T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SIFIRA YAKINSAK DİZİLERİN BANACH UZAYINDA EŞDEĞER NORMLAR VASITASIYLA SABİT NOKTA TEORİSİNİ SAĞLAYAN GENİŞ SINIFLAR

Sıddık SADE
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

HAZİRAN-2019
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SIFIRA YAKINSAK DİZİLERİN BANACH UZAYINDA EŞDEĞER NORMLAR VASITASIYLA SABİT NOKTA TEORİSİNİ SAĞLAYAN GENİŞ SINIFLAR

Sıddık SADE
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

HAZİRAN-2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Sıddık Sade'nin Dr. Öğretim Üyesi Veysel Nezir danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Sıfıra yakınsak dizilerin Banach uzayında eşdeğer normlar vasıtasıyla sabit nokta teorisini sağlayan geniş sınıflar" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy . . birliği . . . . ile kabul edilmiştir.

21/ 06/ 2019

	Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA	
Üye	: Prof. Dr. İsa YILDIRIM	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Sıddık SADE

01.06.2019

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

SIFIRA YAKINSAK DİZİLERİN BANACH UZAYINDA EŞDEĞER NORMLAR VASITASIYLA SABİT NOKTA TEORİSİNİ SAĞLAYAN GENİŞ SINIFLAR

SIDDIK SADE

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

1979'da Goebel ve Kuczumow göstermiştir ki ℓ^1'de zayıf* kopakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıf genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir. Peki Goebel ve Kuczumow teoreminin bir eşdeğer norm ile c_0-analoğu düşünülebilir mi? Yani, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ üzerinde bir eşdeğer norm $\|\cdot\|_\sim$ ve c_0'da zayıf kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks C kümelerinden oluşan geniş bir sınıf var mıdır ki bu C kümeleri genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olsun. Bu çalışmamızda göstermekteyiz ki c_0 üzerinde tanımlı bazı eşdeğer normlar $\|\cdot\|_\sim$ bulunabilir öyleki burada zayıf kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıf afin $\|\cdot\|_\sim$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir. Çalışmamızda yer alan kümeler ise c_0 'ın alışılmış normu olan $\|\cdot\|_\infty$ normuna göre bazı asimtotik izometrik c_0-toplam baz dizilerinin kapalı konveks kabukları olup 2011'de Lennard ve Nezir'in çalışmasına göre herhangi asimtotik izometrik c_0-toplam baz dizisinin kapalı konveks kabuğu afin $\|\cdot\|_\infty$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar. Tez çalışmasında ayrıca

Lorentz-Marcinkiewicz dizi uzayları da ele alınmıştır. Bu uzayların elemanları yine c_0 uzayından seçilir. Lorentz-Marcinkiewicz uzayı $\ell_{\delta,1}$ bir ℓ^1-analog Banach uzayı olup bazı ortak özellikleri paylaşmaktadır. Goebel ve Kuczumow teoreminin $\ell_{\delta,1}$-analoğunu incelemek istiyoruz. Yani, $\ell_{\delta,1}$'de zayıf* kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks C kümelerinden oluşan geniş bir sınıf var mıdır ki bu C kümeleri genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olsun. Bu soruya pozitif cevabı afinlik koşulu altında verebileceğimizi çalışmamızda görmekteyiz. Yani, bu çalışmamızda göstermekteyiz ki $\ell_{\delta,1}$'de zayıf* kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıf afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir.

Anahtar Kelimeler: genişlemeyen fonksiyon, yansımayan Banach uzayı, sabit nokta teorisi, kapalı sınırlı konveks küme, yeniden normlama, sıfıra yakınsak dizi uzayı c_0, Lorentz-Marcinkiewicz uzayları

2019, 43 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

LARGE CLASSES WITH FIXED POINT PROPERTY IN BANACH SPACE OF SEQUENCES CONVERGING TO ZERO BY RENORMING EQUIVALENTLY

Sıddık SADE

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof Dr. Veysel NEZİR

In 1979, Goebel and Kuczumow showed that a large class of closed, bounded, convex (c.b.c.), non-weak*-compact subsets of l^1 has the fixed point property (FPP) for nonexpansive mappings. What about c_0 -analogue of Goebel and Kuczumow's theorem with an equivalent norm? That is, do there exist an equivalent norm $\|\cdot\|_\sim$ on $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ and a non-weakly compact, c.b.c. subset C of c_0, for which C has FPP for nonexpansive mappings? In this study, we show that we can find some equivalent norms $\|\cdot\|_\sim$ on c_0 for which there exist non-weakly compact c.b.c. subsets that have FPP for affine $\|\cdot\|_\sim$-nonexpansive mappings. In fact, we see that our examples are closed, convex hulls of some asymptotically isometric (ai) c_0 -summing basic sequences respect to $\|\cdot\|_\infty$ norm whereas in 2011 Lennard and Nezir showed that the closed, convex hull of any ai c_0-summing basic sequence fails FPP for affine $\|\cdot\|_\infty$-nonexpansive mappings. In this thesis, Lorentz-Marcinkiewicz spaces are also investigated. The elements of these spaces are also selected from c_0. Lorentz-Marcinkiewicz space $\ell_{\delta,1}$ is an ℓ^1-analog Banach space sharing some common properties. We wonder $\ell_{\delta,1}$-analogue of Goebel and Kuczumow's theorem? That is, we study to answer the question if there exists a non-weakly compact*, c.b.c. subset C of $\ell_{\delta,1}$, for which C has FPP for nonexpansive mappings? We see that we can give positive answer for this question under affinity condition. So in this study, we show that we can find a large class of non-weakly compact c.b.c. subsets of $\ell_{\delta,1}$ that have FPP for affine nonexpansive mappings.

Key Words: nonexpansive mapping, non-reflexive Banach space, fixed point property, closed bounded convex subset, renorming, space of the sequences converging to zero, Lorentz-Marcinkiewicz spaces

2019, 43 pages

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince her türlü maddi ve manevi destekleri ile göstermiş olduğu yardım için eşim Pınar SADE ve değerli danışman hocam Dr. Öğretim Üyesi Veysel NEZİR'e teşekkür ederim.

Sıddık SADE

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

gf-snt	:	Genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisi
ai	:	Asimtotik izometrik
ℓ^1	:	Mutlak toplanabilir dizilerin Banach uzayı
c_0	:	Sıfıra yakınsak dizilerin Banach uzayı
$\ell_{\delta,1}$	:	ℓ^1-analog Lorentz-Marcinkiewicz uzayı
$c_0(E)$	:	E ‘nin konveks kabuğu
$\overline{c_0}(E)$	:	E ‘nin kapalı konveks kabuğu
x^*	:	x dizisinin bir azalan yeniden düzenlemesi
$\overline{E}^{w*}$	:	E kümesinin zayıf* kapanışı
$\overline{E}^{w}$	:	E kümesinin zayıf kapanışı
e_n	:	n. terimi 1, diğerleri 0 olan ℓ^1 ve c_0 ’ın kanonik bazı

1. GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

ℓ^1 ‘de zayıf* kompakt olmayan ve kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıfın genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine [gf-snt] sahip olduğu Goebel and Kuczumow [8] tarafından gösterilmiştir. Sonrasında ise Chris Lennard’ın danışmanlığı altında yönetilen Everest’in doktora tezinde [6] Goebel ve Kuczumow’un fikirleri kullanılarak gf-snt’ye sahip daha geniş sınıflar elde edilmiştir.

gf-snt’ye sahip yansımayan Banach uzayları $(X, \|\cdot\|)$’na ilk örnek Lin [12] tarafından verilmiştir ve bu örnek $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ Banach uzayının aşağıdaki şekilde tanımlanan $\|\cdot\|^*$ eşdeğer normu ile yeniden normlanması sayesinde verilmiştir.

$$\|x\|^* = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{8^k}{1+8^k} \sum_{n=k}^{\infty} |x_n|, \qquad \forall\, x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1.$$

P. K. Lin’in çalışmasının $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ analoğu araştırmacıların sorguladığı bir konudur. Yani c_0 ‘ın gf-sgt’ye sahip olacak şekilde yeniden normlanıp normlanamayacağı araştırma konusudur. Yakın zamanda afinlik koşulu altında Nezir ve Mustafa [17] tarafından bu soruya pozitif cevap verilmiştir. Ayrıca, Nezir, Mustafa ve Dutta [18] çalışmasında aynı cevabı başka bir eşdeğer normlama ile daha vermiştir. Fakat ekstra afinlik koşulu olmadan P. K. Lin’in çalışmasının c_0 analoğu halen açık kalan bir konudur. Bu soru araştırmacıların çok ilgi duyduğu bir konu olsa da, Goebel ve Kuczumow’un teorisinin c_0 analoğunun da (tabiki bir eş değer norm ile) büyük bir önemi bulunmaktadır çünkü yapılacak çalışmalar P. K. Lin’in çalışmasının c_0 analoğuna çözüm yolları bulmak için aday normları belirlemede ve katkı verecek özellikler elde etmede önem arz etmektedir.

Goebel ve Kuczumow’un ℓ^1 için sonucunun aksine, Dowling, Lennard ve Turett [4] tarafından gösterilmiştir ki $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$‘ın sonsuz boyutlu herhangi kapalı alt uzayı sabit nokta teorisine sahip olamaz. Ayrıca, Dowling, Lennard ve Turett [5] tarafından gösterilmiştir ki $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$‘ın herhangi zayıf kompakt olmayan kapalı sınırlı ve konveks alt kümesi K sabit nokta teorisine (snt) $\|\cdot\|_\infty$-genişlemeyen fonksiyonlar için sahip olamaz. Dolayısıyla Goebel ve Kuczumow teorisinin c_0 analoğunun düşünülebilmesi için c_0 ’ın bir eşdeğer norm ile yeniden normlanması gereklidir. Bu sebeple “c_0 ’ın bir yeniden normlaması ve boştan farklı kapalı, sınırlı ve konveks C alt kümesi var mıdır öyle ki kullanılan eş değer norma göre bulunabilecek alt küme genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olsun?” sorusu araştırılabilir.

Bu tez çalışmasında bu soruya farklı normlar kullanılarak pozitif cevap verilmektedir. fakat fonksiyonlara ek özellik olarak afinlik koşulu konulması dahilinde bu pozitif cevap verilebilmiştir. Bu amaç ile farklı eşdeğer normlar geliştirilmiş olup eş değer normlardan birisi P. K. Lin’in eş değer normuna benzerlik göstermektedir ve bu benzer norm ile çok daha genel sonuçlar verilmiştir. Çalışmanın kullanıldığı kümeler tez danışmanı Nezir’in Lennard ile olan [11] çalışmasının sonuçlarında yer alan kümelerden seçilmiştir ve daha genel kümeler kullanılmıştır. [11] çalışmasının sunduğu sonuçlar aşağıdaki şekildedir:

Lennard ve Nezir [11] tarafından gösterilmiştir ki bir Banach uzayı eğer bir asimtotik izometrik (ai) c_0 -toplam baz dizisi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$’ni içeriyor ise bu dizinin kapalı konvek kabuğu $E := \overline{c_0}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ kümesi gf-snt’ye sahip olamaz; dolayısıyla, Banach uzayını kendisi de gf-snt’ye sahip olamaz.

Bu bahsedilen genel sonuçlarının verilebilmesi için ilk olarak c_0 içindeki bazı asimtotik izometrik c_0 -toplam baz dizileri ele alınmıştır ve aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

<u>Teorem 1.1:</u> $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(0, \infty)$ aralığında bir dizi olsun. c_0 ’da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $f_n := b_n\, e_n$, ile her $n \in \mathbb{N}$ için tanımlansın. Daha sonra ise bu dizi kullanılarak c_0 ’da aşağıdaki $E = E_b$ kümesi tanımlansın.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : 1 = t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \cdots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\}.$$

Bu durumda bu küme üzerinde tanımlanabilen bir sabit noktasız $\|\cdot\|_\infty$-genişlemeyen $U: E \to E$ fonksiyonu vardır.

