T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ MITTAG-LEFFLER FONKSİYONUNUN KOMŞULUK ÖZELLİKLERİ

Elif KAYA BÜYÜKYURT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR

ŞUBAT-2019
KARS

T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ MITTAG-LEFFLER FONKSİYONUNUN KOMŞULUK ÖZELLİKLERİ

Elif KAYA BÜYÜKYURT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç Dr. Murat ÇAĞLAR

ŞUBAT-2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Elif KAYA BÜYÜKYURT'un Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Genelleştirilmiş Mittag-Leffler Fonksiyonunun Komşuluk Özellikleri" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ..birliği.... ile kabul edilmiştir.

04/02/2019

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA	....
Üye	: Doç. Dr. Birol GÜNDÜZ	....
Üye	: Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Elif KAYA BÜYÜKYURT

04.02.2019

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

GENELLEŞTİRİLMİŞ MITTAG-LEFFLER FONKSİYONUNUN KOMŞULUK ÖZELLİKLERİ

Elif KAYA BÜYÜKYURT

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR

Bu tez çalışmasında, ilk olarak, $\tilde{E}^{\beta}_{\lambda,\mu}(z)$ normalize edilmiş genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu ve Hadamard çarpımı yardımıyla yeni bir $\varepsilon^{\beta}_{\lambda,\mu}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ operatörü tanımlanmıştır. Daha sonra, bu operatörü kullanarak U birim diskinde analitik fonksiyonların $\mathcal{M}^{n}_{\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\gamma)$ ve $\mathcal{S}^{n}_{\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ iki yeni alt sınıfları elde edilmiştir ve bu sınıflara ait fonksiyonlar için katsayı eşitsizlikleri, içerme bağıntıları ve komşuluk problemleri incelenmiştir.

2019, 57 sayfa

Anahtar Kelimeler: Analitik ve ünivalent fonksiyon, Yıldızıl ve konveks fonksiyon, Katsayı eşitsizliği, Komşuluk problemi, Mittag-Leffler fonksiyonu.

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

NEIGHBORHOOD PROPERTIES OF GENERALIZED MITTAG-LEFFLER FUNCTION

Elif KAYA BÜYÜKYURT

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR

In this thesis, firstly, we defined a new operator $\varepsilon^{\beta}_{\lambda,\mu} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ by means of Hadamard product and normalized generalized Mittag-Leffler function. Later, we investigated coefficient inequalities, inclusion relations and neighborhood problems by defining two new subclasses $\mathcal{M}^{n}_{\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\gamma)$ and $\mathcal{S}^{n}_{\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ of analytic functions involving this operator in the open unit disk U .

2019, 57 pages

Key Words: Analytic and univalent functions, Starlike andc onvex functions, Coefficient inequalities, Neighborhood problem, Mittag-Leffler function.

ÖNSÖZ

Tez çalışması sırasında her türlü bilgi, teşvik ve deneyimleri ile yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR'a ve yüksek lisans eğitimim süresince her türlü maddi ve manevi destekleri ile göstermiş oldukları sabırdan dolayı eşim Cengizhan BÜYÜKYURT'a, oğluma, kızıma, anneme ve babama teşekkür ederim.

Elif KAYA BÜYÜKYURT

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

U	$U=\{z:z\in\mathbb{C}\ ve\ \lvert z\rvert<1\}$ şeklindeki açık birim disk
$\mathcal{A}$	U birim diskinde analitik olan $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
$\mathcal{A}(n)$	U birim diskinde analitik olan $f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
$(a)_n$	Pochhammer Sembolü
Γ	Gama fonksiyonu
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$f\prec g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir
$f*g$	f ile g fonksiyonlarının Hadamard çarpımı
$\mathcal{H}$	U birim diskinde analitik olan fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{H}[a,n]$	U birim diskinde analitik olan $f(z)=a+\sum_{k=n}^{\infty}a_k z^k$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
$\mathcal{S}$	U birim diskinde ünivalent olan normalize $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
$\mathcal{S}^*$	U birim diskinde yıldızıl fonksiyonların kümesi
$\mathcal{S}^*(\alpha)$	U birim diskinde $\alpha-$mertebeden yıldızıl fonksiyonların kümesi
$\mathcal{S}^*(\alpha,\gamma)$	U birim diskinde $\alpha-$mertebeden γ kompleks değerli yıldızıl fonksiyonların kümesi
$\mathcal{K}$	U birim diskinde konveks fonksiyonların kümesi
$\mathcal{K}(\alpha)$	U birim diskinde $\alpha-$mertebeden konveks fonksiyonların kümesi
$\mathcal{K}(\alpha,\gamma)$	U birim diskinde $\alpha-$mertebeden γ kompleks değerli konveks fonksiyonların kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathcal{N}_{\delta}(f)$	f fonksiyonunun δ-komşuluğu
$\mathcal{N}_{n,\delta}(f)$	f fonksiyonunun (n,δ)-komşuluğu
$\mathcal{P}$	Pozitif reel kısma sahip analitik fonksiyonlar sınıfı
$\operatorname{Re} f(z)$	f fonksiyonunun reel kısmı
$\mathcal{V}$	Schwarz fonksiyonlarının sınıfı
$E_{\lambda}(z)$	Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\lambda,\mu}^{\beta}(z)$	Genelleştirlmiş Mittag-Leffler fonksiyonu
$\tilde{E}_{\lambda,\mu}^{\beta}(z)$	Normalize edilmiş genelleştirlmiş Mittag-Leffler fonksiyonu
$\varepsilon_{\lambda,\mu}^{\beta}$	$\varepsilon_{\lambda,\mu}^{\beta} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ operatörü

1. GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Geometrik fonksiyonlar teorisinin araştırma konusu kompleks değerli fonksiyonların resim bölgelerine bakarak bu fonksiyonların analitiklik özelliklerini incelemektir. Görüntü kümeleri önemli özellikler taşıyan fonksiyonlar çeşitli sınıflara ayrılmıştır. Bilim adamlarının birçoğu da bu sınıflara ait kriterler elde etmeye çalışmışlardır. Bu sınıflardan en çok üzerinde durulanları ünivalent, konveks, yıldızıl, ... vb. fonksiyonlardır. Analitik ve ünivalent fonksiyonlar, geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli ve ilgi çeken konularıdır.

Kompleks düzlemin basit bağlantılı bir öz altkümesini birim diske konform tasvir eden bir dönüşümün varlığı Riemann dönüşüm teoremi ile anlaşılmıştır. Bu nedenle keyfi basit bağlantılı bölgeler üzerinde tanımlanan ünivalent fonksiyonlarla çalışmak yerine birim diskte tanımlanan ünivalent fonksiyonlarla çalışmak çoğu kez kolaylık sağlar. Bu yüzden bu alanda çalışma yapan birçok bilim adamı birim diskte tanımlanan fonksiyonları incelemişlerdir.

Ünivalent fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar,

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

birim diskinde ünivalent ve $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ şartlarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu bir $\mathcal{S}$ ünivalent fonksiyonlar sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır.

1907 yılında Koebe [20], $n = 2$ için $\mathcal{S}$ sınıfına ait $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ tipindeki bir fonksiyonun resminin $\left\{z : |z| < \frac{1}{4}\right\}$ diskini içerdiği sonucuna varmıştır. Bir başka deyişle

U birim diskinin $f \in \mathcal{S}$ altındaki görüntüsü olan kümenin sınırının orijine olan uzaklığının $1/4$ ten küçük olamayacağını ispatlamıştır.

Bieberbach [5] tarafından ortaya atılan " $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu için $n = 2,3,...$ olmak üzere $|a_n| \le n$ eşitsizliği sağlanır" tahmini uzun süre matematikçilerin çalıştığı bir problem olmuştur. Alan teoreminin bir sonucu olarak $|a_2| \le 2$ eşitsizliğinin doğruluğu ilk olarak Bieberbach tarafından 1916'da ispatlanmıştır. Daha sonra Loewner [23] 1923'te parametrik metod olarak isimlendirdiği kendi buluşuyla $|a_3| \le 3$ eşitsizliğini, 1955'te Schiffer ve Garabedian, Grunsky eşitsizliklerini kullanarak $|a_4| \le 4$ eşitsizliğini, 1968'de Pederson $|a_6| \le 6$ ve 1972'de Pederson ve Schiffer $|a_5| \le 5$ eşitsizliğini ispat etmiştir. Bu tahminin genelleştirilmiş hali yıllarca matematikçilerin üzerinde çalıştığı bir konu olmuştur. 1985'te nihayet L. De-Branges, Loewner teorisini kullanarak bütün $n = 2,3,...$ için $|a_n| \le n$ eşitsizliğinin doğrulunu ispatlamıştır.

Bieberbach tahminin ispatlanmasından sonra bu konuyla ilgilenen matematikçiler $\mathcal{S}$ sınıfının bazı alt sınıfları için bir takım katsayı bağıntıları elde etmişlerdir. Bu alt sınıfların en önemlerinden bazıları yıldızıl ve konveks fonksiyonlar sınıflarıdır.

