T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ARROWHEAD-PELL VE ARROWHEAD-JACOBSTHAL TİPLİ DİZİLER

Yeşim AKÜZÜM
DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ömür DEVECİ

OCAK-2019
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ARROWHEAD-PELL VE ARROWHEAD-JACOBSTHAL TİPLİ DİZİLER

Yeşim AKÜZÜM
DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ömür DEVECİ

Bu tez çalışması 2017-FM-21 nolu proje ile Kafkas Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü tarafından desteklenmiştir.

OCAK-2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Yeşim AKÜZÜM'ün Prof. Dr. Ömür DEVECİ danışmanlığında Doktora tezi olarak hazırladığı "Arrowhead-Pell ve Arrowhead-Jacobsthal Tipli Diziler" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy . .Birliği. . . . . . . ile kabul edilmiştir.

25/ 01/ 2019

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Engin ÖZKAN	
Üye	: Prof. Dr. Erdal KARADUMAN	
Üye	: Prof. Dr. Ömür DEVECİ	
Üye	: Prof. Dr. Erhan DENİZ	
Üye	: Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Yeşim AKÜZÜM
25/ 01/ 2019

ÖZET

(Doktora Tezi)

ARROWHEAD-PELL VE ARROWHEAD-JACOBSTHAL TİPLİ DİZİLER

Yeşim AKÜZÜM

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ömür DEVECİ

Bu tezde, arrowhead-Pell ve arrowhead-Jacobsthal dizileri tanımlanmıştır. Tanımlanan dizilerin Binet formülleri, permanental, determinantal, üstel ve toplamsal temsilleri ve sonlu toplamları gibi çeşitli özellikleri verilmiştir. Ayrıca, tanımlanan dizilerin üreteç matrisleri m modülüne göre indirgenerek bu matrislerin kuvvetleri yardımıyla devirli gruplar üretilmiş ve dizilerin m modülüne göre periyotları belirlenmiştir. Üretilen devirli grupların mertebeleri ve dizilerin periyotları arasında bağıntılar elde edilmiştir. Buna ek olarak, arrowhead-Pell dizileri SD_{2^m} semidihedral grubunda ve arrowhead-Jacobsthal dizileri de Q_{2^m} genelleştirilmiş quaternion grubunda incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Arrowhead-Fibonacci Dizisi, Arrowhead-Pell Dizisi, Arrowhead-Jacobsthal Dizisi, Arrowhead Matris, Grup, Periyot.

2019, 84 Sayfa

ABSTRACT

(Ph.D. Thesis)

ARROWHEAD-PELL AND ARROWHEAD-JACOBSTHAL TYPE SEQUENCES

Yeşim AKÜZÜM

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor Prof. Dr. Ömür DEVECİ

In this thesis, arrowhead-Pell and arrowhead-Jacobsthal sequences were identified. Miscellaneous properties of defined sequences such as Binet formulas, permanent, determinantal, exponential and additive representations and finite totals were given. Also, cyclic groups were produced with the help of the force of these matrices by reducing according to the m modulo the generator matrices of the defined sequences and the periods of sequences were determined according to the m modulo. The relations between the order of the cyclic groups produced and the periods of the sequences were obtained. In addition, the arrowhead-Pell sequences were examined in the SD_{2^m} semidihedral group and the arrowhead-Jacobsthal sequences were also examined in the Q_{2^m} generalized quaternion group.

Key Words: Arrowhead-Fibonacci Sequence, Arrowhead-Pell Sequence, Arrowhead-Jacobsthal Sequence, Arrowhead Matrix, Group, Period.

2019, 84 pages

ÖNSÖZ

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır.

Tez konusunu veren, engin tecrübesiyle bana yol gösteren, çalışmalarımda etkin katkısı bulunan, vaktini ve bilgisini benden esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ömür DEVECİ'ye en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yeşim AKÜZÜM

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$H \leq G$	:	H, G nin alt grubu
$H \lhd G$	:	H, G nin normal alt grubu
$\det A$	:	A matrisinin determinant
$per(A)$	:	A matrisinin permanenti
$C(c_1, c_2, \ldots, c_v)$	:	$v \times v$ tipli bir Companion matris
$A \circ B$	:	A ve B matrislerinin Hadamard çarpımı
SD_{2^m}	:	Semidihedral grup
Q_{2^m}	:	Quaternion grup
$\{F_n^{(k)}\}$	:	k -basamak Fibonacci dizisi
$\{P_n^k\}$	:	Genelleştirilmiş k - mertebeden Pell sayıları
$\{J_n^i\}$	:	Genelleştirilmiş k - mertebeden Jacobsthal sayıları
$PerQ_k(G; x_0, \ldots, x_{j-1})$	:	Genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizisinin periyodu
$\{JP^k(n)\}$	:	Genelleştirilmiş k -mertebeden Jacobsthal-Padovan dizisi
$J_A^k(G)$	:	Genelleştirilmiş k -mertebeden Jacobsthal orbiti
$JP_A^k(G)$	:	Genelleştirilmiş k -mertebeden Jacobsthal-Padovan orbiti
M_k	:	Arrowhead-Pell matrisi
$AR_{k+1}(G : x, y)$	:	Arrowhead-pell orbiti
$LAR_{k+1}(G : x, y)$	:	Arrowhead-Pell orbitinin periyot uzunluğu
J_k	:	Arrowhead-Jacobsthal matrisi
$AJ_{k+1}(G : x_1, x_2, \ldots, x_j)$	:	Arrowhead-Jacobsthal orbiti
$HAJ_{k+1}(G : x_1, x_2, \ldots, x_j)$	:	Arrowhead-Jacobsthal orbitinin periyot uzunluğu

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi disiplinler arası ilişki noktasında indirgemeli dizilere sıkça rastlanmaktadır [1, 12, 39, 41, 49, 52, 59, 61].

Cebirsel anlamda indirgemeli dizilerin, üreteç matrisi, üreteç fonksiyonu, Binet formülü, üstel, permanental ve toplamsal temsilleri gibi çeşitli özellikleri birçok bilim insanı tarafından çalışılmış ve çalışılmaya devam edilmektedir. Bu çalışmalardan güncel olanlara örnek olarak [13, 21, 22, 31, 33, 34 40, 47, 55, 57, 58, 60, 66] çalışmaları verilebilir. Bu çalışmaların birçoğunda çeşitli sonuçlar elde edebilmek için indirgemeli dizilere karşılık gelen matrisler kullanılmıştır.

İndirgemeli diziler, cebirsel yapılara ilk olarak Wall'ın [67]'deki çalışması ile taşınmıştır. Wall bu çalışmasında devirli gruplarda standart Fibonacci dizisini incelemiştir. Daha sonra Wilcox [68]'deki çalışmasıyla teoriyi abelyen (değişmeli) gruplara genişletmiştir. Sonraki süreçte, konsept farklı indirgemeli diziler ve farklı cebirsel yapılara taşınmıştır. Bu çalışmaların güncel olanlarından bazıları [7, 10, 11, 14, 15, 17-19, 21, 25-29, 31, 35, 36, 44, 46, 50, 54, 62, 63]'deki çalışmalardır.

[6, 7, 18-20, 23, 26, 28-32, 45, 51, 62, 63]'deki çalışmalarda ise özel tanımlı matrisler kullanılarak devirli gruplar üretilmiş ve bu grupların mertebeleri için çeşitli kurallara ulaşılmıştır.

Önceki çalışmalarda indirgemeli diziler kullanılarak karesel matrisler üretilmişken, ilk olarak [7, 19, 20, 22, 23, 30, 31, 42] çalışmalarında, özel tanımlı karesel matrisler kullanılarak indirgemeli diziler elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasının 2. bölümünde, üzerinde çalışılacak gruplar ve lineer indirgemeli diziler hakkında temel bilgiler ve teoremler sunulmuştur.

3. bölümünde arrowhead-Fibonacci dizileri ve gruplara taşınmış farklı lineer indirgemeli diziler hakkında geniş bilgi verilmiştir.

Bu çalışmanın 4. bölümünde ise genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell dizisi ve genelleştirilmiş *k*-mertebeden Jacobsthal dizisi kullanılarak sırasıyla arrowhead-Pell ve arrowhead-Jacobsthal dizileri tanımlanmış, çeşitli özellikleri belirlenmiş ve bu dizler gruplara taşınmıştır. Bu anlamda;

Aküzüm ve Deveci [3]'deki çalışmalarında, genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell dizisinin karakteristik polinomu üzerinden arrowhead matrisi ve bu matris yardımıyla da arrowhead-Pell dizisini tanımlamışlardır. Ayrıca tanımlanan bu dizi için Binet formülü, permanental, determinantal, üstel ve toplamsal temsilleri ve sonlu toplam gibi çeşitli özellikleri belirlemişlerdir. [4]'deki çalışmalarında ise arrowhead-Pell dizilerinin üreteç matrisi olan arrowhead-Pell matirisini göz önüne almışlardır. Böylece bu matrisi m modülüne göre indirgenmesi suretiyle, üreteç matris olarak seçilip devirli gruplar elde etmişlerdir. Daha sonra arrowhead-Pell dizisinin m modülüne göre periyotlarını belirlemişlerdir. Ayrıca üretilen devirli grupların mertebeleri ile dizinin periyotları arasında bağıntılar elde etmişlerdir. Buna ek olarak, Aküzüm, Doğan ve Deveci [8]'deki çalışmalarında ise arrowhead-Pell dizilerini SD_{2^m} semidihedral grubunda incelemiş ve periyot uzunluklarını hesaplamışlardır.

Aküzüm ve Deveci [9]'daki çalışmalarında, arrowhead-Jacobsthal dizilerini tanımlamışlardır ve tanımlanan bu dizi için Binet formülü, permanental, determinantal, üstel ve toplamsal temsilleri ve sonlu toplamı gibi çeşitli özellikleri belirlemişlerdir. [5]'deki çalışmalarında ise arrowhead-Jacobsthal matirisini göz önüne almışlar ve bu matris m modülüne göre indirgenmesi suretiyle, devirli gruplar elde etmişlerdir. Daha sonra arrowhead-Jacobsthal dizisinin m modülüne göre periyotlarını elde etmişlerdir. Ayrıca, Deveci ve Aküzüm [24]'deki çalışmalarında ise arrowhead-Jacobsthal dizilerini Q_{2^m} genelleştirilmiş quaternion grubunda incelemiş ve periyot uzunluklarını hesaplamışlardır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

<u>*Tanım 2.1.1:*</u> G bir grup ve $\varnothing \neq H \subseteq G$ bir alt küme olsun. H, G de tanımlanan ikili işleme göre bir grup ise H ya, G nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

<u>*Tanım 2.1.2:*</u> G bir grup ve $\varnothing \neq A \subseteq G$ olsun. G grubunun A yı içeren bütün alt gruplarının ailesinin ara kesitini $< A >$ ile gösterelim. Bu takdirde $< A >$, G nin bir alt grubudur. Bu alt grup A yı içeren en küçük alt gruptur ve A tarafından üretilen alt grup olarak adlandırılır.

<u>*Tanım 2.1.3:*</u> G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer her $g \in G$ için $gHg^{-1} = H$ oluyorsa H ya, G nin bir normal alt grubu denir ve $H \lhd G$ ile gösterilir.

<u>*Tanım 2.1.4:*</u> G bir grup olmak üzere $H = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ alt grubuna G nin a elemanı tarafından üretilen devirli alt grubu denir ve $\langle a \rangle$ ile gösterilir.

Yani,

$$\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\} = H$$

dır. Buradan hareketle devirli grubu şu şekilde de tanımlayabiliriz:

G bir grup olmak üzere G de $G = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ olacak şekilde bir a elamanı varsa, bu takdirde G grubuna devirli grup denir. Böylece bir a elamanına G nin üreteci denir ve $G = \langle a \rangle$ şeklinde gösterilir [65].

<u>*Tanım 2.1.5:*</u> G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. Eğer G nin her elemanı S nin elemanlarının ve bu elemanların terslerinin sonlu bir çarpımı olarak yazılabiliyorsa S kümesi, G grubunun gerenlerinin bir kümesi olarak adlandırılır [37].

Tanım 2.1.6: Bir gruptaki gerenlerin sağladıkları denklemlere bu gruptaki bağıntılar denir [37].

Tanım 2.1.7: G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. Eğer G nin herhangi bir elemanı S nin sonlu sayıdaki elemanlarının ve bu elemanların terslerinin bir çarpımı olarak tek türlü yazılabiliyorsa G grubuna S kümesi üzerinde serbesttir denir.

Tanım 2.1.8: G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. G nin S alt kümesini kapsayan en küçük normal alt grubuna S alt kümesinin normal kümesinin normal kapanışı denir.

Tanım 2.1.9: X bir küme; $F(X)$, X üzerinde serbest grup ve $R \subseteq F(X)$ olmak üzere $\overline{R}$, $F(X)$ deki R kümesinin normal kapanışı olsun. Yani, $\langle g^{-1}rg : g \in F(X), r \in R \rangle$ kümesi ile $F(X)$ in alt grubu verilmiş olsun. Bu durumda eğer $G \cong F(X)/\overline{R}$ ise G grubu $\langle X : R \rangle$ şeklindeki takdim ile tanımlanmıştır denilir [14].

Tanım 2.1.10: G, $p = \langle x_1, x_2, \cdots, x_n : r_1, r_2, \cdots, r_m \rangle$ takdimi ile tanımlanmış bir grup olsun. p nin bağıntı matrisi $m \times n$ tipinde bir matris olup, bu matrisin herhangi bir b_{ij} elemanı r_i bağıntısındaki x_j gerenlerinin üstlerinin toplamıdır [14].

Tanım 2.1.11: $(G,*)$ ve $(H,\circ)$ iki grup olmak üzere, eğer $\varphi : G \to H$ dönüşümü $\forall x, y \in G$ için

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

şartını sağlıyorsa φ ye bir grup homomorfizmi ya da kısaca bir homomorfizm denir [65].

Tanım 2.1.12: $\varphi : G \to H$, örten bir grup homomorfizmi ise φ ye bir epimorfizm denir [65].

Tanım 2.1.13: $\varphi : G \to H$, $1-1$ bir grup homomorfizmi ise φ ye bir monomorfizm denir [65].

Tanım 2.1.14: $\varphi : G \to H$, $1-1$ ve örten bir grup homomorfizmi ise φ ye bir grup izomorfizmi denir ve $G \cong H$ şeklinde gösterilir [65].
İzomorf gruplar arasında bire bir eşleme olup grup yapıları da bu eşleme altında bozulmaz.

Tanım 2.1.15: $\varphi : G \to G$ homomorfizmine endomorfizm denir. Eğer φ, $1-1$ ve örten bir grup homomorfizmi ise φ ye bir grup otomorfizmi denir [65].

Tanım 2.1.16: G bir grup ve $a \in G$ olmak üzere $\forall x \in G$ için $\mathrm{I}_a(x) = axa^{-1}$ ile tanımlanan $\mathrm{I}_a : G \to G$ otomorfizmine G grubunun iç otomorfizmi denir. G grubunun bütün iç otomorfizmlerinin kümesi $I(G)$, bütün otomorfizmlerinin kümeside $Aut(G)$ ile gösterilir [65].

Tanım 2.1.17: C_q devirli grubu bir tek $x^q = e$ bağıntısıyla tanımlanır ki bu bağıntı her elemanı kendisinin tersine götüren bir dış otomorfizm olarak kabul edilebilir. Bu dış otomorfizme göre C_q ya dönüşen ve $r_1^2 = e$ olan yeni bir r_1 elemanı ekleyerek; x, r_1 elemanları tarafından gerilen ve

$$\left\langle x,\ r_1 :\ x^q = r_1^2 = (xr_1)^2 = e \right\rangle$$

şeklinde takdim edilen $2q$ mertebeden bir grup elde edilebilir. Bu gruba dihedral grup denir ve D_q ile gösterilir. Eğer $r_2 = r_1 x$ denilirse bu grup

$$\left\langle r_1,\ r_2 :\ r_1^2 = r_2^2 = (r_1 r_2)^q = e \right\rangle$$

şeklinde takdim edilebilir. Bu takdime göre, $q = 2m$ ise bu gruba çift dihedral grup denir ve D_{2m} ile gösterilir. D_{2m} çift dihedral grup, $z = (r_1 r_2)^m$ ile gerilmiş mertebesi 2 olan bir merkeze sahiptir. Eğer m çift ise r_1 ve $r = r_2 z$ elemanları $r_1^2 = r^2 = (r_1 r)^m = e$ bağıntılarını sağlar. Bu bağıntılar yardımıyla r_1 ve r elemanları tarafından gerilen ve

$$\langle r_1,\ r:\ r_1^2 = r^2 = (r_1 r)^m = e \rangle$$

şeklinde takdim edilen D_m dihedral grubu elde edilebilir ki bu grup ise $D_{2m} \cong C_2 \times D_m$ dir. Eğer $m = 1$ ise r_1 ve r_2 elemanları ile üretilmiş mertebesi 4 olan ve

$$\langle r_1,\ r_2:\ r_1^2 = r_2^2 = (r_1 r_2)^2 = e \rangle$$

şeklinde takdim edilen D_2 four-grubu elde edilebilir ki bu grup ise $D_2 \cong C_2 \times D_1 \cong C_2 \times C_2$ dir.

<u>*Tanım 2.1.18:*</u> Her $m \geq 4$ için SD_{2^m} grubu

$$SD_{2^m} = \langle a, b \mid a^{2^{m-1}} = b^2 = e, b^{-1}ab = a^{-1+2^{m-2}} \rangle$$

şeklinde takdim edilirse 2^m mertebeli bir semidihedral grubu olarak tanımlanır. Burada a ve b nin mertebeleri sırasıyla 2^{m-1} and 2 dir.

<u>*Tanım 2.1.19:*</u> $m \geq 3$ için Q_{2^m} quaternion grubu

$$Q_{2^m} = \langle x, y : x^{2^{m-1}} = e, y^2 = x^{2^{m-2}}, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$$

şeklinde takdim edilir.

<u>*Tanım 2.1.20:*</u> $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ boyutlu bir kare matris ise $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ elemanlarına A nın esas köşegen elemanları denir. Bir kare matriste esas köşegen dışındaki elemanlar sıfırsa bu matrise köşegen matris denir [2].

<u>*Tanım 2.1.21:*</u> Eğer A, $n \times n$ boyutlu bir kare matris ve I, $n \times n$ boyutlu birim matris olmak üzere

$$AB = BA = I$$

olacak şekilde bir $n \times n$ boyutlu B matrisi varsa, bu takdirde B matrisine A matrisinin tersi denir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir. Tersi olan matrislere de ters çevrilebilir (düzgün yada tekil olmayan) matrisler denir [64].

__Tanım 2.1.22:__ $A = \left[a_{ij}\right]$, $n \times n$ boyutlu bir kare matris olmak üzere, A matrisinin determinantı,

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Burada S_n, simetrik (permütasyon) grup ve $\operatorname{sgn}(\sigma)$;

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1; & \sigma \text{ çift ise} \\ -1; & \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan işaret fonksiyonudur [64].

__Teorem 2.1.1:__ Bir A kare matrisinin ters çevrilebilir olması için gerek ve yeter şart $\det A \neq 0$ olmasıdır [64].

__Tanım 2.1.23:__ Bir $A \in M_n(F)$ matrisinin permanenti $p(A)$ veya $per(A)$ ile gösterilir ve

$$per(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

şeklinde tanımlanır [64].

__Tanım 2.1.24:__ $A = \left[a_{ij}\right]$, $n \times n$ boyutlu bir kare matris olsun ve M_{ij}, a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütunun silinmesiyle A dan elde edilen $(n-1)\times(n-1)$ boyutlu matris olsun. M_{ij} matrisinin determinantına a_{ij} elemanının minörü denir. Ayrıca

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \left|M_{ij}\right|$$

değerine a_{ij} elemanının eşçarpanı (kofaktörü) denir [2].

Teorem 2.1.2: $n \geq 2$ olmak üzere A, $n \times n$ boyutlu bir kare matris olsun. $i = 1, 2, \ldots, n$ ve $j = 1, 2, \ldots, n$ için

$$\det(A) = |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

dir. Determinantın bu şekilde hesaplanmasına Laplace açılımı denir [2].

Tanım 2.1.25: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ve $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ olmak üzere, $AX = \lambda X$ denklemini sağlayan λ ya A matrisinin özdeğeri veya karakteristik değeri denir.

$AX = \lambda X$ denkleminden, $(AX - \lambda X) = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)X = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklem bir lineer homojen denklem sistemini verir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümü olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Yani

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. $|A - \lambda I|$ ifadesi λ ya göre n. dereceden bir polinom olup bu polinoma A matrisinin karakteristik polinomu denir. $|A - \lambda I| = 0$ denklemine de A matrisinin karakteristik denklemi denir. Karakteristik polinom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

şeklinde bir polinomdur [2].

Tanım 2.1.26: A bir kare matris ve λ, A nın bir özdeğeri olmak üzere

$$AX = \lambda X$$

denklemini sağlayan X vektörüne λ özdeğerine karşılık gelen özvektör ya da karakteristik vektör denir [2].

Tanım 2.1.27: A ve B, $n \times n$ boyutlu iki kare matris olmak üzere

$$B = P^{-1}AP$$

olacak şekilde tekil olmayan (yani $\det P \neq 0$) bir P matrisi varsa, bu takdirde A ve B matrislerine benzerdir denir [64].

Tanım 2.1.28: Eğer verilen bir $n \times n$ boyutlu A matrisi bir D köşegen matrisine benzer ise, o takdirde A matrisine köşegenleştirilebilirdir denir. Diğer bir deyimle D köşegen bir matris olmak üzere

$$P^{-1}AP = D$$

olacak şekilde tekil olmayan bir P matrisi varsa, bu takdirde A matrislerine köşegenleştirilebilirdir denir [64].

Teorem 2.1.3: Bir $n \times n$ boyutlu A kare matrisinin köşegenleştirilebilir olması için yani $D = P^{-1}AP$ olacak şekilde bir D köşegen matrisine benzer olması için gerek ve yeter şart A matrisinin lineer bağımsız özvektörlere sahip olması gerekir. Üstelik bu durumda D nin köşegen elemanları A nın özdeğerleridir [64].

İspat: $\Rightarrow$: A köşegenlneştirilebilir bir matris olsun. Yani $D = P^{-1}AP$ olacak şekilde bir A matrisi D köşegen matrisine benzer olsun. O takdirde $D = P^{-1}AP$ eşitliğinden $AP = PD$ yazılır. Kabul edelim ki; P ve D matrisleri aşağıdaki gibi olsun:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \text{ ve } D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

O zaman

$$AP = PD = \begin{bmatrix} d_{11}p_{11} & d_{22}p_{12} & \cdots & d_{nn}p_{1n} \\ d_{11}p_{21} & d_{22}p_{22} & \cdots & d_{nn}p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{11}p_{n1} & d_{22}p_{n2} & \cdots & d_{nn}p_{nn} \end{bmatrix}$$

olur. P matrisinin sütun vektörleri p_i ile gösterilsin. Bu durumda yukarıdaki matrisin denklemi

$$Ap_i = d_{ii}p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

şeklinde ifade edilebilir. P ters çevrilebilir bir matris olduğundan p_i vektörlerinin hiçbiri sıfır vektörü olamaz. Böylece, $Ap_i = d_{ii} p_i$ $(1 \le i \le n)$ eşitliğinden p_i lerin d_{ii} özdeğerlerine karşılık gelen A nın özvektörleri olduğu görülür. Üstelik P ters çevrilebilir bir matris olduğundan onun sütun vektörleri istenildiği gibi lineer bağımsız olmak zorundadır.

$\Leftarrow$: A matrisi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ özdeğerlerine karşılık gelen n-tane lineer bağımsız $p_1, p_2, \ldots, p_n$ özvektörlerine sahip ise, o takdirde P matrisini sütun vektörleri p_i $(1 \le i \le n)$ ler olmak üzere $P = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$ şeklinde teşkil edilebilir. P nin sütun vektörleri lineer bağımsız olduğundan P matrisi ters çevrilebilir bir matris olur. Böylece

$$\begin{aligned} AP &= [Ap_1, Ap_2, \ldots, Ap_n] \\ &= [\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \ldots, \lambda_n p_n] \\ &= P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= PD \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ise $D = P^{-1}AP$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla A matrisinin esas köşegeni üzerindeki elemanları A nın özdeğerleri olan bir D köşegen matrisine benzer olduğunu yani A matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu ifade eder.

Tanım 2.1.29: İlk satır, ilk sütun ve ana köşegen hariç tüm elemanları sıfır olan bir kare matris arrowhead matris olarak adlandırılır. Başka bir deyişle,

$$A = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m_{31} & 0 & m_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m_{n-11} & 0 & \cdots & 0 & m_{n-1n-1} & 0 \\ m_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{nn} \end{bmatrix}$$

formundaki bir karesel matrise arrowhead matrisi denir [53].