Bu tez çalışmasında c_0 üzerinde bazı eş değer normlar geliştirilmiş ve bu normlardan birisi en genel sonuçları sunmuştur. Çalışmanın amacı yukarıdaki teoremde yer alan kümelerin veya daha geniş bir sınıfın tanımlanmış eş değer normlara göre afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine (agf-snt) sahip olduğunu göstermektedir. Yani geliştirilen eş değer normlar c_0'da afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip çok geniş kapalı sınırlı ve konveks kümelerin sınıfını bulmaya imkan tanımaktadır. Hatta çalışmamızda yer alan eş değer normlardan birisi çok daha fazlasının mümkün olduğunu göstermektedir. Gerçektende tez danışmanı Nezir ve ortak yazarı Mustafa tarafından yapılan [17] çalışması ile bu tez çalışmasında yer alan bir eşdeğer normumuz ile c_0'ın agf-snt'ye sahip olacak şekilde yeniden normlanabileceği ispatlanmıştır. Tez danışmanı Nezir'in tanımladığı eş değer normumuz ve onun vasıtasıyla elde edilen diğer normlarımız vasıtasıyla tez danışmanı Nezir'in doktora tezi [15] (Lennard danışmanlığı altında hazırlanmıştır) çalışmasında yer alan bazı c_0-toplam baz dizilerinin kapalı konveks kabuğu ele alınmış ve bu kümeler üzerinde de sabit nokta teorisi test edilmiştir. Bu kümeler [15] doktora tez çalışmasında aşağıdaki şekilde ve aşağıdaki sonuçlarla verilmiştir:

$(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığından seçilmek üzere $\Gamma > 0$ sayısı şu koşulları sağlasın: [her $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ için $\Gamma \leq \gamma_\mathrm{N}$] ve $\sigma := \sum_{n=2}^{\infty} |\gamma_n - \gamma_{n-1}| < \infty$; ayrıca kabul edilsin ki $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi terimleri $(0,\infty)$ olan ve bir $\lambda \in (0,\infty)$ noktasına yakınsak bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\eta_n := \gamma_n(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4 + \ldots + b_ne_n)$ formulü ile $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın ve ayrıca bu dizinin bir alt c_0-toplam sınırına sahip olduğu kabul edilsin. Yani, kabul edilsin ki $\exists K \in (0,\infty)$ var öyle ki $\forall\, \alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$,

$K\sup_{n\geq 1}\left|\sum_{j=n}^{\infty}\alpha_j\right| \leq \left\|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\eta_j\right\|$. Bu durumda, Bu durumda, $\exists L > 0$ vardır öyle ki $\left(\frac{\eta_n}{L}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir ai c_0-toplam baz dizisidir. Ayrıca, bu $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu üzerinde; yani, $E := \overline{c_0}(\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\})$ üzerinde tanımlı bir sabit noktasız afin $\|\cdot\|_\infty$-daralan fonksiyon $U: E \to E$ bulunabilir.

Yukarıda belirtilen tüm küme örnekleri ve tez danışmanının tezinde yer alan bu E kümeleri göz önüne alınarak, aşağıda belirtilen $\|\,.\,\|_\sim$ eş değer normu ile c_0 'ın yeniden normlanması durumunda, $(\mu_n(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4 + \ldots + b_ne_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu afin $\|\,.\,\|_\sim$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir öyle ki burada $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri $(0,\infty)$ aralığında yer alan herhangi bir dizidir.

Her $x = (\xi_k)_k \in c_0$ için $\|x\|_\sim$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|x\|_\sim := \lim_{p\to\infty}\sup_{k\in\mathbb{N}}\gamma_k\left(\sum_{j=k}^{\infty}\frac{|\xi_j|^p}{2^j}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{öyle ki burada } \gamma_k \uparrow_k 1 \text{ ve } \gamma_k \text{ artan dizi.}$$

Yukarıda tanımlanan eş değer norm sabit nokta teorisine sahip en geniş sınıfı sunan eş değer normdur. Not edilmelidir ki, yayınlanmış tez yazarının ortak çalışmasında [20], bu norm ile afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan çok geniş sınıflar verilmiştir.

Tez çalışmasında Nezir ve tez yazarı Sade'nin yayınlanmış [20] çalışmasında yer alan bir diğer norm da tanıtılmaktadır. Bu norm aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

Her $x = (\xi_k)_k \in c_0$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\|x\| = \frac{1}{\gamma_1} \lim_{p\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k \left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{|\xi_j|^p}{j^2} \right)^{\frac{1}{p}} + \gamma_1 \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k |\xi_k^* - \alpha\xi_j^*|$$
$$+ \gamma_1 \sqrt{\sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} {Q_k}^2 |\xi_k - \alpha\xi_j|^2}$$

öyle ki burada $\gamma_k \uparrow_k 1, \gamma_{k+1} > \gamma_k, \forall k \in \mathbb{N}, x^* := (\xi_j^*)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisi x' in bir azalan sıralaması, $\sum_{k=1}^{\infty} Q_k = 1,\ Q_k \downarrow_k 0$ ve $Q_k > Q_{k+1},\ \forall k \in \mathbb{N}$ olup azalan sıralama ise şu şekilde tanımlanabilir: $\exists$ a 1-1 fonksiyon $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ve $\exists (\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ bulunabilir öyle ki her $\varepsilon_{\pi(j)} \in \{-1,1\}$ ve $(\xi_k^*)_k = |\xi_{\pi(k)}| = \varepsilon_{\pi(k)}\, \xi_{\pi(k)}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Tez çalışmasında c_0'ın bu eş değer norma göre kendisinin alışılmış normunun bir asimtotik izometrik kopyasını içermediği ve dolayısıyla normun sabit nokta teorisini sağlayabilecek aileler için iyi bir aday norm olduğu gösterilmiştir.

Tez çalışmasında ayrıca Lorenz-Marcinkiewicz dizi uzayları ele alınmıştır. Lorentz-Marcinkiewicz uzayı $\ell_{\delta,1}$ bir ℓ^1-analog Banach uzayı olup bazı ortak özellikleri paylaşmaktadır. Tez çalışmasında c_0 üzerinde yapılan araştırma gibi ayrı bir bölüm olarak Goebel ve Kuczumow teoreminin $\ell_{\delta,1}$-analoğu incelenmiştir. Yani, $\ell_{\delta,1}$'de zayıf* kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks C kümelerinden oluşan geniş bir sınıf var mıdır ki bu C kümeleri genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olsun sorusu incelenmiştir. Bu soruya pozitif cevabı afinlik koşulu altında verilebileceği gösterilmektedir. Yani, bu tez çalışmasının bir bölümünde gösterilmektedir ki $\ell_{\delta,1}$'de zayıf* kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıf afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir. Bu bölüm üzerine ise tez yazarının da ortak olduğu [18] çalışması bulunmaktadır.

1.2 Kuramsal Temeller

Bu bölümde tez çalışmasında kullanılan araçlar olarak ihtiyaç duyulacak tanım, teorem ve lemmalar verilecektir.

Tanım 1.1: C kümesi bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks altkümesi olsun. Bir $T: C \to C$ fonksiyonu ele alınsın.

1. Her $x, \mathrm{y} \in C$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için $T((1-\lambda)\, x + \lambda\, \mathrm{y}) = (1-\lambda)\, T(x) + \lambda\, T(\mathrm{y})$ ise T'ye afin fonksiyon denir [7].

2. Her $x, \mathrm{y} \in C$ için $\| Tx - T\mathrm{y} \| \leq \| x - \mathrm{y} \|$ ise T'ye genişlemeyen fonksiyon denir [7].

Ayrıca, eğer her $T: C \to C$ genişlemeyen fonksiyonunun bir sabit nokası var ise yani en az bir $w \in C$ var öyleki $T(w) = w$ ise bu durumda C'ye genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir (gf-snt) denir [7].

Tez çalışması süresince bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayının $E \subseteq X$ altkümesi için E 'nin konveks kabuğu $c_0(E)$ ve E 'nin kapalı konveks kabuğunu $\overline{c_0}(E)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2: Eğer bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayının her boştan farklı zayıf kompakt altkümesi C üzerinde tanımlı herhangi genişlemeyen $T: C \to C$ fonksiyonunun C'de en az bir sabit noktası var ise bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayına genişlemeyen fonksiyonlar için zayıf sabit nokta teorisine sahip ya da zayıf sabit noktasını korur denir [7].

Bilindiği üzere $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$c_0 = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \text{her } x_n \in \mathbb{R} \text{ ve } \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}$$

Ayrıca, her $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ için $\|x\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}}$ ve $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\ell^1 = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \colon \text{her } x_n \in \mathbb{R} \text{ ve } \|x\|_1 \colon \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}.$$

[11] çalışmasında yer alan bir $(X, \|.\|)$ Banach uzayının içinde bulunabilecek bir asimtotik izometrik c_0 - toplam baz dizisi tanımı aşağıdaki şekildedir.

<u>Tanım 1.3:</u> $(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı olsun, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi X ' de yer alan ve aşağıdaki koşulu sağlayan bir dizi olsun; o zaman, bu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine $(X, \|.\|)$ uzayında bir asimtotik izometrik (a.i) c_0 - toplam baz dizisi deriz : En az bir 0' a yakınsak azalan bir dizi $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, \infty)$ vardır öyle ki her $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ için

$$\sup_{n\geq 1} \left(\frac{1}{1+\varepsilon_n} \right) \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j \right| \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} t_j x_j \right\| \leq \sup_{n\geq 1} (1+\varepsilon_n) \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j \right|.$$

Eğer bir $L > 0$ için $(z_n/L)_{n\in\mathbb{N}}$ bir asimtotik izometrik c_0 -toplam baz dizisi oluyorsa $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine $(X, \|.\|)$ uzayında bir L - ölçekli asimtotik izometrik c_0 -toplam baz dizisi denilir.

Bu tanımdan yola çıkılarak aşağıdaki teorem Lennard ve Nezir'in genel sonuçları olarak verilmiştir. Not edilmelidir ki tezde çalışılan kümeler bu teoremlerde bahsedilen kümelerden türemiştir.

<u>Teorem 1.4:</u> $L \in (0, \infty)$ olsun. Eğer bir Banach uzayı bir L - ölçekli asimtotik izometrik c_0 -toplam baz dizisi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$' i içerirse, $E := \overline{c_0}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ kümesi afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar. Hatta bundan daha fazlasını da söyleyebiliriz. En az bir sabit noktası olmayan afin daralan $U : E \to E$ fonksiyonu vardır.

Goebel ve Kuczumow [8] çalışmasında ise anahtar görevini alan aşağıdaki lemma kullanılmıştır. Tez çalışmasında ele alınan uzaylarda bu lemmaya analog olacak başka lemma ve sonuçlar takip eden notlar arasında yer almaktadır.

Lemma 1.5: Eğer $\{x_n\}$ dizisi ℓ^1 uzayında bir x noktasına zayıf topolojide yakınsıyor ise o zaman her $y \in \ell^1$ ve $r(y) = \limsup_n \|x_n - y\|_1$ ile tanımlı fonksiyon için $r(y) = r(x) + \|y - x\|_1$ dir.

Buna göre aşağıdaki lemmalar kolaylıkla elde edilebilmektedir ve [18] çalışmasında aşağıdaki ispatı çok açık olan ilk lemma sunulmuştur.

Lemma 1.6: $(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı olsun, $(x_n)_n$ dizisi X ' de sınırlı bir dizi olsun. Herhangi bir $(x_{n_k})_k$ alt dizisi için aşağıdaki şekilde tanımlanan $s : X \to [0, \infty)$ fonksiyonunu göz önüne alalım:

$$s(y) = \limsup_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_{n_k} - y \right\| , \forall y \in X .$$

O zaman, c_0 ’ın zayıf Banach-Saks özelliği dolayısıyla [22], eğer $(y_m)_m$ dizisi c_0 ’ da x ’e zayıf topolojide yakınsayan bir dizi ise, o zaman $\|\cdot\|$ normu c_0 üzerinde $\|\cdot\|_\infty$ normuna eşdeğer herhangi bir norm olmak üzere Cesaro avarajı normsal olarak x ’e yakınsayan en az bir $(x_n)_n$ alt dizisi vardır öyle ki s fonksiyonunu bu alt dizi vasıtasıyla yazılırsa her y $\in$ c_0 için $s(y) = \|y - x\|$ dır.