Geometrik fonksiyonlar teorisinde pek çok araştırmacı tarafından ele alınan önemli problemlerden bir diğeri de analitik fonksiyonlar için yeni komşuluk tanımları verilerek bu komşulukların incelenmesidir. $\mathcal{A}$ sınıfına ait f fonksiyonlarının komşuluklarıyla ilgili ilk çalışma 1957 de Goodman [16] tarafından yapılmıştır. Ruscheweyh [34], Goodman [16] tarafından verilen komşuluk tanımını daha genel hale getirerek $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarının $\delta -$komşuluğu kavramını tanımlamıştır. 1985'de Brown [6], Ruscheweyh tarafından elde edilen sonuçları genelleştirmiştir. 1990'da Walker [37] pozitif reel kısma sahip analitik fonksiyonların komşuluklarını ele almış ve Walker tarafından verilen sonuçlar 1993 te Owa *et al.* [31] tarafından genişletilmiştir. 1996 da, negatif katsayılı $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarının $(n,\delta)-$komşuluğu Altıntaş and Owa [2] tarafından verilmiştir. Son yıllarda ise Orhan and Kadıoğlu [28], Orhan and Kamali [29], Orhan [30], Cataş [8], Deniz and Orhan [11, 12], Liu and Huang [22], Sağsöz and Kamali

[35], Bulut [7], Orhan [27], Zirar [38], Çağlar and Orhan [10] ve Ebadin and Kargar [14] analitik fonksiyonların belli alt sınıflarının komşuluğu problemi üzerine önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan genel bilgilerde ilk olarak çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde tezin temel kısmının oluşturulmasında kullanılan bazı önemli tanımlar, teoremler ve lemmalar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlara yer verilmiştir. İlk olarak $\varepsilon_{\lambda,\mu}^{\beta} f(z)$ operatörü kullanılarak $\mathcal{A}(n)$ sınıfına ait fonksiyonların $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ ve $\mathcal{S}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ gibi iki yeni alt sınıfları tanımlanmış, bu sınıflara ait katsayı eşitsizlikleri, içerme bağıntıları ve komşuluk problemleri için teoremler verilmiş ve ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde ise çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçların bir özeti verilmiştir.

1.2 Kuramsal Temeller

Bu bölümde bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.2.1 (Komşuluk): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı açık disk veya z_0 noktasının ε komşuluğu denir.

$$\overline{D(z_0, \varepsilon)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı kapalı disk,

$$\partial D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı çember,

$$\overset{o}{D}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\} = D(z_0, \varepsilon) - \{z_0\}$$

kümesine de z_0 noktasının ε delinmiş komşuluğu denir.

Tanım 1.2.2 (İç Nokta): $A \subset \mathbb{C}$ boş olmayan bir küme olsun. $z_0 \in A$ için $D(z_0, \varepsilon) \subseteq A$ olacak şekilde $\exists \varepsilon > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 1.2.3 (Açık ve Kapalı Küme): Her noktası iç nokta olan kümeye açık küme, tümleyeni açık olan kümeye ise kapalı küme denir.

Tanım 1.2.4 (Bağlantılı Küme): $A \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. A kümesi boş olmayan ayrık ve açık iki kümenin birleşimi olarak gösterilemiyorsa A kümesine bağlantılıdır denir.

Yani,

i. $A \subseteq U \cup V$,

ii. $A \cap U \neq \varnothing$ ve $A \cap V \neq \varnothing$,

iii. $A \cap U \cap V = \varnothing$

olacak şekilde $U, V \subset \mathbb{C}$ gibi boş olmayan iki açık küme bulunamıyorsa A kümesine bağlantılı küme denir.

Tanım 1.2.5 (Bölge): Kompleks düzlemde boş olmayan, açık ve bağlantılı kümeye bölge denir.

Tanım 1.2.6 (Basit Bağlantılı Küme): Tümleyeni bağlantılı olan kümeye basit bağlantılı küme denir.

Tanım 1.2.7 (Eğri): $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde eğri (yol) denir. Başka bir ifade ile $[a,b]$ kapalı aralığından herhangi bir topolojik uzaya tanımlı sürekli dönüşümlere eğri ya da yol denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

Tanım 1.2.8 (Kapalı Eğri): $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ bir eğri olsun. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya kapalı eğri denir.

Tanım 1.2.9 (Basit Kapalı Eğri): Uç noktaların çakışması hariç, kendini kesmeyen eğrilere basit eğri, hem basit hem de kapalı eğrilere de basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi denir. Jordan eğrisi düzlemi Jordan eğrisinin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayırır. Jordan eğrisinin içine Jordan bölgesi denir. γ eğrisi $[a,b]$ kapalı aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $[a,b]$ kapalı aralığında γ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir. t, a dan b ye artarken, buna karşılık gelen $\gamma(t)$ değerlerinin $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ ye doğru sıralanması eğrinin yönünü belirtir. Kapalı bir eğrinin yönü ya pozitif veya negatiftir. Kapalı olmayan eğriler için başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru sıralama yön olarak alınır.

1.2.1 Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Tanım 1.2.1.1 (Diferensiyellenebilme): $A \subseteq \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0, A'nın bir iç noktası olsun. Eğer,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti var ise f fonksiyonuna z_0 noktasında diferensiyellenebilirdir denir. Bu limit değerine f fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi denir ve $f'(z_0)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.1.2 (Analitik Fonksiyon): $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemde bir z_0 noktasında ve z_0 noktasının uygun bir komşuluğundaki her noktada diferensiyellenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

A kompleks düzlemin boş olmayan açık bir alt kümesi ve f fonksiyonu tanım kümesi A'yı kapsayan kompleks değerli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu A kümesine ait her noktada diferensiyellenebilir ise f fonksiyonu A kümesinde analitiktir (veya holomorftur) denir. Tanım kümesi açık bir küme ve bu kümede analitik olan fonksiyonlara analitik fonksiyon denir [32].

Kompleks düzlemin tamamında analitik olan fonksiyona tam fonksiyon denir. Örneğin; $f(z) = e^z$, $g(z) = \cos z$ birer tam fonksiyondur. $h(z) = \log z$, $k(z) = \dfrac{1}{z}$ tam fonksiyon değildir.

U birim diskinde analitik olan fonksiyonların sınıfını $\mathcal{H} = \mathcal{H}(U)$ biçiminde gösterelim. $n \in \mathbb{N}_0$ ve $a, a_n, a_{n+1}, \ldots \in \mathbb{C}$ için

$$\mathcal{H}[a,n] = \{ f \in \mathcal{H} : f(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots \}$$

olsun.

<u>Tanım 1.2.1.3:</u> f fonksiyonu $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonuna normalize edilmiş fonksiyon denir [13].

U birim diskinde analitik normalize edilmiş

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} z^{n+1} \qquad (a_{n+1} \in \mathbb{C}) \tag{1.2.1.1}$$

biçimindeki fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{A} = \{ f \in \mathcal{H} : f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \}$$

şeklinde tanımlanır.

$$f(z) = z - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} z^{n+1} \qquad (a_{n+1} \geq 0,\ n \in \mathbb{N}) \tag{1.2.1.2}$$

şeklindeki negatif katsayılı $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarının sınıfı ise $\mathcal{A}(n)$ ile gösterilir.

<u>Tanım 1.2.1.4</u> (Ünivalent Fonksiyon): f fonksiyonu herhangi bir $D \subseteq \mathbb{C}$ bölgesinde analitik olsun. $\forall z_1, z_2 \in D$ için,

$$z_1 \neq z_2 \text{ iken } f(z_1) \neq f(z_2)$$

oluyorsa, yani f fonksiyonu bu bölgede aynı değeri iki kez almıyorsa f fonksiyonuna D bölgesinde ünivalent (veya yalınkat) fonksiyon denir [13].

U birim diskinde ünivalent olan normalize edilmiş

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{1.2.1.3}$$

biçimindeki fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}$ ile gösterilir ve bu sınıf

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in \mathcal{A} : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n,\ f(z) \text{fonksiyonu} U \text{ birim diskinde ünivalent} \right\}$$

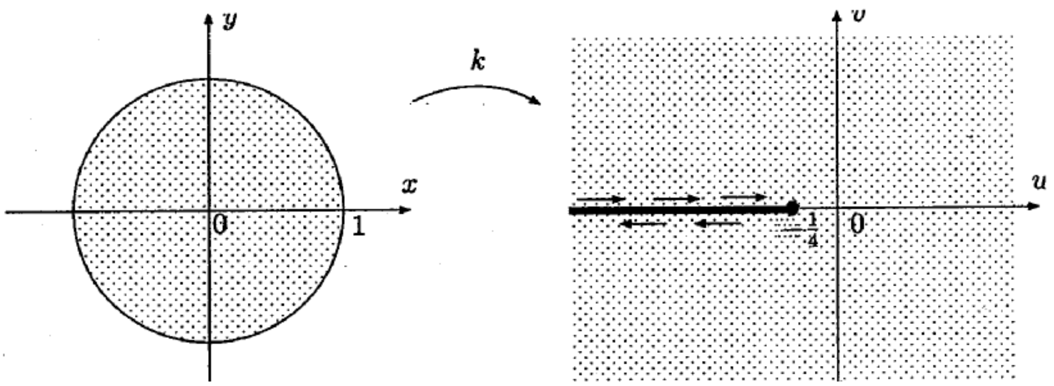
şeklinde tanımlanır.

$\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı fonksiyon örnekleri aşağıda verilmiştir.

i. $w = f(z) = z(1-z)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\mathrm{Re}(w) > -1/2$ sağ yarı düzlemine resmeder.

ii. $f(z) = z(1-z^2)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C} - \{(-\infty, -1/2] \cup (1/2, \infty]\}$ bölgesi üzerine resmeder.

iii. $f(z) = k(z) = z(1-z)^{-2}$ *Koebe* fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C} - (-\infty, -1/4]$ bölgesi üzerine resmeder.



