T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEJENERE EDİLMİŞ LORENTZ-MARCINKIEWICZ UZAYLARINDA GENİŞLEMEYEN FONKSİYONLARIN SABİT NOKTA TEORİSİ

Merve DELİBAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

OCAK-2019
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEJENERE EDİLMİŞ LORENTZ-MARCINKIEWICZ UZAYLARINDA GENİŞLEMEYEN FONKSİYONLARIN SABİT NOKTA TEORİSİ

Merve DELİBAŞ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

OCAK-2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü ..Matematik.. Anabilim Dalı .....Yüksek...Lisans........... öğrencisi ..Merve.....DELİBAŞ............'nın Dr. Öğr.t.. Üyesi...Veysel...NEZİR.. danışmanlığında ..yüksek...lisans.. tezi olarak hazırladığı "..Dejenere...edilmiş ...Lorentz-..Marcinkiewicz...uzaylarında.. genişlemeyen...fonksiyonların...sabit nokta teorisi" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ..birliği... ile kabul edilmiştir.

17/ 01 / 2019

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA	
Üye	: Doç. Dr. Birol GÜNDÜZ	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .. / .. / 20.. gün ve ... .../....... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Merve DELİBAŞ
08.01.2019

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

DEJENERE EDİLMİŞ LORENTZ-MARCINKIEWICZ UZAYLARINDA GENİŞLEMEYEN FONKSİYONLARIN SABİT NOKTA TEORİSİ

Merve DELİBAŞ

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

Bu tez çalışması dejenere edilmiş ℓ^1-analog Lorentz-Marcinkiewicz uzayları $\ell_{\delta,1}$'nın iki türü üzerinde araştırma yapmaktadır öyleki bunlardan ilki doğal Lorentz durumunun aksine $c_0\backslash\ell^1$ uzayında olmayıp $\ell^\infty\backslash c_0$ uzayında yer alan azalan positif ağırlık dizisi $\delta = (\delta_n)_{n\in N} = (2,1,1,1,\cdots)$ ile oluşturulan dejenere edilmiş Lorentz-Marcinkiewicz uzayı diğeri ise birincisini genelleştiren $\beta \geq \alpha > 0$ olmak üzere $\delta = (\delta_n)_{n\in N} = (\alpha + \beta, \beta, \beta, \beta, \cdots)$ ağırlık dizisi ile oluşturulan dejenere edilmiş Lorentz-Marcinkiewicz uzayıdır. Bu Banach uzayları Nezir'in son çalışmalarında ℓ^1'in yeniden normlandırılmaları ile elde edilmiştir. Çalışmada $\ell_{\delta,1}$ uzayında afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip zayıf*-kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan geniş ailelerin varlıkları gösterilerek Goebel ve Kuczumow analojilerinin afinlik koşulu altında elde edilebileceği gösterilir. Nezir'in son ortak çalışmalarını genelleştiren sonuçlar sunulmaktadır.

Anahtar Kelimeler: genişlemeyen fonksiyon, yansımayan Banach uzayı, sabit nokta teorisi, kapalı sınırlı konveks küme, Lorentz-Marcinkiewicz uzayları
2019, 55 Sayfa

ABSTRAT

(M. Sc. Thesis)

FIXED POINT PROPERTIES FOR NONEXPANSIVE MAPPINGS IN DEGENARATE LORENTZ-MARCINKIEWICZ SPACES

Merve DELİBAŞ

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof Dr. Veysel NEZİR

This thesis study works on some infitine dimensional subpaces of two types of degenerate ℓ^1-analog Lorentz-Marcinkiewicz spaces $\ell_{\delta,1}$, such that the first one is constructed by the decreasing positive weight sequence $\delta = (\delta_n)_{n\in N} = (2,1,1,1,\cdots)$ in $\ell^\infty \backslash c_0$, rather than in $c_0 \backslash \ell^1$ (the usual Lorentz situation) and the other one is constructed by $\delta = (\delta_n)_{n\in N} = (\alpha + \beta, \beta, \beta, \beta, \cdots)$ for $\beta \geq \alpha > 0$ which generalizes the former one. These Banach spaces were obtained by renorming of ℓ^1 in the recent studies of Nezir. We show that a Goebel and Kuczumow analogy can be obtained under affinity hypothesis by proving that there exist large classes of non-weak*, closed, bounded and convex subsets of $\ell_{\delta,1}$ with the fixed point property for afine nonexpansive mappings. We provide generalized results for Nezir's recent joined works on these spaces.

Key Words: nonexpansive mapping, non-reflexive Banach space, fixed point property, closed bounded convex subset, Lorentz-Marcinkiewicz spaces

2019, 55 pages

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince her türlü maddi ve manevi destekleri ile göstermiş oldukları sabırdan dolayı öncelikle danışman hocam Veysel Nezir'e, babam Neşettin Delibaş, annem Ayşe Delibaş'a, manevi kardeşim Nihal Yazıcı'ya, çalışmış olduğum kurumun sahiplerinden Murat Deniz hocam'a ve eğitimim süresince tavsiyelerini esirgemeyen Prof. Dr. Muzaffer Alkan ile eşi Hicran Alkana'a teşekkür ederim.

Merve DELİBAŞ

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SNT(gf)	:	Genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisi
ai	:	Asimtotik izometrik
ℓ^1	:	Mutlak toplanabilir dizilerin Banach uzayı
c_0	:	Sıfıra yakınsak dizilerin Banach uzayı
co E	:	E ‘nin konveks kabuğu
$\overline{\text{co}}$ E	:	E ‘nin kapalı konveks kabuğu
$\cong$	:	Izometrik olarak izomorfik
$\#(K)$	:	K kümesinin eleman sayısı
x^*	:	x dizisinin bir azalan yeniden düzenlemesi
$\overline{E}^{w*}$	:	E kümesinin zayıf* kapanışı
$\vee$	:	Terimler arası maksimum
e_n	:	n. terimi 1, diğerleri 0 olan ℓ^1 ve c_0’ın kanonik bazı

1. GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Yansımalı Banach uzay kavramı ile Banach uzayının sabit nokta teorisini sağlaması arasındaki kuvvetli bağ vardır. İki kavramın birbirleri için ek koşullar dahilinde veya koşulsuz olarak denk olup olmadıkları sorgulanmıştır. Örneğin, Banach uzayının düzgün konveks olması veya normal yapıya sahip olması gibi geometrik özellikleri mevcut olduğunda sabit nokta teorisine sahip olabilmesi için yansımalı olmasının yeter koşul olduğu gösterilmiştir. Daha az koşullu bağlantılar merak konusu olmuştur ve iki kavramın tam denkliğinde Banach uzayının normunun rolü son zamanlarda ilgi odağı olmuştur. Yansımayan çoğu klasik Banach uzayının, örneğin, ℓ^1'in veya c_0'ın sabit nokta teorisine sahip olmadıkları gözlemlenmiş olup yansımayan tüm Banach uzaylarının sabit nokta teorisine sahip olacak şekilde yeniden normlanabilip normlanamayacağı 50 yılı aşkın ve halen açık kalan bir soru olmuştur. Yansımayan Banach uzaylarından sabit nokta teorisini sağlayacak şekilde ilk örnek 2008'de P. K. Lin tarafından verilmiştir [15] ve bu örnek ℓ^1 uzayının yeniden normlanması ile gösterilmiştir. ℓ^1 veya c_0'ın iyi kopyalarını içeren (asimtotik izometrik kopya) Banach uzayları sabit nokta teorisine sahip olamaz. Ayrıca Banach latis olan veya şartsız baza sahip olan Banach uzaylarının yansımayan Banach uzay olması için ℓ^1 veya c_0 uzaylarından birinin izomorfik kopyasını içermesi gerek ve yeter koşuldur [16]. Bu iki Banach uzayı ℓ^1 ve c_0'ın birçok ortak özelliğe sahip olması ve yansımayan Banach uzayların en temel örnekleri olmaları sebebiyle, yansımayan Banach uzayların sabit nokta teorisine sahip olacak şekilde yeniden normlanabilip normlanamayacağını araştırmak amacıyla c_0 'ında bir diğer önemli örnek olarak incelenmesi araştırmacıların merak ettiği çok önemli konulardan olmuştur. Nezir ve Mustafa'nın son çalışması ile bu soruya afinlik koşulu eklendiğinde pozitif cevap verilmiştir [21]. Bu sorunun ek koşulsuz çözülebilmesi halen bir araştırma konusudur ve çözülme zorluğunun sebebi c_0 'ın araştırmacılara yeterli araçları sunmamasıdır; kaldıki, c_0 ile birçok ortak özelliğe sahip olmasına rağmen, tam tersine ℓ^1 uzayı araştırmacılara Schur özelliğine sahip olma veya zayıf Opial özelliğine sahip olma gibi araştımacıların çalışmalarını kolaylaştıran olanaklar sunmaktadır. Dolayısıyla bahsedilen değerli soruyu yani P. K. Lin'in c_0-analoğunu çözebilmek amacıyla ya da soruya çözüm yolu açabilecek köprüler atmak amacıyla araştırmacılar kendilerine daha fazla araç sunabileceği ihtimali sebebiyle c_0-benzeri ve ℓ^1-benzeri Banach uzaylara yönelmişlerdir. Literatürde c_0-analog ve ℓ^1-analog olan uzaylar ele alınmıştır ve sabit nokta teorisi odaklı özellikler sorgulanmıştır hatta P. K. Lin'in sonucunun yansımayan Banach uzaylar için tek örnek olmadığı Berta Gamboa de Buen ve Fernando Núñez-Medina'nın çalışması ile ℓ^1 üzerinde yeni eş değer normlar tanımlanarak yeni bir yansımayan uzay elde edilerek gösterilmiştir [4].

ℓ^1'e çok benzer ve tamamen aynı özellikleri sunan, normu sadece bir lineer genişleme olmayan bir Banach uzay literatürde çok nadir yer almaktadır (Berta Gamboa de Buen ve Fernando Núñez-Medina'nın yeniden normlaması dahi sabit nokta teorisine sahip olması sebebiyle farklıdır). Orlicz uzayları veya Lebesgue uzayı L_1 gibi benzerler mevcuttur fakat farklı özellikler gözlemlenmiştir. (örneğin L_1 Alspach'ın sonucu ile ℓ^1'in tersine zayıf sabit nokta teorisine sahip değildir [1].) ℓ^1'e en yakın özellikleri sunan uzaylardan birisi Lorentz-Marcinkiewicz uzaylarından ℓ^1-analog olan $l_{w,1}$ Banach uzayı olup Nezir'in doktora tezinde çalışılmıştır [18] ve sabit nokta teorisi odaklı özellikleri araştırılmıştır, fakat bu uzayda dahi tamamen benzer özelliklerin olup olmadığı ispatlanamamıştır. Örneğin yukarıda bahsedilen sabit nokta teorisini sağlamama ve zayıf sabit nokta teorisini sağlama özelliklerinin dışında literatürde gösterilmiştir ki ℓ^1'de sonsuz boyutlu bir alt uzay olan zayıf* kompak olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan ve sabit nokta teorisini sağlayan bir alt uzay vardır [9] ve bunun tersine ön duali olan c_0 da ise sonsuz boyutlu her alt uzay sabit nokta teorisini bozmaktadır [7]. Fakat bu son iki sonucun karşılık geldikleri analoglara göre Lorentz-Marcinkiewicz uzaylarında sırasıyla ℓ^1-analog olan $l_{w,1}$ ve c_0-analog olan $l^0_{w,\infty}$ Bananach uzayları için varlığı veya yokluğu halen açıktır. Nezir'in en yeni çalışmasında ise Lorentz-Marcinkiewicz uzaylarından birisinin dejenere edilmiş hali olan bir Banach uzay bulunmuş ve ön duali, duali ve kendisi için sabit nokta teorisi odaklı sorular çözülmüştür [19].

Yansımalılık ve sabit nokta teorisi arasındaki ilişkiye geri dönmek gerekirse yakın zamanda, keyfi yansımalı Banach uzayı $(X, \|\cdot\|)$ üzerinde öyle bir $\|\cdot\|_\sim$ eş değer norm bulunabilir öyle ki $(X, \|\cdot\|_\sim)$ bu durumda genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olacaktır sonucunu Dominguez Benavides [3] çalışması ile verilmiştir. Görülmektedir ki bu çalışma ile Kirk'ün ek koşullu olarak yansımalı Banach uzayları için verdiği sonuçdan (normal yapıya sahip yansımalı Banach uzaylarının sabit nokta teorisine sahip olması sonucundan [11]) sonra ortaya çıkan uzun süredir açık olan Banach uzaylarının yansımalı olmasının sabit nokta teorisine sahp olacak şekilde yeniden normlanabilmesine denkliği var mıdır sorusuna farklı bir bakış açısı getirilmiştir. Dominguez Benavides'in sonucunun tersi düşünüldüğünde ise bunun doğru olmadığı yani genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip Banach uzaylarının yansımalı olmasının beklenmesinin doğru olmayacağı Lin [15] çalışması ile gösterilmiştir Sabit nokta teorisyenlerinin ve alanla ilgili araştırmacıların bildiği üzere yansımayan Banach uzaylarından $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozmaktadır. Lin [15] çalışması ise yansımayan Banach uzaylarının sabit nokta teorisine sahip olacak şekilde yeniden normlanabileceğine dair ilk örneği literatüre kazandırarak tanınan çok değerli bir sonuç ortaya koymuştur.

Lennard ve Nezir [12] çalışmasında yukarıda bahsettiğimiz Dominguez Benavides teoremi ve güçlendirilmiş James' Distortion Teoremleri kullanılarak ile bir Banach uzayı bir Banach latisi ise, veya koşulsuz baza sahipse, veya sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayı üzerinde tanımlı operatörlerin bir simetrik normlu ideali ise ozaman bu uzayın yansımalı olması için gerek ve yeter koşul kademeli genişlemeyen fonksiyonlar (bkz Tanım 1.5) için sabit nokta teorisini sağlayan bir eş norma sahip olması gösterilmiştir. Bu sınıf fonksiyonlar genişlemeyen fonksiyonları içermektedir ve asimtotik genişlemeyen fonksiyonların bir analoğudur fakat bu iki tür birbirini içermez.

Lin'in çalışmasına bakıldığında görülmektedir ki Goebel ve Kuczumow [9] çalışmasından birçok esinlenmeler vardır. Goebel ve Kuczumow görmüştür ki ℓ^1 uzayında sabit nokta teorisine sahip zayıf* kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıf vardır.

Bu tez çalışması ile aynı şekilde ℓ^1 uzayına analog olan dejenere edilmiş Lorentz Marcinkiewicz uzaylarının içinde afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip zayıf* kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıfın var olduğu gösterilmektedir.

1.2 Kuramsal temeller

Bu bölümde tez çalışması ile ilgili gerekli temel tanım, lemma ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1 C kümesi bir $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ C Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks altkümesi olsun. Bir $\mathrm{T}: \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{C}$ fonksiyonuna aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda genişlemeyen fonksiyon denir: Her her $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{C}$ için $\| \mathrm{Tx} - \mathrm{Ty} \| \leq \| \mathrm{x} - \mathrm{y} \|$.

Bir $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ Banach uzayının $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{X}$ altkümesi için E ‘nin konveks kabuğu co E ve E ‘nin kapalı konveks kabuğunu $\overline{\mathrm{co}}$ E ile sembolize edileceği hatırlatılsın.

Tanım 1.2 C kümesi bir $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks altkümesi olsun. Bir $\mathrm{U}: \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{C}$ fonksiyonuna aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda afin fonksiyon denir: Her $\lambda \in [0,1]$ ve her $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{C}$ için $\mathrm{U}((1-\lambda)\, \mathrm{x} + \lambda\, \mathrm{y}) = (1-\lambda)\, \mathrm{U}(\mathrm{x}) + \lambda\, \mathrm{U}(\mathrm{y})$.

Tanım 1.3 Eğer bir $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ Banach uzayının her boştan farklı kapalı, sınırlı ve konveks altkümesi C üzerinde tanımlı herhangi genişlemeyen $\mathrm{T}: \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{C}$ fonksiyonunun C’de en az bir sabit noktası var ise yani en az bir $\mathrm{x} \in \mathrm{C}$ için $\mathrm{Tx} = \mathrm{x}$ ise bu durumda $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ Banach uzayına genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip ya da sabit noktasını korur denir.

Tanım 1.4 Eğer bir $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ Banach uzayının her boştan farklı zayıf kompakt altkümesi C üzerinde tanımlı herhangi genişlemeyen $\mathrm{T}: \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{C}$ fonksiyonunun C’de en az bir sabit noktası var ise bu durumda $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ Banach uzayına genişlemeyen fonksiyonlar için zayıf sabit nokta teorisine sahip ya da zayıf sabit noktasını korur denir.

Şimdi Lennard ve Nezir [12] çalışmasında yer alan kademeli genişlemeyen fonksiyon tanımının verilmesi için öncelikle aşağıdaki ön bilgi göz önüne alınır.

C kümesi bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks altkümesi olsun. $T: C \to C$ bir fonksiyon olsun. $C_0 := C$ alınsın. Şimdi ise $C_1 := \overline{co}\big(T(C)\big) \subseteq C$ olarak tanımlansın.

Açık bir şekilde görülmektedir ki C_1 kümesi C içinde kapalı, sınırlı ve konveks bir kümedir. Buradan keyfi $x \in C_1$ alınırsa $Tx \in T(C_1) \subseteq T(C) \subseteq \overline{co}(T(C)) = C_1$ dir. Dolayısıyla T fonksiyonu C_1 den C_1 'e tanımlıdır. Bu şekilde her $n \in \mathbb{N}$ için $C_n := \overline{co}(T(C_{n-1}))$ olarak tanımlanır.

Yine açıkça görülür ki her $n \in \mathbb{N}$ için C_n kümesi C içinde kapalı, sınırlı ve konveks bir küme olup T fonksiyonu C_n den C_n'e tanımlıdır ve $C_n \subseteq C_{n-1}$ dir.

