T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÖZEL GRADİENT TERİM İÇEREN ÜÇ BOYUTLU SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN GALERKİN YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

Onur ARAS

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Gabil YAGUB

NİSAN - 2019

KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÖZEL GRADİENT TERİM İÇEREN ÜÇ BOYUTLU SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN GALERKİN YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

Onur ARAS

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Gabil YAGUB

NİSAN - 2019

KARS

Yüksek lisans öğrencisi **Onur ARAS'ın Prof. Dr. Gabil YAGUB'un** danışmanlığında yüksek lisan tezi olarak hazırladığı "**Özel Gradient Terim İçeren Üç Boyutlu Schrödinger Denklemi İçin Başlangıç Sınır Değer Problemlerinin Galerkin Yöntemiyle Çözümü**" adlı bu çalışmada jüri tarafından Lisanüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ...birliği...... ile kabul edilmiştir.

18 / 04 / 2019

	Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	: Prof. Dr. Gabil YAGUB	
Üye	: Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY	N. Yıldırım
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Gökçe Dilek KÜÇÜK	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Dç. Dr. Fikret AKDENİZ

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İmza

Öğrencinin Adı Soyadı

Tarih

ii

ÖZET

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

ÖZEL GRADİENT TERİM İÇEREN ÜÇ BOYUTLU SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN GALERKİN YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

Onur ARAS

Kafkas Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gabil YAGUB

Bu tezde üç boyutlu özel gradient terim içeren Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri ele alınmıştır. Bu çalışmada yer alan 3.1. bölümünde üç boyutlu özel gradient terim içeren Schrödinger denklemi için 1. çeşit başlangıç sınır değer problemi konulup galerkin yöntemi uygulanarak çözümün varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. 3.2. bölümünde yer alan üç boyutlu özel gradient terim içeren Schrödinger denklemi için 2. çeşit başlangıç sınır değer problemi konulup galerkin yöntemi uygulanarak çözümün varlığı ve tekliği kısaca ispatlanmıştır. Tezde yer alan 4. bölümünde bu çalışmaya ait araştırma ve sonuç bulguları değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Schrödinger Denklemi, Başlangıç Sınır Değer Problemi, Galerkin Yöntemi.

2019, 45 Sayfa

ABSTRACT

(Master Thesis)

SOLUTION WITH GALERKIN METHOD OF INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THREE DIMENSIONAL SCHRÖDINGER EQUATION CONTAINING SPECIAL GRADIENT TERM

Onur ARAS

Kafkas University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Gabil YAGUB

In this thesis, the inital boundary value problems are considered for three dimensional Schrödinger equation. In section 3.1. of the study, applying Galerkin's method to 1^{st} type initial baundary value problem for three dimensional Schrodinger equation the existence and the uniqueness of the solution have been proven. In section 3.2. of the study, applying Galerkin's method to 2^{nd} type initial baundary value problem for three dimensional Schrödinger equation the existence and the uniqueness of the solution have been proven. In the 4 th part of the thesis, the research and the results of this study were evaluated.

Key Words: Schrödinger Equation, Initial Boundary Problem, Galerkin's Method.

2019, 45 pages

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın yürütülmesi esnasında desteğini esirgemeyen, öğrencisi olmaktan onur duyduğum, danışmanım sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB'a saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım sırasında katkılarından ötürü değerli hocam sayın Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY'a teşekkür ederim.

Bu süreçte maddi, manevi her zaman yanımda olan annem, babam ve kız kardeşim Yeşim ELİBOL'a desteklerinden ötürü teşekkür ederim. Uzun çalışma sürecinde bana en iyi şekilde çalışma ortamını sağlayan çok değerli İLBEYİ ailesine tek tek şükranlarımı sunar ve değerli dostlarım Murat DURMAN ve Hüseyin İMİK'e manevi desteklerinden ötürü teşekkürlerimi sunarım.

