T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LORENTZ VE LORENTZ-MARCINKIEWICZ UZAYLARINDA RIESZ AÇI HESAPLAMALARI VE UZAYLARIN ASİMTOTİK GENİŞLEMEYEN FONKSİYONLAR İÇİN SABİT NOKTA TEORİSİ ODAKLI İNCELEMESİ

Engin BOZYEL
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

HAZİRAN-2019
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LORENTZ VE LORENTZ-MARCINKIEWICZ UZAYLARINDA RIESZ AÇI HESAPLAMALARI VE UZAYLARIN ASİMTOTİK GENİŞLEMEYEN FONKSİYONLAR İÇİN SABİT NOKTA TEORİSİ ODAKLI İNCELEMESİ

Engin BOZYEL
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

HAZİRAN-2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Engin Bozyel'in Dr. Öğretim Üyesi Veysel Nezir danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Lorentz ve Lorentz-Marcinkiewicz uzaylarında Riesz açı hesaplamaları ve uzayların asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisi odaklı incelemesi" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ..birliği..... ile kabul edilmiştir.

21/ 06/ 2019

	Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA	
Üye	: Prof. Dr. İsa YILDIRIM	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ../ .. / 20.. gün ve ... .../....... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Engin BOZYEL

21.06.2019

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

LORENTZ VE LORENTZ-MARCINKIEWICZ UZAYLARINDA RIESZ AÇI HESAPLAMALARI VE UZAYLARIN ASİMTOTİK GENİŞLEMEYEN FONKSİYONLAR İÇİN SABİT NOKTA TEORİSİ ODAKLI İNCELEMESİ

Engin BOZYEL

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

Bu tez çalışması sabit nokta teorisi odaklı üç farklı konudan oluşmaktadır. Birinci araştırma konusu olarak Lorentz fonksiyon uzaylarında Riesz açı hesabı yapılmaktadır. Dolayısıyla sayma ölçüsüne geçildiğinde tez danışmanı Nezir'in doktora tezinde yer alan Lorentz-Marcinkiewicz Banach uzayları için Riesz açı hesabı doğrulanmıştır. İyi bilinmektedir ki Banach uzayın zayıf sabit nokta teorisine sahip olup olmadığını doğrulamak için Riesz açı hesabı kullanılan metodlardan birisidir. Tez çalışmasının ilk araştırma bölümünde bu amaçla Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı $L_1[0,1]$'in bir analoğu olan Lorentz fonksiyon uzayı $L_{w,1}[0,1]$'ın önduali $L_{w,1}{}^0[0,1]$ Banach uzayının içinde çok geniş sonsuz boyutlu bir altuzayının hangi skaler w için zayıf sabit nokta teorisine sahip olacağını görmek için Riesz açı hesabı yapılmaktadır. Çalışmanın ikinci araştırma konusunda ise $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı $L_1[0,1]$ içinde afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan çok geniş bir sınıfın varlığı sorgulanmaktadır. Unutulmamalıdır ki Goebel ve Kuczumow tarafından gösterilmiştir ki mutlak toplanabilir skaler dizilerin

Banach uzayı ℓ^1'de genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıf vardır. 2004'de ise Kaczor ve Prus tarafından görülmüşdür ki ℓ^1'de afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıf vardır. Dolayısıyla tez çalışmaında Kaczor ve Prus çalışmasının $L_1[0,1]$-analoğu araştırılmaktadır. Tez çalışmasının üçüncü araştırma konusu olarak ise Lorentz dizi uzayları $\ell_{\mathrm{w},1}$ içinde kapalı, sınırlı, konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıf üzerinde tanımlı sağa kaydırma fonksiyonu için sabit noktası olmayan bir düzgün Lipschitz fonksiyonu olması için üst sınır değerlendirmesi yapılmaktadır. İyi bilinmektedir ki Dowling, Lennard ve Turett göstermiştir ki eğer bir Banach uzayı ℓ^1'in bir izomorfik kopyasını içeriyorsa düzgün Lipscitz fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olamaz. Dolayısıyla tez çalışmasında Lorentz-Marcinkiewicz dizi uzayları $\ell_{\mathrm{w},1}$ içinde kapalı, sınırlı, konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıfın sabit nokta teorisini sağa kaydırma fonksiyonu ile bozması için bu fonksiyonun hangi koşulda düzgün Lipschitz olacağı araştırılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: genişlemeyen fonksiyon, yansımayan Banach uzayı, sabit nokta teorisi, kapalı sınırlı konveks küme, yeniden normlama, Lorentz uzayları

2019, 34 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

RIESZ ANGLE COMPUTATIONS ON LORENTZ AND LORENTZ-MARCINKIEWICZ SPACES AND FIXED POINT THEORY ORIENTED INVESTIGATION FOR ASYMPTOTICALLY NONEXPANSIVE MAPPINGS

Engin BOZYEL

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof Dr. Veysel NEZİR

This thesis study involves three research subjects oriented fixed point theory. As the first research subject, Riesz angle computations in Lorentz functions space are done. Thus, by passing to counting measure, Riesz angle computations for Lorentz-Marcinkiewicz spaces which were investigated in the Ph.D. thesis of Nezir who is the supervisor of this thesis study are verified. It is well-known that computing Riesz angle is one of the tools to confirm if a Banach space has weak fixed point property. Therefore, for this goal, in the first research part of the thesis study, Riesz angle for a large infinite dimensional subspace of $L_{w,1}{}^{0}[0,1]$, predual of Lebesgue integrable functions space $L_1[0,1]$ analogue space $L_{w,1}[0,1]$, is computed to check for which w, the subspace can have the weak fixed point property. In the second research subject of the thesis study, it is questioned that whether or not there exists a very large class of closed, bounded, convex subsets in Lebesgue integrable functions defined on [0,1], $L_1[0,1]$, with fixed point property for affine asymptotically non-expansive mappings. It should not be forgotten that it is showb by Goebel and Kuczumow that there exists a very large class of closed, bounded, convex subsets in Banach space of absolutely summable scalar sequences, ℓ^1 with fixed point property for nonexpansive mappings. In 2004, it is investigated by Kaczor and Prus if similar result could be done for asymptotically nonexpansive mappings and it is seen that there exists a large class of closed, bounded, convex subsets in ℓ^1 with fixed point property for affine asymptotically nonexpansive mappings. Hence, in this thesis study $L_1[0,1]$-analogue of Kaczor and Prus' work is studied. As the third research subject of the thesis study, an upper bound estimate for the right shift mapping to be uniformly Lipschitz failing the fixed point property on a class of closed, bounded and convex subsets in Lorentz sequence space $\ell_{\mathrm{w},1}$ is found. It is well-known by a work of Dowling, Lennard and Turett that if a Banach space contains an isomorphic copy of ℓ^1, then it fails the fixed point property for uniform Lipschitz mappings. Thus, in this thesis work, for what conditions the right shift mapping is uniformly Lipschitz so that when it is defined on a class of closed, bounded and convex subsets in Lorentz-Marcinkiewicz space $\ell_{\mathrm{w},1}$ which fails the fixed point property.

Key Words: nonexpansive mapping, non-reflexive Banach space, fixed point property, closed bounded convex subset, renorming, Lorentz spaces

2019, 34 pages

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince her türlü maddi ve manevi destekleri ile göstermiş oldukları için annem Cemile Bozyel, babam Abdulbaki Bozyel, Hatice Tabanlı'ya ve değerli danışmanım Dr. Öğretim Üyesi Veysel Nezir hocama teşekkür ederim.

Engin BOZYEL

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET .... **iv**

ABSTRACT .... **vi**

ÖNSÖZ .... **viii**

İÇİNDEKİLER .... **ix**

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ .... **x**

1. GENEL BİLGİLER **1**

1.1 Giriş 1

1.2 Kuramsal Temeller 4

2. MATERYAL VE YÖNTEM **8**

3. ARAŞTIRMA BULGULARI **12**

3.1 Lorentz fonksiyon uzayı $L_{w,1}[0,1]$'in büyük bir alt uzayında Riesz açı hesaplaması ve zayıf sabit nokta teorisi 13

3.2 Lebesgue integral uzayı $L_1[0,1]$ içinde afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan çok geniş bir sınıf 20

3.3 $\ell_{w,1}$ Lorentz dizi uzayı, sağa kaydırma fonksiyonu ve düzgün Lipschitzlik 27

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA **31**

KAYNAKLAR **32**

ÖZGEÇMİŞ **35**

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\vee$	:	iki terim arası maksimum
Ai	:	Asimtotik izometrik
ℓ^1	:	Mutlak toplanabilir dizilerin Banach uzayı
c_0	:	Sıfıra yakınsak dizilerin Banach uzayı
$L_1[0,1]$	:	[0,1] üzerinde tanımlı Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların Banach uzayı
$L_{w,1}[0,1]$	:	$L_1[0,1]$'in bir analoğu olan Lorentz fonksiyon uzayı
$\ell_{w,1}$	:	Lorentz dizi uzayı
$co(E)$	:	E 'nin konveks kabuğu
$\overline{co}(E)$	:	E 'nin kapalı konveks kabuğu
$\overline{E}^{w*}$	:	E kümesinin zayıf* kapanışı
e_n	:	n. terimi 1, diğerleri 0 olan ℓ^1 ve c_0'ın kanonik bazı

1. GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Bir Banach uzayının genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olması demek uzaydan alınan her kapalı, sınırlı ve konveks altküme üzerinde tanımlı her genişlemeyen fonksiyonun bir sabit noktası olması demektir. Bu koşul düzgün Lipschitz fonksiyonlar için sağlanıyorsa o zaman o Banach uzayına düzgün Lipschitz fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir denir. Fakat uzayda en az bir kapalı, sınırlı ve konveks bir küme bulunabiliyor; ve bu küme üzerinde sabit noktası olmayan en az bir düzgün Lipschitz fonksiyon bulunabiliyor ise o uzaya düzgün Lipschitz fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olamaz denir. Bir Banach uzayının genişlemeyen fonksiyonlar için zayıf sabit nokta teorisine sahip olması demek ise uzaydan alınan her zayıf kompakt ve konveks altküme üzerinde tanımlı her genişlemeyen fonksiyonun bir sabit noktası olması demektir. Not edilmelidir ki tez çalışmasında bu bahsi geçen tüm fonksiyonların kendi içine görüntülere sahip oldukları kabul edilmektedir ve yukarıdaki tanımlar bu durum dahilinde verilmektedir.