Şekil 1: Koebe Fonksiyonu

Tanım 1.2.1.5 (Konform dönüşüm): Eğer bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer bir f fonksiyonu, bir $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, f fonksiyonu A bölgesinde konformdur denir.

Örneğin; $f(z) = e^z$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzleminin tamamında konformdur.

Teorem 1.2.1.6: f fonksiyonun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur.

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm; a, b, c, d kompleks sabitler olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

genişletilmiş kompleks düzlemi $(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

$z-$düzlemindeki $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\ (\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ bölgesini, $w-$düzlemindeki $\mathcal{D}_1$ bölgesi üzerine resmeden f analitik fonksiyonunun varlığı 1851 yılında Riemann tarafından ortaya atılmıştır.

Teorem 1.2.1.7 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\ (\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak U birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan ve $\mathcal{D}$ yi U birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır [13].

Teorem 1.2.1.8 (Liouville Teoremi): Bir $f(z)$ tam fonksiyonu sınırlı ise sabittir.

Kompleks fonksiyonlar teorisinde, analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.2.1.9 (Cauchy-Türev Formülü): f, pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n = 0,1,2...$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

dır."

Cauchy-Türev formülünün en önemli sonuçlarından biri şudur: f fonksiyonu bir bölgede analitik ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analitiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir. Fakat reel değişkenli bir fonksiyonun bir noktada 1. mertebeden türevi varsa bu noktada her mertebeden türevi vardır diyemeyiz. Örneğin,

$$f(x) = x^{3/2}$$

ve

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

reel değişkenli fonksiyonlarının $x = 0$ noktasında birinci mertebeden türevleri olduğu halde, $x = 0$ noktasında ikinci mertebeden türevleri yoktur.

Tanım 1.2.1.10 (Tekil nokta):

i. Bir $w = f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik değilse bu nokta f fonksiyonu için tekil noktadır denir.

ii: Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $U(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 noktası bir ayrık tekil noktadır denir.

Teorem 1.2.1.11 (Laurent Teoremi): C_0 ve C_1, merkezleri z_0 noktasında bulunan pozitif yönde yönlendirilmiş iki çember olsun. $r_0 < r_1$ olmak üzere C_0, r_0 yarıçaplı ve C_1 de r_1 yarıçaplı çemberler olarak alınsın. Eğer bir f fonksiyonu C_0 ile C_1 in üzerinde ve bunların arasında kalan halka bölgenin tamamında analitik ise bu durumda bölgedeki her z noktasında $f(z)$ fonksiyonu a_n ve b_n kompleks sayılar olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

açılımı ile temsil edilir. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş bir komşuluğundaki Laurent serisi (açılımı) denir.

Tanım 1.2.1.12 (Kutup Noktası): z_0, $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası olsun. Laurent açılımındaki b_n katsayılarından sadece sonlu tanesi sıfırdan farklı ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası denir.

Tanım 1.2.1.13 (Meromorf fonksiyon): Kompleks düzlemin bir A bölgesinde kutup noktaları hariç analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna A da meromorf fonksiyon denir.

Teorem 1.2.1.14 (Maksimum Modül Prensibi): $D \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir bölge ve f fonksiyonu D bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu D bölgesinde analitik ve bu bölgenin sınırında sürekli ise

$$max\left\{\left|f\left(z\right)\right|: z \in \overline{D}\right\} = max\left\{\left|f\left(z\right)\right|: z \in \partial D\right\}$$

olur [9].

Lemma 1.2.1.15 (Schwarz Lemması): f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve

i. $z \in U$ için $\left|f\left(z\right)\right| < 1$,

ii. $f\left(0\right) = 0$

olsun. Bu durumda, her $z \in U$ için $\left|f\left(z\right)\right| \le |z|$ ve $\left|f'\left(0\right)\right| \le 1$ olur. Ayrıca, herhangi bir $z \neq 0$ noktası için $\left|f\left(z\right)\right| = |z|$ veya $\left|f'\left(0\right)\right| = 1$ ise her $w \in U$ için $f\left(w\right) = cw$ olacak şekilde modülü $|c| = 1$ olan bir c sabiti vardır [9].

Tanım 1.2.1.16 (Schwarz Fonksiyonu): φ, U birim diskinde analitik bir fonksiyon olsun. φ fonksiyonu $z \in U$ için $\left|\varphi\left(z\right)\right| < 1$ ve $\varphi\left(0\right) = 0$ şartlarını sağlarsa φ’ye Schwarz fonksiyonu denir ve Schwarz fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{V}$ ile gösterilir [18].

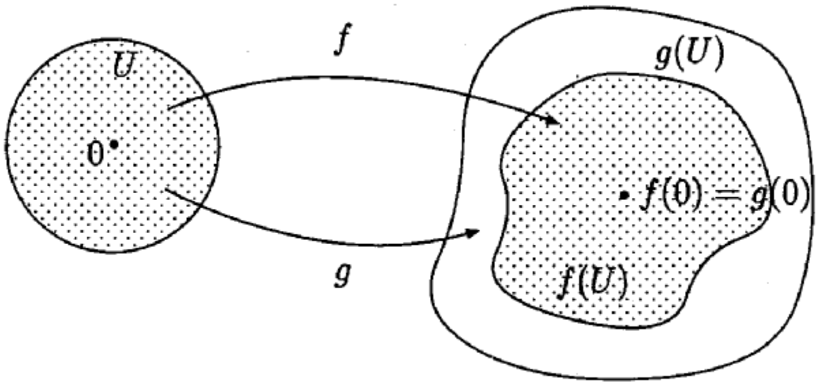
Başka bir değişle, U birim diskinde analitik olan ve Schwarz lemmasındaki hipotezleri sağlayan fonksiyonlara Schwarz fonksiyonu denir [18].

Tanım 1.2.1.17 (Pozitif Reel Kısımlı Fonksiyon): U birim diskinde $\operatorname{Re} p\left(z\right) > 0$ olmak üzere U ’da analitik olan

$$p\left(z\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

biçimindeki fonksiyonlara pozitif reel kısımlı fonksiyonlar denir ve bu fonksiyonların sınıfı $\mathcal{P}$ ile gösterilir [17].

Tanım 1.2.1.18 (Subordinasyon): $f, g \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonları verilsin. U birim diskinde $f(z) = g(\varphi(z))$ olacak şekilde bir $\varphi \in \mathcal{V}$ fonksiyonu varsa f fonksiyonu U 'da g fonksiyonuna subordinedir denir ve $f \prec g$ ile gösterilir. g fonksiyonunun ünivalent olması durumunda, $f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subset g(U)$ olmasıdır [24].



Şekil 2: $f \prec g$ Subordinasyonu

Tanım 1.2.1.19 (Hadamard Çarpımı): U birim diskinde analitik olan

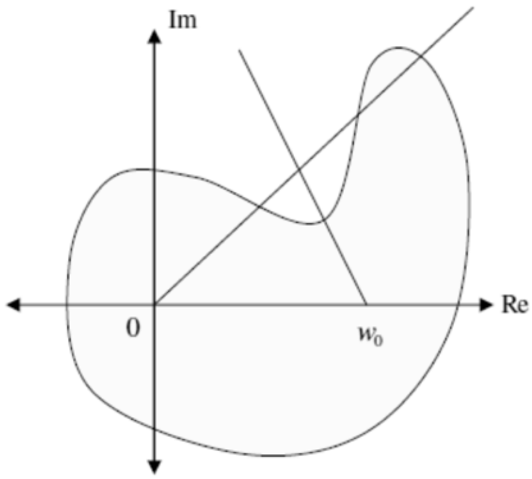
$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} z^{n+1} \text{ ve } g(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1} z^{n+1}$$

fonksiyonları verilsin. f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımı $f * g$ ile gösterilir ve bu çarpım,

$$(f * g)(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} b_{n+1} z^{n+1}$$

şeklinde tanımlanır [24].

Tanım 1.2.1.20 (Yıldızıl Bölge): D kompleks düzlemde bir bölge ve $w_0 \in D$ olsun. Başlangıç noktası w_0 olan her ışın ile D bölgesinin arakesiti bir doğru parçası veya bir ışın ise D bölgesine w_0 noktasına göre yıldızıl bölge denir. Başka bir değişle, $0 \le t \le 1$ olmak üzere $\forall w \in D$ için $(1-t)w_0 + tw \in D$ ise D bölgesine w_0 noktasına göre yıldızıl denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme denir [17].



Şekil 3: w_0 noktasına göre Yıldızıl Bölge

Tanım 1.2.1.21 (Yıldızıl Fonksiyon): f fonksiyonu U birim diskinde analitik olsun. U birim diskini w_0'a göre yıldızıl olan bir bölgeye resmeden f fonksiyonuna w_0'a göre yıldızıldır denir. $w_0 = 0$ ise f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir [17].

