T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

NEUTROSOPHIC ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Furkan KADİRHAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK

Haziran-2019
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

NEUTROSOPHIC ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Furkan KADİRHAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK

Haziran-2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Öğrencisi Furkan KADİRHAN'nın Doç.Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Neutrosophic Esnek Topolojik Uzaylarda Bazı Temel Kavramlar" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

18 / 06 / 2019

		Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	:	Prof. Dr. Gabil YAGUB	
Üye	:	Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK	
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Alkan ÖZKAN	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Furkan KADİRHAN
Haziran- 2019

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NEUTROSOPHIC ESNEK TOPOLOJIK UZAYLARDA BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Furkan KADİRHAN

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK

Bu tez çalışmasında, neutrosophic esnek topolojik uzaylar üzerinde neutrosophic esnek kümenin sınırı, neutrosophic esnek yoğun küme, neutrosophic esnek taban ve neutrosophic esnek alt uzay topolojisi kavramları çalışılmıştır. Çalışılan konu ile ilgili önemli teoremler ispatları ile verilmiş ve konu daha iyi anlaşılabilmesi için birçok örnekle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Neutrosophic esnek küme, neutrosophic esnek topolojik uzay, neutrosophic esnek kümenin sınırı, neutrosophic esnek yoğun küme, neutrosophic esnek taban, neutrosophic esnek altuzay topolojisi.

2019, 52 Sayfa

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

SOME BASIC NOTIONS ON NEUTROSOPHIC SOFT TOPOLOGICAL SPACES

Furkan KADİRHAN

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematic

Supervisor: Assoc. Prof. Taha Yasin ÖZTÜRK

In this thesis, the notion of boundary of neutrosophic soft set, neutrosophic soft dense set, neutrosophic soft basis and neutrosophic soft subspace topology on neutrosophic soft topological spaces have been studied. The important theorems related to the subject have been given with their proofs and supported with many examples for better understanding of the subject.

Key Words: Neutrosophic soft set, neutrosophic soft topological spaces, boundary of neutrosophic soft set, neutrosophic soft dense set, neutrosophic soft basis, neutrosophic soft subspace topology.

2019, 52 pages

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Tez çalışmamda emeği geçen, yoğun çalışmalarından bana zaman ayıran, derin bilgilerinden faydalanma fırsatı veren, değerli bilim adamı, danışmanım Sayın Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK'e ve bölümün değerli hocalarına ayrıca bölümümüzün doktora öğrencisi Sayın Adem YOLCU' ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca her türlü maddi ve manevi katkılarını esirgemeyen eşime teşekkür ederim.

Furkan KADİRHAN
Kars - 2019

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

E	Parametreler kümesi
(F,E)	Esnek küme
$SS(X)_E$	X üzerindeki E parametresine göre tüm esnek kümeler ailesi
$(\tilde{\phi},E)$	Boş esnek küme
$(\tilde{X},E)$	Mutlak esnek küme
$(X,\tilde{\tau},E)$	Esnek Topolojik Uzay
$(\tilde{F},E)$	Neutrosophic esnek küme
$(\tilde{F},E)^c$	Neutrosophic esnek kümenin tümleyeni
$0_{(X,E)}$	Neutrosophic esnek boş küme
$1_{(X,E)}$	Neutrosophic esnek mutlak küme
$NSS(X,E)$	X üzerinde tüm neutrosophic esnek kümelerin ailesi
$\overline{(\tilde{F},E)}$	Neutrosophic esnek kapanış
$T_A(x)$	A Neutrosophic kümesinin olumlu üyelik fonksiyonu
$I_A(x)$	A Neutrosophic kümesinin belirsiz üyelik fonksiyonu
$F_A(x)$	A Neutrosophic kümesinin olumsuz üyelik fonksiyonu
$\left(X,\overset{NSS}{\tau},E\right)$	Neutrosophic esnek topolojik uzay
$\overset{NSS}{\tau}$	Neutrosophic esnek topoloji
$\overset{NSS}{B}$	Neutrosophic esnek taban

1. GENEL BİLGİLER

1.1. GİRİŞ

Bilim insanları yıllar boyunca sınırları kesin klasik matematik yöntemlerinden kurtulamamışlardır. Bu klasik matematik yöntemleri mühendislik, tıp, fen ve sosyal bilimlerdeki bazı belirsizlik problemlerinin çözümünde yeterli olmamaktadır. Son yıllarda belirsizlik problemlerini çözebilmek için bulanık (fuzzy) kümeler teorisi, sezgisel bulanık (intuitionistik fuzzy) kümeler teorisi, kaba (rough) kümeler teorisi, esnek (soft) kümeler teorisi ve neutrosophic küme teorisi gibi birçok teori öne sürülmüştür [1, 5, 6, 9, 10, 20, 30, 31, 40, 46, 49]. Çok geniş uygulama alanına sahip olan bu teoriler matematikçilerin yoğun olarak üzerinde çalıştıkları güncel konuları kapsamaktadır.

Bu teoriler içerisinde en önemli olanlardan birisi L. Zadeh tarafından tanımlanan fuzzy kümeler teorisidir [49]. Fuzzy kümeler teorisi belirsizlikleri çözebilmek için birçok gerçek yaşam problemine uygulanmıştır.

Örneğin, karar verme problemlerinde, matematiğin tüm alt dallarında, mühendislik, tıp, sosyal bilimler vb. birçok farklı alanda kullanılmıştır [38, 47, 49].

Fuzzy küme teorisi [49], intuitionistik [16] fuzzy küme teorisi gibi birçok teorinin bir genelleştirilmesi olan neutrosophic küme teorisi Smarandache tarafından tanımlanmıştır [46]. Son yıllarda birçok araştırmacı neutrosophic küme teorisi üzerine farklı çalışmalar yapmıştır [11, 12, 19, 23, 41, 45].

Birçok klasik matematik yöntemi belirsizlik problemlerini çözmede yeterli olmadığı için 1999 yılında Molodtsov esnek küme teorisini tanımlamıştır [37]. Molodtsov esnek küme teorisini kullanarak matematiğin birçok farklı alt dalında başarılı çalışmalar yapmıştır [37, 38]. Molodtsov'un dışında birçok araştırmacı esnek küme teorisine yoğun ilgi göstermiş ve bu teori üzerine birçok farklı çalışma yapılmışlardır [13, 15, 17, 18, 22, 25, 26, 27, 34, 36, 42, 43, 48, 51]. Ayrıca birçok araştırmacı esnek küme, intuitionistik küme, fuzzy küme, neutrosophic küme vb. küme teorilerinin farklı kombinasyonları üzerine başarılı çalışmalar yapmıştır [5, 9, 11, 12, 13, 14, 19, 35, 45, 47].

Bu kombinasyonlardan biri olan neutrosophic esnek küme teorisi ilk olarak Maji tarafından tanımlanmıştır [33]. Daha sonra bu teori Deli ve Broumi tarafından yeniden düzenlenmiştir [19]. Ayrıca Bera neutrosophic esnek topolojik uzayları sunmuştur [12]. Son zamanlarda araştırmacılar neutrosophic esnek küme teorisine yoğun ilgi göstermişlerdir. Neutrosophic esnek küme teorisi üzerindeki bazı işlemler [12, 19] çalışmalarından farklı olarak Öztürk ve arkadaşları tarafından yeniden tanımlanmıştır [41]. Ayrıca Öztürk ve arkadaşları neutrosophic esnek topolojik uzaylar üzerinde bazı ayırma aksiyomlarını çalışmışlardır [23].

Bu tez çalışması üç ana bölümden oluşmaktadır. Tez çalışmasının genel bilgiler bölümünde konu ile ilgili detaylı literatür bilgisi verilmiş ve ayrıca tez çalışmasında faydalanılmış olan klasik topolojik uzaylar üzerinde bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Tezin materyal ve yöntem bölümünde esnek kümeler, esnek topolojik uzaylar, neutrosophic esnek kümeler ve neutrosophic esnek topolojik uzaylar üzerindeki bazı temel tanım ve teoremler sunulmuştur.

Tezin son bölümü olan araştırma bulgularında ise neutrosophic esnek topolojik uzaylar üzerine yapılmış olan çalışmalardan faydalanılarak bu uzay üzerinde neutrosophic esnek kümenin sınırı, neutrosophic esnek taban, neutrosophic esnek yoğun küme ve neutrosophic esnek alt uzay topolojisi kavramlarının tanımları verilmiş ve gerekli teoremlerin ispatı sunulmuştur. Ayrıca bu bölümde konunun daha iyi kavranılması için çok sayıda örneğe yer verilmiştir.

1.2. KURAMSAL TEMELLER

1.2.1. Bazı Topolojik Temel Kavramlar

Tanım 1.2.1.1 [7] $X \neq \varnothing$ bir küme ve $\tau = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset 2^X$ in bir alt ailesi olsun. τ ailesi için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa:

1) $X,\ \varnothing \in \tau$,

2) $A' \subset A$ alt kümesi için $\bigcup_{\alpha \in A'} U_\alpha \in \tau$,

3) τ dan alınan her sonlu sayıda elemanın arakesiti τ ya aittir.

τ ya X üzerinde bir topoloji, (X,τ) ikilisine *topolojik uzay*, τ nun her U_α elemanına *açık küme* denir.

Tanım 1.2.1.2 [7] $X \neq \varnothing$ bir küme τ_1 ve τ_2, X üzerindeki iki topoloji olsun. Eğer $\tau_1 \subset \tau_2$ ise τ_1 e τ_2 den daha kaba topoloji veya τ_2 ye τ_1 den daha ince topolojidir denir.

Tanım 1.2.1.3 [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $B \subset X$ bir küme olsun. Eğer B nin bütünleyeni $B^c = X \setminus B$ açık ise B kümesine bu uzayda *kapalıdır* denir.

Tanım 1.2.1.4 [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ bir nokta ve $x \in A \subset X$ bir alt küme olsun. Eğer $x \in U \subset A$ sağlanacak şekilde $U \in \tau$ varsa A kümesine x noktasının bir *komşuluğu* denir.

Tanım 1.2.1.5 [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $M \subset X$ bir alt küme olsun. Eğer A kümesi M kümesinin her noktasının bir komşuluğu ise A kümesine M kümesinin *komşuluğu* denir.

Teorem 1.2.1.1 [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ bir alt küme olsun.

A açıktır $\Leftrightarrow \forall x \in A$ için A kümesi x noktasının bir komşuluğudur.

Tanım 1.2.1.6 [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ bir nokta ve $A \subset X$ bir alt küme olsun. Eğer x noktasının her komşuluğunun A ile arakesiti boş değilse; bu x noktasına A kümesinin *değme noktası* denir.

Teorem 1.2.1.2 [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $B \subset X$ bir küme olsun.

B kapalıdır $\Leftrightarrow B$ kümesinin her değme noktası B ye aittir.

Teorem 1.2.1.3 [2] $X \neq \varnothing$ kümesinin her $x \in X$ elemanına X in alt kümeler ailesi $\tilde{U}(x)$ karşılık gelsin ve aşağıdaki koşullar sağlansın:

1) $\forall A \in \tilde{U}(x) \Rightarrow x \in A$,

2) $A \in \tilde{U}(x),\ A \subset B \subset X \Rightarrow B \in \tilde{U}(x)$,

3) $A,\ B \in \tilde{U}(x) \Rightarrow A \cap B \in \tilde{U}(x)$,

4) $A \in \tilde{U}(x)\ \exists U \in \tilde{U}(x),\ U \subset A$ ve $\forall y \in U$ için $U \in \tilde{U}(y)$.

O zaman $\tau = \{U : \forall x \in A,\ U \in \tilde{U}(x)\}$ ailesi X de bir topolojidir ve $\tilde{U}(x)$ ailesi bu topolojiye göre x noktasının *komşuluklar ailesidir*.

Tanım 1.2.1.7 [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ bir küme olsun. A kümesini içeren tüm kapalı kümelerin arakesitine A kümesinin *kapanışı* denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. $\overline{A}$ kümesi A kümesini içeren en küçük kapalı kümedir.

Teorem 1.2.1.4 [7] Topolojik uzayda kapanış işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir

1) $\overline{A}$ kapalı kümedir,

2) A kapalıdır $\Leftrightarrow A = \overline{A}$ dir,

3) $A \subset \overline{A}$ dir,

4) $\overline{\varnothing} = \varnothing$ dir.

5) $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$ dir,

6) $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$ dir,

7) $A\subset B\Rightarrow\overline{A}\subset\overline{B}$ dir.

<u>Tanım 1.2.1.8</u> [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $A\subset X$ bir alt küme $x\in A$ bir nokta olsun. Eğer x in uygun bir komşuluğu A nın içinde kalıyorsa bu x noktasına A nın bir iç noktası denir. A nın tüm iç noktalarının kümesine A nın *içi* denir ve $Int(A)$ veya A^o ile gösterilir.

<u>Teorem1.2.1.5</u> [7] (X,τ) bir topolojik uzay ve A, B $\subset$ X iki küme olsun.

1) $IntA$ kümesi A ya ait olan en büyük açık kümedir;

2) A açıktır $\Leftrightarrow$ $A=IntA$ dır;

3) $IntA=X\setminus(X\setminus A)^c=\overline{\left((\overline{A})^c\right)}$;

4) $IntX=X$;

5) $Int(IntA)=IntA$;

6) $Int(A\cap B)=IntA\cap IntB$.

<u>Tanım 1.2.1.9</u> [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $A\subset X$ bir alt küme olsun.

$$FrA=\overline{A}\cap\overline{(A^c)}$$

kümesine A kümesinin *sınırı* denir.

<u>Teorem 1.2.1.6</u> [7] (X,τ) bir topolojik uzay ve $A,B\subset X$ iki küme ise;

1) $IntA=A\setminus FrA$;

2) $\overline{A}=A\cup FrA$;

3) $Fr(A\cup B)\subset Fr(A)\cup Fr(B)$;

4) $Fr(A\cap B)\subset Fr(A)\cup Fr(B)$;

5) $Fr\left(A^{c}\right)=FrA$;

6) $X=IntA\bigcup FrA\bigcup Int\left(X\setminus A\right)$;

7) $Fr\overline{A}\subset FrA$;

8) $Fr\left(IntA\right)\subset FrA$;

9) A açıktır $\Leftrightarrow$ $FrA=\overline{A}\setminus A$;

10) A kapalıdır $\Leftrightarrow$ $FrA=A\setminus IntA$;

sağlanır.

<u>Tanım 1.2.1.10</u> [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $A\subset X$ bir küme olsun.

a) Eğer $\overline{A}=X$ ise A kümesine (X,τ) uzayında *yoğundur* denir.

b) Eğer $\overline{(X\setminus A)}=X$ ise A kümesine (X,τ) uzayında *koyoğundur* denir.

c) Eğer $\overline{A}$ kümesi X de koyoğun ise A kümesine (X,τ) uzayının hiçbir yerinde *yoğun değildir* denir.

d) Eğer $A\subset A^{d}$ ise A kümesine *kendi içinde yoğundur* denir.

<u>Teorem 1.2.1.7</u> [7] Eğer A kümesi (X,τ) uzayında yoğun ise her $U\in\tau$ için $\overline{U}=\overline{(U\bigcap A)}$ dir.

<u>Tanım 1.2.1.11</u> [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $B\subset\tau$ bir alt aile olsun. Eğer her açık küme B nin bazı elemanlarının birleşimi olarak gösterilebiliyorsa bu B ailesine τ topolojisinin bir *tabanıdır* denir.

<u>Teorem 1.2.1.8</u> [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $B\subset\tau$ olsun.

a) B ailesi τ nun tabanıdır ancak ve ancak $\forall G\in\tau$ ve $\forall x\in G$ için $x\in B_x\subset G$ sağlanacak şekilde $B_x\in B$ bulunabilir.

b) $B=\{B_i\}_{i\in I}$ ailesi τ nun tabanı ise her B_{i_1}, $B_{i_2}\in B$ ve her $x\in B_{i_1}\bigcap B_{i_2}$ için $x\in B_{i_3}\subset B_{i_1}\bigcap B_{i_2}$ koşulunu sağlayan $B_{i_3}\in B$ vardır.

Tanım 1.2.1.12 [7] Eğer x noktasının her $U \in U(x)$ komşuluğu için $x \in V \subset U$ koşulunu sağlayan $V \in \tilde{B}(x)$ varsa $\tilde{B}(x)$ ailesine (X,τ) topolojik uzayında x noktasının bir *komşuluk tabanı* denir.

Tanım 1.2.1.13 [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $\rho \subset \tau$ bir alt aile olsun. ρ ailesinin elemanlarının tüm sonlu arakesitlerinden oluşan aile τ için bir taban oluşturuyorsa bu ρ ailesine τ nun *alt tabanı* denir.

Önerme 1.2.1.1 [7] (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ bir alt küme olsun.

$\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$ ailesi için

a) $\bigcup_{\alpha}(U_\alpha \cap A) = \left(\bigcup_{\alpha} U_\alpha\right) \cap A \in \tau_A$,

b) $(U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A) = (U_1 \cap U_2) \cap A \in \tau_A$

koşulları sağlandığından τ_A ailesi A üzerinde bir topolojidir.

Tanım 1.2.1.14 [7] a) (A,τ_A) çiftine (X,τ) uzayının bir alt uzayı, τ_A topolojisine *alt uzay topolojisi* denir.

b) Her (X,τ) topolojik uzay ve (A,τ_A) alt uzayı için $i_A(x) = x$ formülü ile tanımlanan $i_A : A \to X$ fonksiyonuna *gömme fonksiyonu* denir.

$i_A^{-1}(U) = U \cap A \in \tau_A$ olduğundan i_A fonksiyonu süreklidir. Açıktır ki τ_A topolojisi A kümesinde $i_A : A \to X$ fonksiyonundan üretilen topolojiye eşittir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Esnek Kümeler

X evrensel bir küme, E parametreler kümesi ve X in kuvvet kümesi $P(X)$ olsun.

Tanım 2.1.1 [37] $F: E \to P(X)$ bir dönüşüm olmak üzere (F,E) ikilisi X üzerinde bir *esnek küme* olarak adlandırılır.
Başka bir deyişle, esnek küme X kümesinin alt kümelerinin parametrizelendirilmiş ailesidir. $e \in E$ için $F(e)$, (F,E) esnek kümesinin $e-$elemanları kümesi veya $e-$yaklaşık değer elemanları kümesi gibi düşünülebilir. Yani,

$$(F,E) = \{(e, F(e)) : e \in E,\ F: E \to P(X)\}.$$

E parametresine göre X üzerinde tanımlanan tüm esnek kümelerin ailesi $SS(X)_E$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.1.1 [37] X kümesi öğrencilerin kümesi, E kümeside parametreler kümesi ve (F,E) esnek kümesi A kişisinin seçeceği öğrencilerin özelliklerini tarif eden bir küme olsun.

$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ dört öğrencinin kümesi ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ parametreler kümesinde e_1-yeşil gözlü, e_2-mavi gözlü, e_3-uzun boylu, e_4-kısa boylu, e_5-kilolu, e_6-zayıf olacak şekilde tanımlayalım.
$F(e_1)$ kümesi e_1 parametrelerini sağlayan öğrencilerin kümesidir. Buradan,
$F(e_1) = \{h_1, h_3\}$, $F(e_2) = \{h_2, h_4, h_5\}$, $F(e_3) = \{h_3, h_4\}$, $F(e_4) = \{h_5\}$,
$F(e_5) = \{h_1, h_5, h_6\}$, $F(e_6) = \{h_2, h_3, h_4\}$ şeklinde tanımlayalım. (F,E) esnek kümesi

$$(F,E)=\left\{\begin{array}{l}(\text{yeşil gözlü},\{h_1,h_3\}),\ (\text{mavi gözlü},\ \{h_2,h_4,h_5\}),\ (\text{uzun boylu},\ \{h_3,h_4\}),\\ (\text{kısaboylu},\ \{h_5\}),\ (\text{kilolu},\ \{h_1,h_5,h_6\}),\ (\text{zayıf},\ \{h_2,h_3,h_4\})\end{array}\right\}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.1.2 [47] (F,E), $(G,E)\in SS(X)_E$ olsun. İki esnek kümenin farkı $\forall e\in E$ için $H(e)=F(e)-G(e)$ şeklinde tanımlanır ve $(G,E)=(F,E)-(G,E)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.3 [28] (F,E), $(G,E)\in SS(X)_E$ olsun.