Uzun bir süre boyunca tüm Banach uzaylarının zayıf sabit nokta teorisine sahip oldukları sanılmaktaydı ve dolayısıyla Banach uzaylarının zayıf sabit nokta teorisine sahip olup olmadığını incelemek için araştırmalar yapılmıştır. Alspach [1] tarafından zayıf sabit nokta teorisine sahip olmayan ilk Banach uzayını göstermiştir fakat yinede görülmüştür ki çoğu klasik Banach uzayı zayıf sabit nokta teorisine sahiptir. Alspach çalışmasını $[0,1]$ üzerinde tanımlı Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların Banach uzayında zayıf kompakt ve konveks olan bir küme ve bu küme üzerinde sabit noktası olmayan bir genişlemeyen fonksiyon bularak yapmıştır.

Zaman içinde ise hangi Banach uzaylarının zayıf sabit nokta teorisine sahip olduğunun görülmesi için araştırmacılar tarafından bazı araçlar kullanılmıştır. Örneğin, Maurey [16] tarafından ultra kuvvet yöntemleri kullanılarak sıfıra yakınsak dizilerin Banach uzayı c_0'ın zayıf sabit nokta teorisine sahip olduğunu gösterilmiştir. Daha sonra Lin [11] çalışmasında koşulsuz baz katsayısı kullanılarak, koşulsuz baza sahip Banach uzaylarının zayıf sabit nokta teorisine sahip olması karaktrerize edilmiştir. Zayıf ortogonal bir Banach latis olan Banach uzayın zayıf sabit nokta teorisine sahip olup olmadığını doğrulamak için Riesz açı hesabı kullanılan metodlardan birisidir. Borwein ve Sims [2] çalışması ile bu teknik sayesinde zayıf ortogonal ve Banach latis olan Banach uzaylarının Riesz açılarının 2'den küçük olması durumunda zayıf sabit nokta teorisine sahip oldukları gösterilmiştir. $p \geq 1$ için L_p Lebesgue uzaylarının Riesz açısının $2^{\frac{1}{p}}$, mutlak toplanabilir dizilerin Banach uzayı ℓ^1'in ve ℓ^1 ile bir çok ortak özelliği paylaşan c_0'ın Riesz açılarının ise 1 olduğu bu teknikle gösterilmiştir. Ayrıca Lennard'ın danışmanlığında yazılmış olan tez danışmanının doktora tezinde [17] Lorentz-Marcinkiewicz uzaylarının Riesz açılarıları hesaplanarak zayıf sabit nokta teorisine sahip oldukları gösterilmiştir.

ℓ^1 ve c_0 genişlemeyen fonksiyonlar için zayıf sabit nokta teorisini sağlarken sabit nokta teorisini bozmaktadır. Hatta Dowling, Lennard ve Turett'in çalışmaları [4,5] ile sırasıyla gösterilmiştir ki c_0'ın içinden alınan sonsuz boyutlu her kapalı alt uzay veya zayıf kompakt olmayan alt kümeler genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olamaz. Yani c_0'da sabit nokta teorisine sahip olmayan çok geniş sınıflar mevcuttur. Lennard ve Nezir [10] çalışmasında da farklı sınıfların bu uzayda genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olmadığı gösterilmiştir. Bunun aksine, Goebel ve Kuczumow [8] çalışmasıyla gösterilmiştir ki mutlak toplanabilir skaler dizilerin Banach uzayı ℓ^1'de genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıf vardır. 2004'de ise Kaczor ve Prus [9] çalışması ile benzer sonucun asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için elde edilip edilemeyeceğini incelemiştir, ve görülmüşdür ki ℓ^1'de afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıf vardır. Goebel ve Kuczumow'un sonucundan esinlenerek, Lin ℓ^1'in genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayacak şekilde yeniden normlanabileceğini ispatlamıştır. Lin bu çalışması yansımayan Banach uzaylarının bazılarının genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayacak şekilde yeniden normlanabileceğine dair ilk örneği olmuştur. Araştırmacıların daha fazla örneklerin olup olamayacağı konusunda ilgisi bulunmaktadır. Maria ve Hernandes Lineares [13] çalışması ile ise [0,1] aralığı üzerinde

Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı $L_1[0,1]$'in afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisinin sağlanacak şekilde yeniden normlanabileceğini göstermiştir. Fakat Goebel ve Kuczumow ile Kaczor ve Prus analojilerinin bu uzay üzerine bir incelemesi yapılmamıştır.

Bu tez çalışmasında öncelikle Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı $L_1[0,1]$'in bir analoğu olan Lorentz fonksiyon uzayı $L_{w,1}[0,1]$'ın önduali $L_{w,1}{}^0[0,1]$ Banach uzayının içinde çok geniş sonsuz boyutlu bir altuzayının hangi skaler w için zayıf sabit nokta teorisine sahip olacağının görülmesi için Riesz açı hesabı yapılmaktadır. Bu sonuç ile tez danışmanının doktora tezinde [17] yer alan Lorentz-Marcinkiewicz dizi uzayları için elde edilen Riesz açı hesaplamaları sayma ölçüsüne geçilerek kolayca doğrulanabilir.

Çalışmanın ikinci araştırma konusu olarak ise Kaczor ve Prus [8] çalışmasının $L_1[0,1]$-analoğu ele alınmaktadır ve gösterilmektedir ki $L_1[0,1]$ içinde afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan çok geniş bir sınıf vardır.

Tez çalışmasının son araştırma konusu olarak ele alınan $\ell_{w,1}$'in alt kümelerinin geniş bir sınıfı üzerinde tanımlı düzgün Lipschitz fonksiyonları hakkında incelememizdir öyle ki $\ell_{w,1}$ Lorentz dizi uzayı adını alan ve Lorentz fonksiyon uzayı $L_{w,1}[0,1]$ uzayında sayma ölçüsü kullanılması ile tanımlanır. Biliyoruz ki Dowling, Lennard ve Turett göstermiştir ki eğer bir Banach uzayı ℓ^1'in bir izomorfik kopyasını içeriyorsa düzgün Lipscitz fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olamaz. Çalışmamızda $\ell_{w,1}$ içinde kapalı, sınırlı, konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıf üzerinde tanımlı sağa kaydırma fonksiyonu için sabit noktası olmayan bir düzgün Lipschitz fonksiyonu olması için üst sınır değerlendirmesi yapmaktayız.

1.2 Kuramsal Temeller

Tez çalışmasında yararlanılan ön bilgiler tanım, teorem ve lemmalar halinde bu bölümde verilecektir.

Tanım 1.2 E kümesi bir $(X,\|.\|)$ Banach uzayında boştan farklı kapalı, sınırlı, konveks alt küme olsun. $T:E\to E$ bir fonksiyon olsun.

1. Eğer her $\lambda\in[0,1]$ ve her $x,y\in E$ için $T((1-\lambda)x+\lambda y)=(1-\lambda)T(x)+\lambda T(y)$ ise T 'ye afin fonksiyon denir [7].

2. Eğer her $x,y\in E$ için $\| T(x)-T(y)\|\leq\| x-y\|$ ise T ' ye genişlemeyen fonksiyon denir [7].

Ayrıca, eğer her genişlemeyen $T:E\to E$ için en az bir $z\in E$ var öyle ki $T(z)=z$ ise E kümesine genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir denir.

3. Eğer en az bir $k\in[1,\infty)$ bulunabiliyor öyle ki her $n\in\mathbb{N}$ ve her $x,y\in E$ için $\| T^n(x)-T^n(y)\|\leq k\| x-y\|$ ise T ' ye düzgün Lipschitz ve k'ya ise düzgün Lipschitz'lik katsayısı denir [7].

Ayrıca, eğer her düzgün Lipschitz $T:E\to E$ için en az bir $z\in E$ var öyle ki $T(z)=z$ ise E kümesine düzgün Lipschitz fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir denir [7].

4. Eğer 1'e azalarak yaklaşan en az bir $(k_n)_{n\in N}$ dizisi bulunabiliyor ise öyle ki her $n\in\mathbb{N}$ ve her $x,y\in E$ için $\| T^n(x)-T^n(y)\|\leq k_n\| x-y\|$ ise T ' ye asimtotik genişlemeyen fonksiyon denir [7].

Ayrıca, eğer her asimtotik genişlemeyen $T:E\to E$ için enaz bir $z\in E$ var öyle ki $T(z)=z$ ise E kümesine asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir denir [7].

$(X,\|.\|)$ bir Banach uzayı olsun ve $E \subseteq X$ olsun. E ' nin kapalı konveks kabuğu $\overline{\text{co}}(E)$ ile sembolize edilir. Bilindiği üzere $(c_0,\|.\|_\infty)$ uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$c_0 = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}: \text{her } x_n \in \mathbb{R} \text{ ve } \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\}.$$

Ayrıca, her $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ için $\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(\ell^1,\|\cdot\|_1)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\ell^1 = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}: \text{her } x_n \in \mathbb{R} \text{ ve } \|x\|_1: \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\right\}.$$

[10] çalışmasında yer alan bir $(X,\|.\|)$ Banach uzayının içinde bulunabilecek bir asimtotik izometrik c_0 - toplam baz dizisi tanımı aşağıdaki şekildedir.

Tanım 1.3 $(X,\|.\|)$ bir Banach uzayı olsun, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi aşağıdaki koşulu sağlayan X 'in bir dizisi olsun; bu durumda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$dizisine $(X,\|.\|)$ uzayında bir asimtotik izometrik (a.i) c_0 - toplam baz dizisi denir: 0' a azalarak yakınsayan bir dizi $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ vardır öyle ki her $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ için

$$\sup_{n\geq 1}\left(\frac{1}{1+\varepsilon_n}\right)\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| \leq \left\|\sum_{j=1}^{\infty} t_j x_j\right\| \leq \sup_{n\geq 1}(1+\varepsilon_n)\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right|.$$

Eğer bir $L > 0$ için $(z_n/L)_{n\in\mathbb{N}}$ bir asimtotik izometrik c_0 -toplam baz dizisi oluyorsa $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine $(X,\|.\|)$ uzayında bir L - ölçekli asimtotik izometrik c_0 -toplam baz dizisi denilir.