<u>Tanım 1.5</u> $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı ve C kümesi de X'in kapalı, sınırlı ve konveks bir altkümesi olsun. $T: C \to C$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon ve $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ küme dizisi yukarıdaki gibi tanımlansın. T fonksiyonuna aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda bir kademeli genişlemeyen fonksiyon denir: $[1,\infty)$aralığında enaz bir $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$dizisi bulunabilir öyle ki $\lambda_n \underset{n}{\to} 1$ ve her $n \in \mathbb{N}_0$ (0 ın dahil edildiği doğal sayılar) ile her $x, y \in C_n$ için $\| Tx - Ty \| \leq \lambda_n \ \| x - y \|$ dir.

Bu sınıf sayesinde [12] çalışması ile aşağıdaki önemli teorem elde edilmiştir.

<u>Teorem 1.6</u> $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach latis veya şartsız baza sahip bir Banach uzayı veya simetrik normlu ideal olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(1) X yansımalıdır.

(2) X üzerinde tanımlanabilen bir $\|\cdot\|^{\sim}$ eşdeğer norm vardır öyleki her $C \subseteq X$ kapalı, sınırlı ve konveks alttümesi üzerinde tanımlı her $\|\cdot\|^{\sim}$-kademeli genişlemeyen $T: C \to C$ fonksiyonun C kümesi içinde bir sabit noktası vardır.

<u>Lemma 1.7</u> Eğer $\{x_n\}$ dizisi l^1 uzayında bir x noktasına zayıf topolojide yakınsıyor ise o zaman her $y \in l^1$ ve $r(y) = \limsup_n \|x_n - y\|_1$ ile tanımlı fonksiyon için $r(y) = r(x) + \|y - x\|_1$ dir [9].

Şimdi, dejenere edilmiş Lorentz-Marcinkiewicz uzayının doğuş noktası olan doğal Lorentz-Marcinkiewicz uzaylarının tanımı verilir.

$w \in (c_0 \setminus l^1)^+$ herhangi ağırlık dizisi olsun öyleki $w_1 = 1$, $(w_n)_{n\in \mathrm{N}}$ azalan; yani: $w = (w_n)_{n\in \mathrm{N}}$, $w_n > 0, \forall n \in \mathrm{N}$ öyleki aşağıdaki koşulları sağlasın

(1) $1 = w_1 \geq w_2 \geq w_3 \geq \ldots \geq w_n \geq w_{n+1} \geq \ldots, \forall n \in \mathrm{N}$, (2) $w_n \underset{n}{\to} 0$ ve (3) $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$.

Örneğin, $w_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathrm{N}$.

Tanım 1.8 $l_{w,\infty}$ uzayı:

$$l_{w,\infty} := \left\{ \mathrm{x} = (\mathrm{x}_n)_{n\in\mathrm{N}} \in c_0 \;\middle|\; \begin{array}{c} \mathrm{x}^* := (\mathrm{x}_n{}^*)_{n\in\mathrm{N}} \text{ dizisi x in azalan sıralaması olmak üzere} \\ \|\mathrm{x}\|_{w,\infty} := \sup_{n\in\mathrm{N}} \frac{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{x}_j{}^*}{\sum_{j=1}^{n} w_j} < \infty \end{array} \right\}$$

Bu uzay l^{∞} uzayının (sınırlı diziler uzayının) bir analoğudur. Gerçekten de ($l_{w,\infty}$,$\|\mathrm{x}\|_{w,\infty}$) ayrılabilir olmayan bir Banach uzayıdır.

Burada not edilmelidir ki $\mathrm{x}^* :=$ öyle bir dizidir ki bu dizi $|x| = (|x_j|)_{j\in\mathrm{N}}$ dizisinin sıfırdan farklı terimlerini içeren ve bu terimlerin azalacak şekilde aynı terimler varsa tekrar edilmesi ile sıralandığı ve son terimleri ($|x|$ dizisi sonlu sayıda sıfırdan farklı terim içeriyorsa) sonsuz sayıda 0 olarak takip eden dizidir.

Tanım 1.9 $l^0_{w,\infty}$ uzayı:

$$l^0_{w,\infty} := \left\{ \mathrm{x} = (\mathrm{x}_n)_{n\in\mathrm{N}} \in c_0 \;\middle|\; \begin{array}{c} \mathrm{x}^* := (\mathrm{x}_n{}^*)_{n\in\mathrm{N}} \text{ dizisi x in azalan sıralaması olmak üzere} \\ \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{x}_j{}^*}{\sum_{j=1}^{n} w_j} = 0 \end{array} \right\}$$

Bu uzay c_0 uzayının bir analoğudur ve ($l^0_{w,\infty}$,$\|\mathrm{x}\|_{w,\infty}$) uzayı $l_{w,\infty}$ ın ayrılabilir Banach uzayıdır.

Tanım 1.10 $l_{w,1}$ uzayı:

$$l_{w,1} := \left\{ \mathrm{x} = (\mathrm{x}_n)_{n\in\mathrm{N}} \in c_0 \;\middle|\; \begin{array}{c} \mathrm{x}^* := (\mathrm{x}_n{}^*)_{n\in\mathrm{N}} \text{ dizisi x in azalan sıralaması olmak üzere} \\ \|\mathrm{x}\|_{w,1} := \sum_{j=1}^{n} w_j \mathrm{x}_j{}^* < \infty \end{array} \right\}$$

Bu uzay ℓ^1 uzayının bir analoğudur. $(l_{w,1}, \|x\|_{w,1})$ ayrılabilir bir Banach uzayıdır.

Burada not etmeliyiz ki yıldız sembolü uzayın dualını sembolize eder ve $\cong$ semboli isometrik olarak isomorfik sembolize ederse $(l^0_{w,\infty})^* \cong l_{w,1}$ ve $(l_{w,1})^* \cong l_{w,\infty}$ dir. Lorentz uzayı için standard referans Lorentz [17] ve Lindenstrauss ve Tzafriri [16] dır.

Görüldüğü üzere Lorentz-Marcinkiewicz uzayları ağırlık dizisi adı verilen $w \in (c_0 \setminus l^1)^+$ dizi vasıtası ile yazılmıştır.

Tez çalışmasında gerekli olacak diğer tanım ve teoremler ise aşağıda verilmektedir.

<u>Teorem 1.11</u> X bir Banach uzayı olsun. Eğer X uzayı bir şartsız baz (e_n)'e sahip öyleki şartsız baz katsayısı $\lambda < \frac{\sqrt{33}-3}{2}$ koşulunu sağlıyorsa bu durumda X uzayı genişlemeyen fonksiyonlar için zayıf sabit nokta teorisine sahiptir. [14]

<u>Tanım 1.12</u> Bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayınna aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda c_0 'ın bir izomorfik kopyasını içerir denir: X'de en az bir $(x_n)_n$ dizisi vardır öyleki her $\varepsilon > 0$ ve her $(a_n)_n \in c_0$ için

$$(1-\varepsilon)\sup_n |a_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq \sup_n |a_n|. \qquad [16]$$

<u>Tanım 1.13</u> $(X, \|\cdot\|)$bir Banach uzay ve E be boştan farklı, kapalı, sınırlı ve konveks bir alt küme olsun. $T: E \to E$ bir fonksiyon olsun.

(1) T fonksiyonuna aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda bir kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyon denir: $\exists \{\beta_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}, n \geq m \geq 0\} \subseteq [1, \infty)$, $[n \geq m \to \infty$ iken $\beta_{n,m} \to 1]$ ve $[n \to \infty$, m keyfi iken $\beta_{n,m} \to 1]$ öyleki $[\forall x, y \in E$ ve $\forall\, n \geq m$ için $\| T^n x - T^n y \| \leq \beta_{n,m} \| T^m x - T^m y \|]$.

(2) T fonksiyonuna aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda bir yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyon denir: $\exists \{\lambda_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}, n \geq m \geq 0\} \subseteq [1, \infty)$, $[n \geq m \to \infty$ iken $\lambda_{n,m} \to 1]$ öyleki $[\forall x, y \in E$ ve $\forall\, n \geq m$ için $\| T^n x - T^n y \| \leq \lambda_{n,m} \| T^m x - T^m y \|]$. [13]

Teorem 1.14 Eğer bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayı ℓ^1'in bir izomorfik kopyasını içerirse, X yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar [13].

Teorem 1.15 Eğer bir X Banach uzayı c_0'ın bir izomorfik kopyasını içerirse o zaman X Banach uzayı afin kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar [13].

Tanım 1.16 Bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayına aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda ℓ^1'in bir asimtotik izometrik (ai) kopyasını içerir denir: X'de en az bir $(x_n)_n$ dizisi ve $(0,1)$ aralığında 0 a azalarak yaklaşan bir $(\varepsilon_n)_n$ dizisi vardır öyleki her $(a_n)_n \in \ell^1$ dizisi için

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon_n)|a_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

dir [6].

Tanım 1.17 Bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayına aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda c_0'ın bir ai kopyasını içerir denir: X'de en az bir $(x_n)_n$ dizisi ve $(0,1)$ aralığında 0 a azalarak yaklaşan bir $(\varepsilon_n)_n$ dizisi vardır öyleki her $(a_n)_n \in c_0$ dizisi için

$$\sup_n (1-\varepsilon_n)|a_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq \sup_n |a_n|$$

dir [7].

Teorem 1.18 Eğer bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayı ℓ^1'in veya c_0'ın bir ai kopyasını içerirse, bu durumda X genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini [SNT(gf)] bozar [6,7].

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Nezir [19] çalışması ile ℓ^1 uzayı yeniden normlanır ve bu sayede dejenere edilmiş Lorentz-Marcinkiewicz uzayları elde edilir.

Bir önceki bölümden hatırlanacağı üzere Lorentz-Marcinkiewicz uzayları ağırlık dizisi adı verilen $w \in (c_0 \setminus l^1)^+$ dizi vasıtası ile yazılmıştır. Nezir [19] çalışmasında ise ℓ^1 uzayı şu şekilde yeniden normlanır. Her $x = (x_n)_{n\in N} \in \ell^1$ için

$$|||x||| := \| x \|_1 + \| x \|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sup_{n\in N} |x_n|$$

olarak tanımlanır. Bu durumda görülür ki $|||\cdot|||$ normu ℓ^1 üzerinde $\| x \|_1 \leq |||x||| \leq 2 \| x \|_1$, $\forall x \in \ell^1$ eşitsizliğini sağlayan bir eşdeğer normdur ayrıca $\forall x \in \ell^1$ için $|||x||| = 2x_1^* + x_2^* + x_3^* + x_4^* + \cdots$ öyleki burada z^* dizisi $|z| = (|z_n|)_{n\in N}$ ile verilen $\forall z \in c_0$ dizisinin bir azalan yeniden düzenlemesidir. Bu durumda elde edilen ℓ^1 in yeniden normlaması $\delta_1 := 2, \delta_2 := 1, \delta_3 := 1, \cdots, \delta_n := 1,\ \forall n \geq 4$ olmak üzere $\delta = (\delta_n)_{n\in N}$ şeklinde tanımlı ağırlık dizisi olarak seçildiğinde dejenere edilmiş $\ell_{\delta,1}$ Lorentz-Marcinkiewicz uzayıdır çünkü Tanım 1.10'da yer alan doğal Lorentz-Marcinkiewicz uzayından farklı olarak ağırlık dizisi $c_0 \setminus \ell^1$ uzayından olmayıp $\ell^\infty \setminus c_0$ uzayından alınmıştır.

Çalışmada daha sonra adım adım izometrik öndual ve dual elde edilir öyle ki bunlar ve karşılık gelen normları şu şekildedir:

$\ell^0_{\delta,\infty} = (c_0, \|\cdot\|)$ ve her $z \in c_0$ için

$$\| z \| := \sup_{n\in N} \frac{\sum_{j=1}^{n} z_j^*}{\sum_{j=1}^{n} \delta_j} = \sup_{n\in N} \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n} z_j^* = \sup_{\substack{\emptyset \neq K \subseteq N \\ \#(K) < \infty}} \frac{1}{\#(K)+1} \sum_{i\in K} |z_i|$$

(burada z^* dizisi z dizisinin azalan yeniden düzenlemesidir).

Daha sonra bu norm ℓ^∞ için genişleterek $\forall w = (w_i)_{i\in N} \in \ell^\infty$ için $\| w \| := \sup_{\substack{\emptyset \neq K \subseteq N \\ \#(K) < \infty}} \frac{1}{\#(K)+1} \sum_{i\in K} |w_i|$ elde edilir öyleki bu uzay $\ell_{\delta,1}$ in izometrik olarak izomorf olan dualir. Sonrasında ise sırasıyla aşağıdaki sonuçlar görülür:

1) $l^0_{\delta,\infty}$ uzayı zayıf sabit nokta teorisine sahiptir.

2) $l^0_{\delta,\infty}$ uzayı genişlemeyen fonksiyonlar için (hatta afin genişlmeyen fonksiyonlar için) sabit nokta teorisini bozar.

3) $l^0_{\delta,\infty}$ uzayı c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içerir ve dolayısıyla sabit nokta teorisini bozduğu bu sonuçtandan da görülür.

4) $l^0_{\delta,\infty}$ uzayının herhangi bir kapalı, yansımayan alt uzayı c_0'ın bir izomorfik kopyasını içerir ve bu durumda bu kopyası kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar.

5) $\ell_{\delta,1}$ içinde kapalı, sınırlı ve konveks bir küme ve bu küme üzerinde tanımlı sabit noktasız genişlemeyen bir fonksiyon bulunabilir ve dolayısıyla sabit nokta teorisini bozar.

6) $\ell_{\delta,1}$ uzayı ℓ^1'in bir asimtotik izometrik kopyasını içerir ve dolayısıyla sabit nokta teorisini bozduğu bu sonuçtandan da görülür.

7) $\ell_{\delta,1}$ zayıf sabit nokta teorisini sağlar.

8) $b \in (0,1)$ keyfi seçilmek üzere $f_1 := b\, e_1$, $f_2 := b\, e_2$ ve her $n \geq 3$ için $f_n := e_n$ alınıp

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n\, f_n : \text{ her } n \in \mathbb{N} \text{ için } t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}$$

olarak tanımlanır ise E afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir.

Bu son sonuç için Goebel ve Kuczumow [9] çalışmasındaki Lemma 1'den (tez çalışmasında verilen Lemma 1.7'den) ilham alınarak aşağıdaki lemma doğrudan elde edilebilmektedir.

Lemma 2.1 $(X, \|.\|)$ *bir Banach uzayı olsun.*

1. Eğer X'in Banach-Saks özelliği var ise ve $x \in X$ noktası sınırlı bir dizi $(x_n)_n$'in zayıf limiti ise, bu durumda en az bir $\left(x_{n_k}\right)_k$ alt dizisi vardır öyle ki bu alt dizinin Cesaro norm limiti x olup eğer s fonksiyonu bu alt dizi vasıtasıyla şu şekilde tanımlanır ise $\forall y \in X$ için $s(y) = \limsup_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_k - y \right\|$, bu durumda $s(x) = 0$ ve $\forall y \in X$ için $s(y) = \|y - x\|$ dir.

2. Eğer X'in zayıf Banach-Saks özelliği var ise ve $x \in X$ noktası bir $(x_n)_n$ dizisinin zayıf limiti ise, bu durumda en az bir $\left(x_{n_k}\right)_k$ alt dizisi vardır öyle ki bu alt dizinin Cesaro norm limiti x olup eğer s fonksiyonu bu alt dizi vasıtasıyla şu şekilde tanımlanır ise $\forall y \in X$ için $s(y) = \text{limsup}_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_k - y \right\|$, bu durumda $s(x) = 0$ ve $\forall y \in X$ için $s(y) = \|y - x\|$ dir.

Bu sebeple, Lorentz-Marcinkiewicz uzaylarının Banach-Saks özellikleri dolayısıyla (bkz [24, 25, 2]), yukarıdaki koşullar geçerlidir.

<u>Örnek 2.2</u> $\mathrm{b} \in (0,1)$ keyfi seçilsin. c_0 uzayında bir $(\mathrm{f_n})_{\mathrm{n \in N}}$ dizisi bu sabit sayı ve kanonik baz yardımı ile şu şekilde kurulsun. $f_1 := b\, e_1,\ f_2 := b\, e_2$ ve her $\mathrm{n} \geq 3$ tam sayısı için $\mathrm{f_n} := \mathrm{e_n}$ olsun. Daha sonrasında ise bu dizi yardımı ile aşağıdaki şekilde bu b sayısına bağlı olarak ℓ^1'in kapalı ve sınırlı bir alt kümesi $\mathrm{E} = \mathrm{E_b}$ tanımlansın;

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n\, f_n :\ \text{her } \mathrm{n} \in \mathbb{N} \text{ için } \mathrm{t_n} \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

<u>Teorem 2.3</u> Yukarıdaki örnekte verilen E kümesi afin $|||.|||$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir öyle ki burada $|||.|||$ normu ℓ^1 üzerinde alışılmış normuna eş değer şekilde $|||\mathrm{x}||| = \| \mathrm{x} \|_1 + \| \mathrm{x} \|_\infty,\ \forall \mathrm{x} \in \ell^1$ olarak tanımlıdır.

<u>İspat.</u> Goebel ve Kuczumow tarafından verilen ve danışmanlığını Lennard'ın yapmış olduğu Everest'in doktora tezi [8] ile detaylı olarak sunulan ispat yöntemi izlenecektir. $T: E \to E$ bir afin $|||.|||$-genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda yaklaşık sabit nokta dizisi adını alan en az bir $\left(x^{(n)}\right)_{n \in N} \subset E$ dizisi vardır öyle ki $|||Tx^{(n)} - x^{(n)}||| \underset{n}{\to} 0$ olup $\left(x^{(n)}\right)_{n \in N}$ sınırlıdır ve dolayısıyla bir zayıf* limiti vardır. Genelliği bozmayarak gerekirse bir alt diziye geçilerek denilebilir ki, en az bir $z \in \ell^1$ öyle ki $x^{(n)}$ dizisi z ye zayıf* topolojide yakınsar. Bu durumda Lemma 2.1 gereğince, aşağıdaki şekilde tanımlanan bir $s: \ell^1 \to [0, \infty)$ fonksiyonu vardır: $\forall y \in \ell^1$ için

$$s(y) = \underset{m}{limsup} ||| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - y\, |||$$

ve bu fonksiyon $\forall y \in \ell^1$ için $s(y) = |||y - z\, |||$ eşitliğini sağlar.