Onur ARAS

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\forall$	: Herhangi
$\overset{0}{\forall}$	: Hemen hemen her yerde
$l > 0$	: Verilen sayı
$T > 0$	: Verilen sayı
$i = \sqrt{-1}$	: Sanal birim
$x \in [0, l]$	: Bağımsız değişken
$t \in [0, T]$	: Bağımsız değişken
$a(x)$	: Ölçülebilir reel değerli sınırlı fonksiyon
$v_0(x)$	: Ölçülebilir reel değerli sınırlı fonksiyon
$v_1(x)$	: Ölçülebilir reel değerli sınırlı fonksiyon
$\Omega_t = D \times (0, t), \Omega = \Omega_T$	: Verilen bölge
Γ	: Verilen D bölgesinin sınırı

1.GENEL BİLGİLER

1.1. GİRİŞ

Bu tez çalışması, özel gradient terim içeren üç boyutlu Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin çözümünü araştırmak ve bu çözümü (çözümleri) incelemeye yönelik hazırlanmıştır. Üç boyutlu Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri büyük ölçüde kuantum mekaniğinde, nükleer fizikte ve lineer olmayan optikte ortaya çıkar. $[13]$. Daha önceden lineer ve lineer olmayan Schördinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri $[9,17,22,23]$ çalışmalarında incelenmiştir. Fakat lineer ve lineer olmayan Schördinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri bir ve iki boyutlu olarak çok az sayıda incelenmiştir.$[9,17]$. Bu çalışma diğerlerinden ayrılarak özel gradient terim içeren üç boyutlu lineer Schröedinger denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin Galerkin yönteminin yardımıyla varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. Bu nedenle bu çalışmada incelenen başlangıç sınır değer probleminin incelenmesi bilimsel açıdan büyük önem arz etmektedir.

Tezin 1.2. bölümünde, tez çalışmasında ve formülize edilmesinde temel oluşturacak lemmalar ve bazı kavramların tanımları yer almaktadır.

Çalışmada yer alan bulgular bölümünde 3.1. ve 3.2. bölümleri yer almaktadır. 3.1. bölümünde üç boyutlu lineer Schrödinger denklemi için birinci çeşit başlangıç sınır değer problemi incelenmiş olup çözümün varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. 3.2. bölümünde üç boyutlu lineer Schrödinger denklemi için ikinci çeşit başlangıç sınır değer problemi incelenmiş olup çözümün varlığı ve tekliği ispatlanmıştır.

Tez çalışmasına ait 4. bölümde bu çalışmanın öneminden bahsedilmiş olup diğer çalışmalardan farklı olduğu açıklanmıştır.

1.2.Kuramsal Temeller

Çalışma içerisinde kullanacağımız teoremler, lemmalar ile bazı uzayların ve kavramları bu bölümde inceleyip tanımlayacağız.

Tanım 1.2.1. $L_2(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanları $\Omega=(D)\times(0,T)$ bölgesinde ölçülebilir ve mutlak değerini karesiyle integrallenebilir fonksiyonların Lebesque uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir.

$$\langle \psi, \phi \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)\,dxdt,$$

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{L_2(\Omega)}}$$

Tanım 1.2.2. $L_\infty(D)$ Banach uzayı olup D bölgesinde ölçülebilir sınırlı ve sonlu

$$\|\psi\|_{L_\infty(D)} = vrai \sup_{x\in(D)} |\psi(x,t)| = ess\sup\left\{|u(x)| : x\in(D)\right\}$$

$$= \inf\left\{c \ge 0 : \overset{0}{\forall}\, x\in(D)\, için\, |u(x)| \le c\right\}$$

normuna sahip $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 1.2.3. $C^0([0,T],B)$ Banach uzayıdır ve elemanları $[0,T]$ aralığında sürekli olan ve değerlerini B Banach uzayından alan fonksiyonlar uzayı olup bu norm aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\|u\|_{C^0([0,T],B)} = \max_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_B$$

Burada $B=R$ alınırsa $C[0,T]=C^0([0,T],R)$ elde edilir.

<u>Tanım 1.2.4.</u> $L_2\left(\left[0,T\right],B\right)$, Banach uzayı olup $\left[0,T\right]$ aralığında ölçülebilir, karesel integrallebenilir ve değerlerini B Banach uzayından alan fonksiyon uzayıdır. Bu uzayda norm aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\|u\|_{L_2([0,T],B)} = \left[\int_0^T \|u(.,t)\|_B^2 \, dt\right] < \infty$$

<u>Tanım 1.2.5.</u> $W_2^1(D)$ Hilbert uzayı olup bu uzayın elemanları ve bu elemanların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(D)$ uzayından olup Sobolev uzayıdır. Bu uzayda norm ve iç çarpım aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^1(D)} = \int_D \left(\psi(x)\bar{\phi}(x) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\phi}(x)}{\partial x_j} \right) dx$$

$$\|\psi\|_{W_2^1(D)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^1(D)}}$$

<u>Tanım 1.2.6.</u> $\overset{0}{W}{}_2^1(D)$uzayı $W_2^1(D)$'nin bir alt uzayıdır. Bu uzayda D'nin sınırında sıfıra dönüşen düzgün fonksiyonlar her yerde yoğundur.