Giriş bölümünde anlatıldığı gibi 1979'da, Goebel ve Kuczumow tarafından ℓ^1 içinde genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta terisine sahip olan zayıf* kompakt olmayan ve kapalı, sınırlı, konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıfın varlığı gösterilmiştir. Çalışmalarında ve Goebel ile Kuczumow'un çalışmasının genelleştirilmişi olan Everest

[6] doktora tezinde Goebel ve Kuczumow tarafından sunulan anahtar bir lemma kullanılmıştır. Bu lemma aşağıdaki şekildedir.

Lemma 1.4 Eğer $\{x_n\}$ dizisi ℓ^1 uzayında bir x noktasına zayıf topolojide yakınsıyor ise o zaman her $y \in \ell^1$ ve $r(y) = \limsup_n \|x_n - y\|_1$ ile tanımlı fonksiyon için $r(y) = r(x) + \|y - x\|_1$ dir.

Bu lemmanın $L_1[0,1]$ Banach uzayı için analoğu Maria Japon Pineda'nın danışmanlığı altında tamamlanmış olan Hernández-Linares [12] doktora tezinde not edilmiştir. Hernández-Linares [12] doktora tezinde Goebel ve Kuczumow'un lemmasının Brezis and Lieb [3] çalışması ile elde edilebileceği anlatılmıştır. Tez çalışmasının ilk bölümünde yer alan $L_1[0,1]$'in içinde genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan geniş sınıfın varlığının gösterilmesinde az önce bilgisi verilen anahtar lemma aşağıda yer almaktadır.

Lemma 1.5 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $L_1[0,1]$'de reel değerli ölçülebilir ve düzgün sınırlı fonksiyon dizisi olsun. Kabul edilsin ki f_n dizisi bir $f \in L_1[0,1]$ noktasına hemen hemen her yerde noktasal olarak yakınsasın. Bu durumda her $g \in L_1[0,1]$ noktasında $S(g) = \limsup_n \|f_n - g\|_1$ ile tanımlı fonksiyon için $s(g) = s(f) + \|f - g\|_1$ dir.

Not edilmelidir ki yukarıda belirtilen lemma hazırlık aşamasında olan Nezir ve Sivek [21] çalışmasında yer almaktadır.

Tanım 1.6 [14] E bir vektör uzayı olsun. $\leq$ E üzerinde tanımlı bir sıralı bağıntı olsun. Yani aşağıdaki koşulları sağlasın.

- Her $x \in E$ için $x \leq x$
- $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$
- $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$

Bu durumda eğer E aşağıdaki 4 koşulu daha sağlarsa bir Vektör Latis adını alır.

- Her $x, y \in E$ için $\exists z \in E \ni x \leq z$ ve $y \leq z$, burada $z \coloneqq x \vee y$
- Her $x, y \in E$ için $\exists z \in E \ni z \leq x$ ve $z \leq y$, burada $z \coloneqq x \wedge y$
- Her $x, y, z \in E$ için $x \leq y$ ise $x + z \leq y + z$
- Her $x \in E$ ve $t \in \mathbb{R}^+$ için $0 \leq x$ ise $0 \leq tx$

<u>Tanım 1.7</u> [14] $(X, \|.\|)$ Banach uzayı aynı zamanda aşağıdaki koşulu sağlayan bir vektör latis ise o Banach uzayına Banach Latis diyoruz; $x^+ \coloneqq x \vee 0$, $x^- \coloneqq -x \vee 0$ ve $|x| = x^+ \vee x^-$ olmak üzere

$$|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$$

dir.

<u>Tanım 1.8</u> [14] *E* bir Vektör Latis olsun. *J* bir alt uzay olsun öyleki aşağıdaki koşulu sağlasın. Bu durumda *J* ye ideal denir. $x \in E$, $y \in J$ ve $|x| \leq |y| \Rightarrow x \in J$ dir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Tez çalışmasının araştırma bulgularının ilk bölümünde $L_{w,1}^{0}[0,1]$ Banach uzayı için Riesz açı hesabı yapılacaktır. Ayrıca ikinci bölümünde bu uzayların sayma ölçüsü ile tanımlı hali olan Lorentz dizi uzaylarından ℓ^1-analog olanı ele alınacakdır. Dolayısıyla öncelikle bu konularla ilgili bu bölümde araştırma bulguları için kullanılacak tanım ve teoremler sunulacaktır.

$L_1[0,1]$ analog Lorentz uzayı aşağıdaki şekilde Lorentz [15] çalışmasında tanımlanmıştır:

Tanım 2.1 $w \in (0,1)$ skaleri verilsin.

$$L_{w,1}[0,1] := \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ ölçülebilir } \middle| \, \| f \|_{w,1} := \int_0^1 \frac{w f^*(t)}{t^{1-w}} dt < \infty \right\}$$

öyle ki $f^*(t)$ fonksiyonu $|f(t)|$'nin azalan düzenlemesi olsun; yani, $f^*(t)$ azalan sıralanmış ve $|f(t)|$ ile eş ölçülüdür [15].

Bu uzayın önduali ise aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.2 $w \in (0,1)$ olsun.

$$L_{w,1}^{0}[0,1] := \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ ölçülebilir } \middle| \, \lim_{\gamma \to 0^+} \sup_{x \in (0,\gamma)} w x^{w} \int_0^x f^*(t) dt = 0 \right\}$$

öyle ki $f^*(t)$ fonksiyonu $|f(t)|$'nin azalan düzenlemesi ve burada norm

$$\| f \|_{w,\infty} := \sup_{x \in (0,1)} w x^{w} \int_0^x f^*(t) dt .$$

şeklinde tanımlıdır. O halde sayma ölçüsüne geçildiğinde Lorentz dizi uzayları aşağıdaki gibi tanımlanır.

Fakat öncelikle bu tanımların her biri için bilinmelidir ki $x^* := \left(x_n^*\right)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $x = \left(x_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ 'in azalan sıralamasıdır;yani, x^* := öyle bir dizidir ki bu dizi $|x| = (|x_j|)_{j \in \mathbb{N}}$

dizisinin sıfırdan farklı terimlerini içeren ve bu terimlerin azalacak şekilde aynı terimler varsa tekrar edilmesi ile sıralandığı ve son terimleri ($|x|$ dizisi sonlu sayıda sıfırdan farklı terim içeriyorsa) sonsuz sayıda 0 olarak takip eden dizidir.

Tanım 2.3 $\ell_{w,\infty}$ uzayı:

$$\ell_{w,\infty} := \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \;\middle|\; \| x \|_{w,\infty} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^{*}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w}{j^{1-w}}} < \infty \right\}.$$

Bu uzay ℓ_∞ uzayının (sınırlı diziler uzayının) bir analoğudur. Gerçekten de $(\ell_{w,\infty}, \|.\|_{w,\infty})$ ayrılabilir olmayan bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.4 $\ell_{w,\infty}^{0}$ uzayı:

$$\ell_{w,\infty}^{0} := \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \;\middle|\; \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^{*}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{1-w}}} = 0 \right\}.$$

Bu uzay c_0 uzayının bir analoğudur ve $(\ell_{w,\infty}^{0}, \|.\|_{w,\infty})$ uzayı $\ell_{w,\infty}$ ın ayrılabilir Banach uzayıdır.

Tanım 2.5 $\ell_{w,1}$ uzayı:

$$\ell_{w,1} := \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \;\middle|\; \| x \|_{w,1} := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w x_j^{*}}{j^{1-w}} < \infty \right\}.$$

Bu uzay ℓ^1 uzayının bir analoğudur. $(\ell_{w,1}, \|.\|_{w,1})$ ayrılabilir bir Banach uzayıdır.

Lorentz uzayı tanım ve özellikleri için Lorentz [15] ve Lindenstrauss ve Tzafriri [14] çalışmaları incelenebilir.

Tanım 2.6 $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach latis olsun. Bu durumda X'in Riesz açısı α şu şekilde tanımlanır: $\alpha(X) = sup\{\| \,|u| \vee |v|\, \| : \| u \| \leq 1, \| v \| \leq 1\}$.

Not edilmedilir ki eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise Lebesgue integral uzayı L_p için Riesz açı $\alpha(L_p) = 2^{\frac{1}{p}}$ ve c_0 uzayı için Riesz açı $\alpha(c_0) = 1$ dir. [2]

<u>Tanım 2.7</u> $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach latis ve $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir $u_0 \in X$ noktasına zayıf yakınsasın. Bu durumda, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda zayıf ortogonal denir:

$$\liminf_{k\to\infty} \liminf_{l\to\infty} \| \, |u_l - u_0| \wedge |u_k - u_0| \, \| = 0$$

E kümesi X'in bir altkümesi olsun. Eğer E'nin her zayıf yakınsak dizisi zayıf ortogonal ise bu durumda E'ye zayıf ortogonal küme denir. Eğer X'in her zayıf kompakt konveks altkümesi zayıf ortogonal ise X'e zayıf ortogonal denir. [2]

<u>Tanım 2.8</u> Eğer bir X Banach latisi üzerinde tanımlanabilen bir $\mathcal{P}$ lineer projeksiyon ailesi bulunabiliyor öyle ki $\forall P \in \mathcal{P}$ için $P|u| = |P(u)|$, $P(X)$ bir sonlu boyutlu ideal ve $\forall u \in X$ için $\inf_{P\in\mathcal{P}} \| u - P(u) \| = 0$ eşitliği var ise X'e Riesz yaklaşım özelliğine sahiptir denir [2].

<u>Önerme 2.9</u> Riesz yaklaşım özelliğine sahip her X Banach latisi zayıf ortogonaldır [2].

<u>Teorem 2.10</u> Eğer bir X Banach latisi zayıf ortogonal ve Riesz açısı $\alpha(X) < 2$ koşulunu sağlıyorsa bu durumda X genişlemeyen fonksiyonlar için zayıf sabit nokta teorisine sahiptir [2].

Not edilmelidir ki çalışmanın ikinci ve üçüncü bölümlerinde kullanılan kümeler Lennard ve Nezir [10] çalışmasında bulunan kümelerden alınmıştır ve bu kümelerin genelleştilmesi ile daha geniş sınıflar elde edilmiştir.