Tanım 2.1.30: $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$ monik polinomuna karşılık gelen Companion matris aşağıdaki gibidir:

$$C=\left[c_{ij}\right]_{n\times n}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix}.$$

Teorem 2.1.4: $v\times v$ boyutlu $K(k_1,k_2,\ldots,k_v)$ Companion matrisi

$$K(k_1,k_2,\ldots,k_v)=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_v\\ 1 & 0 & & 0\\ \vdots & \ddots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilsin. Bu durumda, $K^u(k_1,k_2,\ldots,k_v)$ matrisinin $i.$ satır ve $j.$ sütunundaki elamanı

$$k_{i,j}^{(u)}(k_1,k_2,\ldots,k_v)=\sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_v)}\frac{t_j+t_{j+1}+\cdots+t_v}{t_1+t_2+\cdots+t_v}\times\binom{t_1+\cdots+t_v}{t_1,\ldots,t_v}k_1^{t_1}\cdots k_v^{t_v} \tag{2.1.1}$$

olup burada toplam, negatif olmayan tam sayılar üzerinden $t_1+2t_2+\cdots+vt_v=u-i+j$ koşulunu sağlamaktadır ve $\binom{t_1+\cdots+t_v}{t_1,\ldots,t_v}=\frac{(t_1+\cdots+t_v)!}{t_1!\cdots t_v!}$ çok katlı bir katsayıdır. Eğer $u=i-j$ ise (2.1.1) denklemindeki katsayılar 1 olarak tanımlanır [16].

Tanım 2.1.31: $x_1,x_2,\ldots,x_n$ sayıları için $n\times n$ boyutlu Vandermonde matrisi

$$V_n=\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır [56].

Tanım 2.1.32: $A=\left[a_{ij}\right]$ ve $B=\left[b_{ij}\right]$ matrisleri $m\times n$ boyutlu matrisler olsun. $A\circ B=\left[a_{ij}b_{ij}\right]_{m\times n}$ çarpımına A ile B matrislerinin Hadamard çarpımı denir.

Tanım 2.1.33: Bir M matrisi için $perM=\det\left(M\circ K\right)$ olacak şekilde bir $n\times n$ boyutlu (1, -1) K matrisi var ise, o takdirde M matrisi değiştirilebilir (convertible) bir matris olarak adlandırılır. Burada $M\circ K$ notasyonu ile Hadamard çarpımı gösterilmektedir.

Tanım 2.1.34: R değişmeli ve birimli bir halka, $c_i\in R\left(0\le i\le k-1\right)$ sabit katsayılar ve $n\in N$ olsun. $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ başlangıç değerleri olmak üzere $n\ge 0$ için

$$a_{n+k}=c_0a_n+c_1a_{n+1}+\cdots+c_{k-1}a_{n+k-1} \tag{2.1.2}$$

şeklindeki *k*-basamak homojen lineer indirgemeli bağıntı yardımıyla tanımlanan $\{a_n\}$ dizisine R halkasının elemanlarının lineer indirgemeli dizisi denir [38].

Tanım 2.1.35: $f\left(x\right)=x^k+c_1x^{k-1}+\cdots+c_{k-1}x+c_k$ şeklindeki k dereceden polinoma, (2.1.2) denkleminde ifade edilen lineer indirgemeli bağıntı için karakteristik polinom denir.

Sırayla 2 ve 3 mertebeli lineer indirgemeli diziler binary ve ternory lineer indirgemeli diziler diye adlandırılır. Ayrıca $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlanan lineer indirgemeli diziler sırayla, tam sayı, rasyonel, reel ve kompleks lineer indirgemeli diziler olarak adlandırılır.

c_k , R nin terslenebilir bir elemanı ise (2.1.2) de tanımlanan dizi $a_0, a_{-1}, a_{-2}, \ldots,$ şeklinde devam eder [38].

Eğer R sıfır bölene sahip değilse bu durumda $\{a\}$ dizisi minimal uzunluktaki bir dizisinin minimal polinomudur. Minimal polinomun derecesine $\{a\}$ dizisinin mertebesi denir.

Tanım 2.1.36: $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ başlangıç değeri ve $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ ler sabitler olmak üzere

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + c_{k-1} a_{n+k-1}$$

şeklindeki *k*-basamak lineer indirgeme bağıntısıyla tanımlanan dizinin elemanları:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$A^n \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+k} \end{bmatrix}$$

şeklindeki denklem yardımıyla elde edilmiştir [43].

Tanım 2.1.37: $n \geq 0$ ve $F_0^k = \cdots = F_{k-2}^k = 0$ ve $F_{k-1}^k = 1$ başlangıç değerleri ile $F_{n+k}^k = F_{n+k-1}^k + F_{n+k-2}^k + \cdots + F_n^k$ şeklinde tanımlanan lineer indirgemeli diziye *k*-basamak Fibonacci dizisi denir.

Tanım 2.1.38: $n > 0$ ve $1 \leq i \leq k$ için genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell sayılarının *k* dizileri

$$P_n^i = \begin{cases} 1 & n = 1\text{-}i \text{ ise,} \\ 0 & \text{diğer durumlarda,} \end{cases} \quad 1-k \leq n \leq 0$$

başlangıç koşullarıyla

$$P_n^i = 2P_{n-1}^i + P_{n-2}^i + \cdots + P_{n-k}^i$$

şeklinde tanımlanır. Burada P_n^i, dizinin n. terimidir. $k = 2$ ve $i = 1$ için genelleştirilmiş *k*-mertebeden $\{P_n^k\}$ Pell dizisi, Pell dizisine indirgenir [48].

Ayrıca Kılıç ve Taşçı [48]'de genelleştirilmiş k-mertebeden Pell matrisini

$$R=\left[r_{ij}\right]_{k\times k}=\begin{bmatrix}2 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlamışlardır.

$$E_n=\left[e_{ij}\right]_{k\times k}=\begin{bmatrix}P_n^1 & P_n^2 & \cdots & P_n^k\\ P_{n-1}^1 & P_{n-1}^2 & \cdots & P_{n-1}^k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ P_{n-1+k}^1 & P_{n-1+k}^2 & \cdots & P_{n-1+k}^k\end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$E_{n+1}=R\cdot E_n$$

eşitliğini elde etmişlerdir [48].

Tanım 2.1.39: $n>0$ ve $1\le i\le k$ için genelleştirilmiş *k*-mertebeden Jacobsthal sayılarının *k* dizileri

$$J_n^i=\begin{cases}1 & i+n=1 \text{ ise},\\ 0 & \text{diğer durumlarda},\end{cases}\quad 1-k\le n\le 0$$

başlangıç koşullarıyla

$$J_n^i=J_{n-1}^i+2J_{n-2}^i+\cdots+J_{n-k}^i$$

şeklinde tanımlanır. Burada J_n^i, dizinin *n.* terimidir. $k=2$ ve $i=1$ için genelleştirilmiş *k*-mertebeden $\left\{J_n^k\right\}$ Jacobsthal dizisi, Jacobsthal dizisine indirgenir [70].

Tanım 2.1.40: Bir dizi belli bir noktadan sonra bir alt dizinin tekrarı şeklinde meydana geliyorsa bu diziye periyodiktir denir. Örneğin; $x,y,z,q,w,z,q,w,z,q,w,\ldots$ dizisi periyodiktir ve periyodu 3 tür.

Tanım 2.1.41: Bir dizideki ilk *k* eleman tekrar eden bir alt dizi şeklinde ise bu diziye *k* periyotlu basit periyodik dizi denir. Örneğin $x,y,z,q,w,x,y,z,q,w,\ldots$ dizisi basit periyodik olup periyodu 5 dir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Sonlu Gruplarda Pell Dizileri

3.1.1. m Modülüne Göre Genelleştirilmiş k-mertebeden Pell Dizileri

Genelleştirilmiş k-mertebeden Pell Dizisi m modülüne göre indirgenirse, tekrar eden,

$$\left\{P^{k,m}\right\} = \left\{P_{1-k}^{k,m}, P_{2-k}^{k,m}, \ldots, P_{0}^{k,m}, P_{1}^{k,m}, P_{2}^{k,m}, \ldots, P_{n}^{k,m}, \ldots\right\},$$

dizisi elde edilir ve burada $P_n^{k,m} \equiv P_n^k \pmod{m}$ dir [28].

<u>*Teorem 3.1.1.1:*</u> $\left\{P^{k,m}\right\}$ dizisi periyodik bir dizidir [28].

<u>İspat:</u> $U_k = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \middle| 0 \le x_i \le m-1\right\}$ olsun. $|U_k| = m^k$ olup sonludur, yani her $a \ge 0$ için $P_{a+1}^{k,m} = P_{b+1}^{k,m}, \ldots, P_{a+k}^{k,m} = P_{b+k}^{k,m}$ olacak şekilde $b \ge a$ sayısı vardır. $\left\{P_n^k\right\}$ genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisinin tanımından $P_{n+k}^k = 2P_{n+k-1}^k + P_{n+k-2}^k + \cdots + P_n^k$ olur. Yani $P_n^k = P_{n+k}^k - 2P_{n+k-1}^k - P_{n+k-2}^k - \cdots - P_{n+1}^k$ dir. Buradan $P_a^{k,m} = P_b^{k,m}$, $P_{a-1}^{k,m} = P_{b-1}^{k,m}, \ldots, P_2^{k,m} = P_{b-a+2}^{k,m}$ ve $P_1^{k,m} = P_{b-a+1}^{k,m}$ olduğu görülür. Böylece $\left\{P^{k,m}\right\}$ dizisi periyodik bir dizidir.

$hP_k(m)$ ile $\left\{P^{k,m}\right\}$ nin en küçük periyodu gösterilir ve m modülüne göre genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisinin periyodu olarak adlandırılır. $k=2$ olduğu durumda $hP_2(m)$, m modülüne göre Pell dizisinin periyodunu göstermektedir [28].

<u>*Örnek 3.1.1.1:*</u> $\left\{P^{3,3}\right\} = \{1, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 2, \ldots\}$ dizisi ele alınırsa, bu dizi her 6 terimde bir başlangıç elemanlarıyla tekrar eder. Böylece $hP_3(3) = 6$ olur [28].

<u>*Teorem 3.1.1.2:*</u> $u \in \mathbb{N}$ için $hP_2\left(2^u\right) = 2^u$ dir [28].

İspat: $\{P_n\}$ Pell dizisinin tanımından, $u \in \mathbb{N}$ için $P_{2^u} = 2P_{2^u-1} + P_{2^u-2} = 2^u \lambda \ (\lambda \in \mathbb{N})$ ve $P_{2^u+1} = 2P_{2^u} + P_{2^u-1} = 2^{u+1}\lambda + 2^u \beta + 1 \ (\beta \in \mathbb{N})$ elde edilir. Burada $P_{2^u} \equiv 0 \pmod{2^u}$ ve $P_{2^u+1} \equiv 1 \pmod{2^u}$ olduğundan dizi, (2^u)-inci eleman ile tekrar başlar yani, $P_{2^u} \equiv P_0 \pmod{2^u}, P_{2^u+1} \equiv P_1 \pmod{2^u}, \ldots$ olur. Böylece $hP_2(2^u) = 2^u$ olduğu görülür.

Teorem 3.1.1.3: $hP_2(m)$ bir çift sayıdır [28].

İspat: $P_\alpha \equiv P_\phi \pmod{m}$ ve $P_{\alpha+1} \equiv P_{\phi+1} \pmod{m}$ olsun. $\{P_n\}$ Pell dizisinin tanımından:

i. P_ϕ tek ise $P_{\phi+1}$ çifttir.

ii. P_ϕ çift ise $P_{\phi+1}$ tektir.

Bu durumda $hP_2(m)$, 2 ile bölünebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Verilen bir $A = (a_{ij})$ matrisi için, A nın her elemanının m modülüne göre indirgenmesi $A \pmod{m}$ şeklinde ifade edilir. Yani, $A \pmod{m} \equiv (a_{ij} \pmod{m})$ dir. R genelleştirilmiş k-mertebeden Pell matrisi olmak üzere $\langle R \rangle_{p^\alpha} = \left\{ R^i \pmod{p^\alpha} \middle| i \geq 0 \right\}$ bir devirli gruptur [28].

$\left| \langle R \rangle_{p^\alpha} \right|$ ile $\langle R \rangle_{p^\alpha}$ nin mertebesi gösterilmiştir.

Teorem 3.1.1.4: $hP_k(p^\alpha) = \left| \langle R \rangle_{p^\alpha} \right|$ dir [28].

İspat: $\left| \langle R \rangle_{p^\alpha} \right|$ nin $hP_k(p^\alpha)$ tarafından bölünebileceği açıktır. Bu durumda sadece $hP_k(p^\alpha)$ in $\left| \langle R \rangle_{p^\alpha} \right|$ tarafından bölünebileceğini kanıtlamak gerekir. $hP_k(p^\alpha) = n$ olsun ve diğer taraftan $E_{n+1} = R^{n+1} = R \cdot E_n$ olduğu bilinmektedir. $E_n \equiv I \pmod{p^\alpha}$ olduğundan

$R^{n+1} \equiv R\left(\text{mod } p^{\alpha}\right)$ denkliği elde edilir. Burada I birim matristir. Böylece $R^{n} \equiv I\left(\text{mod } p^{\alpha}\right)$ denkliği elde edilir ki bu da n nin $\left|\langle R\rangle_{p^{\alpha}}\right|$ ye bölündüğünü gösterir.

<u>Teorem 3.1.1.5:</u> p_i ler farklı asal sayılar olmak üzere $m=\prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}, (t \geq 1)$ ise $hP_k(m)=\text{okek}\left[hP_k\left(p_i^{e_i}\right)\right]$ olur. Burada $\text{okek}\left[hP_k\left(p_i^{e_i}\right)\right]$, $hP_k\left(p_i^{e_i}\right)$ lerin en küçük ortak katını gösterir [28].

<u>İspat:</u> $\text{okek}\left[hP_k\left(p_i^{e_i}\right)\right]=\delta$ olsun. $P_{\delta}^{k} \equiv P_0^{k} (\text{mod } m)$, $P_{\delta+1}^{k} \equiv P_1^{k} (\text{mod } m), \ldots,$ $P_{\delta+k-1}^{k} \equiv P_{k-1}^{k} (\text{mod } m)$ olduğundan $hP_k(m)=\text{okek}\left[hP_k\left(p_i^{e_i}\right)\right]$ eşitliği elde edilir.

<u>Teorem 3.1.1.6:</u> t, $hP_k(p)=hP_k\left(p^{t}\right)$ olacak şekilde en büyük pozitif tam sayı olsun. Bu takdirde her $\alpha \geq t$ için, $hP_k\left(p^{\alpha}\right)=p^{\alpha-t} hP_k(p)$ olur. Özellikle $hP_k(p) \neq hP_k\left(p^{2}\right)$ ise her $\alpha>1$ için, $hP_k\left(p^{\alpha}\right)=p^{\alpha-1} \cdot hP_k(p)$ dir [28].

<u>İspat:</u> θ pozitif bir tam sayı olsun. $R^{hP_k\left(p^{\theta+1}\right)} \equiv I\left(\text{mod } p^{\theta+1}\right)$ yani, $R^{hP_k\left(p^{\theta+1}\right)} \equiv I\left(\text{mod } p^{\theta}\right)$ olduğundan dolayı $hP_k\left(p^{\theta}\right)$ nin $hP_k\left(p^{\theta+1}\right)$ yi böldüğü görülmektedir. Öte yandan $R^{hP_k\left(p^{\theta}\right)}=I+\left(a_{ij}^{(\theta)} p^{\theta}\right)$ yazılarak

$$R^{hP_k\left(p^{\theta}\right) p}=\left(I+\left(a_{ij}^{(\theta)} p^{\theta}\right)\right)^{p}=\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\left(a_{ij}^{(\theta)} p^{\theta}\right)^{i} \equiv I\left(\text{mod } p^{\theta+1}\right)$$

eşitliği elde edilir ki, bu eşitlik yardımıyla $hP_k\left(p^{\theta+1}\right)$ nin $hP_k\left(p^{\theta}\right) p$ yi böldüğü sonucuna ulaşılmaktadır. Böylece ya $hP_k\left(p^{\theta+1}\right)=hP_k\left(p^{\theta}\right)$ ya da $hP_k\left(p^{\theta+1}\right)=hP_k\left(p^{\theta}\right) p$ olduğunu gösterir ki buradaki ikinci durum, ancak ve ancak p tarafından bölünemeyen bir $a_{ij}^{(\theta)}$ nin varlığı ile mümkündür. $hP_k\left(p^{t}\right) \neq hP_k\left(p^{t+1}\right)$

olduğundan p tarafından bölünemeyen bir $a_{ij}^{(\theta)}$ vardır. Böylece $hP_k\left(p^{t+1}\right) \neq hP_k\left(p^{t+2}\right)$ dir. t üzerinde tümevarım yöntemiyle ispat tamamlanmış olur.

Varsayım 3.1.1.1: $p \geq k$ ise, bu takdirde $hP_k\left(p\right)$ nin $\left(p^k - p^{\sigma}\right)$ yi bölebilecek şekilde $0 \leq \sigma \leq k-1$ aralığından bir σ vardır [28].

3.1.2. Sonlu Gruplarda Genelleştirilmiş k-mertebeden Pell Dizileri

Tanım 3.1.2.1: Sonlu bir gruptaki genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisi, grubun $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ elemanlarının bir dizisidir. Burada dizinin her bir elemanı, verilen $x_0, \ldots, x_{j-1}$ başlangıç elemanları için

$$x_n = \begin{cases} x_0 x_1 \cdots \left(x_{n-1}\right)^2, & j \leq n < k \text{ için} \\ x_{n-k} x_{n-k+1} \cdots \left(x_{n-1}\right)^2, & n \geq k \text{ için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [28].

$x_0, \ldots, x_{j-1}$ elemanları tarafından üretilen bir gruptaki genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisi $Q_k\left(G; x_0, \ldots, x_{j-1}\right)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.1.2.1: Sonlu bir grupta bir genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisi periyodiktir [28].

İspat: G sonlu bir grup ve G nin mertebesi $|G|$ olsun. G nin elemanlarının $|G|^k$ tane farklı k-sıralısı olduğundan bu k-sıralılardan en az biri G nin bir genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisinde iki kez görülür. Böylece, bu k-sıralıyı takip eden alt dizi tekrarlanır. Bu tekrardan dolayı genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisi periyodiktir.

Bir $Q_k\left(G; x_0, \ldots, x_{j-1}\right)$ genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisinin periyodu $PerQ_k\left(G; x_0, \ldots, x_{j-1}\right)$ şeklinde gösterilir.

C_m , *m*-mertebeden devirli grup olmak üzere bu grubun genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizisinin periyodu $hP_k(m)$ ile gösterilir [28].

<u>*Tanım 3.1.2.2:*</u> G bir grup olsun. Eğer G nin her elemanın içinde bulunduğu bir genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizisi mevcut ise G ye genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizilenebilirdir denir [28].

Genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizilenebilir grupların direkt çarpımlarının genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizilenebilir olması gerekmez.

Bunun için $\langle x, y | x^2 = y^2 = e, xy = yx \rangle$ şeklinde takdim edilen D_2 four-grubunu ele alalım. Bu grup $\langle x \rangle$ ve $\langle y \rangle$ devirli grupların direkt çarpımıdır.

D_2 four-grubunun Pell dizleri;

$$Q_2(D_2; x, y) = x, y, x, y, \ldots,$$

$$Q_2(D_2; y, x) = y, x, y, x, \ldots.$$

şeklinde olup her iki dizide de xy eleman olmadığından D_2 four-grubu genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizilenebilir değildir, fakat;

$\langle x \rangle$ grubu için Pell dizisi,

$$Q_2(\langle x \rangle; e, x) = e, x, e, x, \ldots,$$

ve $\langle y \rangle$ grubu için Pell dizisi,

$$Q_2(\langle y \rangle; e, y) = e, y, e, y, \ldots,$$

şeklinde olup böylece genelleştirilmiş 2-mertebeden Pell dizilenebilir olduğu açıktır [28].

3.1.3. D_n Dihedral Grupta Genelleştirilmiş k -mertebeden Pell Dizileri

D_2 four-grubunun genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizisinin periyodu $hP_k(2)$ ile gösterilsin.

Teorem 3.1.3.1: $n>2$ için $D_n=\left\langle x,y \middle| x^2=y^2=(xy)^n=e\right\rangle$ takdimini göz önüne alalım.

i. $k=2,4$ için $PerQ_2(D_n;x,y)=hP_k(2)$ dir.

$$ii.\ PerQ_3(D_n;x,y)=\begin{cases}\frac{n}{2}\left(hP_3(2)\right) & n\equiv 0(\text{mod}\,4),\\ n\left(hP_3(2)\right) & n\equiv 2(\text{mod}\,4),\\ 2n\left(hP_3(2)\right) & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

dir.

iii. $k\geq 5$ için iki durum söz konusu olup,

1. t, n nin bir tek tam sayı çarpanı olmak üzere eğer t, $[3,k-2]$ aralığında değil ise periyot aşağıdaki gibidir:

$$PerQ_k(D_n;x,y)=\begin{cases}\frac{n}{2}\left(hP_k(2)\right) & n\equiv 0(\text{mod}4),\\ n\left(hP_k(2)\right) & n\equiv 2(\text{mod}4),\\ 2n\left(hP_k(2)\right) & \text{diğer durumlarda.}\end{cases}$$

2. Eğer η, n nin $[3,k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tam sayı ise aşağıdaki gibi iki durum söz konusudur:

(2.1) Eğer $j\in N$ için $\eta\cdot 3^i\notin[3,k-2]$ ise periyot aşağıdaki gibidir:

$$PerQ_k(D_n;x,y)=\begin{cases}\eta\frac{n}{2}\left(hP_k(2)\right) & n\equiv 0(\text{mod}\,4),\\ \eta n\left(hP_k(2)\right) & n\equiv 2(\text{mod}\,4),\\ \eta 2n\left(hP_k(2)\right) & \text{diğer durumlarda.}\end{cases}$$

(2.2) Eğer μ, $[3,k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j\in N$ için $\mu=\eta\cdot 3^i$ ise periyot aşağıdaki gibidir [28]:

$$PerQ_k(D_n;x,y)=\begin{cases}\mu\frac{n}{2}\left(hP_k(2)\right) & n\equiv 0(\text{mod}\,4),\\ \mu n\left(hP_k(2)\right) & n\equiv 2(\text{mod}\,4),\\ \mu 2n\left(hP_k(2)\right) & \text{diğer durumlarda}\end{cases}.$$

İspat: $k=2$ için elde edilen dizi,

$$x, y, x, y, \dots$$

şeklindedir ve bu dizinin periyodu $hP_2(2)=2$ dir. $k=4$ için ise

$$x, y, x, xy, y, e, e, x, y, xy, \dots$$

şeklindedir ve bu dizinin periyodu $hP_4(2)=7$ dir.

ii. $hP_3(2)=7$ olup, $k=3$ olursa dizi,

$$\begin{aligned}
&x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = x, \dots,\\
&x_{14} = (xy)^8 x,\ x_{15} = (xy)^7 x,\ x_{16} = (xy)^4 x, \dots,\\
&x_{28} = (xy)^{16} x,\ x_{29} = (xy)^{15} x,\ x_{30} = (xy)^8 x, \dots,\\
&x_{2i\cdot 7} = (xy)^{8i} x,\ x_{2i\cdot 7+1} = (xy)^{8i-1} x,\ x_{2i\cdot 7+2} = (xy)^{4i} x, \dots
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada dizinin periyodunu belirlemek için $4i = nv$ $(v \in \mathbb{N})$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekir.

$n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ ise $i = \dfrac{n}{2}$ olup,

$$PerQ_3(D_n; x, y) = 2 \cdot \frac{n}{4} \cdot 7 = \frac{n}{2} \cdot 7 = \frac{n}{2}(hP_3(2))$$

şeklindedir.

$n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$ ise $i = \dfrac{n}{2}$ olup,

$$PerQ_3(D_n; x, y) = 2 \cdot \frac{n}{4} \cdot 7 = n \cdot 7 = n(hP_3(2))$$

şeklindedir.

$n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ veya $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$ ise $i = n$ olup,

$$PerQ_3(D_n; x, y) = 2 \cdot n \cdot 7 = 2n(hP_3(2))$$

şeklindedir.

iii. $k \geq 5$ ve $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-3} \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki dizi elde edilir:

$$\begin{aligned}
&x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = x,\ x_3 = xy,\ x_4 = y,\ x_5 = x, \dots,\\
&x_{2i\cdot hP_k(2)-k+2} = (yx)^{4i},\ x_{2i\cdot hP_k(2)-k+3} = (yx)^{\varepsilon_1 4i},\ x_{2i\cdot hP_k(2)-k+3} = (yx)^{\varepsilon_2 4i}, \dots,\\
&x_{2i\cdot hP_k(2)-1} = (yx)^{\varepsilon_{k-3} 4i},\ x_{2i\cdot hP_k(2)} = (xy)^{\tau} x,\ x_{2i\cdot hP_k(2)+1} = (xy)^{\tau-1} x, \dots.
\end{aligned}$$

Burada dizinin periyodunu belirlemek için $4i = nw \ (w \in \mathbb{N})$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekir.

1. t, n nin bir tek tam sayı çarpanı olmak üzere eğer t, $[3, k-2]$ aralığında değil ise aşağıdaki üç durum söz konusudur:

(1.1) $1 \leq l \leq k-2$ için $n \equiv 0(\bmod 4)$ ve $n | \tau$ ise,

$$x_{2i \cdot hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = \frac{n}{4}$ için,

$$x_{2i \cdot hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i \cdot hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2\frac{n}{4} \cdot hP_k(2) = \frac{n}{2} \cdot hP_k(2)$$

olduğu görülür.

(1.2) $1 \leq l \leq k-2$ için $n \equiv 2(\bmod 4)$ ve $n | \tau$ ise,

$$x_{2i \cdot hP_k(2)-l} = e$$

ve $i = \frac{n}{2}$ için,

$$x_{2i \cdot hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i \cdot hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2\frac{n}{2} \cdot hP_k(2) = n \cdot hP_k(2)$$

olduğu görülür.