<u>Tanım 1.2.7.</u> $W_2^2(D)$ Hilbert uzayı olup bu uzayın elemanları ve bu elemanların ikinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(D)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^2(D)} = \int_D \left(\psi(x)\bar{\phi}(x) + \sum_{J=1}^{3} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\phi}(x)}{\partial x_j} + \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 \bar{\phi}(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right) dx$$

$$\|\psi\|_{W_2^2(D)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^2(D)}}$$

$$\overset{0}{W}{}_2^2(D) \equiv W_2^2(D) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(D)$$

<u>Tanım 1.2.8.</u> $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı Hilbert uzayıdır. Bu uzayın elemanları ve bu elemanların x değişkenine göre genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. $W_2^{1,0}(\Omega)$ Hilbert uzayında iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial x_j} \right) dxdt$$

$$\|\psi\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)}}$$

<u>Tanım 1.2.9.</u> $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayının alt uzayıdır. Bu uzayda Ω 'nın sınırında sıfıra dönüşen düzgün fonksiyonlar her yerde yoğundur.

<u>Tanım 1.2.10</u>. $W_2^{2,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olup bu uzayın elemanları ve x değişkenine göre 1. ve 2. mertebeden, t değişkenine göre 1. mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekildedir:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \int_{\Omega_t} \left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial x_j} + \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 \overline{\phi}(x,t)}{\partial x_j \partial x_k} \right) dxdt$$

$$+ \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial t} \right) dxdt$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}},$$

$$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega) = W_2^{2,1}(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$$

dır.

Lemma 1.2.11. (Gronwall lemması): Eğer g(t) fonksiyonu $t_0 \le t \le t_1$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve

$$0 \le g(t) \le K + L\int_{t_0}^{t} g(s)ds$$

eşitsizliğini sağlarsa $t_0 \le t \le t_1$ üzerinde

$$0 \le g(t) \le K \exp\left(L\left(t - t_0\right)\right)$$

dir. Burada K ve L negatif olmayan sabitlerdir.

Lemma 1.2.12. (Cauchy-Bunjakovski eşitsizliği): $u, v \in L_2(\Omega)$ elemanları için

$$\left|\int_{\Omega} u\bar{v}dxdt\right| \le \left(\int_{\Omega} |u|^2 dxdt\right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dxdt\right)^{1/2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

2.MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Özel Gradient Terim İçeren Üç Boyutlu Schrödinger Denklemi İçin Birinci Çeşit Başlangıç Sınır Değer Problemi

Bu bölümde özel gradient terim içeren üç boyutlu Schrödinger denklemi için birinci çeşit başlangıç sınır değer problemini tanımlayalım. Bu problem aşağıdaki biçimdedir:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\Delta\psi+ia_1(x)\nabla\psi-a(x)\psi+v_0(x)\psi+iv_1(x)\psi=f(x,t),(x,t)\in\Omega \quad (2.1.1)$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x),x\in D,\psi\big|_s=0 \quad (2.1.2)$$

Burada $i=\sqrt{-1}$ sanal birim, $0\le t\le T$, $x=(x_1,x_2,x_3)\in D$, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ Δ -laplace operatörü, $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ ∇ -nabla operatörü $a_0>0$ verilen sayı, $D\in R^3$ verilen konveks sınırlı bölge, $\Omega=D\times(0,T)$, $S=\Gamma\times(0,T),\Gamma-D$ bölgesinin sınırı, $a(x),v_0(x),v_1(x)$ verilen reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar olup

$$0\le a(x)\le\mu_0\ \overset{0}{\forall}x\in D,\ \mu_0=\text{ sabit }>0 \quad (2.1.3)$$

$$|v_0(x)|\le b_0,\quad |v_1(x)|\le b_1\ \overset{0}{\forall}x\in D,\ b_{0,}b_1=\text{sabit} \quad (2.1.4)$$

$a_1(x)=(a_{11}(x),a_{12}(x),a_{13}(x))$ reel değerli ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar olup

$$|a_{1j}(x)|\le\mu_1,\left|\frac{\partial a_{1j}(x)}{\partial x_k}\right|\le\mu_2\ \overset{0}{\forall}x\in D,\ j,k=\overline{1,3},\mu_1,\mu_2=\text{sabit}>0 \quad (2.1.5)$$

$\varphi(x)$, $f(x,t)$ kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonlar olup

$$\varphi\in\overset{0}{W}{}_2^2(D),\ f\in W_2^{0,1}(\Omega) \quad (2.1.6)$$

şartlarını sağlar.