Tez çalışmasının bir diğer bölümünde yer alan araştımalar Lorentz-Marcinkiewicz uzayları üzerinedir ve bu Banach uzaylarının tanımı şu şekildedir.

$\delta \in (c_0 \backslash l^1)^+$ herhangi ağırlık dizisi olsun öyleki $\delta_1 = 1$, $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ azalan; yani: $\delta = (\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\delta_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ öyleki aşağıdaki koşulları sağlasın:

(1) $1 = \delta_1 \geq \delta_2 \geq \delta_3 \geq \cdots \geq \delta_n \geq \delta_{n+1} \geq \cdots, \forall n \in \mathbb{N}$, (2) $\delta_n \to 0$ ve (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = \infty$ Örneğin, $\delta_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Tanım 1.7: $\ell_{\delta,\infty}$ uzayı:

$$\ell_{\delta,\infty}:=\left\{ x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in c_0 \;\middle|\; \begin{array}{c} x^* := (x_n{}^*)_{n\in\mathbb{N}} \text{ dizisi x in azalan sıralaması öyle ki} \\ \|x\|_{\delta,\infty} := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\sum_{j=1}^{n} x_j{}^*}{\sum_{j=1}^{n} \delta_j} < \infty \end{array} \right\}$$

Bu uzay ℓ_∞ uzayının (sınırlı diziler uzayının) bir analoğudur. Gerçekten de $(\ell_{\delta,\infty},\|.\|_{\delta,\infty})$ ayrılabilir olmayan bir Banach uzayıdır.

Burada not edilmelidir ki $x^* :=$ öyle bir dizidir ki bu dizi $|x| = \left(|x_j|\right)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisinin sıfırdan farklı terimlerini içeren ve bu terimlerin azalacak şekilde aynı terimler varsa tekrar edilmesi ile sıralandığı ve son terimleri ($|x|$ dizisi sonlu sayıda sıfırdan farklı terim içeriyorsa) sonsuz sayıda 0 olarak takip eden dizidir.

Tanım 1.8: $\ell^0_{\delta,\infty}$ uzayı:

$$\ell^0_{\delta,\infty}:=\left\{ x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in c_0 \;\middle|\; \begin{array}{c} x^* := (x_n{}^*)_{n\in\mathbb{N}} \text{ dizisi } x \text{ in azalan sıralaması öyle ki} \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{j=1}^{n} x_j{}^*}{\sum_{j=1}^{n} \delta_j} = 0 \end{array} \right\}$$

Bu uzay c_0 uzayının bir analoğudur ve $(\ell^0_{\delta,\infty},\|.\|_{\delta,\infty})$ uzayı $\ell_{\delta,\infty}$ ın ayrılabilir Banach uzayıdır.

Tanım 1.9: $\ell_{\delta,1}$ uzayı:

$$\ell_{\delta,1}:=\left\{ x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in c_0 \;\middle|\; \begin{array}{c} x^* := (x_n{}^*)_{n\in\mathbb{N}} \text{ dizisi } x \text{ in azalan sıralaması öyle ki} \\ \|x\|_{\delta,1} := \sum_{j=1}^{n} \delta_j x_j{}^* < \infty \end{array} \right\}$$

Bu uzay ℓ^1 uzayının bir analoğudur. $(\ell_{\delta,1},\|.\|_{\delta,1})$ ayrılabilir bir Banach uzayıdır.

Lorentz uzayı tanım ve özellikleri için Lorentz [14] ve Lindenstrauss ve Tzafriri [13] çalışmaları incelenebilir.

Bu uzay üzerinde yapılacak çalışma için Lemma 1.5 ile tanıtılan Goebel ve Kuczumow'un lemmasının bu uzaylarda analoğu aşağıdaki lemma ile tez danışmanımızın danışmanlığı altında hazırlanmış olan Delibaş [2] tezinde ispatının açık olması sebebiyle ispatsız olarak sunulmuştur.

Lemma 1.10: $(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı olsun.

1. Eğer X'in Banach-Saks özelliği var ise ve $x \in X$ noktası sınırlı bir dizi $(x_n)_n$'in zayıf limiti ise, bu durumda en az bir $\left(x_{n_k}\right)_k$ alt dizisi vardır öyle ki bu alt dizinin Cesaro norm limiti x olup eğer s fonksiyonu bu alt dizi vasıtasıyla şu şekilde tanımlanır ise $\forall y \in X$ için $s(y) = \text{limsup}_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_{n_k} - y\right\|$, bu durumda $s(x) = 0$ ve $\forall y \in X$ için $s(y) = \|y - x\|$ dir.

2. Eğer X'in zayıf Banach-Saks özelliği var ise ve $x \in X$ noktası bir $(x_n)_n$ dizisinin zayıf limiti ise, bu durumda en az bir $\left(x_{n_k}\right)_k$ alt dizisi vardır öyle ki bu alt dizinin Cesaro norm limiti x olup eğer s fonksiyonu bu alt dizi vasıtasıyla şu şekilde tanımlanır ise $\forall \text{y} \in X$ için $s(y) = \text{limsup}_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{\text{k}=1}^{m} x_{n_k} - y\right\|$, bu durumda $s(x) = 0$ ve $\forall \text{y} \in X$ için $s(y) = \|y - x\|$ dir.

Bu sebeple, Lorentz-Marcinkiewicz uzaylarının Banach-Saks özellikleri dolayısıyla (bkz [1, 23, 24]), yukarıdaki koşullar geçerlidir.

Geliştirilen aday normun ele alınacak küme sınıfının gf-snt'ye sahip olmasına ihtimal tanıyabileceğini test etmek için Dowling, Lennard ve Turett [4] ve Dowling ve Lennard [3] çalışmalarında yer alan aşağıdaki tanımlar ve teorem göz önüne alınmalıdır.

Tanım 1.11: Bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayına aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda ℓ^1'in bir asimtotik izometrik (ai) kopyasını içerir denir: X'de en az bir $(x_n)_n$ dizisi ve (0,1) aralığında 0' a azalarak yaklaşan bir $(\varepsilon_n)_n$ dizisi vardır öyleki her $(a_n)_n \in \ell^1$ dizisi için

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_n)|a_n| \le \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

dir [4].

Tanım 1.12: Bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayına aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda c_0'ın bir ai kopyasını içerir denir: X'de en az bir $(x_n)_n$ dizisi ve $(0,1)$ aralığında 0' a azalarak yaklaşan bir $(\varepsilon_n)_n$ dizisi vardır öyleki her $(a_n)_n \in c_0$ dizisi için

$$\sup_n (1-\varepsilon_n)|a_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq \sup_n |a_n|$$

dir [3].

Teorem 1.13: Eğer bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayı c_0'ın bir ai kopyasını içerirse, bu durumda X gf-snt'yi bozar [4].

Teorem 1.14: Eğer bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayı ℓ^1'in bir ai kopyasını içerirse, bu durumda X gf-snt'yi bozar [3].

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Goebel ve Kuczumow [8] çalışması ile ℓ^1'de genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan zayıf* kopmakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıfın varlığı gösterilmiştir. Tez danışmanı Nezir'in doktora tez danışmanı Chris Lennard'ın yine danışmanlığı altında tamamlanmış olan Everest [6] doktora tez çalışmasında ise Goebel ve Kuczumow'un çalışması genelleştirilerek daha geniş sınıfların gf-snt'yi sağladığı gösterilmiştir. Aşağıdaki sonuç Goebel ve Kuczumow'un genel sonucudur.

Teorem 2.1: $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında sınırlı bir dizi olsun. $b \coloneqq \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$ olarak tanımlansın. c_0'da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $f_n := b_n\, e_n$, ile her $n \in \mathbb{N}$ için tanımlansın. Daha sonra ise bu dizi kullanılarak ℓ^1'de aşağıdaki E kümesi tanımlansın.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n\, f_n :\ \text{her } t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Bu durumda E kümesinin gf-snt'ye sahip olması için gerek ve yeter koşul $N_0 = \{ j \in \mathbb{N} : b = b_j \}$ kümesinin boştan farklı olmasıdır.

Everest'in tezinde [6] ise şu genel sonuç verilmektedir.

Teorem 2.2: $(b_{j,n})_{j,n\in\mathbb{N}}$ dizisi reel terimli bir dizi olsun. Her $j \in \mathbb{N}$ için $f_j = \sum_{n=1}^{\infty} b_{j,n}\, e_n$ olarak tanımlansın fakat en az bir sonlu elemanlı $F \subset \mathbb{N}$ olsun öyle ki her $n \in \mathbb{N}\backslash F$ için $b_{j,n} = 0$ olsun. Bu durumda bu dizi kullanılarak ℓ^1'de tanımlanan aşağıdaki E kümesi gf-snt'ye sahiptir.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n\, f_n :\ \text{her } t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Tez çalışmasına ilham olan Goebel ve Kuczumow [8] çalışmasında yer alan bir teorem ve ispatı aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 2.3: $b \in (0,1)$ keyfi seçilsin. c_0 uzayında bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bu sabit sayı ve kanonik baz yardımı ile şu şekilde kurulsun. $f_1 := b\, e_1$, $f_2 := b\, e_2$ ve her $n \geq 3$ tam sayısı için $f_n := e_n$ olsun. Daha sonrasında ise bu dizi yardımı ile aşağıdaki şekilde bu b sayısına bağlı olarak ℓ^1'in kapalı ve sınırlı bir alt kümesi $E = E_b$ tanımlansın;

$$E := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} t_n\, f_n : \text{ her } n \in \mathbb{N} \text{ için } t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1\right\}.$$

Yukarıdaki şekilde tanımlanan E kümesi ℓ^1'de gf-snt'ye sahiptir.

İspat: $T: E \to E$ bir $\|.\|_1$-genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda yaklaşık sabit nokta dizisi adını alan en az bir $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ dizisi vardır öyle ki $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_1 \underset{n}{\to} 0$ olup $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sınırlıdır ve dolayısıyla bir zayıf* limiti vardır. Genelliği bozmayarak gerekirse bir alt diziye geçilerek denilebilir ki, en az bir $z \in \ell^1$ öyle ki $x^{(n)}$ dizisi z ye zayıf* topolojide yakınsar. Bu durumda Lemma 1.5 gereğince, aşağıdaki şekilde tanımlanan bir $s: \ell^1 \to [0, \infty)$ fonksiyonu vardır: $\forall y \in \ell^1$ için

$$s(y) = \limsup_n \left\|x^{(n)} - y\right\|_1$$

ve bu fonksiyon $\forall y \in \ell^1$ için $s(y) = s(z) + \|y - z\|_1$ eşitliğini sağlar.

Daha sonra E kümesinin zayıf* kapanışı aşağıdaki şekilde tanımlanır ve iki farklı durum incelenir.

$$W := \overline{E}^{w*} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n \;:\; t_n \geq 0 \; ve \; \sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq 1\right\}$$

Durum 1: $z \in E$.

Bu durumda $s(Tz) = s(z) + \|Tz - z\|_1$ olup

$$\begin{aligned} s(Tz) &= \limsup_n \left\|Tz - x^{(n)}\right\|_1 \\ &\leq \limsup_n \left\|Tz - Tx^{(n)}\right\|_1 + \limsup_n \left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_1 \\ &\leq \limsup_n \left\|z - x^{(n)}\right\|_1 \\ &= s(z) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\|Tz - z\|_1 \leq 0$ olup $Tz = z$ dir ve bu z nin E kümesinde T fonksiyonun bir sabit noktası olduğunu ifade eder.

Durum 2: $z \in W \backslash E$.

Bu durumda ise W'nun tanımı gereğince z noktasının $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n$ formunda yazılcak şekilde $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < 1$ ve $\gamma_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur. Bu skalerler vasıtasıyla $\delta := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ ve

$$h_\lambda := (\gamma_1 + \lambda\delta) f_1 + (\gamma_2 + (1-\lambda)\delta) f_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \gamma_n f_n$$

olarak tanımlansın.