Teorem 1.2.1.22 (Yıldızıl Fonksiyonların Analitik Karakterizasyonu): $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonunun U'da yıldızıl olabilmesi için gerek ve yeter şart her $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

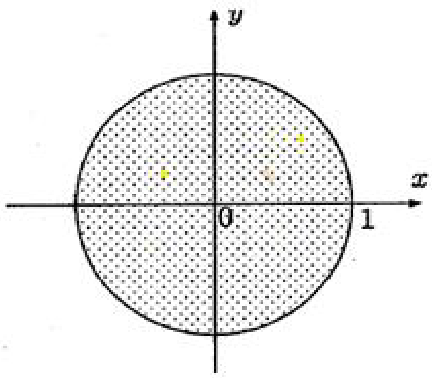
olmasıdır [17].

Normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterelir ve bu sınıf

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{S} : \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.1.23 (Konveks Bölge): $\forall w_1, w_2 \in D \subset \mathbb{C}$ için w_1 ve w_2'yi birleştiren doğru parçası D bölgesinde kalıyorsa, yani $0 \le t \le 1$ olmak üzere $tw_1 + (1-t)w_2 \in D$ ise D bölgesine konveks denir [17].



Şekil 4: Konveks Bölge

Tanım 1.2.1.24 (Konveks Fonksiyon): f fonksiyonu U birim diskinde analitik olsun. U birim diskini konveks bir bölgeye resmeden f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir [17].

Teorem 1.2.1.25 (Konveks Fonksiyonların Analitik Karakterizasyonu): $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonunun U'da konveks olabilmesi için gerek ve yeter şart her $z \in U$ için

$$\mathrm{Re}\left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0$$

olmasıdır [17].

Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}$ ile gösterilir ve bu sınıf

$$\mathcal{K} = \left\{ f \in \mathcal{S} : \operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.2.1.26 (Alexander Teoremi): $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu verilsin. $f \in \mathcal{K}$ olması için gerek ve yeter şart $zf'(z) \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır [13].

Tanım 1.2.1.27: $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilsin. $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$Re\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha$$

ise f fonksiyonuna U 'da $\alpha -$mertebeden yıldızıl fonksiyon denir [24].

$\alpha -$mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ile gösterilir ve bu sınıf

$$\mathcal{S}^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.1.28: $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilsin. $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$Re\left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha$$

ise f fonksiyonuna U 'da $\alpha -$mertebeden konveks fonksiyon denir [24].

$\alpha-$mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $\mathcal{K}(\alpha)$ ile gösterilir ve bu sınıf

$$\mathcal{K}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

<u>Tanım 1.2.1.29:</u> $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilsin. $0 \leq \alpha < 1$ ve $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$Re\left\{1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right)\right\} > \alpha$$

ise f fonksiyonuna U 'da $\alpha-$mertebeden γ kompleks değerli yıldızıl fonksiyon denir.

$\alpha-$mertebeden γ kompleks değerli yıldızıl fonksiyonların sınıfı $0 \leq \alpha < 1$ ve $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$ olmak üzere $\mathcal{S}^*(\alpha, \gamma)$ ile gösterilir ve bu sınıf

$$\mathcal{S}^*(\alpha, \gamma) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re}\left\{1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right)\right\} > \alpha \right\}$$

şeklinde tanımlanır [26].

<u>Tanım 1.2.1.30:</u> $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilsin. $0 \leq \alpha < 1$ ve $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$Re\left\{1 + \frac{1}{\gamma}\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha$$

ise f fonksiyonuna U 'da $\alpha-$mertebeden γ kompleks değerli konveks fonksiyon denir.

$\alpha-$mertebeden γ kompleks değerli konveks fonksiyonların sınıfı $0 \leq \alpha < 1$ ve $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$ olmak üzere $\mathcal{K}(\alpha, \gamma)$ ile gösterilir ve bu sınıf

$$\mathcal{K}(\alpha, \gamma) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left\{ 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha \right\}$$

şeklinde tanımlanır [26].

<u>Teorem 1.2.1.31</u> (De-Branges Teoremi): $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu verilsin. Buna göre her $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ olur. Eşitlik durumu yalnızca $f(z) = z\left(1 - ze^{i\theta}\right)^{-2}$ Koebe fonksiyonları için geçerlidir [19].

Bu tahmin için bulunan sonuçlar aşağıdaki tarihsel seyir içerisinde verilmiştir:

$\lvert a_2 \rvert \leq 2,$	Bieberbach (1916),
$\lvert a_3 \rvert \leq 3,$	Löwner (1923),
$\lvert a_4 \rvert \leq 4,$	Garabedian, Schiffer (1955),
$\lvert a_6 \rvert \leq 6,$	Pederson (1968), Ozawa (1969),
$\lvert a_5 \rvert \leq 5,$	Pederson, Schiffer (1972),
$\lvert a_n \rvert \leq e.n,$	Littlewood (1925),
$\lim_{n\to\infty} \frac{\lvert a_n \rvert}{n} = 1,$	Hayman (1955),
$\lvert a_n \rvert \leq \sqrt{7/6}\,n < 1.081n,$	FitsGerald (1972),
$\lvert a_n \rvert \leq n,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$	L. De Branges (1984).

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu başlık altında tezin temel kısmının oluşturulmasında kullanılacak tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Bu bölüme hipergeometrik fonksiyonlar başta olmak üzere özel fonksiyonlar içerisinde çok önemli bir yere sahip olan Gama fonksiyonu ile başlayalım.

2.1 Gama Fonksiyonu

Tanım 2.1.1: $\mathrm{Re}(z) > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{2.1.1}$$

fonksiyonuna gama fonksiyonu denir. Bu tanımda geçen integral ikinci tür Euler integralidir.

Tanım 2.1.1 analitik devam vasıtasıyla $\mathrm{Re}(z) < 0$ için aşağıdaki biçimde genişletilebilir.

(2.1.1) ile verilen fonksiyon

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{2.1.2}$$

biçiminde iki integralin toplamı olarak yazılabilir. Bu integraller ayrı ayrı $P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt$ ve $Q(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ şeklinde iki fonksiyon olarak göz önüne alınırsa $P(z)$ fonksiyonu $\mathrm{Re}(z) > 0$ yarı düzleminde analitik ve $Q(z)$ nin ise tam fonksiyon olduğu görülür. Dolayısıyla $\Gamma(z) = P(z) + Q(z)$ fonksiyonu $\operatorname{Re}(z) > 0$ yarı düzleminde analitik olur.

$P(z)$ fonksiyonundaki e^{-t} ifadesi kuvvet serisine açılırsa,

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 t^{z-1} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k \tag{2.1.3}$$

elde edilir.

Burada,

$$\int_0^1 \left| t^{z-1} \right| dt \sum_{k\geq 0} \left| \frac{(-1)^k}{k!} t^k \right| = \int_0^1 t^{x-1} dt \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} = \int_0^1 e^t t^{x-1} dt < \infty$$

olup bu da bu integralin yakınsak olduğunu gösterir. Böylece (2.1.3) ifadesi terim terime integrallenirse

$$P(z) = \int_0^1 t^{z-1} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} \tag{2.1.4}$$

bulunur. Bu durumda (2.1.4) serisinin $z = 0, -1, -2, \ldots$ noktalarında basit kutba sahip ve $\operatorname{Re}(z) > 0$ için $P(z)$ integrali ile aynı olduğu görülür. Dolayısıyla (2.1.4) serisi $P(z)$ nin analitik devamıdır. $Q(z)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan $\Gamma(z)$ fonksiyonu $z = 0, -1, -2, \ldots$ noktalarında basit kutba sahip olan meromorf bir fonksiyon olur.

$\Gamma(z)$ nin tüm kompleks düzlem için tanımı aşağıdaki biçimde verilebilir:

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \qquad (z \neq 0, -1, -2, \ldots)$$

Gama fonksiyonu ile ilgili bazı özellikler,

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,

- $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$

- $2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$

şeklinde sıralanabilir. Ayrıca $n = 0,1,2,\ldots$ için

- $\Gamma(n+1) = n!$

eşitliği ve $n = 1,2,\ldots$ için

- $\Gamma(n+1/2) = \dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$

eşitliği vardır.

$z = 1/2$ özel değeri için

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = 2\int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

elde edilir.

<u>Tanım 2.1.2</u> (Pochhammer (Apell) sembolü): Γ, gama fonksiyonunu göstermek üzere $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{C}$ ve $a \neq 0,-1,-2,\ldots$ olması durumunda

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ a(a+1)\ldots(a+n-1), & n \neq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer a ve $a+n$ negatif tamsayı ise

$$(a)_n = \lim_{t \to 0} \frac{\Gamma(a+n+t)}{\Gamma(a+t)}$$

formülü geçerlidir.

Pochhammer sembolü için $(a)_{n+1} = (a+n)(a)_n$ eşitliği her zaman sağlanır.

2.2 Hipergeometrik Fonksiyonlar

Matematikteki elementer fonksiyonların birçoğu hipergeometrik fonksiyonlardan ya da hipergeometrik fonksiyonların birbirine oranından elde edilebilir. c_{n+1}/c_n, oranı n nin bir rasyonel fonksiyonu ise, $\sum c_n$ ifadesi bir hipergeometrik seri belirtir. Ayrıca matematik ve fizikteki elementer olmayan fonksiyonların çoğu da yine hipergeometrik seri olarak ifade edilebilmektedir. Bu bölüm, hipergeometrik fonksiyon ve genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlara ayrılmıştır.