(2.1.1) - (2.1.2) şartlarından $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonunun bulunması problemi üç boyutlu lineer Schrödinger denklemi için birinci çeşit başlangıç sınır değer problemidir.

3.BULGULAR

3.1. Özel Gradient Terim İçeren Üç Boyutlu Schrödinger Denklemi İçin Birinci Tip Başlangıç Sınır Değer Probleminin Galerkin Yöntemiyle Çözümü

<u>Tanım 3.1.1</u>: $B_0 \equiv C^0\left([0,T], \overset{0}{W}{}_2^2(D)\right) \cap C^1\left([0,T], L_2(D)\right)$ Banach uzayından olan hemen hemen $x \in D$ ve hemen hemen $(\xi, t) \in S$ için (2.1.1) - (2.1.2) şartlarını sağlayan $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonunu (2.1.1) - (2.1.2) başlangıç sınır değer probleminin çözümü olarak anlayacağız.

(2.1.1) - (2.1.2) başlangıç sınır değer problemi için aşağıdaki teorem geçerlidir:

<u>Teorem 3.1.2.</u> Farz edelim ki; $a(x), a_1(x), v_0(x), v_1(x), \varphi(x), f(x,t)$ fonksiyonları (2.1.3) - (2.1.6) şartlarını sağlasın. Bu takdirde (2.1.1) - (2.1.2) sınır değer problemini B_0 uzayına ait olan çözümü vardır ve tektir. Bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\left\|\psi(.,t)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)} + \left\|\frac{\partial \psi(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(D)} \le c_0\left(\left\|\varphi\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)} + \left\|f\right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right), \forall t \in [0,T]. \tag{3.1.1}$$

Burada $c_0 > 0$ bilinen sabittir ve φ, f ve t'den bağımsızdır.

<u>İspat:</u> Teoremin ispatı için Galerkin yöntemini kullanalım. Bu amaçla $\overset{0}{W}{}_2^2(D)$ uzayından olan $L_2(D)$ de ortonormal olan $u_k = u_k(x), k = 1,2,...$ fonksiyonlar sistemini temel fonksiyonlar olarak

$$LX(x) = -a_0 \frac{d^2 X}{dx^2} + a(x)X = \lambda X(x), x \in D, X|_\Gamma = 0 \tag{3.1.2}$$

özdeğer probleminin $\lambda = \lambda_k, k = 1,2,...$ değerlerine karşılık gelen öz fonksiyonlarını alalım. Burada L operatörü aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$L = -a_0\Delta + a(x). \tag{3.1.3}$$

Bilindiği gibi L operatörünün katsayısı olan $a(x) \geq 0$ olduğundan $\lambda = \lambda_k, k = 1,2,...$ özdeğerleri reeldir ve

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...... \leq \lambda_k \leq ...... \leq \lambda_k \to \infty, k \to \infty \tag{3.1.4}$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada $u_k = u_k(x), k = 1,2,...$ öz fonksiyonları reeldir ve $\overset{0}{W}{}_2^1(D)$, $\overset{0}{W}{}_2^2(D)$ uzayında ortogonallik şartını sağlar. Burada $u_k = u_k(x), k = 1,2,...$ öz fonksiyonlarının ’de ortonormal olduğunu kabul edelim. Yani

$$(u_k, u_m)_{L_2(D)} = \int_D u_k(x)u_m(x)dx = \delta_k^m \tag{3.1.5}$$

olsun. Burada

$$\delta_k^m = \begin{cases} 1, k = m \\ 0, k \neq m, k, m = 1,2,... \end{cases} \tag{3.1.6}$$