İspatın geçerliliği açısından h_λ nın E kümesinin bir noktası olması istenileceğinden λ değerleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right]$ aralığından seçilecektir. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} \|h_\lambda - z\|_1 &= \|\lambda\delta f_1 + (1-\lambda)\delta f_2\|_1 \\ &= \|(\lambda\delta b, (1-\lambda)\delta b, 0, 0, \cdots)\|_1 \\ &= \beta b\delta|\lambda| + \beta b\delta|1-\lambda| \\ &= \max \begin{cases} b\delta - 2b\delta\lambda & \text{eğer } \lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, 0\right) \ ise, \\ b\delta & \text{eğer } \lambda \in [0,1] \ ise, \\ 2b\delta\lambda - b & \text{eğer } \lambda \in \left(1, \quad \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right] \ ise \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu durumda $\Gamma := \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} \|h_\lambda - z\|_1$ olarak tanımlandığında $\|h_\lambda - z\|_1$ değeri $\lambda \in [0,1]$ iken bir tek minumuma sahiptir öyleki bu minimum değer $\Gamma = b\delta$ dir.

Diğer taraftan, $y \in E$ keyfi bir nokta olduğunda $\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n$ formunda yazılcak şekilde $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $t_n \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur.

O halde,

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{y}-z\|_1 &= \left\|\sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k\right\|_1 \\
&= \|(t_1-\gamma_1)be_1 + (t_2-\gamma_2)be_2 + (t_3-\gamma_3)e_3 + (t_4-\gamma_4)e_4 + \cdots\|_1 \\
&= b|t_1-\gamma_1| + b|t_2-\gamma_2| + |t_3-\gamma_3| + |t_4-\gamma_4| + |t_5-\gamma_5| + \cdots \\
&= b\sum_{k=1}^{\infty} |t_k-\gamma_k| + (1-b)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k-\gamma_k| \\
&\geq b\left|\sum_{k=1}^{\infty} (t_k-\gamma_k)\right| \\
&= b\delta
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu sebeple, λ skaleri $[0,1]$ aralığında seçilirse her $y \in E$ ve her $z \in W\backslash E$ için $\|\mathrm{y}-z\|_1 \geq \Gamma$ olup bu eşitsizliği sağlayan bir tek minimum $\lambda_0 \in [0,1]$ vardır öyleki bu değer için $\left\|h_{\lambda_0} - z\right\|_1$=$\Gamma$ dir. Şimdi, $\Lambda := \{h_\lambda \ : \ \lambda \in [0,1]\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\Lambda \subseteq E$ kompakt, konveks alt küme olup her $h \in \Lambda$ için

$$\begin{aligned}
s(Th) &= \limsup_n \left\|Th - x^{(n)}\right\|_1 \\
&\leq \limsup_n \left\|Th - Tx^{(n)}\right\|_1 + \limsup_n \left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_1 \\
&\leq \limsup_n \left\|h - x^{(n)}\right\|_1 \\
&= s(h) \text{ dir.}
\end{aligned}$$

O halde, $\|z - Th\|_1 \leq \|z - h\|_1$ olup $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ ve T sürekli olduğundan, Schauder'ın Sabit nokta teoremi [25] gereğince T'nin bir sabit noktası vardır ve $h = h_{\lambda_0}$ noktası $\|y - z\|_1 \ : \ y \in E$ değerlerini minimumlaştıran yegane nokta olması sebebiyle bahsi geçen sabit nokta bu nokta olup $Th = h$ dir.

Tüm bu sebepler dolayısıyla, arzu edildiği gibi E kümesi gf-snt'ye sahiptir.

Goebel ve Kuczumow analojisinin c_0'da incelemesi için bazı eş değer normlar ele alınacaktır. Bu eş değer normlardan birisi Nezir [16] çalışmasında diğeri ise Nezir, Mustafa, Dutta [18] çalışmasında tanıtılmıştır.

Bu normlar aşağıdaki şekildedir ve gerçekten de eş değer oldukları ispatlarda görüldüğü gibidir.

<u>Tanım 2.4:</u> Her $x = (\xi_k)_k \in c_0$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\|x\| = \|x\|_\infty + \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k|\xi_k - \alpha\xi_j| \text{ öyle ki burada } \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = 1,$$

$$Q_k \downarrow_k 0 \text{ ve } \quad Q_k > Q_{k+1}, \ \forall k \in \mathbb{N} \text{ şeklinde tanımlansın [18].}$$

Bu durumda aşağıda görüleceği üzere her α için $\|.\|$ normu c_0 üzerinde tanımlı bir eşdeğer normdur.

Öncelikle kolayca görülebilir ki her $x \in c_0$ için $\|x\| \geq \|x\|_\infty$. Ayrıca her $j \in N$ için

$$\sum_{\substack{k=1 \\ j\neq k}}^{\infty} Q_k|\xi_k - \alpha\xi_j| + Q_j|1-\alpha||\xi_j| \leq \sup_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ j\neq k}}|\xi_k - \alpha\xi_j| + |1-\alpha||\xi_j|$$

dir. Ohalde en az bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\|x\|_\infty = |\xi_N|$ olup bu durumda;

1. Eğer $0 < \alpha \leq 1$ ise

$$\|x\| \leq (3-\alpha)\|x\|_\infty + \alpha\sup_k\{|\xi_k| \ : sgn(\xi_k) = -sgn(\xi_N)\}.$$

Bu sebeple, $\|x\| \leq (3-\alpha)\|x\|_\infty + \alpha\|x\|_\infty = 3\|x\|_\infty$ dir.

2. Eğer $\alpha > 1$ ise

$$\|x\| \leq \alpha\|x\|_\infty + \alpha\|x\|_\infty + \sup_k\{|\xi_k| \ : sgn(\xi_k) = -sgn(\xi_N)\}$$

$$\leq (2\alpha+1)\|x\|_\infty \text{ dir.}$$

3. Eğer $\alpha < 0$ ise

$$\|x\| \leq \|x\|_\infty + \sup_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ j\neq k}}|\xi_k - \alpha\xi_j| + |1-\alpha||\xi_j|$$

$$\leq (3-2\alpha) \parallel x \parallel_\infty \text{ dir.}$$

4. Eğer $\alpha = 0$ ise

$$\|x\| := \|x\|_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k|\xi_k| \leq 2 \parallel x \parallel_\infty \text{ dir.}$$

Dolayısıyla, her α için $\|.\|$ normu c_0 üzerinde tanımlı bir eşdeğer normdur.

Nezir, Mustafa ve Dutta [18] çalışmasında bu norma göre c_0'ın alışılmış normlu uzayının bir asimtotik izometrik kopyasını içermediği ve Goebel ve Kuczumow analojisinin incelenmesi için uygun bir eş değer norm olduğu gözlemlenmiştir. Tez danışmanının danışmanlığı altında hazırlanan Güven [9] yüksek lisans tezinde ise bu eş değer norma göre afinlik koşulu altında gf-snt'yi sağlayan kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş sınıfların varlığı gösterilmiştir.

<u>Teorem 2.5:</u> $b \in (0,1]$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := be_n$ olacak şekilde c_0'da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın.

$\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$ olmak üzere $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın ve daha sonra c_0 ' da kapalı, sınırlı, konveks olan aşağıdaki $E = E_b$ kümesini ele alalım.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{her } \alpha_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\}.$$

Bu durumda $\frac{3}{2} > \alpha > 1$ olacak şekilde bir α sayısı vardır öyle ki her $b \in (0,1]$ için yukarıdaki örnekte tanımladığımız E afin $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini korur öyle ki $Q_1 > \dfrac{2\alpha}{1+2\alpha}$ (dolayısıyla $Q_2 < \dfrac{1}{1+2\alpha}$) ve $\alpha \geq 2Q_1 + 2Q_2$.

<u>Teorem 2.6:</u> $b \in (0,1)$ ve $N \in \mathbb{N}$ olsun. Her $n \leq N$ için $f_n := be_n$ ve her $n \geq N+1$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde c_0 ' da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın.

$\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$ olmak üzere $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın ve daha sonra c_0 ' da kapalı, sınırlı, konveks olan aşağıdaki $E = E_b$ kümesini ele alalım.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{her } \alpha_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\}.$$

Bu durumda $\frac{3}{2} > \alpha > 1$ olacak şekilde bir α sayısı vardır öyle ki her $b \in (0,1]$ için yukarıdaki örnekte tanımladığımız E afin $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini korur öyle ki $Q_1 > \frac{2\alpha}{1+2\alpha}$ (dolayısıyla $Q_2 < \frac{1}{1+2\alpha}$) ve $\alpha \geq 2Q_1 + 2Q_2$.

Nezir [16] çalışması ile tanıtılan ve c_0 içinde gf-snt'ye sahip en geniş sınıflara imkan tanıyan eş değer norm ise aşağıdaki şekilde tanımlanır ve gerçekten de eş değer norm olduğu takip eden notlardan çalışmada yer aldığı gibi görülmektedir.

<u>Tanım 2.7:</u> Her $x = (\xi_k)_k \in c_0$ için $\|x\|_\sim$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|x\|_\sim := \lim_{p\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k \left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{|\xi_j|^p}{2^j} \right)^{\frac{1}{p}}$$ öyle ki burada $\gamma_k \uparrow_k 1$ ve γ_k artan dizidir.

Bu normun eş değer norm olduğu aşağıdaki teorem gereğince açıktır.

<u>Teorem 2.8:</u> Her $x = (\xi_k)_k \in c_0$ için

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|^p}{k^2} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|^p}{2^k} \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

dir [16].

İspat: $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$ alınsın. $x \neq (0,0,\cdots)$ olduğu kabul edilecektir aksi taktirde ispat aşikardır.

Bu durumda,

$$\exists N \in \mathbb{N} \ni \|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k| = \max_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k| = |\xi_N|.$$

Ohalde ortalama kuvvet eşitsizliği dolayısıyla [10], $\|x\|_\infty = \max_{k\le N} |\xi_k|$

$$= \max\{|\xi_1|, |\xi_2|, \cdots, |\xi_N|\} \qquad = \lim_{p\to\infty}\left(\frac{|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \cdots + |\xi_N|^p}{N}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{|\xi_k|^p}{N}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ayrıca, ağırlıklı ortalama kuvvet eşitsizliği dolayısıyla [10],

$$\|x\|_\infty = \max_{k\le N} |\xi_k| \qquad = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|, \cdots, |\xi_N|\}$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left(\frac{|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \cdots + |\xi_N|^p}{2^N}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{|\xi_k|^p}{2^N}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Gösterilebilir ki aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\xi_k|^p}{2^k}\right)^{\frac{1}{p}}$$

dir.

Gerçekten de,

$$\|x\|_\infty \le \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{|\xi_k|^p}{2^k}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Diğer taraftan, $\exists s\in\mathbb{N}$ öyleki $|\xi_k|<\frac{1}{k^2}$, $\forall k\geq s$.

Dolayısıyla,

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}\right)^{\frac{1}{p}}=\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{s-1}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}+\sum_{k=s}^{\infty}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{s-1}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}+\frac{|\xi_s|^p}{s^2}+\int_s^{\infty}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}\,dk\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}+\int_s^{\infty}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}\,dk\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}+\int_s^{\infty}\frac{1}{k^{2p+2}}\,dk\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \lim_{p\to\infty}\left(|\xi_N|^p\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(2p+1)s^{2p+1}}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \leq \lim_{p\to\infty}\left(|\xi_N|^p\left[1+\int_1^{s}\frac{1}{k^2}\,dk\right]-\frac{1}{(2p+1)s^{2p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=|\xi_N|$$

$$=\|x\|_{\infty}.$$

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tez çalışmasının bu bölümünde tarafımızın ortak olduğu yayınlanmış iki adet makalenin oluşturduğu sonuçlar sunulmuştur. Tez çalışması sırasında hazırlanmış üç adet makale bulunmaktadır ve bunlardan ilki Nezir ve Sade [21] makalesi olup araştırma bulguları bölümünde anlatılan çalışma yayınlanan [20] çalışmasının daha iyi sonuçlar sunması sebebiyle bahsedilen ilk makale bulgular içinde sunulmamıştır. Bu referansa okuyucunun kolaylıkla ulaşabileceği düşüncesi hakim olup [21] çalışmasının özeti giriş bölümünde sunulmuştur.