Daha sonra E kümesinin zayıf* kapanışı aşağıdaki şekilde tanımlanır ve iki farklı durum incelenir.

$$W := \overline{E}^{w*} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n \; : \; t_n \geq 0 \; ve \; \sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq 1 \right\}$$

Durum 1: $z \in E$.

Bu durumda $s(Tz) = s(z) + |||Tz - z|||$ olup

$$s(Tz) = \limsup_m |||Tz - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}|||$$

$$\leq \limsup_m |||Tz - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right)||| + \limsup_m |||\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right)|||$$

Fakat T afin olduğundan, yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı aşağıdakinin sağ tarafı olup,T'nin genişlemeyen olması da kullanılarak bir alttaki eşitsizlik elde edilecektir;

$$s(Tz) \leq \limsup_m |||Tz - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right)||| + \limsup_m |||\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)}|||$$

$$\leq \limsup_m |||z - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}|||$$

$= s(z)$ dir.

Dolayısıyla, $|||z - Tz||| \leq 0$ olup $Tz = z$ dir ve bu z nin E kümesinde T fonksiyonun bir sabit noktası olduğunu ifade eder.

Durum 2: $z \in W \backslash E$..

Bu durumda ise W'nun tanımı gereğince z noktasının $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n$ *formunda yazılcak şekilde* $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < 1 \; ve \; \gamma_n \geq 0, \; \forall n \in N$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur. Bu skalerler vasıtasıyla $\delta := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ ve

$$h_\lambda := (\gamma_1 + \lambda\delta) f_1 + (\gamma_2 + (1-\lambda)\delta) f_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \gamma_n f_n$$

olarak tanımlansın.

İspatın geçerliliği açısından h_λ nın E kümesinin bir noktası olması istenileceğinden λ değerleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right]$ aralığından seçilecektir. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$
\begin{aligned}
|||h_\lambda - z\,||| &= |||\lambda\delta f_1 + (1-\lambda)\delta f_2||| \\
&= |||(\lambda\delta b, (1-\lambda)\delta b, 0{,}0, \cdots)||| \\
&= \delta \max\{|\lambda|\mathrm{b}, |1-\lambda|\mathrm{b}\} + \beta \mathrm{b}\delta|\lambda| + \beta\mathrm{b}\delta|1-\lambda| \\
&= \max \begin{cases} 2b\delta - 3b\delta\lambda & \text{eğer } \lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \quad 0\right) \ ise, \\ 2b\delta - b\delta\lambda & \text{eğer } \lambda \in \left[0, \quad \frac{2}{3}\right) \ ise, \\ b\delta(1+\lambda) & \text{eğer } \in \left(\frac{2}{3}, \quad 1\right] \ ise, \\ 3b\delta\lambda - b\delta & \text{eğer } \lambda \in \left(1, \quad \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right] \ ise \end{cases}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Bu durumda $\Gamma := \min\limits_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} |||h_\lambda - z\,|||$ olarak tanımlandığında $|||h_\lambda - z\,|||$ değeri $\lambda \in [0,1]$ iken bir tek minumuma sahiptir öyleki bu minimum değer $\Gamma = \frac{3b\delta}{2}$ dir.

Diğer taraftan, $y \in E$ keyfi bir nokta olduğunda $\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n$ formunda yazılcak şekilde $\forall n \in N\ için\ t_n \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \ = 1$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur.

O halde,

$$
\begin{aligned}
|||y - z\,||| &= |||\sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k||| \\
&= |||(t_1-\gamma_1)be_1 + (t_2-\gamma_2)be_2 + (t_3-\gamma_3)e_3 + (t_4-\gamma_4)e_4 + \cdots ||| \\
&= \max \left\{ \begin{array}{l} 2b|t_1-\gamma_1| + b|t_2-\gamma_2| + |t_3-\gamma_3| + |t_4-\gamma_4| + |t_5-\gamma_5| + \cdots \ , \\ 2b|t_2-\gamma_2| + b|t_1-\gamma_1| + |t_3-\gamma_3| + |t_4-\gamma_4| + |t_5-\gamma_5| + \cdots \ , \\ 2|t_3-\gamma_3| + b|t_1-\gamma_1| + b|t_2-\gamma_2| + |t_4-\gamma_4| + |t_5-\gamma_5| + \cdots \ , \\ 2|t_4-\gamma_4| + b|t_1-\gamma_1| + b|t_2-\gamma_2| + |t_3-\gamma_3| + |t_5-\gamma_5| + \cdots \ , \\ 2|t_5-\gamma_5| + b|t_1-\gamma_1| + b|t_2-\gamma_2| + |t_3-\gamma_3| + |t_4-\gamma_4| \\ +|t_6-\gamma_6| + \cdots \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Alt durum 2.1: $|t_1-\gamma_1| \geq |t_2-\gamma_2|$ ve $\forall k \geq 3$ için $b|t_1-\gamma_1| \geq |t_k-\gamma_k|$ olsun.

Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
|||y-z\,||| &= b|t_1-\gamma_1| + b\sum_{k=1}^{\infty}|t_k-\gamma_k| + (1-b)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k| \\
&\geq b\delta + b|t_1-\gamma_1| + (1-b)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k| \\
&\geq b\delta + b|t_1-\gamma_1| + (1-b)|\delta-(t_1-\gamma_1)-(t_2-\gamma_2)| \\
&\geq b\delta + b|t_1-\gamma_1| + (1-b)\delta - 2(1-b)|t_1-\gamma_1| \\
&= \delta-(2-3b)|t_1-\gamma_1|
\end{aligned}
$$

dir.

Alt durum 2.1.1: $\frac{\delta}{2} \geq |t_1-\gamma_1|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda son eşitsizlik açıkça $|||y-z\,||| \geq \frac{3b\delta}{2}$ olduğunu söyler.

Alt durum 2.1.2: $\frac{\delta}{2} < |t_1-\gamma_1|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise $|||y-z\,||| \geq b\delta + b|t_1-\gamma_1| + (1-b)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k| \geq \frac{3b\delta}{2}$

dir.

Alt durum 2.2: $|t_2-\gamma_2| \geq |t_1-\gamma_1|$ ve $\forall k \geq 3$ için $b|t_2-\gamma_2| \geq |t_k-\gamma_k|$ olsun.

Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
|||y-z\,||| &= b|t_2-\gamma_2| + b\sum_{k=1}^{\infty}|t_k-\gamma_k| + (1-b)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k| \\
&\geq b\delta + b|t_2-\gamma_2| + (1-b)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k| \\
&\geq b\delta + b|t_2-\gamma_2| + (1-b)|\delta-(t_1-\gamma_1)-(t_2-\gamma_2)| \\
&\geq b\delta + b|t_2-\gamma_2| + (1-b)\delta - 2(1-b)|t_2-\gamma_2| \\
&= \delta-(2-3b)|t_2-\gamma_2|
\end{aligned}
$$

dir.

Alt durum 2.2.1: $\frac{\delta}{2} \geq |t_2-\gamma_2|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda son eşitsizlik açıkça $|||y-z\,||| \geq \frac{3b\delta}{2}$ olduğunu söyler.

Alt durum 2.2.2: $\frac{\delta}{2} < |t_2-\gamma_2|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise $|||y-z||| \geq b\delta + b|t_2-\gamma_2| + (1-b)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k| \geq \frac{3b\delta}{2}$ dir.

Alt durum 2.3: $|t_3-\gamma_3| \geq b|t_1-\gamma_1|$, $|t_3-\gamma_3| \geq b|t_2-\gamma_2|$ ve $\forall k \geq 4$ için $|t_3-\gamma_3| \geq |t_k-\gamma_k|$ olsun.

Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
|||y-z||| &= |t_3-\gamma_3| + b\sum_{k=1}^{\infty}|t_k-\gamma_k| + (1-b)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k| \\
&\geq b\delta + |t_3-\gamma_3| + (1-b)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k| \\
&\geq b\delta + |t_3-\gamma_3| + (1-b)|\delta-(t_1-\gamma_1)-(t_2-\gamma_2)| \\
&\geq b\delta + |t_3-\gamma_3| + (1-b)\delta - \frac{2(1-b)}{b}|t_3-\gamma_3| \\
&= \delta - \frac{2-3b}{b}|t_3-\gamma_3|
\end{aligned}
$$

dir.

Alt durum 2.3.1: $\frac{b\delta}{2} \geq |t_3-\gamma_3|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda son eşitsizlik açıkça $|||y-z||| \geq \frac{3b\delta}{2}$ olduğunu söyler.

Alt durum 2.3.2: $\frac{b\delta}{2} < |t_3-\gamma_3|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise $|||y-z||| \geq b\delta + |t_3-\gamma_3| + (1-b)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k| \geq \frac{3b\delta}{2}$ dir.

Alt durum 2.4: $|t_4-\gamma_4| \geq b|t_1-\gamma_1|$, $|t_4-\gamma_4| \geq b|t_2-\gamma_2|$ ve $\forall k \geq 5$ için $|t_4-\gamma_4| \geq |t_k-\gamma_k|$ olsun.

Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
|||y-z||| &= |t_4-\gamma_4| + b\sum_{k=1}^{\infty}|t_k-\gamma_k| + (1-b)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k| \\
&\geq b\delta + |t_4-\gamma_4| + (1-b)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k| \\
&\geq b\delta + |t_4-\gamma_4| + (1-b)|\delta-(t_1-\gamma_1)-(t_2-\gamma_2)|
\end{aligned}
$$

$$\geq b\delta + |t_4 - \gamma_4| + (1-b)\delta - \frac{2(1-b)}{b}|t_4 - \gamma_4|$$

$$= \delta - \frac{2-3b}{b}|t_4 - \gamma_4|$$

dir.

Alt durum 2.4.1: $\frac{b\delta}{2} \geq |t_4 - \gamma_4|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda son eşitsizlik açıkça $|||y - z\,||| \geq \frac{3b\delta}{2}$ olduğunu söyler.

Alt durum 2.4.2: $\frac{b\delta}{2} < |t_4 - \gamma_4|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise $|||y - z\,||| \geq b\delta + |t_4 - \gamma_4| + (1-b)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \geq \frac{3b\delta}{2}$ dir.

Dolayısıyla, bu şekilde devam edilir ve tüm durumlar sonucunda görülür ki $|||y - z\,||| \geq \frac{3b\delta}{2}$ dir.

Bu sebeple, λ skaleri $[0,1]$ aralığında seçilirse her $y \in E$ ve her $z \in W\backslash E$ için $|||y - z\,||| \geq \Gamma$ olup bu eşitsizliği sağlayan bir tek minimum $\lambda_0 \in [0,1]$ vardır öyleki bu değer için $|||h_{\lambda_0} - z|||=\Gamma$ dir. Şimdi, ele alınan küme içinde $\Lambda := \{y \,:\, \| y - z \| \leq \Gamma\}$ şeklinde tanımlı, boştan farklı olan $\Lambda \subseteq E$ kompakt, konveks alt kümesi ele alınsın. Bu durumda her $h \in \Lambda$ için

$$s(Th) = \limsup_m |||Th - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\,|||$$

$$\leq \limsup_m |||Th - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right)||| + \limsup_m |||\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right)\,|||$$

Fakat T afin olduğundan, yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı aşağıdakinin sağ tarafı olup,T'nin genişlemeyen olması da kullanılarak bir alttaki eşitsizlik elde edilecektir;

$$s(Tz) \leq \limsup_m |||Th - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right)||| + \limsup_m |||\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)}\,|||$$

$$\leq \limsup_m |||h - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}|||$$

$= s(h)$ dir.

Ayrıca, $s(Th) = |||z - Th|||$ ve $s(h) = |||z - h|||$ dir.

O halde, $Th \in E$ olduğu ve minimumlaştıran değer h_{λ_0}'nın tekliği göz önünde tutularak

$$|||z - Th||| \leq |||z - h||| \Rightarrow |||z - Th||| = |||z - h|||$$
$$\Rightarrow Th \in \Lambda$$

elde edilir.

Dolayısıyla $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ ve T sürekli olduğundan, Brouwer'ın Sabit nokta teoremi [5] gereğince T'nin bir sabit noktası vardır ve $h = h_{\lambda_0}$ noktası $|||y - z\,||| \;:\; y \in E$ değerlerini minimumlaştıran yegane nokta olması sebebiyle bahsi geçen sabit nokta bu nokta olup $Th = h$ dir.

Tüm bu sebepler dolayısıyla, arzu edildiği gibi E kümesi SNT(gf) dir.

2.1 Genelleştirilmiş dejenere Lorentz-Marcinkiewicz uzaylarında SNT

Ele alınan dejenere edilmiş Lorenzt-Marcinkiewicz uzaylarının bir genelleştirilmesi Nezir ve Mustafa'nın son çalışmasında [22] aşağıdaki şekilde verilmiş ve sabit nokta teorisi odaklı bazı özellikleri sunulmuştur.

$\beta \geq \alpha > 0$ olsun. Her $x = (x_n)_{n\in N} \in \ell^1$için aşağıdaki eş değer norm göz önüne alınsın:

$$\|x\| := \beta \parallel x \parallel_1 + \alpha \parallel x \parallel_\infty = \beta \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \alpha \sup_{n\in N} |x_n| \;.$$

Kolayca görülebilir ki gerçekten de $\|.\|$ normu ℓ^1 üzerinde tanımlanabilen ve $\forall x \in \ell^1$ için $\beta \parallel x \parallel_1 \leq \|x\| \leq (\alpha + \beta) \parallel x \parallel_1$ koşulunu sağlayan bir eş değer normdur.

Not edilebilir ki $\forall x \in \ell^1$, $\|x\| = \beta\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta} x_1^* + x_2^* + x_3^* + x_4^* + \cdots\right)$ öyleki burada z^*dizisi $\forall z \in c_0$ için $|z| = (|z_n|)_{n\in N}$ dizisinin bir azalan yeniden düzenlemesidir.

$\forall n \geq 4$ için $\delta_1 := (\alpha + \beta), \delta_2 := \beta, \delta_3 := \beta, \cdots, \delta_n := \beta$ şeklinde tanımlansın.

Bu durumda görülebilir ki $(\ell^1, \|.\|)$ uzayı bir dejenere edilmiş Lorentz-Marcinkiewicz uzayı $\ell_{\delta,1}$ olup tanımlanmasını sağlayan $\delta = (\delta_n)_{n\in N}$ ağırlık dizisi alışılmış Lorentz tanımının aksine $c_0 \backslash \ell^1$ uzayında olmayıp $\ell^\infty \backslash c_0$ uzayında yer almaktadır.

Tanım gereğince $(\ell^1, \|.\|)$'in bir izometrik ön duali $\ell^0_{\delta,\infty} = (c_0, \|\cdot\|_{\sim})$ olup $z \in c_0$ için

$$\| z \|_{\sim} := \sup_{n\in N} \frac{\sum_{j=1}^{n} z_j^*}{\sum_{j=1}^{n} \delta_j} = \sup_{n\in N} \frac{1}{\alpha + n\beta} \sum_{j=1}^{n} z_j^*$$

olarak yazılabilir. Hatta $\| z \|$ normu $|z|$ dizisinin bir azalan yeniden düzenlemesi kullanılmadan aşağıdaki şekilde hesaplanabilir. Bu sayede gerekli hesaplamalarda kolaylık sağlabilecektir.

$z \in c_0$ keyfi olsun.

$$\| z \|_{\sim} = \sup_{n\in N} \frac{1}{\alpha + n\beta} \sum_{j=1}^{n} z_j^* \; dir.$$

Not edilebilir ki $\forall n \in N$ için $\sum_{j=1}^{n} z_j^* = \sup_{\substack{K\subseteq N \\ \#(K)=n}} \sum_{i\in K} |z_i|$ öyleki her $K \subseteq N$ sonlu elemanlı alt kümesi için burada kullanılan $\#(K)$ simgesi ile K kümesinin eleman sayısı sembolize edilmektedir.

Bu sebeple,

$$\begin{aligned} \| z \|_{\sim} &= \sup_{n\in N} \frac{1}{\alpha + n\beta} \sup_{\substack{K\subseteq N \\ \#(K)=n}} \sum_{i\in K} |z_i| \\ &= \sup_{n\in N} \sup_{\substack{K\subseteq N \\ \#(K)=n}} \frac{1}{\alpha + \#(K)\beta} \sum_{i\in K} |z_i| \; dir. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, her $z \in c_0$ için

$$\| z \|_{\sim} = \sup_{\substack{\emptyset \neq K\subseteq N \\ \#(K)<\infty}} \frac{1}{\alpha + \#(K)\beta} \sum_{i\in K} |z_i|. \qquad (1)$$

Ayrıca not edilebilir ki 1 formulü ℓ^∞ uzayına şu şekilde genişletilebilir: $\forall w = (w_i)_{i\in N} \in \ell^\infty$ için

$$\| w \|_{\sim} := \sup_{\substack{\emptyset \neq K\subseteq N \\ \#(K)<\infty}} \frac{1}{\alpha + \#(K)\beta} \sum_{i\in K} |w_i| \qquad (2)$$

olarak tanımlıdır.

Lemma 2.4 $(\ell^1, \|.\|)$ uzayının duali $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\sim})$ uzayına izomorfik olarak izometriktir; yani, $(\ell^1, \|\cdot\|)^* \cong (\ell^\infty, \|\cdot\|)$.