Tanım 2.2.1: $a,b,c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0,-1,-2,\ldots$ ve $(a)_n$, Pochhammer sembolü olmak üzere

$$F(a,b;c;z) = {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z|<1 \tag{2.2.1}$$

fonksiyonu $z(1-z)w''(z) + \big(c-(a+b+1)z\big)w'(z) - abw(z) = 0$ ikinci mertebeden hipergeometrik diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olup bu fonksiyona Gauss hipergeometrik fonksiyonu adı verilir.

a, b değişkenlerinin negatif tamsayı ya da sıfır olması durumunda yukarıdaki diferensiyel denklemin çözümü bir polinom olur ve dolayısıyla bu çözüm tüm düzlemde analitik olur. Diğer değerler için ise (2.2.1) serisi mutlak yakınsaktır.

Gauss hipergeometrik fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

- $\mathrm{Re}(c-a-b)>0$, $\mathrm{Re}\big(c\big)>0$, $\mathrm{Re}(c-a)>0$ ve $\mathrm{Re}(c-b)>0$ olması durumunda

$$\lim_{z\to 1} F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

dir.

- $\operatorname{Re}(a) > 0$, $\operatorname{Re}(b) > 0$, $\operatorname{Re}(a+b) > 0$ ve $\operatorname{Re}(c-a-b) = 0$ ise

$$\lim_{z \to 1} \frac{F(a,b;a+b;z)}{Log(1-z)} = -\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

dir.

- $\operatorname{Re}(c-a-b) < 0$, $\operatorname{Re}(a) > 0$, $\operatorname{Re}(b) > 0$ ve $\operatorname{Re}(c) > 0$ için

$$\lim_{z \to 1} (1-z)^{a+b-c} F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}.$$

Gauss hipergeometrik fonksiyonunda a,b,c nin uygun değerleri için aşağıdaki eşitlikler elde edilebilir:

- $F(1,1;2;-z) = \dfrac{1}{z} Log(1+z)$,

- $F(a,b;b;z) = \dfrac{1}{(1-z)^a}$,

- $F\left(\dfrac{1}{2},1;\dfrac{3}{2};z^2\right) = \dfrac{1}{2z} Log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$,

- $F\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2};z^2\right) = \dfrac{1}{z} \arcsin z$,

- $F\left(\dfrac{1}{2},1;\dfrac{3}{2};-z^2\right) = \arccos z$,

- $F\left(\dfrac{1}{2},1;\dfrac{3}{2};-z^2\right) = \dfrac{1}{z} \arctan z$.

Tanım 3.2.2: $q, r \geq 1$ şartını sağlayan birer tamsayı, $a_1, a_2, ..., a_q$; $b_1, b_2, ..., b_r$ birer kompleks sayı ve her $k \in \{1, 2, ..., r\}$ için $b_k \neq 0, -1, -2, ...$, olmak üzere

$$ {}_qF_r(a_1, ..., a_q; b_1, ..., b_r; z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a_1)_n ... (a_q)_n}{(b_1)_n ... (b_r)_n} \frac{z^n}{n!} \tag{2.2.2} $$

fonksiyonuna genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu denir.

(2.2.2) serisi $q < r+1$ için $\mathbb{C}$ de, $q = r+1$ için ise $|z| < 1$ de mutlak yakınsaktır. Bu seride özel olarak $q = 2$, $r = 1$, $a_1 = a$, $a_2 = b$ ve $b_1 = c$ alınırsa (2.2.1) serisi elde edilir ve bu durum ${}_2F_1(a, b; c; z)$ veya kısaca $F(a, b; c; z)$ ile gösterilir. Ayrıca $a_1 + a_2 + ... + a_{r+1} = b_1 + b_2 + ... + b_r$ olması durumunda ${}_{r+1}F_r(a_1, ..., a_{r+1}; b_1, ..., b_r; z)$ serisine dengelenmiş (balanced) seri denir.

${}_qF_r$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu, aynı zamanda

$$ \left[z\frac{d}{dz}\left[\left(z\frac{d}{dz} + b_1 - 1 \right) ... \left(z\frac{d}{dz} + b_r - 1 \right) \right] - z\left(z\frac{d}{dz} + a_1 \right) ... \left(z\frac{d}{dz} + a_q \right) \right] w = 0 $$

diferensiyel denkleminin bir çözümüdür.

Hipergeometrik fonksiyonların Bieberbach tahmininin çözümünde önemli bir rol oynaması bu tür fonksiyonlara olan ilgiyi artırmıştır. Daha ayrıntılı bilgi için Almkvist and Berndt [1], Anderson *et al.* [3], Andrews [4] çalışmalarına bakılabilir.

Parametrelerin özel değerleri için genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonundan aşağıdaki bazı fonksiyonlar elde edilir:

- ${}_qF_q(a_1, ..., a_q; a_1, ..., a_q; z) = e^z$, $q \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$,
- ${}_1F_0(-a\ ; z) = (1-z)^a$,

- ${}_0F_1\left(\frac{1}{2}\ ;-\frac{1}{4}z^2\right)=\cos z$,

- $z\,{}_0F_1\left(\frac{3}{2}\ ;-\frac{1}{4}z^2\right)=\sin z$,

- $z\,{}_2F_1(1,1;2\ ;z)=L\,\text{og}(1-z)$,

- $Erf\,(z)=\int_0^z e^{-t^2}dt=z\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-z^2\right)=ze^{-z^2}\,{}_1F_1\left(1;\frac{3}{2};z^2\right).$

Diğer yandan $a,c\in\mathbb{C}$ ve $c\neq 0,-1,-2,...$ olmak üzere

$${}_1F_1\left(a;c;z\right)=\Phi\left(a;c;z\right)=\sum_{n\geq 0}\frac{(a)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}\qquad\left(|z|<1\right),$$

fonksiyonuna Kummer (confluent) hipergeometrik fonksiyonu denir. Bu fonksiyon 1837 yılında Kummer tarafından tanımlanmış olup

$$zw''(z)+\left(c-z\right)w'(z)-aw=0$$

biçimindeki Kummer diferensiyel denkleminin bir özel çözümüdür.

2.3 Mittag-Leffler Fonksiyonları

Mittag-Leffler fonksiyonu [25], İsveçli¸ bilim adamı Gösta Mittag-Leffler (16 Mart 1846-7 Temmuz 1927) tarafından 1903 yılında tanımlanmıştır. Mittag-Leffler fonksiyonu ilk olarak kesirli integral denklemlerinin çözümlerinde ortaya çıkmıştır. Daha sonra, kinetik denklemlerin kesirli genelleştirilmesinde, rastgele yürüyüşlerde ve Lévy uçuşlarında kullanılmıştır [21, 25, 36].

Tanım 2.3.1: $z \in U$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ $\left(\operatorname{Re}(\lambda) > 0\right)$ olmak üzere

$$E_{\lambda}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\lambda n + 1)} \tag{2.3.1}$$

biçiminde tanımlanan $E_{\lambda}(z)$ serisine Mittag-Leffler fonksiyonu denir.

λ'nın özel değerleri için aşağıdaki eşitlikleri elde edilir:

- $E_0(z) = \dfrac{1}{1-z}$,
- $E_1(z) = e^z$,
- $E_2(z) = \cos\sqrt{z}$,
- $E_3(z) = \dfrac{1}{3}\left[e^{z^{1/3}} + 2e^{-z^{1/3}/2} \cos\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{3}z^{1/3} \right) \right],$
- $E_4(z) = \dfrac{1}{2}\left[\cos\left(z^{1/4}\right) + \cosh\left(z^{1/4}\right) \right].$

Tanım 2.3.2 (Genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu): $z \in U$, $\lambda, \mu, \beta \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\lambda) > 0,$ $\operatorname{Re}(\mu) > 0$ ve $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ olmak üzere

$$E_{\lambda,\mu}^{\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{\Gamma(\lambda n + \mu)} \frac{z^n}{n!} \tag{2.3.2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu adı verilir [33].

Burada

$$E_{\lambda}(z) = E_{\lambda,1}^{1}(z) \text{ ve } E_{\lambda,\mu}(z) = E_{\lambda,\mu}^{1}(z)$$

dir.

Mittag-Leffler fonksiyonu için aşağıdaki rekürans (yineleme) bağıntıları yazılabilir:

$$E_{\lambda,\mu}^{\beta}(z) = \mu E_{\lambda,\mu+1}^{\beta}(z) + \lambda z\left(E_{\lambda,\mu+1}^{\beta}(z)\right)' \qquad (z \in U)$$

ve

$$\beta E_{\lambda,\mu}^{\beta+1}(z) = \beta E_{\lambda,\mu+1}^{\beta}(z) + z\left(E_{\lambda,\mu+1}^{\beta}(z)\right)' \qquad \left(z \in U\right).$$

$E_{\lambda,\mu}^{\beta}(z)$ genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu $\mathcal{A}$ sınıfına ait değildir. Bu fonksiyonun normalize edilmiş hali olan $\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z): U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\tilde{E}_{\lambda,\mu}^{\beta}(z) = \Gamma(\mu) z E_{\lambda,\mu}^{\beta}(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu)\left(\beta\right)_n}{\Gamma\left(\lambda n + \mu\right)} \frac{z^{n+1}}{n!} \qquad (z \in U). \qquad (2.3.3)$$

$\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)$ fonksiyonuna normalize edilmiş genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu denir. (2.3.3) denkleminde λ, μ ve β parametrelerinin özel değerleri için aşağıdaki fonksiyonlar elde edilir:

- $\tilde{E}_{0,1}^{1}(z) = \dfrac{z}{1-z}$,
- $\tilde{E}_{1,1}^{1}(z) = ze^{z}$,
- $\tilde{E}_{1,2}^{1}(z) = e^{z} - 1$,
- $\tilde{E}_{2,1}^{1}(z) = z\cosh\left(\sqrt{z}\right)$,
- $\tilde{E}_{2,2}^{1}(z) = \sqrt{z}\sinh\left(\sqrt{z}\right)$,
- $\tilde{E}_{2,3}^{1}(z) = 2\left[\cosh\left(\sqrt{z}\right) - 1\right]$.