Lennard ve Nezir [10] çalışmasında gösterilmiştir ki Banach uzaylarında her asimtotik izometrik (ai) c_0-toplam baz dizisinin kapalı konvek kabuğu SNT (g.f.)'yi bozar, dolayısıyla eğer bir Banach uzayında bir ai c_0-toplam baz dizisi bulunabilirse SNT (g.f.)'yi bozar.

Lennard ve Nezir [10] çalışmasında yer alan c_0'da bulunan bu dizilerden birisi ve ilgili teorem aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 2.11 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında sınırlı bir dizi olsun. Her $n \in N$ için $f_n := b_n\, e_n$ ile c_0'da $(f_n)_{n\in N}$ dizisi tanımlansın ve bu dizi kullanılarak c_0'da $\sum_{k=1}^{n} f_k$ kısmi toplam dizisinin kapalı konveks kabuğu olan aşağıdaki E kümesi tanımlansın.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n\, f_n :\ 1 = t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \cdots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\}.$$

Bu durumda bu küme afin $\|\cdot\|_\infty$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar.

Bu kümelerin daha genel halleri ise Lenard danışmanlığında yazılmış olan Nezir [21] doktora tezi çalışmasında aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin terimleri $(0,\infty)$ olmak üzere λ skalerine yakınsak bir dizi olsun, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ise her $N \in \mathbb{N}$ için $\Gamma \leq \gamma_N$ ve $\sigma := \sum_{n=2}^{\infty} |\gamma_n - \gamma_{n-1}|$ yakınsak olacak şekilde bir dizi olsun.

Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\eta_n := \gamma_n(b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4 + \ldots + b_n e_n)$ şeklinde $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın öyleki bu dizi $\exists K \in (0,\infty)$ ve $\forall\, \alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ için $K \sup_{n\geq 1} \left| \sum_{j=n}^{\infty} \alpha_j \right| \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \eta_j \right\|$ koşulunu sağlasın. Bu durumda, $\exists L > 0$ vardır öyle ki $(\frac{\eta_n}{L})_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir ai c_0-toplam baz dizisidir. Ayrıca, bu $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu üzerinde; yani, $E := \overline{c_0}(\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\})$ üzerinde tanımlı bir sabit noktasız afin $\|\cdot\|_\infty$-daralan fonksiyon $U: E \to E$ bulunabilir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tez çalışmasının bu bölümü üç başlık altında sunulacaktır. İlk başlıkta Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı $L_1[0,1]$'in bir analoğu olan Lorentz fonksiyon uzayı $L_{w,1}[0,1]$'ın önduali $L_{w,1}{}^0[0,1]$ Banach uzayının içinde çok geniş sonsuz boyutlu bir altuzayının hangi skaler w için zayıf sabit nokta teorisine sahip olacağının görülmesi için Riesz açı hesabı yapılmaktadır. İkinci başlıkta ise Kaczor ve Prus [9] çalışmasının $L_1[0,1]$-analoğu ele alınmaktadır ve gösterilmektedir ki $L_1[0,1]$ içinde afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan çok geniş bir sınıf vardır. Son alt bölümde ise $\ell_{w,1}$ Lorentz dizi uzayı içinde kapalı, sınırlı, konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıf üzerinde tanımlı sağa kaydırma fonksiyonu için sabit noktası olmayan bir düzgün Lipschitz fonksiyonu olması için üst sınır değerlendirmesi yapılmaktadır. Not edilmelidir ki tez çalışmasının bulgularının sunulduğu tez yazarının ortak olduğu [18] ve [19] yayınlanmış makaleleri mevcuttur.

3.1 Lorentz fonksiyon uzayı $L_{w,1}^{0}[0,1]$'in büyük bir alt uzayında Riesz açı hesaplaması ve zayıf sabit nokta teorisi

Bu bölümde [19] çalışmasında yer alan Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı $L_1[0,1]$'in bir analoğu olan Lorentz fonksiyon uzayı $L_{w,1}[0,1]$'ın önduali $L_{w,1}{}^{0}[0,1]$ Banach uzayının içinde çok geniş sonsuz boyutlu bir altuzayının hangi skaler w için zayıf sabit nokta teorisine sahip olacağının görülmesi için Riesz açı hesabı yapılmaktadır. Bu sonucun ortaya çıkarılması için Materyal ve Yöntemler bölümünde sunulan Borwein ve Sims [2] çalışmasındaki teorem ve tanımlardan yararlanılmaktadır.

İncelenen alt uzay ise $L_{w,1}^{0}[0,1]$'nın pozitif değerli sınırlı fonksiyonlarını içeren alt uzay olup, bu alt uzayın Riesz açısının 2'den küçük olduğu gösterilmekte ve dolayısıyla bu geniş alt uzayın zayıf sabit nokta teorisine sahip olduğu ispatlanmaktadır. Şimdi bu sonuç için ilgili lemma ve teorem verilecektir.

<u>Örnek 3.1</u> Lorentz uzayı $L_{w,1}[0,1]$ ve ön duali $L_{w,1}^{0}[0,1]$ Tanım 2.1 ve Tanım 2.2'de olduğu gibi göz önüne alınsın. Bu durumda aşağıdaki alt uzayı ele alınsın.

$$U = \left\{ f \in L_{w,1}^{0}[0,1]:\ \ f \geq 0 \ \text{ ve sınırlı} \right\}.$$

Lebesgue uzaylarda basit fonksiyonların yoğunluğu ve basit fonksiyonlarla yaklaşım gerçeği gereğince eğer $f \in U$ ise aşağıdaki şekilde tanımlanan en az bir $(s_n)_n$ basit fonksiyon dizisi vardır.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_i^n} + n\chi_{E_\infty^n}$$

ki burada $E_i^n = f^{-1}\left([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}) \right)$ ve $E_\infty^n = f^{-1}([n,\infty))$ olup

$$\lim_{n} \sup_{x \in [0,1]} |s_n(x) - f(x)| = 0$$

dir. Bu durumda, monoton yakınsaklık teoremi gereğince

$$\int_0^1 f(t)dt = \lim_n \int_0^1 s_n\, dm$$

$$= \lim_n \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n}\, \mu\left(f^{-1}\left([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n})\right)\right) + n\,\mu(f^{-1}([n,\infty)))$$

dir. Ayrıca, eğer s bir basit fonksiyon ise bu durumda azalan bir skalerler dizisi $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots > \alpha_k > 0$ vardır öyle ki

$$s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, \chi_{A_i}$$

olup burada $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\})$ dir. Buradan bu fonksiyonun azalan yeniden düzenlemesi

$$s^* = \sum_{i=1}^{k} \beta_i\, \chi_{B_i}$$

formunda olup burada $B_i = [\alpha_{i+1}, \alpha_i)$ ve $\beta_i = \sum_{j=1}^{i} \mu(A_j)$ dir ve dolayısıyla

$$\int_0^1 s\, dm = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, \mu(f^{-1}(\{\alpha_i\}))$$

ve

$$\int_0^1 s^* dm = \sum_{i=1}^{k} \beta_i\,(\alpha_i - \alpha_{i+1}) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i} \mu\left(f^{-1}(\{\alpha_j\})\right)\,(\alpha_j - \alpha_{j+1})$$

dir. O halde,

$$\int_0^1 f(t)dt = \sup\left\{\int_0^1 s\, dm : 0 \le s\ (simple) \le f\right\},$$

$$\int_0^1 f^*(t)dt = \sup\left\{\int_0^1 s^* dm : 0 \le s\ (simple) \le f\right\}$$

dir.

<u>Önerme 3.2</u> $w \in (0,1)$ olsun ve yukarıdaki örnekte tanımlanan U alt uzayı ele alınsın. Bu durumda, U Riesz yaklaşım özelliğine sahip olup Önerme 2.9 gereğince U zayıf ortogonaldır.

İspat. Öncelikle, not edilebilir ki bilinen doğal sıralama bağıntısı altında $(U, \|.\|_{w,\infty}) \subseteq$

$L_{w,1}^0[0,1]$ alt uzayı bir Banach latistir; yani basit fonksiyon formuna geçiş yapılarak $u \leq v \Leftrightarrow [u_j \leq v_j, u_j = \alpha_j \mu\left(u^{-1}(\{\alpha_j\})\right), v_j = \beta_j \mu\left(v^{-1}(\{\beta_j\})\right), \forall j \in \mathbb{N}]$ dir.

Buradan, $\forall K \subseteq \mathbb{N}$, K sonlu elemanlı indis kümesi ve $\forall u \in L_{w,1}^0[0,1]$ için,

$$(P_K(u))_n := \begin{cases} \alpha_j \mu\left(u^{-1}(\{\alpha_j\})\right) & , if\ n \in K \\ 0 & , \ if\ n \notin K \end{cases}$$

dir. Buradan ise normun tanımı kullanılarak $\| u - P_{[1,n]}(u) \|_{w,\infty} \underset{n}{\rightarrow} 0$ elde edilecektir.

<u>Teorem 3.3</u> $w \in (0,1)$ olsun ve yukarıdaki Örnek 3.1'de tanımlanan U alt uzayı ele alınsın. Bu durumda, $\alpha(U) < 2$ olup $\|.\|_{w,\infty}$-genişlemeyen fonksiyonlar için zayıf sabit nokta teorisine sahiptir.