Bu bölüm farklı iki Banach uzayın incelenmesi sebebiyle iki adet alt başlık halinde sunulmaktadır. Birinci bölümde tez yazarının dahil olduğu [20] çalışmasında yer alan c_0'ın bir eş değer norm ile yeniden normlanması sonucu elde edilen ve afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan çok geniş sınıfların varlığı anlatılmaktadır. İkinci alt başlıkta ise yine tez yazarının dahil olduğu [19] çalışmasında yer alan, c_0'ın bir alt uzayı olan ve ℓ^1 analog Lorentz-Marcinkiewicz dizi uzayı $\ell_{\delta,1}$'de zayıf* kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıfın afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olduğu gösterilmektedir.

3.1 c_0’ın yeniden normlanması ile afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip çok geniş sınıf

Bu bölümde [20] çalışmasında yer alan c_0’ın bir eş değer norm ile yeniden normlanması sonucu elde edilen ve afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan çok geniş sınıfların varlığı anlatılmaktadır.

Örnek 3.1: Toplam baz dizisinin kapalı konveks kabuğu ele alınsın. Yani, her $n \geq 1$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde c_0 ’da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisini göz önüne alınsın. Daha sonra c_0 ’da $E = E_{\vec{b}}$ kümesi aşağıdaki şekilde yazılsın.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : 1 = t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\}.$$

$\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$ olmak üzere $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın.

Kolayca görülebilir ki $E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : her\ \alpha_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\}.$

Bu durumda çok iyi bilindiği üzere E kümesi $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğudur ve sağa kaydırma fonksiyonu sabit noktasız afin $\|.\|_\infty$-genişlemeyen bir fonksiyondur.

Teorem 3.2: Tanım 2.7 ile verilen $\|.\|_\sim$ eş değer normu için yukarıdaki örnekte verilen E kümesi afin $\|.\|_\sim$ -genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat: $T: E \to E$ bir afin genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda yaklaşık sabit nokta dizisi adını alan bir dizi $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ vardır $\ni$ $\left\| Tx^{(n)} - x^{(n)} \right\|_\sim \underset{n}{\to} 0$ ve bu sebeple $\left\| Tx^{(n)} - x^{(n)} \right\|_\infty \underset{n}{\to} 0$ dir. Genelliği bozmadan gerekirse bir alt dizi ile değişim yapılarak denilebilir ki en az bir $z \in c_0$ vardır öyle ki $x^{(n)}$ dizisi z’ye zayıf topolojide yakınsar. Bu durumda Lemma 1.6 gereğince, bir $s: c_0 \to [0, \infty)$ fonksiyonu $s(y) = \limsup_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - y \right\|_{\sim}$, $\forall y \in c_0$ ile tanımlanabilir ve bu durumda $s(y) = \|y - z\|_{\sim}$, $\forall y \in c_0$ dir.

Şimdi E kümesinin zayıf kapanışı

$$W := \overline{E}^{w} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_n : \text{ her } a_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 1 \right\}$$

ile tanımlansın. İki durum göz önüne alınmalıdır.

Durum 1: $z \in E$ olsun.

Öncelikle $s(Tz) = \|Tz - z\|_{\sim}$dir.

Ayrıca T afin ve genişlemeyen olduğundan,

$$s(Tz) \leq \limsup_m \left\| Tz - T\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right) \right\|_{\sim} + \limsup_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} \right\|_{\sim}$$
$$\leq s(z)$$

dir.

Öyleyse, $\|z - Tz\|_{\sim} \leq 0$ dir ve dolayısıyla $Tz = z$ dir.

Durum 2: $z \in W \backslash E$ olsun.

Bu durumda, ele alınan nokta z şu formda yazılabilir: $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \eta_n$ öyle ki $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < 1$. $\delta := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ olarak ve $h_\lambda := (\sigma_1 + \lambda\delta)\eta_1 + (\sigma_2 + (1-\lambda)\delta)\eta_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \sigma_n \eta_n$ şeklinde tanımlansın. h_λ nın E'de olabilmesi için λ skalerleri $\left[-\frac{\sigma_1}{\delta}, \frac{\sigma_2}{\delta} + 1 \right]$ aralığından seçilsin, bu durumda

$$\|h_\lambda - z\|_{\sim} = \lambda\delta e_1 + (1-\lambda)\delta(e_1 + e_2)$$
$$= \lim_{p\to\infty} \sup \left\{ \gamma_1 \left[\frac{\delta^p}{2} + \frac{|1-\lambda|^p \delta^p}{4} \right]^{\frac{1}{p}}, \frac{\gamma_2 |1-\lambda| \delta}{4} \right\}$$

$$= \max\left\{\gamma_1|1-\lambda|\delta\,, \frac{\gamma_2|1-\lambda|\delta}{4}\right\}$$

olacaktır.

Yukarıdaki eşitlik kullanılarak $\Gamma := \min_{\lambda\in\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} \|h_\lambda - z\|_\sim$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, $\Gamma = 0$ ve dolayısıyla bir tek minimumlaştıran h_{λ_0} değeri $\lambda_0 \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]$ için mevcut olup $\left\|h_{\lambda_0} - z\right\|_\sim$ sayısı Γ'nın bir minimumudur.

Şimdi ele alınan küme içerisinde $\Lambda := \{y \,:\, \|y - z\|_\sim \ \le \Gamma\}$ şeklinde bir küme tanımlansın. Not edilebilir ki $\Lambda \subseteq E$ boştan farklı kompakt ve konveks bir küme olup $h \in \Lambda$ için, T afin ve genişlemeyen olduğundan,

$$s(Th) \le \limsup_m \left\|Th - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right)\right\|_\sim + \limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)}\right\|_\sim$$
$$\le s(h)$$

dır.

Ayrıca, $s(Th) = \|z - Th\|_\sim$ ve $s(h) = \|z - h\|_\sim$ dir.

Bu sebeple, $\|z - Th\|_\sim \le \|z - h\|_\sim \Rightarrow \|z - Th\|_\sim = \|z - h\|_\sim \Rightarrow Th \in \Lambda$.

O halde, $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ olup T'nin sürekli olması sebebiyle Schauder's Sabit nokta teoremi kullanılarak [25] T nin bir sabit noktası olduğu ve bu noktanın $\|y - z\|_\sim \ : y \in E$ değerlerini minumumlaştıran $h = h_{\lambda_0}$ dır ve $Th = h$ dır.

Dolayısıyla, E kümesi bu iki durum sonucuna göre gf-snt'ye afin fonksiyonlar için sahiptir.

<u>Teorem 3.3:</u> $b \in (0,1)$ keyfi olmak üzere $f_1 := be_1$, $f_2 := be_2$, ve her $n \ge 3$ için $f_n := e_n$ alarak $((e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ler c_0'ın kanonik bazı olmak üzere; yani $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skaler dizisi tanım kümesi $\mathbb{N}$ olan, n-yinci koordinatı 1 ve diğer koordinatları 0 olan ve $(c_0, \|.\|_\infty)$ ile $(l^1, \|.\|_1)$' in bir koşulsuz bazıdır) c_0' da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Daha sonra ise

$\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ için $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$ olacak şekilde $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Sonra $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu olan aşağıdaki c_0 ’ ın kapalı, sınırlı, konveks $E = E_b$ alt kümesi tanımlansın.

$$E = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_n \text{: her } a_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \right\}$$

Bu durumda Tanım 2.7 ile verilen $\|.\|_{\sim}$ eş değer normu için E kümesi afin $\|.\|_{\sim}$ - genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat: Teorem 3.2 ile aynı metod kullanılacaktır ve dolayısıyla benzer ayrıntılar atlanılarak sadece Teorem 3.2’nin ispatının Durum 2’sinden farklılıklar aşağıdaki şekilde sunulabilir.

$$\begin{aligned}\|h_\lambda - z\|_{\sim} &= \lambda\delta\eta_1 + (1-\lambda)\delta\eta_2 = \lambda\delta b e_1 + (1-\lambda)\delta(b e_1 + b e_2) \\ &= b \limsup_{p\to\infty} \left\{ \gamma_1 \left[\frac{\delta^p}{2} + \frac{|1-\lambda|^p \delta^p}{4} \right]^{\frac{1}{p}}, \frac{\gamma_2 |1-\lambda| \delta}{4} \right\} \\ &= b \max\left\{ \gamma_1 |1-\lambda| \delta, \frac{\gamma_2 |1-\lambda|\delta}{4} \right\}\end{aligned}$$

olacaktır. Yine $\Gamma := \min\limits_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} \|h_\lambda - z\|_{\sim}$ olarak tanımlansın. Bu durumda yine görülecektir ki $\Gamma = 0$ dir.

Şimdi aşağıdaki teorem ve bulgularla sonuçlar daha da genelleştirilir.

<u>Teorem 3.4:</u> $\vec{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,1]$ aralığında $b_n \uparrow_n 1$ olacak şekilde bir artan dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := b_n e_n$ olacak şekilde c_0 da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Daha sonra ise $\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ için $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$ olacak şekilde $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Sonra $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu olan aşağıdaki c_0 ’ ın kapalı, sınırlı, konveks $E = E_b$ alt kümesi tanımlansın.

$$E = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_n : \text{ her } a_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \right\}$$

Bu durumda Tanım 2.7 ile verilen $\|.\|_{\sim}$ eş değer normu için E kümesi afin $\|.\|_{\sim}$ -genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat: Teorem 3.2 ile aynı metod kullanılacaktır ve dolayısıyla benzer ayrıntılar atlanılarak sadece Teorem 3.2'nin ispatının Durum 2'sinden farklılıklar aşağıdaki şekilde sunulabilir.

$$\begin{aligned}
\|h_\lambda - z\|_{\sim} &= \lambda\delta\eta_1 + (1-\lambda)\delta\eta_2 = \lambda\delta b_1 e_1 + (1-\lambda)\delta(b_1 e_1 + b_2 e_2) \\
&= \limsup_{p\to\infty} \left\{ \gamma_1 \left[\frac{{b_1}^p \delta^p}{2} + \frac{{b_2}^p |1-\lambda|^p \delta^p}{4} \right]^{\frac{1}{p}}, \frac{\gamma_2 b_2 |1-\lambda|\delta}{4} \right\} \\
&= b_2 \limsup_{p\to\infty} \left\{ \gamma_1 \left[\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^p \frac{\delta^p}{2} + \frac{|1-\lambda|^p \delta^p}{4} \right]^{\frac{1}{p}}, \frac{\gamma_2 |1-\lambda|\delta}{4} \right\} \\
&\leq b_2 \max\left\{ \gamma_1 |1-\lambda|\delta, \frac{\gamma_2|1-\lambda|\delta}{4} \right\}
\end{aligned}$$

olacaktır. Yine $\Gamma := \min_{\lambda\in\left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} \|h_\lambda - z\|_{\sim}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\Gamma \leq \min_{\lambda\in\left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} b_2 \max\left\{ \gamma_1 |1-\lambda|\delta, \frac{\gamma_2|1-\lambda|\delta}{4} \right\} = 0$ olduğundan $\Gamma = 0$ dir.