(2.3.3) ile verilen $\tilde{E}^{\beta}_{\lambda,\mu}(z)$ fonksiyonunu kullanarak Hadamard çarpımı tanımı yardımıyla $\varepsilon^{\beta}_{\lambda,\mu}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\varepsilon^{\beta}_{\lambda,\mu}f(z)=\left(\tilde{E}^{\beta}_{\lambda,\mu}*f\right)(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)(\beta)_n\,a_{n+1}}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{z^{n+1}}{n!}\qquad (z\in U). \qquad (2.3.4)$$

$\varepsilon^{\beta}_{\lambda,\mu}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ operatörü için rekürans (yineleme) bağıntıları aşağıda verilmiştir:

$$\lambda z\left(\varepsilon^{\beta}_{\lambda,\mu+1}f(z)\right)'=\mu\varepsilon^{\beta}_{\lambda,\mu}f(z)+(\lambda-\mu)\varepsilon^{\beta}_{\lambda,\mu+1}f(z)\qquad (z\in U)$$

ve

$$z\left(\varepsilon^{\beta}_{\lambda,\mu}f(z)\right)'=(1-\beta)\varepsilon^{\beta}_{\lambda,\mu}f(z)+\beta\varepsilon^{\beta+1}_{\lambda,\mu+1}f(z)\qquad (z\in U).$$

2.4 Analitik Fonksiyonların Komşulukları

$\mathcal{A}$ sınıfına ait f fonksiyonlarının komşuluklarıyla ilgili ilk çalışma 1957 de Goodman tarafından yapılmıştır. Goodman tarafından yapılan bu çalışmada yer alan aşağıda verilen teorem komşuluk kavramının geliştirilmesi için temel oluşturmuştur.

Teorem 2.4.1: $|z|<1$ için,

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\le 1$$

ise f fonksiyonu U birim diskinde ünivalenttir ve bu bölgeyi orijine göre yıldızıl bir bölgeye resmeder.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \leq 1$$

ise f fonksiyonu U birim diskinde ünivalenttir ve bu bölgeyi konveks bir bölgeye resmeder [16].

1981 yılında Ruscheweyh, Goodman tarafından verilen komşuluk kavramını genelleştirerek $\mathcal{A}$ sınıfına ait f fonksiyonlarının δ-komşuluğunu aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

<u>Tanım 2.4.2:</u> $f \in \mathcal{A}$ ve $\delta \geq 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{N}_\delta(f) = \left\{ g \in \mathcal{A} : g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n - b_n| \leq \delta \right\}$$

kümesine f fonksiyonunun δ-komşuluğu denir [34].

Buna göre, $e(z) = z$ özdeşlik fonksiyonu için,

$$\mathcal{N}_\delta(e) = \left\{ g \in \mathcal{A} : g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, \sum_{n=2}^{\infty} n|b_n| \leq \delta \right\}$$

olur. Ayrıca $\mathcal{N}_1(e) \subset \mathcal{S}^*$ dır.

Pozitif reel kısma sahip analitik fonksiyonların komşuluğu 1990 yılında Walker tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

<u>Tanım 2.4.3:</u> $p \in \mathcal{P}$ ve $\delta \geq 0$ için p nin δ-komşuluğu $\mathcal{N}_\delta(p)$ ile gösterilir ve bu küme

$$\mathcal{N}_\delta(p) = \left\{ q \in \mathcal{P} : q(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} q_n z^n, \sum_{n=2}^{\infty} |p_n - q_n| \leq \delta \right\}$$

şeklinde tanımlanır [37].

1996 yılında Altıntaş ve Owa tarafından negatif katsayılı $f \in \mathcal{A}(n)$ fonksiyonlarının (n,δ)-komşuluğu kavramı verilmiştir.

<u>Tanım 2.4.4:</u> $f \in \mathcal{A}(n)$ ve $\delta \geq 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{N}_{n,\delta}(f) = \left\{ g \in \mathcal{A}(n) : g(z) = z - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k z^k \ , \sum_{k=n+1}^{\infty} k \left| a_k - b_k \right| \leq \delta \ \right\}$$

kümesine f fonksiyonunun (n,δ)-komşuluğu denir [2].

Ayrıca son yıllarda $\mathcal{A}$ sınıfına ait fonksiyonların belli altsınıfları için komşuluk problemi Orhan and Kadıoğlu [28], Orhan and Kamali [29], Orhan [30], Cataş [8], Deniz and Orhan [11, 12], Liu and Huang [22], Sağsöz and Kamali [35], Bulut [7], Orhan [27], Zirar [38], Çağlar [10] ve Ebadin [14] tarafından çalışılmıştır.

Bu tez çalışmasında, ilk olarak, $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ sınıfı için komşuluk kavramını tanımlanıp daha sonra bu sınıfın komşuluğuna ait bir içerme bağıntısı verilmiştir. Daha sonra aynı işlem $\mathcal{S}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ sınıfı için yapılmıştır.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlara yer verilmiştir. İlk olarak $\varepsilon_{\lambda,\mu}^{\beta} f(z)$ operatörü kullanılarak $\mathcal{A}(n)$ sınıfına ait fonksiyonların $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ ve $\mathcal{S}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ gibi iki yeni alt sınıfları tanımlanmış, bu sınıflara ait katsayı eşitsizlikleri, içerme bağıntıları ve komşuluk problemleri ile ilgili teoremler verilmiş ve ispatlanmıştır.

3.1 $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ Sınıfı ve Bu Sınıf İçin Katsayı Eşitsizliği

Bu kısımda $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ sınıfı tanıtılıp, bu sınıf için katsayı eşitsizliği bulunmuştur.

<u>Tanım 3.1.1:</u> $f \in \mathcal{A}(n)$ olsun. Her $z \in U$ için $\lambda,\mu,\beta \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, $\operatorname{Re}(\mu) > 0$, $\operatorname{Re}(\beta) > 0$, $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$\left| \frac{1}{\gamma} \left(\frac{z\left[\varepsilon_{\lambda,\mu}^{\beta} f(z)\right]'}{\varepsilon_{\lambda,\mu}^{\beta} f(z)} - 1 \right) \right| < \alpha \tag{3.1.1}$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ sınıfına aittir denir. Burada $\varepsilon_{\lambda,\mu}^{\beta} f(z)$, (2.3.4) formülü ile tanımlanır.

<u>Teorem 3.1.2:</u> $f \in \mathcal{A}(n)$ olsun. Bu durumda, f fonksiyonunun $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu)(\beta)_{n-1}}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\mu\right)(n-1)!} \left[n-1+\alpha|\gamma|\right] a_n \leq \alpha|\gamma| \tag{3.1.2}$$

olmasıdır.

İspat: $f(z) \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ olsun. O halde, (3.1.1) eşitsizliğinden

$$\operatorname{Re}\left\{ \frac{z\left[\varepsilon_{\lambda,\mu}^{\beta} f(z)\right]'}{\varepsilon_{\lambda,\mu}^{\beta} f(z)} - 1 \right\} > -\alpha|\gamma| \qquad (z \in U) \tag{3.1.3}$$

yazılabilir.

(1.2.1.2) ve (2.3.4) eşitlikleri (3.1.3) eşitsizliğinde dikkate alınırsa

$$\operatorname{Re}\left\{ \frac{-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu)(\beta)_{n-1}}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\mu\right)(n-1)!}\left[n-1\right]a_n z^n}{z-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu)(\beta)_{n-1}}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\mu\right)(n-1)!} a_n z^n} \right\} > -\alpha|\gamma| \tag{3.1.4}$$

elde edilir. Buradan z nin değerleri reel olarak seçilirse,

$$\frac{z\left[\varepsilon_{\lambda,\mu}^{\beta} f(z)\right]'}{\varepsilon_{\lambda,\mu}^{\beta} f(z)}$$

ifadesi de reel olur. Sonrasında (3.1.4) ifadesinde $z \to 1^{-}$ için limite geçildiğinde

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu)(\beta)_{n-1}}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\mu\right)(n-1)!}\left[n-1+\alpha|\gamma|\right]a_n \le \alpha|\gamma|$$

eşitsizliği elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki (3.1.2) eşitsizliği sağlansın ve $|z|=1$ olsun. Bu durumda,

$$\left|\frac{z\left[\varepsilon_{\lambda,\mu}^{\beta} f(z)\right]'}{\varepsilon_{\lambda,\mu}^{\beta} f(z)}-1\right| \le \left|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)(\beta)_{n-1}}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)(n-1)!}[n-1]a_n z^n}{z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)(\beta)_{n-1}}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)(n-1)!}a_n z^n}\right|$$

$$\le \frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)(\beta)_{n-1}}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)(n-1)!}[n-1]a_n}{1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)(\beta)_{n-1}}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)(n-1)!}a_n}$$

$$\le \alpha|\gamma|$$

elde edilir. Buradan, maksimum modül prensibine göre $f(z)\in\mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ dır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

3.2 $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ Sınıfı İçin İçerme Bağıntısı

Bu başlıkta $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ sınıfı için $\mathcal{N}_{n,\delta}(e)$ yı kapsayan içerme bağıntısı verilmiştir.