(1.3) $1 \leq l \leq k-2$ için $n \equiv 1(\bmod 4)$ ya da $n \equiv 3 \bmod(4)$ iken $n | \tau$ ise,

$$x_{2i \cdot hP_k(2)-l} = e$$

ve $i = n$ için

$$x_{2i.hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2n \cdot hP_k(2)$$

olduğu görülür.

2. Eğer η, n nin $[3, k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tam sayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

(2.1) $j \in \mathbb{N}$ için $\eta^{3^j} \notin [3, k-2]$ ise üç durum söz konusudur:

(2.1.1) $1 \le l \le k-2$ için $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ ve $n | \tau$ ise

$$x_{2i \cdot hP_k(2) - l} = e$$

ve $i = \eta \dfrac{n}{4}$ için

$$x_{2i \cdot hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i \cdot hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2\eta \frac{n}{4} \cdot hP_k(2) = \eta \frac{n}{2} \cdot hP_k(2)$$

olduğu görülür.

(2.1.2) $1 \le l \le k-2$ için $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$ ve $n | \tau$ ise

$$x_{2i \cdot hP_k(2) - l} = e$$

ve $i = \eta \dfrac{n}{2}$ için

$$x_{2i \cdot hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i \cdot hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2\eta \frac{n}{2} \cdot hP_k(2) = \eta n \cdot hP_k(2)$$

olduğu görülür.

(2.1.3) $1 \le l \le k-2$ için $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ ya da $n \equiv 3 \mathrm{mod}(4)$ iken $n | \tau$ ise

$$x_{2i \cdot hP_k(2) - l} = e$$

ve $i = \eta n$ için

$$x_{2i \cdot hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i \cdot hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan

$$PerQ_k(D_n; x, y) = \eta 2n \cdot hP_k(2)$$

olduğu görülür.

(2.2) $j \in \mathbb{N}$ için μ, $[3, k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $\mu = \eta \cdot 3^i$ ise aşağıdaki üç durum söz konusudur:

(2.2.1) $1 \le l \le k-2$ için $n \equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ ve $n|\tau$ ise

$$x_{2i \cdot hP_k(2)-l} = e$$

ve $i = \mu \dfrac{n}{4}$ için

$$x_{2i \cdot hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i \cdot hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan

$$PerQ_k\left(D_n; x, y\right) = 2\mu \frac{n}{4} \cdot hP_k\left(2\right) = \mu \frac{n}{2} \cdot hP_k\left(2\right)$$

olduğu görülür.

(2.2.2) $1 \le l \le k-2$ için $n \equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ ve $n|\tau$ ise

$$x_{2i \cdot hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = \mu \dfrac{n}{2}$ için

$$x_{2i \cdot hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i \cdot hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan

$$PerQ_k\left(D_n; x, y\right) = 2\mu \frac{n}{2} \cdot hP_k\left(2\right) = \mu n \cdot hP_k\left(2\right)$$

olduğu görülür.

(2.2.3) $1 \le l \le k-2$ için $n \equiv 1\left(\mathrm{mod}\,4\right)$ ya da $n \equiv 3\mathrm{mod}(4)$ iken $n|\tau$ ise

$$x_{2i \cdot hP_k(2)-l} = e$$

ve $i = \mu n$ için

$$x_{2i \cdot hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i \cdot hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan

$$PerQ_k\left(D_n; x, y\right) = \mu 2n \cdot hP_k\left(2\right)$$

olduğu görülür.

Böylece ispat tamamlanır.

3.2. Sonlu Gruplarda Jacobsthal Dizileri

3.2.1. m Modülüne Göre Genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal Dizileri ve m Modülüne Göre Genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal-Padovan Dizileri

Tanım 3.2.1.1: $-1 \le i \le k-3$ ve $n \ge 0$ için $J(i)=0$ ve $J(k-2)=J(k-1)=1$ olmak üzere $\{JP^k(n)\}$ genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal-Padovan dizisi $(k \ge 3)$

$$JP^k(n+k)=JP^k(n+k-2)+2JP^k(n+k-3)+\cdots+JP^k(n-1) \tag{3.2.1.1}$$

şeklinde tanımlanır [32].

(3.2.1.1) den Jacobsthal-Padovan dizisi için

$$\begin{bmatrix} JP^k(n) \\ JP^k(n+1) \\ JP^k(n+2) \\ \vdots \\ JP^k(n+k-1) \\ JP^k(n+k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} JP^k(n-1) \\ JP^k(n) \\ JP^k(n+1) \\ \vdots \\ JP^k(n+k-2) \\ JP^k(n+k-1) \end{bmatrix}$$

eşitliği yazılabilir. Burada

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilen G matrisi, genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal-Padovan matrisi olarak adlandırılır [32].

$k \ge 2$ için genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal dizisi ve $k \ge 3$ için genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal-Padovan dizisi m modülüne göre indirgenirse, sırasıyla aşağıdaki tekrar eden diziler elde edilir:

$$\{J_n^{k,m}\}=\{J_{1-k}^{k,m}, J_{2-k}^{k,m}, \cdots, J_0^{k,m}, J_1^{k,m}, \cdots, J_i^{k,m}, \cdots\}$$

$$\{JP^{k,m}(n)\}=\{JP^{k,m}(-1), JP^{k,m}(0), \ldots, JP^{k,m}(k-2), JP^{k,m}(k-1), \ldots, JP^{k,m}(i), \ldots,\}$$

Burada $J_i^{k,m} \equiv J_i^k \pmod m$ ve $JP^{k,m}(i) \equiv JP^k(i) \pmod m$ dır [32].

Teorem 3.2.1.1: $k \geq 2$ için $\{J_n^{k,m}\}$ ve $k \geq 3$ için $\{JP^{k,m}(n)\}$ dizileri periyodiktir [32].

$k \geq 2$ için $\{J_n^{k,m}\}$ ve $k \geq 3$ için $\{JP^{k,m}(n)\}$ dizilerinin en küçük periyotları sırasıyla $hJ^{k,m}$ ve $hJP^{k,m}$ ile gösterilsin.

Örnek 3.2.1.1: $\{J_n^{3,3}\} = \{1,0,0,1,1,0,0,1,\ldots\}$ şeklinde olup dizi her 4 terimde bir tekrar eder. Böylece $hJ^{3,3} = 4$ olur [32].

Örnek 3.2.1.2: $\{JP^{3,2}(n)\} = \{0,0,1,1,1,1,0,0,1,1,\ldots\}$ şeklinde olup dizi her 6 terimde bir tekrar eder. Böylece $hJP^{3,2} = 6$ olur [32].

C genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal matrisi olmak üzere $p \neq 2$ için $\langle C \rangle_{p^a} = \left\{ C^i \left(\text{mod } p^a \right) \middle| i \geq 0 \right\}$ ve $\langle G \rangle_{p^a} = \left\{ G^i \left(\text{mod } p^a \right) \middle| i \geq 0 \right\}$ devirli gruplar olup bu grupların mertebeleri sırasıyla $\left| \langle C \rangle_{p^a} \right|$ ve $\left| \langle G \rangle_{p^a} \right|$ ile gösterilsin [32].

Teorem 3.2.1.2: $p \neq 2$ ise $hJ^{k,p^a} = \left| \langle C \rangle_{p^a} \right|$ ve $hJP^{k,p^a} = \left| \langle G \rangle_{p^a} \right|$ dir [32].

Teorem 3.2.1.3: *i.* $p \neq 2$ ve t, $hJ^{k,p} = hP^{k,p^t}$ olacak şekilde en büyük pozitif tam sayı olsun. Bu durumda her $\alpha \geq t$ için $hJ^{k,p^\alpha} = p^{\alpha - t} \cdot hJ^p$ dir.

ii. $p \neq 2$ ve t, $hJP^{k,p} = hJP^{k,p^t}$ olacak şekilde en büyük pozitif tam sayı olsun. Bu durumda her $\alpha \geq t$ için $hJP^{k,p^\alpha} = p^{\alpha - t} \cdot hJP^{k,p}$ dir [32].

Teorem 3.2.1.4: p_i ler farklı asal sayılar olmak üzere eğer, $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}, \left(t \geq 1 \right)$ ise

$$hJ^{k,m} = okek\left[hJ^{k,p_i^{e_i}} \right] \text{ ve } hJP^{k,m} = okek\left[hJP^{k,p_i^{e_i}} \right]$$

dır (Burada $okek\left[hJ^{k,p_i^{e_i}} \right]$, $hJ^{k,p_1^{e_1}}, hJ^{k,p_2^{e_2}}, \ldots, hJ^{k,p_t^{e_t}}$ lerin en küçük ortak katıdır) [32].

3.2.2. Sonlu Gruplarda Genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal Dizileri ve Genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal-Padovan Dizileri

<u>*Tanım 3.2.2.1:*</u> G grubu $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ tarafından üretilen bir grup olsun. A geren kümesine göre, $0 \le i \le k-1$ için $J_A^k(G)$ genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal orbiti, $x_i = a_{i+1}$ başlangıç değerleri ile

$$x_{i+k} = \begin{cases} (x_i)^2 (x_{i+1}), & k=2, \\ (x_i)\cdots(x_{i+k-2})^2 (x_{i+k-1}), & k \ge 3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [32].

<u>*Tanım 3.2.2.2:*</u> G grubu $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ tarafından üretilen bir grup olsun. A geren kümesine göre, $k \ge 3$ ve $i \ge 0$ için $JP_A^k(G)$ genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal-Padovan orbiti, $x_0 = a_1,\ x_1 = a_2, \ldots,\ x_{k-1} = a_{k-1},\ x_k = a_k,$ başlangıç değerleri olmak üzere

$$x_{i+k+1} = (x_i)(x_{i+1})\cdots(x_{i+k-2})^2 (x_{i+k-1})$$

şeklinde tanımlanır [32].

<u>*Teorem 3.2.2.1:*</u> Sonlu bir grupta genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal orbiti ve genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal-Padovan orbiti periyodiktir [32].

$J_A^k(G)$ genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal orbitinin ve $JP_A^k(G)$ genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal-Padovan orbitinin periyot uzunlukları sırasıyla $LJ_A^k(G)$ ve $LJP_A^k(G)$ ile gösterilir. $LJ_A^k(G)$ ve $LJP_A^k(G)$ sırasıyla genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal uzunluk ve genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal-Padovan uzunluk olarak adlandırılır [32].

Tanımlardan bir grubun genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal uzunluğu ve genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal-Padovan uzunluğu seçilen geren kümesine ve bu kümenin elemanlarının sıralamasına bağlı olduğu açıktır.

$n, m \ge 3$ için

$$D_{2n} = \left\langle x, y : x^2 = y^n = (xy)^2 = e \right\rangle$$

dihedral grup ile $2m$ mertebeli $\mathbb{Z}_{2m}$ devirli grubun direkt çarpımı

$$D_{2n}\times\mathbb{Z}_{2m}=\left\langle x,y,z:x^2=y^n=(xy)^2=z^{2m}=[x,z]=[y,z]=e\right\rangle$$

şeklinde ifade edilir.

G_1 ve G_2 grupları için $\varphi:G_2\to\mathrm{Aut}(G_1)$ homomorfimi, $b\varphi=\varphi_b$ ve $\varphi_b:G_1\to G_1$ $\mathrm{Aut}(G_1)$ nin elemanları olmak üzere G_1 ve G_2 grupların yarı direkt çarpımı (semidirect product) $G_1\times_\varphi G_2$ şeklinde gösterilir.

$n,m\geq 3$ için D_{2n} dihedral grup ile $\mathbb{Z}_{2m}$ devirli grubun yarı direkt çarpımı

$$D_{2n}\times_\varphi\mathbb{Z}_{2m}=\left\langle x,y,z:x^2=y^n=(xy)^2=z^{2m}=e,\ z^{-1}xzx=e,\ z^{-1}yzy=e\right\rangle$$

şeklinde ifade edilir.

Burada $\mathbb{Z}_{2m}=\langle z\rangle$ ise $\varphi:\mathbb{Z}_{2m}\to\mathrm{Aut}(D_{2n})$ dönüşümü homomorfizmdir. Şöyle ki;

$z\varphi=\varphi_z:\varphi_z:D_{2n}\to D_{2n}$, $x\varphi_z=x$ ve $y\varphi_z=y^{-1}$ ile tanımlanır [32].

<u>*Teorem 3.2.2.2:*</u> *i.* $LJ^3_{(x,y,z)}(D_{2n}\times\mathbb{Z}_{2m})=hJ^{3,2m}$,

ii. $LJP^3_{(x,y,z)}(D_{2n}\times\mathbb{Z}_{2m})=okek\left[12,hJP^{3,2m}\right]$ dir[32].

<u>*İspat:*</u> *i.* $J^3_{(x,y,z)}(D_{2n}\times\mathbb{Z}_{2m})$ orbiti

$$\begin{aligned}
&x_0=x,\ x_1=y,\ x_2=z,\ldots,\\
&x_7=xz^{J_6^3},\ x_8=yz^{J_7^3},\ x_9=z^{J_8^3},\ldots,\\
&x_{14}=xz^{J_{13}^3},\ x_{15}=yz^{J_{14}^3},\ x_{16}=z^{J_{15}^3},\ldots,\\
&x_{7.i}=xz^{J_{7.i-1}^3},\ x_{7.i+1}=yz^{J_{7.i}^3},\ x_{7.i+2}=z^{J_{7.i+1}^3},\ldots
\end{aligned}$$

şeklindedir. Yukarıdaki ifade kullanılarak $J^3_{(x,y,z)}(D_{2n}\times\mathbb{Z}_{2m})$ dizisi

$$\begin{aligned}
&x_0=x,\ x_1=y,\ x_2=z,\ldots,\\
&x_7=xz^{J_6^3},\ x_8=yz^{J_7^3},\ x_9=z^{J_8^3},\ldots,\\
&x_{14}=xz^{J_{13}^3},\ x_{15}=yz^{J_{14}^3},\ x_{16}=z^{J_{15}^3},\ldots,\\
&x_{7.i}=xz^{J_{7.i-1}^3},\ x_{7.i+1}=yz^{J_{7.i}^3},\ x_{7.i+2}=z^{J_{7.i+1}^3},\ldots
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu koşulları sağlayan en küçük tam sayı, dizinin periyodu olacağından periyot $okek\left[7,hJ^{3,2m}\right]=hJ^{3,2m}$ dir.

ii. $JP^3_{(x,y,z)}\left(D_{2n}\times\mathbb{Z}_{2m}\right)$ orbiti

$$x,\ y,\ z, z,\ xy^2z,\ yz^3,\ xy^2z^4,\ yz^6,\ y^{-2}z^{11},\ y^2z^{17},$$
$$xy^2z^{27}, y^{-1}z^{45}, xz^{72}, yz^{116}, z^{189}, z^{305},\ldots,$$

şeklindedir. Yukarıdaki ifade kullanılarak $JP^3_{(x,y,z)}\left(D_{2n}\times\mathbb{Z}_{2m}\right)$ dizisi

$$x_0=x,\ x_1=y,\ x_2=z,\ x_3=z,\ldots,$$
$$x_{12}=xz^{JP^3(11)},\ x_{13}=yz^{JP^3(12)},\ x_{14}=z^{JP^3(13)},\ x_{15}=z^{JP^3(14)},\ldots,$$
$$x_{24}=xz^{JP^3(23)},\ x_{25}=yz^{JP^3(24)},\ x_{26}=z^{JP^3(25)},\ x_{27}=z^{JP^3(26)},\ldots,$$
$$x_{12.i}=xz^{JP^3(12.i-1)},\ x_{12.i+1}=yz^{JP^3(12.i)},\ x_{12.i+2}=z^{JP^3(12.i+1)},\ x_{12.i+3}=z^{JP^3(12.i+2)},\ldots$$

şeklinde elde edilir. Bu koşulları sağlayan en küçük tam sayı dizinin periyodu olacağından periyot $okek\left[12,hJP^{3,2m}\right]$ dir.

<u>*Teorem 3.2.2.3:*</u> *i.* $LJ^3_{(x,y,z)}\left(D_{2n}\times_\varphi\mathbb{Z}_{2m}\right)=\begin{cases} okek\left[7\cdot\dfrac{\mathrm{n}}{4},hJ^{3,2m}\right] & n\equiv 0\pmod 4 \text{ ise,}\\ okek\left[7\cdot\dfrac{\mathrm{n}}{2},hJ^{3,2m}\right] & n\equiv 2\pmod 4 \text{ ise,}\\ okek\left[7\cdot n,hJ^{3,2m}\right] & \text{diğer durumlarda.}\end{cases}$

ii. $LJP^3_{(x,y,z)}\left(D_{2n}\times_\varphi\mathbb{Z}_{2m}\right)=\begin{cases} okek\left[3n,hJP^{3,2m}\right] & n \text{ çift ise,}\\ okek\left[6n,hJP^{3,2m}\right] & n \text{ tek ise}\end{cases}$

[32].

<u>*İspat:*</u> *i.* $J^3_{(x,y,z)}\left(D_{2n}\times_\varphi\mathbb{Z}_{2m}\right)$ orbiti

$$x,\ y,\ z,\ xy^2z,\ z^3yx,\ z^6y^5x,\ z^{13}y^{-1},\ z^{28}x,\ z^{60}y^5,\ z^{129}y^4,\ldots,$$

şeklindedir. Yukarıdaki ifade kullanılarak $JP^3_{(x,y,z)}\left(D_{2n}\times_\varphi\mathbb{Z}_{2m}\right)$ dizisi

$$x_0=x,\ x_1=y,\ x_2=z,\ x_3=z,\ldots,$$
$$x_{12}=xz^{JP^3(11)},\ x_{13}=yz^{JP^3(12)},\ x_{14}=z^{JP^3(13)},\ x_{15}=z^{JP^3(14)},\ldots,$$
$$x_{24}=xz^{JP^3(23)},\ x_{25}=yz^{JP^3(24)},\ x_{26}=z^{JP^3(25)},\ x_{27}=z^{JP^3(26)},\ldots,$$
$$x_{12.i}=xz^{JP^3(12.i-1)},\ x_{12.i+1}=yz^{JP^3(12.i)},\ x_{12.i+2}=z^{JP^3(12.i+1)},\ x_{12.i+3}=z^{JP^3(12.i+2)},\ldots$$

şeklinde elde edilir. Burada dizinin periyodunu belirlemek için, $u \in \mathbb{N}$ için $4 \cdot i = n \cdot u$ ve $J_{7.i-1}^3 \equiv 0 \pmod{2m}$, $J_{7.i}^3 \equiv 0 \pmod{2m}$ ve $J_{7.i+1}^3 \equiv 1 \pmod{2m}$ olacak şekilde en küçük i tam sayısının belirlenmesi gerekmektedir. i tam sayısının durumuna göre üç durum söz konusudur:

1. $n \equiv 0 \pmod 4$ ise $i = \dfrac{n}{4}$ olup buradan $LJ_{(x,y,z)}^3 \left(D_{2n} \times_\varphi \mathbb{Z}_{2m}\right) = \text{okek}\left[7 \cdot \dfrac{\text{n}}{4}, hJ^{3,2m}\right]$ elde edilir.

2. $n \equiv 2 \pmod 4$ ise $i = \dfrac{n}{2}$ olup buradan $LJ_{(x,y,z)}^3 \left(D_{2n} \times_\varphi \mathbb{Z}_{2m}\right) = \text{okek}\left[7 \cdot \dfrac{\text{n}}{2}, hJ^{3,2m}\right]$ elde edilir.

3. $n \equiv 1 \pmod 4$ veya $n \equiv 3 \pmod 4$ ise $i = n$ olup buradan $LJ_{(x,y,z)}^3 \left(D_{2n} \times_\varphi \mathbb{Z}_{2m}\right) = okek\left[7 \cdot n, hJ^{3,2m}\right]$ elde edilir.

ii. $JP_{(x,y,z)}^3 \left(D_{2n} \times_\varphi \mathbb{Z}_{2m}\right)$ orbiti

$$x, y, z, z, xy^2z, yz^3, z^4y^2x, z^6x, z^{11}, z^{17}y^2, \ldots,$$

şeklindedir. Yukarıdaki ifade kullanılarak $JP_{(x,y,z)}^3 \left(D_{2n} \times_\varphi \mathbb{Z}_{2m}\right)$ dizisi

$$\begin{aligned}
&x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = z,\ x_3 = z, \ldots, \\
&x_6 = z^{JP^3(5)}y^2x,\ x_7 = z^{JP^3(6)}y^3,\ x_8 = z^{JP^3(7)},\ x_9 = z^{JP^3(8)}y^2, \ldots, \\
&x_{12} = z^{JP^3(11)}y^4x,\ x_{13} = z^{JP^3(12)}y^5,\ x_{14} = z^{JP^3(13)},\ x_{15} = z^{JP^3(14)}y^4, \ldots, \\
&x_{6.i} = z^{JP^3(6.i-1)}y^{2.i}x,\ x_{6.i+1} = z^{JP^3(6.i)}y^{2.i+1},\ x_{6.i+2} = z^{JP^3(6.i+1)},\ x_{6.i+3} = z^{JP^3(6.i+2)}y^{2.i}, \ldots
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada dizinin periyodunu belirlemek için, $u \in \mathbb{N}$ için $2 \cdot i = n \cdot v$ ve $JP^3(6 \cdot i - 1) \equiv 0 \pmod{2m}$, $JP^3(6 \cdot i) \equiv 0 \pmod{2m}$ $JP^3(6 \cdot i - 1) \equiv 0 \pmod{2m}$ ve $JP^3(6 \cdot i + 2) \equiv 1 \pmod{2m}$ olacak şekilde en küçük i tam sayısının belirlenmesi gerekmektedir. i tam sayısının durumuna göre iki durum söz konusudur:

1. n çift ise $i = \dfrac{n}{2}$ olur. Böylece

$$LJP_{(x,y,z)}^3 \left(D_{2n} \times_\varphi \mathbb{Z}_{2m}\right) = okek\left[6 \cdot \frac{\text{n}}{2}, hJ^{3,2m}\right] = okek\left[3n, hJ^{3,2m}\right]$$

elde edilir.

2. n tek ise $i = n$ olur. Böylece

$$LJP^{3}_{(x,y,z)}\left(D_{2n}\times_{\varphi}\mathbb{Z}_{2m}\right)=okek\left[6n,hJ^{3,2m}\right]$$

elde edilir.

3.3. Arrowhead-Fibonacci Sayıları

Genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci dizisi için karakteristik polinom

$$P_k^F(x)=x^k-x^{k-1}-\cdots-x-1.$$

şeklindedir.

k -basamak Fibonacci dizisinin karakteristik polinomunu kullanarak $N=\left\lfloor n_{i,j}\right\rfloor_{(k+1)\times(k+1)}$ arrowhead matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

N matrisi kullanılarak arrowhead-Fibonacci dizisi olarak adlandırılan $(k+1)$-basamaklı bir dizi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

<u>*Tanım 3.3.1:*</u> $k\geq 2$ ve $n\geq 1$ için arrowhead-Fibonacci dizisi $a_{k+1}(1)=\cdots=a_{k+1}(k)=0$, $a_{k+1}(k+1)=1$ başlangıç değerleri ile

$$a_{k+1}(n+k+1)=a_{k+1}(n+k)-a_{k+1}(n+k-1)-\cdots-a_{k+1}(n) \qquad (3.3.1)$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [42].

(3.3.1) bağıntısı yardımıyla, arrowhead-Fibonacci dizisi için üreteç matrisi:

$$G_{k+1}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&\cdots&-1&-1\\1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&&\ddots&&&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&0\\0&0&\cdots&0&1&0\end{bmatrix}_{(k+1)\times(k+1)}$$

şeklinde belirlenmiştir ve bu matris arrowhead-Fibonacci matrisi olarak adlandırılmaktadır.

$n\geq 0$ için

$$(G_{k+1})^n\begin{bmatrix}a_{k+1}(k+1)\\a_{k+1}(k)\\\vdots\\a_{k+1}(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{k+1}(n+k+1)\\a_{k+1}(n+k)\\\vdots\\a_{k+1}(n+1)\end{bmatrix}\tag{3.3.2}$$

eşitliği görülür. α üzerinden tümevarım uygulanarak $\alpha\geq k$ için arrowhead-Fibonacci matrisinin α -inci kuvveti aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$(G_{k+1})^n=\begin{bmatrix}a_{k+1}^{n+k+1}&&-a_{k+1}^{n+k}\\a_{k+1}^{n+k}&&-a_{k+1}^{n+k-1}\\a_{k+1}^{n+k-1}&G_{k+1}^{\iota}&-a_{k+1}^{n+k-2}\\\vdots&&\vdots\\a_{k+1}^{n+1}&&-a_{k+1}^{n}\end{bmatrix}$$

şeklinde olup burada $(k+1)\times(k-1)$ boyutlu G_{k+1}^{ι} matrisi aşağıdaki gibidir:

$$G_{k+1}^{\iota}=\begin{bmatrix}-\left(a_{k+1}^{n+k}+a_{k+1}^{n+k-1}+\cdots+a_{k+1}^{n+1}\right)&\cdots&-\left(a_{k+1}^{n+k}+a_{k+1}^{n+k-1}+a_{k+1}^{n+k-2}\right)&-\left(a_{k+1}^{n+k}+a_{k+1}^{n+k-1}\right)\\-\left(a_{k+1}^{n+k-1}+a_{k+1}^{n+k-2}+\cdots+a_{k+1}^{n}\right)&\cdots&-\left(a_{k+1}^{n+k-1}+a_{k+1}^{n+k-2}+a_{k+1}^{n+k-3}\right)&-\left(a_{k+1}^{n+k-1}+a_{k+1}^{n+k-2}\right)\\-\left(a_{k+1}^{n+k-2}+a_{k+1}^{n+k-3}+\cdots+a_{k+1}^{n-1}\right)&\cdots&-\left(a_{k+1}^{n+k-2}+a_{k+1}^{n+k-3}+a_{k+1}^{n+k-4}\right)&-\left(a_{k+1}^{n+k-2}+a_{k+1}^{n+k-3}\right)\\\vdots&&\vdots&\vdots\\-\left(a_{k+1}^{n}+a_{k+1}^{n-1}+\cdots+a_{k+1}^{n-k+1}\right)&\cdots&-\left(a_{k+1}^{n}+a_{k+1}^{n-1}+a_{k+1}^{n-2}\right)&-\left(a_{k+1}^{n}+a_{k+1}^{n-1}\right)\end{bmatrix}.$$

Burada a_{k+1}^{u} notasyonu ile $a_{k+1}(u)$ gösterilmektedir [42].

