.2.1.10:</u> f (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan M_β, $\beta \geq 0$ sınıfından bir fonksiyon olsun. O halde $|a_3 - a_2^2|$ Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme geçerlidir

$$|a_3 - a_2^2| \leq \frac{1}{1+2\beta}.$$

Teorem 3.2.1.11: f (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $S^*(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$ sınıfından bir fonksiyon olsun. O halde $|a_3 - a_2^2|$ Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme geçerlidir

$$|a_3 - a_2^2| \leq 1-\alpha .$$

Teorem 3.2.1.12: f (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $C(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$ sınıfından bir fonksiyon olsun. O halde $|a_3 - a_2^2|$ Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme geçerlidir

$$|a_3 - a_2^2| \leq \frac{1-\alpha}{3} .$$

Sonuç 3.2.1.6: f (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan S^* sınıfından bir fonksiyon olsun. O halde $|a_3 - a_2^2|$ Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme geçerlidir

$$|a_3 - a_2^2| \leq 1.$$

Sonuç 3.2.1.7: f (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan C sınıfından bir fonksiyon olsun. O halde $|a_3 - a_2^2|$ Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme geçerlidir

$$|a_3 - a_2^2| \leq \frac{1}{3} .$$

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Çalışılan bu yüksek lisans tezinde analitik ve ünivalent fonksiyonların $M_\beta(\alpha)$, $\alpha,\beta \geq 0$ alt sınıfı tanıtıldı. Bu sınıftan olan $f \in M_\beta(\alpha)$ fonksiyonu, f^{-1} ters fonksiyonu ve $g(z)=\log\left(f(z)/z\right)$ fonksiyonu için katsayı problemleri incelendi. Parametrelerin özel değerleri için sonuçlar elde edildi. Ayrıca, tezde $M_\beta(\alpha)$, $\alpha,\beta \geq 0$ sınıfının Fekete-Szegö problemi incelendi ve μ bir reel ya da karmaşık sayı olmak üzere, $\left|a_3-\mu a_2^2\right|$ FeketeSzegö fonksiyoneli için bir üst sınır değerlendirmesi verildi.

Tezdeki yöntem uygulanarak aşağıdaki konular incelenebilir.

1. Tezde ele alınan sınıf için $a_2a_4-a_3^2$ ikinci Hankel determinantının modülünün bir üst sınır değerlendirmesi verilebilir.

2. f^{-1} fonksiyonu için $A_2A_4-A_3^2$ ikinci Hankel determinantının modülünün bir üst sınır değerlendirmesi verilebilir.

3. Ayrıca, $f \in M_\beta(\alpha)$ fonksiyonunun, f^{-1} fonksiyonu için $\left|A_3-\mu A_2^2\right|$ Fekete-Szegö fonksiyoneli incelenebilir.

4. $f \in M_\beta(\alpha)$ olmak üzere, $g(z)=\log\left(f(z)/z\right)$ fonksiyonu için $\left|\delta_1\delta_3-\mu\delta_2^2\right|$ Fekete-Szegö benzeri fonksiyoneller incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Thomas, D. K. (2018). On the coefficients of gamma-starlike functions. Korean Mat. Soc. 55(1), 175-184.

[2] Ali, R. M. (2003). Coefficients of the inverse of strongly starlike functions. Bull. Malays. Math. Soc. 26(2), no. 1, 63-71.

[3] Mustafa, N., Öztürk, T. (2018). On the coefficient bounds of certain subclasses of analytic functions of complex order. Journal of Scientific and Engineering Research, 5(6), 133-136.

[4] Mustafa, N., Gündüz, M. C. (2018). Coefficient bound estimates for alpha-convex functions of order beta. Journal of Scientific and Engineering Research, 5(6), 149-156.

[5] Mustafa, N., Ateş, M. (2018). On the Coefficient Bounds of Gamma and Beta Starlike Functions. Journal of Scientific and Engineering Research, 5(6), 333-341.

[6] Srivastava H. M., Xu Q. H. and Wu G. P. (2010). Coefficient estimates for certain subclasses of spiral-like functions of complex opred. Appl. Math. Lett. 23(7), 763-768.

[7] Xu Q. H., Cai Q. M. and Srivastava H. M. (2013). Sharp coefficient estimates for certain subclasses of starlike functions of complex order. Appl. Math. Comput. 225,43-49.

[8] Noonan J. W., Thomas D. K. (1976). On the second Hankel determinant of areally mean $p-$valent functions. T. Amer. Math. Soc. 223, 337-346.

[9] Koegh F. R., Merkes E. P. (1969). A coefficient inequality for certain classes of analytic functions. P Amer. Math. Soc. 1969, 20, 8-12.