İspat. Öncelikle $(e_n)_{n\in N}$ kanonik baz ele alınarak, ℓ^1'de $(Q_n)_{n\in N}$ dizisi şu şekilde tanımlansın: $Q_1 := \frac{1}{\alpha+\beta} e_1$, $Q_2 := \frac{1}{\alpha+2\beta}(e_2+e_3)$, $Q_3 := \frac{1}{\alpha+3\beta}(e_4+e_5+e_6)$, $Q_4 := \frac{1}{\alpha+4\beta}(e_7+e_8+e_9+e_{10}), \cdots$. Kolayca görülebilir ki $\forall n \in N$ için $\|Q_n\| = 1$ dir ve ayrıca her $x := (\xi_n)_{n\in N} \in \ell^1$ için x'in $\mu_1 = (\alpha+\beta)\xi_1$, $\mu_2 = (\alpha+2\beta)\xi_2$, $\mu_3 = (\alpha+3\beta)\xi_3$, $\cdots$ $\mu_n = (\alpha+n\beta)\xi_n$, $\forall n \geq 4$ şeklindeki skalarler vasıtasıyla bir tek yazılımı mevcut olup $x = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n Q_n$ dir.

$f \in \ell^{1^*}$ ele alınsın. Bu durumda f lineer ve sınırlı olduğundan, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n f(Q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \gamma_n$, $\gamma_n := f(Q_n)$, $\forall n \in N$ şeklinde gösterimi mevcuttur.

Dolayısıyla $(\gamma_n)_{n\in N} \in \ell^\infty$ dir.

Ayrıca, $\sup\limits_{\substack{\emptyset\neq K\subseteq N\\ \#(K)<\infty}} \frac{1}{\alpha+\#(K)\beta} \sum_{i\in K} |\gamma_i| \leq \sup\limits_{k\in N} |\gamma_k| \leq \| f \|_* = \sup\limits_{\substack{x\in\ell^1\\ x=1}} |f(x)|$ (3) olup $\|\cdot\|_*$ operatör normu temsil eder.

Ayrıca, eğer $(\gamma_n)_{n\in N} \in \ell^\infty$ keyfi olarak seçilirse, ℓ^∞ 'ın noktaları ile ℓ^{1^*}'deki fonksiyonelleri aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \gamma_k.$$

Lineer fonksiyonel g'nin sınırlılığını göstermek [17, sayfa 52]'de yer alan eşitsizlik formulü 5.2(5) kullanılarak kolayca gösterilebilir. Gerçekten de

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k \gamma_k| \\ &\leq \sup_{\substack{\emptyset\neq K\subseteq N\\ \#(K)<\infty}} \frac{1}{\alpha+\#(K)\beta} \sum_{i\in K} |\gamma_i| \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^* \\ &\leq \sup_{\substack{\emptyset\neq K\subseteq N\\ \#(K)<\infty}} \frac{1}{\alpha+\#(K)\beta} \sum_{i\in K} |\gamma_i| \|x\|_\sim \; dir. \qquad (3) \end{aligned}$$

Dolayısıyla gerçekten de g sınırlıdır ve lineerliği sebebiyle de $g \in \ell^{1^*}$ dir. Ayrıca yukarıdaki eşitsizlik dolayısıyla $f \in \ell^{1^*}$ olup her $x \in \ell^1$ için

$$\| f \|_* = \sup_{x=1} |f(x)| \leq \sup_{\substack{\emptyset\neq K\subseteq N\\ \#(K)<\infty}} \frac{1}{\alpha+\#(K)\beta} \sum_{i\in K} |\gamma_i| = \| (\gamma_k)_{k\in N} \|_\sim \text{ dir.} \quad (4)$$

Bu sebeple, (3) ve (4) eşitsizlikleri göz önüne alındığında normun korunduğu; yani, $\| f \|_* = \| (\gamma_k)_{k\in N} \|$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, normlu uzaylar ℓ^{1^*} ile ℓ^∞

arasındaki izomorfizm bağıntısı bir gerçektir. Ohalde ℓ^{1^*} 'den bir nokta almak ℓ^{∞}'unun bir elemanını seçmek anlamına gelmektedir.

Lemma 2.5 $X:=l^0_{\delta,\infty}$ olsun ve yukarıda verilen ifadelerde yer aldığı gibi $\|\cdot\|_{\sim}=\|\cdot\|_{\delta,\infty}$ olsun. Bu durumda Lin'in uzayın şartsız bazının koşulsuzluk katsayısı ile ilgili teoremi gereğince [14]; ele alınan uzay için koşulsuzluk katsayısı $1<\frac{\sqrt{33}-3}{2}$ olup Banach uzay $(X,\|\cdot\|)$ zayıf sabit nokta teorisine sahiptir.

2.1.1 $\ell_{\delta,1}$ için Sabit nokta teorisi odaklı bazı sonuçlar

Tez çalışmasının bu bölümünde ele alınan uzayın sabit nokta teorisi odaklı bazı özellikleri gösterilmiştir. Hatırlanacağı üzere ℓ^1 uzayı $|||.|||$ ile yeniden normlandığında ağırlık dizisi $\delta=(\delta_n)_{n\in N}=(\alpha+\beta,\beta,\beta,\beta,\cdots)\in c_0\backslash\ell^1$ olan bir dejenere edilmiş $\ell_{\delta,1}$ Lorentz-Marcinkiewicz uzayı elde edilir öyleki her $x=(x_n)_{n\in N}\in\ell^1$, için $x=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n x_n^*$ olup burada $x^*=(x_n^*)_{n\in N}$ dizisi x dizisinin bir azalan yeniden düzenlemesidir.

Öncelikle gösterilebilir ki $\ell_{\delta,1}$ uzayı ℓ^1 uzayının bir asimtotik izometrik (ai) kopyasını içerir ve dolayısıyla genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar. Öncelikle ilk olarak alt bölümde bu sonuç gösterilir, ve sonrasında ise $\ell_{\delta,1}=(\ell^1,|||.|||)$ uzayının içinde zayıf*-kompakt olmayan konveks, kapalı ve sınırlı kümelerden oluşan ve genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip çok geniş bir sınıfın varlığı Goebel ve Kuczumow [9] metodlarına benzer metodlar gösterilir öyleki Goebel ve Kuczumow çalışmalarında $(\ell^1,\|\cdot\|_1)$ uzayının içinde zayıf*-kompakt olmayan konveks, kapalı ve sınırlı kümelerden oluşan ve genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip çok geniş bir sınıfın varlığı gösterilmiştir.

2.1.1.1 $\ell_{\delta,1}$ dejenere edilmiş Lorentz-Marcinkiewicz uzayı ℓ^1 in bir ai kopyasını içerir.

Teorem 2.6 $\ell_{\delta,1}$ Banach uzayı ℓ^1'in bir asimtotik izometrik kopyasını içerir ve dolayısıyla genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar.

İspat. Lemma 3.3'de ele alınan $(Q_n)_{n\in N}$ dizisi göz önüne alınsın; öyle ki bu dizi kanonik baz $(e_n)_{n\in N}$ yardımıyla $Q_1:=\frac{1}{\alpha+\beta}e_1$, $Q_2:=\frac{1}{\alpha+2\beta}(e_2+e_3)$, $Q_3:=\frac{1}{\alpha+3\beta}(e_4+e_5+e_6)$, $Q_3:=\frac{1}{\alpha+4\beta}(e_7+e_8+e_9+e_{10}),\cdots$ formulü ile verilir ve burada görülebilir ki $\forall n\in N$ için $\|Q_n\| \;=1$ dir.

Bu durumda her $t=(t_n)_{n\in N}\in \ell^1$ için ($\vee$ sembolü ile terimlerin maksimumu gösterilmek üzere),

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n Q_n\right\| = \left\| \begin{matrix} t_1\dfrac{1}{\alpha+\beta}e_1 + t_2\dfrac{1}{\alpha+2\beta}(e_2+e_3) + t_3\dfrac{1}{\alpha+3\beta}(e_4+e_5+e_6) \\ +t_4\dfrac{1}{\alpha+4\beta}(e_7+e_8+e_9+e_{10}) + \cdots \end{matrix} \right\|$$

$$= \begin{matrix} \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta}|t_1| + \frac{2\beta}{\alpha+2\beta}|t_2| + \frac{3\beta}{\alpha+3\beta}|t_3| \\ +\frac{4\beta}{\alpha+4\beta}|t_4| + \cdots \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\alpha+\beta}|t_1| \vee \frac{\alpha}{\alpha+2\beta}|t_2| \vee \frac{\alpha}{\alpha+3\beta}|t_3| \\ \vee \frac{\alpha}{\alpha+4\beta}|t_4| + \cdots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\leq |t_1| + |t_2| + |t_3| + |t_4| + \cdots$$

ve $\forall n\in N$ için $\varepsilon_n:=\frac{\beta}{\alpha+n\beta}$ olmak üzere

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n Q_n\right\| \geq \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon_n)|t_n|$$

dir.

2.1.1.2 Dejenere edilmiş $\boldsymbol{\ell_{\delta,1}=(\ell^1,\|\cdot\|)}$ Lorentz-Marcinkiewicz uzaylarında SNT(gf)'ye sahip sonsuz boyutlu zayıf*-kompakt olmayan bir aile

Çalışmanın bu bölümünde Goebel and Kuczumow [9] tekniklerinden yararlanılarak dejenere edilmiş $\ell_{\delta,1}=(\ell^1,\|\cdot\|)$ Lorentz-Marcinkiewicz uzaylarında zayıf*-kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıfın genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olduğu gösterilmektedir öyleki Goebel and Kuczumow çalışması ile $(\ell^1,\|\cdot\|_1)$ uzaylarında zayıf*-kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıfın genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olduğu gösterilmiştir.

Örnek 2.7 $\mathrm{b} \in (0,1)$ keyfi seçilsin. c_0 uzayında bir $(\mathrm{f_n})_{\mathrm{n \in N}}$ dizisi bu sabit sayı ve kanonik baz yardımı ile şu şekilde kurulsun. $f_1 := b\, e_1$, $f_2 := \mathrm{b}\, e_2$ ve her $\mathrm{n} \geq 3$ tam sayısı için $f_n := e_n$ olsun. Daha sonrasında ise bu dizi yardımı ile aşağıdaki şekilde bu b sayısına bağlı olarak ℓ^1'in kapalı ve sınırlı bir alt kümesi $\mathrm{E} = \mathrm{E_b}$ tanımlansın;

$$E \coloneqq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n\, f_n \colon \text{ her } \mathrm{n} \in \mathbb{N} \text{ için } \mathrm{t_n} \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Theorem 2.8 Yukarıdaki örnekte verilen E alt kümesi afin $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir öyle ki burada $\|.\|$ normu ℓ^1 üzerinde alışılmış normuna eş değer şekilde $\|x\| = \beta \parallel \mathrm{x} \parallel_1 + \alpha \parallel \mathrm{x} \parallel_\infty$, $\forall \mathrm{x} \in \ell^1$ olarak $\beta \geq \alpha > 0$ için tanımlıdır.

İspat. İspat için Teorem 2.3'de uygulanan teknik aynen uygulanır ve iki farklı durum incelenir. Birinci ve ikinci durumda tamamen benzerlikler içermektedir. Dolayısıyla konunun daha hızlı akışı amacıyla ispatta yer alan farklılıklar bu ispatta aşağıdaki şekilde sunulabilir.

$$\begin{aligned}
\|h_\lambda - z\| &= \|\lambda\delta f_1 + (1-\lambda)\delta f_2\| \\
&= \|(\lambda\delta \mathrm{b}, (1-\lambda)\delta \mathrm{b}, 0, 0, \cdots)\| \\
&= b\delta\alpha max\{|\lambda|, |1-\lambda|\} + b\delta\beta|\lambda| + b\delta\beta|1-\lambda|
\end{aligned}$$

$$= \max \begin{cases} b\delta(\alpha+\beta) - 2b\delta\beta\lambda - b\delta\alpha\lambda & \text{eğer } \lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \quad 0\right) \ ise, \\ b\delta(\alpha+\beta) - b\delta\alpha\lambda & \text{eğer } \lambda \in \left[0, \quad \frac{1}{2}\right) \ ise, \\ b\delta\beta + b\delta\alpha\lambda & \text{eğer } \lambda \in \left(\frac{1}{2}, \quad 1\right] \ ise, \\ b\delta\lambda(2\beta+\alpha) - b\delta\beta & \text{eğer } \lambda \in \left(1, \quad \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right] \ ise \end{cases}$$

elde edilir.

Bu durumda $\Gamma := \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} \|h_\lambda - z\|$ olarak tanımlandığında $\|h_\lambda - z\|$ değeri $\lambda \in [0,1]$ iken bir tek minumuma sahiptir öyleki bu minimum değer $\Gamma = \frac{(2\beta+\alpha)b\delta}{2}$ dir.

Diğer taraftan, $y \in E$ keyfi bir nokta olduğunda $\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n$ formunda yazılcak şekilde $\forall n \in N\ için\ t_n \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur.

O halde,

$$\|y - z\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right\|$$

$$= \|(t_1 - \gamma_1)be_1 + (t_2 - \gamma_2)be_2 + (t_3 - \gamma_3)e_3 + (t_4 - \gamma_4)e_4 + \cdots\|$$

$$= max \begin{Bmatrix} (\beta+\alpha)b|t_1-\gamma_1| + \beta b|t_2-\gamma_2| + \beta|t_3-\gamma_3| + \beta|t_4-\gamma_4| \\ +\beta|t_5-\gamma_5| + \cdots \ , \\ \\ (\beta+\alpha)b|t_2-\gamma_2| + \beta b|t_1-\gamma_1| + \beta|t_3-\gamma_3| + \beta|t_4-\gamma_4| \\ +\beta|t_5-\gamma_5| + \cdots \ , \\ \\ (\beta+\alpha)|t_3-\gamma_3| + \beta b|t_1-\gamma_1| + \beta b|t_2-\gamma_2| + \beta|t_4-\gamma_4| \\ +\beta|t_5-\gamma_5| + \cdots \ , \\ \\ (\beta+\alpha)|t_4-\gamma_4| + \beta b|t_1-\gamma_1| + \beta b|t_2-\gamma_2| + \beta|t_3-\gamma_3| \\ +\beta|t_5-\gamma_5| + \cdots \ , \\ \\ (\beta+\alpha)|t_5-\gamma_5| + \beta b|t_1-\gamma_1| + \beta b|t_2-\gamma_2| + \beta|t_3-\gamma_3| \\ +\beta|t_4-\gamma_4| + \beta|t_6-\gamma_6| + \cdots \ , \\ \\ \dots\dots\dots \end{Bmatrix}$$

elde edilir.

O halde, ele alınacak aşağıdaki durumlar söz konusudur.

Alt durum 2.1: $|t_1 - \gamma_1| \geq |t_2 - \gamma_2|$ ve $\forall k \geq 3$ için $b|t_1 - \gamma_1| \geq |t_k - \gamma_k|$ olduğu kabul edilsin.

$$\|y - z\| = \alpha b|t_1 - \gamma_1| + \beta b \sum_{k=1}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + \beta(1-b) \sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

$$\geq \beta b\delta + \alpha b|t_1 - \gamma_1| + \beta(1-b) \sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

$$\geq \beta b\delta + \alpha b|t_1 - \gamma_1| + \beta(1-b)|\delta - (t_1 - \gamma_1) - (t_2 - \gamma_2)|$$

$$\geq \beta b\delta + \alpha b|t_1 - \gamma_1| + \beta(1-b)\delta - 2\beta(1-b)|t_1 - \gamma_1|$$
$$= \beta\delta - (2\beta(1-b) - \alpha b)|t_1 - \gamma_1|$$

dir.

Alt durum 2.1.1: $\frac{\delta}{2} \geq |t_1 - \gamma_1|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise son eşitsizlik gereğince $\|y - z\| \geq \frac{b(2\beta+\alpha)\delta}{2}$ dir.

Alt durum 2.2.2: $\frac{\delta}{2} < |t_1 - \gamma_1|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise

$$\|y - z\| \geq \beta b\delta + \alpha b|t_1 - \gamma_1| + \beta(1-b)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$
$$\geq \frac{b(2\beta+\alpha)\delta}{2}$$

elde edilir.

Alt durum 2.2: $|t_2 - \gamma_2| \geq |t_1 - \gamma_1|$ ve $\forall k \geq 3$ için $b|t_2 - \gamma_2| \geq |t_k - \gamma_k|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda,

$$\|y - z\| = \alpha b|t_2 - \gamma_2| + \beta b\sum_{k=1}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + \beta(1-b)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$
$$\geq \beta b\delta + \alpha b|t_2 - \gamma_2| + \beta(1-b)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$
$$\geq \beta b\delta + \alpha b|t_2 - \gamma_2| + \beta(1-b)|\delta - (t_1 - \gamma_1) - (t_2 - \gamma_2)|$$
$$\geq \beta b\delta + \alpha b|t_2 - \gamma_2| + \beta(1-b)\delta - 2\beta(1-b)|t_2 - \gamma_2|$$
$$= \beta\delta - (2\beta(1-b) - \alpha b)|t_2 - \gamma_2|$$

elde edilir.

Alt durum 2.2.1: $\frac{\delta}{2} \geq |t_2 - \gamma_2|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise son eşitsizlik gereğince $\|y - z\| \geq \frac{b(2\beta+\alpha)\delta}{2}$ dir.

Alt durum 2.2.2: $\frac{\delta}{2} < |t_2 - \gamma_2|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise

$$\|y - z\| \geq \beta b\delta + \alpha b|t_2 - \gamma_2| + \beta(1-b)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

$$\geq \frac{b(2\beta+\alpha)\delta}{2}$$

elde edilir.

Alt durum 2.3: $|t_3 - \gamma_3| \geq b|t_1 - \gamma_1|$, $|t_3 - \gamma_3| \geq b|t_2 - \gamma_2|$ ve $\forall k \geq 4$ için $|t_3 - \gamma_3| \geq |t_k - \gamma_k|$ olsun.

Bu durumda,

$$\|y - z\| = \alpha|t_3 - \gamma_3| + \beta b \sum_{k=1}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + \beta(1-b) \sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

$$\geq b\beta\delta + \alpha|t_3 - \gamma_3| + \beta(1-b) \sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

$$\geq b\beta\delta + \alpha|t_3 - \gamma_3| + \beta(1-b)|\delta - (t_1 - \gamma_1) - (t_2 - \gamma_2)|$$

$$\geq b\beta\delta + \alpha|t_3 - \gamma_3| + \beta(1-b)\delta - \frac{2(1-b)}{b}\beta|t_3 - \gamma_3|$$

$$= \beta\delta - \frac{2\beta(1-b) - b\alpha}{b}|t_3 - \gamma_3|$$

dir.