Tekrarlı dizilerin Simpson formulü üreteç matrislerin determinatları yardımıyla belirlenebilmektedir. $\det G_{k+1}=(-1)^{k+1}$ olduğundan her $k\geq 2$ için arrowhead-Fibonacci dizisinin Simpson formülleri kolayca elde edilebilir.

Örnek 3.3.1: $n \geq 2$ ve $\det G_3 = -1$ için

$$(G_3)^n = \begin{bmatrix} a_3^{n+3} & -\left(a_3^{n+2} + a_3^{n+1}\right) & -a_3^{n+2} \\ a_3^{n+2} & -\left(a_3^{n+1} + a_3^{n}\right) & -a_3^{n+1} \\ a_3^{n+1} & -\left(a_3^{n+1} + a_3^{n-1}\right) & -a_3^{n} \end{bmatrix}$$

olduğundan $\{a_3(n)\}$ dizisinin Simpson formülü aşağıdaki gibidir [42]:

$$a_3^{n+3}\left(a_3^n\right)^2 - 2a_3^{n+2}a_3^{n+1}a_3^n + \left(a_3^{n+2}\right)^2 a_3^{n-1} + \left(a_3^{n+1}\right)^3 - a_3^{n+3}a_3^{n+1}a_3^{n-1} = 1.$$

Sonuç 3.3.1: $k \geq 2$ için $a_{k+1}(n)$, n -inci arrowhead-Fibonacci sayısı olsun. O halde

$$a_{k+1}(n) = \sum_{(t_1,t_2\cdots,t_{k+1})} \frac{t_{k+1}}{t_1 + t_2 + \cdots + t_{k+1}} \times \binom{t_1 + \cdots + t_{k+1}}{t_1,\ldots,t_{k+1}} (-1)^{k+1}$$

olup burada toplam negatif olmayan tam sayılar üzerinde $t_1 + 2t_2 + \cdots + (k+1)t_{k+1} = n$ koşulunu sağlamaktadır [42].

İspat: Teorem 2.1.4 de $v = k+1$, $u = n$, $i = j = k+1$, $k_1 = 1$ ve $k_2 = \cdots = k_{k+1} = -1$ olarak seçilirse $(G_{k+1})^n$ matrisinden sonuç açık olarak görülür.

Lemma 3.3.1: Arrowhead-Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi

$$x^{k+1} - x^k + x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + 1 = 0$$

olup bu denklemin çok katlı kökü yoktur [42].

İspat: $f(x) = x^{k+1} - x^k + x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + 1$ olsun. Buradan

$$f(x) = x^{k+1} - x^k + \frac{x^k - 1}{x-1} = \frac{x^k\left((x-1)^2 + 1\right) - 1}{x-1}$$

yazılabilir. Bu durumda tüm $k \geq 2$ değerleri için $f(0) = 1$ ve $f(1) = k$ olduğu açık bir şekilde görülmektedir. u , $f(x)$ in bir çok katlı kökü olsun. Bu durumda $u \notin \{0,1\}$ dır. Eğer u , $f(x)$ in bir çok katlı kökü ise, bu durumda $f(u) = 0$ ve $f'(u) = 0$ olmalıdır. $f'(u) = 0$ ve $u \neq 0$ olduğundan $u_1 = 1 + i\frac{k+1}{k+2}$ ve $u_1 = 1 - i\frac{k+1}{k+2}$ elde edilir. Fakat $f(u) = 0$ olduğundan $u^k\left((u-1)^2 + 1\right) = 1$ olur. Böylece $(u_1)^k = \frac{(k+2)^2}{2k+3}$ ve

$\left(u_2\right)^k = \dfrac{\left(k+2\right)^2}{\left(k+1\right)^2+\left(k+2\right)^2}$ sonucuna varılır. Bu durum ise bir çelişki teşkil eder ve bu çelişki ile ispat tamamlanmış olur.

Eğer $x^{k+1}-x^k+x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+1=0$ denkleminin kökleri $x_1,x_2,\ldots,x_{k+1}$ ise, Lemma 3.3.1 ile bu köklerin birbirinden farklı olduğu basit bir şekilde görülmektedir. $\left(k+1\right)\times\left(k+1\right)$ boyutlu V^{k+1} Vandermonde matrisi

$$V^{k+1} = \begin{bmatrix} \left(x_1\right)^k & \left(x_2\right)^k & \cdots & \left(x_{k+1}\right)^k \\ \left(x_1\right)^{k-1} & \left(x_2\right)^{k-1} & \cdots & \left(x_{k+1}\right)^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & & x_{k+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

şeklinde ifade edilsin.

U_i^{k+1} matrisi:

$$U_i^{k+1} = \begin{bmatrix} \left(x_1\right)^{n+k+1-i} \\ \left(x_2\right)^{n+k+1-i} \\ \vdots \\ \left(x_{k+1}\right)^{n+k+1-i} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilsin ve $\left(k+1\right)\times\left(k+1\right)$ boyutlu $V_{i,j}^{k+1}$ matrisi, V^{k+1} matrisinin j-inci sütununu U_i^{k+1} sütun matrisiyle değiştirilmesi sonucu elde edilsin [42].

<u>*Teorem 3.3.1:*</u> $n \ge k \ge 2$ için $\left(G_{k+1}\right)^n = \left[g_{i,j}^{(n)}\right]$ olmak üzere

$$g_{i,j}^{(n)} = \frac{\det V_{i,j}^{k+1}}{\det V^{k+1}}$$

dir [42].

<u>*İspat:*</u> $x_1,x_2,\ldots,x_{k+1}$, G_{k+1} matrisinin özdeğerleri olup ve birbirinden farklı olduğu için G_{k+1} matrisi köşegenleştirilebilirdir. $D_{k+1} = \left(x_1,x_2,\ldots,x_{k+1}\right)$ olsun. Bu durumda

$G_{k+1}V^{k+1} = V^{k+1}D_{k+1}$ eşitliği elde edilir. $\det V^{k+1} \neq 0$ olduğundan V^{k+1} matrisi tersinir matristir. Böylece $\left(V^{k+1}\right)^{-1} G_{k+1}V^{k+1} = D_{k+1}$ eşitliği sağlanır ki, bu da G_{k+1} matrisinin D_{k+1} matrisine benzer olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla $n \geq k \geq 2$ için $(G_{k+1})^n V^{k+1} = V^{k+1}(D_{k+1})^n$ olduğu görülmektedir. Bu durumda,

$$\begin{cases} g_{i,1}^{(n)}(x_1)^k + g_{i,2}^{(n)}(x_1)^{k-1} + \cdots + g_{i,k+1}^{(n)} = (x_1)^{n+k+1-i} \\ g_{i,1}^{(n)}(x_2)^k + g_{i,2}^{(n)}(x_2)^{k-1} + \cdots + g_{i,k+1}^{(n)} = (x_2)^{n+k+1-i} \\ \vdots \\ g_{i,1}^{(n)}(x_{k+1})^k + g_{i,2}^{(n)}(x_{k+1})^{k-1} + \cdots + g_{i,k+1}^{(n)} = (x_{k+1})^{n+k+1-i} \end{cases}$$

lineer denklem sistemi yazılabilmektedir. Her $i, j = 1, 2, \ldots, k+1$ için lineer denklem sisteminin çözümünden

$$g_{i,j}^{(n)} = \frac{\det V_{i,j}^{k+1}}{\det V^{k+1}}$$

olduğu görülmektedir.

Aşağıdaki sonuç ile arrowhead-Fibonacci sayıları için Binet formülü elde edilmiştir:

<u>*Sonuç 3.3.2:*</u> $k \geq 2$ için $a_{k+1}(n)$, n-inci arrowhead-Fibonacci sayısı olmak üzere

$$a_{k+1}(n) = -\frac{\det V_{k+1,k+1}^{k+1}}{\det V^{k+1}}$$

eşitliği elde edilir [42].

<u>*Tanım 3.3.2:*</u> $n \times n$ boyutlu $M_{k+1}(n) = \left[m_{i,j}^{(n)}\right]$ süper köşegen matrisi:

$$m_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} & \text{eğer } i = j = \alpha \text{ ise } 1 \leq \alpha \leq n \\ 1 & \text{ve} \\ & i = \alpha + 1 \text{ ve } j = \alpha \text{ ise } 1 \leq \alpha \leq n-1, \\ -1 & \text{eğer } i = \alpha - u \text{ ve } j = \alpha \text{ ise } u+1 \leq \alpha \leq n \text{ ve } 1 \leq u \leq k, \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Yani $M_{k+1}(n) = \left[m_{i,j}^{(n)}\right]$ süper köşegen matrisi:

$$
M_{k+1}(n)=\begin{array}{c}
\qquad\qquad\quad (k+1)\text{-inci} \\
\qquad\qquad\quad \downarrow \\
\begin{bmatrix}
1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\
\vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & & \cdots & & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & & \cdots & & & 0 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

şeklindedir [42].

<u>*Teorem 3.3.2:*</u> $n \geq 1$ ve $k \geq 2$ için

$$perM_{k+1}(n) = a_{k+1}(n+k+1)$$

eşitliği elde edilir ve burada $perM_{k+1}(1) = 1$ dir [42].

<u>İspat:</u> İlk olarak $n < 4$ durumu göz önüne alınsın. Bu durumda $M_{k+1}(2)$ ve $M_{k+1}(3)$ matrisleri

$$M_{k+1}(2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$M_{k+1}(3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindeki formlara indirgenir. Buradan $perM_{k+1}(2) = 0$ ve $perM_{k+1}(3) = -2$ olduğu açıkça görülür ve arrowhead-Fibonacci dizisinin tanımından $a_{k+1}(k+2) = 1$, $a_{k+1}(k+3) = 1$ ve $a_{k+1}(k+4) = -2$ eşitlikleri elde edilir. Böylece $n < 4$ durumu için sonuca ulaşılır. Şimdi $n \geq 4$ için $perM_{k+1}(n) = a_{k+1}(n+k+1)$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, denklemin $n+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. Eğer $M_{k+1}(n)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perM_{k+1}(n)$ genişletilir ise

$$perM_{k+1}(n+1)=perM_{k+1}(n)-perM_{k+1}(n-1)-\cdots-perM_{k+1}(n-k)$$

eşitliği elde edilir. $perM_{k+1}(n)=a_{k+1}(n+k+1)$, $perM_{k+1}(n-1)=a_{k+1}(n+k),\ldots,$ $perM_{k+1}(n-k)=a_{k+1}(n+1)$ olduğundan, $perM_{k+1}(n+1)=a_{k+1}(n+k+2)$ eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

<u>*Tanım 3.3.3:*</u> $k\geq 2$ ve $n>k+1$ olmak üzere $n\times n$ boyutlu $R_{k+1}(n)=\left[r_{i,j}^{(n)}\right]$ matrisi:

$$r_{i,j}^{(n)}=\begin{cases} & \text{eğer } i=j=\alpha \text{ ise } 1\leq\alpha\leq n, \\ & i=\alpha+1 \text{ ve } j=\alpha \text{ ise } 1\leq\alpha\leq n-k-1 \\ 1 & \\ & ve \\ & i=n-k+\alpha \text{ ve } n-k+\alpha\leq j\leq n \text{ ise } 1\leq\alpha\leq n-k-1, \\ -1 & \text{eğer } i=\alpha \text{ ve } j=\alpha+u \text{ ise } 1\leq\alpha\leq n-k \text{ ve } 1\leq u\leq k, \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Yani $R_{k+1}(n)$ matrisi:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{matrix}(k+1)\text{-inci}\\ \downarrow\end{matrix} & \\ R_{k+1}(n)= & \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow(n-k)\text{-inci} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

şeklindedir [42].

<u>*Tanım 3.3.4:*</u> $k\geq 2$ ve $n>k+2$ olmak üzere $n\times n$ boyutlu $T_{k+1}(n)=\left[t_{i,j}^{(n)}\right]$ matrisi:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c} \quad\quad\quad (k+1)\text{-inci} \\ \quad\quad\quad \downarrow \end{array} \\
T_{k+1}(n) = & \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & R_{k+1}(n-1) & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}
\end{array}
$$

şeklinde tanımlanır [42].

<u>*Teorem 3.3.3:*</u> $k \geq 2$ için $a_{k+1}(n)$, n -inci arrowhead-Fibonacci sayısı olmak üzere

$i.$ $n > k+1$ için

$$perR_{k+1}(n) = a_{k+1}(n+1)$$

eşitliği elde edilir.

$ii.$ $n > k+2$ için

$$perT_{k+1}(n) = \sum_{i=1}^{n} a_{k+1}(i)$$

eşitliği elde edilir [42].

<u>*İspat:*</u> $i.$ Denklemin $n > k+1$ için sağlandığı kabul edelim. Bu durumda, denklemin $v+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. $R_{k+1}(n)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perR_{k+1}(n)$ genişletilir ise

$$perR_{k+1}(n+1) = perR_{k+1}(n) - perR_{k+1}(n-1) - \cdots - perR_{k+1}(n-k).$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$perR_{k+1}(n) = a_{k+1}(n+1), perR_{k+1}(n-1) = a_{k+1}(n), \ldots, perR_{k+1}(n-k) = a_{k+1}(n-k+1),$$

olduğundan $perR_{k+1}(n+1) = a_{k+1}(n+2)$ eşitliği elde edilir.

$ii.$ $T_{k+1}(n)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perT_{k+1}(n)$ genişletilir ise

$$perT_{k+1}(n) = perT_{k+1}(n-1) + perR_{k+1}(n)$$

eşitliği elde edilir. Teorem 3.3.3 i den ve n üzerinde tümevarım yönteminden ispat görülür.

$k \geq 2$ için $\{a_{k+1}(n)\}$ arrowhead-Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{x^k}{1 - x + x^2 + \cdots + x^{k+1}}$$

şeklindedir ve burada dir [42].

Aşağıdaki Teorem ile üreteç fonksiyonu yardımıyla arrowhead-Fibonacci sayılarının üstel temsili verilmiştir.

<u>*Teorem 3.3.4:*</u> Arrowhead- Fibonacci sayılarının üstel temsili aşağıdaki gibidir [42]:

$$g(x) = x^k \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} \left(1 - x - \cdots x^k\right)^i \right).$$

<u>*İspat:*</u> $\ln g(x) = \ln x^k - \ln\left(1 - x + x^2 + \cdots + x^{k+1}\right)$

ve

$$-\ln\left(1 - x + x^2 + \cdots + x^{k+1}\right) = -\ln\left(1 - \left(x - x^2 - \cdots - x^{k+1}\right)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} \left(1 - x - \cdots x^k\right)^i$$

olduğundan

$$\ln g(x) - \ln x^k = \ln \frac{g(x)}{x^k} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} \left(1 - x - \cdots x^k\right)^i$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$n \geq 1$ ve $k \geq 2$ için

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_{k+1}(i)$$

olsun. $(k+2) \times (k+2)$ boyutlu A_{k+2} matrisi aşağıdaki gibi gösterilsin:

$$A_{k+2}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & G_{k+1} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Bu durumda $(A_{k+2})^n$ matrisi:

$$(A_{k+2})^n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{n+k} & & & \\ S_{n+k-1} & & (G_{k+1})^n & \\ \vdots & & & \\ S_n & & & \end{bmatrix}$$

şeklinde olur [42].

3.3.1. m Modülüne Göre Arrowhead-Fibonacci Dizileri

$\{a_{k+1}(n)\}$ Arrowhead-Fibonacci dizisi bir m modülüne göre indirgenirse, tekrar eden,

$$\{a_{k+1}^m(n)\}=\{a_{k+1}^m(1),a_{k+1}^m(2),\ldots,a_{k+1}^m(i),\ldots\}$$

indirgemeli dizi elde edilir ve burada $a_{k+1}^m(i)$ ile $a_{k+1}(i)(\bmod m)$ gösterilir. Bu bağıntı (3.3.1)'deki bağıntı ile aynıdır.

<u>*Teorem 3.3.1.1:*</u> $k\geq 2$ için $\{a_{k+1}^m(n)\}$ dizisi basit periyodik bir dizidir. Yani dizi periyodiktir ve dizi başlangıç değerlerine dönerek tekrar eder [42].

<u>*İspat:*</u> $X=\{(x_1,x_2,\ldots,x_{k+1})\mid 0\leq x_i\leq m-1\}$ olsun. Z_m nin elemanlarının m^{k+1} tane farklı $k+1$-tiplisi mevcut olduğundan, bu $k+1$-tiplilerden en az bir tanesi $\{a_{k+1}^m(n)\}$ dizisinde iki kez ortaya çıkar. Bundan dolayı bu $k+1$-lileri takip eden alt dizi tekrarlanır, böylece dizi periyodiktir. $u>v$ olmak üzere

$$a_{k+1}^m(u+1)\equiv a_{k+1}^m(v+1),\ a_{k+1}^m(u+2)\equiv a_{k+1}^m(v+2),\ldots,a_{k+1}^m(u+k+1)\equiv a_{k+1}^m(v+k+1)$$

ise $u \equiv v \pmod{k+1}$ olduğu sonucuna ulaşılır. Arrowhead-Fibonacci dizisi tanımından

$$a_{k+1}^{m}(n) = -a_{k+1}^{m}(n+k+1) + a_{k+1}^{m}(n+k) - a_{k+1}^{m}(n+k-1) - \cdots - a_{k+1}^{m}(n+1)$$

olacaktır. Böylece bu eşitlik kullanılarak

$$a_{k+1}^{m}(u) \equiv a_{k+1}^{m}(v),\ a_{k+1}^{m}(u-1) \equiv a_{k+1}^{m}(v-1), \ldots, a_{k+1}^{m}(u-v+1) \equiv a_{k+1}^{m}(1)$$

elde edilir ki bu da $\{a_{k+1}^{m}(n)\}$ dizisinin basit periyodik olduğunu gösterir.

$\{a_{k+1}^{m}(n)\}$ dizisinin periyodu $P_{k+1}(m)$ ile gösterilsin.

<u>*Örnek 3.3.1.1:*</u> $\{a_4^2(n)\} = \{0,0,0,1,1,0,0,0,1,1,\ldots\}$ dizisi ele alınırsa, bu dizi her 5 terimde bir başlangıç elemanlarıyla tekrar edip $P_4(2) = 5$ olur [42].

$\det G_{k+1} = (-1)^{k+1}$ olduğundan m nin tüm pozitif tam sayı değeri için $\langle G_{k+1}\rangle_m$ devirli bir gruptur. (3.3.2) den $k \geq 2$ için $P_{k+1}(m) = \left|\langle G_{k+1}\rangle_m\right|$ olduğu görülür.

<u>*Teorem 3.3.1.2:*</u> *i.* p bir asal sayı ve u, $P_{k+1}(p^{u+1}) \neq P_{k+1}(p^{u})$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı olsun. Bu takdirde her $v > u$ ve $k \geq 2$ için $P_{k+1}(p^{v}) = p^{v-u} \cdot P_{k+1}(p)$ olur.

ii. $u \geq 1$ olmak üzere $m = \prod_{i=1}^{u} (p_i)^{\alpha_i}$ olacak şekilde asal çarpanlarına ayrılmış olsun. Bu durumda $k \geq 2$ için $P_{k+1}(m)$, $P_{k+1}((p_i)^{\alpha_i})$ lerin en küçük ortak katına eşittir.

iii. $k \geq 2$ olmak üzere eğer k bir çift tam sayı ise, bu durumda her m pozitif tam sayısı için $P_{k+1}(m)$ bir çift sayıdır [42].

<u>*İspat:*</u> *i.* I, $(k+1)\times(k+1)$ tipinde birim matris ve t, $(G_{k+1})^{P_{k+1}(p^{t+1})} \equiv I \pmod{p^{t+1}}$ olacak şekilde pozitif bir tam sayı ise $(G_{k+1})^{P_{k+1}(p^{t+1})} \equiv I \pmod{p^{t}}$ dır. Böylece $P_{k+1}(p^{t})$ nın $P_{k+1}(p^{t+1})$ yi böldüğü görülmektedir. Öte yandan $(G_{k+1})^{P_{k+1}(p^{t})} = I + (a_{i,j}^{(t)} \cdot p^{t})$ yazılarak binom açılımı yardımıyla

$$\left(G_{k+1}\right)^{P_{k+1}\left(p^t\right)\cdot p}=\left(I+\left(a_{i,j}^{(t)}\cdot p^t\right)\right)^p=\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\left(a_{i,j}^{(t)}\cdot p^t\right)^i\equiv I\left(\operatorname{mod} p^{t+1}\right)$$

eşitliği elde edilir ki, bu eşitlik yardımıyla $P_{k+1}\left(p^t\right)\cdot p$ nin $P_{k+1}\left(p^t\right)$ tarafından bölünebilir olduğunu gösterir. Böylece $P_{k+1}\left(p^{t+1}\right)=P_{k+1}\left(p^t\right)$ ya da $P_{k+1}\left(p^{t+1}\right)=P_{k+1}\left(p^t\right)\cdot p$ olduğunu gösterir ki buradaki ikinci durum, ancak ve ancak p tarafından bölünemeyen bir $a_{i,j}^{(t)}$ nin varlığı ile mümkündür. u, $P_{k+1}\left(p^{u+1}\right)\neq P_{k+1}\left(p^u\right)$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı olduğundan p tarafından bölünemeyen bir $a_{i,j}^{(t)}$ vardır. p tarafından bölünemeyen bir $a_{i,j}^{(t)}$ olduğundan p tarafından bölünemeyen bir $a_{i,j}^{(u+1)}$ varlığı da açıktır. Dolayısıyla $P_{k+1}\left(p^{u+2}\right)\neq P_{k+1}\left(p^{u+1}\right)$ sonucu elde edilir ve bu durumu göz önünde bulundurarak

$$P_{k+1}\left(p^{u+2}\right)=p\cdot P_{k+1}\left(p^{u+1}\right)=p\cdot\left(p\cdot P_{k+1}\left(p^u\right)\right)=p^2\cdot P_{k+1}\left(p^u\right)$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece u üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak her $v>u$ için $P_{k+1}\left(p^v\right)=p^{v-u}\cdot P_{k+1}\left(p\right)$ elde edilir. Özellikle $P_{k+1}\left(p^2\right)\neq P_{k+1}\left(p\right)$ ise $P_{k+1}\left(p^v\right)=p^{v-1}\cdot P_{k+1}\left(p\right)$ olur.

ii. $\left\{a_{k+1}^{(p_i)^{\alpha_i}}\left(n\right)\right\}$ dizisi sadece $\lambda\cdot P_{k+1}\left(\left(p_i\right)^{\alpha_i}\right)$, $\left(\lambda\in\mathbb{N}\right)$ uzunluğundaki bloklarda tekrar eder. Ayrıca $P_{k+1}\left(m\right)$, $\left\{a_{k+1}^{m}\left(n\right)\right\}$ dizisinin periyodu olduğundan, $\left\{a_{k+1}^{(p_i)^{\alpha_i}}\left(n\right)\right\}$ dizisi tüm i değeri için $P_{k+1}\left(m\right)$ terimde bir tekrar eder. Böylece tüm i değeri için $P_{k+1}\left(m\right)$ periyodu $\lambda\cdot P_{k+1}\left(\left(p_i\right)^{\alpha_i}\right)$ şeklinde olup, bu sayı $P_{k+1}\left(m\right)$ nin periyodunu vermektedir. Dolayısıyla $P_{k+1}\left(m\right)=okek\left[P_{k+1}\left(\left(p_1\right)^{\alpha_1}\right),\ldots,P_{k+1}\left(\left(p_u\right)^{\alpha_u}\right)\right]$ elde edilmektedir.

iii. Her k çift tam sayısı için $\det G_{k+1}=-1$ ve $P_{k+1}\left(m\right)=\left|\left\langle G_{k+1}\right\rangle_m\right|$ olduğundan sonuç açık olarak görülür.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Arrowhead-Pell Dizileri

Genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizisi için karakteristik polinom

$$P(x) = x^k - 2x^{k-1} - x^{k-2} - \cdots - x - 1$$

şeklindedir.