1) $\forall e\in E$ için $F(e)\subseteq G(e)$ ise (F,E) esnek kümesi (G,E) esnek kümesinin alt kümesidir denir ve $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ şeklinde gösterilir.

2) $\forall e\in E$ için $F(e)=G(e)$ ise, (F,E) esnek kümesi (G,E) esnek kümesine eşittir denir ve $(F,E)\tilde{=}(G,E)$ şeklinde gösterilir.

3) $\forall e\in E$ için $H(e)=F(e)\cup G(e)$ olacak şekilde (H,E) esnek kümesine (F,E) ve (G,E) esnek kümelerinin birleşimi denir ve $(F,E)\tilde{\cup}(G,E)$ şeklinde gösterilir.

4) $\forall e\in E$ için $M(e)=F(e)\cap G(e)$ olacak şekilde (M,E) esnek kümesine, (F,E) ve (G,E) esnek kümelerinin kesişimi denir ve $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.4 [3] $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. $(F,E)^c$ ile gösterilen (F,E) esnek kümesinin tümleyeni $(F,E)^c=(F^c,E)$ ile tanımlanır. Burada $F^c:E\to P(X)$ dönüşümü $F^c(e)=X\setminus F(e)$, $\forall e\in E$ ile ifade edilir. Açıktır ki, $\left((F,E)^c\right)^c=(F,E)$ dir.

Teorem 2.1.1 [47] (F,E), $(G,E)\in SS(X)_E$ olsun.

1) $\left[(F,E)\tilde{\cup}(G,E)\right]^c=(F,E)^c\tilde{\cap}(G,E)^c$.

2) $\left[(F,E)\tilde{\cap}(G,E)\right]^c=(F,E)^c\tilde{\cup}(G,E)^c$.

<u>Tanım 2.1.5</u> [32] $(F,E)\in SS(X)_E$ bir esnek küme olsun.

1) $\forall e\in E$ için $F(e)=\phi$ ise (F,E) esnek kümesine *boş esnek küme* denir ve $(\tilde{\phi},E)$ yada kısaca $\tilde{\phi}$ ile gösterilir.

2) $\forall e\in E$ için $F(e)=X$ ise (F,E) esnek kümesine *mutlak esnek küme* denir ve $(\tilde{X},E)$ yada kısaca $\tilde{X}$ gösterilir.

Açıktır ki $(\tilde{\phi},E)^c=(\tilde{X},E)$ ve $(\tilde{X},E)^c=(\tilde{\phi},E)$ dir.

<u>Tanım 2.1.6</u> [50] I keyfi bir indis kümesi ve $L=\{(F_i,E):i\in I\}$ ailesi $SS(X)_E$ nin bir alt ailesi olsun.

1) $\forall e\in E$ için $H(e)=\bigcup\limits_{i\in E}F_i(e)$ olmak üzere $\tilde{\bigcup\limits_{i\in I}}(F_i,E)=(H,E)$.

2) $\forall e\in E$ için $M(e)=\bigcap\limits_{i\in E}F_i(e)$ olmak üzere $\tilde{\bigcap\limits_{i\in I}}(F_i,E)=(M,E)$.

<u>Önerme 2.1.1</u> [21] I keyfi bir indis kümesi ve $\{(F_i,E):i\in I\}\subseteq SS(X)_E$ olsun.

1) $\forall i\in I$ için $(F_i,E)\tilde{\subseteq}\tilde{\cup}\{(F_i,E):\forall i\in I\}$.

2) $\forall i\in I$ için $\tilde{\cap}\{(F_i,E):\forall i\in I\}\tilde{\subseteq}(F_i,E)$.

3) $\left[\tilde{\cup}\{(F_i,E):\forall i\in I\}\right]^c=\tilde{\cap}\{(F_i,E)^c:\forall i\in I\}$

4) $\left[\tilde{\cap}\{(F_i,E):\forall i\in I\}\right]^c=\tilde{\cup}\{(F_i,E)^c:\forall i\in I\}$.

<u>Tanım 2.1.7</u> [47] $(F,E)\in SS(X)_E$ ve $\varnothing\neq Y\subseteq X$ olsun. Y üzerinde (F,E) esnek alt kümesi $\forall e\in E$ için ${}^YF(e)=Y\cap F(e)$ ifadesi ile tanımlanır ve $({}^YF,E)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.8 [8] $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. Eğer $e\in E$ için $F(e)=\{x\}$ ve $e'\in E\setminus\{e\}$ için $F(e')=\phi$ ise (F,E) esnek kümesine *esnek nokta* denir ve (x_e,E) yada kısacası x_e ile gösterilir.

Tanım 2.1.9 [8] (x_e,E) ve $(y_{e'},E)$ iki esnek nokta olsun. $x\neq y$ veya $e\neq e'$ koşulu sağlanır ise bu noktalara *farklı esnek noktalar* denir.

Tanım 2.1.10 [17] Eğer $x_e(e)\subseteq G(e)$ yani, $\{x\}\subseteq G(e)$ ise (x_e,E) esnek noktası (G,E) esnek kümesinin elemanıdır ve $(x_e,E)\tilde{\in}(G,E)$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.2 [17] $(G,E)\in SS(X)_E$ esnek kümesi kendi esnek noktalarının birleşimidir yani $(G,E)=\tilde{\bigcup}\{(x_e,E):(x_e,E)\tilde{\in}(G,E)\}$ dir.

Önerme 2.1.3 [17] $(G,E),(H,E)\in SS(X)_E$ olsun.

1) $(x_e,E)\tilde{\in}(G,E)\Leftrightarrow(x_e,E)\tilde{\notin}(G,E)^c$.
2) $(x_e,E)\tilde{\in}(G,E)\tilde{\bigcup}(H,E)\Leftrightarrow(x_e,E)\tilde{\notin}(G,E)$ yada $(x_e,E)\tilde{\in}(H,E)$,
3) $(x_e,E)\tilde{\in}(G,E)\tilde{\bigcap}(H,E)\Leftrightarrow(x_e,E)\tilde{\in}(G,E)$ yada $(x_e,E)\tilde{\in}(H,E)$.
4) $(G,E)\tilde{\subseteq}(H,E)\Leftrightarrow(x_e,E)\tilde{\in}(G,E)\Rightarrow(x_e,E)\tilde{\in}(H,E)$.

Tanım 2.1.11 [29] $SS(X)_E$, $SS(Y)_E$ esnek küme aileleri verilsin. $u:X\to Y$ ve $p:E\to E'$ dönüşümleri tanımlansın. (F,E), X üzerinde esnek küme $(f(F,E),B),B=p(E)\tilde{\subseteq}E'$ Y üzerinde esnek küme olsun. $f_{pu}:SS(X)_E\to SS(Y)_E$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

1) $(F,E)\in SS(X)_E$, esnek kümesinin görüntüsü $\forall\beta\in B$ için,

$$f_{pu}(F)(\beta)=\begin{cases} u\left(\bigcup_{\alpha\in p^{-1}(\beta)\cap A} F(\alpha)\right), & p^{-1}(\beta)\cap E\neq\varnothing \\ \varnothing & , \quad aksi \quad takdirde \end{cases}$$

Şeklinde tanımlanır ve $f_{pu}(F,E)=\left(f_{pu}(F),\, p(E)\right)$ ile gösterilir.

2) $(G,E)\in SS(Y)_{E}$, esnek kümesinin $D=p^{-1}(C)$ olmak üzere ters görüntüsü $\forall\alpha\in D$ için,

$$f_{pu}^{-1}(G)(\alpha)=\begin{cases} u^{-1}\left(G\left(p(\alpha)\right)\right), & p(\alpha)\in E' \\ \varnothing & , \quad aksi \quad takdirde \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $f_{pu}^{-1}(G,E')=\left(f_{pu}^{-1}(G),p^{-1}(E')\right)$ şeklinde gösterilir.

2.2. Esnek Topoloji ve Esnek Topolojik Uzaylar

<u>Tanım 2.2.1</u> [47] $\tilde{\tau}$, X üzerinde esnek kümelerin ailesi olsun. Eğer $\tilde{\tau}$ ailesi;

1) $(\tilde{X},E),(\phi,E)\in\tilde{\tau}$.
2) $\tilde{\tau}$ ya ait herhangi sayıdaki esnek kümenin birleşimi $\tilde{\tau}$ ya aittir.
3) $\tilde{\tau}$ ya ait sonlu sayıdaki esnek kümenin kesişimi $\tilde{\tau}$ ya aittir.

koşullarını sağlar ise $\tilde{\tau}$ ya X üzerinde *esnek topoloji* ve $(X,\tilde{\tau},E)$ üçlüsüne de *esnek topolojik uzay* denir.

<u>Örnek 2.2.1</u> [47] $\tilde{\tau}=\left\{(\tilde{X},E),(\tilde{\phi},E)\right\}$ ailesi esnek indiskret topolojidir ve $(X,\tilde{\tau},E)$ üçlüsüne *esnek indiskret topolojik uzay* denir. $\tilde{\tau}$, X üzerinde tanımlanan bütün esnek kümelerin ailesi ise bu aile esnek diskret topolojidir. $(X,\tilde{\tau},E)$ üçlüsüne esnek topolojik *diskret uzay* denir.

Örnek 2.2.2 [47] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir esnek topolojik uzay olsun. Her $e\in E$ için $\tau_e=\{F(e):(F,E)\in\tilde{\tau}\}$ ailesi bir topolojidir.

Tanım 2.2.2 [27] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir esnek topolojik uzay olsun.

1) $\tilde{\tau}$ nun elemenlarına *esnek açık küme* denir.

2) $(F,E)^c$ esnek açık küme ise (F,E) esnek kümesine *esnek kapalı küme* denir.

Önerme 2.2.1 [47] $(X,\tilde{\tau},E)$, X üzerinde bir esnek topolojik uzay olsun.

1) $(\tilde{X},E)$, $(\tilde{\phi},E)$ esnek kümeleri X üzerinde kapalı esnek kümelerdir.

2) Keyfi sayıdaki esnek kapalı kümelerin kesişimi kapalı kümedir.

3) Herhangi iki esnek kapalı kümenin birleşimi esnek kapalı kümedir.

Esnek kapalı kümelerin ailesi $CS(X,\tilde{\tau},E)$ veya $CS_{\tilde{\tau}}(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3 [37] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer $(x_e,E)\tilde{\in}(G,E)$ $\tilde{\subseteq}(F,E)$ olacak şekilde en az bir (G,E) esnek açık kümesi varsa (F,E) esnek kümesi (x_e,E) esnek noktasının *esnek komşuluğudur* denir.

Tanım 2.2.4 [47] $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzay ve $(F,E),(G,E)\in SS(X)_E$ olsun. (F,E) esnek kümesini içeren tüm esnek kapalı kümelerin arakesitine (F,E) *esnek kümesinin kapanışı* denir ve $cl^s_{\tilde{\tau}}(F,E)$ ile gösterilir.

Açıktır ki $cl^s_{\tilde{\tau}}(F,E)$ esnek kümesi (F,E) yi içeren en küçük esnek kapalı kümedir.

Teorem 2.2.1 [47] $(X,\tilde{\tau},E)$esnek topolojik uzay ve (F,E), $(G,E)\in SS(X)_E$ olsun. O halde aşağıdaki koşullar sağlanır;

1) $cl^s_{\tilde{\tau}}(\tilde{\phi})=\tilde{\phi}$ ve $cl^s_{\tilde{\tau}}(\tilde{X})=\tilde{X}$;

2) $(F,E)\subseteq cl^s_{\tilde{\tau}}(F,E)$;

3) (F,E) esnek kapalı kümedir $\Leftrightarrow (F,E)=cl^s_{\tilde{\tau}}(F,E)$;

4) $cl^s_{\tilde{\tau}}\left(cl^s_{\tilde{\tau}}(F,E)\right)=cl^s_{\tilde{\tau}}(F,E)$;

5) $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)\Rightarrow cl^s_{\tilde{\tau}}(F,E)\tilde{\subseteq}cl^s_{\tilde{\tau}}(G,E)$;

6) $cl^s_{\tilde{\tau}}\left((F,E)\tilde{\bigcup}(G,E)\right)=cl^s_{\tilde{\tau}}(F,E)\tilde{\bigcup}cl^s_{\tilde{\tau}}(G,E)$;

7) $cl^s_{\tilde{\tau}}\left((F,E)\tilde{\bigcap}(G,E)\right)\tilde{\subseteq}cl^s_{\tilde{\tau}}(F,E)\tilde{\bigcap}cl^s_{\tilde{\tau}}(G,E)$ dir.

Teorem 2.2.2 [44] (X,τ,E) bir esnek topolojik uzay ve (x_e,E) yi içeren esnek açık kümelerin ailesi $\tilde{\tau}_{x_e}$ ile gösterilsin.

$$(x_e,E)\tilde{\in} scl_{\tilde{\tau}}(G,E)\Leftrightarrow\left(O_{x_e},E\right)\tilde{\bigcap}(G,E)\neq\left(\tilde{\phi},E\right),\forall\left(O_{x_e},E\right)\in\tilde{\tau}_{x_e}.$$

Tanım 2.2.5 [47] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir esnek topolojik uzay, (F,E), $(G,E)\in SS(X)_E$ ve $(x_e,E)\tilde{\in} SS(X)_E$ olsun. Eğer $(x_e,E)\tilde{\in}(G,E)\tilde{\subseteq}(F,E)$ olacak şekilde (G,E) esnek açık kümesi varsa (x_e,E) esnek noktası (F,E) nin *iç noktasıdır* denir.

Esnek açık kümelerin ailesi $OS(X,\tilde{\tau},E)$ veya $OS_{\tilde{\tau}}(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.6 [24] $(X,\tilde{\tau},E)$ ve $(Y,\tilde{\tau},E)$ iki esnek topolojik uzay, $f:(X,\tilde{\tau},E)\rightarrow(Y,\tilde{\tau},E)$ bir dönüşüm olsun. $\left(f(x_e,E),E\right)$ nin herhangi (H,E) esnek komşuluğu için $f(F,E)\tilde{\subseteq}(H,E)$ olacak şekilde (x_e,E) nin en az bir (F,E) esnek komşuluğu varsa f dönüşümüne *esnek sürekli dönüşüm* denir.

Tanım 2.2.7 [24] $(X,\tilde{\tau},E)$ ve $(Y,\tilde{\tau},E)$ iki esnek topolojik uzay, $f:(X,\tilde{\tau},E)\rightarrow(Y,\tilde{\tau},E)$ bir dönüşüm olsun. f dönüşümü birebir, esnek, sürekli ve f^{-1} esnek sürekli ise f dönüşümüne *esnek homeomorfizma* denir ve X den Y ye esnek homeomorfizma şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.2.8 [4] $\{(\varphi_s,\omega_s): (X,\tilde{\tau},E)\to(Y_s,\tilde{\tau}_s,E_s)\}_{s\in S}$ esnek dönüşümler ailesi ve $\{(Y_s,\tilde{\tau}_s,E_s)\}_{s\in S}$ esnek topolojik uzaylar ailesi olsun. Buradan $\tilde{\tau}$ esnek topolojisi $S=\left\{(\varphi_s,\omega_s)_{s\in S}^{-1}(F,E):(F,E)\in\tilde{\tau},s\in S\right\}$ alt tabanı tarafından üretilen esnek topoloji olarak adlandırılır.

2.3. Neutrosophic Esnek Kümeler

Tanım 2.3.1 [46] X evrensel kümesi üzerinde bir neutrosophic A kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$A=\left\{\langle x,T_A(x),I_A(x),F_A(x)\rangle : x\in X\right\},$$

Burada,

$$T,I,F:X\to\,]^-0,1^+[\quad \text{ve}\quad {}^-0\le T_A(x)+I_A(x)+F_A(x)\le 3^+.$$

Neutrosophic küme, değerini $]^-0,1^+[$ aralığında gerçek standart veya standart olmayan alt kümelerden alır. Ancak mühendislik problemlerinde, bilimsel problemlerin gerçek yaşam uygulamalarında değeri $]^-0,1^+[$ aralığında olan gerçek standart veya standart olmayan alt kümelerden elde edilen neutrosophic kümeyi kullanmak zordur. Dolayısıyla neutrosophic kümeyi $[0,1]$ değer aralığında dikkate alıyoruz.

İlk olarak Maji [33] tarafından tanımlanan neutrosophic esnek küme daha sonra Deli ve Broumi [19] tarafından aşağıdaki şekilde yeniden tanımlanmıştır.

Tanım 2.3.2 [41] X evrensel küme ve E tüm parametrelerin kümesi olsun ve $P(X)$, X kümesinin tüm neutrosophic kümelerinin bir kümesi olsun. X kümesi üzerinde bir $(\tilde{F},E)$ neutrosophic esnek kümesi $\tilde{F}:E\to P(X)$ fonksiyonu ile tanımlanan bir kümedir. Başka bir deyişle neutrosophic esnek küme, $P(X)$ kümesinin bazı elemanlarının parametrizelendirilmiş bir ailesidir ve aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$(\tilde{F},E)=\left\{\left(e,\langle x,T_{\tilde{F}(e)}(x),I_{\tilde{F}(e)}(x),F_{\tilde{F}(e)}(x)\rangle : x\in X\right):e\in E\right\}$$

Burada $T_{\tilde{F}(e)}(x), I_{\tilde{F}(e)}(x), F_{\tilde{F}(e)}(x) \in [0,1]$ dir ve $\tilde{F}(e)$ fonksiyonu sırasıyla *olumlu üyelik, belirsiz üyelik* ve *olumsuz üyelik fonksiyonu* olarak adlandırılır. Her T, I, F dönüşümlerinin supremumu 1 olduğu için,

$$0 \leq T_{\tilde{F}(e)}(x) + I_{\tilde{F}(e)}(x) + F_{\tilde{F}(e)}(x) \leq 3$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.3.3 [12] $(\tilde{F}, E)$, X evrensel kümesi üzerinde neutrosophic esnek küme olsun. $(\tilde{F}, E)$ kümesinin tümleyeni $(\tilde{F}, E)^c$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(\tilde{F}, E)^c = \left\{\left(e, \langle x, F_{\tilde{F}(e)}(x), 1 - I_{\tilde{F}(e)}(x), T_{\tilde{F}(e)}(x)\rangle : x \in X\right) : e \in E\right\}.$$

Burada, $\left((\tilde{F}, E)^c\right)^c = (\tilde{F}, E)$ olduğu açıktır.

Tanım 2.3.4 [33] $(\tilde{F}, E)$ ve $(\tilde{G}, E)$, X evrensel kümesi üzerinde iki neutrosophic esnek kümeler olsun. Eğer $T_{\tilde{F}(e)}(x) \leq T_{\tilde{G}(e)}(x)$, $I_{\tilde{F}(e)}(x) \leq I_{\tilde{G}(e)}(x)$, $F_{\tilde{F}(e)}(x) \geq F_{\tilde{G}(e)}(x)$, $\forall e \in E$, $\forall x \in X$ ise $(\tilde{F}, E)$ kümesi $(\tilde{G}, E)$ kümesinin neutrosophic *esnek alt kümesi* denir ve $(\tilde{F}, E) \subseteq (\tilde{G}, E)$ ile gösterilir.