<u>Teorem 3.2.1:</u> Eğer,

$$\delta=\frac{2\alpha|\gamma|\Gamma(\lambda+\mu)}{\beta[1+\alpha|\gamma|]\Gamma(\mu)} \qquad (|\gamma|<1) \tag{3.2.1}$$

ise $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)\subset\mathcal{N}_{n,\delta}(e)$ dir.

<u>İspat:</u> $f(z)\in\mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ olsun. Teorem 3.1.2 den

$$\frac{\beta\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}[1+\alpha|\gamma|]\sum_{n=2}^{\infty}a_n\le\alpha|\gamma|,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \frac{\alpha|\gamma|}{\frac{\beta\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}\left[1+\alpha|\gamma|\right]} \tag{3.2.2}$$

elde edilir.

(3.1.2) ve (3.2.2) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\frac{\beta\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}\sum_{n=2}^{\infty} na_n &\leq \alpha|\gamma| + \frac{\beta\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}\left[1-\alpha|\gamma|\right]\sum_{n=2}^{\infty} a_n \\ &\leq \frac{2\alpha|\gamma|}{\left[1+\alpha|\gamma|\right]} = \delta\end{aligned}$$

bulunur.

Yani,

$$\sum_{n=2}^{\infty} na_n \leq \frac{2\alpha|\gamma|}{\frac{\beta\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}\left[1+\alpha|\gamma|\right]} = \delta$$

dır. Böylece, Tanım 3.4.3 ten $f(z) \in \mathcal{N}_{n,\delta}(e)$ olur ve teorem ispatlanır.

3.3 $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ Sınıfı İçin Komşuluk Problemi

Bu bölümde $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ sınıfı için komşuluk problemi ele alınmıştır.

Bilindiği üzere;
$0 \leq \eta < 1$ ve $z \in U$ için

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)} - 1\right| < 1-\eta \tag{3.3.1}$$

olacak şekilde bir $g(z) \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ varsa $f(z) \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ dır.

Teorem 3.3.1: Eğer $g(z) \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ ve

$$\eta = 1 - \frac{\delta\beta\left[1+\alpha|\gamma|\right]\Gamma(\mu)}{2\left[\beta\left[1+\alpha|\gamma|\right]\Gamma(\mu) - \alpha|\gamma|\Gamma(\lambda+\mu)\right]} \tag{3.3.2}$$

ise $\mathcal{N}_{n,\delta}(g) \subset \mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ dir.

İspat: $f(z) \in \mathcal{N}_{n,\delta}(g)$ olsun. O halde,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n - b_n| \leq \delta \tag{3.3.3}$$

ve

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n - b_n| \leq \frac{\delta}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.3.4}$$

dir.

$g(z) \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ olduğu için (3.3.2) eşitsizliğinden

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n \leq \frac{\alpha|\gamma|}{\frac{\beta\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}\left[1+\alpha|\gamma|\right]} \tag{3.3.5}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(z)}{g(z)} - 1\right| &< \frac{\sum_{n=2}^{\infty}|a_n - b_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} b_n} \\
&\leq \frac{\delta}{2}\frac{\frac{\beta\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}\left[1+\alpha|\gamma|\right]}{\frac{\beta\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}\left[1+\alpha|\gamma|\right] - \alpha|\gamma|} \\
&= 1 - \eta
\end{aligned}$$

olur. Bununla teoremin ispatı tamamlanır.

3.4 $\mathcal{S}^{n}_{\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ Sınıfı ve Bu Sınıf İçin Katsayı Eşitsizliği

Bu kısımda $\mathcal{S}^{n}_{\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ sınıfı tanıtılıp, bu sınıf için katsayı eşitsizliği bulunmuştur.

<u>Tanım 3.4.1:</u> $f\in\mathcal{A}(n)$ olsun. Her $z\in U$ için $\lambda,\mu,\beta\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\lambda)>0$, $\mathrm{Re}(\mu)>0$, $\mathrm{Re}(\beta)>0$, $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $0<\alpha\leq 1$ ve $0\leq\vartheta\leq 1$ olmak üzere

$$\left|\frac{1}{\gamma}\left[(1-\vartheta)\frac{\varepsilon^{\beta}_{\lambda,\mu}f(z)}{z}+\vartheta\left(\varepsilon^{\beta}_{\lambda,\mu}f(z)\right)'-1\right]\right|<\alpha \tag{3.4.1}$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathcal{S}^{n}_{\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ sınıfına aittir denir. Burada $\varepsilon^{\beta}_{\lambda,\mu}f(z)$, (2.3.4) formülü ile tanımlanır.

<u>Teorem 3.4.2:</u> $f\in\mathcal{A}(n)$ olsun. Bu durumda, f fonksiyonunun $\mathcal{S}^{n}_{\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)\left(\beta\right)_{n-1}}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\mu\right)(n-1)!}\left[1+\vartheta\left(n-1\right)\right]a_n\leq\alpha\left|\gamma\right| \tag{3.4.2}$$

olmasıdır.

<u>İspat:</u> $f(z)\in\mathcal{S}^{n}_{\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ olsun. O halde, (3.4.1) eşitsizliğinden

$$\mathrm{Re}\left\{(1-\vartheta)\frac{\varepsilon^{\beta}_{\lambda,\mu}f(z)}{z}+\vartheta\left(\varepsilon^{\beta}_{\lambda,\mu}f(z)\right)'-1\right\}>-\alpha\left|\gamma\right| \qquad (z\in U) \tag{3.4.3}$$

yazılır.

(1.2.1.2) ve (2.3.4) eşitlikleri (3.4.3) eşitsizliğinde dikkate alınırsa

$$\operatorname{Re}\left\{-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)(\beta)_{n-1}}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\mu\right)(n-1)!}\left[1+\vartheta(n-1)\right]a_n z^{n-1}\right\}>-\alpha|\gamma| \tag{3.4.4}$$

elde edilir. Buradan z nin değerleri reel olarak seçilirse ve sonrasında (3.4.4) ifadesinde $z\to 1^-$ için limite geçildiğinde

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)(\beta)_{n-1}}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\mu\right)(n-1)!}\left[1+\vartheta(n-1)\right]a_n\le\alpha|\gamma|$$

eşitsizliği elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki (3.4.2) eşitsizliği sağlansın ve $|z|=1$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\left|(1-\vartheta)\frac{\varepsilon^{\beta}_{\lambda,\mu}f(z)}{z}+\vartheta\left(\varepsilon^{\beta}_{\lambda,\mu}f(z)\right)'-1\right| &\le\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)(\beta)_{n-1}}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\mu\right)(n-1)!}\left[1+\vartheta(n-1)\right]a_n z^{n-1}\right|\\ &\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)(\beta)_{n-1}}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\mu\right)(n-1)!}\left[1+\vartheta(n-1)\right]a_n\\ &\le\alpha|\gamma|\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, maksimum modül prensibine göre $f(z)\in\mathcal{S}^{n}_{\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ dır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

3.5 $\mathcal{S}^{n}_{\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ Sınıfı İçin İçerme Bağıntısı

Bu başlıkta $\mathcal{S}^{n}_{\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ sınıfı için $\mathcal{N}_{n,\delta}\left(e\right)$ yı kapsayan içerme bağıntısı verilmiştir

Teorem 3.5.1: Eğer,

$$\delta=\frac{2\alpha\left|\gamma\right|\Gamma\left(\lambda+\mu\right)}{\beta\left[1+\vartheta\right]\Gamma(\mu)} \qquad \left(\left|\gamma\right|<1\right) \tag{3.5.1}$$

ise $\mathcal{S}^{n}_{\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)\subset\mathcal{N}_{n,\delta}\left(e\right)$ dir.

İspat: $f(z)\in\mathcal{S}^{n}_{\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ olsun. Teorem 3.4.2 den

$$\frac{\beta\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\lambda+\mu\right)}\left[1+\vartheta\right]\sum_{n=2}^{\infty}a_n\le\alpha\left|\gamma\right|$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n\le\frac{\alpha\left|\gamma\right|}{\frac{\beta\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\lambda+\mu\right)}\left[1+\vartheta\right]} \tag{3.5.2}$$

elde edilir.

(3.4.2) ve (3.5.2) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\vartheta\frac{\beta\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\lambda+\mu\right)}\sum_{n=2}^{\infty}na_n&\le\alpha\left|\gamma\right|+\left(\vartheta-1\right)\frac{\beta\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\lambda+\mu\right)}\sum_{n=2}^{\infty}a_n\\&\le\alpha\left|\gamma\right|+\frac{\beta\left(\vartheta-1\right)\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\lambda+\mu\right)}\frac{\alpha\left|\gamma\right|\Gamma\left(\lambda+\mu\right)}{\beta\left(\vartheta+1\right)\Gamma(\mu)}\\&\le\frac{2\alpha\left|\gamma\right|}{\left(1+\vartheta\right)}=\delta\end{aligned}$$

bulunur.