Kronocker sabitleridir. $\overset{0}{W}{}_2^1(D)$ ve $\overset{0}{W}{}_2^2(D)$ ’de ortoganallik aşağıdai gibi tanımlanır:

$$[u_k, u_m] = (u_k, u_m)_{\overset{0}{W}{}_2^1(D)} = \int_D \left(a_0 \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + a(x)u_k u_m \right) dx = \lambda_k \delta_k^m,\ k, m = 1,2,... \tag{3.1.7}$$

$$\{u_k, u_m\} = (Lu_k, Lu_m)_{L_2(D)} = (u_k, u_m)_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)} = \lambda_k^2 \delta_k^m,\ \ k, m = 1,2,... \tag{3.1.8}$$

Bu şartların yanı sıra farz edelim ki

$$\|u_k\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)} \leq d_k < \infty, k = 1,2,... \tag{3.1.9}$$

şartıda sağlansın. Burada $d_k > 0, k = 1,2,...$ sabitlerdir.

Galerkin yöntemine göre (2.1.1) - (2.1.2) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün Galerkin yaklaşımlarını aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\psi^N(x,t) = \sum_k^N C_k^N(t) u_k(x). \tag{3.1.10}$$

Burada $C_k^N(t) = (\psi^N(.,t), u_k)_{L_2(D)}$, $k = \overline{1,N}$ katsayıları aşağıdaki Cauchy probleminin çözümüdür:

$$i\frac{d}{dt}(\psi^N(.,t),u_k)_{L_2(D)} - \left(L\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(D)} + i\left(a_1(.)\nabla\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(D)} +$$

$$\left(v_0(.)\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(D)} + i\left(v_1(.)\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(D)} = f_k(t),\ k = 1,2.....N, t\in[0,T] \tag{3.1.11}$$

$$C_k^N(t) = (\psi^N(.,t),u_k)_{L_2(D)}\ k = 1,2.......N. \tag{3.1.12}$$

Burada $f_k(t) = \left(f(.,t),u_k\right)_{L_2(D)}$ 'dir. Burada (3.1.11) denklemler sistemi homojen olmayıp sabit katsayılı lineer adi diferansiyel denklemler sistemidir. Denklemlerin sağ tarafları karesiyle integrallenebilir fonksiyonlardır. $[19]$ çalışmasından bilindiği üzere verilen şartlar altında (3.1.11) - (3.1.12) Cauchy probleminin çözümü vardır ve tektir.

(3.1.11) - (3.1.12) Cauchy probleminin N 'e bağlı çözümleri için kestirimler elde edelim.

<u>Lemma 3.1.3:</u> (3.1.11) - (3.1.12) Cauchy probleminin çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\sum_{k=1}^N \left|C_k^N(t)\right|^2 + \sum_{k=1}^N \left|\frac{dC_k^N(t)}{dt}\right|^2 \le \left\|\psi^N(.,t)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)} + \left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(D)}$$

$$\le c_1\left(\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)} + \left\|f\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right)\ \forall t\in[0,T],\ N = 1,2\ldots\ . \tag{3.1.13}$$

İspat: (3.1.11) sisteminin k. denklemini $\overline{C}_k^N(t)$ ile çarpıp $k=\overline{1,N}$ kadar toplayıp $[0,t]$ aralığında integralleyelim. Ayrıca $u_k|_\Gamma = 0, k=1,2,3...$ şartlarını kullanırsak

$$\int_{\Omega_t} i\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N - a_0\left|\nabla\psi^N\right|^2 + ia_1(x)\nabla\psi^N\overline{\psi}^N - a(x)\left|\psi^N\right|^2 + v_0(x)\left|\psi^N\right|^2 + iv_1(x)\left|\psi^N\right|^2$$

$$= \int_{\Omega_t}\left(f\overline{\psi}^N\right)dxdt \quad \forall t\in[0,T]$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak

$$i\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N + \frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\psi^N\right)dxdt + i\int_{\Omega_t}\left(a_1(x)\nabla\psi^N\overline{\psi}^N + a_1(x)\nabla\overline{\psi}^N\psi^N\right)dxdt +$$

$$+2i\int_{\Omega_t} v_1(x)\left|\psi^N\right|^2 dxdt = 2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left(f\overline{\psi}^N\right)dxdt \quad \forall t\in[0,T]$$

eşitliğini elde ederiz.