İspat. $w \in (0,1)$ olsun ve yukarıdaki Örnek 3.1'de tanımlanan U alt uzayı ele alınsın. Bir önceki Önerme gereğince U zayıf ortogonal olduğundan Teorem 2.10 dolayısıyla zayıf sabit nokta teorisine sahip olduğunu göstermek için $\alpha(X) < 2$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

U alt uzayının kapalı birim yuvarı

$$\mathcal{B}_U := \left\{ f \in U \ : \ \| f \|_{\rho,\infty} \leq 1 \right\}$$

ile sembolize edilecektir. Örnek 3.1 de belirtilen gerçekler göz önüne alınsın ve $f,\ g \in \mathcal{B}_U$ keyfi noktalar olsun. Bu durumda f ve g'ye düzgün yakınsayan sırasıyla $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ve $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ basit fonksiyon dizileri bulunabilir öyle ki

$$f_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{f^{-1}\left([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n})\right)} + n\chi_{f^{-1}([n,\infty))}$$

ve

$$g_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{g^{-1}\left([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n})\right)} + n\chi_{g^{-1}([n,\infty))}$$

dir. Bu durumda,

$$\int_0^1 f_n \, dm = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \mu\left(f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right)\right) + n\mu\left(f^{-1}([n,\infty))\right) = \sum_{j=1}^{n2^n} u_j,$$

$$\int_0^1 g_n\, dm = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \mu\left(g^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right)\right) + n\mu\left(g^{-1}([n,\infty))\right) = \sum_{j=1}^{n2^n} v_j,$$

$$\int_0^1 f_n{}^*\, dm = \sum_{i=1}^{n2^n} \sum_{j=1}^{i} \mu\left(f^{-1}\left(\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)\right)\right) \frac{j-1}{2^{n+1}},$$

$$\int_0^1 g_n{}^*\, dm = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n2^n} \sum_{j=1}^{i} \mu\left(g^{-1}\left(\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)\right)\right) \frac{j-1}{2^{n+1}}$$

elde edilir.

Buradan $\| \, |f| \vee |g| \, \|_{\rho,\infty}$ ele alınır ve her $k \in \mathbb{N}$ için $z_k = |u_k| \vee |v_k|$ olarak tanımlanıp $z = (z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin azalan düzenlemesi göz önüne alınır öyle ki burada $\vee$ iki terim arası maksimumu sembolize eder. Azalan yeniden düzenleme tanımı gereğince, $\exists$ 1-1 $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu ve $\exists(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki her $\varepsilon_{\pi(j)} \in \{-1,1\}$ olup $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(z^*)_n = |z_{\pi(n)}| = \varepsilon_{\pi(n)}\, z_{\pi(n)}$ dir. $\Pi_{\mathbb{N}}$ kümesi tüm 1-1 olan $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonlarının kümesi olsun. Buradan keyfi $k \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{N}_k = \{1,2,\ldots,k2^k\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda, en az bir $\pi \in \Pi_{\mathbb{N}}$ için

$$\sum_{j=1}^{k2^k} z_j^* = \sum_{j=1}^{k2^k} |z_\pi(j)| = \sum_{\substack{j=1 \\ j\in A_k}}^{k2^k} |u_\pi(j)| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\in B_k}}^{k2^k} |v_\pi(j)|$$

olup burada $A_k := \{n \in \mathbb{N}_k : \; |u_\pi(n)| \geq |v_\pi(n)|\}$ ve $B_k := \mathbb{N}_k - A_k$ dir.

Şimdi, $N := \#(A_k) \in \{0,1,2,\ldots,k2^k\}$ ve $M := \#(B_k) \in \{0,1,2,\ldots,k2^k\}$ olarak tanımlansın. Açıkça, $N + M = k$ dir.

Bu durumda,

$$\sum_{j=1}^{k2^k} z_j^* \leq \sum_{j=1}^{N} u_j^* + \sum_{j=1}^{M} v_j^* \tag{3.1}$$

$$\leq \| f \|_{\rho,\infty} \sum_{j=1}^{N} \frac{w}{j^{1-w}} + \| g \|_{\rho,\infty} \sum_{j=1}^{M} \frac{w}{j^{1-w}} \tag{3.2}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N} \frac{w}{j^{1-w}} + \sum_{j=1}^{K} \frac{w}{j^{1-w}} \tag{3.3}$$

elde edilir. Öyleyse,

$$\frac{\sum_{j=1}^{k2^k} z_j^*}{\sum_{j=1}^{k2^k} \frac{w}{j^{1-w}}} \leq \frac{\sum_{j=1}^{N} \frac{w}{j^{1-w}} + \sum_{j=1}^{M} \frac{w}{j^{1-w}}}{\sum_{j=1}^{k2^k} \frac{w}{j^{1-w}}} \tag{3.4}$$

Not edilebilir ki $n \in \mathbb{N}$ yeterince büyük alındığında $\frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{w}{j^{1-w}}}{\int_1^n \frac{w}{t^{1-w}} dt}$ asimtotik olarak 1'e denktir; yani, $\frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{w}{j^{1-w}}}{\int_1^n \frac{w}{t^{1-w}} dt} \sim 1$ dir. Bir diğer deyişle, $\sum_{j=1}^{n} \frac{w}{j^{1-w}}$ ve $\int_1^n \frac{w}{t^{1-w}} dt$ asimtotik olarak denktir. Şimdi (3.4) eşitsizliği göz öüne alınırsa, Eğer $\exists\, r \in \mathbb{N}$ öyle ki $k2^k = 2r$ ise

$$\frac{\sum_{j=1}^{r-1} \frac{w}{j^{1-w}} + \sum_{j=1}^{r+1} \frac{w}{j^{1-w}}}{\sum_{j=1}^{2r} \frac{w}{j^{1-w}}} = \frac{\sum_{j=1}^{r-1} \frac{w}{j^{1-w}} + \sum_{j=1}^{r} \frac{w}{j^{1-w}} + \frac{w}{(r+1)^{1-w}}}{\sum_{j=1}^{2r} \frac{w}{j^{1-w}}}$$

dir. Dolayısıyla,

$$\frac{\sum_{j=1}^{r-1} \frac{w}{j^{1-w}} + \sum_{j=1}^{r+1} \frac{w}{j^{1-w}}}{\sum_{j=1}^{2r} \frac{w}{j^{1-w}}} \leq \frac{\sum_{j=1}^{r-1} \frac{w}{j^{1-w}} + \sum_{j=1}^{r} \frac{w}{j^{1-w}} + \frac{w}{r^{1-w}}}{\sum_{j=1}^{2r} \frac{w}{j^{1-w}}}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{r} \frac{w}{j^{1-w}} + \sum_{j=1}^{r} \frac{w}{j^{1-w}}}{\sum_{j=1}^{2r} \frac{w}{j^{1-w}}}$$

dir. Aynı şekilde,

$$\frac{\sum_{j=1}^{r-2} \frac{w}{j^{1-w}} + \sum_{j=1}^{r+2} \frac{w}{j^{1-w}}}{\sum_{j=1}^{2r} \frac{w}{j^{1-w}}} \leq \frac{\sum_{j=1}^{r-2} \frac{w}{j^{1-w}} + \sum_{j=1}^{r} \frac{w}{j^{1-w}} + \frac{w}{(r-1)^{1-w}} + \frac{w}{r^{1-w}}}{\sum_{j=1}^{2r} \frac{w}{j^{1-w}}}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{r} \frac{w}{j^{1-w}} + \sum_{j=1}^{r} \frac{w}{j^{1-w}}}{\sum_{j=1}^{2r} \frac{w}{j^{1-w}}}$$

dir. Bu şekilde devam edilerek $r > 2$ ve $0 \leq s < r$ için

$$\frac{\sum_{j=1}^{r-s} \frac{w}{j^{1-w}} + \sum_{j=1}^{r+s} \frac{w}{j^{1-w}}}{\sum_{j=1}^{2r} \frac{w}{j^{1-w}}} \leq \frac{\sum_{j=1}^{r-s} \frac{w}{j^{1-w}} + \sum_{j=1}^{r} \frac{w}{j^{1-w}} + \frac{w}{(r-s+1)^{1-w}} + \cdots + \frac{w}{r^{1-w}}}{\sum_{j=1}^{2r} \frac{w}{j^{1-w}}}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{r} \frac{w}{j^{1-w}} + \sum_{j=1}^{\nu} \frac{w}{j^{1-w}}}{\sum_{j=1}^{2r} \frac{w}{j^{1-w}}}$$

elde edilir. Bu sebeple,

$$\frac{\sum_{j=1}^{N} \frac{w}{j^{1-w}} + \sum_{j=1}^{M} \frac{w}{j^{1-w}}}{\sum_{j=1}^{k} \frac{w}{j^{1-w}}} \leq \frac{\sum_{j=1}^{r} \frac{w}{j^{1-w}} + \sum_{j=1}^{r} \frac{w}{j^{1-w}}}{\sum_{j=1}^{2r} \frac{w}{j^{1-w}}} = \frac{2\sum_{j=1}^{r} \frac{w}{j^{1-w}}}{\sum_{j=1}^{2r} \frac{w}{j^{1-w}}}$$

dir. Diğer taraftan eğer $k = 2r + 1$ ise aynı şekilde gösterilebilir ki

$$\frac{\sum_{j=1}^{N} \frac{w}{j^{1-w}} + \sum_{j=1}^{M} \frac{w}{j^{1-w}}}{\sum_{j=1}^{k} \frac{w}{j^{1-w}}} \leq \frac{\sum_{j=1}^{r} \frac{w}{j^{1-w}} + \sum_{j=1}^{r+1} \frac{w}{j^{1-w}}}{\sum_{j=1}^{2r+1} \frac{w}{j^{1-w}}}$$

dir. Şimdi $r \in \mathbb{N}$ ve $w \in (0,1)$ için

$$Q_w(2r) := \frac{2\sum_{j=1}^{r} \frac{w}{j^{1-w}}}{\sum_{j=1}^{2r} \frac{w}{j^{1-w}}} \sim \frac{2\int_0^r t^{w-1}\, dt}{\int_0^{2r} t^{w-1}\, dt} = 2^{1-w}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$Q_w(2r+1) := \frac{\sum_{j=1}^{r} \frac{1}{j^{1-w}} + \sum_{j=1}^{r+1} \frac{1}{j^{1-w}}}{\sum_{j=1}^{2r+1} \frac{1}{j^{1-w}}} \sim \frac{\int_0^r t^{w-1}\, dt + \int_0^{r+1} t^{w-1}\, dt}{\int_0^{2r+1} t^{w-1}\, dt}$$

$$= \frac{(r+1)^w + r^w}{(2r+1)^\rho}$$

$$= \frac{(1+\frac{1}{r})^w + 1}{(2+\frac{1}{r})^w}$$

dir. O halde her iki durumda da

$$\frac{\sum_{j=1}^{k2^k} z_j^*}{\sum_{j=1}^{k2^k} \frac{w}{j^{1-w}}} \leq Q_w(k) < 2, \forall k \in \mathbb{N}$$

elde edilmektedir ve

$$\lim_{k\to\infty} Q_w(k) = 2^{1-w} < 2$$

dir. Bu sebeple,

$$\alpha(U) = \sup_{f,g \in \mathcal{B}_U} \parallel |f| \vee |g| \parallel_{w,\infty} < 2$$

dir.