<u>Teorem 3.5:</u> $\overrightarrow{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında bir $\kappa > 0$ sayısına yakınsayan herhangi bir dizi olsun. Her $n \in \mathrm{N}$ için $f_n := b_n e_n$ olacak şekilde c_0 da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Daha sonra ise $\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ için $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$ olacak şekilde $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Sonra $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu olan aşağıdaki c_0 ' ın kapalı, sınırlı, konveks $E = E_b$ alt kümesi tanımlansın.

$$E = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n \eta_n : \text{ her } \mathrm{a}_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n = 1 \right\}$$

Bu durumda Tanım 2.7 ile verilen $\|.\|_{\sim}$ eş değer normu için E kümesi afin $\|.\|_{\sim}$ -genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat: Teorem 3.2 ile aynı metod kullanılacaktır ve dolayısıyla benzer ayrıntılar atlanılarak sadece Teorem 3.2'nin ispatının Durum 2'sinden farklılıklar aşağıdaki şekilde sunulabilir.

$$
\begin{aligned}
\|h_\lambda - z\|_\sim &= \lambda\delta\eta_1 + (1-\lambda)\delta\eta_2 = \lambda\delta b_1 e_1 + (1-\lambda)\delta(b_1e_1 + b_2e_2) \\
&= \limsup_{p\to\infty}\left\{\gamma_1\left[\frac{{b_1}^p\delta^p}{2} + \frac{{b_2}^p|1-\lambda|^p\delta^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}}, \frac{\gamma_2 b_2|1-\lambda|\delta}{4}\right\} \\
&= \max\{b_1, b_2\}\limsup_{p\to\infty}\left\{\begin{matrix}\gamma_1\left[\begin{matrix}\left(\frac{b_1}{max\{b_1, b_2\}}\right)^p\frac{\delta^p}{2} \\ +\left(\frac{b_2}{max\{b_1, b_2\}}\right)^p\frac{|1-\lambda|^p\delta^p}{4}\end{matrix}\right]^{\frac{1}{p}}, \\ \frac{b_2\gamma_2|1-\lambda|\delta}{4max\{b_1, b_2\}}\end{matrix}\right\} \\
&\leq \max\{b_1, b_2\}\max\left\{\gamma_1|1-\lambda|\delta, \frac{\gamma_2|1-\lambda|\delta}{4}\right\}
\end{aligned}
$$

olacaktır. Yine $\Gamma := \min_{\lambda\in\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} \|h_\lambda - z\|_\sim$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$\Gamma \leq \min_{\lambda\in\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} \max\{b_1, b_2\}\max\left\{\gamma_1|1-\lambda|\delta, \frac{\gamma_2|1-\lambda|\delta}{4}\right\} = 0$ olduğundan $\Gamma = 0$ dir.

Takip eden sonuçlar Teorem 3.5 ve ispatından doğrudan kolayca elde edilebilir.

<u>Sonuç 3.6:</u> $\overrightarrow{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında herhangi bir sınırlı dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := b_n e_n$ olacak şekilde c_0 da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Daha sonra ise $\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ için $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$ olacak şekilde $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Sonra $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu olan aşağıdaki c_0' ın kapalı, sınırlı, konveks $E = E_b$ alt kümesi tanımlansın.

$$E = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\eta_n:\ \text{her }\ a_n \geq 0\ \text{ ve }\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1\right\}$$

Bu durumda Tanım 2.7 ile verilen $\|.\|_\sim$ eş değer normu için E kümesi afin $\|.\|_\sim$ -genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

Teorem 3.5'in ispatı kullanılarak en genel sonuçlar aşağıdaki şekilde ispatsız olarak sunulabilir.

Teorem 3.7: $\vec{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında herhangi bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := b_n e_n$ olacak şekilde c_0 da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Daha sonra ise $\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ için $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$ olacak şekilde $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Sonra $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu olan aşağıdaki c_0 ' ın kapalı, sınırlı, konveks $E = E_b$ alt kümesi tanımlansın.

$$E = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_n : \text{ her } a_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \right\}$$

Bu durumda Tanım 2.7 ile verilen $\|.\|_{\sim}$ eş değer normu için E kümesi afin $\|.\|_{\sim}$ -genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

Sonuç 3.8: $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında öyle bir diziki her $N \in \mathbb{N}$ için $\Gamma \leq \gamma_N$ olacak şekilde $\Gamma > 0$ var ve $\sigma := \sum_{n=2}^{\infty} |\mu_n - \mu_{n-1}| < \infty$ olsun ve kabul edilsin ki $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında bir $\lambda \in (0,\infty)$ sayısına yakınsasın. Bu durumda Her $n \in \mathbb{N}$ için $\eta_n := \mu_n(b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4 + \ldots. + b_n e_n)$ olacak şekilde $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Ayrıca kabul edilsin ki $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi alt c_0 -toplam tahminini sağlasın. Yani, kabul edilsin ki $\exists K \in (0,\infty)$ var öyle ki $\forall \alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \epsilon c_{00}$ için $K \sup_{n\geq 1} \left| \sum_{j=n}^{\infty} \alpha_j \right| \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \eta_j \right\|$. E kümesi $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu olsun; yani, $E := \overline{co}(\{\eta_n : n \in \mathrm{N}\})$. Bu durumda Tanım 2.7 ile verilen $\|.\|_{\sim}$ eş değer normu için E kümesi afin $\|.\|_{\sim}$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

Sonuç 3.9: $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri $(0,\infty)$ aralığında herhangi dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\eta_n := \mu_n(b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4 + \ldots. + b_n e_n)$ olacak şekilde $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şekilde bir dizi tanımlansın. E kümesi $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu olsun; yani, $E := \overline{\mathrm{co}}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$. Bu durumda Tanım 2.7 ile verilen $\|.\|_\sim$ eş değer normu için E kümesi afin $\|.\|_\sim$ -genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

3.2 ℓ^1-analog Banach uzay Lorentz-Marcinkiewicz uzayı $\ell_{\delta,1}$'da afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip çok geniş sınıf

Bu bölümde Tanım 1.9 ile verilen ℓ^1-analog Banach uzay olan Lorentz-Marcinkiewicz uzayı $\ell_{\delta,1}$ ele alınmaktadır. Goebel ve Kuczumow teoreminin $\ell_{\delta,1}$-analoğu incelenmektedir. Yani, $\ell_{\delta,1}$'de zayıf* kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks C kümelerinden oluşan geniş bir sınıf var mıdır ki bu C kümeleri genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olsun sorusu araştırılmıştır. Bu soruya pozitif cevabın afinlik koşulu altında verilebildiği bu bölümde gösterilmektedir. Yani, tez çalışmasında gösterilmektedir ki $\ell_{\delta,1}$'de zayıf* kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıf afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir. Bu bölüm sonuçları [19] makalesinde yayınlanmıştır.

Örnek 3.10: δ sıfıra azalarak yakınsayan fakat mutlak toplanamayan keyfi bir ağırlık dizisi olsun. Ayrıca $b \in (0,1)$ keyfi seçilsin. c_0 uzayında bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bu sabit sayı ve kanonik baz yardımı ile şu şekilde kurulsun. $f_1 := b\,\frac{1}{\delta_1}e_1$ ve her $n \geq 2$ tam sayısı için $f_n := \frac{1}{\delta_n}e_n$ olsun. Daha sonrasında ise bu dizi yardımı ile aşağıdaki şekilde bu b sayısına bağlı olarak $\ell_{\delta,1}$'in kapalı ve sınırlı bir E alt kümesi tanımlansın;

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n :\ her\ t_n \geq 0\ \ ve\ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Teorem 3.11: Yukarıdaki örnekte verilen $\ell_{\delta,1}$ uzayının E alt kümesi afin $\|.\|_{\delta,1}$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir.

İspat: 2. Bölümde verilmiş Goebel ve Kuczumow [8] çalışmasında yer alan tez danışmanı Nezir'in doktora tez danışmanı Lennard danışmanlığında hazırlanmış Everest [6] çalışması ile ayrıntılı olarak ispatlanmış teoremde uygulanan metod ile ispata gidilecektir.

$T: E \to E$ bir $\|.\|_1$-genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda yaklaşık sabit nokta dizisi adını alan en az bir $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ dizisi vardır öyle ki

$\left\|Tx^{(\mathrm{n})}-x^{(\mathrm{n})}\right\|_{\delta,1} \underset{\mathrm{n}}{\to} 0$ olup $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sınırlıdır ve dolayısıyla bir zayıf* limiti vardır. Genelliği bozmayarak gerekirse bir alt diziye geçilerek denilebilir ki, en az bir $z \in \ell^1$ öyle ki $x^{(n)}$ dizisi z ye zayıf* topolojide yakınsar. Bu durumda Lemma 1.10 gereğince, aşağıdaki şekilde tanımlanan bir s: $\ell_{\delta,1} \to [0,\infty)$ fonksiyonu vardır: $\forall y \in \ell_{\delta,1}$ için

$$s(y) = \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - y \right\|_{\delta,1}$$

ve bu fonksiyon $\forall y \in \ell_{\delta,1}$ için $s(y) = \|y - \mathrm{z}\|_{\delta,1}$ eşitliğini sağlar.

Daha sonra E kümesinin zayıf* kapanışı aşağıdaki şekilde tanımlanır ve iki farklı durum incelenir.

$$W := \overline{E}^{w*} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n \,:\, t_n \geq 0 \; ve \; \sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq 1 \right\}$$

Durum 1: $z \in E$.

Bu durumda $s(Tz) = \|T\mathrm{z} - z\|_{\delta,1}$ olup

$$s(Tz) = \limsup_m \left\| Tz - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right\|_{\delta,1}$$

$$\leq \limsup_m \left\| Tz - T\left(\tfrac{1}{m}\textstyle\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) \right\|_{\rho,1} + \limsup_m \left\| \tfrac{1}{m}\textstyle\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - T\left(\tfrac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) \right\|_{\delta,1}$$

olup T afin ve genişlemeyen olduğundan

$$\begin{aligned} s(Tz) &\leq \limsup_m \left\| Tz - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) \right\|_{\delta,1} + \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} \right\|_{\delta,1} \\ &\leq \limsup_m \left\| z - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right\|_{\delta,1} \\ &= s(z) \end{aligned}$$

dir.

Dolayısıyla, $\|z - Tz\|_{\delta,1} \leq 0$ olup $Tz = z$ dir ve bu z nin E kümesinde T fonksiyonun bir sabit noktası olduğunu ifade eder.

Durum 2: $z \in W \backslash E$.

Bu durumda ise W'nun tanımı gereğince z noktasının $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n$ formunda yazılcak şekilde $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < 1$ ve $\gamma_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur. Bu skalerler vasıtasıyla $\rho := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ ve

$$h \coloneqq (\gamma_1 + \rho) f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n f_n$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\|h - z\|_{\delta,1} = \|\rho f_1\|_{\delta,1} = b\rho$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $y \in E$ keyfi bir nokta olduğunda $\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n$ formunda yazılcak şekilde $\forall n \in \mathbb{N}\ için\ t_n \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur. O halde,

$$\| y - z \|_{\delta,1} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right\|_{\delta,1}$$

$$= \left\| (t_1 - \gamma_1) b \frac{1}{\delta_1} e_1 + (t_2 - \gamma_2) \frac{1}{\delta_2} e_2 + (t_3 - \gamma_3) \frac{1}{\delta_3} e_3 + (t_4 - \gamma_4) \frac{1}{\delta_4} e_4 + \cdots \right\|_{\delta,1}$$

$$= \left((t_1 - \gamma_1) b \frac{1}{\delta_1} \right)^* + \left((t_2 - \gamma_2) \frac{1}{\delta_2} \right)^* \delta_2 + \left((t_3 - \gamma_3) \frac{1}{\delta_3} \right)^* \delta_3 + \left((t_4 - \gamma_4) \frac{1}{\delta_4} \right)^* \delta_4 + \cdots$$

$$\geq \left| (t_1 - \gamma_1) b \frac{1}{\delta_1} \right| \delta_1 + \left| (t_2 - \gamma_2) \frac{1}{\delta_2} \right| \delta_2 + \left| (t_3 - \gamma_3) \frac{1}{\delta_3} \right| \delta_3 + \left| (t_4 - \gamma_4) \frac{1}{\delta_4} \right| \delta_4 + \cdots$$

$$= |t_1 - \gamma_1| b + |t_2 - \gamma_2| b + |t_3 - \gamma_3| + |t_4 - \gamma_4| + |t_5 - \gamma_5| + \cdots$$

$$\geq b \sum_{k=1}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + (1 - b) \sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

$$\geq b \left| \sum_{k=1}^{\infty} (t_k - \gamma_k) \right| + (1 - b) \sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

$$= b\rho + (1-b)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

$$\geq b\rho$$

elde edilir.