Burada $a_{1,j}(x), j=\overline{1,3}$ fonksiyonunun diferansiyellenebilir olduğundan yararlanırsak sonuncu eşitliği aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi^N\right|^2 dxdt + \int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{1,j}(x)\left|\psi^N\right|^2\right)dxdt = -2\int_{\Omega_t} v_1(x)\left|\psi^N\right|^2 dxdt +$$

$$\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial a_{1,j}(x)}{\partial x_j}\left|\psi^N\right|^2 dxdt + 2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left(f\overline{\psi}^N\right)dxdt \quad \forall t\in[0,T]. \qquad (3.1.14)$$

Burada $u_k = u_k(x), k=1,2,...$ fonksiyonları için $u_k|_\Gamma = 0, k=1,2,3...$ şartını kullanırsak (3.1.10) formülünden aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\psi^N(x,t)\big|_\Gamma = 0, t\in(0,T), N=1,2,... \qquad (3.1.15)$$

Bu şartları ve denklemin katsayıları üzerine konulan şartları dikkate alırsak (3.1.14) eşitliğinden aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz: $\forall t\in[0,T]$ için

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(D)} \le \left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(D)} + \| f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \left(2\mu_2 + 2b_1 + 1\right)\int_0^t \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(D)} d\tau . \qquad (3.1.16)$$

(3.1.10) formülünden yararlanarak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(D)} = \sum_{k=1}^{N} \left|c_k^N(0)\right|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} \left|\varphi_k\right|^2 = \|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(D)} . \qquad (3.1.17)$$

Bu bağıntının yardımıyla (3.1.16) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(D)} \le \|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(D)} + \| f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \left(2\mu_2 + 2b_1 + 1\right)\int_0^t \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(D)} d\tau \quad \forall t \in [0,T].$$

Bu eşitsizlikten ve Gronwall lemmasından yararlanarak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(D)} \le c_2 \left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(D)} + \| f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} \right) \quad \forall t \in [0,T]. \qquad (3.1.18)$$

Burada $c_2 > 0$ sabiti φ, f ve N den bağımsızdır.

Şimdi $\dfrac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}$ türevini değerlendirelim. Bu amaçla (3.1.11) sistemini aşağıdaki şekilde yazalım:

$$i\frac{d}{dt}(\psi^N(.,t),u_k)_{L_2(D)} - \left(a_0 \nabla \psi^N(.,t), \nabla u_k\right)_{L_2(D)} - \left(a(.)\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(D)} +$$

$$+\left(v_0(.,t)\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(D)} + i\left(a_1(.)\nabla \psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(D)} + \left(v_1(.,t)\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(D)}$$

$$= f_k(t), k = 1,2,..,N . \qquad (3.1.19)$$

Bu sistemin her iki tarafının t'ye göre türevini alıp elde edilen sistemin $\dfrac{d\overline{C}_k^N(t)}{dt}$ ile çarpıp bulunan denklemleri k üzerinden 1 den N 'ye kadar toplayalım. Sonra elde edilen eşitliği $(0,t)$ aralığı üzerinde integralliyelim. Bu takdirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t^2}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t} - a_0\sum_{j=1}^{3}\left|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t\partial x_j}\right|^2 + i\sum_{j=1}^{3}a_{1,j}(x)\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x_j\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t} - a(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 + \right.$$

$$\left. + v_0(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 + iv_1(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2\right)dxdt = \int_{\Omega_t}\frac{\partial f(x,\tau)}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N(x,\tau)}{\partial t}dxdt \;\; \forall t\in[0,T].$$

Yukarıdaki eşitlikten kompleks eşleniğini çıkarırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 dxdt + 2\int_{\Omega_t}v_1(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 dxdt + \int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{1,j}(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2\right)dxdt =$$

$$\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{3}a_{1,j}(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 dxdt + 2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxdt \quad \forall t\in[0,T]\ . \tag{3.1.20}$$

Diğer taraftan (3.1.10) formülünün ve $u_k = u_k(x), k = 1,2,...$ için $u_k|_\Gamma = 0, k = 1,2,3...$ şartını kullanırsak aşağıdaki şartı yazabiliriz:

$$\left.\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|_S = 0, N = 1,2,3...\ . \tag{3.1.21}$$

(3.1.21) şartını, Cauchy-Bunyakowski eşitsizliğini ve (3.1.18) kestirimini kullanarak (3.1.20)'den aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(D)} + \le \left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(D)} + c_3\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) +$$

$$(2\mu_2 + 2b_1 + 1)\int_{\Omega_t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(D)} d\tau, \forall t\in[0,T]. \tag{3.1.22}$$

Burada $c_3 > 0$ sabittir.