$(\tilde{F}, E)$ kümesi $(\tilde{G}, E)$ kümesinin neutrosophic esnek alt kümesi ve $(\tilde{G}, E)$ kümesi, $(\tilde{F}, E)$ kümesinin neutrosophic esnek alt kümesi ise $(\tilde{F}, E)$ kümesi ve $(\tilde{G}, E)$ kümesine *neutrosophic esnek eşittir* denir ve $(\tilde{F}, E) = (\tilde{G}, E)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.5 [41] $(\tilde{F}_1, E)$ ve $(\tilde{F}_2, E)$, X evrensel kümesi üzerinde iki neutrosophic esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin birleşimi $(\tilde{F}_1, E) \cup (\tilde{F}_2, E) = (\tilde{F}_3, E)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(\tilde{F}_3, E) = \left\{\left(e, \langle x, T_{\tilde{F}_3(e)}(x), I_{\tilde{F}_3(e)}(x), F_{\tilde{F}_3(e)}(x)\rangle : x \in X\right) : e \in E\right\}$$

Burada,

$$T_{\tilde{F}_3(e)}(x) = \max\left\{T_{\tilde{F}_1(e)}(x), T_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\},$$
$$I_{\tilde{F}_3(e)}(x) = \max\left\{I_{\tilde{F}_1(e)}(x), I_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\},$$
$$F_{\tilde{F}_3(e)}(x) = \min\left\{F_{\tilde{F}_1(e)}(x), F_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\}.$$

<u>Tanım 2.3.6</u> [41] $(\tilde{F}_1, E)$ ve $(\tilde{F}_2, E)$, X evrensel kümesi üzerinde iki neutrosophic esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin arakesiti $(\tilde{F}_1, E) \cap (\tilde{F}_2, E) = (\tilde{F}_3, E)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(\tilde{F}_3, E) = \left\{\left(e, \langle x, T_{\tilde{F}_3(e)}(x), I_{\tilde{F}_3(e)}(x), F_{\tilde{F}_3(e)}(x)\rangle : x \in X\right) : e \in E\right\}$$

Burada,

$$T_{\tilde{F}_3(e)}(x) = \min\left\{T_{\tilde{F}_1(e)}(x), T_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\},$$
$$I_{\tilde{F}_3(e)}(x) = \min\left\{I_{\tilde{F}_1(e)}(x), I_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\},$$
$$F_{\tilde{F}_3(e)}(x) = \max\left\{F_{\tilde{F}_1(e)}(x), F_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\}.$$

<u>Tanım 2.3.7</u> [41] $(\tilde{F}_1, E)$ ve $(\tilde{F}_2, E)$, X evrensel kümesi üzerinde iki neutrosophic esnek küme olsun. Bu esnek kümeler üzerinde "$(\tilde{F}_1, E)$ fark $(\tilde{F}_2, E)$" işlemi $(\tilde{F}_1, E) \setminus (\tilde{F}_2, E) = (\tilde{F}_3, E)$ ile gösterilir ve $(\tilde{F}_3, E) = (\tilde{F}_1, E) \cap (\tilde{F}_2, E)^c$ şeklinde tanımlanır. Burada,

$$(\tilde{F}_3, E) = \left\{\left(e, \langle x, T_{\tilde{F}_3(e)}(x), I_{\tilde{F}_3(e)}(x), F_{\tilde{F}_3(e)}(x)\rangle : x \in X\right) : e \in E\right\}$$

ve

$$T_{\tilde{F}_3(e)}(x) = \min\left\{T_{\tilde{F}_1(e)}(x), F_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\},$$
$$I_{\tilde{F}_3(e)}(x) = \min\left\{I_{\tilde{F}_1(e)}(x), 1 - I_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\},$$
$$F_{\tilde{F}_3(e)}(x) = \max\left\{F_{\tilde{F}_1(e)}(x), T_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\}.$$

<u>Tanım 2.3.8</u> [41] $\left\{(\tilde{F}_i, E) \middle| i \in I\right\}$ sınıfı, X evrensel kümesi üzerinde bir neutrosophic esnek aile olsun. Bu ailenin birleşimi ve kesişimi sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\bigcup_{i\in I}(\tilde{F}_i,E)=\left\{\left(e,\langle x,\sup\left[T_{\tilde{F}_{i(e)}}(x)\right]_{i\in I},\sup\left[I_{\tilde{F}_{i(e)}}(x)\right]_{i\in I},\inf\left[F_{\tilde{F}_{i(e)}}(x)\right]_{i\in I}\rangle : x\in X\right): e\in E\right\},$$

$$\bigcap_{i\in I}(\tilde{F}_i,E)=\left\{\left(e,\langle x,\inf\left[T_{\tilde{F}_{i(e)}}(x)\right]_{i\in I},\inf\left[I_{\tilde{F}_{i(e)}}(x)\right]_{i\in I},\sup\left[F_{\tilde{F}_{i(e)}}(x)\right]_{i\in I}\rangle : x\in X\right): e\in E\right\}.$$

<u>Tanım 2.3.9</u> [41] $(\tilde{F}_1,E)$ ve $(\tilde{F}_2,E)$, X evrensel kümesi üzerinde iki neutrosophic esnek küme olsun. Bu esnek kümeler üzerinde "ve" işlemi $(\tilde{F}_1,E)\wedge(\tilde{F}_2,E) = (\tilde{F}_3,E\times E)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(\tilde{F}_3,E\times E)=\left\{\left((e_1,e_2),\langle x,T_{\tilde{F}_3(e_1,e_2)}(x),I_{\tilde{F}_3(e_1,e_2)}(x),F_{\tilde{F}_3(e_1,e_2)}(x)\rangle : x\in X\right):(e_1,e_2)\in E\times E\right\}$$

Burada,

$$T_{\tilde{F}_3(e_1,e_2)}(x)=\min\left\{T_{\tilde{F}_1(e_1)}(x),T_{\tilde{F}_2(e_2)}(x)\right\},$$
$$I_{\tilde{F}_3(e_1,e_2)}(x)=\min\left\{I_{\tilde{F}_1(e_1)}(x),I_{\tilde{F}_2(e_2)}(x)\right\},$$
$$F_{\tilde{F}_3(e_1,e_2)}(x)=\max\left\{F_{\tilde{F}_1(e_1)}(x),F_{\tilde{F}_2(e_2)}(x)\right\}.$$

<u>Tanım 2.3.10</u> [41] $(\tilde{F}_1,E)$ ve $(\tilde{F}_2,E)$, X evrensel kümesi üzerinde iki neutrosophic esnek küme olsun. Bu esnek kümeler üzerinde "veya" işlemi $(\tilde{F}_1,E)\vee(\tilde{F}_2,E)= (\tilde{F}_3,E\times E)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(\tilde{F}_3,E\times E)=\left\{\left((e_1,e_2),\langle x,T_{\tilde{F}_3(e_1,e_2)}(x),I_{\tilde{F}_3(e_1,e_2)}(x),F_{\tilde{F}_3(e_1,e_2)}(x)\rangle : x\in X\right):(e_1,e_2)\in E\times E\right\}$$

Burada,

$$T_{\tilde{F}_3(e_1,e_2)}(x)=\max\left\{T_{\tilde{F}_1(e_1)}(x),T_{\tilde{F}_2(e_2)}(x)\right\},$$
$$I_{\tilde{F}_3(e_1,e_2)}(x)=\max\left\{I_{\tilde{F}_1(e_1)}(x),I_{\tilde{F}_2(e_2)}(x)\right\},$$
$$F_{\tilde{F}_3(e_1,e_2)}(x)=\min\left\{F_{\tilde{F}_1(e_1)}(x),F_{\tilde{F}_2(e_2)}(x)\right\}.$$

Tanım 2.3.11 [41] 1) Eğer her $x \in X$ ve her $e \in E$ için $T_{\tilde{F}(e)}(x)=0$, $I_{\tilde{F}(e)}(x)=0$, $F_{\tilde{F}(e)}(x)=1$ ise X evrensel kümesi üzerindeki bir $(\tilde{F},E)$ neutrosophic esnek kümesine *neutrosophic boş esnek küme* denir ve $0_{(X,E)}$ ile gösterilir.

2) Eğer her $x \in X$ ve her $e \in E$ için $T_{\tilde{F}(e)}(x)=1$, $I_{\tilde{F}(e)}(x)=1$, $F_{\tilde{F}(e)}(x)=0$ ise X evrensel kümesi üzerindeki bir $(\tilde{F},E)$ neutrosophic esnek kümesine *neutrosophic mutlak esnek küme* denir ve $1_{(X,E)}$ ile gösterilir.

Açıktır ki $0^c{}_{(X,E)}=1_{(X,E)}$ ve $1^c{}_{(X,E)}=0_{(X,E)}$.

Önerme 2.3.1 [41] $(\tilde{F}_1,E)$, $(\tilde{F}_2,E)$ ve $(\tilde{F}_3,E)$, X evrensel kümesi üzerinde neutrosophic esnek kümeler olsun. Bu durumda,

1) $(\tilde{F}_1,E)\cup\left[(\tilde{F}_2,E)\cup(\tilde{F}_3,E)\right]=\left[(\tilde{F}_1,E)\cup(\tilde{F}_2,E)\right]\cup(\tilde{F}_3,E)$ ve

$(\tilde{F}_1,E)\cap\left[(\tilde{F}_2,E)\cap(\tilde{F}_3,E)\right]=\left[(\tilde{F}_1,E)\cap(\tilde{F}_2,E)\right]\cap(\tilde{F}_3,E)$;

2) $(\tilde{F}_1,E)\cup\left[(\tilde{F}_2,E)\cap(\tilde{F}_3,E)\right]=\left[(\tilde{F}_1,E)\cup(\tilde{F}_2,E)\right]\cap\left[(\tilde{F}_1,E)\cup(\tilde{F}_3,E)\right]$ ve

$(\tilde{F}_1,E)\cap\left[(\tilde{F}_2,E)\cup(\tilde{F}_3,E)\right]=\left[(\tilde{F}_1,E)\cap(\tilde{F}_2,E)\right]\cup\left[(\tilde{F}_1,E)\cap(\tilde{F}_3,E)\right]$;

3) $(\tilde{F}_1,E)\cup 0_{(X,E)}=(\tilde{F}_1,E)$ ve $(\tilde{F}_1,E)\cap 0_{(X,E)}=0_{(X,E)}$;

4) $(\tilde{F}_1,E)\cup 1_{(X,E)}=1_{(X,E)}$ ve $(\tilde{F}_1,E)\cap 1_{(X,E)}=(\tilde{F}_1,E)$;

Önerme 2.3.2 [41] $(\tilde{F}_1,E)$ ve $(\tilde{F}_2,E)$, X evrensel kümesi üzerinde iki neutrosophic esnek küme olsun. Bu durumda,

1) $\left[(\tilde{F}_1,E)\cup(\tilde{F}_2,E)\right]^c=(\tilde{F}_1,E)^c\cap(\tilde{F}_2,E)^c$;

2) $\left[(\tilde{F}_1,E)\cap(\tilde{F}_2,E)\right]^c=(\tilde{F}_1,E)^c\cup(\tilde{F}_2,E)^c$.

İspat: 1) Her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$\left(\tilde{F}_1,E\right)\cup\left(\tilde{F}_2,E\right)=\left\{\left\langle\begin{array}{c}x,\max\left\{T_{\tilde{F}_1(e)}(x),T_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\},\max\left\{I_{\tilde{F}_1(e)}(x),I_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\},\\ \min\left\{F_{\tilde{F}_1(e)}(x),F_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\}\end{array}\right\rangle\right\}$$

$$\left[\left(\tilde{F}_1,E\right)\cup\left(\tilde{F}_2,E\right)\right]^c=\left\{\left\langle\begin{array}{c}x,\min\left\{F_{\tilde{F}_1(e)}(x),F_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\},1-\max\left\{I_{\tilde{F}_1(e)}(x),I_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\},\\ \max\left\{T_{\tilde{F}_1(e)}(x),T_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\}\end{array}\right\rangle\right\}$$

Dolayısıyla,

$$\left(\tilde{F}_1,E\right)^c=\left\{\langle x,F_{\tilde{F}_1(e)}(x),1-I_{\tilde{F}_1(e)}(x),T_{\tilde{F}_1(e)}(x)\rangle\right\},$$

$$\left(\tilde{F}_2,E\right)^c=\left\{\langle x,F_{\tilde{F}_2(e)}(x),1-I_{\tilde{F}_2(e)}(x),T_{\tilde{F}_2(e)}(x)\rangle\right\}.$$

olur. Bu durumda,

$$\left(\tilde{F}_1,E\right)^c\cap\left(\tilde{F}_2,E\right)^c=\left\{\left\langle\begin{array}{c}x,\min\left\{F_{\tilde{F}_1(e)}(x),F_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\},\min\left\{\left(1-I_{\tilde{F}_1(e)}(x)\right),\left(1-I_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right)\right\},\\ \max\left\{T_{\tilde{F}_1(e)}(x),T_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\}\end{array}\right\rangle\right\}$$

$$=\left\{\left\langle\begin{array}{c}x,\min\left\{F_{\tilde{F}_1(e)}(x),F_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\},1-\max\left\{I_{\tilde{F}_1(e)}(x),I_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\},\\ \max\left\{T_{\tilde{F}_1(e)}(x),T_{\tilde{F}_2(e)}(x)\right\}\end{array}\right\rangle\right\}.$$

elde edilir. Bu nedenle $\left[\left(\tilde{F}_1,E\right)\cup\left(\tilde{F}_2,E\right)\right]^c=\left(\tilde{F}_1,E\right)^c\cap\left(\tilde{F}_2,E\right)^c$.

2) 1)' in ispatına benzer şekilde kolayca elde edilmektedir.

<u>Önerme 2.3.3</u> [41] $\left(\tilde{F}_1,E\right)$ ve $\left(\tilde{F}_2,E\right)$, X evrensel kümesi üzerinde iki neutrosophic esnek küme olsun. Bu durumda,

1) $\left[\left(\tilde{F}_1,E\right)\vee\left(\tilde{F}_2,E\right)\right]^c=\left(\tilde{F}_1,E\right)^c\wedge\left(\tilde{F}_2,E\right)^c$;

2) $\left[\left(\tilde{F}_1,E\right)\wedge\left(\tilde{F}_2,E\right)\right]^c=\left(\tilde{F}_1,E\right)^c\vee\left(\tilde{F}_2,E\right)^c$.

<u>İspat</u> 1) Her $(e_1,e_2)\in E\times E$ ve $x\in X$ için

$$\left(\tilde{F}_1,E\right)\vee\left(\tilde{F}_2,E\right)=\left\{\left\langle \begin{array}{c} x,\max\left\{T_{\tilde{F}_1(e_1)}(x),T_{\tilde{F}_2(e_2)}(x)\right\},\max\left\{I_{\tilde{F}_1(e_1)}(x),I_{\tilde{F}_2(e_2)}(x)\right\}, \\ \min\left\{F_{\tilde{F}_1(e_1)}(x),F_{\tilde{F}_2(e_2)}(x)\right\} \end{array}\right\rangle\right\}$$

$$\left[\left(\tilde{F}_1,E\right)\vee\left(\tilde{F}_2,E\right)\right]^c=\left\{\left\langle \begin{array}{c} x,\min\left\{F_{\tilde{F}_1(e_1)}(x),F_{\tilde{F}_2(e_2)}(x)\right\},1-\max\left\{I_{\tilde{F}_1(e_1)}(x),I_{\tilde{F}_2(e_2)}(x)\right\}, \\ \max\left\{T_{\tilde{F}_1(e_1)}(x),T_{\tilde{F}_2(e_2)}(x)\right\} \end{array}\right\rangle\right\}$$

olur. Diğer taraftan,

$$\left(\tilde{F}_1,E\right)^c=\left\{\langle x,F_{\tilde{F}_1(e_1)}(x),1-I_{\tilde{F}_1(e_1)}(x),T_{\tilde{F}_1(e_1)}(x)\rangle : e_1\in E\right\},$$

$$\left(\tilde{F}_2,E\right)^c=\left\{\langle x,F_{\tilde{F}_2(e_2)}(x),1-I_{\tilde{F}_2(e_2)}(x),T_{\tilde{F}_2(e_2)}(x)\rangle : e_2\in E\right\}.$$

Bu durumda,

$$\left(\tilde{F}_1,E\right)^c\wedge\left(\tilde{F}_2,E\right)^c=\left\{\left\langle \begin{array}{c} x,\min\left\{F_{\tilde{F}_1(e_1)}(x),F_{\tilde{F}_2(e_2)}(x)\right\},\min\left\{\left(1-I_{\tilde{F}_1(e_1)}(x)\right),\left(1-I_{\tilde{F}_2(e_2)}(x)\right)\right\}, \\ \max\left\{T_{\tilde{F}_1(e_1)}(x),T_{\tilde{F}_2(e_2)}(x)\right\} \end{array}\right\rangle\right\}$$

$$=\left\{\left\langle \begin{array}{c} x,\min\left\{F_{\tilde{F}_1(e_1)}(x),F_{\tilde{F}_2(e_2)}(x)\right\},1-\max\left\{I_{\tilde{F}_1(e_1)}(x),I_{\tilde{F}_2(e_2)}(x)\right\}, \\ \max\left\{T_{\tilde{F}_1(e_1)}(x),T_{\tilde{F}_2(e_2)}(x)\right\} \end{array}\right\rangle\right\}.$$

Dolayısla $\left[\left(\tilde{F}_1,E\right)\vee\left(\tilde{F}_2,E\right)\right]^c=\left(\tilde{F}_1,E\right)^c\wedge\left(\tilde{F}_2,E\right)^c$ olduğu açıktır.

2) 1)' in ispatına benzer şekilde kolayca elde edilmektedir.