Bu sebeple her $y \in E$ ve her $z \in W \backslash E$ için $\| y - z \|_{\delta,1} \geq b\rho$ dir. Şimdi, $\Lambda := \{y \;:\; \| y - z \|_{\delta,1} \leq b\rho\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\Lambda \subseteq E$ kompakt, konveks alt küme olup her $h \in \Lambda$ için

$$s(Th) = \limsup_m \left\| Th - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right\|_{\delta,1}$$

$$\leq \limsup_m \left\| Th - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) \right\|_{\rho,1} + \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) \right\|_{\delta,1}$$

ve buradan T afin ve genişlemeyen olduğundan

$$s(Th) \leq \limsup_m \left\| Th - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) \right\|_{\delta,1} + \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} \right\|_{\delta,1}$$

$$\leq \limsup_m \left\| h - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right\|_{\delta,1}$$

$$= s(h)$$

dir.

Ayrıca $s(Th) = \| z - Th \|_{\delta,1}$ ve $s(h) = \| z - h \|_{\delta,1}$ olduğundan

$$\| z - Th \|_{\delta,1} \leq \| z - h \|_{\delta,1} \Rightarrow \| z - Th \|_{\delta,1} = \| z - h \|_{\delta,1}$$

$$\Rightarrow Th \in \Lambda.$$

dir.

O halde $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ ve T sürekli olduğundan, Schauder'ın Sabit nokta teoremi [25] gereğince T'nin bir sabit noktası vardır ve h noktası $\| y - z \|_{\delta,1} : y \in E$ değerlerini minimumlaştıran yegane nokta olması sebebiyle bahsi geçen sabit nokta bu nokta olup $Th = h$ dir.

Tüm bu sebepler dolayısıyla, arzu edildiği gibi E kümesi gf-snt'ye sahiptir.

Örnek 3.12: δ sıfıra azalarak yakınsayan fakat mutlak toplanamayan keyfi bir ağırlık dizisi olsun. Ayrıca $b \in (0,1)$ keyfi seçilsin. c_0 uzayında bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bu sabit sayı ve kanonik baz yardımı ile şu şekilde kurulsun. $f_1 := b\,\frac{1}{\delta_1} e_1,\ f_2 := b\,\frac{1}{\delta_2} e_2$ ve her $n \geq 3$ tam sayısı için $f_n := \frac{1}{\delta_n} e_n$ olsun. Daha sonrasında ise bu dizi yardımı ile aşağıdaki şekilde bu b sayısına bağlı olarak $\ell_{\delta,1}$'in kapalı ve sınırlı bir E alt kümesi tanımlansın;

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n :\ her\ t_n \geq 0\ ve\ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Teorem 3.13: Yukarıdaki örnekte verilen $\ell_{\delta,1}$ uzayının E alt kümesi afin $\|.\|_{\delta,1}$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir.

İspat: Teorem 3.11 ile aynı metod kullanılacaktır ve dolayısıyla benzer ayrıntılar atlanılarak sadece Teorem 3.11'nin ispatının Durum 2'sinden farklılıklar aşağıdaki şekilde sunulabilir.

Durum 2: $z \in W \backslash E$ olsun.

Bu durumda, ele alınan nokta z şu formda yazılabilir: $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n$ öyle ki $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < 1$. $\rho := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ olarak ve $h_\lambda := (\gamma_1 + \lambda\rho) f_1 + (\gamma_2 + (1-\lambda)\rho) f_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \gamma_n f_n$ şeklinde tanımlansın. h_λ nın E'de olabilmesi için λ skalerleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\rho}, \frac{\gamma_2}{\rho} + 1\right]$ aralığından seçilsin, bu durumda

$$\begin{aligned}\|h_\lambda - z\|_{\delta,1} &= \|\lambda\rho f_1 + (1-\lambda)\rho f_2\|_{\delta,1} \\ &= \left\| \left(\lambda b\, \rho \frac{1}{\delta_1}, (1-\lambda) b\rho\, \frac{1}{\delta_2} 0,0,\cdots\right) \right\|_{\delta,1}\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} (1-\lambda)b\rho \dfrac{\delta_1}{\delta_2} - \lambda b\rho \dfrac{\delta_2}{\delta_1} & \text{if } \lambda \in \left[-\dfrac{\gamma_1}{\rho},\ 0\right), \\ (1-\lambda)b\rho \dfrac{\delta_1}{\delta_2} + \lambda b\rho \dfrac{\delta_2}{\delta_1} & \text{if } \lambda \in \left[0,\ \dfrac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}\right), \\ b\rho & \text{if } \lambda \in \left[\dfrac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2},\quad 1\right), \\ (2\lambda-1)b\rho & \text{if } \lambda \in \left[1,\ \dfrac{\delta_1}{\delta_1-\delta_2}\right), \\ (\lambda-1)b\rho \dfrac{\delta_1}{\delta_2} + \lambda b\rho \dfrac{\delta_2}{\delta_1} & \text{if } \lambda \in \left[\dfrac{\delta_1}{\delta_1-\delta_2},\ 1+\dfrac{\gamma_2}{\rho}\right) \end{cases}$$

dir.

$$\Gamma := \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\rho}, \frac{\gamma_2}{\rho}+1\right]} \parallel h_\lambda - z \parallel_{\delta,1}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\rho},\ \frac{\gamma_2}{\rho}+1\right]$ skalerleri için $\|h_\lambda - z\|_{\rho,1}$ değeri bir tek noktada minimum değerini alır öyle ki bu değer $\Gamma = b\rho$ dir.

Şimdi keyfi $y \in E$ noktası ele alındığında bu nokta $\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n$ formunda yazılır öyle ki $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \ = 1$ koşulunu sağlayan $t_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ skalerleri mevcuttur. Buradan,

$$\parallel y - z \parallel_{\delta,1} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right\|_{\delta,1}$$

$$= \left\| (t_1-\gamma_1)b\,\frac{1}{\delta_1} e_1 + (t_2-\gamma_2)b\frac{1}{\delta_2} e_2 + (t_3-\gamma_3)\frac{1}{\delta_3} e_3 + (t_4-\gamma_4)\frac{1}{\delta_4} e_4 + \cdots \right\|_{\delta,1}$$

$$= \left((t_1-\gamma_1)b\,\frac{1}{\delta_1}\right)^* + \left((t_2-\gamma_2)b\frac{1}{\delta_2}\right)^* \delta_2 + \left((t_3-\gamma_3)\frac{1}{\delta_3}\right)^* \delta_3 + \left((t_4-\gamma_4)\frac{1}{\delta_4}\right)^* \delta_4 + \cdots$$

$$\geq \left|(t_1-\gamma_1)b\,\frac{1}{\delta_1}\right| \delta_1 + \left|(t_2-\gamma_2)b\frac{1}{\delta_2}\right| \delta_2 + \left|(t_3-\gamma_3)\frac{1}{\delta_3}\right| \delta_3 + \left|(t_4-\gamma_4)\frac{1}{\delta_4}\right| \delta_4 + \cdots$$

$$= |t_1-\gamma_1|b + |t_2-\gamma_2|b + |t_3-\gamma_3| + |t_4-\gamma_4| + |t_5-\gamma_5| + \cdots$$

$$\geq b\sum_{k=1}^{\infty} |t_k-\gamma_k| + (1-b)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k-\gamma_k| + |t_2-\gamma_2|b$$

$$\geq b\left|\sum_{k=1}^{\infty} (t_k-\gamma_k)\right| + (1-b)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k-\gamma_k| + |t_2-\gamma_2|b$$

$$= b\rho + |t_2 - \gamma_2| b + (1-b) \sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

$$\geq b\rho$$

dir.

Bu sebeple λ skaleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\rho}, \frac{\gamma_2}{\rho} + 1\right]$ aralığından seçildiğinde her $y \in E$ ve her $z \in W \backslash E$ için $\|y - z\|_{\delta,1} \geq \Gamma$ olup bir tek $\lambda_0 \in \left[-\frac{\gamma_1}{\rho}, \frac{\gamma_2}{\rho} + 1\right]$ olup $\| h_{\lambda_0} - z \|_{\delta,1} = \Gamma$ dir. Şimdi ele alınan küme içinde aşağıdaki şekilde tanımlı

$$\Lambda := \left\{ y \ : \ \| y - z \|_{\delta,1} \leq \Gamma \right\}$$

kümesi göz önüne alınsın.

Not edilebilir ki $\Lambda \subseteq E$ kümesi boştan farklı kompakt ve konveks bir küme olup $h \in \Lambda$ için

$$s(Th) = \limsup_m \left\| Th - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right\|_{\delta,1}$$

$$\leq \limsup_m \left\| Th - T\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right) \right\|_{\rho,1} + \limsup_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - T\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right) \right\|_{\delta,1}$$

dir ve T afin ve genişlemeyen olduğundan

$$s(Th) \leq \limsup_m \left\| Th - T\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right) \right\|_{\delta,1} + \limsup_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} \right\|_{\delta,1}$$

$$\leq \limsup_m \left\| h - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right\|_{\delta,1}$$

$$= s(h)$$

dir; ayrıca, $s(Th) = \| z - Th \|_{\delta,1}$ ve $s(h) = \| z - h \|_{\delta,1}$ dir. Bu sebeple,

$$\| z - Th \|_{\delta,1} \leq \| z - h \|_{\delta,1} \Rightarrow \| z - Th \|_{\delta,1} = \| z - h \|_{\delta,1}$$

$$\Rightarrow Th \in \Lambda$$

dir.

Dolayısıyla, $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ olup T sürekli olduğundan, Schauder'in sabit nokta teoremi [25] gereğince kompakt ve konveks kümeler üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların bir sabit noktası olması gerçeğinden T'nin bir sabit noktası vardır öyle ki $\| y - z \|_{\delta,1} : y \in E$'i minimize eden h noktası bu nokta olup $Th = h$ dir.

O halde, E kümesi gf-snt'ye afin fonksiyonlar için sahiptir.

Örnek 3.14: δ sıfıra azalarak yakınsayan fakat mutlak toplanamayan keyfi bir ağırlık dizisi olsun. Ayrıca $b \in (0,1)$ keyfi seçilsin. c_0 uzayında bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bu sabit sayı ve kanonik baz yardımı ile şu şekilde kurulsun. $f_1 := b\,\frac{1}{\delta_1}e_1,\ f_2 := b\,\frac{1}{\delta_2}e_2,\ f_3 := b\,\frac{1}{\delta_3}e_3$ ve her $n \geq 4$ tam sayısı için $f_n := \frac{1}{\delta_n}e_n$ olsun. Daha sonrasında ise bu dizi yardımı ile aşağıdaki şekilde bu b sayısına bağlı olarak $\ell_{\delta,1}$'in kapalı ve sınırlı bir E alt kümesi tanımlansın;

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n :\ her\ t_n \geq 0\ ve\ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Teorem 3.15: Yukarıdaki örnekte verilen $\ell_{\delta,1}$ uzayının E alt kümesi afin $\|.\|_{\delta,1}$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir.

İspat: Teorem 3.13 ile aynı metod kullanılacaktır ve dolayısıyla benzer ayrıntılar atlanılarak sadece Teorem 3.13'nin ispatının Durum 2'sinden farklılıklar aşağıdaki şekilde sunulabilir.

Durum 2: $z \in W \backslash E$ olsun.

Bu durumda, ele alınan nokta z şu formda yazılabilir: $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n$ öyle ki $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < 1$ dir.