$P(x)$ polinomunun katsayıları yardımıyla tanımlanan $A = \left[a_{ij}\right]_{(k+1)\times(k+1)}$ arrowhead matrisi aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A matrisi kullanılarak arrowhead-Pell dizisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

<u>*Tanım 4.1.1:*</u> $k \geq 2$ ve $n \geq 1$ için arrowhead-Pell dizisi

$$a_{k+1}(1) = a_{k+1}(2) = \cdots = a_{k+1}(k) = 0,\; a_{k+1}(k+1) = 1$$

başlangıç değerleri ile

$$a_{k+1}(n+k+1) = a_{k+1}(n+k) - 2a_{k+1}(n+k-1) - a_{k+1}(n+k-2) - \cdots - a_{k+1}(n) \qquad (4.1.1)$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [3].

(4.1.1) bağıntısı yardımıyla, arrowhead-Pell dizisi için Companion matris formundaki üreteç matrisi:

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(k+1)\times(k+1)}$$

şeklinde belirlenmiştir ve bu matris arrowhead-Pell matrisi olarak adlandırılmaktadır.

$\alpha \geq k-1$ için

$$\left(M_k\right)^{\alpha}\begin{bmatrix} a_{k+1}(k+1) \\ a_{k+1}(k) \\ \vdots \\ a_{k+1}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{k+1}(n+k+1) \\ a_{k+1}(n+k) \\ \vdots \\ a_{k+1}(n+1) \end{bmatrix}$$

eşitliği görülür. $\alpha \geq k-1$ için α üzerinden tümevarım uygulanarak arrowhead-Pell matrisinin α -inci kuvveti aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$i.$ $k=2$ için

$$\left(M_2\right)^{\alpha} = \begin{bmatrix} a_3^{\alpha+3} & a_3^{\alpha+4}-a_3^{\alpha+3} & -a_3^{\alpha+2} \\ a_3^{\alpha+2} & a_3^{\alpha+3}-a_3^{\alpha+2} & -a_3^{\alpha+1} \\ a_3^{\alpha+1} & a_3^{\alpha+2}-a_3^{\alpha+1} & -a_3^{\alpha} \end{bmatrix}$$

$ii.$ $k \geq 3$ için

$$\left(M_k\right)^{\alpha} = \begin{bmatrix} a_{k+1}^{\alpha+k+1} & a_{k+1}^{\alpha+k+2}-a_{k+1}^{\alpha+k+1} & & -a_{k+1}^{\alpha+k} \\ a_{k+1}^{\alpha+k} & a_{k+1}^{\alpha+k+1}-a_{k+1}^{\alpha+k} & & -a_{k+1}^{\alpha+k-1} \\ a_{k+1}^{\alpha+k-1} & a_{k+1}^{\alpha+k}-a_{k+1}^{\alpha+k-1} & M_k^{*} & -a_{k+1}^{\alpha+k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k+1}^{\alpha+1} & a_{k+1}^{\alpha+2}-a_{k+1}^{\alpha+1} & & -a_{k+1}^{\alpha} \end{bmatrix}$$

dir. Burada $(k+1)\times(k-2)$ boyutlu M_k^{*} matrisi aşağıdaki gibidir [3]:

$$M_k^{*} = \begin{bmatrix} -a_{k+1}^{\alpha+2}-a_{k+1}^{\alpha+3}-\cdots-a_{k+1}^{\alpha+k} & -a_{k+1}^{\alpha+3}-a_{k+1}^{\alpha+4}-\cdots-a_{k+1}^{\alpha+k} & \cdots & -a_{k+1}^{\alpha+k-1}-a_{k+1}^{\alpha+k} \\ -a_{k+1}^{\alpha+1}-a_{k+1}^{\alpha+2}-\cdots-a_{k+1}^{\alpha+k-1} & -a_{k+1}^{\alpha+2}-a_{k+1}^{\alpha+3}-\cdots-a_{k+1}^{\alpha+k-1} & \cdots & -a_{k+1}^{\alpha+k-2}-a_{k+1}^{\alpha+k-1} \\ -a_{k+1}^{\alpha}-a_{k+1}^{\alpha+1}-\cdots-a_{k+1}^{\alpha+k-2} & -a_{k+1}^{\alpha+1}-a_{k+1}^{\alpha+2}-\cdots-a_{k+1}^{\alpha+k-2} & \cdots & -a_{k+1}^{\alpha+k-3}-a_{k+1}^{\alpha+k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{k+1}^{\alpha+2-k}-a_{k+1}^{\alpha+3-k}-\cdots-a_{k+1}^{\alpha} & -a_{k+1}^{\alpha+3-k}-a_{k+1}^{\alpha+4-k}-\cdots-a_{k+1}^{\alpha} & \cdots & -a_{k+1}^{\alpha-1}-a_{k+1}^{\alpha} \end{bmatrix}$$

<u>*Örnek 4.1.1:*</u> $k=4$ için arrowhead-Pell matrisinin α -inci kuvveti

$$\left(M_4\right)^{\alpha} = \begin{bmatrix} a_5^{\alpha+5} & a_5^{\alpha+6}-a_5^{\alpha+5} & -a_5^{\alpha+2}-a_5^{\alpha+3}-a_5^{\alpha+4} & -a_5^{\alpha+3}-a_5^{\alpha+4} & -a_5^{\alpha+4} \\ a_5^{\alpha+4} & a_5^{\alpha+5}-a_5^{\alpha+4} & -a_5^{\alpha+1}-a_5^{\alpha+2}-a_5^{\alpha+3} & -a_5^{\alpha+2}-a_5^{\alpha+3} & -a_5^{\alpha+3} \\ a_5^{\alpha+3} & a_5^{\alpha+4}-a_5^{\alpha+3} & -a_5^{\alpha}-a_5^{\alpha+1}-a_5^{\alpha+2} & -a_5^{\alpha+1}-a_5^{\alpha+2} & -a_5^{\alpha+2} \\ a_5^{\alpha+2} & a_5^{\alpha+3}-a_5^{\alpha+2} & -a_5^{\alpha-1}-a_5^{\alpha}-a_5^{\alpha+1} & -a_5^{\alpha}-a_5^{\alpha+1} & -a_5^{\alpha+1} \\ a_5^{\alpha+1} & a_5^{\alpha+2}-a_5^{\alpha+1} & -a_5^{\alpha-2}-a_5^{\alpha-1}-a_5^{\alpha} & -a_5^{\alpha-1}-a_5^{\alpha} & -a_5^{\alpha} \end{bmatrix}$$

şeklindedir [3].

Lemma 4.1.1: Arrowhead-Pell dizisinin karakteristik denklemi

$$x^{k+1} - x^{k} + 2x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + 1 = 0$$

olup bu denklemin çok katlı kökü yoktur [3].

İspat: $f\left(x\right) = x^{k+1} - x^{k} + 2x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + 1$ polinomunu

$$f\left(x\right) = x^{k+1} - x^{k} + 2x^{k-1} + \frac{x^{k-1}-1}{x-1}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda $k \geq 2$ için $f\left(0\right) \neq 0$ ve $f\left(1\right) \neq 0$ olduğu açıktır.

$$g\left(x\right) = \left(x-1\right) f\left(x\right)$$

olarak alınırsa

$$g\left(x\right) = x^{k+2} - 2x^{k+1} + 3x^{k} - x^{k-1} - 1$$

olur. $z \neq 0$ ve $z \neq 1$ olmak üzere z nin, $g\left(x\right)$ in bir çok katlı kökü olduğunu kabul edelim. Bu durumda z, $g\left(x\right)$ in bir çok katlı kökü olduğundan $g\left(z\right) = 0$ ve $g^{'}\left(z\right) = 0$ olmalıdır. $g^{'}\left(z\right) = 0$ durumu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} g^{'}\left(z\right) &= \left(k+2\right) z^{k+1} - 2\left(k+1\right) z^{k} + 3kz^{k-1} - \left(k-1\right) z^{k-2} \\ &= z^{k-2}\left(\left(k+2\right) z^{3} - 2\left(k+1\right) z^{2} + 3kz - k + 1\right) = 0 \end{aligned}$$

olmalıdır. Buradan $z \neq 0$ olduğundan $z^{k-2}\left(\left(k+2\right) z^{3} - 2\left(k+1\right) z^{2} + 3kz - k + 1\right) = 0$ dir. Bu ifadenin kökleri

$$z_1 = \frac{2+2k-\left(6+3k\right)\left(2^{\frac{1}{3}}\left(5k^2+10k-4\right)\right)}{\left(6+3k\right)^2\left(-11k^3-33k^2-60k-92+3\sqrt{3}\sqrt{23k^6+138k^5+267k^4+192k^3+216k^2+480k+304}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left(-11k^3-33k^2-60k-92+3\sqrt{3}\sqrt{23k^6+138k^5+267k^4+192k^3+216k^2+480k+304}\right)^{\frac{1}{3}}}{3\times 2^{\frac{1}{3}}\left(2+k\right)}$$

$$z_2 = \frac{2+2k+\left(6+3k\right)\left(\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(5k^2+10k-4\right)\right)}{\left(6+3k\right)^2\times 2^{\frac{2}{3}}\left(-11k^3-33k^2-60k-92+3\sqrt{3}\sqrt{23k^6+138k^5+267k^4+192k^3+216k^2+480k+304}\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{\left(\left(1-i\sqrt{3}\right)\right)\left(-11k^3-33k^2-60k-92+3\sqrt{3}\sqrt{23k^6+138k^5+267k^4+192k^3+216k^2+480k+304}\right)^{\frac{1}{3}}}{6\times 2^{\frac{1}{3}}\left(2+k\right)}$$

ve

$$z_3 = \frac{2+2k+(6+3k)\left(\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(5k^2+10k-4\right)\right)}{(6+3k)^2\times 2^{\frac{2}{3}}\left(-11k^3-33k^2-60k-92+3\sqrt{3}\sqrt{23k^6+138k^5+267k^4+192k^3+216k^2+480k+304}\right)^{\frac{1}{3}}} -$$

$$\frac{\left(\left(1+i\sqrt{3}\right)\right)\left(-11k^3-33k^2-60k-92+3\sqrt{3}\sqrt{23k^6+138k^5+267k^4+192k^3+216k^2+480k+304}\right)^{\frac{1}{3}}}{6\times 2^{\frac{1}{3}}(2+k)}$$

olduğu görülmektedir. Bu durumda $k \geq 2$ için $g(z_1) \neq 0$, $g(z_2) \neq 0$ ve $g(z_3) \neq 0$ olduğundan bir çelişki elde edilir ve bu çelişki ile Lemmanın ispatı tamamlanır.

$x^{k+1} - x^k + 2x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + 1 = 0$ denkleminin kökleri $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ ise, Lemma 4.1.1 ile bu köklerin birbirinden farklı olduğu görülmektedir. Ayrıca M_k arrowhead-Pell matrisinin karakteristik polinomunun aynı zamanda arrowhead-Pell sayılarının karakteristik denklemi olduğundan $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ ler M_k arrowhead-Pell matrisinin özdeğerleri olup, bu özdeğerler birbirinden farklı olur. Böylece M_k matrisinin köşegenleştirilebilir olduğu söylenebilir.

$(k+1)\times(k+1)$ boyutlu V^{k+1} Vandermonde matrisinin

$$V^{k+1} = \begin{bmatrix} (x_1)^k & (x_2)^k & \cdots & (x_{k+1})^k \\ (x_1)^{k-1} & (x_2)^{k-1} & \cdots & (x_{k+1})^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & & x_{k+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini düşünelim.

W_i^{k+1} matrisi:

$$W_i^{k+1} = \begin{bmatrix} (x_1)^{\alpha+k+1-i} \\ (x_2)^{\alpha+k+1-i} \\ \vdots \\ (x_{k+1})^{\alpha+k+1-i} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilsin ve $V_{i,j}^{k+1}$ matrisi, V^{k+1} matrisinin j-inci sütununun W_i^{k+1} sütun matrisiyle değiştirilmesi sonucu elde edilsin [3].

Teorem 4.1.1: $\alpha \geq k-1$ ve $k \geq 2$ için $\left(M_k\right)^{\alpha} = \left[m_{i,j}^{k,\alpha}\right]$ olmak üzere

$$m_{i,j}^{k,\alpha} = \frac{\det V_{i,j}^{k+1}}{\det V^{k+1}}$$

dir [3].

İspat: $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ özdeğerleri birbirinden farklı olduğu için M_k matrisi köşegenleştirilebilirdir. $G_{k+1} = \left(x_1, x_2, \ldots x_{k+1}\right)$ olsun. Bu durumda M_k matrisi köşegenleştirilebilir olduğundan $M_k V^{k+1} = V^{k+1} G_{k+1}$ eşitliği elde edilir. Ayrıca $\det V^{k+1} \neq 0$ olduğundan V^{k+1} matrisi tersinir matristir. Böylece $\left(V^{k+1}\right)^{-1} M_k V^{k+1} = G_{k+1}$ eşitliği sağlanır ki, bu da M_k matrisinin G_{k+1} matrisine benzer olduğunu göstermektedir. Benzer matrislerin kuvvetleri de benzer olduğundan $\alpha \geq k-1$ ve $k \geq 2$ için $\left(M_k\right)^{\alpha} V^{k+1} = V^{k+1}\left(G_{k+1}\right)^{\alpha}$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{cases} m_{i,1}^{k,\alpha}\left(x_1\right)^k + m_{i,2}^{k,\alpha}\left(x_1\right)^{k-1} + \cdots + m_{i,k+1}^{k,\alpha} = \left(x_1\right)^{\alpha+k+1-i} \\ m_{i,1}^{k,\alpha}\left(x_2\right)^k + m_{i,2}^{k,\alpha}\left(x_2\right)^{k-1} + \cdots + m_{i,k+1}^{k,\alpha} = \left(x_2\right)^{\alpha+k+1-i} \\ \vdots \\ m_{i,1}^{k,\alpha}\left(x_{k+1}\right)^k + m_{i,2}^{k,\alpha}\left(x_{k+1}\right)^{k-1} + \cdots + m_{i,k+1}^{k,\alpha} = \left(x_{k+1}\right)^{\alpha+k+1-i} \end{cases}$$

lineer denklem sistemi yazılabilmektedir. Her $i, j = 1, 2, \ldots, k+1$ için lineer denklem sisteminin çözümünden

$$m_{i,j}^{k,\alpha} = \frac{\det V_{i,j}^{k+1}}{\det V^{k+1}}$$

olduğu görülmektedir.

Arrowhead-Pell sayıları için Binet formülü aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Sonuç 4.1.1: $k \geq 2$ için $a_{k+1}(\alpha)$, α -inci arrowhead-Pell sayısı olmak üzere

$$a_{k+1}(\alpha) = -\frac{\det V_{k+1,k+1}^{k+1}}{\det V^{k+1}}$$

eşitliği elde edilir [3].

Dizinin companion matris formundaki üreteç matrisleri göz önünde bulundurularak aşağıdaki gibi bir süper-köşegen matris tanımlanmıştır ve bu matrisin permanent değerleri üzerinden de dizinin permanental temsili elde edilmiştir.

<u>*Tanım 4.1.2:*</u> $u \geq k+1$ için $u \times u$ boyutlu $R(u,k) = \left[r_{i,j}^{u,k} \right]$ süper köşegen matrisi:

$$r_{i,j}^{u,k} = \begin{cases} 1 & \begin{array}{c} \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq u \\ \text{ve} \\ i = t+1 \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq u-1, \end{array} \\ -2 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+1 \text{ ise } 1 \leq t \leq u-1, \\ -1 & \begin{array}{c} \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+2 \text{ ise } 1 \leq t \leq u-2, \\ i = t \text{ ve } j = t+3 \text{ ise } 1 \leq t \leq u-3, \\ \vdots \\ i = t \text{ ve } j = t+k \text{ ise } 1 \leq t \leq u-k, \end{array} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Yani $R(u,k) = \left[r_{i,j}^{u,k} \right]$ süper köşegen matrisi:

$$R(u,k) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & & & & \overset{(k+1)\text{-inci}}{\downarrow} & & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklindedir [3].

<u>*Teorem 4.1.2:*</u> $u \geq k+1$ için

$$perR(u,k) = a_{k+1}(u+k+1)$$

eşitliği elde edilir [3].

İspat: $u \geq k+1$ için $perR(u,k) = a_{k+1}(u+k+1)$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, denklemin $u+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. $R(u,k)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perR(u,k)$ genişletilir ise

$$perR(u+1,k) = perR(u,k) - 2perR(u-1,k) - perR(u-2,k) - \cdots - perR(u-k,k)$$

eşitliği elde edilir.

$$perR(u,k) = a_{k+1}(u+k+1),\ perR(u-1,k) = a_{k+1}(u+k),$$
$$perR(u-2,k) = a_{k+1}(u+k-1), \ldots, perR(u-k,k) = a_{k+1}(u+1)$$

olduğundan $perR(u+1,k) = a_{k+1}(u+k+2)$ eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 4.1.3: $u > k+1$ için $u \times u$ boyutlu $H(u,k) = \left[h_{i,j}^{u,k}\right]$ matrisi:

$$h_{i,j}^{u,k} = \begin{cases} & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq u, \\ & i = t+1 \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq u-k-1 \\ & \text{ve} \\ 1 & i = t \text{ ve } j = t+1 \text{ ise } 1 \leq t \leq u-1, \\ & i = t \text{ ve } j = t+2 \text{ ise } 1 \leq t \leq u-2, \\ & \vdots \\ & i = t \text{ ve } j = t+k-1 \text{ ise } 1 \leq t \leq u-k+1, \\ -2 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+1 \text{ ise } 1 \leq t \leq u-k-1, \\ & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+2 \text{ ise } 1 \leq t \leq u-k-1, \\ & i = t \text{ ve } j = t+3 \text{ ise } 1 \leq t \leq u-k-1, \\ -1 & \vdots \\ & i = t \text{ ve } j = t+k \text{ ise } 1 \leq t \leq u-k-1, \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Yani $H(u,k)$ matrisi:

$$H(u,k)=\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccccc} & & & & (k+1)\text{-inci} & & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \leftarrow (u-k)\text{-inci} \end{array}$$

şeklindedir [3].

<u>*Tanım 4.1.4:*</u> $u > k+2$ olmak üzere $u \times u$ boyutlu $P(u,k) = \left[p_{i,j}^{u,k} \right]$ matrisi:

$$P(u,k)=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & (u-k)\text{-inci} & & & \\ & & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & H(u-1,k) & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklinde tanımlanır [3].

<u>*Teorem 4.1.3:*</u> $k \geq 2$ için $a_{k+1}(\alpha)$, α -inci arrowhead-Pell sayısı olmak üzere:

i. $u > k+1$ için

$$perH(u,k) = a_{k+1}(u+1)$$

eşitliği elde edilir.

ii. $u > k+2$ için

$$perP(u,k) = \sum_{i=1}^{u} a_{k+1}(i)$$

eşitliği elde edilir [3].

İspat: *i*. Teoremi ispatlamak için u üzerinde tümevarım yöntemini uygulayalım. Denklemin $u > k+1$ için sağlandığı kabul edelim. Bu durumda denklemin $u+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. Eğer $H(u,k)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perH(u,k)$ genişletilir ise

$$perH(u+1,k) = perH(u,k) - 2perH(u-1,k) - perH(u-2,k) - \cdots - perH(u-k,k)$$

eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} &perH(u,k) = a_{k+1}(u+1),\ perH(u-1,k) = a_{k+1}(u), \\ &perH(u-2,k) = a_{k+1}(u-1), \ldots,\ perH(u-k,k) = a_{k+1}(u-k+1) \end{aligned}$$

olduğundan $perH(u+1,k) = a_{k+1}(u+2)$ eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

ii. $P(u,k)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perP(u,k)$ genişletilir ise

$$perP(u,k) = perP(u-1,k) + perH(u-1,k)$$

eşitliği elde edilir. Teorem 4.1.3 *i.* den ve u üzerinde tümevarım yönteminden ispat görülür.

Arrowhead-Pell sayıları için determinantal temsiller aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$u > k+2$ için $u \times u$ boyutlu bir T matrisi

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $perR(u,k) = \det(R(u,k) \circ T)$, $perH(u,k) = \det(H(u,k) \circ T)$ ve $perP(u,k) = \det(P(u,k) \circ T)$ eşitlikleri elde edilir.

Sonuç 4.1.2: $u > k+2$ için

$$\det(R(u,k) \circ T) = a_{k+1}(u+k+1)$$

$$\det(H(u,k) \circ T) = a_{k+1}(u+1)$$

ve

$$\det\left(P(u,k)\circ T\right)=\sum_{i=1}^{u}a_{k+1}(i)$$

eşitlikleri elde edilir [3].

Aşağıdaki sonuç ile arrowhead-Pell sayıları için toplamsal temsil verilmiştir.

Sonuç 4.1.3: $a_{k+1}(\alpha)$, α -ıncı arrowhead-Pell sayısı olsun. O halde

$$a_{k+1}(\alpha)=-\sum_{(t_1,t_2\dots,t_{k+1})}\frac{t_{k+1}}{t_1+t_2+\dots+t_{k+1}}\times\binom{t_1+\dots+t_{k+1}}{t_1,\dots,t_{k+1}}(-2)^{t_2}(-1)^{t_3+t_4+\dots+t_{k+1}}$$

olup burada toplam negatif olmayan tam sayılar üzerinde $t_1+2t_2+\dots+(k+1)t_{k+1}=\alpha$ koşulunu sağlamaktadır.

İspat: Teorem 2.1.4 de $i=k+1$, $j=k+1$ ve $k_1=1, k_2=-2, k_3=\dots=k_{k+1}=-1$ olarak seçilirse $(M_k)^{\alpha}$ matrisinden sonuç açık olarak görülür.

Arrowhead-Pell sayıları için üreteç fonksiyonu göz önüne alalım. Katsayıları arrowhead-Pell sayıları olan

$$g^k(x)=a_{k+1}(1)+a_{k+1}(2)x+a_{k+1}(3)x^2+\dots+a_{k+1}(k+1)x^k+a_{k+1}(k+2)x^{k+1}+\dots+$$
$$+a_{k+1}(n+k+1)x^{n+k}+\dots$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Buna göre,

$$\left(1-x+2x^2+x^3+\dots+x^{k+1}\right)g^k(x)$$
$$=a_{k+1}(1)+a_{k+1}(2)x+a_{k+1}(3)x^2+\dots+a_{k+1}(k+1)x^k+a_{k+1}(k+2)x^{k+1}+\dots+a_{k+1}(n+k+1)x^{n+k}+\dots$$
$$-a_{k+1}(1)x-a_{k+1}(2)x^2-a_{k+1}(3)x^3-\dots-a_{k+1}(k+1)x^{k+1}-a_{k+1}(k+2)x^{k+2}-\dots-a_{k+1}(n+k+1)x^{n+k+1}-\dots$$
$$+2a_{k+1}(1)x^2+2a_{k+1}(2)x^3+2a_{k+1}(3)x^4+\dots+2a_{k+1}(k+1)x^{k+2}+2a_{k+1}(k+2)x^{k+3}+\dots+2a_{k+1}(n+k+1)x^{n+k+2}+\dots$$
$$\dots \qquad\qquad \dots \qquad\qquad \dots$$
$$a_{k+1}(1)x^{k+1}+a_{k+1}(2)x^{k+2}+a_{k+1}(3)x^{k+3}+\dots+a_{k+1}(k+1)x^{2k+1}+a_{k+1}(k+2)x^{2k+2}+\dots+a_{k+1}(n+k+1)x^{n+2k+1}+\dots$$

eşitliği elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak ve arrowhead-Pell sayıları tanımından yararlanarak

$$\left(1-x+2x^2+x^3+\dots+x^{k+1}\right)g^k(x)=a_{k+1}(k+1)x^k=x^k$$

olduğu görülür. Buradan arrowhead-Pell sayıları için üreteç fonksiyonu;

$$g^k(x) = \frac{x^k}{1 - x + 2x^2 + x^3 + \cdots + x^{k+1}}$$

olarak elde edilir ve burada $k \geq 2$ dir.

Aşağıdaki Teorem ile üreteç fonksiyonu kullanılarak arrowhead-Pell sayılarının üstel temsili verilmiştir.

<u>*Teorem 4.1.4:*</u> Arrowhead-Pell sayılarının üstel temsili aşağıdaki gibidir [3]:

$$g^k(x) = x^k \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x)^i}{i} \left(1 - 2x - x^2 - \cdots - x^k\right)^i \right).$$

<u>*İspat:*</u> $\ln g^k(x) = \ln x^k - \ln\left(1 - x + 2x^2 + x^3 + \cdots + x^{k+1}\right)$

ve

$$-\ln\left(1 - x + 2x^2 + x^3 + \cdots + x^{k+1}\right) = -[-x\left(1 - 2x - x^2 - \cdots - x^k\right) - \frac{1}{2}x^2\left(1 - 2x - x^2 - \cdots - x^k\right)^2 - \cdots$$

$$- \frac{1}{n}x^n\left(1 - 2x - x^2 - \cdots - x^k\right)^n - \cdots]$$

olduğundan

$$\ln \frac{g^k(x)}{x^k} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x)^i}{i} \left(1 - 2x - x^2 - \cdots - x^k\right)^i$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$\alpha \geq 1$ ve $k \geq 2$ için

$$S_\alpha = \sum_{i=1}^{\alpha} a_{k+1}(i)$$

olsun. $(k+2) \times (k+2)$ boyutlu G_k matrisi aşağıdaki gibi gösterilsin:

$$G_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & M_k & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Bu durumda $(G_k)^\alpha$ matrisi:

$$
(G_k)^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{\alpha+k} & & & \\ S_{\alpha+k-1} & & (M_k)^{\alpha} & \\ \vdots & & & \\ S_{\alpha} & & & \end{bmatrix}
$$

şeklinde elde edilir [3].