<u>Örnek 2.3.1</u> [41] Farz edelim ki $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ evrensel bir küme ve $E=\{e_1,e_2\}$ parametreler kümesi olsun. X evrensel kümesi üzerinde iki neutrosophic esnek küme olan $\left(\tilde{F}_1,E\right)$ ve $\left(\tilde{F}_2,E\right)$ aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\left(\tilde{F}_1,E\right)=\left\{\begin{array}{l} e_1=\langle x_1,0.3,0.7,0.6\rangle,\langle x_2,0.4,0.3,0.8\rangle,\langle x_3,0.6,0.4,0.5\rangle,\langle x_4,0.2,0.5,0.4\rangle, \\ e_2=\langle x_1,0.4,0.6,0.8\rangle,\langle x_2,0.3,0.7,0.2\rangle,\langle x_3,0.3,0.3,0.7\rangle,\langle x_4,0.1,0.4,0.9\rangle \end{array}\right\}$$

$$\left(\tilde{F}_2,E\right)=\left\{\begin{array}{l} e_1=\langle x_1,0.6,0.6,0.8\rangle,\langle x_2,0.2,0.9,0.3\rangle,\langle x_3,0.1,0.2,0.4\rangle,\langle x_4,0.5,0.4,0.3\rangle, \\ e_2=\langle x_1,0.7,0.9,0.5\rangle,\langle x_2,0.4,0.2,0.3\rangle,\langle x_3,0.5,0.5,0.4\rangle,\langle x_4,0.4,0.3,0.6\rangle \end{array}\right\}$$

Bu durumda,

$$\left(\tilde{F}_1,E\right)\bigcup\left(\tilde{F}_2,E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\langle x_1,0.6,0.7,0.6\rangle,\langle x_2,0.4,0.9,0.3\rangle,\langle x_3,0.6,0.4,0.4\rangle,\langle x_4,0.5,0.5,0.3\rangle, \\ e_2=\langle x_1,0.7,0.9,0.5\rangle,\langle x_2,0.4,0.7,0.2\rangle,\langle x_3,0.5,0.5,0.4\rangle,\langle x_4,0.4,0.4,0.6\rangle \end{Bmatrix},$$

$$\left(\tilde{F}_1,E\right)\bigcap\left(\tilde{F}_2,E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\langle x_1,0.3,0.6,0.8\rangle,\langle x_2,0.2,0.3,0.8\rangle,\langle x_3,0.1,0.2,0.5\rangle,\langle x_4,0.2,0.4,0.4\rangle, \\ e_2=\langle x_1,0.4,0.6,0.8\rangle,\langle x_2,0.3,0.2,0.3\rangle,\langle x_3,0.3,0.3,0.7\rangle,\langle x_4,0.1,0.3,0.9\rangle \end{Bmatrix},$$

$$\left(\tilde{F}_1,E\right)\setminus\left(\tilde{F}_2,E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\langle x_1,0.3,0.4,0.6\rangle,\langle x_2,0.3,0.1,0.8\rangle,\langle x_3,0.4,0.4,0.5\rangle,\langle x_4,0.2,0.5,0.5\rangle, \\ e_2=\langle x_1,0.4,0.1,0.8\rangle,\langle x_2,0.3,0.7,0.4\rangle,\langle x_3,0.3,0.3,0.7\rangle,\langle x_4,0.1,0.4,0.9\rangle \end{Bmatrix},$$

$$\left(\tilde{F}_1,E\right)\wedge\left(\tilde{F}_2,E\right)=\begin{Bmatrix} \left(e_1,e_1\right)=\{x_1,0.3,0.6,0.8\rangle,\langle x_2,0.2,0.3,0.8\rangle,\langle x_3,0.1,0.2,0.5\rangle,\langle x_4,0.2,0.4,0.4\rangle\}, \\ \left(e_1,e_2\right)=\{\langle x_1,0.3,0.7,0.6\rangle,\langle x_2,0.4,0.2,0.8\rangle,\langle x_3,0.5,0.4,0.5\rangle,\langle x_4,0.2,0.3,0.6\rangle\}, \\ \left(e_2,e_1\right)=\{\langle x_1,0.4,0.6,0.8\rangle,\langle x_2,0.2,0.7,0.3\rangle,\langle x_3,0.1,0.2,0.7\rangle,\langle x_4,0.1,0.4,0.9\rangle\}, \\ \left(e_2,e_2\right)=\{\langle x_1,0.4,0.6,0.8\rangle,\langle x_2,0.3,0.2,0.3\rangle,\langle x_3,0.3,0.3,0.7\rangle,\langle x_4,0.1,0.3,0.9\rangle\} \end{Bmatrix},$$

$$\left(\tilde{F}_1,E\right)\vee\left(\tilde{F}_2,E\right)=\begin{Bmatrix} \left(e_1,e_1\right)=\{x_1,0.6,0.7,0.6\rangle,\langle x_2,0.4,0.9,0.3\rangle,\langle x_3,0.6,0.4,0.4\rangle,\langle x_4,0.5,0.5,0.3\rangle\}, \\ \left(e_1,e_2\right)=\{\langle x_1,0.7,0.9,0.5\rangle,\langle x_2,0.4,0.3,0.3\rangle,\langle x_3,0.6,0.5,0.4\rangle,\langle x_4,0.4,0.5,0.4\rangle\}, \\ \left(e_2,e_1\right)=\{\langle x_1,0.6,0.6,0.8\rangle,\langle x_2,0.3,0.9,0.2\rangle,\langle x_3,0.3,0.3,0.4\rangle,\langle x_4,0.5,0.4,0.3\rangle\}, \\ \left(e_2,e_2\right)=\{\langle x_1,0.7,0.9,0.5\rangle,\langle x_2,0.4,0.7,0.2\rangle,\langle x_3,0.5,0.5,0.4\rangle,\langle x_4,0.4,0.4,0.3\rangle\} \end{Bmatrix}.$$

olur.

Tanım 2.3.12 [23] $NSS(X,E)$, X evrensel kümesinin tüm neutrosophic esnek kümeler ailesi olsun. Bu durumda, her $x\in X, 0<\alpha,\beta,\gamma\leq 1$, $e\in E$ için $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ neutrosophic esnek kümesine *neutrosophic esnek nokta* denir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)}\left(e'\right)\left(y\right)=\begin{cases}\left(\alpha,\beta,\gamma\right), & \text{eğer } e'=e \text{ ve } y=x, \\ \left(0,0,1\right), & \text{eğer } e'\neq e \text{ ve } y\neq x.\end{cases}$$

Tanım 2.3.13 [23] $\left(\tilde{F},E\right)$, X evrensel kümesi üzerinde bir neutrosophic esnek küme olsun. $\alpha\leq F_{\tilde{F}(e)}\left(x\right), \beta\leq I_{\tilde{F}(e)}\left(x\right)$ ve $\gamma\geq T_{\tilde{F}(e)}\left(x\right)$ olduğu takdirde $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)}\in\left(\tilde{F},E\right)$ olur ve $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ neutrosophic esnek noktası $\left(\tilde{F},E\right)$ neutrosophic esnek kümesine aittir şeklinde okunur.

2.4. Neutrosophic Esnek Topolojik Uzaylar

Tanım 2.4.1 [41] $NSS(X,E)$, X evrensel kümesi üzerindeki tüm neutrosophic esnek kümelerin ailesi ve $\overset{NSS}{\tau} \subset NSS(X,E)$ olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa $\overset{NSS}{\tau}$ X üzerinde bir neutrosophic *esnek topoloji* denir.

1) $0_{(X,E)}$ ve $1_{(X,E)} \in \overset{NSS}{\tau}$

2) $\overset{NSS}{\tau}$ ya ait herhangi sayıda neutrosophic esnek kümenin birleşimi $\overset{NSS}{\tau}$ ya aittir.

3) $\overset{NSS}{\tau}$ ya ait sonlu sayıda neutrosophic esnek kümenin kesişimi $\overset{NSS}{\tau}$ ya aittir

Ayrıca $(X, \overset{NSS}{\tau}, E)$ üçlüsüne X üzerinde *neutrosophic esnek topoloji* denir. $\overset{NSS}{\tau}$ nun her elemanı *neutrosophic esnek açık kümedir*.

Tanım 2.4.2 [23] $(X, \overset{NSS}{\tau}, E)$, X üzerinde bir neutrosophic esnek topolojik uzay olsun. Eğer $x^{e}_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in (\tilde{G},E) \subset (\tilde{F},E)$ olacak şekilde $(\tilde{G},E)$ neutrosophic esnek açık kümesi var ise $(X, \overset{NSS}{\tau}, E)$ üzerinde $(\tilde{F},E)$ neutrosophic esnek kümesine $x^{e}_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in (\tilde{F},E)$ neutrosophic esnek noktasının *neutrosophic esnek komşuluğu* denir.

Tanım 2.4.3 [23] $x^{e}_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ ve $y^{e'}_{(\alpha',\beta',\gamma')}$ iki neutrosophic esnek nokta olsun. X evrensel kümesi üzerinde $x^{e}_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ ve $y^{e'}_{(\alpha',\beta',\gamma')}$ neotrosophic esnek noktaları için, eğer $x^{e}_{(\alpha,\beta,\gamma)} \cap y^{e'}_{(\alpha',\beta',\gamma')} = 0_{(X,E)}$ ise bu neutrosophic esnek noktalara *neutrosophic esnek ayrık noktalar* denir.

Açıktır ki $x^{e}_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ ve $y^{e'}_{(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)}$ neutrosophic esnek ayrık noktalardır. Ancak ve ancak $x \neq y$ yada $e' \neq e$.

Tanım 2.4.4 [41] $(X, \overset{NSS}{\tau}, E)$, X üzerinde bir neutrosophic esnek topolojik uzay ve $(\tilde{F}, E)$, X üzerinde bir neutrosophic esnek küme olsun. $(\tilde{F}, E)$ kümesinin tümleyeni neutrosophic esnek açık küme ise $(\tilde{F}, E)$ kümesine *neutrosophic esnek kapalı küme* denir.

Önerme 2.4.1 [41] $(X, \overset{NSS}{\tau}, E)$, X üzerinde bir neutrosophic esnek topolojik uzay olsun. Buradan aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) $0_{(X,E)}$ ve $1_{(X,E)}$, X üzerinde neutrosophic esnek kapalı kümelerdir.

2) Neutrosophic esnek kapalı kümenin herhangi sayıda arakesitleri, X üzerinde bir neutrosophic esnek kapalı kümedir.

3) Neutrosophic esnek kapalı kümenin sonlu sayıda birleşimi, X üzerinde bir neutrosophic esnek kapalı kümedir.

Tanım 2.4.5 [41] $NSS(X, E)$, X evrensel kümesi üzerinde tüm neutrosophic esnek kümelerin ailesi olsun.

1) Eğer $\overset{NSS}{\tau} = \left\{0_{(X,E)}, 1_{(X,E)}\right\}$ ise $\overset{NSS}{\tau}$ ya *neutrosophic esnek indiskret topoloji* ve $(X, \overset{NSS}{\tau}, E)$ üçlüsüne ise X üzerinde bir *neutrosophic esnek indiskret topolojik uzay* denir.

2) Eğer $\overset{NSS}{\tau_1} = NSS(X, E)$ ise $\overset{NSS}{\tau}$ ya *neutrosophic esnek diskret topoloji* ve $(X, \overset{NSS}{\tau}, E)$ üçlüsüne ise X üzerinde bir *neutrosophic esnek diskret topolojik uzay* denir.

Önerme 2.4.2 [41] $(X, \overset{NSS}{\tau_1}, E)$ ve $(X, \overset{NSS}{\tau_2}, E)$, X evrensel kümesi üzerinde iki neutrosophic esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda $(X, \overset{NSS}{\tau_1} \cap \overset{NSS}{\tau_2}, E)$, X üzerinde neutrosophic esnek topolojik uzaydır.

İspat :1) $0_{(X,E)}$, $1_{(X,E)} \in \overset{NSS}{\tau_1}$ ve $0_{(X,E)}$, $1_{(X,E)} \in \overset{NSS}{\tau_2}$ olduğundan $0_{(X,E)}$, $1_{(X,E)} \in \overset{NSS}{\tau_1} \cap \overset{NSS}{\tau_2}$ olur.

2) Farz edelim ki $\left\{\left(\tilde{F}_i,E\right)\middle|\ i\in I\right\}$ ailesi $\overset{NSS}{\tau_1}\bigcap\overset{NSS}{\tau_2}$ üzerinde neutrosophic esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda $i\in I$ için $\left(\tilde{F}_i,E\right)\in\overset{NSS}{\tau_1}$ ve $\left(\tilde{F}_i,E\right)\in\overset{NSS}{\tau_2}$ olacak şekilde $\bigcup_{i\in I}\left(\tilde{F}_i,E\right)\in\overset{NSS}{\tau_1}$ ve $\bigcup_{i\in I}\left(\tilde{F}_i,E\right)\in\overset{NSS}{\tau_2}$ olduğundan $\bigcup_{i\in I}\left(\tilde{F}_i,E\right)\in\overset{NSS}{\tau_1}\bigcap\overset{NSS}{\tau_2}$ olur.

3) $\left\{\left(\tilde{F}_i,E\right)\middle|\ i\in\overline{1,n}\right\}$ ailesi $\overset{NSS}{\tau_1}\bigcap\overset{NSS}{\tau_2}$ üzerinde neutrosophic esnek kümelerin sonlu sayıdaki bir ailesi olsun. Bu durumda $i\in\overline{1,n}$ için $\left(\tilde{F}_i,E\right)\in\overset{NSS}{\tau_1}$ ve $\left(\tilde{F}_i,E\right)\in\overset{NSS}{\tau_2}$ olacak şekilde $\bigcap_{i=1}^{n}\left(\tilde{F}_i,E\right)\in\overset{NSS}{\tau_1}$ ve $\bigcap_{i=1}^{n}\left(\tilde{F}_i,E\right)\in\overset{NSS}{\tau_2}$ olduğundan $\bigcap_{i=1}^{n}\left(\tilde{F}_i,E\right)\in\overset{NSS}{\tau_1}\bigcap\overset{NSS}{\tau_2}$ elde edilir.

Uyarı 2.4.1 [41] X üzerindeki iki neutrosophic esnek topolojinin birleşimi X üzerinde her zaman bir neutrosophic esnek topoloji olmayabilir.

Örnek 2.4.1 [41] $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ evrensel kümesi, $E=\{e_1,e_2\}$ parametreler kümesi ve

$$\overset{NSS}{\tau_1}=\left\{0_{(X,E)},1_{(X,E)},\left(\tilde{F}_1,E\right),\left(\tilde{F}_2,E\right),\left(\tilde{F}_3,E\right)\right\} \text{ ve}$$

$$\overset{NSS}{\tau_2}=\left\{0_{(X,E)},1_{(X,E)},\left(\tilde{F}_2,E\right),\left(\tilde{F}_4,E\right)\right\}$$

X üzerinde iki neutrosophic esnek topoloji olsun. Burada $\left(\tilde{F}_1,E\right),\left(\tilde{F}_2,E\right),\left(\tilde{F}_3,E\right)$ ve $\left(\tilde{F}_4,E\right)$ neutrosophic esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\left(\tilde{F}_1,E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\langle x_1,0.9,0.4,0.3\rangle,\langle x_2,0.5,0.6,0.5\rangle,\langle x_3,0.4,0.5,0.3\rangle, \\ e_2=\langle x_1,0.7,0.3,0.4\rangle,\langle x_2,0.6,0.6,0.2\rangle,\langle x_3,0.6,0.4,0.5\rangle, \end{Bmatrix},$$

$$\left(\tilde{F}_2,E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\langle x_1,0.7,0.4,0.5\rangle,\langle x_2,0.4,0.5,0.5\rangle,\langle x_3,0.3,0.3,0.4\rangle, \\ e_2=\langle x_1,0.6,0.2,0.4\rangle,\langle x_2,0.5,0.4,0.3\rangle,\langle x_3,0.4,0.1,0.5\rangle, \end{Bmatrix},$$

$$\left(\tilde{F}_3,E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\langle x_1,0.5,0.3,0.6\rangle,\langle x_2,0.3,0.4,0.7\rangle,\langle x_3,0.2,0.2,0.5\rangle, \\ e_2=\langle x_1,0.4,0.1,0.5\rangle,\langle x_2,0.4,0.3,0.4\rangle,\langle x_3,0.1,0.1,0.6\rangle, \end{Bmatrix},$$

$$\left(\tilde{F}_4,E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\langle x_1,0.8,0.5,0.4\rangle,\langle x_2,0.5,0.6,0.3\rangle,\langle x_3,0.7,0.6,0.2\rangle, \\ e_2=\langle x_1,0.7,0.3,0.3\rangle,\langle x_2,0.6,0.5,0.1\rangle,\langle x_3,0.7,0.4,0.3\rangle, \end{Bmatrix}.$$

$(\tilde{F}_1,E)\cup(\tilde{F}_4,E)\notin \overset{NSS}{\tau_1}\cup \overset{NSS}{\tau_2}$ olduğundan $\overset{NSS}{\tau_1}\cup \overset{NSS}{\tau_2}$, X üzerinde bir neutrosophic esnek topoloji değildir.

Önerme 2.4.3 [41] $(X, \overset{NSS}{\tau}, E)$, X üzerinde bir neutrosophic esnek topolojik uzay ve

$\overset{NSS}{\tau} = \left\{(\tilde{F}_i,E):(\tilde{F}_i,E)\in NSS(X,E)\right\} = \left\{\left[e,\tilde{F}_i(e)\right]_{e\in E}:(\tilde{F}_i,E)\in NSS(X,E)\right\}$ olsun.

Burada $\tilde{F}_i(e)=\left\{\left\langle x,T_{\tilde{F}_i(e)}(x),I_{\tilde{F}_i(e)}(x),F_{\tilde{F}_i(e)}(x)\right\rangle : x\in X\right\}$ ise

$$\tau_1 = \left\{\left[T_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]_{e\in E}\right\},$$
$$\tau_2 = \left\{\left[I_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]_{e\in E}\right\},$$
$$\tau_3 = \left\{\left[F_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]^c_{e\in E}\right\}$$

X üzerinde *fuzzy esnek topolojileri* olarak tanımlanır.

İspat : 1) $0_{(X,E)}$, $1_{(X,E)}\in \overset{NSS}{\tau} \Rightarrow 0,1\in\tau_1$, $0,\ 1\in\tau_2$ ve $0,\ 1\in\tau_3$.

2) Farz edelim ki $\left\{(\tilde{F}_i,E)\mid i\in I\right\}$ ailesi $\overset{NSS}{\tau}$ üzerinde bir neutrosophic esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda $\left\{\left[T_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]_{e\in E}\right\}_{i\in I}$ ailesi, τ_1 üzerinde fuzzy esnek kümelerin bir ailesi. $\left\{\left[I_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]_{e\in E}\right\}_{i\in I}$ ailesi, τ_2 üzerinde fuzzy kümelerin bir ailesi ve $\left\{\left[F_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]^c_{e\in E}\right\}_{i\in I}$ ailesi, τ_3 fuzzy esnek kümelerin bir ailesidir. $\overset{NSS}{\tau}$ bir neutrosophic esnek topoloji olduğundan $\bigcup_{i\in I}(\tilde{F}_i,E)\in \overset{NSS}{\tau}$. Yani,

$$\bigcup_{i\in I}(\tilde{F}_i,E)=\left\{\left\langle \sup\left[T_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]_{e\in E},\sup\left[I_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]_{e\in E},\inf\left[F_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]_{e\in E}\right\rangle\right\}_{i\in I}\in \overset{NSS}{\tau}.$$

Dolayısıyla,

$$\left\{\sup\left[T_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]_{e\in E}\right\}_{i\in I}\in\tau_1,$$
$$\left\{\sup\left[I_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]_{e\in E}\right\}_{i\in I}\in\tau_2,$$
$$\left\{\sup\left[F_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]^c_{e\in E,i\in I}\right\}_{i\in I}\in\tau_3.$$

3) Farz edelim ki $\left\{\left(\tilde{F}_i, E\right) \mid i \in \overline{1,n}\right\}$ ailesi, $\overset{NSS}{\tau}$ üzerinde sonlu neutrosophic esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda $\left\{\left[T_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]_{e\in E}\right\}_{i=\overline{1,n}}$ ailesi, τ_1 üzerinde fuzzy esnek kümelerin bir ailesi. $\left\{\left[I_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]_{e\in E}\right\}_{i=\overline{1,n}}$ ailesi, τ_2 üzerinde fuzzy esnek kümelerin bir ailesi ve $\left\{\left[F_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]^c_{e\in E}\right\}_{i=\overline{1,n}}$ ailesi, τ_3 üzerinde fuzzy esnek kümelerin bir ailesidir. $\overset{NSS}{\tau}$ bir neutrosophic esnek topoloji olduğundan $\bigcap_{i=1}^{n}\left(\tilde{F}_i, E\right) \in \overset{NSS}{\tau}$. Yani,

$$\bigcap_{i=1}^{n}\left(\tilde{F}_i, E\right) = \left\{\left\langle \min\left[T_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]_{e\in E}, \min\left[I_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]_{e\in E}, \max\left[F_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]_{e\in E}\right\rangle\right\}_{i=\overline{1,n}} \in \overset{NSS}{\tau}.$$

Dolayısıyla;

$$\left\{\min\left[T_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]_{e\in E}\right\}_{i\in I} \in \tau_1,$$
$$\left\{\min\left[I_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]_{e\in E}\right\}_{i\in I} \in \tau_2,$$
$$\left\{\min\left[F_{\tilde{F}_i(e)}(X)\right]^c_{e\in E}\right\}_{i\in I} \in \tau_3.$$

Böylece ispat tamamlanır.