Alt durum 2.3.1: $\frac{b\delta}{2} \geq |t_3 - \gamma_3|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise son eşitsizlik gereğince $\|y - z\| \geq \frac{b(2\beta+\alpha)\delta}{2}$ dir.

Alt durum 2.3.2: $\frac{b\delta}{2} < |t_3 - \gamma_3|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise

$$\|y - z\| \geq b\beta\delta + \alpha|t_3 - \gamma_3| + \beta(1-b) \sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \geq \frac{b(2\beta+\alpha)\delta}{2}$$

elde edilir.

Alt durum 2.4: $|t_4 - \gamma_4| \geq b|t_1 - \gamma_1|$, $|t_4 - \gamma_4| \geq b|t_2 - \gamma_2|$ ve $\forall k \geq 5$ ile $k = 3$ için $|t_4 - \gamma_4| \geq |t_k - \gamma_k|$ olsun.

Bu durumda,

$$\|y - z\| = \alpha|t_4 - \gamma_4| + b\beta \sum_{k=1}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + \beta(1-b) \sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

$$\geq b\beta\delta + \alpha|t_4 - \gamma_4| + \beta(1-b) \sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

$$\geq b\beta\delta + \alpha|t_4 - \gamma_4| + \beta(1-b)|\delta - (t_1 - \gamma_1) - (t_2 - \gamma_2)|$$

$$\geq b\beta\delta + \alpha|t_4 - \gamma_4| + \beta(1-b)\delta - \frac{2(1-b)}{b}\beta|t_4 - \gamma_4|$$

$$= \delta - \frac{2\beta(1-b) - b\alpha}{b}|t_4 - \gamma_4|$$

dir.

Alt durum 2.4.1: $\frac{b\delta}{2} \geq |t_4 - \gamma_4|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise son eşitsizlik gereğince $\|y - z\| \geq \frac{b(2\beta+\alpha)\delta}{2}$ dir.

Alt durum 2.4.2: $\frac{b\delta}{2} < |t_4 - \gamma_4|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise

$$\|y - z\| \geq b\delta + |t_4 - \gamma_4| + (1-b)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k - \gamma_k| \geq \frac{b(2\beta + \alpha)\delta}{2}$$

elde edilir.

Dolayısıyla, bu şekilde devam edilir ve tüm durumlar sonucunda görülür ki $\|y - z\| \geq \frac{b(2\beta+\alpha)\delta}{2}$ dir.

Tüm bu sebepler dolayısıyla arzu edildiği gibi E alt kümesi afin $\|.\|$ −genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine (SNT(gf)) sahiptir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Çalışmanın bu bölümünde hazırlamış olduğumuz tarafımıza ait iki adet makalemizin oluşturduğu sonuçlar sunulmuştur. Sonuçlar iki adet alt başlık halinde aşağıda yer almaktadır. Birinci bölümde Nezir'in [19] çalışmasında elde ettiği dejenere edilmiş Lorentz-Marcinkiewicz uzaylarında genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip çok geniş bir sınıfın varlığını; ikinci bölümde ise Nezir [19] çalışmasında kullanılan eş değer normun genelleştirilmesiyle elde edilen ve Nezir ile Mustafa [22] çalışmasında yer alan genelleştirilmiş dejenere Lorentz-Marcinkiewicz uzaylarında genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip çok geniş sınıfların varlığı gösterilmiştir. Not edilmelidir ki, iki bölümdeki çalışmalardan yararlanılarak [20,22] makaleleri elde edilmiştir.

3.1 Dejenere edilmiş Lorentz-Marcinkiewicz uzaylarında genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip çok geniş sınıf

Bu bölümde öncelikle aşağıda yer alan, Nezir [19] çalışmasıyla sunulan ilk örnek ve ilk teorem verilmiştir. Bu tez çalışmasında ise bu örnek ve bu teorem genelleştirilmiştir. Öncelikle genelleştirmesi yapılacak olan ve 2. bölümde ispatı ile verilmiş olan bu örnek ve teorem tekrar sunulacaktır.

Örnek 3.1 $b \in (0,1)$ keyfi seçilsin. c_0 uzayında bir $(f_n)_{n\in N}$ dizisi bu sabit sayı ve kanonik baz yardımı ile şu şekilde kurulsun. $f_1 := b\, e_1,\ f_2 := b\, e_2$ ve her $n \geq 3$ tam sayısı için $f_n := e_n$ olsun. Daha sonrasında ise bu dizi yardımı ile aşağıdaki şekilde bu b sayısına bağlı olarak ℓ^1'in kapalı ve sınırlı bir alt kümesi $E = E_b$ tanımlansın;

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n\, f_n :\ \text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Teorem 3.2 Yukarıdaki örnekte verilen E kümesi afin $|||.|||$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir öyle ki burada $|||.|||$ normu ℓ^1 üzerinde alışılmış normuna eş değer şekilde $|||x||| = \| x \|_1 + \| x \|_\infty,\ \forall x \in \ell^1$ olarak tanımlıdır.

Örnek 3.3 $b_1,\ b_2 \in (0,1)$, $2b_1 \geq b_2$ ve $b_2 > b_1$ olsun. $f_1 := b_1\, e_1$, $f_2 := b_2\, e_2$ ve her $n \geq 3$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde c_0' da bir $(f_n)_{n\in N}$ dizisi tanımlansın ve daha sonra ℓ^1' de kapalı, sınırlı, konveks olan aşağıdaki $E = E_b$ kümesi ele alınsın:

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n :\ her\ \ t_n \geq 0\ \ ve\ \ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Theorem 3.4 Yukarıdaki örnekte verilen E kümesi afin $|||.|||$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat. İspat için Teorem 2.3'de uygulanan teknik aynen uygulanır ve iki farklı durum incelenir. Birinci ve ikinci durumda tamamen benzerlikler içermektedir. Dolayısıyla konunun daha hızlı akışı amacıyla ispatta yer alan farklılıklar bu ispatta aşağıdaki şekilde sunulabilir.

$$\begin{aligned} |||h_\lambda - z\,||| &= |||\lambda\delta f_1 + (1-\lambda)\delta f_2||| \\ &= |||(\lambda\delta b_1, (1-\lambda)\delta b_2, 0,0,\cdots)||| \\ &= \delta max\{|\lambda| b_1, |1-\lambda| b_2\} + b_1\delta|\lambda| + b_2\delta|1-\lambda|. \end{aligned}$$

Bu sebeple eğer $\frac{1}{b_2-b_1} \leq \frac{\gamma_2}{\delta} + 1$ ise

$$|||h_\lambda - z\,||| = max \begin{cases} 2b_2\delta(1-\lambda) - b_1\delta\lambda & if\ \ \lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\quad 0\right), \\ 2b_2\delta(1-\lambda) + b_1\delta\lambda & if\ \ \lambda \in \left[0,\quad \frac{b_2}{b_1+b_2}\right), \\ 2b_1\lambda\delta + (1-\lambda)b_2\delta & if\ \ \lambda \in \left[\frac{b_2}{b_1+b_2},\quad 1\right), \\ 2b_1\lambda\delta + b_2(\lambda-1)\delta & if\ \ \lambda \in \left[1,\quad \frac{1}{b_2-b_1}\right), \\ 2b_2(\lambda-1)\delta + b_1\lambda\delta & if\ \ \lambda \in \left[\frac{1}{b_2-b_1},\quad \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right] \end{cases}$$

olur fakat $\frac{1}{b_2-b_1} > \frac{\gamma_2}{\delta} + 1$ ise

$$|||h_\lambda - z\,||| = max \begin{cases} 2b_2\delta(1-\lambda) - b_1\delta\lambda & if\ \ \lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\quad 0\right), \\ 2b_2\delta(1-\lambda) + b_1\delta\lambda & if\ \ \lambda \in \left[0,\quad \frac{b_2}{b_1+b_2}\right), \\ 2b_1\lambda\delta + (1-\lambda)b_2\delta & if\ \ \lambda \in \left[\frac{b_2}{b_1+b_2},\quad 1\right), \\ 2b_1\lambda\delta + b_2(\lambda-1)\delta & if\ \ \lambda \in \left[1,\quad \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right] \end{cases}$$

elde edilir.

Bu durumda $\Gamma := \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} |||h_\lambda - z|||$ olarak tanımlandığında $|||h_\lambda - z|||$ değeri $\lambda \in [0,1]$ iken bir tek minumuma sahiptir öyleki bu minimum değer $\Gamma = \frac{3b_1 b_2 \delta}{b_1+b_2}$.

$y \in E$ keyfi bir nokta olduğunda $\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n$ formunda yazılıp $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ ve $t_n \geq 0,\ \forall n \in N$ dir.

O halde,

$$|||y - z||| = |||\sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k|||$$

$$= |||(t_1-\gamma_1)b_1 e_1 + (t_2-\gamma_2)b_2 e_2 + (t_3-\gamma_3)e_3 + (t_4-\gamma_4)e_4 + \cdots |||$$

$$= max \left\{ \begin{array}{l} 2b_1|t_1-\gamma_1| + b_2|t_2-\gamma_2| + |t_3-\gamma_3| \\ +|t_4-\gamma_4| + |t_5-\gamma_5| + \cdots \ , \\ 2b_2|t_2-\gamma_2| + b_1|t_1-\gamma_1| + |t_3-\gamma_3| \\ +|t_4-\gamma_4| + |t_5-\gamma_5| + \cdots \ , \\ 2|t_3-\gamma_3| + b_1|t_1-\gamma_1| + b_2|t_2-\gamma_2| \\ +|t_4-\gamma_4| + |t_5-\gamma_5| + \cdots \ , \\ 2|t_4-\gamma_4| + b_1|t_1-\gamma_1| + b_2|t_2-\gamma_2| \\ +|t_3-\gamma_3| + |t_5-\gamma_5| + \cdots \ , \\ 2|t_5-\gamma_5| + b_1|t_1-\gamma_1| + b_2|t_2-\gamma_2| + |t_3-\gamma_3| \\ +|t_4-\gamma_4| + |t_6-\gamma_6| + \cdots \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

dır.

Alt durum 2.1: $b_1|t_1-\gamma_1| \geq b_2|t_2-\gamma_2|$ ve $\forall k \geq 3$ için $b_1|t_1-\gamma_1| \geq |t_k-\gamma_k|$ olsun.

Buradan,

$$|||y - z||| = b_1|t_1-\gamma_1| + (b_1-b_2)|t_1-\gamma_1| + b_2|t_1-\gamma_1|$$

$$+b_2|t_2-\gamma_2| + \sum_{k=3}^{\infty} |t_k-\gamma_k|$$

$$= (2b_1-b_2)|t_1-\gamma_1| + b_2 \sum_{k=1}^{\infty} |t_k-\gamma_k| + (1-b_2)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k-\gamma_k|$$

$$\geq (2b_1-b_2)|t_1-\gamma_1| + b_2\delta + (1-b_2)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k-\gamma_k|$$

$$\geq (2b_1-b_2)|t_1-\gamma_1| + b_2\delta + (1-b_2)|\delta - (t_1-\gamma_1) - (t_2-\gamma_2)|$$

dır.

Alt durum 2.1.1: Kabul edilsin ki $\frac{b_2\delta}{b_1+b_2} \geq |t_1 - \gamma_1|$ dır.

Bu durumda son eşitsizlik vasıtasıyla aşağıdakiler elde edilir.

$$|||y - z ||| \geq (2b_1 - b_2)|t_1 - \gamma_1| + \delta + (1 - b_2)(-1 - \frac{b_1}{b_2})|t_1 - \gamma_1|$$

$$\geq \left[\left(2b_1 - b_2 - (1 - b_2)\left(1 + \frac{b_1}{b_2}\right)\right)\frac{b_2}{b_1 + b_2} + 1\right]\delta$$

$$\geq \frac{3b_1 b_2\delta}{b_1 + b_2}.$$

Alt durum 2.1.2: Kabul edilsin ki $\frac{b_2\delta}{b_1+b_2} < |t_1 - \gamma_1|$ dır.

Bu durumda,

$$|||y - z ||| \geq (2b_1 - b_2)|t_1 - \gamma_1| + b_2\delta + (1 - b_2)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

$$\geq \frac{3b_1 b_2\delta}{b_1+b_2}.$$

Alt durum 2.2: $b_2|t_2 - \gamma_2| \geq b_1|t_1 - \gamma_1|$ ve $b_2|t_2 - \gamma_2| \geq |t_k - \gamma_k|,\ \forall k \geq 3$ olsun.

Bu durumda,

$$|||y - z ||| = b_2|t_2 - \gamma_2| + (b_1 - b_2)|t_1 - \gamma_1| + b_2|t_1 - \gamma_1|$$

$$+b_2|t_2 - \gamma_2| + \sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

$$\geq b_2|t_2 - \gamma_2| + (b_1 - b_2)\frac{b_2}{b_1}|t_2 - \gamma_2| + b_2|t_1 - \gamma_1| + b_2|t_2 - \gamma_2| + \sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

$$\geq (2b_1 - b_2)|t_2 - \gamma_2| + b_2|t_1 - \gamma_1| + b_2|t_2 - \gamma_2| + \sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

$$\geq (2b_1 - b_2)|t_2 - \gamma_2| + b_2\sum_{k=1}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + (1 - b_2)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

$$\geq (2b_1 - b_2)|t_2 - \gamma_2| + b_2\delta + (1 - b_2)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

$$\geq (2b_1 - b_2)|t_2 - \gamma_2| + b_2\delta + (1 - b_2)|\delta - (t_1 - \gamma_1) - (t_2 - \gamma_2)|$$

dır.

Alt durum 2.2.1: Kabul edilsin ki $\frac{b_2\delta}{b_1+b_2} \geq |t_2 - \gamma_2|$ dır.

Bu durumda son eşitsizlik vasıtasıyla aşağıdakiler elde edilir.

$$|||y-z\,||| \geq (2b_1-b_2)|t_2-\gamma_2|+\delta+(1-b_2)(-1-\frac{b_2}{b_1})|t_2-\gamma_2|$$

$$\geq \left(2b_1-b_2-(1-b_2)\left(1+\frac{b_2}{b_1}\right)\right)|t_2-\gamma_2|+\delta.$$

Eğer $\left(2b_1-b_2-(1-b_2)\left(1+\frac{b_2}{b_1}\right)\right) \geq 0$ ise $b_2 < \frac{2}{3}$ olduğundan $|||y-z\,||| \geq \frac{3b_1b_2\delta}{b_1+b_2}$ dir fakat $\left(2b_1-b_2-(1-b_2)\left(1+\frac{b_2}{b_1}\right)\right) < 0$ ise $\frac{b_2\delta}{b_1+b_2} \geq |t_2-\gamma_2|$ olduğundan

$$|||y-z\,||| \geq \left[\left(2b_1-b_2-(1-b_2)\left(1+\frac{b_2}{b_1}\right)\right)\frac{b_2\delta}{b_1+b_2}+1\right]\delta$$

$$\geq \frac{3b_1b_2\delta}{b_1+b_2} \text{ dir.}$$

Alt durum 2.2.2: $\frac{b_2\delta}{b_1+b_2} < |t_2-\gamma_2|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise

$$|||y-z\,||| \geq (2b_1-b_2)|t_2-\gamma_2|+b_2\delta+(1-b_2)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\geq \frac{3b_1b_2\delta}{b_1+b_2}$$

elde edilir.

Alt durum 2.3: $|t_3-\gamma_3| \geq b_1|t_1-\gamma_1|$, $|t_3-\gamma_3| \geq b_2|t_2-\gamma_2|$ ve $\forall k \geq 4$ için $|t_3-\gamma_3| \geq |t_k-\gamma_k|$ olsun.

Bu durumda,

$$|||y-z\,||| = |t_3-\gamma_3|+(b_1-b_2)|t_1-\gamma_1|+b_2|t_1-\gamma_1|+b_2|t_2-\gamma_2|+|t_3-\gamma_3| + \sum_{k=4}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\geq |t_3-\gamma_3|+(b_1-b_2)\frac{1}{b_1}|t_3-\gamma_3|+b_2|t_1-\gamma_1|+b_2|t_2-\gamma_2|+\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\geq \frac{2b_1-b_2}{b_1}|t_3-\gamma_3|+b_2|t_1-\gamma_1|+b_2|t_2-\gamma_2|+\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\geq \frac{2b_1-b_2}{b_1}|t_3-\gamma_3|+b_2\sum_{k=1}^{\infty}|t_k-\gamma_k|+(1-b_2)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\geq \frac{2b_1 - b_2}{b_1}|t_3 - \gamma_3| + b_2\delta + (1 - b_2)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k - \gamma_k|$$

$$\geq \frac{2b_1 - b_2}{b_1}|t_3 - \gamma_3| + b_2\delta + (1 - b_2)|\delta - (t_1 - \gamma_1) - (t_2 - \gamma_2)|$$

$$\geq \frac{2b_1 - b_2}{b_1}|t_3 - \gamma_3| + b_2\delta + (1 - b_2)\delta - (1 - b_2)|t_1 - \gamma_1| - (1 - b_2)|t_2 - \gamma_2|$$

$$\geq \frac{2b_1 - b_2}{b_1}|t_3 - \gamma_3| + b_2\delta + (1 - b_2)\delta - (1 - b_2)\frac{1}{b_1}|t_3 - \gamma_3|$$

$$-(1 - b_2)\frac{1}{b_2}|t_3 - \gamma_3|$$

$$\geq \frac{2b_1 - b_2}{b_1}|t_3 - \gamma_3| + b_2\delta + (1 - b_2)\delta - (1 - b_2)\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right)|t_3 - \gamma_3|$$

dir.