Not 3.4 Lorentz fonksiyon uzayı $L_{w,1}[0,1]$'ın önduali $L_{w,1}{}^{0}[0,1]$ Lorentz uzayında sayma ölçüsüne geçildiğinde Lorentz dizi uzayı ve bu uzayın daha genel versiyonu olan tez danışmanı Nezir'in doktora tezinde [17] yer alan Lorentz-Marcinkiewicz Banach uzayları için Riesz açı hesabı yukarıdaki teorem ile doğrulanmaktadır.

3.2 Lebesgue integral uzayı $L_1[0,1]$ içinde afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan çok geniş bir sınıf

Bu bölümde [18] çalışmasında yer alan Kaczor ve Prus [9] çalışmasının $L_1[0,1]$-analoğu ele alınmaktadır ve gösterilmektedir ki $L_1[0,1]$ içinde afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan çok geniş bir sınıf vardır. Bu sonucun gösterilmesi için Kaczor ve Prus [9] çalışması ve Everest [6] doktora tez çalışmasında yer alan tekniklerden yararlanılmaktadır. Öyle ki bu bahsi geçen çalışmalarda ℓ^1 üzerinde çalışılmıştır. Dolayısıyla tez çalışmasının bu bölümü Kaczor ve Prus ile Everest'in çalışmalarının $L_1[0,1]$-analoğudur. Bu bölümde sonuçları elde etmek için Goebel ve Kuczumow lemması Lemma 1.4'ün Lebesgue uzayı için olan analoğu Lemma 1.5 anahtar görevini görmektedir.

Daha ayrıntılı olarak bahsedilecek olursa, bu bölümde tez danışmanı Nezir'in danışmanlığında hazırlanmakta olan Topcu yüksek lisans tezi [22] ve [20] çalışmalarında yer alan küme sınıfları ele alınmış olup tez yazarının da ortak olduğu [18] çalışmasında yer alan $L_1[0,1]$'de afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş sınıfların varlığı anlatılmaktadır. Bu sonuç için aşağıda yer alan örnek küme sınıfları ele alınmış ve tek bir teorem ile verilen tüm küme sınıflarının afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağladığı gösterilmiştir.

<u>Örnek 3.5</u> $L_1[0,1]$'de normalize edilmiş $\forall n \in \mathbb{N}$ için $e_n := (n+1)t^n$ tanımı ile verilen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve keyfi $b, c \in (0,1)$ alınsın. Bu durumda, $L_1[0,1]$'de $f_1 := be_1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1} := e_{n+1}$ ile tanımlı $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınsın. Daha sonra ise $L_1[0,1]$'de aşağıdaki şekilde tanımlanan kapalı, sınırlı ve konveks E alt kümesi verilebilir.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \ her \ t_n \geq 0, \quad t_1 = c \ ve \ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

<u>Örnek 3.6</u> $L_1[0,1]$'de normalize edilmiş $\forall n \in \mathbb{N}$ için $e_n := \frac{ne^{nt}}{e^n - 1}$ tanımı ile verilen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve keyfi $b, c \in (0,1)$ alınsın. Bu durumda, $L_1[0,1]$'de $f_1 := be_1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1} := e_{n+1}$ ile tanımlı $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınsın. Daha sonra ise $L_1[0,1]$'de aşağıdaki şekilde tanımlanan kapalı, sınırlı ve konveks E alt kümesi verilebilir.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \ her\ t_n \geq 0, \quad t_1 = c\ \ ve \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

<u>Örnek 3.7</u> $L_1[0,1]$'de normalize edilmiş $\forall n \in \mathbb{N}$ için $e_n := \frac{ne^{nt}}{e-1} \chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ tanımı ile verilen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi (öyle ki burada χ karakteristik fonksiyondur) ve keyfi $b, c \in (0,1)$ alınsın. Bu durumda, $L_1[0,1]$'de $f_1 := be_1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1} := e_{n+1}$ ile tanımlı $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınsın. Daha sonra ise $L_1[0,1]$'de aşağıdaki şekilde tanımlanan kapalı, sınırlı ve konveks E alt kümesi verilebilir.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \ her\ t_n \geq 0, \quad t_1 = c\ \ ve \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

<u>Örnek 3.8</u> $L_1[0,1]$'de normalize edilmiş $\forall n \in \mathbb{N}$ için $e_n := \frac{4n}{\pi(1+n^2t^2)} \chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ tanımı ile verilen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi (öyle ki burada χ karakteristik fonksiyondur) ve keyfi $b, c \in (0,1)$ alınsın. Bu durumda, $L_1[0,1]$ 'de $f_1 := be_1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1} := e_{n+1}$ ile tanımlı $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınsın. Daha sonra ise $L_1[0,1]$'de aşağıdaki şekilde tanımlanan kapalı, sınırlı ve konveks E alt kümesi verilebilir.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \ her\ t_n \geq 0, \quad t_1 = c\ \ ve \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

<u>Örnek 3.9</u> $L_1[0,1]$'de normalize edilmiş keyfi bir $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve keyfi $b, c \in (0,1)$ alınsın. Bu durumda, $L_1[0,1]$ 'de $f_1 := be_1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1} := e_{n+1}$ ile tanımlı $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınsın. Daha sonra ise $L_1[0,1]$'de aşağıdaki şekilde tanımlanan kapalı, sınırlı ve konveks E alt kümesi verilebilir.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \ her \ t_n \geq 0, \qquad t_1 = c \ ve \ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Teorem 3.10 $b, c \in (0,1)$ keyfi olmak üzere yukarıda verilen örneklerde yer alan E kümeleri afin asimtotik $\|.\|_1$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat: $T: E \to E$ bir afin asimtotik genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda, T afin olduğundan Everest [6] doktora tezinde yer alan Lemma 1.1.2 gereğince en az bir $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ dizisi vardır öyle ki $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_1 \underset{n}{\to} 0$ dir. Genelliği bozmadan gerekirse bir alt diziye geçilerek bir $x \in L_1[0,1]$ bulunabilir öyle ki $x^{(n)}$ dizisi zayıf* toplolojide x noktasına yakınsar. Bu durumda, Lemma 1.4 gereğince, aşağıdaki şekilde tanımlı bir $s: L_1[0,1] \to [0, \infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir.

$$s(y) = \limsup_n \left\|x^{(n)} - y\right\|_1 \quad , \ \forall y \in L_1[0,1]$$

ve öyleyse

$$s(y) = s(y) + \|y - x\|_1 \ , \ \forall y \in L_1[0,1]$$

dir. T asimtotik genişlemeyen olduğundan 1 e azalarak yakınsayan $[1, \infty)$ aralığında en az bir $(k_n)_{n\in N}$ dizisi vardır öyle ki $\forall x, y \in E$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\|T^n x - T^n y\|_1 \leq k_n \| x - y \|$$

dir. Buradan ele alınan kümenin zayıf* kapanışını

$$W := \overline{E}^{w^*} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : her \ t_n \geq 0 \ ve \ \sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq 1 \right\}$$

olarak tanımlanır ve iki ayrı durum ele alınır.

Durum 1: $x \in E$ olsun.

$m \in \mathbb{N}$ sabit tutulsun. Bu durumda, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $s(T^m x) = s(x) + \|T^m x - x\|_1$ ve

$$\begin{aligned} (1) \qquad s(T^m x) &= \limsup_n \left\|T^m x - x^{(n)}\right\|_1 \\ &\leq \limsup_n \left\|T^m x - T^m\left(x^{(n)}\right)\right\|_1 + \limsup_n \left\|x^{(n)} - T^m\left(x^{(n)}\right)\right\|_1 \\ &\leq k_m \limsup_n \left\|x - x^{(n)}\right\|_1 + \limsup_n \left\|x^{(n)} - T^m\left(x^{(n)}\right)\right\|_1 \end{aligned}$$

$$\leq \mathrm{k_m}\limsup_{n}\left\|x - x^{(n)}\right\|_1 + \limsup_{n}\sum_{j=1}^{m}\left\|T^{j-1}\left(x^{(n)}\right) - T^{j}\left(x^{(n)}\right)\right\|_1$$

$$\leq \mathrm{k_m}\limsup_{n}\left\|x - x^{(n)}\right\|_1 + \limsup_{n}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{k_{j-1}}\left\|x^{(n)} - T\left(x^{(n)}\right)\right\|_1$$

$$= \mathrm{k_m} s(x)$$

dir.

Dolayısıyla, $\|T^m x - x\|_1 \leq (\mathrm{k_m} - 1)s(x)$ olup m → ∞ iken limit alınırsa $\lim_m \|T^m x - x\|_1 = 0$ elde edilecektir fakat $\lim_m \|TT^m x - \mathrm{T}x\|_1 \leq \lim_m \mathrm{k_1}\|T^m x - x\|_1 = 0$ ve $\lim_m \|T^{m+1}x - \mathrm{T}x\|_1 = 0$ olduğundan $T^m x$ dizisi x ve Tx'e yakınsayacaktır. Dolayısıyla, limitlerin tekliği gereğince $Tx = x$ dir.

Durum 2: $x \in W\backslash E$ olsun.

Bu durumda ise W'nun tanımı gereğince x noktasının $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n f_n$ formunda yazılcak şekilde $\gamma_1 = \mathrm{c}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n < 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\gamma_n \geq 0$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur. Bu skalerler vasıtasıyla $\delta := 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n$ ve

$$\mathrm{h} := (\gamma_1 + \delta)f_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\gamma_n f_n$$

olarak tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\|\mathrm{h} - x\|_1 = \|b\delta e_1\|_1 = b\delta \text{ dir.}$$

Diğer taraftan, $y \in E$ keyfi bir nokta olduğunda $\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n$ formunda yazılcak şekilde $\forall n \in \mathbb{N}\ için\ t_n \geq 0$, $t_1 = \mathrm{c}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur.