<u>Uyarı 2.4.2</u> [41] Aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi yukarıdaki önermenin tersi genellikle doğru değildir.

<u>Örnek 2.4.2</u> [41] $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel kümesi, $E = \{e_1, e_2\}$ parametreler kümesi ve

$$\overset{NSS}{\tau} = \left\{0_{(X,E)}, 1_{(X,E)}, \left(\tilde{F}_1, E\right), \left(\tilde{F}_2, E\right), \left(\tilde{F}_3, E\right)\right\}$$

ailesi X üzerinde neutrosophic esnek kümelerin bir ailesi olsun. Burada, X üzerindeki $\left(\tilde{F}_1, E\right), \left(\tilde{F}_2, E\right)$ ve $\left(\tilde{F}_3, E\right)$ neutrosophic esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\left(\tilde{F}_1,E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\langle x_1,0.7,0.3,0.2\rangle,\langle x_2,0.5,0.4,0.6\rangle,\langle x_3,0.5,0.3,0.1\rangle, \\ e_2=\langle x_1,0.4,0.5,0.3\rangle,\langle x_2,0.2,0.3,0.5\rangle,\langle x_3,0,0.4,0.5\rangle, \end{Bmatrix},$$

$$\left(\tilde{F}_2,E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\langle x_1,0.6,0.5,0.3\rangle,\langle x_2,0.4,0.6,0.6\rangle,\langle x_3,0.3,0.5,0.6\rangle, \\ e_2=\langle x_1,0.3,0.6,0.5\rangle,\langle x_2,0.1,0.7,0.6\rangle,\langle x_3,0,0.6,0.5\rangle, \end{Bmatrix},$$

$$\left(\tilde{F}_3,E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\langle x_1,0.8,0.4,0.5\rangle,\langle x_2,0.5,0.5,0.8\rangle,\langle x_3,0.5,0.4,0.7\rangle, \\ e_2=\langle x_1,0.5,0.5,0.7\rangle,\langle x_2,0.4,0.6,0.7\rangle,\langle x_3,0.6,0.5,0.9\rangle, \end{Bmatrix}.$$

Bu durumda,

$$\tau_1=\left\{\left\langle T_{\tilde{F}_{0_{(X,E)}}(e)}(X),T_{\tilde{F}_{1_{(X,E)}}(e)}(X),T_{\tilde{F}_1(e)}(X),T_{\tilde{F}_2(e)}(X),T_{\tilde{F}_3(e)}(X)\right\rangle_{e\in E}\right\},$$

$$\tau_2=\left\{\left\langle I_{\tilde{F}_{0_{(X,E)}}(e)}(X),I_{\tilde{F}_{1_{(X,E)}}(e)}(X),I_{\tilde{F}_1(e)}(X),I_{\tilde{F}_2(e)}(X),I_{\tilde{F}_3(e)}(X)\right\rangle_{e\in E}\right\},$$

$$\tau_3=\left\{\left\langle F_{\tilde{F}_{0_{(X,E)}}(e)}(X),F_{\tilde{F}_{1_{(X,E)}}(e)}(X),F_{\tilde{F}_1(e)}(X),F_{\tilde{F}_2(e)}(X),F_{\tilde{F}_3(e)}(X)\right\rangle_{e\in E}\right\}$$

X üzerinde fuzzy esnek topolojilerdir. Örneğin,

$$\tau_1=\begin{Bmatrix} \langle(0,0,0),(1,1,1),(0.7,0.5,0.5),(0.6,0.4,0.3),(0.8,0.5,0.5)\rangle_{e_1}, \\ \langle(0,0,0),(1,1,1),(0.4,0.2,0),(0.3,0.1,0),(0.5,0.4,0.6)\rangle_{e_2} \end{Bmatrix}$$

yazılabilir.

Diğer taraftan, $\left(\tilde{F}_2,E\right)\cap\left(\tilde{F}_3,E\right)\notin\overset{NSS}{\tau}$ olduğundan $\overset{NSS}{\tau}$, X üzerinde bir neutrosophic esnek topoloji değildir.

<u>Önerme 2.4.4</u> [41] $(X,\overset{NSS}{\tau},E)$, X üzerinde bir neutrosophic esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda, her $e\in E$ için

$$\tau_{1_e}=\left\{\left[T_{\tilde{F}(e)}(X)\right]:\left(\tilde{F},E\right)\in\overset{NSS}{\tau}\right\},$$

$$\tau_{2_e}=\left\{\left[I_{\tilde{F}(e)}(X)\right]:\left(\tilde{F},E\right)\in\overset{NSS}{\tau}\right\},$$

$$\tau_{3_e}=\left\{\left[F_{\tilde{F}(e)}(X)\right]^c:\left(\tilde{F},E\right)\in\overset{NSS}{\tau}\right\}$$

X üzerinde birer fuzzy topolojileri tanımlar.

<u>Uyarı 2.4.3</u> [41] Aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi yukarıdaki önermenin tersi genellikle doğru değildir.

Örnek 2.4.3 [41] Örnek 2.4.2 yi ele alalım. Bu durumda,

$$\tau_{1_{e_1}} = \left\{ T_{\tilde{F}_{0(X,E)}(e_1)}(X), T_{\tilde{F}_{1(X,E)}(e_1)}(X), T_{\tilde{F}_1(e_1)}(X), T_{\tilde{F}_2(e_1)}(X), T_{\tilde{F}_3(e_1)}(X) \right\},$$

$$\tau_{2_{e_2}} = \left\{ I_{\tilde{F}_{0(X,E)}(e_1)}(X), I_{\tilde{F}_{1(X,E)}(e_1)}(X), I_{\tilde{F}_1(e_1)}(X), I_{\tilde{F}_2(e_1)}(X), I_{\tilde{F}_3(e_1)}(X) \right\},$$

$$\tau_{3_{e_3}} = \left\{ F_{\tilde{F}_{0(X,E)}(e_1)}(X), F_{\tilde{F}_{1(X,E)}(e_1)}(X), F_{\tilde{F}_1(e_1)}(X), F_{\tilde{F}_2(e_1)}(X), F_{\tilde{F}_3(e_1)}(X) \right\}$$

X üzerinde birer fuzzy topolojilerdir. Örneğin,

$$\tau_{1_e} = \{(0,0,0),(1,1,1),(0.7,0.5,0.5),(0.6,0.4,0.3),(0.8,0.5,0.5)\}.$$

Diğer taraftan $\left(\tau_{1_{e_1}}, \tau_{2_{e_1}}, \tau_{3_{e_1}}\right)$ ve $\left(\tau_{1_{e_2}}, \tau_{2_{e_2}}, \tau_{3_{e_2}}\right)$, X üzerinde fuzzy topolojileridir. Fakat $\overset{NSS}{\tau}$ topolojisi, X üzerinde bir neutrosophic esnek topoloji değildir.

Tanım 2.4.6 [41] $(X, \overset{NSS}{\tau}, E)$, X üzerinde bir neutrosophic esnek topolojik uzay ve $(\tilde{F}, E) \in NSS(X, E)$ olsun. Bu durumda, $(\tilde{F}, E)$ kümesinin neutrosophic esnek içi $(\tilde{F}, E)^o$ ile gösterilir ve $(\tilde{F}, E)$ kümesinin tüm neutrosophic esnek açık alt kümelerinin *neutrosophic esnek birleşimi* olarak tanımlanır.

$(\tilde{F}, E)^o$ kümesi $(\tilde{F}, E)$ ye ait olan en büyük neutrosophic esnek açık kümedir.

Örnek 2.4.4 [41] Örnek 2.4.1 de verilen $\overset{NSS}{\tau_1}$ neutrosophic esnek topolojiyi düşünelim. Farz edelim ki, herhangi bir $(\tilde{F}, E) \in NSS(X, E)$ kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$(\tilde{F}, E) = \begin{Bmatrix} e_1 = \langle x_1, 0.8, 0.5, 0.2\rangle, \langle x_2, 0.5, 0.6, 0.3\rangle, \langle x_3, 0.4, 0.4, 0.3\rangle, \\ e_2 = \langle x_1, 0.8, 0.4, 0.1\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.6, 0.2\rangle, \langle x_3, 0.8, 0.4, 0.4\rangle, \end{Bmatrix}.$$

Buradan, $0_{(X,E)}, (\tilde{F}_2, E), (\tilde{F}_3, E) \subseteq (\tilde{F}, E)$. Bu nedenle

$$(\tilde{F}, E)^{\circ} = 0_{(X,E)} \cup (\tilde{F}_2, E) \cup (\tilde{F}_3, E) = (\tilde{F}_2, E)$$

elde edilir.

Teorem 2.4.1 [41] $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ bir neutrosophic esnek topolojik uzay ve $\left(\tilde{F}, E\right) \in NSS(X, E)$ olsun. $\left(\tilde{F}, E\right)$ neutrosophic esnek açık kümedir ancak ve ancak $\left(\tilde{F}, E\right) = \left(\tilde{F}, E\right)^{o}$.

İspat : $\left(\tilde{F}, E\right)$ bir neutrosophic esnek açık küme olsun. Bu durumda Tanım 2.4.6 ya göre $\left(\tilde{F}, E\right)$ kümesinin içerdiği en büyük neutrosophic esnek açık küme $\left(\tilde{F}, E\right)$ kümesine eşit olacağından $\left(\tilde{F}, E\right) = \left(\tilde{F}, E\right)^{o}$ dir.

Tersine eğer $\left(\tilde{F}, E\right)^{0} = \left(\tilde{F}, E\right)$ ise $\left(\tilde{F}, E\right)^{o}$ bir neutrosophic esnek açık küme olduğundan $\left(\tilde{F}, E\right)$ kümesi de neutrosophic esnek açık bir kümedir.

Teorem 2.4.2 [41] $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$, X üzerinde bir neutrosophic esnek topolojik uzay ve $\left(\tilde{F}_1, E\right), \left(\tilde{F}_2, E\right) \in NSS(X, E)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1) $\left[\left(\tilde{F}_1, E\right)^{\circ}\right]^{\circ} = \left(\tilde{F}_1, E\right)^{\circ}$,

2) $\left(0_{(X,E)}\right)^{\circ} = 0_{(X,E)}$ ve $\left(1_{(X,E)}\right)^{\circ} = 1_{(X,E)}$,

3) $\left(\tilde{F}_1, E\right) \subseteq \left(\tilde{F}_2, E\right) \Rightarrow \left(\tilde{F}_1, E\right)^{\circ} \subseteq \left(\tilde{F}_2, E\right)^{\circ}$,

4) $\left[\left(\tilde{F}_1, E\right) \cap \left(\tilde{F}_2, E\right)\right]^{\circ} = \left(\tilde{F}_1, E\right)^{\circ} \cap \left(\tilde{F}_2, E\right)^{\circ}$,

5) $\left(\tilde{F}_1, E\right)^{\circ} \cup \left(\tilde{F}_2, E\right)^{\circ} \subseteq \left[\left(\tilde{F}_1, E\right) \cup \left(\tilde{F}_2, E\right)\right]^{\circ}$.

İspat : 1) $\left(\tilde{F}_1, E\right)^{\circ} = \left(\tilde{F}_2, E\right)$ olsun. Bu durumda $\left(\tilde{F}_2, E\right) \in \overset{NSS}{\tau}$ ise $\left(\tilde{F}_2, E\right) = \left(\tilde{F}_2, E\right)^{\circ}$ elde edilir. Böylece $\left[\left(\tilde{F}_1, E\right)^{\circ}\right]^{\circ} = \left(\tilde{F}_1, E\right)^{\circ}$ eşitliği sağlanır.

2) İspat açıktır.

3) $(\tilde{F}_1,E)^{\circ} \subseteq (\tilde{F}_1,E) \subseteq (\tilde{F}_2,E)$ ve $(\tilde{F}_2,E)^{\circ} \subseteq (\tilde{F}_2,E)$ olduğu bilinmektedir. $(\tilde{F}_2,E)^{\circ}$, $(\tilde{F}_2,E)$ kümesinin içerdiği en büyük neutrosophic esnek açık küme olduğundan $(\tilde{F}_1,E)^{\circ} \subseteq (\tilde{F}_2,E)^{\circ}$ elde edilir.

4) $(\tilde{F}_1,E) \cap (\tilde{F}_2,E) \subseteq (\tilde{F}_1,E)$ ve $(\tilde{F}_1,E) \cap (\tilde{F}_2,E) \subseteq (\tilde{F}_2,E)$ olduğundan bu durumda, $\left[(\tilde{F}_1,E) \cap (\tilde{F}_2,E)\right]^{\circ} \subseteq (\tilde{F}_1,E)^{\circ}$ ve $\left[(\tilde{F}_1,E) \cap (\tilde{F}_2,E)\right]^{\circ} \subseteq (\tilde{F}_2,E)^{\circ}$ eşitliği mevcuttur, dolayısıyla $\left[(\tilde{F}_1,E) \cap (\tilde{F}_2,E)\right]^{\circ} \subseteq (\tilde{F}_1,E)^{\circ} \cap (\tilde{F}_2,E)^{\circ}$ elde edilir.

Öte yandan, $(\tilde{F}_1,E)^{\circ} \subseteq (\tilde{F}_1,E)$ ve $(\tilde{F}_2,E)^{\circ} \subseteq (\tilde{F}_2,E)$ olduğundan bu durumda, $(\tilde{F}_1,E)^{\circ} \cap (\tilde{F}_2,E)^{\circ} \subseteq (\tilde{F}_1,E) \cap (\tilde{F}_2,E)$. Ayrıca $\left[(\tilde{F}_1,E) \cap (\tilde{F}_2,E)\right]^{\circ} \subseteq (\tilde{F}_1,E)^{\circ} \cap (\tilde{F}_2,E)^{\circ}$ olur ve Tanım 2.4.6 ya göre en büyük neutrosophic esnek açık küme olduğundan $(\tilde{F}_1,E)^{\circ} \cap (\tilde{F}_2,E)^{\circ} \subseteq \left[(\tilde{F}_1,E) \cap (\tilde{F}_2,E)\right]^{\circ}$ eşitliği elde edilir.

5) $(\tilde{F}_1,E) \subseteq (\tilde{F}_1,E) \cup (\tilde{F}_2,E)$ ve $(\tilde{F}_2,E) \subseteq (\tilde{F}_1,E) \cup (\tilde{F}_2,E)$ olduğundan bu durumda, $(\tilde{F}_1,E)^{\circ} \subseteq \left[(\tilde{F}_1,E) \cup (\tilde{F}_2,E)\right]^{\circ}$ ve $(\tilde{F}_2,E)^{\circ} \subseteq \left[(\tilde{F}_1,E) \cup (\tilde{F}_2,E)\right]^{\circ}$ elde edilir. Dolayısıyla $(\tilde{F}_1,E)^{\circ} \cup (\tilde{F}_2,E)^{\circ} \subseteq \left[(\tilde{F}_1,E) \cup (\tilde{F}_2,E)\right]^{\circ}$ olduğu açıktır.

Tanım 2.4.7 [41] $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$, X üzerinde bir neutrosophic esnek topolojik uzay ve $(\tilde{F},E) \in NSS(X,E)$ olsun. Bu durumda $(\tilde{F},E)$ kümesinin neutrosophic esnek kapanışı $\overline{(\tilde{F},E)}$ ile gösterilir ve $(\tilde{F},E)$ kümesini içeren tüm neutrosophic esnek kapalı kümelerin *neutrosophic esnek arakesiti* olarak tanımlanır.

$\overline{(\tilde{F},E)}$, $(\tilde{F},E)$ kümesini içeren en küçük neutrosophic esnek kapalı küme olduğu açıktır.

Örnek 2.4.5 [41] Örnek 2.4.2 'de verilen $\overset{NSS}{\tau}$ neutrosophic esnek topolojisini düşünelim. Farz edelim ki, herhangi bir $(\tilde{F},E) \in NSS(X,E)$ kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\left(\tilde{F},E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\{\langle x_1,0.2,0.5,0.9\rangle,\langle x_2,0.5,0.3,0.7\rangle,\langle x_2,0.2,0.4,0.6\rangle\}, \\ e_2=\{\langle x_1,0.1,0.4,0.8\rangle,\langle x_2,0.1,0.3,0.7\rangle,\langle x_2,0.3,0.4,0.8\rangle\} \end{Bmatrix}.$$

Açıktır ki $0^c_{(X,E)}$, $1^c_{(X,E)}$, $\left(\tilde{F}_1,E\right)^c$, $\left(\tilde{F}_2,E\right)^c$ ve $\left(\tilde{F}_3,E\right)^c$ kümeleri $\left(X,\overset{NSS}{\tau_1},E\right)$ üzerinde tüm neutrosophic esnek kapalı kümelerdir. Bu kümeler aşağıdaki şekilde verilir:

$$0^c_{(X,E)}=1_{(X,E)},\ 1^c_{(X,E)}=0_{(X,E)}$$

$$\left(\tilde{F}_1,E\right)^c=\begin{Bmatrix} e_1=\{\langle x_1,0.3,0.6,0.9\rangle,\langle x_2,0.5,0.4,0.5\rangle,\langle x_3,0.3,0.5,0.4\rangle\}, \\ e_2=\{\langle x_1,0.4,0.7,0.7\rangle,\langle x_2,0.2,0.4,0.6\rangle,\langle x_3,0.5,0.6,0.6\rangle\} \end{Bmatrix},$$

$$\left(\tilde{F}_2,E\right)^c=\begin{Bmatrix} e_1=\{\langle x_1,0.5,0.6,0.7\rangle,\langle x_2,0.5,0.5,0.4\rangle,\langle x_3,0.4,0.7,0.3\rangle\}, \\ e_2=\{\langle x_1,0.4,0.8,0.6\rangle,\langle x_2,0.3,0.6,0.5\rangle,\langle x_3,0.5,0.9,0.4\rangle\} \end{Bmatrix},$$

$$\left(\tilde{F}_3,E\right)^c=\begin{Bmatrix} e_1=\{\langle x_1,0.6,0.7,0.5\rangle,\langle x_2,0.7,0.6,0.3\rangle,\langle x_3,0.5,0.8,0.2\rangle\}, \\ e_2=\{\langle x_1,0.5,0.9,0.4\rangle,\langle x_2,0.4,0.7,0.4\rangle,\langle x_3,0.6,0.9,0.1\rangle\} \end{Bmatrix}.$$

Bu durumda $1^c_{(X,E)}$, $\left(\tilde{F}_1,E\right)^c$, $\left(\tilde{F}_2,E\right)^c$, $\left(\tilde{F}_3,E\right)^c \supseteq \left(\tilde{F},E\right)$ elde edilir. Dolayısıyla, $\overline{\left(\tilde{F},E\right)}=1^c_{(X,E)}\cap\left(\tilde{F}_1,E\right)^c\cap\left(\tilde{F}_2,E\right)^c\cap\left(\tilde{F}_3,E\right)^c=\left(\tilde{F}_1,E\right)^c$ eşitliği sağlanır.

<u>Teorem 2.4.3</u> [41] $\left(X,\overset{NSS}{\tau},E\right)$, X üzerinde bir neutrosophic esnek topolojik uzay ve $\left(\tilde{F},E\right)\in NSS(X,E)$ bir neutrosophic esnek küme olsun. Eğer $\left(\tilde{F},E\right)$ neutrosophic esnek kapalı küme ise $\left(\tilde{F},E\right)=\overline{\left(\tilde{F},E\right)}$ dir.