$\rho := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ olarak ve

$$h_\lambda := (\gamma_1 + \frac{\lambda}{2}\rho)f_1 + (\gamma_2 + \frac{\lambda}{2}\rho)f_2 + (\gamma_3 + (1-\lambda)\rho)f_3 + \sum_{n=4}^{\infty} \gamma_n f_n$$

şeklinde tanımlansın. h_λ nın E'de olabilmesi için λ skalerleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\rho},\ \frac{\gamma_2}{\rho}+1\right]$ aralığından seçilsin, bu durumda

$$\|h_\lambda - z\|_{\delta,1} = \left\|\frac{\lambda}{2}\rho f_1 + \frac{\lambda}{2}\rho f_2 + (1-\lambda)\rho f_3\right\|_{\delta,1}$$

$$= \left\|(\frac{\lambda}{2}b\rho\ \frac{1}{\delta_1}, \frac{\lambda}{2}b\rho\ \frac{1}{\delta_2}, (1-\lambda)b\ \rho\frac{1}{\delta_3} 0,0,\cdots)\right\|_{\delta,1}$$

$$= \begin{cases} (1-\lambda)b\rho\ \frac{\delta_1}{\delta_3} - \lambda b\rho\frac{\delta_2}{2\delta_2} - \lambda b\rho\frac{\delta_3}{2\delta_1} & if\ \ \lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\rho},\ 0\right), \\ (1-\lambda)b\rho\ \frac{\delta_1}{\delta_3} + \lambda b\rho\frac{\delta_2}{2\delta_2} + \lambda b\rho\frac{\delta_3}{2\delta_1} & if\ \ \lambda \in \left[0,\ \frac{2\delta_2}{2\delta_2+\delta_3}\right), \\ \lambda b\rho\frac{\delta_1}{2\delta_2} + (1-\lambda)b\rho\ \frac{\delta_2}{\delta_3} + \lambda b\rho\frac{\delta_3}{2\delta_1} & if\ \ \lambda \in \left[\frac{2\delta_2}{2\delta_2+\delta_3}, \frac{2\delta_1}{2\delta_1+\delta_3}\right), \\ \lambda b\rho\frac{\delta_1}{2\delta_2} + \lambda b\rho\frac{\delta_2}{2\delta_1} + (1-\lambda)b\rho\ \frac{\delta_3}{\delta_3} & if\ \ \lambda \in \left[\frac{2\delta_1}{2\delta_1+\delta_3},\ 1\right), \\ (\lambda-1)b\rho\ \frac{\delta_1}{\delta_3} + \lambda b\rho\frac{\delta_2}{2\delta_2} + \lambda b\rho\frac{\delta_3}{2\delta_1} & if\ \ \lambda \in \left[1,\ 1+\frac{\gamma_2}{\rho}\right), \end{cases}$$

elde edilir.

$$\Gamma := \min_{\lambda\in\left[-\frac{\gamma_1}{\rho},\frac{\gamma_2}{\rho}+1\right]} \|\ h_\lambda - z\ \|_{\delta,1}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda when $\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\rho},\ \frac{\gamma_2}{\rho}+1\right]$ skalerleri için $\|h_\lambda - z\|_{\rho,1}$ değeri bir tek noktada minimum değerini alır öyle ki bu değer $\Gamma = \frac{b\rho}{2} + \frac{b\rho}{2}\frac{\delta_3}{\delta_1} \leq b\rho$ dir.

Şimdi keyfi $y \in E$ noktası ele alındığında bu nokta $\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n$ formunda yazılır öyle ki $\sum_{n=1}^{\infty} t_n\ = 1$ koşulunu sağlayan $t_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ skalerleri mevcuttur. Buradan,

$$\|\ y - z\ \|_{\delta,1} = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k\right\|_{\delta,1}$$

$$= \left\|(t_1-\gamma_1)b\ \frac{1}{\delta_1}e_1 + (t_2-\gamma_2)b\frac{1}{\delta_2}e_2 + (t_3-\gamma_3)b\frac{1}{\delta_3}e_3 + (t_4-\gamma_4)\frac{1}{\delta_4}e_4 + \cdots\right\|_{\delta,1}$$

$$= \left((t_1-\gamma_1)b\ \frac{1}{\delta_1}\right)^* + \left((t_2-\gamma_2)b\frac{1}{\delta_2}\right)^* \delta_2 + \left((t_3-\gamma_3)b\frac{1}{\delta_3}\right)^* \delta_3 + \left((t_4-\gamma_4)\frac{1}{\delta_4}\right)^* \delta_4 + \cdots$$

$$\geq \left|(t_1-\gamma_1)b\ \frac{1}{\delta_1}\right|\delta_1 + \left|(t_2-\gamma_2)b\frac{1}{\delta_2}\right|\delta_2 + \left|(t_3-\gamma_3)b\frac{1}{\delta_3}\right|\delta_3 + \left|(t_4-\gamma_4)\frac{1}{\delta_4}\right|\delta_4 + \cdots$$

$$= |t_1 - \gamma_1| b + |t_2 - \gamma_2| b + |t_3 - \gamma_3| b + |t_4 - \gamma_4| + |t_5 - \gamma_5| + \cdots$$

$$\geq b \sum_{k=1}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + (1-b) \sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + |t_2 - \gamma_2| b + |t_3 - \gamma_3| b$$

$$\geq b \left| \sum_{k=1}^{\infty} (t_k - \gamma_k) \right| + (1-b) \sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + |t_2 - \gamma_2| b + |t_3 - \gamma_3| b$$

$$= b\rho + |t_2 - \gamma_2| b + |t_3 - \gamma_3| b + (1-b) \sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

$\geq b\rho$ dir.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında c_0 Banach uzayı ve c_0 içinde yer alan ℓ^1-analog Banach uzay Lorentz-Marcinkiewicz uzayı $\ell_{\delta,1}$ incelenmiştir. Araştırma bulguları iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde gösterilmektedir ki c_0 üzerinde tanımlı bazı eşdeğer normlar $\|\cdot\|_{\sim}$ bulunabilir öyleki burada zayıf kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıf afin $\|\cdot\|_{\sim}$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir. Çalışmada yer alan kümeler ise c_0 ‘ın alışılmış normu olan $\|\cdot\|_{\infty}$ normuna göre bazı asimtotik izometrik c_0-toplam baz dizilerinin kapalı konveks kabukları olup 2011’de Lennard ve Nezir’in çalışmasına göre herhangi asimtotik izometrik c_0-toplam baz dizisinin kapalı konveks kabuğu afin $\|\cdot\|_{\infty}$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar. Araştırma bulgularının ikinci bölümünde ise ℓ^1-analog Lorentz-Marcinkiewicz dizi uzayları da ele alınmıştır. Uzayın tanımı gereğince gerçekten de bu uzayların elemanları yine c_0 uzayından seçilir. Lorentz-Marcinkiewicz uzayı $\ell_{\delta,1}$ bir ℓ^1-analog Banach uzayı olup bazı ortak özellikleri paylaşmaktadır. Tez çalışmasında Goebel ve Kuczumow teoreminin $\ell_{\delta,1}$-analoğu araştırılmıştır. Yani, $\ell_{\delta,1}$’de zayıf* kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks C kümelerinden oluşan geniş bir sınıf var mıdır ki bu C kümeleri genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olsun sorusu çözülmek istenilmiştir. Bu soruya pozitif cevabı afinlik koşulu altında verilebildiği görülmektedir. Yani, gösterilmektedir ki $\ell_{\delta,1}$’de zayıf* kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıf afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir. Çalışmada elde edilen sınıfları genelliştirmek araştırmacıların sorgulayabileceği bir konudur.

KAYNAKLAR

[1] Astashkin, S. V., and Sukochev, F. A. (2007). Banach–Saks property in Marcinkiewicz spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 336(2), 1231-1258.

[2] Delibaş, M. (2019). Dejenere edilmiş Lorentz-Marcinkiewicz uzaylarında genişlemeyen fonksiyonların sabit nokta teorisi (Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalı).

[3] Dowling, P., and Lennard, C. (1997). Every nonreflexive subspace of L_1 [0, 1] fails the fixed point property. Proceedings of the American Mathematical Society, 125(2), 443-446.

[4] Dowling, P. N., Lennard, C. J., and Turett, B. (1998). Asymptotically isometric copies of c_0 in Banach Spaces. Journal of mathematical analysis and applications, 219(2), 377-391.

[5] Dowling, P. N., Lennard, C. J., and Turett, B. (2004). Weak compactness is equivalent to the fixed point property in c_0. Proceedings of the American Mathematical Society, 1659-1666.

[6] Everest, T. (2013). Fixed Points of Nonexpansive Maps on Closed, Bounded, Convex Sets in l^1 (Doctoral dissertation, University of Pittsburgh).

[7] Goebel, K., and Kirk, W. A. (1990). Topics in metric fixed point theory (Vol. 28). Cambridge University Press.

[8] Goebel, K., and Kuczumow, T. (1979). Irregular convex sets with fixed-point property for nonexpansive mappings. In Colloquium Mathematicum (Vol. 2, No. 40, pp. 259-264).

[9] Güven, A. (2017). c_0 yeniden normlandığında c_0 içinde afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan bazı kapalı sınırlı konveks kümelerin karakterizasyonu (Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalı).

[10] Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Polya, G. (1952). Inequalities. Cambridge University Press.

[11] Lennard, C. and Nezir, V. (2011). The closed, convex hull of every ai c_0-summing basic sequence fails the fpp for affine nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl., 381, 678–688.

[12] Lin, P. K. (2008). There is an equivalent norm on ℓ^1 that has the fixed point property. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 68(8), 2303-2308.

[13] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L. (1977). Classical Banach spaces I: Sequence spaces, Ergebnisse der Mathematik (Vol. 92). Springer-Verlag.

[14] Lorentz, G. G. (1950). Some new functional spaces. Annals of Mathematics, 37-55.

[15] Nezir, V. (2012). Fixed Point Properties for c_0-like Spaces (Doctoral dissertation, University of Pittsburgh).

[16] Nezir, V. (2017). A new look to the usual norm of c_0 and candidates to renormings of c_0 with. fixed point property, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 10(2), 85-102.

[17] Nezir, V. and Mustafa, N. (2018). c_0 can be renormed to have the fixed point property for affine nonexpansive mappings, Filomat, 32(16), 5645-5663.

[18] Nezir, V., Mustafa, N., and Dutta, H. (2018). Renorming c_0 and fixed point property, in: Advanced Topics in Mathematical Analysis. eds. Ruzhansky, M. and Dutta, H. CRC Press.

[19] Nezir, V., Mustafa, N., and Sade, S. (2019). Set-based approach to affine fixed point property for Lorentz-Marcinkiewicz space $\ell_{\delta,1}$, Mas European International Congress May 2-5, 2019 Erzurum, Turkey.

[20] Nezir, V., Mustafa, N., Sade, S., and Ateş, T. (2019). Set-based approach to affine fixed point property for some renormings of c_0, Mas European International Congress May 2-5, 2019 Erzurum, Turkey.

.

[21] Nezir, V. and Sade, S. (2018). Abundance of equivalent norms on c_0 with fixed point property for affine nonexpansive mappings. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A, 1(67), 1-28.

[22] Nuñez, C. (1989). Characterization of Banach spaces of continuous vector valued functions with the weak Banach-Saks property. Illinois Journal of Mathematics, 33, 27–41.

[23] Rakov, S. A. (1979). Banach-Saks property of a Banach space. Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, 26(6), 909-916.

[24] Rakov, S. A. (1982). Banach-Saks exponent of certain Banach spaces of sequences. Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, 32(5), 791-797.

[25] Schauder, J. (1930). Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen. Studia. Math., 2, 171-180.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Sıddık SADE
Doğum Yeri ve Tarihi : Sarıkamış-21.01.1984
Yabancı Dili : Orta derece İngilizce
İletişim (e-posta) : ssade25a@gmail .com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Sarıkamış Lisesi-2000
Lisans : Atatürk Üniversitesi-2007
Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi-2019

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Özel 2007-2013/M.E.B 2013-2016

Yayınları:

Nezir, V., Mustafa, N., Sade, S. (2019). Set-based approach to affine fixed point property for Lorentz-Marcinkiewicz space $\ell_{\delta,1}$, Mas European International Congress May 2-5, 2019 Erzurum, Turkey.

Nezir, V., Mustafa, N., Sade, S. Ateş, T. (2019). Set-based approach to affine fixed point property for some renormings of c_0, Mas European International Congress May 2-5, 2019 Erzurum, Turkey.

.

Nezir, V. and Sade, S. (2018). Abundance of equivalent norms on c_0 with fixed point property for affine nonexpansive mappings. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A, 1(67), 1-28.