Alt durum 2.3.1: $\frac{b_1 b_2 \delta}{b_1 + b_2} \geq |t_3 - \gamma_3|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise son eşitsizlik gereğince

$$|||y - z||| \geq \frac{2b_1 - b_2}{b_1}|t_3 - \gamma_3| + b_2\delta + (1 - b_2)\delta - (1 - b_2)\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right)|t_3 - \gamma_3|$$

$$\geq \left[\frac{2b_1 - b_2}{b_1} - (1 - b_2)\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right)\right]|t_3 - \gamma_3| + \delta$$

$$\geq \left[\frac{2b_1 - b_2}{b_1} - (1 - b_2)\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right) + 1\right]\delta$$

$$\geq \frac{3b_1 b_2 \delta}{b_1 + b_2}$$

dir.

Alt durum 2.3.2: $\frac{b_1 b_2 \delta}{b_1 + b_2} < |t_3 - \gamma_3|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise

$$|||y - z||| \geq \frac{2b_1 - b_2}{b_1}|t_3 - \gamma_3| + b_2\delta + (1 - b_2)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k - \gamma_k|$$

$$\geq \frac{3b_1 b_2 \delta}{b_1 + b_2}$$

elde edilir.

Alt durum 2.4: $|t_4-\gamma_4| \geq b_1|t_1-\gamma_1|$, $|t_4-\gamma_4| \geq b_2|t_2-\gamma_2|$ ve $\forall k \geq 5$ ile $k=3$ için $|t_4-\gamma_4| \geq |t_k-\gamma_k|$ olsun.

Bu durumda,

$$\begin{aligned}
|||y-z\,||| &= |t_4-\gamma_4| + (b_1-b_2)|t_1-\gamma_1| + b_2|t_1-\gamma_1| + b_2|t_2-\gamma_2| + |t_3-\gamma_3| \\
&\qquad + \sum_{k=4}^{\infty} |t_k-\gamma_k| \\
&\geq |t_4-\gamma_4| + (b_1-b_2)\frac{1}{b_1}|t_4-\gamma_4| + b_2|t_1-\gamma_1| + b_2|t_2-\gamma_2| + \sum_{k=3}^{\infty} |t_k-\gamma_k| \\
&\geq \frac{2b_1-b_2}{b_1}|t_4-\gamma_4| + b_2|t_1-\gamma_1| + b_2|t_2-\gamma_2| + \sum_{k=3}^{\infty} |t_k-\gamma_k| \\
&\geq \frac{2b_1-b_2}{b_1}|t_4-\gamma_4| + b_2\sum_{k=1}^{\infty} |t_k-\gamma_k| + (1-b_2)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k-\gamma_k| \\
&\geq \frac{2b_1-b_2}{b_1}|t_4-\gamma_4| + b_2\delta + (1-b_2)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k-\gamma_k| \\
&\geq \frac{2b_1-b_2}{b_1}|t_4-\gamma_4| + b_2\delta + (1-b_2)|\delta-(t_1-\gamma_1)-(t_2-\gamma_2)| \\
&\geq \frac{2b_1-b_2}{b_1}|t_4-\gamma_4| + b_2\delta + (1-b_2)\delta - (1-b_2)|t_1-\gamma_1| - (1-b_2)|t_2-\gamma_2| \\
&\geq \frac{2b_1-b_2}{b_1}|t_4-\gamma_4| + b_2\delta + (1-b_2)\delta - (1-b_2)\frac{1}{b_1}|t_4-\gamma_4| \\
&\qquad -(1-b_2)\frac{1}{b_2}|t_4-\gamma_4| \\
&\geq \frac{2b_1-b_2}{b_1}|t_4-\gamma_4| + b_2\delta + (1-b_2)\delta - (1-b_2)\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}\right)|t_4-\gamma_4|
\end{aligned}$$

dir.

Alt durum 2.4.1: $\frac{b_1 b_2 \delta}{b_1+b_2} \geq |t_4-\gamma_4|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise son eşitsizlik gereğince

$$\begin{aligned}
|||y-z\,||| &\geq \frac{2b_1-b_2}{b_1}|t_4-\gamma_4| + b_2\delta + (1-b_2)\delta - (1-b_2)\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}\right)|t_4-\gamma_4| \\
&\geq \left[\frac{2b_1-b_2}{b_1} - (1-b_2)\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}\right)\right]|t_4-\gamma_4|
\end{aligned}$$

$$+\delta$$

$$\geq \left[\frac{2b_1 - b_2}{b_1} - (1 - b_2)\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right) + 1\right]\delta$$

$$\geq \frac{3b_1 b_2 \delta}{b_1 + b_2}$$

dir.

Alt durum 2.4.2: $\frac{b_1 b_2 \delta}{b_1+b_2} < |t_4 - \gamma_4|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise

$$|||y - z\,||| \geq \frac{2b_1 - b_2}{b_1}|t_4 - \gamma_4| + b_2\delta + (1 - b_2)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \geq \frac{3b_1 b_2 \delta}{b_1 + b_2}$$

elde edilir.

Dolayısıyla, bu şekilde devam edilir ve tüm durumlar sonucunda görülür ki $|||y - z\,||| \geq \frac{3b_1 b_2 \delta}{b_1+b_2}$ dir.

Sonuç 3.5 $b_1,\ b_2 \in (0,1)$, $2b_1 \geq b_2$ ve $b_2 \geq b_1$ olsun. $f_1 := b_1\, e_1$, $f_2 := b_2\, e_2$ ve her $n \geq 3$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde c_0' da bir $(f_n)_{n\in N}$ dizisi tanımlansın ve daha sonra ℓ^1' de kapalı, sınırlı, konveks olan aşağıdaki $E = E_b$ kümesi ele alınsın:

Bu durumda E kümesi afin $|||.|||$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

Örnek 3.6 $b \in (0,1)$ olsun. $f_1 := be_1$, $f_2 := be_2$, $f_3 := b\, e_3$ ve her $n \geq 4$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde c_0' da bir $(f_n)_{n\in N}$ dizisi tanımlansın ve daha sonra ℓ^1' de kapalı, sınırlı, konveks olan aşağıdaki $E = E_b$ kümesi ele alınsın:

$$E := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n :\ her\ \ t_n \geq 0\ \ ve\ \ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1\right\}.$$

Teorem 3.7 Yukarıdaki örnekte verilen E kümesi afin $|||.|||$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

<u>İspat.</u> İspat için Teorem 2.3'de uygulanan teknik aynen uygulanır ve iki farklı durum incelenir. Birinci ve ikinci durumda tamamen benzerlikler içermektedir. Dolayısıyla konunun daha hızlı akışı amacıyla ispatta yer alan farklılıklar bu ispatta aşağıdaki şekilde sunulabilir.

Burada bu defa

$$h_\lambda := (\gamma_1 + \frac{\lambda}{2}\delta)f_1 + (\gamma_2 + \frac{\lambda}{2}\delta)f_2 + (\gamma_3 + (1-\lambda)\delta)f_3 + \sum_{n=4}^{\infty} \gamma_n f_n$$

olarak tanımlanır. Bu durumda ise

$$\begin{aligned}
|||h_\lambda - z\,||| &= |||\frac{\lambda}{2}\delta f_1 + \frac{\lambda}{2}\delta f_2 + (1-\lambda)\delta f_3||| \\
&= |||\left(\frac{\lambda}{2}b\delta, \frac{\lambda}{2}b\delta, (1-\lambda)\delta b, 0,0,\cdots\right)||| \\
&= b\delta max\left\{\frac{|\lambda|}{2}, |1-\lambda|\right\} + b\delta|\lambda| + b\delta|1-\lambda| \\
&= max\begin{cases} 2(1-\lambda)b\delta - \lambda b\delta & \text{eğer } \lambda \in \left[-\frac{2\gamma_1}{\delta}, \quad 0\right) ise, \\ 2(1-\lambda)b\delta + \lambda b\delta & \text{eğer } \lambda \in \left[0, \quad \frac{2}{3}\right) ise, \\ b\delta + \frac{b\delta\lambda}{2} & \text{eğer } \lambda \in \left[\frac{2}{3}, \quad 1\right) \, ise, \\ \frac{5b\delta\lambda}{2} - b\delta & \text{eğer } \lambda \in \left[1, \quad \frac{\gamma_3}{\delta}+1\right] \, ise \end{cases}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu durumda $\Gamma := \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} |||h_\lambda - z\,|||$ olarak tanımlandığında $|||h_\lambda - z\,|||$ değeri $\lambda \in [0,1]$ iken bir tek minumuma sahiptir öyleki bu minimum değer $\Gamma = \frac{4b\delta}{3}$.

$y \in E$ keyfi bir nokta olduğunda $\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n$ formunda yazılıp $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \; = 1$ ve $t_n \geq 0, \; \forall n \in N$ dir.

O halde,

$$\begin{aligned}
|||y - z\,||| &= |||\sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k||| \\
&= |||(t_1-\gamma_1)be_1 + (t_2-\gamma_2)be_2 + (t_3-\gamma_3)be_3 + (t_4-\gamma_4)e_4 + \cdots|||
\end{aligned}$$

Yani,

$$|||y-z|||=max\begin{Bmatrix} 2b|t_1-\gamma_1|+b|t_2-\gamma_2|+b|t_3-\gamma_3| \\ +|t_4-\gamma_4|+|t_5-\gamma_5|+\cdots\ , \\ 2b|t_2-\gamma_2|+b|t_1-\gamma_1|+b|t_3-\gamma_3| \\ +|t_4-\gamma_4|+|t_5-\gamma_5|+\cdots\ , \\ 2b|t_3-\gamma_3|+b|t_1-\gamma_1|+b|t_2-\gamma_2| \\ +|t_4-\gamma_4|+|t_5-\gamma_5|+\cdots\ , \\ 2|t_4-\gamma_4|+b|t_1-\gamma_1|+b|t_2-\gamma_2| \\ +b|t_3-\gamma_3|+|t_5-\gamma_5|+\cdots\ , \\ 2|t_5-\gamma_5|+b|t_1-\gamma_1|+b|t_2-\gamma_2|+b|t_3-\gamma_3| \\ +|t_4-\gamma_4|+|t_6-\gamma_6|+\cdots\ , \\ \dots\dots\dots \end{Bmatrix}$$

dir.

Bu durumda aşağıdaki durumlar söz konusudur.

Alt durum 2.1: $|t_1-\gamma_1|\geq|t_2-\gamma_2|, |t_1-\gamma_1|\geq|t_3-\gamma_3|$ ve $\forall k\geq 4$ için $b|t_1-\gamma_1|\geq|t_k-\gamma_k|$ olsun.

Buradan,

$$|||y-z|||=b|t_1-\gamma_1|+b\sum_{k=1}^{\infty}|t_k-\gamma_k|+(1-b)\sum_{k=4}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\geq b\delta+b|t_1-\gamma_1|+(1-b)\sum_{k=4}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\geq b\delta+b|t_1-\gamma_1|+(1-b)|\delta-(t_1-\gamma_1)-(t_2-\gamma_2)|$$

$$\geq \delta+(3b-2)|t_1-\gamma_1|$$

dır.

Alt durum 2.1.1: Kabul edilsin ki $\frac{\delta}{3}\geq|t_1-\gamma_1|$ dır.

Bu durumda son eşitsizlik vasıtasıyla aşağıdaki kolayca elde edilir.

$$|||y-z|||\geq\frac{4b\delta}{3}.$$

Alt durum 2.1.2: Kabul edilsin ki $\frac{\delta}{3}<|t_1-\gamma_1|$ dır.

Bu durumda,

$$|||y-z|||\geq b\delta+b|t_1-\gamma_1|+(1-b)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k|\geq\frac{4b\delta}{3}$$

dir.

Alt durum 2.2: $|t_2-\gamma_2| \geq |t_1-\gamma_1|$, $|t_2-\gamma_2| \geq |t_3-\gamma_3|$, $\forall k \geq 4$ için $b|t_2-\gamma_2| \geq |t_k-\gamma_k|$ olsun.

Bu durumda,

$$|||y-z||| = b|t_2-\gamma_2| + b\sum_{k=1}^{\infty}|t_k-\gamma_k| + (1-b)\sum_{k=4}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$
$$\geq b\delta + b|t_2-\gamma_2| + (1-b)\sum_{k=4}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$
$$\geq b\delta + b|t_2-\gamma_2| + (1-b)|\delta-(t_1-\gamma_1)-(t_2-\gamma_2)|$$
$$\geq \delta + (3b-2)|t_2-\gamma_2|$$

dır.

Alt durum 2.2.1: Kabul edilsin ki $\frac{\delta}{3} \geq |t_2-\gamma_2|$ dır.

Bu durumda son eşitsizlik vasıtasıyla aşağıdaki kolayca elde edilir.

$$|||y-z||| \geq \frac{4b\delta}{3}$$

dir.

Alt durum 2.2.2: $\frac{\delta}{3} < |t_2-\gamma_2|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise

$$|||y-z||| \geq b\delta + b|t_2-\gamma_2| + (1-b)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k| \geq \frac{4b\delta}{3}$$

elde edilir.

Alt durum 2.3: $|t_3-\gamma_3| \geq |t_1-\gamma_1|$, $|t_3-\gamma_3| \geq |t_2-\gamma_2|$ ve $\forall k \geq 4$ için b$|t_3-\gamma_3| \geq |t_k-\gamma_k|$ olsun.

Bu durumda,

$$|||y-z||| = b|t_3-\gamma_3| + b\sum_{k=1}^{\infty}|t_k-\gamma_k| + (1-b)\sum_{k=4}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$
$$\geq b\delta + b|t_3-\gamma_3| + (1-b)\sum_{k=4}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$
$$\geq b\delta + b|t_3-\gamma_3| + (1-b)|\delta-(t_1-\gamma_1)-(t_2-\gamma_2)-(t_3-\gamma_3)|$$
$$\geq \delta + (4b-3)|t_3-\gamma_3|$$

dir.

Alt durum 2.3.1: $\frac{\delta}{3} \geq |t_3 - \gamma_3|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise son eşitsizlik gereğince

$|||y - z\,||| \geq \frac{4b\delta}{3}$ dir.

Alt durum 2.3.2: $\frac{\delta}{3} < |t_3 - \gamma_3|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise

$$|||y - z\,||| \geq b\delta + b|t_3 - \gamma_3| + (1-b)\sum_{k=4}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \geq \frac{4b\delta}{3}$$

elde edilir.

Alt durum 2.4: $|t_4 - \gamma_4| \geq b|t_1 - \gamma_1|$, $|t_4 - \gamma_4| \geq b|t_2 - \gamma_2|$, $|t_4 - \gamma_4| \geq b|t_3 - \gamma_3|$ ve $\forall k \geq 5$ için $|t_4 - \gamma_4| \geq |t_k - \gamma_k|$ olsun.

Bu durumda,

$$\begin{aligned}
|||y - z\,||| &= |t_4 - \gamma_4| + b\sum_{k=1}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + (1-b)\sum_{k=4}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&\geq b\delta + |t_4 - \gamma_4| + (1-b)\sum_{k=4}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&\geq b\delta + |t_4 - \gamma_4| + (1-b)|\delta - (t_1 - \gamma_1) - (t_2 - \gamma_2) - (t_3 - \gamma_3)| \\
&\geq b\delta + |t_4 - \gamma_4| + (1-b)\delta - \frac{3(1-b)}{b}|t_4 - \gamma_4| \\
&\geq \delta + \frac{4b-3}{b}|t_4 - \gamma_4|
\end{aligned}$$

dir.

Alt durum 2.4.1: $\frac{b\delta}{3} \geq |t_3 - \gamma_3|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise son eşitsizlik gereğince

$$|||y - z\,||| \geq \frac{4b\delta}{3}$$

dir.

Alt durum 2.4.2: $\frac{b\delta}{3} < |t_4 - \gamma_4|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise

$$|||y - z||| \geq b\delta + |t_4 - \gamma_4| + (1-b)\sum_{k=4}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \geq \frac{4b\delta}{3}$$

elde edilir.

Dolayısıyla, bu şekilde devam edilir ve tüm durumlar sonucunda görülür ki $|||y - z||| \geq \frac{4b\delta}{3}$ dir.

O halde genel sonuç aşağıdaki şekilde sadece ispat için kullanılacak temel araçlar verilerek şu şekilde sunulabilir:

Sonuç 3.8 $N > 3$ ve $b \in (0,1)$ keyfi olsun. $f_1 := b\, e_1$, $f_2 := b\, e_2$, $f_3 := b\, e_3, \cdots, f_N := b\, e_N$ ve her $n \geq N+1$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde c_0' da bir $(f_n)_{n\in N}$ dizisi tanımlansın ve daha sonra ℓ^1' de kapalı, sınırlı, konveks olan aşağıdaki $E = E_b$ kümesi ele alınsın:

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \ her\ \ t_n \geq 0\ \ ve\ \ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Bu durumda E kümesi afin $|||.|||$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat. İspat için Teorem 2.3'de uygulanan teknik aynen uygulanır ve sadece durum 2 de aşağıdaki değişiklik gerçekleşecektir.

$$h_\lambda := (\gamma_1 + \frac{\lambda}{N-1}\delta)f_1 + (\gamma_2 + \frac{\lambda}{N-1}\delta)f_2 + \cdots + (\gamma_{N-1} + \frac{\lambda}{N-1}\delta)f_{N-1}$$
$$+(\gamma_N + (1-\lambda)\delta)f_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} \gamma_n f_n \ .$$

$\Gamma := \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} |||h_\lambda - z|||$ olarak tanımlandığında $|||h_\lambda - z|||$ değeri $\lambda \in [0,1]$ iken bir tek minumuma sahiptir öyleki bu minimum değer $\Gamma = \frac{(1+N)b\delta}{N}$.

3.2 En genel sonuç: Genelleştirilmiş Dejenere edilmiş Lorentz-Marcinkiewicz uzaylarında genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip çok geniş sınıf

Şimdi ise ele alınan ailelerin tamamını genelleştirecek olan, genelleştirilmiş dejenere Lorentz-Marcinkiewicz uzaylarında zayıf*-kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan sabit nokta teorisine sahip geniş bir sınıf bu tez çalışmasının en genel sonucu olarak sunulacaktır. Hatırlanacağı üzere çalışmanın 3. Bölümünde aşağıdaki örnek ve ilgili teorem ispatı ile birlikte verilmişti. Takip eden örnek ve teorem ise bu sonucu ve hatta daha önceki sonuçları genelleştirmektedir.