<u>Teorem 2.4.4</u> [41] $\left(X,\overset{NSS}{\tau},E\right)$, X üzerinde bir neutrosophic esnek topolojik uzay ve $\left(\tilde{F}_1,E\right)$, $\left(\tilde{F}_2,E\right)\in NSS(X,E)$ olsun. Bu durumda,

1) $\overline{\left[\overline{\left(\tilde{F}_1,E\right)}\right]}=\overline{\left(\tilde{F}_1,E\right)}$,

2) $\overline{0}_{(X,E)}=0_{(X,E)}$ ve $\overline{1}_{(X,E)}=1_{(X,E)}$,

3) $\left(\tilde{F}_1,E\right)\subseteq\left(\tilde{F}_2,E\right)\Rightarrow\overline{\left(\tilde{F}_1,E\right)}\subseteq\overline{\left(\tilde{F}_2,E\right)}$,

4) $\overline{\left[(\tilde{F}_1,E)\cup(\tilde{F}_2,E)\right]}\subseteq\overline{(\tilde{F}_1,E)}\cup\overline{(\tilde{F}_2,E)}$,

5) $\overline{\left[(\tilde{F}_1,E)\cap(\tilde{F}_2,E)\right]}\subseteq\overline{(\tilde{F}_1,E)}\cap\overline{(\tilde{F}_2,E)}$.

<u>İspat:</u> 1) $\overline{(\tilde{F}_1,E)}=(\tilde{F}_2,E)$ olsun. Bu durumda $(\tilde{F}_2,E)$ bir neutrosophic esnek kapalı kümedir. Dolayısıyla $(\tilde{F}_2,E)$ ve $\overline{(\tilde{F}_2,E)}$ kümeleri birbirine eşittir. Yani, $\overline{\left[\overline{(\tilde{F}_1,E)}\right]}=\overline{(\tilde{F}_1,E)}$.

2) Eşitliğin ispatı açıktır.

3) $(\tilde{F}_1,E)\subseteq\overline{(\tilde{F}_1,E)}$ ve $(\tilde{F}_2,E)\subseteq\overline{(\tilde{F}_2,E)}$ bu şekilde $(\tilde{F}_1,E)\subseteq(\tilde{F}_2,E)\subseteq\overline{(\tilde{F}_2,E)}$ olduğu bilinmektedir. Tanım 2.4.7 ye göre $\overline{(\tilde{F}_1,E)}$, $(\tilde{F}_1,E)$ kümesini içeren en küçük neutrosophic esnek kapalı küme olduğu için $\overline{(\tilde{F}_1,E)}\subseteq\overline{(\tilde{F}_2,E)}$ elde edilir.

4) $(\tilde{F}_1,E)\subseteq(\tilde{F}_1,E)\cup(\tilde{F}_2,E)$ ve $(\tilde{F}_2,E)\subseteq(\tilde{F}_1,E)\cup(\tilde{F}_2,E)$ olduğu için 3) öncülüne göre $\overline{(\tilde{F}_1,E)}\subseteq\overline{(\tilde{F}_1,E)\cup(\tilde{F}_2,E)}$ ve $\overline{(\tilde{F}_2,E)}\subseteq\overline{(\tilde{F}_1,E)\cup(\tilde{F}_2,E)}$ yazılır. Buradan $\overline{(\tilde{F}_1,E)}\cup\overline{(\tilde{F}_2,E)}\subseteq\overline{(\tilde{F}_1,E)\cup(\tilde{F}_2,E)}$ elde edilir.

Tam tersine $(\tilde{F}_1,E)\subseteq\overline{(\tilde{F}_1,E)}$ ve $(\tilde{F}_2,E)\subseteq\overline{(\tilde{F}_2,E)}$ olduğu için, $(\tilde{F}_1,E)\cup(\tilde{F}_2,E)$ $\subseteq\overline{(\tilde{F}_1,E)}\cup\overline{(\tilde{F}_2,E)}$ elde edilir. Tanım 2.4.7 den $\overline{\left[(\tilde{F}_1,E)\cup(\tilde{F}_2,E)\right]}$ kümesi $(\tilde{F}_1,E)\cup(\tilde{F}_2,E)$ kümesini içeren en küçük neutrosophic esnek kapalı küme olduğu için $\overline{\left[(\tilde{F}_1,E)\cup(\tilde{F}_2,E)\right]}\subseteq\overline{(\tilde{F}_1,E)}\cup\overline{(\tilde{F}_2,E)}$ elde edilir. Böylece $\overline{\left[(\tilde{F}_1,E)\cup(\tilde{F}_2,E)\right]}=$ $\overline{(\tilde{F}_1,E)}\cup\overline{(\tilde{F}_2,E)}$ sağlanır.

5) $(\tilde{F}_1,E)\cap(\tilde{F}_2,E)\subseteq\overline{(\tilde{F}_1,E)}\cup\overline{(\tilde{F}_2,E)}$ ve Tanım 2.4.7 ye göre $\overline{\left[(\tilde{F}_1,E)\cap(\tilde{F}_2,E)\right]}$ kümesi, $(\tilde{F}_1,E)\cap(\tilde{F}_2,E)$ kümesini içeren en küçük neutrosophic esnek kapalı küme olduğundan $\overline{\left[(\tilde{F}_1,E)\cap(\tilde{F}_2,E)\right]}\subseteq\overline{(\tilde{F}_1,E)}\cap\overline{(\tilde{F}_2,E)}$ elde edilir.

Teorem 2.4.5 [41] $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$, X üzerinde bir neutrosophic esnek topolojik uzay ve $\left(\tilde{F}, E\right) \in NSS(X, E)$ olsun. Bu durumda,

1) $\left[\overline{\left(\tilde{F}, E\right)}\right]^{c} = \left[\left(\tilde{F}, E\right)^{c}\right]^{\circ}$,

2) $\left[\left(\tilde{F}, E\right)^{\circ}\right]^{c} = \overline{\left[\left(\tilde{F}, E\right)^{c}\right]}$.

İspat: 1)

$$\overline{\left(\tilde{F}, E\right)} = \bigcap \left\{ \left(\tilde{G}, E\right) \in \overset{NSS}{\tau^{c}} : \left(\tilde{G}, E\right) \supseteq \left(\tilde{F}, E\right) \right\}$$

$$\Rightarrow \left[\overline{\left(\tilde{F}, E\right)}\right]^{c} = \left[\bigcap \left\{ \left(\tilde{G}, E\right) \in \overset{NSS}{\tau^{c}} : \left(\tilde{G}, E\right) \supseteq \left(\tilde{F}, E\right) \right\}\right]^{c} =$$

$$\bigcup \left\{ \left(\tilde{G}, E\right)^{c} \in \overset{NSS}{\tau} : \left(\tilde{G}, E\right)^{c} \subseteq \left(\tilde{F}, E\right)^{c} \right\} = \left[\left(\tilde{F}, E\right)^{c}\right]^{\circ}$$

2) $\left(\tilde{F}, E\right)^{\circ} = \bigcup \left\{ \left(\tilde{G}, E\right) \in \overset{NSS}{\tau} : \left(\tilde{G}, E\right) \subseteq \left(\tilde{F}, E\right) \right\}$

$$\Rightarrow \left[\left(\tilde{F}, E\right)^{\circ}\right]^{c} = \left[\bigcup \left\{ \left(\tilde{G}, E\right) \in \overset{NSS}{\tau} : \left(\tilde{G}, E\right) \subseteq \left(\tilde{F}, E\right) \right\}\right]^{c} =$$

$$\bigcap \left\{ \left(\tilde{G}, E\right)^{c} \in \overset{NSS}{\tau^{c}} : \left(\tilde{G}, E\right)^{c} \supseteq \left(\tilde{F}, E\right)^{c} \right\} = \overline{\left[\left(\tilde{F}, E\right)^{c}\right]}.$$

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tanım 3.1 $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$, X üzerinde neutrosophic esnek topolojik uzay ve $\left(\tilde{F},E\right)\in NSS(X,E)$ olsun. Eğer $Fr\left(\tilde{F},E\right)=\overline{\left(\tilde{F},E\right)}\cap\overline{\left(\left(\tilde{F},E\right)^{c}\right)}$ ise $Fr\left(\tilde{F},E\right)$ kümesine $\left(\tilde{F},E\right)$ *neutrosophic esnek kümesinin sınırı* denir.

Örnek 3.1 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ evrensel bir küme, $E=\{e_1,e_2\}$ parametrelerin bir kümesi ve

$$\overset{NSS}{\tau}=\left\{0_{(X,E)},\ 1_{(X,E)},\ \left(\tilde{F}_1,E\right),\ \left(\tilde{F}_2,E\right),\ \left(\tilde{F}_3,E\right),\ \left(\tilde{F}_4,E\right)\right\}$$

X üzerinde bir neutrosophic esnek topoloji olsun. Burada X üzerindeki $\left(\tilde{F}_1,E\right)$, $\left(\tilde{F}_2,E\right)$, $\left(\tilde{F}_3,E\right)$ ve $\left(\tilde{F}_4,E\right)$ neutrosophic esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\left(\tilde{F}_1,E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\{\langle x_1,0.6,0.4,0.7\rangle,\langle x_2,0.3,0.5,0.2\rangle,\langle x_3,0.4,0.6,0.9\rangle\}, \\ e_2=\{\langle x_1,0.3,0.7,0.4\rangle,\langle x_2,0.1,0.2,0.5\rangle,\langle x_3,0.7,0.8,0.9\rangle\} \end{Bmatrix},$$

$$\left(\tilde{F}_2,E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\{\langle x_1,0.2,0.7,0.6\rangle,\langle x_2,0.3,0.7,0.9\rangle,\langle x_3,0.5,0.8,0.2\rangle\}, \\ e_2=\{\langle x_1,0.1,0.9,0.5\rangle,\langle x_2,0.4,0.6,0.8\rangle,\langle x_3,0.4,0.3,0.7\rangle\} \end{Bmatrix},$$

$$\left(\tilde{F}_3,E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\{\langle x_1,0.2,0.4,0.7\rangle,\langle x_2,0.3,0.5,0.9\rangle,\langle x_3,0.4,0.6,0.9\rangle\}, \\ e_2=\{\langle x_1,0.1,0.7,0.5\rangle,\langle x_2,0.1,0.2,0.8\rangle,\langle x_3,0.4,0.3,0.9\rangle\} \end{Bmatrix}$$

$$\left(\tilde{F}_4,E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\{\langle x_1,0.6,0.7,0.6\rangle,\langle x_2,0.3,0.7,0.2\rangle,\langle x_3,0.5,0.8,0.2\rangle\}, \\ e_2=\{\langle x_1,0.3,0.9,0.5\rangle,\langle x_2,0.4,0.6,0.5\rangle,\langle x_3,0.7,0.8,0.7\rangle\} \end{Bmatrix}.$$

Farz edelim ki X üzerinde $\left(\tilde{F},E\right)$ neutrosophic esnek kümesi aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\left(\tilde{F},E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\{\langle x_1,0.7,0.6,0.3\rangle,\langle x_2,0.5,0.7,0.1\rangle,\langle x_3,0.8,0.8,0.6\rangle\}, \\ e_2=\{\langle x_1,0.4,0.9,0.2\rangle,\langle x_2,0.3,0.4,0.4\rangle,\langle x_3,0.9,0.8,0.7\rangle\} \end{Bmatrix}.$$

Bu durumda $\left(\tilde{F},E\right)$ neutrosophic esnek kümesinin sınırını bulalım.

$\overline{(\tilde{F},E)} = 1_{(X,E)}$ ve $\overline{\left((\tilde{F},E)^c\right)} = (\tilde{F}_1,E)^c \cap (\tilde{F}_3,E)^c$

olur. Bu nedenle,

$$Fr(\tilde{F},E) = \overline{(\tilde{F},E)} \cap \overline{\left((\tilde{F},E)^c\right)} = 1_{(X,E)} \cap (\tilde{F}_1,E)^c \cap (\tilde{F}_3,E)^c$$
$$= \begin{Bmatrix} e_1 = \{\langle x_1,0.7,0.7,0.6\rangle, \langle x_2,0.2,0.5,0.3\rangle, \langle x_3,0.9,0.9,0.4\rangle\}, \\ e_2 = \{\langle x_1,0.4,0.3,0.3\rangle, \langle x_2,0.5,0.8,0.1\rangle, \langle x_3,0.9,0.2,0.7\rangle\} \end{Bmatrix}.$$

bulunur.

Teorem 3.1 $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$, X üzerinde neutrosophic esnek topolojik uzay ve $(\tilde{F}_1,E), (\tilde{F}_2,E) \in NSS(X,E)$ olsun. Bu durumda,

1) $(\tilde{F}_1,E)^\circ = (\tilde{F}_1,E) \setminus Fr(\tilde{F}_1,E)$,

2) $\overline{(\tilde{F}_1,E)} = (\tilde{F}_1,E) \cup Fr(\tilde{F}_1,E)$,

3) $Fr\left((\tilde{F}_1,E) \cup (\tilde{F}_2,E)\right) \subseteq Fr(\tilde{F}_1,E) \cup Fr(\tilde{F}_2,E)$,

4) $Fr\left((\tilde{F}_1,E)^c\right) = Fr(\tilde{F}_1,E)$,

5) $1_{(X,E)} = (\tilde{F}_1,E)^\circ \cup Fr(\tilde{F}_1,E) \cup \left(1_{(X,E)} \setminus (\tilde{F}_1,E)\right)^\circ$,

6) $Fr\overline{\left((\tilde{F}_1,E)\right)} \subseteq Fr(\tilde{F}_1,E)$,

7) $Fr\left((\tilde{F}_1,E)^\circ\right) \subseteq Fr(\tilde{F}_1,E)$,

8) $(\tilde{F}_1,E)$ bir neutrosophic esnek açık kümedir $\Leftrightarrow Fr(\tilde{F}_1,E) = \overline{(\tilde{F}_1,E)} \setminus (\tilde{F}_1,E)$,

9) $(\tilde{F}_1,E)$ bir neutrosophic esnek kapalı kümedir $\Leftrightarrow Fr(\tilde{F}_1,E) = (\tilde{F}_1,E) \setminus (\tilde{F}_1,E)^\circ$.

<u>İspat:</u> 1)

$$
\begin{aligned}
(\tilde{F}_1,E)\setminus Fr(\tilde{F}_1,E) &= (\tilde{F}_1,E)\setminus\left(\overline{(\tilde{F}_1,E)}\cap\overline{(1_{(X,E)}\setminus\tilde{F}_1,E)}\right)\\
&=(\tilde{F}_1,E)\cap\left(\overline{(\tilde{F}_1,E)}\cap\overline{(1_{(X,E)}\setminus\tilde{F}_1,E)}\right)^c\\
&=\left((\tilde{F}_1,E)\cap\overline{(\tilde{F}_1,E)}^c\right)\cup\left(\left((\tilde{F}_1,E)\cap\overline{(1_{(X,E)}\setminus\tilde{F}_1,E)}\right)^c\right)\\
&=\left((\tilde{F}_1,E)\setminus\overline{(\tilde{F}_1,E)}\right)\cup\left(\left((\tilde{F}_1,E)\setminus\overline{(1_{(X,E)}\setminus\tilde{F}_1,E)}\right)\right)\\
&=(\tilde{F}_1,E)\setminus\overline{(1_{(X,E)}\setminus\tilde{F}_1,E)}=\left((\tilde{F}_1,E)\cap\overline{(1_{(X,E)}\setminus\tilde{F}_1,E)}\right)^c\\
&=(\tilde{F}_1,E)\cap(\tilde{F}_1,E)^\circ=(\tilde{F}_1,E)^\circ.
\end{aligned}
$$

2) İspat açıktır.

3)
$$
\begin{aligned}
Fr\left((\tilde{F}_1,E)\cup(\tilde{F}_2,E)\right) &= \left(\overline{(\tilde{F}_1,E)\cup(\tilde{F}_2,E)}\cap\overline{\left(1_{(X,E)}\setminus(\tilde{F}_1,E)\cup(\tilde{F}_2,E)\right)}\right)\\
&=\left(\overline{(\tilde{F}_1,E)}\cup\overline{(\tilde{F}_2,E)}\cap\overline{\left(1_{(X,E)}\setminus(\tilde{F}_1,E)\right)\cap\left(1_{(X,E)}\setminus(\tilde{F}_2,E)\right)}\right)\\
&\subseteq\overline{(\tilde{F}_1,E)}\cup\overline{(\tilde{F}_2,E)}\cap\overline{\left(1_{(X,E)}\setminus(\tilde{F}_1,E)\right)}\cap\overline{\left(1_{(X,E)}\setminus(\tilde{F}_2,E)\right)}\\
&\subseteq\left(\overline{(\tilde{F}_1,E)}\cap\overline{\left(1_{(X,E)}\setminus(\tilde{F}_1,E)\right)}\right)\cup\left(\overline{(\tilde{F}_2,E)}\cap\overline{\left(1_{(X,E)}\setminus(\tilde{F}_2,E)\right)}\right)\\
&=Fr(\tilde{F}_1,E)\cup Fr(\tilde{F}_2,E).
\end{aligned}
$$

4)
$$
\begin{aligned}
Fr\left((\tilde{F}_1,E)^c\right) &= \left(\overline{(\tilde{F}_1,E)^c}\right)\cap\left(\overline{\left((\tilde{F}_1,E)^c\right)^c}\right)=\left(\overline{(\tilde{F}_1,E)^c}\right)\cap\overline{(\tilde{F}_1,E)}\\
&=Fr(\tilde{F}_1,E).
\end{aligned}
$$

5) İspat açıktır.

6) $Fr\left(\overline{(\tilde{F}_1,E)}\right)=\left(\overline{\overline{(\tilde{F}_1,E)}}\right)\cap\left(\overline{\left(\overline{(\tilde{F}_1,E)}\right)^c}\right)\subseteq\overline{(\tilde{F}_1,E)}\cap\left(\overline{(\tilde{F}_1,E)^c}\right)=Fr(\tilde{F}_1,E).$

7) İspat açıktır.

8) Farz edelim ki $(\tilde{F}_1, E)$ bir neutrosophic esnek açık küme olsun. Bu durumda $(\tilde{F}_1, E)^c$ neutrosophic esnek kapalı kümedir ve $\overline{\left((\tilde{F}_1, E)^c\right)} = (\tilde{F}_1, E)^c$. Burada $Fr(\tilde{F}_1, E) = \overline{(\tilde{F}_1, E)} \cap \overline{\left((\tilde{F}_1, E)^c\right)} = \overline{(\tilde{F}_1, E)} \cap (\tilde{F}_1, E)^c = \overline{(\tilde{F}_1, E)} \setminus (\tilde{F}_1, E)$. (1) koşulundan,

$$(\tilde{F}_1, E)^\circ = (\tilde{F}_1, E) \setminus Fr(\tilde{F}_1, E) = (\tilde{F}_1, E) \setminus \left(\overline{(\tilde{F}_1, E)} \setminus (\tilde{F}_1, E)\right) = (\tilde{F}_1, E) \cap \left(\overline{(\tilde{F}_1, E)} \cap (\tilde{F}_1, E)^c\right)^c$$

$$= (\tilde{F}_1, E) \cap \left(\overline{(\tilde{F}_1, E)}\right)^c \cup \left(\left((\tilde{F}_1, E)^c\right)^c\right)$$

$$= \left((\tilde{F}_1, E) \cap \left(\overline{(\tilde{F}_1, E)}\right)^c\right) \cup \left((\tilde{F}_1, E) \cap (\tilde{F}_1, E)\right)$$

$$= \left((\tilde{F}_1, E) \cap \left(\overline{(\tilde{F}_1, E)}\right)^c\right) \cup (\tilde{F}_1, E) = (\tilde{F}_1, E)$$

Yani $(\tilde{F}_1, E)$ neutrosophic esnek açık kümedir.