Yani,

$$\sum_{n=2}^{\infty} na_n \leq \frac{2\alpha|\gamma|}{\frac{\Gamma(\mu)(\beta)}{\Gamma(\lambda+\mu)}[1+\vartheta]} = \delta$$

dır. Böylece, Tanım 2.4.3 ten $f(z) \in \mathcal{N}_{n,\delta}(e)$ olur ve teorem ispatlanmış olur.

3.6 $\mathcal{S}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ Sınıfı İçin Komşuluk Problemi

Bu bölümde $\mathcal{S}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ sınıfı için komşuluk problemi ele alınmıştır.

Bilindiği üzere;
$0 \leq \eta < 1$ ve $z \in U$ için

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)} - 1\right| < 1-\eta$$

olacak şekilde bir $g(z) \in \mathcal{S}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ varsa $f(z) \in \mathcal{S}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ dır.

Teorem 3.6.1: Eğer $g(z) \in \mathcal{S}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ ve

$$\eta = 1 - \frac{\delta\beta[1+\vartheta]\Gamma(\mu)}{2\left[\beta[1+\vartheta]\Gamma(\mu) - \alpha|\gamma|\Gamma(\lambda+\mu)\right]} \tag{3.6.1}$$

ise $\mathcal{N}_{n,\delta}(g) \subset \mathcal{S}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ dir.

İspat: $f(z) \in \mathcal{N}_{n,\delta}(g)$ olsun. O halde,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n - b_n| \leq \delta$$

ve

$$\sum_{n=2}^{\infty}|a_n-b_n|\leq\frac{\delta}{2} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

dir.

$g(z)\in\mathcal{S}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ olduğu için (3.5.2) eşitsizliğinden

$$\sum_{n=2}^{\infty}b_n\leq\frac{\alpha|\gamma|}{\frac{\beta\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}[1+\vartheta]} \tag{3.6.2}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z)}{g(z)}-1\right| &< \frac{\sum_{n=2}^{\infty}|a_n-b_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty}b_n}\\ &\leq\frac{\delta}{2}\frac{\frac{\beta\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}[1+\vartheta]}{\frac{\beta\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}[1+\vartheta]-\alpha|\gamma|}\\ &=1-\eta\end{aligned}$$

olur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında normalize edilmiş genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu ve Hadamard çarpımı yardımıyla elde edilen $\varepsilon_{\lambda,\mu}^{\beta} f(z)$ operatörünü içeren analitik fonksiyonların $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ ve $\mathcal{S}_{\lambda,\mu}^{n}(\alpha,\beta,\gamma;\vartheta)$ alt sınıfları tanımlanarak bu sınıflarına ait fonksiyonlar için katsayı eşitsizlikleri, içerme bağıntıları ve komşuluk problemleri teoremler ve sonuçlar şeklinde verilmiş ve ispatlanmıştır. Çalışmada bulunan sonuçlar özgün niteliktedir.

Araştırmacılar, bu tezden faydalanarak farklı normalize edilmiş özel fonksiyonlar ve Hadamard çarpımı yardımıyla yeni operatörler elde edip bu operatörleri içeren analitik fonksiyonların alt sınıflarını tanımlayabilirler. Bu alt sınıflar için katsayı eşitsizliği, içerme bağıntısı, komşuluk problemi ve kısmı toplamlar incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Almkvist, G. and Berndt, B. C., (1988). Gauss, Landen, Ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses, π and the Ladies Diary. Amer. Math. Monthly, 95, 585–608.

[2] Altıntaş, O. and Owa, S., (1996). Neighborhoods of certain analytic functions with negative coefficients. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 19 (4), 797-800.

[3] Anderson, G. D., Vamanamurthy, M. K. and Vuorinen, M., (1997). Conformal Invariants, Inequalities and Quasiconformal Maps. Wiley, New York.

[4] Andrews, G. E., Askey R. and Roy, R., (1999). Special Functions. Cambridge University Press.

[5] Bieberbach, L., (1916). Über die Koeffizienten derjenigen Pottenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys- Math. Kl., pp. 940-955.

[6] Brown, J. E., (1985). Some sharp neighborhoods of univalent functions. American Mathematical Society, 287 (2).

[7] Bulut, S., (2014). Neighborhood properties for certain subclasses of analytic functions of complex order with negative coefficients. Kyungpook Math. J., 54, no. 2, 211-220.

[8] Cataş, A., (2009). Neighborhoods of a certain class of analytic functions with negative coefficients. Banach J. Math. Anal., 3(1), 111-121.

[9] Conway, J. B., (1973). Functions of one complex variable. Springer-Verlag, 313p, New York.

[10] Çağlar, M. and Orhan, H., (2017). On neighborhood and partial sums problem for generalized Sakaguchi type functions. An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.), 63, no. 1, 17-28.

[11] Deniz, E. and Orhan, H., (2010a). Some properties of certain subclasses of analytic functions with negative coefficients by using generalized Ruscheweyh derivative operator. Czechoslovak Math. J., 60(3), 699-713.

[12] Deniz, E. and Orhan, H., (2010b). The Fekete-Szegö problem for a generalized subclass of analytic functions. Kyungpook Math. J., 50, 37-47.

[13] Duren, P. L., (1983). Univalent functions. 259. Springer, 378 p, New York, USA.

[14] Ebadian, A. and Kargar, R., (2018). Univalence of integral operators on neighborhoods of analytic functions. Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci., 42, no. 2, 911-915.

[15] Goodman, A. W., (1948). On some determinants related to p-valent functions. Trans. Amer. Math. Soc., 63, 175-192.

[16] Goodman, A. W., (1957). Univalent functions and nonanalytic curves. Proc. Amer. Math. Soc., 8, 598–601.

[17] Goodman, A. W., (1983). Univalent Functions. Mariner Publ. Co., Tampa, Fl, vol.I, 246 p, Florida, USA.

[18] Graham, I. R. and Kohr, G., (2003). Geometric function theory in one and higher dimensions. 255. CRC, 530 p, New York, USA.

[19] Hayman, W. K., (1994). Multivalent functions. Cambridge Univ Pr, 263 p, New York, USA.

[20] Koebe, P., (1907). Über die Uniformisierung beliebeger analytischer Kurven. Nach. Ges. Wiss. Gottingen, 191-210.

[21] Lang, K. R., (2013). Astrophysical Formulae: Space, time, matter and cosmology. Springer.

[22] Liu, M. S. and Huang, Y. Y., (2012). Neighborhoods of certain subclasses of close-to-convex and quasi-convex functions with respect to k-symmetric points. (Chinese) J. South China Normal Univ. Natur. Sci. Ed., 44, no. 1, 14-18.

[23] Loewner, C., (1917). Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z|<1$, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden. Ber. Verh. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig, 69, 89-106.

[24] Miller, S. S. and Mocanu, P., (2000). Differential subordinations: theory and applications. 225. CRC, 459 p, New York, USA.

[25] Mittag-Leffler M., (1903). Sur la fonction nouvelle. CR Acad. Sci., Paris, 2(137), 554–558.

[26] Nasr M. A. and Aouf M. K., (1985). Starlike functions of complex order. J. Natural Sci. Math., 25, 1-12.

[27] Orhan, H., (2015). $(\alpha,\beta,\lambda,\delta,m,\Omega)$p-neighborhood for some families of analytic and multivalent functions. An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa Ser. Mat., 23, no. 1, 225-236.

[28] Orhan, H. and Kadıoğlu, E., (2004). Neighborhoods of a class of analytic functions with negative coefficients. Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 20 (2), 135-142.

[29] Orhan, H. and Kamali, M., (2005). Neighborhoods of a class of analytic functions with negative coefficients. Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi.(NS), 21 (1), 55-61.

[30] Orhan, H., (2007). On neighborhoods of analytic functions defined by using Hadamard product. Novi Sad J. Math., 37(1), 17-25.

[31] Owa, S., Saitoh, H. and Nunokawa, M., (1993). Neighborhoods of certain analytic functions. Applied Mathematics Letters, 6 (4), 73-77.

[32] Palka, D., (1991). An introduction to complex function theory. Springer, New York.

[33] Prabhakar, T. R., (1997). A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel. Yokohama Math. J., 19, 7–15.

[34] Ruscheweyh, S., (1981). Neighborhoods of univalent functions. Proceedings of the American Mathematical Society, 81 (4), 521-527.

[35] Sağsöz, F. and Kamali, M., (2013). ($\varphi,\alpha,\delta,\lambda,\Omega$)p-neighborhood for some classes of multivalent functions. J. Inequal. Appl., 2013:152, 9 pp.

[36] Saxena, R., Mathai, A. and Haubold, H., (2002). On fractional kinetic equations. Astrophysics and Space Science, 282(1), 281–287.

[37] Walker, J. B., (1990). A note on neighborhoods of analytic functions having positive real part. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 13 (3), 425-429.

[38] Zirar, H., (2016). Neighborhood of a class of analytic functions with negative coefficients defined by the generalized Ruschewey derivatives involving a general fractional derivative operator. Jordan J. Math. Stat., 9, no. 2, 161-172.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Elif KAYA BÜYÜKYURT
Doğum Yeri ve Tarihi	: Kars / 10.11.1987
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (e-posta)	: kayelif@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise	: Kars Cumhuriyet Lisesi (2001-2005) (YDA)
Lisans	: Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü (2006-2010)
Yüksek Lisans	: Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :

- Esentepe İlköğretim Okulu - İstanbul (2011-2014)
- Şehit Okan Koç İmam Hatip Ortaokulu (2014-…)