4.2. m Modülüne Göre Arrowhead-Pell dizileri

a_{ij} ler tam sayılar olmak üzere verilen bir $A=\left[a_{ij}\right]$ matrisi için, A matrisinin her elemanının $\bmod m$ ye göre indirgenmesi $A(\bmod m)$ şeklinde ifade edilir. Yani, $A(\bmod m) \equiv a_{ij} \left(\bmod m\right)$ dir. $\langle A \rangle_m = \left\{ A^i \left(\bmod m\right) \mid i \geq 0 \right\}$ kümesini göz önüne alalım. Eğer $obeb(m, \det A)=1$ ise $\langle A \rangle_m$ bir devirli grup olur. $\left|\langle A \rangle_m\right|$ ile $\langle A \rangle_m$ nin mertebesi gösterilmiştir.

M_k arrowhead-Pell matrisi için $\det M_k = (-1)^{k+1}$ olduğundan m nin tüm pozitif tam sayı değeri için $\langle M_k \rangle_m$ devirli bir gruptur.

$\langle M_k \rangle_m$ için aşağıdaki teoremleri verilebilir.

Teorem 4.2.1: r bir asal sayı ve $\langle M_k \rangle_{r^m}$ devirli bir grup olsun. Eğer u, $\left|\langle M_k \rangle_r\right| = \left|\langle M_k \rangle_{r^u}\right|$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tam sayı ise bu takdirde $v \geq u$ için $\left|\langle M_k \rangle_{r^v}\right| = r^{v-u} . \left|\langle M_k \rangle_r\right|$ eşitliği yazılır. Özellikle $\left|\langle M_k \rangle_r\right| \neq \left|\langle M_k \rangle_{r^2}\right|$ ise, her $v \geq 2$ için $\left|\langle M_k \rangle_{r^v}\right| = r^{v-1} . \left|\langle M_k \rangle_r\right|$ olur [4].

İspat: $\langle M_k \rangle_{r^m}$ devirli grubunu ele alalım. Farzedelim ki b pozitif bir tam sayı olsun ve $\left|\langle M_k \rangle_{r^m}\right|$, $h(r^m)$ ile gösterilsin. Eğer $(M_k)^{h(r^{b+1})} \equiv I \left(\bmod r^{b+1}\right)$ ise $(M_k)^{h(r^{b+1})} \equiv I \left(\bmod r^{b}\right)$ dir. Burada I, $(k+1)\times(k+1)$ tipinde birim matristir. Böylece

$h(r^b)$ nin $h(r^{b+1})$ yi böldüğü görülmektedir. Ayrıca $(M_k)^{h(r^b)} = I + (m_{ij}^{(b)} r^b)$ eşitliği yazılarak, binom açılımından

$$(M_k)^{h(r^b)\cdot r} = \left(I + \left(m_{ij}^{(b)} r^b\right)\right)^r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \left(m_{ij}^{(b)} r^b\right)^i \equiv I \left(\bmod r^{b+1}\right)$$

elde edilir ki, bu da $h(r^{b+1})$ 'nin $h(r^b)\cdot r$ tarafından bölünebilir olduğunu gösterir. Böylece $h(r^{b+1}) = h(r^b)$ ya da $h(r^{b+1}) = h(r^b)\cdot r$ dir. Ancak $h(r^{b+1}) = h(r^b)\cdot r$ eşitliğin sağlanması, r tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(b)}$ nin var olması ile mümkündür. u, $h(r) = h(r^u)$ eşitliği sağlayan en büyük pozitif tam sayı olduğundan $h(r^u) \neq h(r^{u+1})$ eşitsizliği yazılır ve bu eşitsizlik, r tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(u+1)}$ nin mevcut olduğunu gösterir. Dolayısıyla $h(r^{u+1}) \neq h(r^{u+2})$ sonucu elde edilir ve u üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak ispat tamamlanır.

$a_{k+1}(n)$ arrowhead-Pell dizisi bir m modülüne göre indirgenirse, tekrar eden,

$$\{a_{k+1}^m(n)\} = \{a_{k+1}^m(1), a_{k+1}^m(2), \ldots, a_{k+1}^m(i), \ldots\}$$

dizisi elde edilir ve burada $a_{k+1}^m(i) = a_{k+1}(i) (\bmod m)$ dir. Bu bağıntı (4.1.1)'deki bağıntı ile aynıdır.

<u>*Teorem 4.2.2:*</u> $k \geq 2$ için $\{a_{k+1}^m(n)\}$ dizisi basit periyodik bir dizidir [4].

<u>*İspat:*</u> Farzedelim ki $Q = \{(q_1, q_2, \ldots, q_{k+1}) |\ 0 \leq q_i \leq m-1\}$ olsun bu durumda $|Q| = m^{k+1}$ dir. Z_m nin elemanlarının m^{k+1} tane farklı $k+1$-tiplisi mevcut olduğundan, bu $k+1$-tiplilerden en az bir tanesi $\{a_{k+1}^m(n)\}$ dizisinde iki kez ortaya çıkar. Bundan dolayı bu $k+1$-lileri takip eden alt dizi tekrarlanır. Böylece dizi periyodiktir. $i > j$ olmak üzere

$$a_{k+1}^m(i+1) \equiv a_{k+1}^m(j+1), a_{k+1}^m(i+2) \equiv a_{k+1}^m(j+2), \ldots, a_{k+1}^m(i+k+1) \equiv a_{k+1}^m(j+k+1)$$

İse $i \equiv j (\bmod k+1)$ olduğu sonucuna ulaşılır. Arrowhead-Pell dizisi tanımından,

$$a_{k+1}^m(i) \equiv a_{k+1}^m(j), a_{k+1}^m(i-1) \equiv a_{k+1}^m(j-1), \ldots, a_{k+1}^m(i-j+1) \equiv a_{k+1}^m(1)$$

eşitliği elde edilir ki bu da $\{a_{k+1}^m(n)\}$ dizisinin basit periyodik olduğunu gösterir.

$\{a_{k+1}^m(n)\}$ dizisinin periyodu $L_{k+1}(m)$ ile gösterilsin.

Teorem 4.2.3: $u \geq 1$ ve p_i ler farklı asal sayılar olmak üzere $m = \prod_{i=1}^{u} (p_i)^{r_i}$ olsun. Bu takdirde $L_{k+1}(m) = okek\left[L_{k+1}\left((p_1)^{r_1}\right), L_{k+1}\left((p_2)^{r_2}\right), \ldots, L_{k+1}\left((p_u)^{r_u}\right)\right]$ dır [4].

İspat: $\left\{a_{k+1}^{(p_i)^{r_i}}(n)\right\}$ dizisinin periyodu $L_{k+1}\left((p_i)^{r_i}\right)$ olduğundan bu dizi sadece $\alpha \cdot L_{k+1}\left((p_i)^{r_i}\right)$, $(\alpha \in \mathbb{N})$ uzunluğundaki bloklarda tekrar eder. Ayrıca $L_{k+1}(m)$, $\{a_{k+1}^{m}(n)\}$ dizisinin periyodu olduğundan, her i değeri için $\left\{a_{k+1}^{(p_i)^{r_i}}(n)\right\}$ dizisi $L_{k+1}(m)$ terimde bir tekrar eder. Böylece, her i değeri için $L_{k+1}(m)$ periyodu $\alpha \cdot L_{k+1}\left((p_i)^{r_i}\right)$ şeklinde olup bu sayı $\{a_{k+1}^{m}(n)\}$ dizisinin periyodu vermektedir. Dolayısıyla $L_{k+1}(m) = okek\left[L_{k+1}\left((p_1)^{r_1}\right), L_{k+1}\left((p_2)^{r_2}\right), \ldots, L_{k+1}\left((p_u)^{r_u}\right)\right]$ elde edilmektedir.

4.3. Gruplarda Arrowhead-Pell Dizileri

Tanım 4.3.1: G grubu sonlu 2-gerenli bir grup ve (x, y) ikilisi G nin geren çifti olsun. $n \geq 1$ için $AR_{k+1}(G : x, y)$ arrowhead-Pell orbiti,

$$x_{k+1}(1) = x, x_{k+1}(2) = y, x_{k+1}(3) = e, \ldots, x_{k+1}(k+1) = e$$

başlangıç şartları ile birlikte

$$x_{k+1}(n+k+1) = \left(x_{k+1}(n)\right)^{-1}\left(x_{k+1}(n+1)\right)^{-1}\ldots\left(x_{k+1}(n+k-2)\right)^{-1}\left(x_{k+1}(n+k-1)\right)^{-2}\left(x_{k+1}(n+k)\right)$$

bağıntısı ile tanımlanır [8].

Teorem 4.3.1: Sonlu bir G grubunun $AR_{k+1}(G : x, y)$ arrowhead-Pell orbiti basit periyodiktir [8].

İspat: G grubunun mertebesi p olsun. G grubunun elemanlarının birbirinden farklı sıralı $k+1$-lilerin sayısı p^{k+1} olduğundan en az bir tanesi $AR_{k+1}(G : x, y)$ arrowhead-

Pell orbitinde iki kez ortaya çıkar. Böylece bu tekrardan dolayı arrowhead-Pell orbiti periyodiktir. Arrowhead-Pell orbiti periyodik olduğundan

$$x_{k+1}(g+1)=x_{k+1}(h+1), x_{k+1}(g+2)=x_{k+1}(h+2), \ldots, x_{k+1}(g+k+1)=x_{k+1}(h+k+1)$$

olacak şekilde $g \equiv h(\bmod k+1)$ şartını sağlayan g ve h doğal sayılar vardır. Diğer taraftan arrowhead-Pell orbiti tanımından

$$(x_{k+1}(n))=(x_{k+1}(n+1))^{-1}\ldots(x_{k+1}(n+k-2))^{-1}(x_{k+1}(n+k-1))^{-2}(x_{k+1}(n+k))x_{k+1}(n+k+1)^{-1}$$

yazılır. Bu nedenle $x_{k+1}(g)=x_{k+1}(h)$ eşitliği elde edilir. Böylece

$$x_{k+1}(g-h+1)=x_{k+1}(1), x_{k+1}(g-h+2)=x_{k+1}(2), \ldots, x_{k+1}(g-h+k+1)=x_{k+1}(k+1)$$

elde edilir ki bu da arrowhead-Pell orbitinin basit periyodik olduğu anlamına gelir. $LAR_{k+1}(G:x,y)$ notasyonu ile $AR_{k+1}(G:x,y)$ arrowhead-Pell orbitinin periyot uzunluğu gösterilsin.

Teorem 4.3.2: SD_{2^m} semidihedral grubunun arrowhead-Pell orbitinin periyot uzunluğu $2^{m-2}\cdot L_{k+1}(2)$ dır [8].

İspat: $AR_{k+1}\left(SD_{2^m}:x,y\right)$ orbitinin ilk $k+1$ elemanı aşağıdaki gibidir:

$$x_{k+1}(1)=x, x_{k+1}(2)=y, x_{k+1}(3)=e, \ldots, x_{k+1}(k+1)=e.$$

Böylece dizinin genel hali:

$$x_{k+1}\left(2\cdot L_{k+1}(2)i+1\right)=x^{\lambda_1 4i+1}, x_{k+1}\left(2\cdot L_{k+1}(2)i+2\right)=yx^{\lambda_2 4i},$$

$$x_{k+1}\left(2\cdot L_{k+1}(2)i+3\right)=x^{\lambda_3 4i}, \ldots, x_{k+1}\left(2\cdot L_{k+1}(2)i+k+1\right)=x^{\lambda_{k+1} 4i}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{k+1}$ ler $obeb(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{k+1})=1$ olacak şekilde pozitif tam sayılardır. Burada dizinin periyodunu belirlemek için $4i=2^{m-1}\cdot k$ $(k\in\mathbb{N})$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir. Bu durumda $i=2^{m-3}$ seçilirse,

$$x_{k+1}\left(2^{m-2}\cdot L_{k+1}(2)+1\right)=x, x_{k+1}\left(2^{m-2}\cdot L_{k+1}(2)+2\right)=y,$$

$$x_{k+1}\left(2^{m-2}\cdot L_{k+1}(2)+3\right)=e, \ldots, x_{k+1}\left(2^{m-2}\cdot L_{k+1}(2)+k+1\right)=e$$

elde edilir ve buradan arrowhead-Pell orbitinin $\left(2^{m-2}\cdot L_{k+1}(2)\right)$-inci elemandan sonra tekrara başladığı açıkca görülmektedir. Böylece arrowhead-Pell orbitinin periyot uzunluğu $2^{m-2}\cdot L_{k+1}(2)$ olur.

Örnek 4.3.1: $k=2$ için arrowhead-Pell orbitinin semidihedral grubundaki periyot uzunluğunu göz önüne alalım. Bu durumda arrowhead-Pell orbitinin başlangıç değerleri

$$x_3(1)=x, x_3(2)=y, x_3(3)=e$$

şeklindedir. Diğer yandan $\{a_3^2(n)\}$ dizisinin periyodu $L_3(2)=7$ olup, arrowhead-Pell orbiti aşağıdaki gibi ele edilir:

$$\begin{aligned}
&x_3(1)=x, x_3(2)=y, x_3(3)=e,\\
&x_3(4)=x^{-1}, x_3(5)=yx^{-1}, x_3(6)=yx^{-3},\\
&x_3(7)=yx^{-4}, x_3(8)=x^{2m+1}, x_3(9)=yx^{-6},\\
&x_3(10)=x^{-8}, x_3(11)=x^{5(2^{m-2}-1)}, x_3(12)=yx^{-5(2^{m-2}-1)},\\
&x_3(13)=yx^{5.2^{m-2}+19}, x_3(14)=yx^{-2}, x_3(15)=x^{9},\\
&x_3(16)=yx^{-4}, x_3(17)=e, x_3(18)=x^{-9},\ldots.
\end{aligned}$$

Böylece arrowhead-Pell orbitinin genel hali aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$x_3(14i+1)=x^{8i+1}, x_3(14i+2)=yx^{-4i}, x_3(14i+3)=e$$

Burada $i=\ 2^{m-3}$ seçilirse,

$$x_3\left(2^{m-2}\cdot 7+1\right)=x, x_3\left(2^{m-2}\cdot 7+2\right)=y, x_3\left(2^{m-2}\cdot 7+3\right)=e$$

olup buradan da arrowhead-Pell orbitinin $2^{m-2}\cdot 7$-inci elemandan sonra tekrara başladığı açıkca görülmektedir. Böylece $k=2$ olduğu durumda arrowhead-Pell orbitinin periyot uzunluğunu $2^{m-2}\cdot 7$ olur [8].

Örnek 4.3.2: $k=3$ için arrowhead-Pell orbitinin SD_{32} semidihedral grubundaki periyot uzunluğunu göz önüne alalım.

$$SD_{32}=\left\langle x,y \mid x^{16}=y^{2}=e, yxy=x^{7}\right\rangle$$

olmak üzere, $k=3$ için, $\{a_4^2(n)\}$ dizisinin periyodu $L_4(2)=6$ olup, bu grupta $k=3$ için arrowhead-Pell orbiti aşağıdaki gibi olur:

$$x_4(1)=x, x_4(2)=y, x_4(3)=e, x_4(4)=e,\ldots,$$
$$x_4(13)=x^{13}, x_4(14)=yx^{-4}, x_4(15)=x^{8}, x_4(16)=x^{12},\ldots,$$
$$x_4(25)=x^{9}, x_4(26)=yx^{8}, x_4(27)=e, x_4(28)=x^{8},\ldots,$$
$$x_4(37)=x^{5}, x_4(38)=yx^{4}, x_4(39)=x^{8}, x_4(40)=x^{4},\ldots,$$
$$x_4(49)=x, x_4(50)=y, x_4(51)=e, x_4(52)=e,\ldots.$$

Buradan $x_4(1)=x_4(49)=x$, $x_4(2)=x_4(50)=y$, $x_4(3)=x_4(51)=e$ ve $x_4(4)=x_4(52)=e$ olup, $k=3$ için arrowhead-Pell orbitinin SD_{32} semidihedral grubundaki periyot uzunluğu 48 dir [8].

4.4. Arrowhead-Jacobsthal Dizileri

Genelleştirilmiş k -mertebeden Jacobsthal dizisi için karakteristik polinom

$$J(x)=x^k-x^{k-1}-2x^{k-2}-x^{k-3}\cdots-x-1$$

şeklindedir.

$J(x)$ polinomunun katsayıları yardımıyla $B=\left[b_{ij}\right]_{(k+1)\times(k+1)}$ arrowhead matrisi:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

B matrisi kullanılarak arrowhead-Jacobsthal dizisi aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

<u>*Tanım 4.4.1:*</u> $k\geq 3$ ve $n\geq 1$ için arrowhead-Jacobsthal dizisi

$$x_{k+1}(1)=x_{k+1}(2)=\cdots=x_{k+1}(k)=0,\ x_{k+1}(k+1)=1$$

başlangıç değerleri ile

$$x_{k+1}(n+k+1)=x_{k+1}(n+k)-x_{k+1}(n+k-1)-2x_{k+1}(n+k-2)-x_{k+1}(n+k-3)-\cdots-x_{k+1}(n) \qquad (4.4.1)$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [9].

(4.4.1) bağıntısı yardımıyla arrowhead-Jacobsthal dizisi için Companion matris formundaki üreteç matrisi:

$$J_k = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(k+1)\times(k+1)}$$

şeklinde belirlenmiştir ve bu matris arrowhead-Jacobsthal matrisi olarak adlandırılmaktadır.

α üzerinden tümevarım uygulanarak $\alpha > k-2$ için arrowhead-Jacobsthal matrisinin α -inci kuvveti aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$i.$ $k=3$ için

$$(J_3)^\alpha = \begin{bmatrix} x_4^{\alpha+4} & x_4^{\alpha+5} - x_4^{\alpha+4} & -2x_4^{\alpha+3} - x_4^{\alpha+2} & -x_4^{\alpha+3} \\ x_4^{\alpha+3} & x_4^{\alpha+4} - x_4^{\alpha+3} & -2x_4^{\alpha+2} - x_4^{\alpha+1} & -x_4^{\alpha+2} \\ x_4^{\alpha+2} & x_4^{\alpha+3} - x_4^{\alpha+2} & -2x_4^{\alpha+1} - x_4^{\alpha} & -x_4^{\alpha+1} \\ x_4^{\alpha+1} & x_4^{\alpha+2} - x_4^{\alpha+1} & -2x_4^{\alpha} - x_4^{\alpha-1} & -x_4^{\alpha} \end{bmatrix}$$

$ii.$ $k \geq 4$ için

$$(J_k)^\alpha = \begin{bmatrix} x_{k+1}^{\alpha+k+1} & x_{k+1}^{\alpha+k+2} - x_{k+1}^{\alpha+k+1} & -2x_{k+1}^{\alpha+k} - x_{k+1}^{\alpha+k-1} - \cdots - x_{k+1}^{\alpha+2} & & -x_{k+1}^{\alpha+k} \\ x_{k+1}^{\alpha+k} & x_{k+1}^{\alpha+k+1} - x_{k+1}^{\alpha+k} & -2x_{k+1}^{\alpha+k-1} - x_{k+1}^{\alpha+k-2} - \cdots - x_{k+1}^{\alpha+1} & & -x_{k+1}^{\alpha+k-1} \\ x_{k+1}^{\alpha+k-1} & x_{k+1}^{\alpha+k} - x_{k+1}^{\alpha+k-1} & -2x_{k+1}^{\alpha+k-2} - x_{k+1}^{\alpha+k-3} - \cdots - x_{k+1}^{\alpha} & J_k^* & -x_{k+1}^{\alpha+k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k+1}^{\alpha+1} & x_{k+1}^{\alpha+2} - x_{k+1}^{\alpha+1} & -2x_{k+1}^{\alpha} - x_{k+1}^{\alpha-1} - \cdots - x_{k+1}^{\alpha-k+2} & & -x_{k+1}^{\alpha} \end{bmatrix}$$

şeklinde olup burada $(k+1)\times(k-3)$ boyutlu J_k^* matrisi aşağıdaki gibidir:

$$J_k^* = \begin{bmatrix} -x_{k+1}^{\alpha+3} - x_{k+1}^{\alpha+4} - \cdots - x_{k+1}^{\alpha+k} & -x_{k+1}^{\alpha+4} - x_{k+1}^{\alpha+5} - \cdots - x_{k+1}^{\alpha+k} & \cdots & -x_{k+1}^{\alpha+k-1} - x_{k+1}^{\alpha+k} \\ -x_{k+1}^{\alpha+2} - x_{k+1}^{\alpha+3} - \cdots - x_{k+1}^{\alpha+k-1} & -x_{k+1}^{\alpha+3} - x_{k+1}^{\alpha+4} - \cdots - x_{k+1}^{\alpha+k-1} & \cdots & -x_{k+1}^{\alpha+k-2} - x_{k+1}^{\alpha+k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_{k+1}^{\alpha-k+3} - x_{k+1}^{\alpha-k+4} - \cdots - x_{k+1}^{\alpha} & -x_{k+1}^{\alpha-k+4} - x_{k+1}^{\alpha-k+5} - \cdots - x_{k+1}^{\alpha} & \cdots & -x_{k+1}^{\alpha-1} - x_{k+1}^{\alpha} \end{bmatrix}.$$

Burada x_{k+1}^{α} notasyonu ile $x_{k+1}(\alpha)$ gösterilmektedir [9].

__Lemma 4.4.1:__ Arrowhead-Jacobsthal dizisinin karakteristik denklemi

$$x^{k+1} - x^k + x^{k-1} + 2x^{k-2} + x^{k-3} + \cdots + 1 = 0$$

olup, bu denklemin çok katlı kökü yoktur [9].

İspat: $f(x)=x^{k+1}-x^{k}+x^{k-1}+2x^{k-2}+x^{k-3}+\cdots+1$ olsun. Buradan

$$f(x)=x^{k+1}-x^{k}+x^{k-1}+2x^{k-2}+\frac{x^{k-2}-1}{x-1}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda $k\geq 3$ için $f(0)\neq 0$ ve $f(1)\neq 0$ olduğu açık bir şekilde görülmektedir.

$$h(x)=(x-1)\,f(x)$$

olarak alınırsa

$$h(x)=x^{k+2}-2x^{k+1}+2x^{k}+x^{k-1}-x^{k-2}-1$$

olur. $\beta\neq 0$ ve $\beta\neq 1$ olmak üzere β nin $h(x)$ in bir çok katlı kökü olduğunu kabul edelim. Bu durumda β, $h(x)$ in bir çok katlı kökü olduğundan $h(\beta)=0$ ve $h^{'}(\beta)=0$ olmalıdır. $h^{'}(\beta)=0$ durumu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} h^{'}(\beta) &= (k+2)\beta^{k+1}-2(k+1)\beta^{k}+2k\beta^{k-1}+(k-1)\beta^{k-2}-(k-2)\beta^{k-3} \\ &= \beta^{k-3}\left((k+2)\beta^{4}-2(k+1)\beta^{3}+2k\beta^{2}+(k-1)\beta-k+2\right)=0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\beta\neq 0$ olduğundan,

$$\beta^{k-3}\left((k+2)\beta^{4}-2(k+1)\beta^{3}+2k\beta^{2}+(k-1)\beta-k+2\right)=0$$

olmalıdır. Mathematica wolfram 10.0 [69] gibi uygun yazılımları kullanarak, bu son denklemin kökleri,

$$a=115k^{3}+\sqrt{13257k^{6}-86886k^{4}+62100k^{3}+178497k^{2}-199260k-223452}-369k+270$$

ve

$$b=\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{k^{3}+6k^{2}+12k+8}$$

olmak üzere

$$\beta_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a)^{\frac{1}{3}}}{3b} - \frac{2\left(21-k^2\right)b}{3(k+2)^2(a)^{\frac{1}{3}}} + \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} - \frac{4k}{3(k+2)}} -$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-\left(\frac{(a)^{\frac{1}{3}}}{3b}\right) - \frac{2\left(21-k^2\right)b}{3(k+2)^2(a)^{\frac{1}{3}}} - \frac{\frac{8(k+1)^3}{(k+2)^3} - \frac{16k(k+1)}{2(k+2)^2} - \frac{8(k-1)}{k+2}}{4.\sqrt{\frac{(a)^{\frac{1}{3}}}{3b} + \frac{\left(21-k^2\right)b}{3(k+2)^2(a)^{\frac{1}{3}} + \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} - \frac{4k}{3(k+2)}}}} + \frac{2(k+1)^2}{(k+2)^2} - \frac{8k}{3(k+2)} + \frac{(k+1)}{2(k+2)}}$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a)^{\frac{1}{3}}}{3b} - \frac{2\left(21-k^2\right)b}{3(k+2)^2(a)^{\frac{1}{3}}} + \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} - \frac{4k}{3(k+2)}} +$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-\left(\frac{(a)^{\frac{1}{3}}}{3b}\right) - \frac{2\left(21-k^2\right)b}{3(k+2)^2(a)^{\frac{1}{3}}} - \frac{\frac{8(k+1)^3}{(k+2)^3} - \frac{16k(k+1)}{(k+2)^2} - \frac{8(k-1)}{k+2}}{4.\sqrt{\frac{(a)^{\frac{1}{3}}}{3b} + \frac{2\left(21-k^2\right)b}{3(k+2)^2(a)^{\frac{1}{3}} + \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} - \frac{4k}{3(k+2)}}}} + \frac{2(k+1)^2}{(k+2)^2} - \frac{8k}{3(k+2)} + \frac{(k+1)}{2(k+2)}}$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a)^{\frac{1}{3}}}{3b} - \frac{2\left(21-k^2\right)b}{3(k+2)^2(a)^{\frac{1}{3}}} + \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} - \frac{4k}{3(k+2)}} -$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-\left(\frac{(a)^{\frac{1}{3}}}{3b}\right) - \frac{2\left(21-k^2\right)b}{3(k+2)^2(a)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\frac{8(k+1)^3}{(k+2)^3} - \frac{16k(k+1)}{(k+2)^2} - \frac{8(k-1)}{k+2}}{4.\sqrt{\frac{(a)^{\frac{1}{3}}}{3b} + \frac{2\left(21-k^2\right)b}{3(k+2)^2(a)^{\frac{1}{3}} + \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} - \frac{4k}{3(k+2)}}}} + \frac{2(k+1)^2}{(k+2)^2} - \frac{8k}{3(k+2)} + \frac{(k+1)}{2(k+2)}}$$

ve

$$\beta_4 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a)^{\frac{1}{3}}}{3b} + \frac{2\left(21-k^2\right)b}{3(k+2)^2(a)^{\frac{1}{3}}} + \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} - \frac{4k}{3(k+2)}} +$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-\left(\frac{(a)^{\frac{1}{3}}}{3b}\right) - \frac{2\left(21-k^2\right)b}{3(k+2)^2(a)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\frac{8(k+1)^3}{(k+2)^3} - \frac{16k(k+1)}{2(k+2)^2} - \frac{8(k-1)}{k+2}}{4.\sqrt{\frac{(a)^{\frac{1}{3}}}{3b} + \frac{\left(21-k^2\right)b}{3(k+2)^2(a)^{\frac{1}{3}} + \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} - \frac{4k}{3(k+2)}}}} + \frac{2(k+1)^2}{(k+2)^2} - \frac{8k}{3(k+2)} + \frac{(k+1)}{2(k+2)}}$$

olduğu görülmektedir. Bu durumda $k \geq 3$ için $h(\beta_1) \neq 0$, $h(\beta_2) \neq 0$ $h(\beta_3) \neq 0$ ve

$h(\beta_4) \neq 0$ olduğundan bir çelişki elde edilir ve bu çelişki ile Lemmanın ispatı tamamlanır.