<u>Tanım 3.2</u> $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$, X üzerinde neutrosophic esnek topolojik uzay ve $(\tilde{F}, E) \in NSS(X, E)$ olsun.

a) Eğer $\overline{(\tilde{F}, E)} = 1_{(X,E)}$ ise $(\tilde{F}, E)$ esnek kümesine $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ uzayında bir *neutrosophic esnek yoğun küme* denir.

b) Eğer $\overline{\left(1_{(X,E)} \setminus (\tilde{F}, E)\right)} = 1_{(X,E)}$ ise $(\tilde{F}, E)$ esnek kümesine $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ uzayında bir *neutrosophic esnek koyoğun küme* denir.

c) Eğer $\overline{(\tilde{F}, E)}$, $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ içinde neutrosophic esnek koyoğun küme ise $(\tilde{F}, E)$ esnek kümesine $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ uzayının *hiçbir yerinde neoutrosophic esnek yoğun değildir* denir.

Teorem 3.2 $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$, X üzerinde neutrosophic esnek topolojik uzay ve $\left(\tilde{F}, E\right) \in NSS(X, E)$ olsun. Bu durumda,

1) $\left(\tilde{F}, E\right)$ esnek kümesi $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ uzayında neutrosophic esnek yoğundur ancak ve ancak her $0_{(X,E)} \neq \left(\tilde{U}, E\right) \in \overset{NSS}{\tau}$ için $\left(\tilde{F}, E\right) \cap \left(\tilde{U}, E\right) \neq 0_{(X,E)}$ olmalıdır.

2) $\left(\tilde{F}, E\right)$ esnek kümesi $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ uzayında neutrosophic esnek koyoğundur ancak ve ancak her $0_{(X,E)} \neq \left(\tilde{U}, E\right) \in \overset{NSS}{\tau}$ için $\left(1_{(X,E)} \setminus \left(\tilde{F}, E\right)\right) \cap \left(\tilde{U}, E\right) \neq 0_{(X,E)}$ olmalıdır.

3) $\left(\tilde{F}, E\right)$ esnek kümesi $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ uzayında hiçbir yerde neutrosophic esnek yoğun değildir ancak ve ancak her $0_{(X,E)} \neq \left(\tilde{U}, E\right) \in \overset{NSS}{\tau}$ için $\left(\tilde{V}, E\right) \cap \left(\tilde{F}, E\right) = 0_{(X,E)}$ ve $0_{(X,E)} \neq \left(\tilde{V}, E\right) \subseteq \left(\tilde{U}, E\right)$ olacak şekilde $\left(\tilde{V}, E\right) \in \overset{NSS}{\tau}$ neutrosophic esnek açık kümesi olmasıdır.

İspat: Tanım 3.2 den kolaylıkla elde edilmektedir.

Tanım 3.3 $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$, X üzerinde neutrosophic esnek topolojik uzay ve $\overset{NSS}{B}$, $\overset{NSS}{\tau}$ için bir alt aile olsun. Eğer $\overset{NSS}{\tau}$ 'nin her elemanı $\overset{NSS}{B}$ 'nin bazı elemanlarının neutrosophic esnek birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa $\overset{NSS}{B}$ ailesine $\overset{NSS}{\tau}$ neutrosophic esnek topolojisi için bir *neutrosophic esnek taban* denir.

Teorem 3.3 $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$, X üzerinde neutrosophic esnek topolojik uzay ve $\overset{NSS}{B}$, $\overset{NSS}{\tau}$ için bir neutrosophic esnek taban olsun. Bu durumda $\overset{NSS}{\tau}$, $\overset{NSS}{B}$ 'nin elemanlarının tüm neutrosophic esnek birleşimlerinin ailesine eşittir.

İspat: Neutrosophic esnek tabanın tanımından kolayca elde edilmektedir.

Örnek 3.2 Örnek 3.1 'de verilen $\overset{NSS}{\tau}$ neutrosophic esnek topolojiyi dikkate alalım. Bu durumda;

$$\overset{NSS}{B} = \left\{ 0_{(X,E)}, 1_{(X,E)}, \left(\tilde{F}_1, E\right), \left(\tilde{F}_2, E\right), \left(\tilde{F}_3, E\right) \right\}$$

ailesi $\overset{NSS}{\tau}$ neutrosophic esnek topolojisi için bir neutrosophic esnek tabandır.

Teorem 3.4 $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$, X üzerinde neutrosophic esnek topolojik uzay ve $\overset{NSS}{B}$, $\overset{NSS}{\tau}$ 'nin bir alt ailesi olsun. Bu durumda;

1) $\overset{NSS}{B}$ ailesi $\overset{NSS}{\tau}$ neutrosophic esnek topolojisinin bir neutrosophic esnek tabanıdır ancak ve ancak her $\left(\tilde{F}, E\right) \in \overset{NSS}{\tau}$ ve $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in \left(\tilde{F}, E\right)$ için $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in \left(\tilde{B}, E\right) \subseteq \left(\tilde{F}, E\right)$ olacak şekilde bir $\left(\tilde{B}, E\right) \in \overset{NSS}{B}$ neutrosophic esnek kümesi vardır.

2) Eğer $\overset{NSS}{B} = \left\{ \left(B_i, E\right) \right\}_{i \in I}$ ailesi $\overset{NSS}{\tau}$ için bir neutrosophic esnek taban ise her $\left(B_{i_1}, E\right)$, $\left(B_{i_2}, E\right) \in \overset{NSS}{B}$ ve her $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in \left(B_{i_1}, E\right) \cap \left(B_{i_2}, E\right)$ için $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in \left(B_{i_3}, E\right) \subseteq \left(B_{i_1}, E\right) \cap \left(B_{i_2}, E\right)$ olacak şekilde bir $\left(B_{i_3}, E\right) \in \overset{NSS}{B}$ neutrosophic esnek kümesi vardır.

İspat: 1) $:\Rightarrow$ Farz edelim ki $\overset{NSS}{B}$, $\overset{NSS}{\tau}$ neutrosophic esnek topolojinin bir neutrosophic esnek tabanı, $\left(\tilde{F}, E\right) \in \overset{NSS}{\tau}$ ve $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in \left(\tilde{F}, E\right)$ olsun. Bu durumda $\left(\tilde{F}, E\right) = \bigcup_{\left(\tilde{B}, E\right) \in \overset{NSS}{B}} \left(\tilde{B}, E\right)$ olur. Bu nedenle $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in \left(\tilde{B}, E\right) \subseteq \left(\tilde{F}, E\right)$ için $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in \left(\tilde{F}, E\right) = \bigcup_{\left(\tilde{B}, E\right) \in \overset{NSS}{B}} \left(\tilde{B}, E\right)$ olduğundan $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in \left(\tilde{B}, E\right) \subseteq \left(\tilde{F}, E\right)$ elde edilir.

$\Leftarrow$: Farz edelim ki teorem koşulu sağlansın. Bu durumda;

$$\left(\tilde{F}, E\right) = \bigcup_{x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in \left(\tilde{F}, E\right)} \left\{ x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \right\} \subseteq \bigcup_{x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in \left(\tilde{F}, E\right)} \left(\tilde{B}, E\right) \subseteq \left(\tilde{F}, E\right) \Rightarrow \left(\tilde{F}, E\right) = \bigcup_{x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in \left(\tilde{F}, E\right)} \left(\tilde{B}, E\right).$$

Yani $\overset{NSS}{B}$, $\overset{NSS}{\tau}$ ' nin bir neutrosophic esnek tabanıdır.

2) $(\tilde{B}_{i_1},E),(\tilde{B}_{i_2},E)\in \overset{NSS}{\tau}$ ve $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in (\tilde{B}_{i_1},E)\cap(\tilde{B}_{i_2},E)$ olsun. $(\tilde{B}_{i_1},E)\cap(\tilde{B}_{i_2},E)$ bir neutrosophic esnek açık küme ve $\overset{NSS}{B}$, $\overset{NSS}{\tau}$ ' nin neutrosophic esnek tabanı olduğu için,

$$(\tilde{B}_{i_1},E)\cap(\tilde{B}_{i_2},E)=\bigcup_j(\tilde{B}_j,E)\Rightarrow x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in (\tilde{B}_{i_1},E)\cap(\tilde{B}_{i_2},E)=\bigcup_j(\tilde{B}_j,E)\Rightarrow$$

$$\exists(\tilde{B}_{i_3},E), x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in (\tilde{B}_{i_3},E)\subseteq(\tilde{B}_{i_1},E)\cap(\tilde{B}_{i_2},E)$$ dir.

<u>Teorem 3.5</u> $\overset{NSS}{\tau_1}$ ve $\overset{NSS}{\tau_2}$, X üzerinde iki neutrosophic esnek topoloji ve sırasıyla $\overset{NSS}{B_1}$ ve $\overset{NSS}{B_2}$, $\overset{NSS}{\tau_1}$ ve $\overset{NSS}{\tau_2}$ topolojileri için neutrosophic esnek tabanlar olsun. Bu durumda $\overset{NSS}{\tau_1} \subseteq \overset{NSS}{\tau_2}$ dir ancak ve ancak $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ yi içeren her $(\tilde{B}_1,E)\in \overset{NSS}{B_1}$ ve $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in NSS(X,E)$ için $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in (\tilde{B}_2,E)\subseteq(\tilde{B}_1,E)$ olacak şekilde $(\tilde{B}_2,E)\in \overset{NSS}{B_2}$ vardır.

<u>İspat:</u> $:\Rightarrow$ Farz edelim ki $\overset{NSS}{\tau_1} \subseteq \overset{NSS}{\tau_2}$ ve $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in NSS(X,E)$, $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in (\tilde{B}_1,E)$ olacak şekilde $(\tilde{B}_1,E)\in \overset{NSS}{B_1}$ olsun. $\overset{NSS}{B_1}$, X üzerindeki $\overset{NSS}{\tau_1}$ nuetrosophic esnek topolojisi için bir neutrosophic esnek taban olduğundan $\overset{NSS}{B_1} \subseteq \overset{NSS}{\tau_1} \Rightarrow x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in (\tilde{B}_1,E)\in \overset{NSS}{B_1} \subseteq \overset{NSS}{\tau_1} \subseteq \overset{NSS}{\tau_2}$ yani $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in (\tilde{B}_1,E)\in \overset{NSS}{\tau_2}$ olur. $\overset{NSS}{B_2}$, $\overset{NSS}{\tau_2}$ için bir neutrosophic esnek taban olduğundan $(\tilde{B}_2,E)\in \overset{NSS}{B_2}$ dir. Dolayısıyla $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in (\tilde{B}_2,E)\subseteq \overset{NSS}{B_1}$ elde ederiz.

$\Leftarrow$: $(\tilde{F},E)\in \overset{NSS}{\tau_1}$ olsun. $\overset{NSS}{\tau_1}$ neutrosophic esnek topolojisinin $\overset{NSS}{B_1}$ neutrosophic esnek tabanı olduğundan $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in (\tilde{F},E)$ olur. $x^e_{(\alpha,\beta,\gamma)} \in (\tilde{B}_2,E)\subseteq(\tilde{F},E)$ olacak şekilde $(\tilde{B}_1,E)\in \overset{NSS}{B_1}$ vardır. $(\tilde{B}_2,E)\subseteq(\tilde{B}_1,E)\Rightarrow(\tilde{B}_2,E)\subseteq(\tilde{B}_1,E)\subseteq(\tilde{F},E)\Rightarrow(\tilde{B}_2,E)\subseteq$

$\left(\tilde{F},E\right) \Rightarrow \left(\tilde{F},E\right) \in \overset{NSS}{\tau_2}$ olacak şekilde $\left(\tilde{B}_2,E\right) \in \overset{NSS}{B_2}$ vardır. Bu ise $\overset{NSS}{\tau_1} \subseteq \overset{NSS}{\tau_2}$ olduğunu gösterir.

Teorem 3.6 $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$, X üzerinde neutrosophic esnek topolojik uzay ve $\left(\tilde{F},E\right) \in NSS(X,E)$. Bu durumda;

$$\overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)} = \left\{\left(\tilde{F},E\right) \cap \left(\tilde{F}_i,E\right) : \left(\tilde{F}_i,E\right) \in \overset{NSS}{\tau} \text{ için } i \in I\right\}$$

$(\tilde{F},E)$ üzerinde neutrosophic esnek topoloji ve $\left(X_{(\tilde{F},E)}, \overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)}, E\right)$ neutrosophic esnek topolojik uzaydır.

İspat: $0_{(\tilde{X},E)} \cap \left(\tilde{F},E\right) = 0_{(F,E)}$ ve $1_{(\tilde{X},E)} \cap \left(\tilde{F},E\right) = \left(\tilde{F},E\right)$ olduğu için $0_{(\tilde{F},E)}$ ve $\left(\tilde{F},E\right) \in \overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)}$ dir. Ayrıca, $\overset{NSS}{\tau} = \left\{\left(\tilde{F}_i,E\right) : i \in I\right\}$ için

$$\bigcap_{i=1}^{n} \left(\left(\tilde{F}_i,E\right) \cap \left(\tilde{F},E\right)\right) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \left(\tilde{F}_i,E\right)\right) \cap \left(\tilde{F},E\right)$$

ve

$$\bigcup_{i \in I} \left(\left(\tilde{F}_i,E\right) \cup \left(\tilde{F},E\right)\right) = \left(\bigcup_{i \in I} \left(\tilde{F}_i,E\right)\right) \cup \left(\tilde{F},E\right)$$

olur. Bu nedenle $\overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)}$, $(\tilde{F},E)$ üzerinde bir neutrosophic esnek topolojidir.

Tanım 3.4 $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$, X üzerinde neutrosophic esnek topolojik uzay ve $\left(\tilde{F},E\right) \in NSS(X,E)$ olsun. Bu durumda;

$$\overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)} = \left\{\left(\tilde{F},E\right) \cap \left(\tilde{F}_i,E\right) : \left(\tilde{F}_i,E\right) \in \overset{NSS}{\tau} \text{ için } i \in I\right\}$$

ye $\left(\tilde{F},E\right)$ üzerinde bir *neutrosophic esnek topolojik alt uzay* denir ve $\left(X_{(\tilde{F},E)}, \overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)}, E\right)$ ye ise $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ nin *neutrosophic esnek alt topolojk uzayı* denir.

Örnek 3.3 Örnek 3.1' de verilen $\overset{NSS}{\tau}$ neutrosophic esnek topolojik uzayını ve $\left(\tilde{F},E\right)$ neutrosophic esnek kümesini dikkate alalım. Bu durumda;

$$\overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)}=\left\{0_{(\tilde{X},E)}\left(\tilde{F},E\right),\left(\tilde{F}_1,E\right)',\left(\tilde{F}_2,E\right)',\left(\tilde{F}_3,E\right)',\left(\tilde{F}_4,E\right)'\right\} \text{ ailesi}$$

$\overset{NSS}{\tau}$ neutrosophic esnek topolojik uzayının $\left(\tilde{F},E\right)$ üzerinde neutrosophic esnek alt topolojisidir. Burada, $\left(\tilde{F},E\right)$ üzerindeki $\left(\tilde{F}_1,E\right)',\left(\tilde{F}_2,E\right)',\left(\tilde{F}_3,E\right)',\left(\tilde{F}_4,E\right)'$ neutrosophic esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\left(\tilde{F}_1,E\right)'=\left(\tilde{F},E\right)\cap\left(\tilde{F}_1,E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\left\{\langle x_1,0.6,0.4,0.7\rangle,\langle x_2,0.3,0.5,0.2\rangle,\langle x_3,0.4,0.6,0.9\rangle\right\}, \\ e_2=\left\{\langle x_1,0.3,0.7,0.4\rangle,\langle x_2,0.1,0.2,0.5\rangle,\langle x_3,0.7,0.8,0.9\rangle\right\} \end{Bmatrix},$$

$$\left(\tilde{F}_2,E\right)'=\left(\tilde{F},E\right)\cap\left(\tilde{F}_2,E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\left\{\langle x_1,0.2,0.6,0.6\rangle,\langle x_2,0.3,0.7,0.9\rangle,\langle x_3,0.5,0.8,0.6\rangle\right\}, \\ e_2=\left\{\langle x_1,0.1,0.9,0.5\rangle,\langle x_2,0.3,0.4,0.8\rangle,\langle x_3,0.4,0.3,0.7\rangle\right\} \end{Bmatrix},$$

$$\left(\tilde{F}_3,E\right)'=\left(\tilde{F},E\right)\cap\left(\tilde{F}_3,E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\left\{\langle x_1,0.2,0.4,0.7\rangle,\langle x_2,0.3,0.5,0.9\rangle,\langle x_3,0.4,0.6,0.9\rangle\right\}, \\ e_2=\left\{\langle x_1,0.1,0.7,0.5\rangle,\langle x_2,0.1,0.2,0.8\rangle,\langle x_3,0.4,0.3,0.9\rangle\right\} \end{Bmatrix}$$

$$\left(\tilde{F}_4,E\right)'=\left(\tilde{F},E\right)\cap\left(\tilde{F}_4,E\right)=\begin{Bmatrix} e_1=\left\{\langle x_1,0.6,0.7,0.6\rangle,\langle x_2,0.2,0.5,0.3\rangle,\langle x_3,0.5,0.8,0.4\rangle\right\}, \\ e_2=\left\{\langle x_1,0.3,0.3,0.5\rangle,\langle x_2,0.4,0.6,0.5\rangle,\langle x_2,0.7,0.2,0.7\rangle\right\} \end{Bmatrix}.$$

Ayrıca, $\left(\left(\tilde{F},E\right),\overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)},E\right)$ uzayı $\left(X,\overset{NSS}{\tau},E\right)$ neutrosophic esnek uzayının neutrosophic esnek alt uzayıdır.

Teorem 3.7 $\left(X,\overset{NSS}{\tau},E\right)$, X üzerinde neutrosophic esnek topolojik uzay ve $\left(\tilde{F},E\right)\in NSS\left(X,E\right)$ olsun. Bu durumda;

(1) Eğer $\overset{NSS}{\tau}$ nun neutrosophic esnek alt tabanı $\overset{NSS}{B}$ ise o halde $\overset{NSS}{B}_{(\tilde{F},E)}=\left\{\left(\tilde{B},E\right)\cap\left(\tilde{F},E\right):\left(\tilde{B},E\right)\in\overset{NSS}{B}\right\}$, $\overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)}$ nin neutrosophic esnek alt topolojisi için neutrosophic esnek tabandır.

(2) Eğer $\left(\tilde{G},E\right)$, $\overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)}$ üzerinde neutrosophic esnek kapalı küme ve $\left(\tilde{F},E\right)$ de $\overset{NSS}{\tau}_{(K,E)}$ üzerinde neutrosophic esnek kapalı küme ise, bu durumda $\left(\tilde{G},E\right)$, $\overset{NSS}{\tau}_{(K,E)}$ üzerinde neutrosophic esnek kapalı bir kümedir.

(3) $\left(\tilde{G},E\right)\subseteq\left(\tilde{F},E\right)$ olsun. Eğer $\overline{\left(\tilde{G},E\right)}$, $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ üzerinde neutrosophic esnek kapanış ise, o halde $\overline{\left(\tilde{G},E\right)}\cap\left(\tilde{F},E\right)$, $\left(X_{(F,E)}, \overset{NSS}{\tau}_{(F,E)}, E\right)$ üzerinde neutrosophic esnek kapanış kümesidir.