O halde,

$$\| y - x \|_1 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right\|_1 = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right| dm$$

$$\geq \left| \sum_{k=1}^{\infty} (t_k - \gamma_k) \int_0^1 f_k dm \right| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} t_k - \gamma_k \right| = \delta$$

elde edilir.

O halde, her $y \in E$ ve her $x \in W \backslash E$ için $\|y - x\|_1 \geq \|\mathrm{h} - x\|_1$ (2)
dir.

Daha sonra ise aşağıdaki eşitsizlikler göz önüne alınır.

$$\begin{aligned}
s(h) &= s(x) + \|\mathrm{h} - x\|_1 \leq s(x) + \|T^m\mathrm{h} - x\|_1 = s(T^m\mathrm{h}) \\
&= \limsup_n \left\| T^m h - x^{(n)} \right\|_1 \quad \text{bu durumda (1) eşitsizliğinde olduğu gibi} \\
&\leq \limsup_n \left\| T^m h - T^m\left(x^{(n)}\right) \right\|_1 + \limsup_n \left\| x^{(n)} - T^m\left(x^{(n)}\right) \right\|_1 \\
&\leq \mathrm{k_m} \limsup_n \left\| h - x^{(n)} \right\|_1 + \limsup_n \left\| x^{(n)} - T^m\left(x^{(n)}\right) \right\|_1 \\
&\leq \mathrm{k_m} \limsup_n \left\| h - x^{(n)} \right\|_1 + \limsup_n \sum_{j=1}^{m} \left\| T^{j-1}\left(x^{(n)}\right) - T^j\left(x^{(n)}\right) \right\|_1 \\
&\leq \mathrm{k_m} \limsup_n \left\| h - x^{(n)} \right\|_1 + \limsup_n \sum_{j=1}^{m} \mathrm{k_{j-1}} \left\| x^{(n)} - T\left(x^{(n)}\right) \right\|_1 \\
&= \mathrm{k_m} s(h)
\end{aligned}$$

dir.

Bu durumda, $s(h) \leq s(T^m\mathrm{h}) \leq \mathrm{k_m} s(h)$ olup m → ∞ iken limit alınırsa ve $\lim_m \mathrm{k_m} = 1$ olduğu göz önüne alınarak $\lim_m s(T^m\mathrm{h}) = s(h)$ olduğu görülür. Yani, $\lim_m s(x) + \|T^m\mathrm{h} - x\|_1 = s(x) + \|\mathrm{h} - x\|_1$ olacaktır ki bu $\lim_m \|T^m\mathrm{h} - x\|_1 = \|\mathrm{h} - x\|_1$ olduğu anlamına gelir. Ayrıca, her $y \in E$ için

$$\| y-h \|_1 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - (\gamma_1+\delta) f_1 - \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k f_k \right\|_1$$

$$= \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k - \delta b e_1 \right| dm$$

$$= \int_0^1 \left| \sum_{k=2}^{\infty} t_k b e_k - \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k b e_k - b(\delta+\gamma_1 - t_1) e_1 \right| dm$$

$$\leq \mathrm{b} \sum_{k=2}^{\infty} \int_0^1 |t_k - \gamma_k| e_k dm + b|\delta + \gamma_1 - t_1|$$

$$= \mathrm{b} \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + b \left| 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k + \gamma_1 - 1 + \sum_{k=2}^{\infty} t_k \right|$$

$$\leq 2\mathrm{b} \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

Ayrıca,

$$\| y-x \|_1 - \|\mathrm{h}-x\|_1 = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right| dm - b\delta$$

$$\geq \left| \sum_{k=1}^{\infty} (t_k - \gamma_k) \int_0^1 f_k dm \right| - b\delta \;\; = \left| \sum_{k=2}^{\infty} t_k - \gamma_k \right| - b\delta \;\; = (1-b)\delta$$

dir. Bu durumda, $\| y-h \|_1 \leq \frac{2\mathrm{b}(2-\delta)}{(1-b)\delta} (\| y-x \|_1 - \|\mathrm{h}-x\|_1)$ olup $\varepsilon > 0$ keyfi olduğunda $\mu = \frac{\varepsilon(1-b)\delta}{2\mathrm{b}(2-\delta)}$ seçilirse eğer $|\| y-x \|_1 - \|\mathrm{h}-x\|_1| < \mu$ ise $\| y-h \|_1 < \varepsilon$ olacaktır bu ise yukarıda elde edilen $\lim_m \|T^m \mathrm{h} - x\|_1 = \|\mathrm{h}-x\|_1$ sonucu gereğince $\lim_m \|T^m \mathrm{h} - h\|_1 = 0$ olduğunu gösterir. O halde,

$$\| h - Th \|_1 \leq \lim_m \|T^m \mathrm{h} - h\|_1 + \lim_m \|T^m \mathrm{h} - Th\|_1$$

$$\leq \mathrm{k}_1 \lim_m \|T^{m-1} \mathrm{h} - h\|_1 = 0$$

elde edilecektir.

Öyleyse yukarıdaki iki durumda da $Th = h$ olacak şekilde bir nokta mevuttur ve dolayısıyla E afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir.

3.3 $\ell_{w,1}$ Lorentz dizi uzayı, sağa kaydırma fonksiyonu ve düzgün Lipschitzlik

Bu bölümde [19] çalışmasında yer alan $\ell_{\mathrm{w},1}$ Lorentz dizi uzayı içinde kapalı, sınırlı, konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıf üzerinde tanımlı sağa kaydırma fonksiyonu için sabit noktası olmayan bir düzgün Lipschitz fonksiyonu olması için üst sınır değerlendirmesi yapılmaktadır. Bu sonucun gösterilmesi için Everest [6] doktora tez çalışmasında yer alan tekniklerden yararlanılmaktadır. Öyle ki bu bahsi geçen çalışmalarda ℓ^1 üzerinde çalışılmıştır. Dolayısıyla tez çalışmasının bu bölümü Everest'in çalışmasının $\ell_{\mathrm{w},1}$ -analoğudur.

Örnek 3.11 $w \in (0,1)$ olsun. Ayrıca $b \in (0,1)$ keyfi seçilsin. $\ell_{w,1}$ uzayında bir $(f_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\in\mathrm{N}}$ dizisi bu sabit sayı ve kanonik baz yardımı ile şu şekilde kurulsun: $f_1 := b\ \frac{1}{w} e_1$ ve her $\mathrm{n} \geq 2$ tam sayısı için $f_n := \frac{n^{1-w}}{w} e_n$ olsun. Daha sonrasında ise bu dizi yardımı ile aşağıdaki şekilde bu b sayısına bağlı olarak $\ell_{w,1}$'in kapalı ve sınırlı bir E alt kümesi tanımlansın;

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n :\ her\ \ t_n \geq 0\ \ ve\ \ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Daha sonra ise aşağıdaki şekilde tanımlanan sağa kaydırma fonksiyonu $T: E \rightarrow E$ göz önüne alınsın.

$$T(x) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n\, f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n\, f_{n+1}.$$

Bu durumda, E'den alınan her $x = \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k$ ve $y = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k$ için

$$\| y - x \|_{w,1} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right\|_{w,1}$$

$$= \left\| \left(b \frac{1}{w} (t_1 - \gamma_1), \frac{2^{1-w}}{w} (t_2 - \gamma_2), \frac{3^{1-w}}{w} (t_3 - \gamma_3), \dots \right) \right\|_{w,1}$$

dir. Şimdi mutlak toplanabilen diziler için aşağıdaki gerçek göz önüne alınabilir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k{}^* = \sum_{k=2}^{\infty} |s_k|$$

Ayrıca,

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k{}^* r_k{}^* \geq \sum_{k=2}^{\infty} |s_k r_k| = \sum_{k=2}^{\infty} (s_k r_k)^*$$

olup buradan

$$b|t_1 - \gamma_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| = [b(t_1 - \gamma_1)]^* + (t_2 - \gamma_2)^* + (t_3 - \gamma_3)^* + \cdots$$

$$= [w]^* \left[\frac{1}{w}\right]^* [b(t_1 - \gamma_1)]^* + \left[\frac{w}{2^{1-w}}\right]^* \left[\frac{2^{1-w}}{w}\right]^* (t_2 - \gamma_2)^* + \left[\frac{w}{3^{1-w}}\right]^* \left[\frac{3^{1-w}}{w}\right]^* (t_3 - \gamma_3)^* + \cdots$$

$$= w \left[\frac{1}{w}\right]^* [b(t_1 - \gamma_1)]^* + \frac{w}{2^{1-w}} \left[\frac{2^{1-w}}{w}\right]^* (t_2 - \gamma_2)^* + \frac{w}{3^{1-w}} \left[\frac{3^{1-w}}{w}\right]^* (t_3 - \gamma_3)^* + \cdots$$

$$\geq w \left[\frac{b}{w}(t_1 - \gamma_1)\right]^* + \frac{w}{2^{1-w}} \left[\frac{2^{1-w}}{w}(t_2 - \gamma_2)\right]^* + \frac{w}{3^{1-w}} \left[\frac{3^{1-w}}{w}(t_3 - \gamma_3)\right]^* + \cdots$$

$$= \| y - x \|_{w,1}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\| y - x \|_{w,1} = b|t_1 - \gamma_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

dir. Ayrıca, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\| T^n y - T^n x \|_{w,1} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_{k+n} - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_{k+n} \right\|_{w,1}$$

$$= \left\| \left(0, \dots, 0, \frac{(n+1)^{1-w}}{w}(t_1 - \gamma_1), \frac{(n+2)^{1-w}}{w}(t_2 - \gamma_2), \dots \right) \right\|_{w,1}$$

$$= w \left[\frac{(n+1)^{1-w}}{w}(t_1 - \gamma_1)\right]^* + \frac{w}{2^{1-w}} \left[\frac{(n+2)^{1-w}}{w}(t_2 - \gamma_2)\right]^*$$
$$+ \frac{w}{3^{1-w}} \left[\frac{(n+3)^{1-w}}{w}(t_3 - \gamma_3)\right]^* + \cdots + \frac{w}{k^{1-w}} \left[\frac{(n+k)^{1-w}}{w}(t_k - \gamma_k)\right]^*$$
$$+ \cdots$$

dir. Şimdi mutlak toplanabilen skalerler için aşağıdaki gerçekler göz önüne alınmalıdır.