Örnek 3.9 $b \in (0,1)$ keyfi seçilsin. c_0 uzayında bir $(f_n)_{n\in N}$ dizisi bu sabit sayı ve kanonik baz yardımı ile şu şekilde kurulsun. $f_1 := b\, e_1,\ f_2 := b\, e_2$ ve her $n \geq 3$ tam sayısı için $f_n := e_n$ olsun. Daha sonrasında ise bu dizi yardımı ile aşağıdaki şekilde bu b sayısına bağlı olarak ℓ^1'in kapalı ve sınırlı bir alt kümesi $E = E_b$ tanımlansın;

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \ her\ t_n \geq 0\ \ ve\ \ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Theorem 3.10 Yukarıdaki örnekte verilen E alt kümesi afin $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir öyle ki burada $\|.\|$ normu ℓ^1 üzerinde alışılmış normuna eş değer şekilde $\|x\| = \beta \parallel x \parallel_1 + \alpha \parallel x \parallel_\infty,\ \forall x \in \ell^1$ olarak $\beta \geq \alpha > 0$ için tanımlıdır.

Örnek 3.11 $b_1,\ b_2 \in (0,1),\ 2b_1 \geq b_2$ ve $b_2 > b_1$ olsun. $f_1 := b_1\, e_1,\ f_2 := b_2\, e_2$ ve her $n \geq 3$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde c_0' da bir $(f_n)_{n\in N}$ dizisi tanımlansın ve daha sonra ℓ^1' de kapalı, sınırlı, konveks olan aşağıdaki $E = E_b$ kümesi ele alınsın:

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \ her\ t_n \geq 0\ \ ve\ \ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Theorem 3.12 Yukarıdaki örnekte verilen E kümesi afin $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat. İspat için Teorem 2.3'de uygulanan teknik aynen uygulanır ve iki farklı durum incelenir. Birinci ve ikinci durumda tamamen benzerlikler içermektedir. Dolayısıyla konunun daha hızlı akışı amacıyla ispatta yer alan farklılıklar bu ispatta aşağıdaki şekilde sunulabilir.

$$\begin{aligned}
\|h_\lambda - z\| &= \|\lambda\delta f_1 + (1-\lambda)\delta f_2\| \\
&= \|(\lambda\delta b_1, (1-\lambda)\delta b_2, 0,0,\cdots)\| \\
&= \delta max\{|\lambda| b_1, |1-\lambda| b_2\} + b_1\delta|\lambda| + b_2\delta|1-\lambda|
\end{aligned}$$

$$= max\begin{cases}
(\alpha+\beta)b_2\delta(1-\lambda) - \beta b_1\delta\lambda & eğer\ \lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\quad 0\right)ise, \\
(\alpha+\beta)b_2\delta(1-\lambda) + \beta b_1\delta\lambda & eğer\ \lambda \in \left[0,\quad \frac{b_2}{b_1+b_2}\right)ise, \\
(\alpha+\beta)b_1\lambda\delta + \beta(1-\lambda)b_2\delta & eğer\ \lambda \in \left[\frac{b_2}{b_1+b_2},\quad 1\right)ise, \\
(\alpha+\beta)b_1\lambda\delta + \beta b_2(\lambda-1)\delta & eğer\ \lambda \in \left[1, \frac{1}{b_2-b_1}\right) \\
 & ve\ eğer\ \frac{1}{b_2-b_1} \le \frac{\gamma_2}{\delta} + 1 \text{ ise}, \\
(\alpha+\beta)b_2(\lambda-1)\delta + \beta b_1\lambda\delta & eğer\ \lambda \in \left[\frac{1}{b_2-b_1}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right] \\
 & ve\ eğer\ \frac{1}{b_2-b_1} \le \frac{\gamma_2}{\delta} + 1 \text{ ise}, \\
(\alpha+\beta)b_1\lambda\delta + \beta b_2(\lambda-1)\delta & eğer\ \ \lambda \in \left[1, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right] \\
 & ve\ eğer\ \frac{1}{b_2-b_1} > \frac{\gamma_2}{\delta} + 1 \text{ ise},
\end{cases}$$

elde edilir.

O halde, ele alınacak aşağıdaki durumlar söz konusudur.

Alt durum 2.1: $b_1|t_1-\gamma_1| \ge b_2|t_2-\gamma_2|$ ve $\forall k \ge 3$ için $b_1|t_1-\gamma_1| \ge |t_k-\gamma_k|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda,

$$\|y-z\| = ((\alpha+\beta)b_1 - \beta b_2)|t_1-\gamma_1| + \beta b_2\sum_{k=1}^{\infty}|t_k-\gamma_k| + \beta(1-b_2)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\ge ((\alpha+\beta)b_1 - \beta b_2)|t_1-\gamma_1| + \beta b_2\delta + (1-b_2)|\delta - (t_1-\gamma_1) - (t_2-\gamma_2)|$$

dir.

Alt durum 2.1.1: $\frac{b_2\delta}{b_1+b_2} \geq |t_1-\gamma_1|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise son eşitsizlik gereğince

$$\|y-z\| \geq ((\alpha+\beta)b_1-\beta b_2)|t_1-\gamma_1| + \beta\delta + \beta(1-b_2)(-1-\frac{b_1}{b_2})|t_1-\gamma_1|$$

$$\geq \left[\left(\big((\alpha+\beta)b_1-\beta b_2\big)-\beta(1-b_2)\left(1+\frac{b_1}{b_2}\right)\right)\frac{b_2}{b_1+b_2}+\beta\right]\delta$$

$$\geq \frac{(\alpha+2\beta)b_1b_2\delta}{b_1+b_2}$$

dir.

Alt durum 2.1.2: $\frac{b_2\delta}{b_1+b_2} < |t_1-\gamma_1|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise

$$\|y-z\| \geq \big((\alpha+\beta)b_1-\beta b_2\big)|t_1-\gamma_1| + \beta b_2\delta + \beta(1-b_2)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\geq \frac{(\alpha+2\beta)b_1b_2\delta}{b_1+b_2}$$

elde edilir.

Alt durum 2.2: $b_2|t_2-\gamma_2| \geq b_1|t_1-\gamma_1|$ ve $\forall k \geq 3$ için $b_2|t_2-\gamma_2| \geq |t_k-\gamma_k|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda,

$$\|y-z\| = (\alpha+\beta)b_2|t_2-\gamma_2| + \beta b_1|t_1-\gamma_1| + \beta\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$= \alpha b_2|t_2-\gamma_2| + \beta(b_1-b_2)|t_1-\gamma_1| + \beta b_2|t_1-\gamma_1| + \beta b_2|t_2-\gamma_2|$$

$$+\beta\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\geq \alpha b_2|t_2-\gamma_2| + \beta(b_1-b_2)\frac{b_2}{b_1}|t_2-\gamma_2| + \beta b_2|t_1-\gamma_1| + \beta b_2|t_2-\gamma_2|$$

$$+\beta\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$= [(\alpha+\beta)b_1 - \beta b_2]\frac{b_2}{b_1}|t_2-\gamma_2| + \beta b_2 \sum_{k=1}^{\infty} |t_k-\gamma_k| + \beta(1-b_2)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k-\gamma_k|$$

$$\geq [(\alpha+\beta)b_1 - \beta b_2]|t_2-\gamma_2| + \beta b_2\delta + \beta(1-b_2)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k-\gamma_k|$$

$$\geq [(\alpha+\beta)b_1 - \beta b_2]|t_2-\gamma_2| + \beta b_2\delta + \beta(1-b_2)|\delta-(t_1-\gamma_1)-(t_2-\gamma_2)|$$

elde edilir.

Alt durum 2.2.1: $\frac{b_2\delta}{b_1+b_2} \geq |t_2-\gamma_2|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise son eşitsizlik gereğince

$$\|y-z\| \geq [(\alpha+\beta)b_1 - \beta b_2]|t_2-\gamma_2| + \beta\delta + \beta(1-b_2)(-1-\frac{b_2}{b_1})|t_2-\gamma_2|$$

$$\geq \left((\alpha+\beta)b_1 - \beta b_2 - \beta(1-b_2)\left(1+\frac{b_2}{b_1}\right)\right)|t_2-\gamma_2| + \beta\delta$$

dir.

$b_2 < \frac{2}{3}$ ve $\alpha \leq \beta$ olduğundan eğer $\left((\alpha+\beta)b_1 - \beta b_2 - \beta(1-b_2)\left(1+\frac{b_2}{b_1}\right)\right) \geq 0$ ise $\|y-z\| \geq \frac{(\alpha+2\beta)b_1b_2\delta}{b_1+b_2}$ dir fakat eğer $\left((\alpha+\beta)b_1 - \beta b_2 - \beta(1-b_2)\left(1+\frac{b_2}{b_1}\right)\right) < 0$ ise $\frac{b_2\delta}{b_1+b_2} \geq |t_2-\gamma_2|$ kabulü gereğince

$$\|y-z\| \geq \left[\left((\alpha+\beta)b_1 - \beta b_2 - \beta(1-b_2)\left(1+\frac{b_2}{b_1}\right)\right)\frac{b_2\delta}{b_1+b_2} + \beta\right]\delta$$

$$\geq \frac{(\alpha+2\beta)b_1b_2\delta}{b_1+b_2}$$

elde edilir.

Alt durum 2.2.2: $\frac{b_2\delta}{b_1+b_2} < |t_2-\gamma_2|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise

$$\|y-z\| \geq [(\alpha+\beta)b_1 - \beta b_2]|t_2-\gamma_2| + \beta b_2\delta + \beta(1-b_2)\sum_{k=3}^{\infty} |t_k-\gamma_k|$$

$$\geq \frac{(\alpha+2\beta)b_1b_2\delta}{b_1+b_2}$$

elde edilir.

Alt durum 2.3: $|t_3-\gamma_3| \geq b_1|t_1-\gamma_1|$, $|t_3-\gamma_3| \geq b_2|t_2-\gamma_2|$ ve $\forall k \geq 4$ için $|t_3-\gamma_3| \geq |t_k-\gamma_k|$ olsun.

Bu durumda,

$$\|y-z\| = \alpha|t_3-\gamma_3| + \beta(b_1-b_2)|t_1-\gamma_1| + \beta b_2|t_1-\gamma_1| + \beta b_2|t_2-\gamma_2|$$

$$+\beta|t_3-\gamma_3| + \sum_{k=4}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\geq \alpha|t_3-\gamma_3| + \beta(b_1-b_2)\frac{1}{b_1}|t_3-\gamma_3| + \beta b_2|t_1-\gamma_1| + \beta b_2|t_2-\gamma_2|$$

$$+\beta\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\geq \frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1}|t_3-\gamma_3| + \beta b_2|t_1-\gamma_1| + \beta b_2|t_2-\gamma_2| + \beta\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\geq \frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1}|t_3-\gamma_3| + \beta b_2\delta + \beta(1-b_2)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\geq \frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1}|t_3-\gamma_3| + \beta b_2\delta + \beta(1-b_2)|\delta-(t_1-\gamma_1)-(t_2-\gamma_2)|$$

$$\geq \frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1}|t_3-\gamma_3| + \beta b_2\delta + \beta(1-b_2)\delta - \beta(1-b_2)|t_1-\gamma_1|$$

$$-\beta(1-b_2)|t_2-\gamma_2|$$

$$\geq \frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1}|t_3-\gamma_3| + \beta b_2\delta + \beta(1-b_2)\delta - \beta(1-b_2)\frac{1}{b_1}|t_3-\gamma_3|$$

$$-\beta(1-b_2)\frac{1}{b_2}|t_3-\gamma_3|$$

$$\geq \frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1}|t_3-\gamma_3| + \beta b_2\delta + \beta(1-b_2)\delta - \beta(1-b_2)\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}\right)|t_3-\gamma_3|$$

dir.

Alt durum 2.3.1: $\frac{b_1 b_2\delta}{b_1+b_2} \geq |t_3-\gamma_3|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise son eşitsizlik gereğince

$$\|y-z\| \geq \frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1}|t_3-\gamma_3| + \beta b_2\delta + \beta(1-b_2)\delta$$

$$-\beta(1-b_2)\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}\right)|t_3-\gamma_3|$$

$$\geq \left[\frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1} - \beta(1-b_2)\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}\right)\right]|t_3-\gamma_3| + \beta\delta$$
$$\geq \left[\frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1} - \beta(1-b_2)\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}\right) + 1\right]\delta$$
$$\geq \frac{(\alpha+2\beta)b_1b_2\delta}{b_1+b_2}$$

dir.

Alt durum 2.3.2: $\frac{b_1b_2\delta}{b_1+b_2} < |t_3-\gamma_3|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise

$$\|y-z\| \geq \frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1}|t_3-\gamma_3| + \beta b_2\delta + \beta(1-b_2)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$
$$\geq \frac{(\alpha+2\beta)b_1b_2\delta}{b_1+b_2}$$

elde edilir.

Alt durum 2.4: $|t_4-\gamma_4| \geq b_1|t_1-\gamma_1|$, $|t_4-\gamma_4| \geq b_2|t_2-\gamma_2|$ ve $\forall k \geq 5$ için $|t_4-\gamma_4| \geq |t_k-\gamma_k|$ olsun.

Bu durumda,

$$\|y-z\| = \alpha|t_4-\gamma_4| + \beta(b_1-b_2)|t_1-\gamma_1| + \beta b_2|t_1-\gamma_1| + \beta b_2|t_2-\gamma_2|$$
$$+\beta|t_3-\gamma_3| + \beta\sum_{k=4}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$
$$\geq \alpha|t_4-\gamma_4| + \beta(b_1-b_2)\frac{1}{b_1}|t_4-\gamma_4| + \beta b_2|t_1-\gamma_1| + \beta b_2|t_2-\gamma_2|$$
$$+\beta\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$
$$\geq \frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1}|t_4-\gamma_4| + \beta b_2|t_1-\gamma_1| + \beta b_2|t_2-\gamma_2| + \beta\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$
$$\geq \frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1}|t_4-\gamma_4| + \beta b_2\sum_{k=1}^{\infty}|t_k-\gamma_k| + \beta(1-b_2)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$
$$\geq \frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1}|t_4-\gamma_4| + \beta b_2\delta + \beta(1-b_2)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$
$$\geq \frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1}|t_4-\gamma_4| + \beta b_2\delta + \beta(1-b_2)|\delta-(t_1-\gamma_1)-(t_2-\gamma_2)|$$

$$\geq \frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1}|t_4-\gamma_4|+\beta b_2\delta+\beta(1-b_2)\delta-\beta(1-b_2)|t_1-\gamma_1|$$
$$-\beta(1-b_2)|t_2-\gamma_2|$$
$$\geq \frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1}|t_4-\gamma_4|+\beta b_2\delta+\beta(1-b_2)\delta-\beta(1-b_2)\frac{1}{b_1}|t_4-\gamma_4|$$
$$-\beta(1-b_2)\frac{1}{b_2}|t_4-\gamma_4|$$
$$\geq \frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1}|t_4-\gamma_4|+\beta b_2\delta+\beta(1-b_2)\delta-\beta(1-b_2)\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}\right)|t_4-\gamma_4|$$

dir.

Alt durum 2.4.1: $\frac{b_1b_2\delta}{b_1+b_2}\geq|t_4-\gamma_4|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise son eşitsizlik gereğince

$$\|y-z\|\geq \frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1}|t_4-\gamma_4|+\beta b_2\delta+\beta(1-b_2)\delta$$
$$-\beta(1-b_2)\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}\right)|t_4-\gamma_4|$$
$$\geq\left[\frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1}-\beta(1-b_2)\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}\right)\right]|t_4-\gamma_4|+\beta\delta$$
$$\geq\left[\frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1}-\beta(1-b_2)\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}\right)+\beta\right]\delta$$
$$\geq\frac{(\alpha+2\beta)b_1b_2\delta}{b_1+b_2}$$

dir.

Alt durum 2.4.2: $\frac{b_1b_2\delta}{b_1+b_2}<|t_4-\gamma_4|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise

$$\|y-z\|\geq \frac{(\alpha+\beta)b_1-\beta b_2}{b_1}|t_4-\gamma_4|+\beta b_2\delta+\beta(1-b_2)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$
$$\geq\frac{(\alpha+2\beta)b_1b_2\delta}{b_1+b_2}$$

elde edilir.

Dolayısıyla, bu şekilde devam edilir ve tüm durumlar sonucunda görülür ki $\|y-z\|\geq\frac{(\alpha+2\beta)b_1b_2\delta}{b_1+b_2}$ dir.

Sonuç 3.13 $b_1,\ b_2 \in (0,1)$, $2b_1 \geq b_2$ ve $b_2 \geq b_1$ olsun. $f_1 := b_1\, e_1$, $f_2 := b_2\, e_2$ ve her $n \geq 3$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde c_0' da bir $(f_n)_{n\in N}$ dizisi tanımlansın ve daha sonra ℓ^1' de kapalı, sınırlı, konveks olan aşağıdaki $E = E_b$ kümesi ele alınsın:

Bu durumda E kümesi afin $|||.|||$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

Örnek 3.14 $b \in (0,1)$ olsun. $f_1 := be_1$, $f_2 := be_2$, $f_3 := b\, e_3$ ve her $n \geq 4$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde c_0' da bir $(f_n)_{n\in N}$ dizisi tanımlansın ve daha sonra ℓ^1' de kapalı, sınırlı, konveks olan aşağıdaki $E = E_b$ kümesi ele alınsın:

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n :\ her\ \ t_n \geq 0\ \ ve\ \ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Teorem 3.15 Yukarıdaki örnekte verilen E alt kümesi afin $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir öyle ki burada $\|.\|$ normu ℓ^1 üzerinde alışılmış normuna eş değer şekilde $\|x\| = \beta\ \|x\|_1 + \alpha\ \|x\|_\infty,\ \forall x \in \ell^1$ olarak $\beta \geq \alpha > 0$ için tanımlıdır.

İspat. İspat için Teorem 2.3'de uygulanan teknik aynen uygulanır ve iki farklı durum incelenir. Birinci ve ikinci durumda tamamen benzerlikler içermektedir. Dolayısıyla konunun daha hızlı akışı amacıyla ispatta yer alan farklılıklar bu ispatta aşağıdaki şekilde sunulabilir.