$x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ ler, $x^{k+1} - x^k + x^{k-1} + 2x^{k-2} + x^{k-3} + \cdots + 1 = 0$ denkleminin kökleri ise Lemma 4.4.1 ile bu köklerin birbirinden farklı olduğu görülmektedir. Ayrıca J_k arrowhead- Jacobsthal matrisinin karakteristik polinomunun, aynı zamanda arrowhead- Jacobsthal sayılarının karakteristik denklemi olduğundan $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ ler J_k arrowhead- Jacobsthal matrisinin özdeğerleri olup ve bu özdeğerler birbirinden farklı olur. Böylece J_k arrowhead- Jacobsthal matrisinin köşegenleştirilebilir olduğu söylenebilir.

$(k+1)\times(k+1)$ boyutlu V^{k+1} Vandermonde matrisi:

$$V^{k+1} = \begin{bmatrix} (x_1)^k & (x_2)^k & \cdots & (x_{k+1})^k \\ (x_1)^{k-1} & (x_2)^{k-1} & \cdots & (x_{k+1})^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & & x_{k+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın.

G_i^{k+1} matrisi:

$$G_i^{k+1} = \begin{bmatrix} (x_1)^{\alpha+k+1-i} \\ (x_2)^{\alpha+k+1-i} \\ \vdots \\ (x_{k+1})^{\alpha+k+1-i} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilsin ve $V_{i,j}^{k+1}$ matrisi, V^{k+1} matrisinin j-inci sütununu G_i^{k+1} sütun matrisiyle değiştirilmesi sonucu elde edilsin [9].

<u>*Teorem 4.4.1:*</u> $\alpha > k-2$ ve $k \geq 3$ için $(J_k)^{\alpha} = \left(j_{i,j}^{k,\alpha}\right)$ olmak üzere

$$j_{i,j}^{k,\alpha} = \frac{\det V_{i,j}^{k+1}}{\det V^{k+1}}$$

dir [9].

İspat: $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ özdeğerleri birbirinden farklı olduğu için J_k matrisi köşegenleştirilebilirdir. $H_{k+1} = (x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})$ olsun. Bu durumda J_k matrisi köşegenleştirilebilir olduğundan $J_k V^{k+1} = V^{k+1} H_{k+1}$ eşitliği elde edilir. Öte yandan $\det V^{k+1} \neq 0$ olduğundan V^{k+1} matrisi tersinir matristir. Böylece $\left(V^{k+1}\right)^{-1} J_k V^{k+1} = H_{k+1}$ eşitliği sağlanır ki, bu da J_k matrisinin H_{k+1} matrisine benzer olduğunu göstermektedir. Benzer matrislerin kuvvetleri de benzer olduğundan $\alpha > k-2$ ve $k \geq 3$ için $(J_k)^\alpha V^{k+1} = V^{k+1} (H_{k+1})^\alpha$ olduğu görülmektedir. Bu durumda

$$\begin{cases} j_{i,1}^{k,\alpha} (x_1)^k + j_{i,2}^{k,\alpha} (x_1)^{k-1} + \cdots + j_{i,k+1}^{k,\alpha} = (x_1)^{\alpha+k+1-i} \\ j_{i,1}^{k,\alpha} (x_2)^k + j_{i,2}^{k,\alpha} (x_2)^{k-1} + \cdots + j_{i,k+1}^{k,\alpha} = (x_2)^{\alpha+k+1-i} \\ \vdots \\ j_{i,1}^{k,\alpha} (x_{k+1})^k + j_{i,2}^{k,\alpha} (x_{k+1})^{k-1} + \cdots + j_{i,k+1}^{k,\alpha} = (x_{k+1})^{\alpha+k+1-i} \end{cases}$$

lineer denklem sistemi yazılabilmektedir. Her $i, j = 1, 2, \ldots, k+1$ için lineer denklem sisteminin çözümünden

$$j_{i,j}^{k,\alpha} = \frac{\det V_{i,j}^{k+1}}{\det V^{k+1}}$$

elde edilir.

Arrowhead-Jacobsthal sayıları için Binet formülü aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Sonuç 4.4.1: $k \geq 3$ için $x_{k+1}(\alpha)$, α -inci arrowhead-Jacobsthal sayısı olmak üzere

$$x_{k+1}(\alpha) = -\frac{\det V_{k+1,k+1}^{k+1}}{\det V^{k+1}}$$

eşitliği elde edilir [9].

Dizinin companion matris formundaki üreteç matrisleri göz önünde bulundurularak aşağıdaki gibi bir süper-köşegen matris tanımlanmıştır ve bu matrisin permanent değerleri üzerinden de dizinin permanental temsili elde edilmiştir.

Tanım 4.4.2: $v \geq k+1$ için $v \times v$ boyutlu $M(v,k) = \left[m_{i,j}^{v,k}\right]$ süper köşegen matrisi:

$$m_{i,j}^{v,k}=\begin{cases} 1 & \begin{array}{c} \text{eğer } i=r \text{ ve } j=r \text{ ise } 1\le r\le v \\ \text{ve} \\ i=r+1 \text{ ve } j=r \text{ ise } 1\le r\le v-1, \end{array} \\ -1 & \begin{array}{l} \text{eğer } i=r \text{ ve } j=r+1 \text{ ise } 1\le r\le v-1, \\ i=r \text{ ve } j=r+3 \text{ ise } 1\le r\le v-3, \\ i=r \text{ ve } j=r+4 \text{ ise } 1\le r\le v-4, \\ \qquad\vdots \\ i=r \text{ ve } j=r+k \text{ ise } 1\le r\le v-k, \end{array} \\ -2 & \text{eğer } i=r \text{ ve } j=r+2 \text{ ise } 1\le r\le v-2, \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Yani $M(v,k)=\left[m_{i,j}^{v,k}\right]$ süper köşegen matrisi:

$$M(v,k)=\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad (k+1)\text{-inci} \\ \qquad\qquad\qquad\downarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklindedir [9].

<u>*Teorem 4.4.2:*</u> $v\ge k+1$ için

$$perM(v,k)=x_{k+1}(v+k+1)$$

eşitliği elde edilir [9].

<u>*İspat:*</u> $v\ge k+1$ için $perM(v,k)=x_{k+1}(v+k+1)$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda denklemin $v+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. $M(v,k)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perM(v,k)$ genişletilir ise

$$perM(v+1,k) = perM(v,k) - perM(v-1,k) - 2perM(v-2,k)$$
$$- perM(v-3,k) - \cdots - perM(v-k,k)$$

eşitliği elde edilir.

$$perM(v,k) = x_{k+1}(v+k+1),$$

$$perM(v-1,k) = x_{k+1}(v+k),$$

$$perM(v-2,k) = x_{k+1}(v+k-1),$$

$$perM(v-3,k) = x_{k+1}(v+k-2) = \cdots = perM(v-k,k) = x_{k+1}(v+1)$$

olduğundan $perM(v+1,k) = x_{k+1}(v+k+2)$ eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

<u>*Tanım 4.4.3:*</u> $v \geq k+1$ için $v \times v$ boyutlu $N(v,k) = \left[n_{i,j}^{v,k}\right]$ matrisi:

$$n_{i,j}^{v,k} = \begin{cases} 1 & \begin{array}{c} \text{eğer } i = r \text{ ve } j = r \text{ ise } 1 \leq r \leq v, \\ i = r + 1 \text{ ve } j = r \text{ ise } 1 \leq r \leq v-3 \\ \text{ve} \\ i = v-2 \text{ ve } j = v, \end{array} \\ -1 & \begin{array}{l} \text{eğer } i = r \text{ ve } j = r+1 \text{ ise } 1 \leq r \leq v-3, \\ i = r \text{ ve } j = r+3 \text{ ise } 1 \leq r \leq v-3, \\ i = r \text{ ve } j = r+4 \text{ ise } 1 \leq r \leq v-4, \\ \quad\vdots \\ i = r \text{ ve } j = r+k \text{ ise } 1 \leq r \leq v-k, \end{array} \\ -2 & \text{eğer } i = r \text{ ve } j = r+2 \text{ ise } 1 \leq r \leq v-3, \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır [9].

<u>*Tanım 4.4.4:*</u> $v > k+1$ için $v \times v$ boyutlu $R(v,k) = \left[r_{i,j}^{v,k}\right]$ matrisi:

$$R(v,k) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & N(v-1,k) & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır [9].

Teorem 4.4.3: $k \geq 3$ için $x_{k+1}(\alpha)$, α -ıncı arrowhead-Jacobsthal sayısı olmak üzere

i. $v \geq k+1$ için

$$perN(v,k) = x_{k+1}(v+k-1)$$

eşitliği elde edilir.

ii. $v > k+1$ için

$$perR(v,k) = \sum_{i=1}^{v+k-2} x_{k+1}(i)$$

eşitliği elde edilir [9].

İspat: *i*. Teoremi ispatlamak için v üzerinde tümevarım yöntemini uygulayalım. Denklemin $v \geq k+1$ için sağlandığı kabul edelim. Bu durumda denklemin $v+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. $N(v,k)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perN(v,k)$ genişletilir ise

$$\begin{aligned} perN(v+1,k) = {} & perN(v,k) - perN(v-1,k) - 2perN(v-2,k) \\ & - perN(v-3,k) - \cdots - perN(v-k,k) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$$perN(v,k) = x_{k+1}(v+k-1),$$

$$perN(v-1,k) = x_{k+1}(v+k-2),$$

$$perN(v-2,k) = x_{k+1}(v+k-3),$$

$$perN(v-3,k) = x_{k+1}(v+k-4) = \cdots = perN(v-k,k) = x_{k+1}(v-1)$$

olduğundan $perN(v+1,k) = x_{k+1}(v+k)$ eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

ii. $R(v,k)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perR(v,k)$ genişletilir ise

$$perR(v,k) = perR(v-1,k) + perN(v-1,k)$$

eşitliği elde edilir. Teorem 4.4.3 *i* den ve v üzerinde tümevarım yönteminden ispat görülür.

$v > k+1$ için $v \times v$ boyutlu H matrisi

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $perM(v,k)=\det\left(M(v,k)\circ H\right)$, $perN(v,k)=\det\left(N(v,k)\circ H\right)$ ve $perR(v,k)=\det\left(R(v,k)\circ H\right)$ eşitlikleri elde edilir. Arrowhead-Jacobsthal dizisi için determinantal temsiller aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

<u>*Sonuç 4.4.2:*</u> $v>k+1$ için

$$\det\left(M(v,k)\circ H\right)=x_{k+1}(v+k+1)$$

$$\det\left(N(v,k)\circ H\right)=x_{k+1}(v+k-1)$$

ve

$$\det\left(R(v,k)\circ H\right)=\sum_{i=1}^{v+k-2}x_{k+1}(i)$$

eşitlikleri elde edilir [9].

Aşağıdaki sonuç ile arrowhead-Jacobsthal sayıları için toplamsal temsil verilmiştir.

<u>*Sonuç 4.4.3:*</u> $x_{k+1}(\alpha)$, α -ıncı arrowhead-Jacobsthal sayısı olsun. O halde

$$x_{k+1}(\alpha)=-\sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_{k+1})}\frac{t_{k+1}}{t_1+t_2+\cdots+t_{k+1}}\times\binom{t_1+\cdots+t_{k+1}}{t_1,\ldots,t_{k+1}}(-2)^{t_3}(-1)^{t_2+t_4+t_5+\cdots+t_{k+1}}$$

olup, burada toplam negatif olmayan tam sayılar üzerinde $t_1+2t_2+\cdots+(k+1)t_{k+1}=\alpha$ koşulunu sağlamaktadır [9].

<u>*İspat:*</u> Teorem 2.1.4 de $i=j=k+1$ ve $k_1=1,\ k_2=-1,\ k_3=-2,\ k_4=k_5=\cdots=k_{k+1}=-1$ olarak seçilirse $(J_k)^{\alpha}$ matrisinden sonuç açık olarak görülür.

$k\geq 3$ için arrowhead-Jacobsthal dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g^k(y)=\frac{y^k}{1-y+y^2+2y^3+y^4+\cdots+y^{k+1}}$$

şeklindedir [9].

Aşağıdaki Teorem ile üreteç fonksiyonu kullanılarak arrowhead-Jacobsthal sayılarının üstel temsili verilmiştir.

<u>*Teorem 4.4.4:*</u> Arrowhead-Jacobsthal sayılarının üstel temsili aşağıdaki gibidir [9]:

$$g^k(y)=y^k\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(y)^i}{i}\left(1-y-2y^2-y^3-\cdots-y^k\right)^i\right).$$

<u>*İspat:*</u> $\ln g^k(y)=\ln y^k-\ln\left(1-y+y^2+2y^3+y^4+\cdots+y^{k+1}\right)$

ve

$$-\ln\left(1-y+y^2+2y^3+y^4+\cdots+y^{k+1}\right)=-[-y\left(1-y-2y^2-y^3-\cdots-y^k\right)-\frac{1}{2}y^2\left(1-y-2y^2-y^3-\cdots-y^k\right)^2-\cdots$$
$$-\frac{1}{n}y^n\left(1-y-2y^2-y^3-\cdots-y^k\right)^n-\cdots]$$

olduğundan

$$\ln\frac{g^k(y)}{y^k}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(y)^i}{i}\left(1-y-2y^2-y^3-\cdots-y^k\right)^i$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$\alpha\geq 1$ ve $k\geq 3$ için

$$S_\alpha=\sum_{i=1}^{\alpha}x_{k+1}(i)$$

olsun. $(k+2)\times(k+2)$ boyutlu P_k matrisi aşağıdaki gibi gösterilsin:

$$P_k=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & & & \\ 0 & & J_k & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Bu durumda $(P_k)^\alpha$ matrisi:

$$(P_k)^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{\alpha+k} & & & \\ S_{\alpha+k-1} & & (J_k)^\alpha & \\ \vdots & & & \\ S_\alpha & & & \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir [9].

4.5. m Modülüne Göre Arrowhead-Jacobsthal Dizileri

J_k arrowhead-Jacobsthal matrisi için $\det J_k = (-1)^{k+1}$ olduğundan m nin tüm pozitif tam sayı değeri için $\langle J_k \rangle_m$ devirli bir gruptur.

$\langle J_k \rangle_m$ için aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

<u>*Teorem 4.5.1:*</u> p bir asal sayı ve $\langle J_k \rangle_{p^m}$ devirli bir grup olsun. Eğer u, $\left|\langle J_k \rangle_p\right| = \left|\langle J_k \rangle_{p^u}\right|$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tam sayı ise bu takdirde $v \geq u$ için $\left|\langle J_k \rangle_{p^v}\right| = p^{v-u}.\left|\langle J_k \rangle_p\right|$ eşitliği yazılır. Özellikle $\left|\langle J_k \rangle_p\right| \neq \left|\langle J_k \rangle_{p^2}\right|$ ise, her $v \geq 2$ için $\left|\langle J_k \rangle_{p^v}\right| = p^{v-1}.\left|\langle J_k \rangle_p\right|$ olur [5].

<u>*İspat:*</u> $\langle J_k \rangle_{p^m}$ devirli grubunu ele alalım. Farzedelim ki r pozitif bir tam sayı olsun ve $\left|\langle J_k \rangle_{p^m}\right|$, $L(p^m)$ ile gösterilsin. Eğer $(J_k)^{L(p^{r+1})} \equiv \mathrm{I}\left(\mathrm{mod}\, p^{r+1}\right)$ ise $(J_k)^{L(p^{r+1})} \equiv \mathrm{I}\left(\mathrm{mod}\, p^{r}\right)$ dir. Burada I, $(k+1)\times(k+1)$ tipinde birim matristir. Böylece $L(p^r)$ nin $L(p^{r+1})$ yi böldüğü görülmektedir. Ayrıca $(J_k)^{L(p^r)} = I + \left(j_{ij}^{(r)} p^r\right)$ eşitliği yazılarak binom açılımından

$$(J_k)^{L(p^r)\cdot p} = \left(I + \left(j_{ij}^{(r)} p^r\right)\right)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \left(j_{ij}^{(r)} p^r\right)^i \equiv I\left(\mathrm{mod}\, p^{r+1}\right)$$

elde edilir ki, bu da $L\left(p^{r+1}\right)$'nin $L\left(p^{r}\right)\cdot p$ tarafından bölünebilir olduğunu gösterir. Böylece $L\left(p^{r+1}\right)=L\left(p^{r}\right)$ ya da $L\left(p^{r+1}\right)=L\left(p^{r}\right)\cdot p$ dir. Ancak $L\left(p^{r+1}\right)=L\left(p^{r}\right)\cdot p$ eşitliğin sağlanması, p tarafından bölünemeyen bir $j_{ij}^{(r)}$ nin var olması ile mümkündür. u, $L(p)=L\left(p^{u}\right)$ eşitliği sağlayan en büyük pozitif tam sayı olduğundan $L\left(p^{u}\right)\neq L\left(p^{u+1}\right)$ eşitsizliği yazılır ve bu eşitsizlik, p tarafından bölünemeyen bir $j_{ij}^{(u+1)}$ nin mevcut olduğunu gösterir. Dolayısıyla $L\left(p^{u+1}\right)\neq L\left(p^{u+2}\right)$ sonucu elde edilir ve u üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak ispat tamamlanır.

$x_{k+1}(n)$ arrowhead-Jacobsthal dizisi bir m modülüne göre indirgenirse, tekrar eden,

$$\left\{x_{k+1}^{m}(n)\right\}=\left\{x_{k+1}^{m}(1),x_{k+1}^{m}(2),\ldots,x_{k+1}^{m}(i),\ldots\right\}$$

dizisi elde edilir ve burada $x_{k+1}^{m}(i)=x_{k+1}(i)(\mathrm{mod}\, m)$ dir. Bu bağıntı (4.4.1)'deki bağıntı ile aynıdır [5].

<u>*Teorem 4.5.2:*</u> $k\geq 3$ için $\left\{x_{k+1}^{m}(n)\right\}$ dizisi basit periyodik bir dizidir [5].

<u>*İspat:*</u> Farzedelim ki $U=\left\{(u_1,u_2,\ldots,u_{k+1})\mid\ 0\leq u_i\leq m-1\right\}$ olsun. Bu durumda $|U|=m^{k+1}$ dir. Z_m nin elemanlarının m^{k+1} tane farklı $k+1$-tiplisi mevcut olduğundan, bu $k+1$-tiplilerden en az bir tanesi $\left\{x_{k+1}^{m}(n)\right\}$ dizisinde iki kez ortaya çıkar. Bundan dolayı bu $k+1$-lileri takip eden alt dizi tekrarlanır. Böylece dizi periyodiktir. $i>j$ olmak üzere

$$x_{k+1}^{m}(i+1)\equiv x_{k+1}^{m}(j+1),\ x_{k+1}^{m}(i+2)\equiv x_{k+1}^{m}(j+2),\ldots,x_{k+1}^{m}(i+k+1)\equiv x_{k+1}^{m}(j+k+1)$$

ise $i\equiv j\left(\mathrm{mod}\, k+1\right)$ olduğu sonucuna ulaşılır. Arrowhead-Jacobsthal dizisi tanımından,

$$x_{k+1}^{m}(i)\equiv x_{k+1}^{m}(j),\ x_{k+1}^{m}(i-1)\equiv x_{k+1}^{m}(j-1),\ldots,x_{k+1}^{m}(i-j+1)\equiv x_{k+1}^{m}(1)$$

eşitliği elde edilir ki bu da $\left\{x_{k+1}^{m}(n)\right\}$ dizisinin basit periyodik olduğunu gösterir.

$\left\{x_{k+1}^{m}(n)\right\}$ dizisinin periyodu $h_{k+1}(m)$ ile gösterilsin.

Teorem 4.5.3: p_i ler farklı asal sayılar olmak üzere $m=\prod_{i=1}^{u}(p_i)^{r_i}$ $(u\geq 1)$ olsun. Bu takdirde $h_{k+1}(m)=okek\left[h_{k+1}\left((p_1)^{r_1}\right),h_{k+1}\left((p_2)^{r_2}\right),\ldots,h_{k+1}\left((p_u)^{r_u}\right)\right]$ dir [5].

İspat: $\left\{x_{k+1}^{(p_i)^{r_i}}(n)\right\}$ dizisinin periyodu $h_{k+1}\left((p_i)^{r_i}\right)$ olduğundan bu dizi sadece $\lambda\cdot h_{k+1}\left((p_i)^{r_i}\right)$, $(\lambda\in\mathbb{N})$ uzunluğundaki bloklarda tekrar eder. Ayrıca $h_{k+1}(m)$, $\{x_{k+1}^{m}(n)\}$ dizisinin periyodu olduğundan, her i değeri için $\left\{x_{k+1}^{(p_i)^{r_i}}(n)\right\}$ dizisi $h_{k+1}(m)$ terimde bir tekrar eder. Böylece, her i değeri için $h_{k+1}(m)$ periyodu $\lambda\cdot h_{k+1}\left((p_i)^{r_i}\right)$ şeklinde olup bu sayı $\{x_{k+1}^{m}(n)\}$ dizisinin periyodunu vermektedir. Dolayısıyla $h_{k+1}(m)=okek\left[h_{k+1}\left((p_1)^{r_1}\right),h_{k+1}\left((p_2)^{r_2}\right),\ldots,h_{k+1}\left((p_u)^{r_u}\right)\right]$ elde edilmektedir.

4.6. Gruplarda Arrowhead-Jacobsthal Dizileri

Tanım 4.6.1: G grubu $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_j\}$ tarafından üretilen bir grup olsun. $n\geq 1$ için X geren kümesine göre $AJ_{k+1}=\{G:x_1,x_2,\ldots,x_j\}$ arrowhead-Jacobsthal orbiti

$$\begin{cases} a_1=x_1,a_2=x_2,\ldots,a_j=x_j,a_{j+1}=e,\ldots,a_{k+1}=e & j<k+1 \text{ ise,}\\ a_1=x_1,a_2=x_2,a_3=x_3,\ldots,a_{k+1}=x_{k+1} & j=k+1 \text{ ise,}\end{cases}$$

başlanıç değerleri ile birlikte

$$a_{k+1}(n+k+1)=(a_{k+1}(n))^{-1}(a_{k+1}(n+1))^{-1}\ldots(a_{k+1}(n+k-3))^{-1}(a_{k+1}(n+k-2))^{-2}(a_{k+1}(n+k-1))^{-1}(a_{k+1}(n+k))$$

şeklinde tanımlanır [24].

Teorem 4.6.1: Sonlu bir G grubunun $AJ_{k+1}=\{G:x_1,x_2,\ldots,x_j\}$ arrowhead-Jacobsthal orbiti basit periyodiktir [24].