[10] Caglar, M. & Aslan, S. (2016). Fekete-Szegö inequalities for subclasses of bi-univalent functions satisfying subordinate condition. *AIP Conference Proceedings* 2016; 1726, 020078, doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.4945904.

[11] Mustafa, N. (2017). Fekete-Szegö problem for certain subclass of analytic and bi-univalent functions. *Journal of Scientific and Engineering,* 4(8): 390-400.

[12] Mustafa, N., Akbulut, E. (2018). Application of the second Chebyshev polinomials to coefficient estimates of analytic functions. *Journal of Scientific and Engineering Research,* 5(6): 143-148.

[13] Mustafa, N., Akbulut, E. (2019). Application of the second kind Chebyshev

polinomial to the Fekete-Szegö problem of certain class analytic functions. *Journal of Scientific and Engineering Research*, 6(2), 154-163.

[14] Orhan, H., Deniz, E. & Raducanu, D. (2010). The Fekete-Szegö problem for subclasses of analytic functions defined by a differential operator related to conic domains. *Comput Math Appl* 59: 283-295.

[15] Zaprawa, P. (2014). On the Fekete-Szegö problem for classes of bi-univalent functions. *Bull Belg Math Soc Simon Stevin* 21: 169-178.

[16] Hummel J. (1957). The coefficient regions of starlike functions. Pacific J Math 1957; 7: 1381-1389.

[17] Janteng A, Halim S.A. (2007). Darus M. Hankel determinant for starlike and convex functions. Internat J. Math. Anal. 1, 619-625.

[18] Ponnusamy, S., Silverman, H. (2006). Complex variables with Applications. Birkhâuser. Boston.

[19] Duren, P. L. (1983). Univalent Functions. Springer-Verlag, New York.

[20] Goodman, A.W. (1983). Univalent Function-1,2. Mariner Publishing Company Tapma, Florida 311 p.

[21] Lahenkani, J. (1985). Coefficients of power of some subclasses of univalent functions and convolutions of some classes of polynomials and analytic functions. Ph. D. Thesis. Graduate School of Natural and Applied Sciences, London.

[22] Pommerenke, C. H. (1975). Univalent Functions. Vandenhoeck and Ruperch, Gottingen.

[23] Libera, R. J. and Zlotkiewicz, E. J. (1982). Early coefficients of the inverse of a regular convex function. Proc. Amer. Math. Soc. 85(2), 225-230.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Muharrem Can GÜNDÜZ

Doğum Yeri ve Tarihi : Kars /24.09.1986

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (e-posta) : m.cangunduz@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Kars Anadolu Lisesi

Lisans : Cumhuriyet Üniversitesi

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi/ Fen Bilimleri Enstitüsü/ Matematik Ana Bilim Dalı/ Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : MEB 2011-2018 Öğretmen, 7 Aralık 2018 -… Arpaçay İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü, Şube Müdürü

Yayınları (SCI ve diğer) :

1. Mustafa, N., Gündüz, M. C. (2018). Coefficient bound estimates for alpha-convex functions of order beta. Journal of Scientific and Engineering Research, 5(6), 149-156.
2. Mustafa, N., Gündüz, M. C. (2019). The Fekete-Szegö Problem Of The Inverse Of Certaın Analytıc Functıons. Mas Internatıonal Conference On Mathematıcs-Engıneerıng Natural&Medıcal Scıences-V, 644-648

3. Mustafa, N., Gündüz, M. C. (2019). Bound Estımates For The Coeffıcıents And Fekete-Szegö Functıonal Of Certaın Class Of Analytıc Funcıons Defıned By Derıvatıve–q. Mas Internatıonal Conference On Mathematıcs-Engıneerıng Natural&Medıcal Scıences-V, 595-602

4. Mustafa, N., Gündüz, M. C. (2019). The Fekete-Szegö Problem for the Certain Class of Analytic and Univalent Functions. Journal of Scientific and Engineering Research, 6(5), 232- 239.

5. Mustafa, N., Gündüz, M. C. (2019). The Fekete-Szegö Problem for the Logarithmic Function of the Starlike and Conex Functions. Academic Journal of Applied Mathematical Sciences, 5(6), 69-75.

6. Mustafa, N., Gündüz, M. C. (2019). Upper Bound Estimate for the Second Hankel Determinant for Certain Subclass of Univalent Functions. Journal of Scientific and Engineering Research, 6(6), 99-105.

7. Mustafa, N., Gündüz, M. C. (2019). The Fekete-Szegö Problem for the inverse of starlike and convex functions. Asian – Europian Journal of Mathematics, Under Review (28.05.2019).