Burada bu defa

$$h_\lambda := (\gamma_1 + \frac{\lambda}{2}\delta) f_1 + (\gamma_2 + \frac{\lambda}{2}\delta) f_2 + (\gamma_3 + (1-\lambda)\delta) f_3 + \sum_{n=4}^{\infty} \gamma_n f_n$$

olarak tanımlanır. Bu durumda ise

$$\|h_\lambda - z\| = \left\| \left(\frac{\lambda}{2} b\delta, \frac{\lambda}{2} b\delta, (1-\lambda)\delta b, 0, 0, \cdots \right) \right\|$$

$$= \alpha b\delta max \left\{ \frac{|\lambda|}{2}, |1-\lambda| \right\} + \beta b\delta|\lambda| + \beta b\delta|1-\lambda|$$

$$= max \begin{cases} (\alpha+\beta)(1-\lambda)b\delta - \beta\lambda b\delta & eğer\ \lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \quad 0\right) ise, \\ (\alpha+\beta)(1-\lambda)b\delta + \beta\lambda b\delta & eğer\ \lambda \in \left[0, \quad \frac{2}{3}\right) ise, \\ \beta b\delta + \frac{\alpha b\delta\lambda}{2} & eğer\ \lambda \in \left[\frac{2}{3}, \quad 1\right) ise, \\ \frac{(\alpha+4\beta)b\delta\lambda}{2} - \beta b\delta & eğer\ \lambda \in \left[1, \quad \frac{\gamma_3}{\delta}+1\right]\ ise \end{cases}$$

elde edilir.

Ayrıca,

$$\|y-z\| = (t_1-\gamma_1)be_1 + (t_2-\gamma_2)be_2 + (t_3-\gamma_3)be_3 + (t_4-\gamma_4)e_4 + \cdots$$

$$= max \left\{ \begin{array}{l} (\alpha+\beta)b|t_1-\gamma_1| + \beta b|t_2-\gamma_2| + \beta b|t_3-\gamma_3| \\ \quad +\beta|t_4-\gamma_4| + \beta|t_5-\gamma_5| + \cdots\ , \\ (\alpha+\beta)b|t_2-\gamma_2| + \beta b|t_1-\gamma_1| + \beta b|t_3-\gamma_3| \\ \quad +\beta|t_4-\gamma_4| + \beta|t_5-\gamma_5| + \cdots\ , \\ (\alpha+\beta)b|t_3-\gamma_3| + \beta b|t_1-\gamma_1| + \beta b|t_2-\gamma_2| \\ \quad +\beta|t_4-\gamma_4| + \beta|t_5-\gamma_5| + \cdots\ , \\ (\alpha+\beta)|t_4-\gamma_4| + \beta b|t_1-\gamma_1| + \beta b|t_2-\gamma_2| \\ \quad +\beta b|t_3-\gamma_3| + \beta|t_5-\gamma_5| + \cdots\ , \\ (\alpha+\beta)|t_5-\gamma_5| + \beta b|t_1-\gamma_1| + \beta b|t_2-\gamma_2| \\ +\beta b|t_3-\gamma_3| + \beta|t_4-\gamma_4| + \beta|t_6-\gamma_6| + \cdots\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

O halde, ele alınacak aşağıdaki durumlar söz konusudur.

Alt durum 2.1: $|t_1-\gamma_1| \geq |t_2-\gamma_2|$, $|t_1-\gamma_1| \geq |t_3-\gamma_3|$ ve $\forall k \geq 4$ için $b|t_1-\gamma_1| \geq |t_k-\gamma_k|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda,

$$\|y-z\| = \alpha b|t_1-\gamma_1| + \beta b\sum_{k=1}^{\infty}|t_k-\gamma_k| + \beta(1-b)\sum_{k=4}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\geq \beta b\delta + \alpha b|t_1-\gamma_1| + \beta(1-b)\sum_{k=4}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\geq \beta b\delta + \alpha b|t_1-\gamma_1| + \beta(1-b)|\delta - (t_1-\gamma_1) - (t_2-\gamma_2)|$$

$$\geq \beta\delta + [(2b-2)\beta + b\alpha]|t_1-\gamma_1|$$

dir.

Alt durum 2.1.1: $\frac{\delta}{3} \geq |t_1 - \gamma_1|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise son eşitsizlik gereğince $\|y - z\| \geq \frac{(\alpha+3\beta)b\delta}{3}$ dir.

Alt durum 2.1.2: $\frac{\delta}{3} < |t_1 - \gamma_1|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise

$$\|y - z\| \geq \beta b\delta + \alpha b|t_1 - \gamma_1| + \beta(1-b)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k - \gamma_k| \geq \frac{(\alpha+3\beta)b\delta}{3}$$

elde edilir.

Alt durum 2.2: $|t_2 - \gamma_2| \geq |t_1 - \gamma_1|$, $|t_2 - \gamma_2| \geq |t_3 - \gamma_3|$ ve $\forall k \geq 4$ için $b|t_2 - \gamma_2| \geq |t_k - \gamma_k|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|y - z\| &= \alpha b|t_2 - \gamma_2| + \beta b\sum_{k=1}^{\infty}|t_k - \gamma_k| + \beta(1-b)\sum_{k=4}^{\infty}|t_k - \gamma_k| \\
&\geq \beta b\delta + \alpha b|t_2 - \gamma_2| + \beta(1-b)\sum_{k=4}^{\infty}|t_k - \gamma_k| \\
&\geq \beta b\delta + \alpha b|t_2 - \gamma_2| + \beta(1-b)|\delta - (t_1 - \gamma_1) - (t_2 - \gamma_2)| \\
&\geq \beta\delta + [(2b-2)\beta + b\alpha]|t_2 - \gamma_2|
\end{aligned}$$

elde edilir.

Alt durum 2.2.1: $\frac{\delta}{3} \geq |t_2 - \gamma_2|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise son eşitsizlik gereğince $\|y - z\| \geq \frac{(\alpha+3\beta)b\delta}{3}$ dir.

Alt durum 2.2.2: $\frac{\delta}{3} < |t_2 - \gamma_2|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise

$$\|y - z\| \geq \beta b\delta + \alpha b|t_2 - \gamma_2| + \beta(1-b)\sum_{k=3}^{\infty}|t_k - \gamma_k| \geq \frac{(\alpha+3\beta)b\delta}{3}$$

elde edilir.

Alt durum 2.3: $|t_3 - \gamma_3| \geq |t_1 - \gamma_1|$, $|t_3 - \gamma_3| \geq |t_2 - \gamma_2|$ ve $\forall k \geq 4$ için $b|t_3 - \gamma_3| \geq |t_k - \gamma_k|$ olsun.

Bu durumda,

$$\|y-z\| = \alpha b|t_3-\gamma_3| + \beta b\sum_{k=1}^{\infty}|t_k-\gamma_k| + \beta(1-b)\sum_{k=4}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\geq \beta b\delta + \alpha b|t_3-\gamma_3| + \beta(1-b)\sum_{k=4}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\geq \beta b\delta + \alpha b|t_3-\gamma_3| + (1-b)|\delta-(t_1-\gamma_1)-(t_2-\gamma_2)-(t_3-\gamma_3)|$$

$$\geq \beta\delta + [(3b-3)\beta + b\alpha]|t_3-\gamma_3|$$

dir.

Alt durum 2.3.1: $\frac{\delta}{3} \geq |t_3-\gamma_3|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise son eşitsizlik gereğince $\|y-z\| \geq \frac{(\alpha+3\beta)b\delta}{3}$ dir.

Alt durum 2.3.2: $\frac{\delta}{3} < |t_3-\gamma_3|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise

$$\|y-z\| \geq \beta b\delta + \alpha b|t_3-\gamma_3| + \beta(1-b)\sum_{k=4}^{\infty}|t_k-\gamma_k| \geq \frac{(\alpha+3\beta)b\delta}{3}$$

elde edilir.

Alt durum 2.4: $|t_4-\gamma_4| \geq b|t_1-\gamma_1|$, $|t_4-\gamma_4| \geq b|t_2-\gamma_2|$, $|t_4-\gamma_4| \geq b|t_3-\gamma_3|$ ve $\forall k \geq 5$ için $|t_4-\gamma_4| \geq |t_k-\gamma_k|$ olsun.

Bu durumda,

$$\|y-z\| = \alpha|t_4-\gamma_4| + \beta b\sum_{k=1}^{\infty}|t_k-\gamma_k| + \beta(1-b)\sum_{k=4}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\geq \beta b\delta + \alpha|t_4-\gamma_4| + \beta(1-b)\sum_{k=4}^{\infty}|t_k-\gamma_k|$$

$$\geq \beta b\delta + \alpha|t_4-\gamma_4| + \beta(1-b)|\delta-(t_1-\gamma_1)-(t_2-\gamma_2)-(t_3-\gamma_3)|$$

$$\geq \beta b\delta + \alpha|t_4-\gamma_4| + \beta(1-b)\delta - \frac{3\beta(1-b)}{b}|t_4-\gamma_4|$$

$$\geq \beta\delta + \frac{(3b-3)\beta + b\alpha}{b}|t_4-\gamma_4|$$

dir.

Alt durum 2.4.1: $\frac{b\delta}{3} \geq |t_3-\gamma_3|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise son eşitsizlik gereğince $\|y-z\| \geq \frac{(\alpha+3\beta)b\delta}{3}$ dir.

Alt durum 2.4.2: $\frac{b\delta}{3} < |t_4 - \gamma_4|$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda ise

$\|y - z\| \geq \beta b\delta + \alpha|t_4 - \gamma_4| + \beta(1 - b)\sum_{k=4}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \geq \frac{(\alpha+3\beta)b\delta}{3}$

elde edilir.

Dolayısıyla, bu şekilde devam edilir ve tüm durumlar sonucunda görülür ki $\|y - z\| \geq \frac{(\alpha+3\beta)b\delta}{3}$ dir.

<u>Sonuç 3.16</u> $N > 3$ ve $b \in (0,1)$ keyfi olsun. $f_1 := b\, e_1$, $f_2 := b\, e_2$, $f_3 := b\, e_3, \cdots, f_N := b\, e_N$ ve her $n \geq N + 1$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde c_0' da bir $(f_n)_{n\in N}$ dizisi tanımlansın ve daha sonra ℓ^1' de kapalı, sınırlı, konveks olan aşağıdaki $E = E_b$ kümesi ele alınsın:

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n :\ her\ t_n \geq 0\ ve\ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Bu durumda E kümesi afin $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

<u>İspat.</u> İspat için Teorem 2.3'de uygulanan teknik aynen uygulanır ve sadece durum 2 de aşağıdaki değişiklik gerçekleşecektir.

$$h_\lambda := (\gamma_1 + \frac{\lambda}{N-1}\delta)f_1 + (\gamma_2 + \frac{\lambda}{N-1}\delta)f_2 + \cdots + (\gamma_{N-1} + \frac{\lambda}{N-1}\delta)f_{N-1}$$
$$+(\gamma_N + (1-\lambda)\delta)f_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} \gamma_n f_n .$$

$\Gamma := \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} \|h_\lambda - z\|$ olarak tanımlandığında $\|h_\lambda - z\|$ değeri $\lambda \in [0,1]$ iken bir tek minumuma sahiptir öyleki bu minimum değer $\Gamma = \frac{(\alpha+N\beta)b\delta}{N}$.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmanın sonuçları dejenere edilmiş Lorentz-Marcinkiewicz uzaylarında ve genelleştirilmelerinde zayıf*-kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş sonsuz boyutlu bazı alt uzayların afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip oldukları gösterilmiştir. Bu sayede Goebel ve Kuczumow'un yansımayan Banach uzayı mutlak toplanabilir diziler uzayında yaptıkları çalışmanın [9] bir analojisi bir başka yansımayan Banach uzayında afinlik koşulu altında elde edilmiştir. Unutulmamılıdır ki Goebel ve Kuczumow'un çalışması [9], Lin [15] çalışması ile yine aynı uzayda çalışılarak yeniden normlanma ile genelleştirilmiş; Goebel ile Kuczumow'un çalışmasından ilham alınarak Lin [15] çalışmasında tüm uzayın sabit nokta teorisini sağlayacak şekilde yeniden normlanabileceği ispatlandığı sonuç sabit nokta teorisinde bir yansımayan Banach uzayının sabit nokta teorisini sağlayacak şekilde yeniden normlanabileceğinin gösterildiği literatürde önemli bulunmuş bir çalışma olmuştur. Tez çalışmasının incelemiş olduğu ailelerin daha genişini bulabilmek ve hatta tüm uzayı Lin [15] çalışmasındaki gibi sabit nokta teorisini sağlayacak şekilde yeniden normlayabilmek araştırmacılar için önemli araştırma konusu olacaktır. Çalışmada elde edilen sınıfları genelliştirmek de sorgulanabilecek bir konudur.

KAYNAKLAR

[1] Alspach, D. E. (1981). A fixed point free nonexpansive map. Proceedings of the American Mathematical Society, 82(3), 423-424.

[2] Astashkin, S. V., & Sukochev, F. A. (2007). Banach–Saks property in Marcinkiewicz spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 336(2), 1231-1258.

[3] Benavides, T. D. (2009). A renorming of some nonseparable Banach spaces with the fixed point property. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 350(2), 525-530.

[4] de Buen, B. G., & Núñez-Medina, F. (2013). A generalization of a renorming theorem by Lin and a new nonreflexive space with the fixed point property which is nonisomorphic to l1. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 405(1), 57-70.

[5] Brouwer, L. E. J. (1911). Über abbildung von mannigfaltigkeiten. Mathematische Annalen, 71(1), 97-115.

[6] Dowling, P., & Lennard, C. (1997). Every nonreflexive subspace of L_1 [0, 1] fails the fixed point property. Proceedings of the American Mathematical Society, 125(2), 443-446.

[7] Dowling, P. N., Lennard, C. J., & Turett, B. (1998). Asymptotically Isometric Copies of c_0 in Banach Spaces. Journal of mathematical analysis and applications, 219(2), 377-391.

[8] Everest, T. (2013). Fixed Points of Nonexpansive Maps on Closed, Bounded, Convex Sets in l^1 (Doctoral dissertation, University of Pittsburgh).

[9] Goebel, K., & Kuczumow, T. (1979). Irregular convex sets with fixed-point property for nonexpansive mappings. In Colloquium Mathematicum (Vol. 2, No. 40, pp. 259-264).

[10] James, R. C. (1964). Uniformly non-square Banach spaces. Annals of Mathematics, 542-550.

[11] Kirk, W. A. (1965). A fixed point theorem for mappings which do not increase distances. The American mathematical monthly, 72(9), 1004-1006.

[12] Lennard, C., & Nezir, V. (2014). Reflexivity is equivalent to the perturbed fixed point property for cascading nonexpansive maps in Banach lattices. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 95, 414-420.

[13] Lennard, C., & Nezir, V. (2017). Semi-strongly asymptotically non-expansive mappings and their applications on fixed point theory. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 46(4), 613-620.

[14] Lin, P. K. (1985). Unconditional bases and fixed points of nonexpansive mappings. Pacific Journal of Mathematics, 116(1), 69-76.

[15] Lin, P. K. (2008). There is an equivalent norm on ℓ^1 that has the fixed point property. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 68(8), 2303-2308.

[16] Lindenstrauss, J., & Tzafriri, L. (1977). Classical Banach spaces I: Sequence spaces, Ergebnisse der Mathematik (Vol. 92). Springer-Verlag.

[17] Lorentz, G. G. (1950). Some new functional spaces. Annals of Mathematics, 37-55.

[18] Nezir, V. (2012). Fixed Point Properties for c_0-like Spaces (Doctoral dissertation, University of Pittsburgh).

[19] Nezir, V. (2018). Fixed Point Properties for a degenarate Lorentz-Marcinkiewicz Space. Submıtted.

[20] Nezir, V., Dutta, H., Delibaş, M. (2018). Large classes with the fixed point property in a degenerate Lorentz-Marcinkiewicz space. Submitted.

[21] Nezir, V. and Mustafa, N. (2018). c_0 can be renormed to have the fixed point property for affine nonexpansive mappings, Filomat, 32(16), 5645-5663.

[22] Nezir, V. and Mustafa, N. (2018). On the fixed point property for a degenarate Lorentz-Marcinkiewicz space, ICRAPAM 2018 Conference Proceedings, Karadeniz Teknik Üniversitesi, July 23-27, 2018, Trabzon.

[23] Nezir, V., Mustafa, N., Delibaş, M. (2018). Infinite dimensional subspaces of a degenerate Lorentz-Marcinkiewicz space with the fixed point property, ICRAPAM 2018 Conference Proceedings, Karadeniz Teknik Üniversitesi, July 23-27, 2018, Trabzon.

[24] Rakov, S. A. (1979). Banach-Saks property of a Banach space. Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, 26(6), 909-916.

[25] Rakov, S. A. (1982). Banach-Saks exponent of certain Banach spaces of sequences. Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, 32(5), 791-797.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Merve DELİBAŞ

Doğum Yeri ve Tarihi : Artvin/Yusufeli 05.10.1991

Yabancı Dili : Orta derece İngilizce

İletişim (e-posta) : mrvedlbs@yahoo.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Fener Lisesi-2009

Lisans : Kafkas Üniversitesi-2015

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi-2018

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : 2014-2015 MEB Kasım Kurşunoğlu Ortaokulu ücretli öğretmenlik, 2015 Avrupa Birliği Projesi, Çözüm Akademi Ortaokulu 2016-2019

Yayınları:

Nezir, V., Mustafa, N., Delibaş, M. (2018). Infinite dimensional subspaces of a degenerate Lorentz-Marcinkiewicz space with the fixed point property, ICRAPAM 2018 Conference Proceedings, Karadeniz Teknik Üniversitesi, July 23-27, 2018, Trabzon.

Nezir, V., Dutta, H., Delibaş, M. (2018). Large classes with the fixed point property in a degenerate Lorentz-Marcinkiewicz space. Hakem değerlendirmesinde.