İspat: G grubunun mertebesi r olsun. G grubunun elemanlarının birbirinden farklı sıralı $k+1$-lilerin sayısı r^{k+1} olduğundan en az bir tanesi $AJ_{k+1}=\{G:x_1,x_2,\ldots,x_j\}$ arrowhead-Jacobsthal orbitinde iki kez ortaya çıkar. Böylece bu tekrardan dolay arrowhead-Jacobsthal orbiti periyodiktir. Arrowhead-Jacobsthal orbiti periyodik olduğundan

$$a_{k+1}(i+1)=a_{k+1}(j+1),a_{k+1}(i+2)=a_{k+1}(j+2),\ldots,a_{k+1}(i+k+1)=a_{k+1}(j+k+1)$$

olacak şekilde $i\equiv j(\operatorname{mod} k+1)$ şartını sağlayan i ve j doğal sayılar vardır. Diğer taraftan arrowhead-Pell orbiti tanımından

$$(a_{k+1}(n))=(a_{k+1}(n+1))^{-1}\ldots(a_{k+1}(n+k-3))^{-1}(a_{k+1}(n+k-2))^{-2}(a_{k+1}(n+k-1))^{-1}(a_{k+1}(n+k))a_{k+1}(n+k+1)^{-1}$$

yazılır. Bu nedenle $a_{k+1}(i)=a_{k+1}(j)$ eşitliği elde edilir. Böylece

$$a_{k+1}(i-j+1)=a_{k+1}(1),a_{k+1}(i-j+2)=a_{k+1}(2),\ldots,a_{k+1}(i-j+k+1)=a_{k+1}(k+1)$$

elde edilir ki bu da arrowhead-Jacobsthal orbitinin basit periyodik olduğu anlamına gelir.

$HAJ_{k+1}=\{G:x_1,x_2,\ldots,x_j\}$ notasyonu ile $AJ_{k+1}=\{G:x_1,x_2,\ldots,x_j\}$ arrowhead-Jacobsthal orbitinin periyot uzunluğu gösterilsin.

Teorem 4.6.2: Q_{2^m} genelleştirilmiş quaternion grubunun arrowhead-Jacobsthal orbitinin periyot uzunluğu $2^{m-2}\cdot h_{k+1}(2)$ dır [24].

İspat: $AJ_{k+1}(Q_{2^m}:x,y)$ orbitinin ilk $k+1$ elemanı aşağıdaki gibidir:

$$a_{k+1}(1)=x,a_{k+1}(2)=y,a_{k+1}(3)=e,\ldots,a_{k+1}(k+1)=e.$$

Böylece dizinin genel hali:

$$a_{k+1}(2\cdot h_{k+1}(2)i+1)=x,a_{k+1}(2\cdot h_{k+1}(2)i+2)=yx^{u_1 4i},$$

$$a_{k+1}(2\cdot h_{k+1}(2)i+3)=x^{u_2 4i},\ldots,a_{k+1}(2\cdot h_{k+1}(2)i+k+1)=x^{u_k 4i}$$

şeklinde elde edilir. Burada $u_1,u_2,\ldots,u_k$ ler $obeb(u_1,u_2,\ldots,u_k)=1$ olacak şekilde pozitif tam sayılardır. Burada dizinin periyodunu belirlemek için, $4i=2^{m-1}\cdot k\ \ (k\in\mathbb{N})$

olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir. Bu durumda $i = 2^{m-3}$ seçilirse,

$$a_{k+1}\left(2^{m-2} \cdot h_{k+1}(2)+1\right) = x, a_{k+1}\left(2^{m-2} \cdot h_{k+1}(2)+2\right) = y,$$
$$a_{k+1}\left(2^{m-2} \cdot h_{k+1}(2)+3\right) = e, \ldots, a_{k+1}\left(2^{m-2} \cdot h_{k+1}(2)+k+1\right) = e$$

elde edilir ve buradan arrowhead-Pell orbitinin $2^{m-2} \cdot h_{k+1}(2)$-inci elemandan sonra tekrara başladığı açıkca görülmektedir. Böylece arrowhead-Jacobsthal orbitinin periyot uzunluğu $2^{m-2} \cdot h_{k+1}(2)$ olur.

<u>*Örnek 4.6.1:*</u> $k=5$ için arrowhead-Jacobsthal orbitinin genelleştirilmiş quaternion grubundaki periyot uzunluğunu göz önüne alalım. Bu durumda arrowhead-Jacobsthal orbitinin başlangıç değerleri

$$a_6(1) = x, a_6(2) = y, a_6(3) = e, a_6(4) = e, a_6(5) = e, a_6(6) = e,$$

şeklindedir. Diğer yandan $\left\{a_6^2(n)\right\}$ dizisinin periyodu $h_6(2)=12$ olup, arrowhead-Jacobsthal orbiti aşağıdaki gibi ele edilir:

$$a_6(1) = x, a_6(2) = y, a_6(3) = e, a_6(4) = e, a_6(5) = e, a_6(6) = e,$$
$$a_6(7) = yx^{2^{m-2}+1}, a_6(8) = x^{2^{m-2}+1}, a_6(9) = yx^{2^{m-2}+2}, a_6(10) = yx^{2^{m-2}+3}, a_6(11) = y, a_6(12) = yx^{2^{m-2}-3},$$
$$a_6(13) = x^{-1}, a_6(14) = yx^{-2^{m-2}-8m+20}, a_6(15) = x^{-2^{m-2}-4}, a_6(16) = x^6, a_6(17) = x^8, a_6(18) = x^{2^{2^{m-3}}},$$
$$a_6(19) = yx^3, a_6(20) = x^{2^{m-2}+1}, a_6(21) = yx^{-2^{m-2}-2}, a_6(22) = yx^5, a_6(23) = yx^{2^{2^{m-3}}}, a_6(24) = yx^{2^{2^{m-3}}+5},$$
$$a_6(25) = x, a_6(26) = yx^8, a_6(27) = x^8, a_6(28) = x^8, a_6(29) = x^4, a_6(30) = x^8, \ldots.$$

Böylece arrowhead-Jacobsthal orbitinin genel hali aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$a_6(24i+1) = x, a_6(24i+2) = y, a_6(24i+3) = e,$$
$$a_6(24i+4) = e, a_6(24i+5) = x^{4i}, a_6(24i+6) = e.$$

Burada $i = 2^{m-3}$ seçilirse,

$$a_6\left(2^{m-2} \cdot 12+1\right) = x, a_6\left(2^{m-2} \cdot 12+2\right) = y, a_6\left(2^{m-2} \cdot 12+3\right) = e,$$
$$a_6\left(2^{m-2} \cdot 12+4\right) = e, a_6\left(2^{m-2} \cdot 12+5\right) = e, a_6\left(2^{m-2} \cdot 12+6\right) = e$$

olup buradan da arrowhead-Jacobsthal orbitinin $2^{m-2} \cdot 12$-inci elemandan sonra tekrara başladığı açıkca görülmektedir. Böylece $k=5$ olduğu durumda arrowhead-Jacobsthal orbitinin periyot uzunluğunu $2^{m-2} \cdot 12$ olur [24].

Örnek 4.6.2: $k=4$ için arrowhead-Jacobsthal orbitinin Q_{16} genelleştirilmiş quaternion grubundaki periyot uzunluğunu göz önüne alalım.

$$Q_{16}=\left\langle x,y:x^8=e,y^2=x^4,y^{-1}xy=x^{-1}\right\rangle$$

olmak üzere, $k=4$ için, $\left\{x_5^2\left(n\right)\right\}$ dizisinin periyodu $h_5\left(2\right)=31$ olup, bu grupta $k=4$ için arrowhead-Jacobsthal orbiti aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}
&a_5\left(1\right)=x,a_5\left(2\right)=y,a_5\left(3\right)=e,a_5\left(4\right)=e,a_5\left(5\right)=e,\ldots,\\
&a_5\left(63\right)=x,a_5\left(64\right)=yx^4,a_5\left(65\right)=e,a_5\left(66\right)=e,a_5\left(67\right)=e,\ldots,\\
&a_5\left(125\right)=x,a_5\left(126\right)=y,a_5\left(127\right)=e,a_5\left(128\right)=e,a_5\left(129\right)=e,\ldots.
\end{aligned}$$

Buradan $a_5\left(1\right)=a_5\left(125\right)=x$, $a_5\left(2\right)=a_5\left(126\right)=y$, $a_5\left(3\right)=a_5\left(127\right)=e$, $a_5\left(4\right)=a_5\left(128\right)=e$ ve $a_5\left(5\right)=a_5\left(129\right)=e$ olup $k=4$ için arrowhead-Jacobsthal orbitinin Q_{16} genelleştirilmiş quaternion grubundaki periyot uzunluğu 124 dir [24].

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, genelleştirilmiş k-mertebeden Pell ve genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal dizilerinin karakteristik polinomları yardımıyla arrowhead matrisleri elde edildi. Elde edilen bu arrowhead matrisleri üzerinden arrowhead-Pell ve arrowhead Jacobsthal dizileri tanımlandı. Tanımlanan dizilerin Binet formülleri, permanental, determinantal, üstel ve toplamsal temsilleri ve sonlu toplamları gibi çeşitli özellikleri belirlendi.

İndirgemeli bir dizinin m modülüne göre periyodu aynı zamanda bu dizinin m. mertebeden bir devirli gruptaki periyoduna karşılık gelmektedir. Bu anlamda, tanımlanan dizilerin üreteç matrisleri m modülüne göre indirgenmek suretiyle bu matrislerin kuvvetleri yardımıyla devirli gruplar üretildi ve dizilerin m modülüne göre periyotları belirlendi. Üretilen devirli grupların mertebeleri ve dizilerin periyotları arasında bağıntılar elde edildi. Gerek devirli grupların mertebeleri gerekse dizilerin periyotları için özel formüller verildi.

Tanımlanan diziler gruplara genişletildi ve bu anlamda diziler, grup elemanları yardımıyla kendi yapısal özellikleri de dikkate alınarak yeniden tanımlandı. Böylece tanımlanan arrowhead-Pell dizileri SD_{2^m} semidihedral grubunda ve arrowhead-Jacobsthal dizileri Q_{2^m} genelleştirilmiş quaternion grubunda incelendi. Bu gruplardaki periyot uzunlukları hesaplandı.

Yukarıda elde ettiğimiz sonuçlar göz önünde bulundurularak tanımlanan bu diziler Jacobsthal ve Pell diziler ile ilişkilendirilebilir. Ayrıca arrowhead-Pell ve arrowhead-Jacobsthal dizilerin yapısal özellikleri de dikkate alınarak farklı sonlu grup ailelerinde incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

[1] Adams, W. and Shanks, D., (1982). Strong Primality Tests that are not sufficient. Mathematics of Computation, 36(159), 255-300.

[2] Ağargün, A.G. ve Özdağ, H., (2008). Lineer Cebir ve Çözümlü Problemleri. Birsen Yayınevi, İstanbul.

[3] Akuzum, Y. and Deveci, O., (in press). The Arrowhead-Pell Sequences. Ars Combinatoria.

[4] Akuzum, Y. and Deveci, O., (2018). The Arrowhead-Pell Sequences Modulo m. AIP Conference Proceedings, 1991, 020032.

[5] Akuzum, Y. and Deveci, O., (2018). The Arrowhead-Jacobsthal Sequences Modulo m. 4th International Congress on Vocational and Technical Sciences-UMTEB, 7-9 December, Erzurum, Turkey.

[6] Akuzum, Y. and Deveci, O., (2017). The Sylvester-Padovan-Jacobsthal-Type Sequences. Maejo International Journal of Science and Technology, 11(03), 236-248.

[7] Akuzum Y., Deveci O. and Shannon A.G., (2017). On The Pell p-Circulant Sequences. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 23(2), 91-103.

[8] Akuzum, Y., Dogan T. and Deveci, O., (2018). The Arrowhead-Pell Sequences in Finite Groups. 5th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics-ICRAPAM, 23-27 July, Trabzon, Turkey.

[9] Akuzum, Y. and Deveci, O., The Arrowhead-Jacobsthal Sequences, is submitted.

[10] Aydin, H. and Dikici, R., (1998). General Fibonacci Sequences in Finite Groups. The Fibonacci Quarterly, 36, 216-221.

[11] Aydin, H. and Smith, G.C., (1994). Finite p-Quotient of Some Cyclically Presented Groups. Journal of the London Mathematical Society, 49(1), 83-92.

[12] Becker, P.G., (1994). k-Regular Power Series and Mahler-Type Functional Equations. Journal of Number Theory, 49(3), 269-286.

[13] Bicknell, M., (1975). A Primer on The Pell Sequences and Related Sequences. The Fibonacci Quarterly, 13(4), 345-350.

[14] Campbell, P.P., (2003). Fibonacci Length and Efficiency in Group Presentations. Ph. Thesis, University of St Andrews.

[15] Campbell, C.M., Campbell, P.P., Doostie, H. and Robertson, E.F., (2004). The Fibonacci Length for Certain Metacyclic Groups. Algebra Colloquium, 11, 215-222.

[16] Chen, W.Y.C. and Louck, J.C., (1996). The Combinatorial Power of The Companion Matrix. Linear Algebra and Its Applications, 232, 261.278.

[17] Deveci, O., (2013). The k-Nacci Sequences and The Generalized Order-k Pell Sequences in The Semi-Direct Product of Finite Cyclic Groups. Chiang Mai Journal of Science, 40(1), 89-98.

[18] Deveci, O., (2015). The Pell-Padovan Sequences and The Jacobsthal-Padovan Sequences in Finite Groups. Utilitas Mathematica, 98, 257-270.

[19] Deveci, O., (2016). The Pell-Circulant Sequences and Their Applications. Maejo International Journal of Science and Technology, 10(3), 284-293.

[20] Deveci, O., (2016). The Generalized Quaternion Sequence. AIP Conference Proceedings, 1726, 020125-1-020125-3; doi: 10.1063/1.4945951.

[21] Deveci, O., Akdeniz, M. and Karaduman, E., (2015). The Generalized Pell p-Sequences in Groups. Ars Combinatoria, 120, 383-401.

[22] Deveci, O. and Akuzum, Y., (2016). The Recurrence Sequences via The Fibonacci Groups. AIP Conference Proceedings, 1726, 020084-1-020084-4; doi: 10.1063/1.4945910.

[23] Deveci, O. and Akuzum, Y., (2017). The Recurrence Sequences via Hurwitz Matrices. The Scientific Annals of "Al. I. Cuza" University of Iasi, f3, 529-542.

[24] Deveci, O. and Akuzum, Y., (2018). The Arrowhead-Jacobsthal Sequences in Finite Groups. 4th International Congress on Vocational and Technical Sciences-UMTEB, 7-9 December, Erzurum, Turkey.

[25] Deveci, O. and Akuzum, Y. and Campbell, C.M., (2018). The Recurrence Sequences via Polyhedral Groups. Communications Faculty of Sciences University of Ankara, Series A1: Mathematics and Statistics, 67(2), 99-115.

[26] Deveci, O., Akuzum, Y. and Karaduman, E., (2015). The Pell-Padovan p-Sequences and Its Applications. Utilitas Mathematica, 98, 327-347.

[27] Deveci, O. and Campbell, C.M., (2014). The k-Nacci Sequences in Some Special Modular Groups. Algebra Colloquium, 21(1), 59-66.

[28] Deveci, O. and Karaduman, E., (2015). The Pell Sequences in Finite Groups.

Utilitas Mathematica, 96, 263-276.

[29] Deveci, O. and Karaduman, E., (2016). The Lehmer Sequences in Finite Groups. Ukrainian Mathematical Journal, 68(1), 175-182.

[30] Deveci, O. and Karaduman, E., (2017). On The Padovan p-Numbers. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 46(4), 579-592.

[31] Deveci, O., Karaduman, E. and Campbell, C.M., (2017). The Fibonacci-Circulant Sequences and Their Applications. Iranian Journal of Science and Technology Transaction A:Science, 41(4), 1033-1038.

[32] Deveci, O., Karaduman, E. and Saglam, G., (2016). The Jacobsthal Sequences in Finite Groups. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 42(1), 81-91.

[33] Deveci, O. and Shannon, A.G., (2017). On The Adjacency-Type Sequences. International Journal of Advances in Mathematics, 2017(2), 10-24.

[34] Deveci, O. and Shannon, A.G., (2017). The Pell-Padovan-Circulant Sequences and their Applications. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 23(3), 100-114.

[35] Dikici, R. and Smith, G.C., (1995). Recurrences in Finite Groups**.** Turkish Journal of Mathematics, 19(3), 321-329.

[36] Doostie, H. and Hashemi, M., (2006). Fibonacci Lengths Involving The Wall Number $k(n)$. Journal of Applied Mathematics and Computing, 20, 171-180.

[37] Dummit, D.S. and Foote, R.M., (2004). Abstract Algebra. 3nd editon (John Wiley & Sons,Inc.).

[38] Everest, G., Poorten, A.V.D., Shparlinski, I. and Ward, T., (2003). Recurrence Sequences. American Mathematical Society.

[39] El Naschie, M.S., (2005). Deriving The Essential Features of Standard Model From The General Theory of Relativity, Chaos, Solitons & Fractals, 24(4), 941-946.

[40] Falcon, S. and Plaza, A., (2009). k-Fibonacci Sequences Modulo m. Chaos, Solitons & Fractals, 41(1), 497-504.

[41] Fraenkel, A.S., Klein, S.T., (1996). Robutst Universal Complete Codes for Transmission and Compression. Discrete Applied Mathematics, 64(1), 31-55.

[42] Gultekin, I. and Deveci O., (2016). On The Arrowhead-Fibonacci Numbers. Open Mathematics, 14(1), 1104-1113.

[43] Kalman, D., (1982). Generalized Fibonacci Numbers by Matrix Methods. The Fibonacci Quarterly, 20(1), 73-76.

[44] Karaduman, E. and Aydın, H., (2009). k-nacci Sequences in Some Special Groups of Finite Order. Matematical and Computer Modelling, 50, 53-58.

[45] Karaduman, E. and Deveci O., (2017). The Recurrence Sequences via Sylvester Matrices. AIP Conference Proceedings, 1863, 560007.

[46] Karaduman, E. and Yavuz, U., (2003). On The Period of Fibonacci Sequences in Nilpotent Groups. Applied Mathematics and Computation, 142(2-3), 321-332.

[47] Kilic, E., (2009). The generalized Pell (p,i)-Numbers and Their Binet Formulas, Combinatorial Representations, Sums. Chaos, Solitons & Fractals, 40 (4), 2047-2063.

[48] Kilic, E. and Taşci, D., (2006). The Generalized Binet Formula, Representation and Sums of The Generalized Order- k Pell Numbers. Taiwanese Journal of Mathematics, 10(6), 1661-1670.

[49] Kirchoff, B.K. and Rutishauser, R., (1990). The Phyllotxy of Costus (Costaceae). Botanical Gazette, 151(1), 88-105.

[50] Knox, S.W., (1992). Fibonacci Sequences in Finite Groups. The Fibonacci Quarterly, 30(2), 116-120.

[51] Lu, K. and Wang, J., (2006). *k*-step Fibonacci Sequence Modulo *m*, Utilitas Mathematica, 71, 169-178.

[52] Mandelbaum, D., (1972). Synchronization of Codes by means of Kautz's Fibonacci Encoding. IEEE Transactions on Information Theory, 18(2), 281-285.

[53] O'Leary, D.P. and Stewart, G.W., (1990). Computing The Eigenvalues and Eigenvectors of Symmetric Arrowhead Matrices. Journal of Computational Physics, 90, 497-505. doi:10.1016/0021-9991(90)90177-3.

[54] Ozkan, E., (2007). On Truncated Fibonacci Sequences. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 38 (4), 241-251.

[55] Pinch, R.E.G., (1991). Recurrent Sequences Modulo Prime Powers. In M. Ganley (ed.) Crptography and Coding III, IMA Conference Series (ns.) vol.45, Inst. Math. And Its Appl., Oxford university Press 1993, Procedings, 3rd IMA, Conference Crptography and Coding, Cirencester.

[56] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. and Flannery, B.P., (2007).

Section 2.8.1. Vandermonde Matrices, Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing (3rd ed.). New York: Cambridge University Press,94. ISBN 978-0-521-88068-8.

[57] Shannon, A.G., Anderson, P.G. and Horadam, A.F., (2006). Properties of Cordonnieri Perrin and Van der Lann Numbers. International Journal of Mathematical Education in Science and Tecnology, 37(7), 825-831.

[58] Shannon, A.G., Horadam, A.F. and Anderson, P.G., (2006). The Auxiliary Equation associated with Plastic Number. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 12(1), 1-12.

[59] Spinadel, V.W., (2002). The Metallic Means Family and Forbidden Symmetries. International Mathematical Journal, 2(3), 279-288.

[60] Stakhov, A.P. and Rozin, B., (2006). Theory of Binet Formulas for Fibonacci and Lucas p-Numbers. Chaos, Solitons & Fractals, 27, 1162-1177.

[61] Stein, W., (1993). Modelling The Evolution of Stelar Architecture in Vascular Plants. International Journal of Plant Sciences, 154(2), 229-263.

[62] Tas, S., Deveci, O. and Karaduman, E., (2014). The Fibonacci-Padovan Sequences in Finite Groups. Maejo International Journal of Science and Technology, 8(03), 279-287.

[63] Tas, S. and Karaduman, E., (2014). The Padovan Sequences in Finite Groups. Chiang Mai Journal of Science, 41(2), 456-462.

[64] Taşcı, D., (2005), Lineer Cebir. Gazi Kitapevi, Ankara.

[65] Taşcı, D., (2010). Soyut Cebir. Alp Yayınevi, Ankara.

[66] Tuglu, N., Kocer, E.G. and Stakhov, A.P., (2011). Bivariate Fibonacci like p-Polynomials. Applied Mathematics and Computation , 217(24), 10239-10246.

[67] Wall, D.D., (1960). Fibonacci Series Modulo m. The American Mathematical Monthly, 67, 525-532.

[68] Wilcox, H.J., (1986). Fibonacci Sequences of Period n in Groups. The Fibonacci Quarterly, 24, 356-361.

[69] Wolfram Research, (2014). Inc. Mathematica, Version 10.0: Champaign, Illinois.

[70] Yılmaz, F. and Bozkurt, D., (2009). The Generalized Order-k Jacobsthal Numbers. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 34(4), 1685-1694.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yeşim AKÜZÜM
Doğum Yeri ve Tarihi : Kars, 11.12.1989
Yabancı Dili : İngilizce
İletişim (e-posta) : yesim_036@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Hüsnü M. Özyeğin Anadolu Lisesi / 2003-2007
Lisans : Kafkas Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü /2008-2012
Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı / 2012-2014
Doktora : Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı / 2014-…

Yayınları (SCI ve diğer) :

1. O. Deveci and Y. Akuzum, "The Cyclic Groups and The Semigroups via MacWilliams and Chebyshev Matrices", Journal of Mathematics Research, 6(2), 55-58, (2014).

2. O. Deveci, Y. Akuzum and E. Karaduman, "The Pell-Padovan p-Sequences and Its Applications", Utilitas Mathematica, 98, 327-347, (2015).

3. O. Deveci, Y. Akuzum E. Karaduman and O. Erdag, "The Cyclic Groups via Bezout Matrices", Journal of Mathematics Research, 7(2), 34-41, (2015).

4. Y. Akuzum and O. Deveci, "The Recurrence Sequences via The Fibonacci Groups", International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences-ICANAS,

AIP Conference Proceedings, 1726, 020084 (2016); https://doi.org/10.1063/1.4945910.

5. Y. Akuzum and O. Deveci, “The Sylvester-Padovan-Jacobsthal-Type Sequences”, Maejo International Journal of Science and Technology, 11(03), 236-248, (2017).

6. O. Deveci, M. Akdeniz and Y. Akuzum, “The Periods of The Pell-p Orbits of Polyhedral and Centro-Polyhedral Groups”, Jordan Journal of Mathematics and Statistics, 10(1), 1-9, (2017).

7. Y. Akuzum, O. Deveci and A.G. Shannon, “On The Pell p-Circulant Sequences”, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 23(2), 91-103 (2017).

8. O. Deveci and Y. Akuzum, “The Recurrence Sequences via Hurwitz Matrices”, The Scientific Annals of “Al. I. Cuza” University of Iasi, f3, 529-542 (2017).

9. Y. Akuzum and O. Deveci, “On The Jacobsthal-Padovan p-Sequences in Groups”, Topological Algebra and its Applications, 5(1), 63-66, (2017).

10. O. Deveci, Y. Akuzum and C.M. Campbell, “The Recurrence Sequences via Polyhedral Groups”, Communications Faculty of Sciences University of Ankara, Series A1: Mathematics and Statistics, 67(2), 99-115, (2018).

11. O. Deveci, Y. Akuzum and A.G. Shannon, “The Dihedral-Type Adjacency Sequences”, JP Journal of Algebra Number Theory and Applıcatıons, 40(3), 397-408, (2018).

12. O. Deveci, Y. Akuzum and G. Uğurlu, “The k-step Fibonacci Sequences via Hurwitz Matrices”, The Scientific Annals of “Al. I. Cuza” University of Iasi, f1, 121-135, (2018).

13. Y. Akuzum and O. Deveci, “The Arrowhead-Pell Sequences Modulo m”, 1st International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS), AIP Conference Proceedings, 1991, 020032**,** (2018); https://doi.org/10.1063/1.5047872.

14. Y. Akuzum, O. Deveci and G. Artun, “The Adjacency-Pell-Circulant Sequences”, Utilitas Mathematica, in press.

15. O. Deveci and Y. Akuzum, “The Adjacency-Jacobsthal-Hurwitz Type Numbers”, Filomat, in press.

16. J. Hiller, Y. Akuzum and O. Deveci, “The Adjacency-Pell-Hurwitz Numbers”, Integers, in press.

17. E. Karaduman, Y. Akuzum and O. Deveci, “The Adjacency-Jacobsthal Sequence in Finite Groups”, Jordan Journal of Mathematics and Statistics, in press.