Şimdi (3.1.22) deki $\left\| \frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(D)}$ terimini değerlendirelim. Bunun için (3.1.11) sistemini $t=0$ için yazarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(D)} \le 5\left\| L\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(D)} + 5\left\| f(.,0)\right\|^2_{L_2(D)} + 20\mu_1^2 \left\| \nabla \psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(D)} +$$

$$5\left\| v_0(0)\right\|^2_{L_\infty(D)} \left\| \psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(D)} + 5\left\| v_1(0)\right\|^2_{L_\infty(D)} \left\| \psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(D)} \quad (3.1.23)$$

$f \in W_2^{0,1}(\Omega)$ olduğundan aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\| f(.,t)\right\|^2_{L_2(D)} \le c_4 \left\| f \right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} \ \forall t \in [0,T]. \quad (3.1.24)$$

Ayrıca (3.1.10) formülünden yaralanarak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$L\psi^N(x,0) = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(0) u_k(x) = \sum_{k=1}^{N} (L\varphi, u_k)_{L_2(D)} u_k(x).$$

Buradan aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\| L\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(D)} = \sum_{k=1}^{N} \left| (L\varphi, u_k)_{L_2(D)} u_k(x) \right|^2 \le \left\| L\varphi \right\|^2_{L_2(D)}.$$

Bu eşitsizlikten $\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^2(D)$ şartını ve denklemin üzerine konulan şartları kullanarak aşağıdaki kestirimim kolaylıkla elde edebiliriz:

$$\left\| L\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(D)} \le c_5 \left\| \varphi \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}. \quad (3.1.25)$$

Aynı biçimde aşağıdaki eşitsizliği de elde edebiliriz:

$$\left\| \nabla \psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(D)} \le c_6 \left\| \varphi \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}. \quad (3.1.26)$$

(3.1.24) - (3.1.25) eşitsizliklerini dikkate alarak (3.1.23)'den aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(D)} \leq c_7 \left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} \right). \tag{3.1.27}$$

Bu kestirimin yardımıyla (3.1.22) den aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(D)} \leq c_8 \left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} \right) +$$

$$(2\mu_2 + 2b_1 + 1) \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(D)} d\tau \ \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.1.28}$$

Buradan Gronwall lemmasının yardımıyla kolaylıkla aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(D)} \leq c_9 \left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} \right) \forall t \in [0,T]. \tag{3.1.29}$$

Şimdi $\nabla \psi^N(x,t)$ terimini $L_2(D)$ uzayının normunda değerlendirelim. Bu amaçla (3.1.19) sistemindeki k. denklemi $\frac{d\overline{C}_k^N(t)}{dt}$ ile çarptıktan sonra elde edilen eşitlikleri k üzerinden 1'den N'ye toplayalım. Elde edilen denklemi $(0,t)$ aralığı üzerinden integralleyerek aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_t} \left(i\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 - a_0 \nabla \psi^N \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \overline{\psi}^N\right) + i a_1(x) \partial \psi^N \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t} - a(x) \psi^N \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + v_0(x) \psi^N \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t} + i v_1(x) \psi^N \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t} \right) dxdt = \int_{\Omega_t} f \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t} dxdt \ \ \forall t \in [0,T].$$

Bu eşitliği onun kompleks eşleniği ile toplayalım. Sonra da elde edilen eşitlikte Cauchy-Bunyakowski eşitsizliğini uygulayıp denklemin katsayıları üzerine konulan şartları ve (3.1.18), (3.1.29) kestirimlerini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\left\|\nabla \psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(D)} \le \left\|\nabla \psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(D)} + c_{10}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \ \forall t \in [0,T].$$

$c_{10} > 0$ sabiti φ, f ve N den bağımsızdır.

Buradan (3.1.26) eşitsizliğinin yardımıyla aşağıdaki kestirimi yazabiliriz:

$$\left\|\nabla \psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(D)} \le c_{11}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \forall t \in [0,T]. \tag{3.1.30}$$

$c_{11} > 0$ sabiti φ, f ve N den bağımsızdır.