<u>İspat</u>: (1) $\overset{NSS}{B}$, $\overset{NSS}{\tau}$'nun neutrosophic esnek bir tabanı olduğu için keyfi $\left(\tilde{U},E\right)\in\overset{NSS}{\tau}$ vardır. Buradan $\left(\tilde{U},E\right)=\bigcup_{(\tilde{B},E)\in\overset{NSS}{B}}\left(\tilde{B},E\right)$ elde edilir. Bu durumda $\left(\tilde{U},E\right)\cap\left(\tilde{F},E\right)\in\overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)}$ için,

$$\left(\tilde{U},E\right)\cap\left(\tilde{F},E\right)=\left(\bigcup_{(\tilde{B},E)\in\overset{NSS}{B}}\left(\tilde{B},E\right)\right)\cap\left(\tilde{F},E\right)=\bigcup_{(\tilde{B},E)\in\overset{NSS}{B}}\left(\left(\tilde{B},E\right)\cap\left(\tilde{F},E\right)\right)$$

olur. $\overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)}$ nin keyfi sayıdaki elemanı $\overset{NSS}{B}$ nin keyfi sayıda elemanlarının birleşimi olarak ifade edildiğinden ispat tamamlanmış olur.

(2) Eğer $\left(\tilde{G},E\right)$, $\overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)}$ de neutrosophic esnek kapalı küme ise $\left(\tilde{G},E\right)=\left(\tilde{V},E\right)\cap\left(\tilde{K},E\right)$ olacak şekilde $\left(\tilde{V},E\right)\notin\overset{NSS}{\tau}$, $\left(\tilde{V},E\right)\subseteq\left(\tilde{K},E\right)$ vardır. $\left(\tilde{G},E\right)$, $\overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)}$ de neutrosophic esnek kapalı bir küme olsun. Bu durumda $\left(\tilde{G},E\right)^{c}$, $\overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)}$ de neutrosophic esnek açık kümedir. Yani; $\left(\tilde{U},E\right)\in\overset{NSS}{\tau}\Rightarrow\left(\left(\tilde{G},E\right)^{c}\right)^{c}=\left(\tilde{F},E\right)\cap\left(\left(\tilde{U},E\right)\cap\left(\tilde{F},E\right)\right)^{c}=\left(\tilde{U},E\right)^{c}\cap\left(\tilde{F},E\right)$ için $\left(\tilde{G},E\right)^{c}=\left(\tilde{U},E\right)\cap\left(\tilde{F},E\right)$ olur. Burada $\left(\tilde{U},E\right)^{c}\notin\overset{NSS}{\tau}$ için $\left(\tilde{U},E\right)^{c}$, $\overset{NSS}{\tau}$ de neutrosophic esnek kapalı bir kümedir. Böylece $\left(\tilde{V},E\right)\subseteq\left(\tilde{K},E\right)$ olur.

Tersine, farzedelim ki $\left(\tilde{G},E\right)=\left(\tilde{V},E\right)\cap\left(\tilde{F},E\right)$ olsun. Burada $\left(\tilde{F},E\right)\subseteq\left(\tilde{K},E\right)$ ve $\left(\tilde{V},E\right)$, $\overset{NSS}{\tau}_{(K,E)}$ de kapalı bir kümedir. $\left(\tilde{V},E\right)^c\cap\left(\tilde{F},E\right)\in\overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)}$ olduğundan $\left(\tilde{V},E\right)^c\in\overset{NSS}{\tau}$ olduğu açıktır.

$\left(\tilde{V},E\right)^c\cap\left(\tilde{F},E\right)=\left(\left(\tilde{K},E\right)\setminus\left(\tilde{V},E\right)\right)\cap\left(\tilde{F},E\right)=\left(\left(\tilde{K},E\right)\cap\left(\tilde{F},E\right)\setminus\left(\tilde{V},E\right)\cap\left(\tilde{F},E\right)\right)=$ $\left(\tilde{F},E\right)\setminus\left(\tilde{G},E\right)$. Buradan $\left(\tilde{F},E\right)\setminus\left(\tilde{G},E\right)$, $\left(\tilde{F},E\right)$ de neutrosophic esnek açık kümedir ve $\left(\tilde{G},E\right)$, $\overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)}$ de neutrosophic esnek kapalı bir kümedir.

(3) $\overline{\left(\tilde{G},E\right)}=\cap\left\{\left(\tilde{G}_i,E\right):\left(\tilde{G}_i,E\right)\text{ kapalıdır ve }\left(\tilde{G}_i,E\right)\supseteq\left(\tilde{G},E\right)\right\}$, $\left(\tilde{G},E\right)$ nin neutrosophic esnek kapanışıdır ve $\overline{\left(\tilde{G},E\right)}$ neutrosophic esnek kapalı bir kümedir. Şimdi, $\overline{\left(\tilde{G},E\right)}\cap\left(\tilde{F},E\right)=\cap\left\{\left(\tilde{G}_i,E\right):\left(\tilde{G}_i,E\right)\text{ kapalıdır ve }\left(\tilde{G}_i,E\right)\supseteq\left(\tilde{G},E\right)\right\}\cap\left(\tilde{F},E\right)=$ $\cap\left(\left(\tilde{G}_i,E\right)\cap\left(\tilde{F},E\right)\right)$. Her $\left(\tilde{G}_i,E\right)$ kapalı olduğundan $\left(\tilde{G}_i,E\right)\cap\left(\tilde{F},E\right)$ nin herbir elemanı Teorem 3.5' e göre $\overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)}$ de kapalıdır. Dolayısıyla $\left(\tilde{G},E\right)\subseteq\left(\tilde{G}_i,E\right)$ ve $\left(\tilde{G},E\right)\subseteq\left(\tilde{F},E\right)$ olur. Ayrıca $\left(\left(\tilde{G},E\right)\cap\left(\tilde{F},E\right)\right)\subseteq\left(\left(\tilde{G}_i,E\right)\cap\left(\tilde{F},E\right)\right)\Rightarrow\left(\tilde{G},E\right)\subseteq$ $\left(\tilde{G}_i,E\right)\cap\left(\tilde{F},E\right)$ bulunur. Böylece $\overline{\left(\tilde{G},E\right)}\cap\left(\tilde{F},E\right)=\cap\left\{\left(\left(\tilde{G}_i,E\right)\cap\left(\tilde{F},E\right)\right):\right.$ $\left(\left(\tilde{G}_i,E\right)\cap\left(\tilde{F},E\right)\right)$ kapalıdır ve $\left.\left(\left(\tilde{G}_i,E\right)\cap\left(\tilde{F},E\right)\right)\supseteq\left(\tilde{G},E\right)\right\}$ olur. Bu nedenle $\overline{\left(\tilde{G},E\right)}\cap\left(\tilde{F},E\right)$, $\overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)}$ de $\left(\tilde{G},E\right)$ nin neutrosophic esnek kapanışıdır.

<u>Teorem 3.8</u> $\left(X,\overset{NSS}{\tau},E\right)$ neutrosophic esnek topolojik uzayının X üzerindeki bir neutrosophic alt uzayı $\left(X_{(\tilde{F},E)},\overset{NSS}{\tau}_{(F,E)},E\right)$ olsun. Eğer $\left(\tilde{F},E\right)$, $\left(X,\overset{NSS}{\tau},E\right)$ de neutrosophic esnek açık küme ise, $\left(\tilde{F}_1,E\right)\subseteq\left(\tilde{F},E\right)$ neutrosophic esnek alt kümesi

$\left(X_{(\tilde{F},E)}, \overset{NSS}{\tau}_{(F,E)}, E\right)$ de neutrosophic esnek açık kümedir ancak ve ancak $\left(\tilde{F}_1, E\right)$ neutrosophic esnek kümesi $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ de açık bir kümedir.

İspat: Farz edelim ki $\left(\tilde{F}, E\right)$, $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ uzayında neutrosophic esnek açık kümesi olsun. Burada $\left(\tilde{F}_1, E\right) \subseteq \left(\tilde{F}, E\right)$, $\left(X_{(\tilde{F},E)}, \overset{NSS}{\tau}_{(F,E)}, E\right)$ da açık kümedir. Bu durumda $\left(\tilde{F}_1, E\right) \in \overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{F},E)}$ ve $\left(\tilde{U}, E\right) \in \overset{NSS}{\tau}$ için $\left(\tilde{F}_1, E\right) = \left(\tilde{U}, E\right) \cap \left(\tilde{F}, E\right)$ olur. Ancak $\left(\tilde{F}_1, E\right)$, $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ de neutrosophic esnek açık kümedir. Çünkü $\left(\tilde{U}, E\right)$ ve $\left(\tilde{F}, E\right)$ kümelerinin her ikiside $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ de neutrosophic esnek açık kümedir.

Diğer taraftan, farz edelim ki $\left(\tilde{F}, E\right)$, $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ nin neutrosophic esnek açık kümesi ve $\left(\tilde{F}_1, E\right) \subseteq \left(\tilde{F}, E\right)$ olduğu takdirde $\left(\tilde{F}_1, E\right)$, $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ de neutrosophic esnek açık küme olsun. Bu durumda $\left(\tilde{F}_1, E\right) \in \overset{NSS}{\tau}$ olur. Fakat $\left(\tilde{F}_1, E\right) \cap \left(\tilde{F}, E\right) = \left(\tilde{F}_1, E\right)$ ve böylece $\left(\tilde{F}_1, E\right)$, $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ de neutrosophic esnek bir açık kümesi olduğu bulunur. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.9 $\left(X_{(\tilde{K},E)}, \overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{K},E)}, E\right)$, $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ nun X üzerinde neutrosophic esnek alt uzayı olsun. Eğer $\left(\tilde{K}, E\right)$ kümesi $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ üzerinde neutrosophic esnek kapalı bir küme ise $\left(\tilde{K}_1, E\right) \subseteq \left(\tilde{K}, E\right)$ kümesi de $\left(X_{(\tilde{K},E)}, \overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{K},E)}, E\right)$ uzayında neutrosophic esnek kapalı bir kümedir ancak ve ancak $\left(\tilde{K}_1, E\right)$ kümesi $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ üzerinde neutrosophic esnek kapalı bir kümedir.

<u>İspat:</u> Farz edelim ki $\left(\tilde{K}, E\right)$ kümesi $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ üzerinde neutrosophic esnek kapalı bir küme ve $\left(\tilde{K}_1, E\right) \subseteq \left(\tilde{K}, E\right)$ kümesi $\left(X_{(\tilde{K},E)}, \overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{K},E)}, E\right)$ üzerinde neutrosophic esnek kapalı bir küme olsun. $\left(\tilde{K}_1, E\right)$ kümesi $\left(X_{(\tilde{K},E)}, \overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{K},E)}, E\right)$ üzerinde neutrosophic esnek kapalı bir küme olduğundan $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ uzayında neutrosophic esnek kapalı bir $\left(\tilde{V}, E\right)$ kümesi için $\left(\tilde{K}_1, E\right) = \left(\tilde{V}, E\right) \cap \left(\tilde{K}, E\right)$ olur. Ancak $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ nin $\left(\tilde{K}_1, E\right)$ bir neutrosophic esnek kapalı kümesi gibi $\left(\tilde{V}, E\right)$ ve $\left(\tilde{K}, E\right)$ nin her ikiside $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ nin neutrosophic esnek kapalı kümesidir.

Tersine, farz edelim ki $\left(\tilde{K}, E\right)$, $\left(X, \overset{NSS}{\tau}, E\right)$ üzerinde neutrosophic esnek kapalı bir küme ve $\left(\tilde{K}_1, E\right) \subseteq \left(\tilde{K}, E\right)$ olsun. Bu durumda $\left(\tilde{K}_1, E\right) \cap \left(\tilde{K}, E\right) = \left(\tilde{K}_1, E\right)$ olur ve böylece $\left(\tilde{K}_1, E\right)$, $\left(X_{(\tilde{K},E)}, \overset{NSS}{\tau}_{(\tilde{K},E)}, E\right)$ uzayında neutrosophic esnek kapalı küme olduğu elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR

[1] Ahmad, B., Kharal, A., (2009). On Fuzzy Soft Sets, Adv. Fuzzy Syst., 6, doi: 10.1155/2009/586507.

[2] Aktaş, H., Çağman, N., (2007). Soft sets and soft group, Information Science, 177, 2726-2735.

[3] Ali, M. I., Feng, F., Lui, X., Min, W.K., Shabir, M., (2009). On some new operations in soft set theory, Computers and Math. Appl., 57 1547-1553.

[4] Aygunoğlu, A., Aygun, H., (2011). Some notes on soft topological spaces, Neural Computing Applications, 21 (Suppl 1) S113-S119.

[5] Atanassov, K., (1986). Intuitionistic fuzzy sets, fuzzy sets and systems, 20, 87-96.

[6] Atanassov, K., (1999). New operations defined over the ıntuitionistic fuzzy sets, fuzzy sets and systems, 61, 137-142.

[7] Bayramov, S., Gündüz (Aras), Ç., (2004). Genel Topoloji, ISBN: 975-436-056-1.

[8] Bayramov, S., Gunduz, C., (2013). Soft locally compact spaces and soft paracompact spaces, Journal of Mathematics and system science, (3) 122-130.

[9] Bayramov, S., Gündüz (Aras), Ç., (2014). Intuitionistic fuzzy soft topological spaces, TWMS, J. Pure and Appl, Math. V5, No 5, 66-79.

[10] Bayramov, S., Gündüz (Aras), Ç., (2013). Some results on fuzzy soft topological spaces, Numerical and Soft Computing Methods for Characteristic Value Problems of ODE and ODES systems.

[11] Bera, T., Mahapatra N. K., (2016). On neutrosophic soft function, Ann. Fuzzy Math. Inform. 12(1), 101–119.

[12] Bera, T., Mahapatra N. K., (2017). Introduction to neutrosophic soft topological space, Opsearch, 54(4), 841–867.

[13] Cagman, N., Karataş, S., Enginoğlu, S., (2011). Soft topology, Comput. Math. Appl., 62 351-358.

[14] Chang, C. L., (1968). Fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl. 24(1), 182–190.

[15] Chen, D., Tsong, E. E. C., et all., (2005). The parametrization reduction of soft sets and its applications, Comp. Math. Appl., 49, 757-763.

[16] Coker, D., (1996). A note on intuitionistic sets and intuitionistic points, Turkish Journal of Mathematics, 20, 343-351.

[17] Das, S., Samanta, S.K., (2013). Soft metric, Ann. Fuzzy Math. Inform., 6 -77-94.

[18] Das, S., Samanta, S.K., (2012). Soft real sets, soft real numbers and their properties, J. Fuzzy Math., 20, 551-576.

[19] Deli I., Broumi S., (2015). Neutrosophic soft relations and some properties, Ann. Fuzzy Math. Inform. 9(1), 169–182.

[20] Dubois, D., Prade, H., Pawlak, Z., (1991). Rough Sets, Theoretical Aspects of Reasoning about data, Kluwer, Dordrect, Netherlands.

[21] Georgiou, D.N., Megaritis, A.C., (2014). Soft set theory and topology, Appl. Gen. Topol., 15 (1) 93-109.

[22] Gunduz (Aras), Ç., Bayramov, S., (2011). Fuzzy soft modules, International Mathematical Forum, 6 (11), 517-527.

[23] Gunduz (Aras) C., Ozturk T. Y., Bayramov S., (2019). Seperation axioms on neutrosophic soft topological spaces, Turk. J. Math., 43, 498-510.

[24] Gunduz(Aras) Ç., Sonmez, A., Çakall, H., (2017). On soft functions, J. Math. Anal., 8(2) 129-138.

[25] Gunduz (Aras), Ç., Sonmez, A., Çakall, H., (2013). On soft mappings, Comp. Math. Appl., 60(9).

[26] Hazra, H., Majumdar, P., Samanta, S.K., (2012). Soft topology, Fuzzy Inform. Eng., 4 (1) (2012) 105-115.

[27] Hussain, S., Ahmad, B., (2011). Some properties of soft topological spaces, Comp. Math. Appl., 62 (2011) 4058-4067.

[28] Kandil, A., Tantawy, O.A., El-Sheikh, S.A., Hazza S.A., (2016). Pairwise open (closed) soft sets in soft bitopological spaces, Annals of Fuzzy Math. and Infor, 11(4) 571-588.

[29] Kharal, A., Ahmad, B., (2011). Mapping of soft classes to appear in New Math. Nat. Comput. 7 (3), 471-481.

[30] Iwinski, T., (1987). Algebraic approach to rough sets, Bull, Polish Acad. Sci. Math., 35, 673-683.

[31] Klir, G. J., Folger, T. A., (1988). Fuzzy Sets, Uncertainty and information, Prentice-Hall.

[32] Maji, P.K., Bismas, R., Roy, A., (2013). Soft set theory, Comp. Math. Appl., 45 555-562.

[33] Maji P. K., (2013). Neutrosophic soft set, Ann. Fuzzy Math. Inform. 5(1), 157–168.

[34] Maji, P.K., Bismas, R., Roy, A., (2002). An application of soft sets in a decision making problem, Comp. Math. Appl., 44, 1077-1083.

[35] Maji P. K., Biswas R., Roy A. R., (2001). Fuzzy soft sets, J. Fuzzy Math. 9 (3) 589–602.

[36] Min, W. K., (2011). A note on soft topological spaces, Comp. Math. Appl., 62, 3524-3528.

[37] Molodtsov, D., (1999). Soft set theory-first results, Comp. Math. Appl., 37 19-31.

[38] Molodtsov, D., (2004). The theory of soft set, URSS Publishere, Moskov In Russia.

[39] Nazmul, Sk., Samanta, S. K., (2014). Some properties of soft topologies and group soft topologies, Ann. Fuzzy Math. Inform., 8 (4) 645-661.

[40] Negoita, C. V., Ralescu, D. A., (1979). Applications of fuzzy subsets to system analysis, The Journal of Symbolic Logic, 44 (2), 284-286.

[41] Ozturk T. Y., Gunduz (Aras) C., Bayramov S., A new approach to operations on neutrosophic soft sets and to neutrosophic soft topological spaces, Communication in Mathematics and Applications, Accepted.

[42] Ozturk, T. Y., (2015). A new approach to soft uniform spaces, Turk J. Math., DOI: 10.3906/mat-1506-98.

[43] Ozturk, T. Y., Bayramov, S., (2012). Category of chain complexes of soft modules, International Math. Forum, 7, 981-992.

[44] Rong, W., (2012). The countabilities of soft topological spaces, International Journal of Computational and Mathematical Sciences, 6, 159-162.

[45] Salma A. A., Alblowi S.A., (2012). Neutrosophic set and neutrosophic topological spaces, IOSR J. Math. 3 (4), 31–35.

[46] Smarandache, F., (2005). Neutrosophic set- a generalisation of the intuitionistic fuzzy sets, International Journal of Pure and Applied Mathematics 24 (3), 287–297, doi:10.1109/grc.2006.1635754.

[47] Shabir, M., Naz, M., (2011). On soft topological spaces, Comp. Math. Appl., 61 (7) 1786-1799.

[48] Shabir, H., Bashir, A., (2011). Some properties of soft topological spaces, Comp. Math. Appl., 62, 4058-4067.

[49] Zadeh, L. A., (1965). Fuzzy Sets, Information and control 8, 338-353.

[50] Zorlutuna, I., Akdağ, M., Min, W.K., Atmaca S., (2012). Remarks on soft topologicial spaces, Ann. Fuzzy Math. Inform., 3 (2) 171-185.

[51] Zou, Y., Xiao, Z., (2008). Data analysis approacher of soft sets under incomplete information, Knowl-Based Syst., 21, 941-945.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Furkan KADİRHAN
Doğum Yeri ve Tarihi	: Merkez Çakmak Köyü / KARS - 03/12/1988
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (e-posta)	: furkanskadirhan@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Cumhuriyet Lisesi (Kars) / 2007
Lisans	: Kafkas Üniversitesi (Kars) / 2009
Yüksek Lisans	: Kafkas Üniversitesi (Kars) / 2016

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl	: Kars Özel Final Dershanesi / 2014
	Kars Özel Çelik Başarı Koleji / 2015