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k{}^* r_k{}^* \geq \sum_{k=2}^{\infty} |s_k r_k| = \sum_{k=2}^{\infty} (s_k r_k)^*;$$

olup buradan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k s_k{}^* r_k{}^* \geq \sum_{k=2}^{\infty} u_k (s_k r_k)^*$$

elde edilir; dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\| T^n y - T^n x \|_{w,1} \leq w \left[\frac{(n+1)^{1-w}}{w}\right]^* (t_1-\gamma_1)^* + \frac{w}{2^{1-w}} \left[\frac{(n+2)^{1-w}}{w}\right]^* (t_2-\gamma_2)^* \\
+ \frac{w}{3^{1-w}} \left[\frac{(n+3)^{1-w}}{w}\right]^* (t_3-\gamma_3)^* + \cdots \\
\leq |t_1-\gamma_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |t_k-\gamma_k| = \left|1 - \sum_{k=2}^{\infty} t_k - 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty} |t_k-\gamma_k| \\
\leq 2 \sum_{k=2}^{\infty} |t_k-\gamma_k| \\
\leq 2\left(b|t_1-\gamma_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |t_k-\gamma_k|\right) \\
= 2 \| y - x \|_{w,1}
\end{aligned}$$

dir ve

$$\begin{aligned}
\| T^n y - T^n x \|_{w,1} &= \frac{1}{b}\left(b|t_1-\gamma_1| + b\sum_{k=2}^{\infty} |t_k-\gamma_k|\right) \\
&\leq \frac{1}{b}\left(b|t_1-\gamma_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |t_k-\gamma_k|\right) \\
&= \frac{1}{b} \| y - x \|_{w,1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sebeple her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x, y \in E$ için

$$\| T^n y - T^n x \|_{w,1} \leq \min\left\{\frac{1}{b}, 2\right\} \| y - x \|_{w,1}$$

dir.

Dolayısıyla, görülecektir ki tüm bu hesaplamalar Everest [6] doktora tezininin 3.2'inci bölümünde yer alan ve mutlak toplanabilir diziler uzayında elde ettiği hesaplamalara aynen karşılık gelmektedir. O halde tez çalışmasında ele alınan uzayda bu yukarıda verilen gerçekler göz önüne alınarak hesaplamalar en sonunda mutlak toplanabilir diziler uzayındaki hesaplamalara aynı şekilde denk geleceğinden Everest'in tezininin 3.2'inci bölümünde verilmiş olan genelleştirilmiş sonucun ispatı gereğince aşağıda verilen tezin çalışıldığı Lorentz dizi uzayları için verilen genelleştirilmiş sonuç ispatsız olarak verilebilir.

Teorem 3.12 $w \in (0,1)$ olsun. Ayrıca $b \in (0,1)$ keyfi seçilsin. $\ell_{w,1}$ uzayında bir $(f_n)_{n \in N}$ dizisi bu sabit sayı ve kanonik baz yardımı ile şu şekilde kurulsun: $f_1 := b \, \frac{1}{w} e_1$ ve her $n \geq 2$ tam sayısı için $f_n := \frac{n^{1-w}}{w} e_n$ olsun. Daha sonrasında ise bu dizi yardımı ile aşağıdaki şekilde bu b sayısına bağlı olarak $\ell_{w,1}$'in kapalı ve sınırlı bir E alt kümesi tanımlansın;

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \; her \; t_n \geq 0 \; ve \; \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Daha sonra ise aşağıdaki şekilde tanımlanan sağa kaydırma fonksiyonu $T: E \to E$ göz önüne alınsın.

$$T(x) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \, f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \, f_{n+1}.$$

Bu durumda, E'den alınan her $x = \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k$ ve $y = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k$ için

$$\| T^n y - T^n x \|_{w,1} \leq \frac{2}{1+b} \| y - x \|_{w,1}$$

olup bu eşitsizlikte görülen $\frac{2}{1+b}$ düzgün Lipschitzlik katsayısı koşulu sağlayan en küçük katsayıdır.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında sabit nokta teorisi odaklı üç ayrı konu çalışılmıştır. İlk konu olarak Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı $L_1[0,1]$'in bir analoğu olan Lorentz fonksiyon uzayı $L_{w,1}[0,1]$'ın önduali $L_{w,1}{}^0[0,1]$ Banach uzayının içinde çok geniş sonsuz boyutlu bir altuzayının hangi skaler w için zayıf sabit nokta teorisine sahip olacağının görülmesi için Riesz açı hesabı yapılmıştır. İkinci konu olarak ise Kaczor ve Prus [9] çalışmasının $L_1[0,1]$-analoğu ele alınmaktadır ve gösterilmiştir ki $L_1[0,1]$ içinde afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan çok geniş bir sınıfın varlığı gösterilmiştir. Son konu olarak ise $\ell_{w,1}$ Lorentz dizi uzayı içinde kapalı, sınırlı, konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıf üzerinde tanımlı sağa kaydırma fonksiyonu için sabit noktası olmayan bir düzgün Lipschitz fonksiyonu olması için üst sınır değerlendirmesi yapılmıştır. Çalışmada uygulanan tekniklerden yararlanılarak araştırmacılar farklı yansımayan Banach uzaylarını ele alabilir, daha dar veya daha geniş fonksiyon sınıfları göz önüne alınabilir. Ayrıca tez çalışmasında kullanılan küme sınıflarında daha geniş küme sınıflarının çalışma sonuçları sağlayacak şekilde bulunup bulunmayacağı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Alspach, D. E. (1981). A fixed point free nonexpansive map. Proceedings of the American Mathematical Society, 82(3), 423-424.

[2] Borwein, J. M. and Sims, B. (1984). Non-expansive mappings in Banach lattices and related topics. Houston J. Math. 10, 339–356.

[3] Brézis, H. and Lieb, E. (1983). A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. Proceedings of the American Mathematical Society 88(3), 486-490.

[4] Dowling, P. N., Lennard, C. J. and Turett, B. (1998). Asymptotically isometric copies of c_0 in Banach Spaces. Journal of mathematical analysis and applications, 219(2), 377-391.

[5] Dowling, P. N., Lennard, C. J. and Turett, B. (2004). Weak compactness is equivalent to the fixed point property in c_0. Proceedings of the American Mathematical Society, 1659-1666.

[6] Everest, T. (2013). Fixed Points of Nonexpansive Maps on Closed, Bounded, Convex Sets in l^1 (Doctoral dissertation, University of Pittsburgh).

[7] Goebel, K., and Kirk, W. A. (1990). Topics in metric fixed point theory (Vol. 28). Cambridge University Press.

[8] Goebel, K. and Kuczumow, T. (1979). Irregular convex sets with fixed-point property for nonexpansive mappings. In Colloquium Mathematicum (Vol. 2, No. 40, pp. 259-264).

[9] Kaczor, W. and Prus, S. (2004). Fixed point properties of some sets in l1, in Proceedings of the International Conference on Fixed Point Theory and Applications.

[10] Lennard, C. and Nezir, V. (2011). The closed, convex hull of every ai c_0-summing basic sequence fails the fpp for affine nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl., 381, 678–688.

[11] Lin, P. K. (2008). There is an equivalent norm on ℓ^1 that has the fixed point property. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 68(8), 2303-2308.

[12] Hernández-Linares, C. A. (2011). Propiedad de punto fijo, normas equivalentes y espacios de funciones no-conmutativos. Ph.D. thesis, Universidad de Sevilla.

[13] Hernández-Linares, C. A. and Japón, M. A. (2012) . Renormings and fixed point property in non commutative L_1 spaces II: Affine mappings. Nonlinear Analysis 75(13), 5357–5361.

[14] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L. (1977). Classical Banach spaces I: Sequence spaces, Ergebnisse der Mathematik (Vol. 92). Springer-Verlag.

[15] Lorentz, G. G. (1950). Some new functional spaces. Annals of Mathematics, 37-55.

[16] Maurey, B. (1981). Points fixes contractions de certains faiblement compacts de L^1, Seminaire d'Analyse Fonctionelle, 1980-1981, Centre de Mathématiques, École Polytech., Palaiseau, Exp. No. VIII, 19 pp.

[17] Nezir, V. (2012). Fixed Point Properties for c_0 -like Spaces (Doctoral dissertation, University of Pittsburgh).

[18] Nezir, V., Mustafa, N. and Bozyel, E. (2019). A large class in $L_1[0,1]$ with fixed point property for asymptotically nonexpansive mappings. Mas European International Congress May 2-5, 2019 Erzurum, Turkey.

[19] Nezir, V., Mustafa, N. and Bozyel, E. (2019). Riesz angle for Lorentz function space $L_{w,1}{}^0[0,1]$ and uniform Lipschitz estimate for a class in Lorentz sequence space $\ell_{w,1}$. Mas European International Congress May 2-5, 2019 Erzurum, Turkey.

[20] Nezir, V., Mustafa, N. and Topcu, E. (2019). A large class in $L_1[0,1]$ with fixed point property for nonexpansive mappings. Mas European International Congress May 2-5, 2019 Erzurum, Turkey.

[21] Nezir, V. and Sivek, J. (2019). Geometry and the presence of contractive fixed point free maps, in preparation.

[22] Topcu, E. (2019). Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlarin banach uzayinin analoglarinda sabit nokta teorisi (Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalı).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Engin BOZYEL

Doğum Yeri ve Tarihi : 17/02/1992

Yabancı Dili : Orta derece İngilizce

İletişim (e-posta) : engin_bzyl@outlook.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : kars Alpaslan lisesi

Lisans : Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi-2019

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Yeni kariyer Kpss kursu -Çözüm Eğitim Kurumları-Final Akademi Anadolu Lisesi

Yayınları:

Nezir, V., Mustafa, N. and Bozyel, E. (2019). A large class in $L_1[0,1]$ with fixed point property for asymptotically nonexpansive mappings. Mas European International Congress May 2-5, 2019 Erzurum, Turkey.

Nezir, V., Mustafa, N. and Bozyel, E. (2019). Riesz angle for Lorentz function space $L_{w,1}{}^{0}[0,1]$ and uniform Lipschitz estimate for a class in Lorentz sequence space $\ell_{w,1}$. Mas European International Congress May 2-5, 2019 Erzurum, Turkey.