Şimdi $\psi^N(x,t)$ fonksiyonunu $\overset{0}{W}{}^2_2(D)$ uzayının normunda değerlendirelim. Bunu için (3.1.11) in k. denklemi $\lambda_k \overline{C}_k^N(t)$ ile çarptıktan sonra elde edilen eşitlikleri k üzerinden 1 den N ' ye toplayalım. Bu takdirde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_D \left|L\psi^N(x,t)\right|^2 dx = \int_D \Bigg[i\frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial t} + ia_1(x)\nabla\psi^N(x,t) + v_0(x)\psi^N(x,t) +$$

$$iv_1(x)\psi^N(x,t) - f(x,t)\Bigg] L\overline{\psi}^N(x,t)\,dx \ \forall t \in [0,T]\ . \tag{3.1.31}$$

Bu eşitlikten yaralanarak Cauchy-Bunyakowski eşitsizliğinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|L\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(D)} \le 5\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(D)} + 5\mu_2^2\left\|\nabla\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(D)} + 5\|v_0\|_{L_\infty(D)}\left\|\nabla\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(D)}$$

$$5\|v_1\|_{L_\infty(D)}\left\|\nabla\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(D)} + 5\left\|f(.,t)\right\|^2_{L_2(D)} \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.1.32}$$

Burada (3.1.24) eşitsizliğinin ve (3.1.18), (3.1.29) - (3.1.30)kestirimlerinin yardımıyla sonuncu eşitsizlikten aşağıdaki kestirimleri yazabiliriz:

$$\left\| L\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}^2 \le c_{12}\left(\left\| \varphi \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}^2 + \left\| f \right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 \right) \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.1.33}$$

Burada $c_{12} > 0$ sabiti φ, f ve N den bağımsızdır. Laplace operatörü için olan formülü dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\| L\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)} = \left\| -a_0 \Delta \psi^N(.,t) + a(.)\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)} \ge a_0 \left\| \Delta \psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)} - \mu_0 \left\| \psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}$$

Buradan aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\| \Delta \psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}^2 \le \frac{1}{a_0}\left\| L\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)} + \frac{\mu_0}{a_0}\left\| \psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)} \tag{3.1.34}$$

Bu eşitsizlikte (3.1.18) kestirimini ve (3.1.33) kestirimini kullanırsak aşağıdaki kestirimi buluruz:

$$\left\| \Delta \psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}^2 \le c_{13}\left(\left\| \varphi \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}^2 + \left\| f \right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 \right). \tag{3.1.35}$$

Burada $c_{13} > 0$ sabiti φ, f ve N den bağımsızdır.

[13] çalışmasında yer alan konveks D bölgesi için bilinen eşitsizliği kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\| \psi^N(.,t) \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}^2 \le c_{14}\left(\left\| \varphi \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}^2 + \left\| f \right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 \right) \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.1.36}$$

Bu takdirde bu eşitsizliğin yardımıyla (3.1.29) ve (3.1.36) den aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu elde ederiz.

$$\left\| \psi^N(.,t) \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}^2 + \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\| \le c_{15}\left(\left\| \varphi \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}^2 + \left\| f \right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 \right) \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.1.37}$$

Burada $c_{15} > 0$ sabiti φ, f ve N den bağımsızdır.

Böylelikle (3.1.29) ve (3.1.37) kestirimlerinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\sum_{k=1}^{N} \left| C_k^N (t) \right|^2 + \sum_{k=1}^{N} \left| \frac{dC_k^N (t)}{dt} \right|^2 \leq \left\| \psi^N (.,t) \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)} + \left\| \frac{\partial \psi^N (.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(D)} \quad \forall t \in [0,T] .$$

Eşitsizliği kullanarak ve $c_1 = c_{15}$ işaretleyerek lemmanın hükmünün geçerli olduğunu kabul ederiz.

Teoremin ispatının devamı için öncelikle $l_{N,k}(t) = \left(\psi^N (.,t), u_k \right)_{L_2(D)}, N,k = 1,2.....$ biçiminde $l_{N,k}(t)$ fonksiyonlar ailesini tanımlayalım. (3.1.13) kestiriminden ve $u_k = u_k(x), k = 1,2,...$ fonksiyonlarının ortonormalliği şartından yararlanırsak gösterebiliriz ki $l_{N,k}(t)$ ve $\frac{dl_{N,k}(t)}{dt}$ fonksiyonlar ailesini $[0,T]$ aralığında düzgün sınırlıdır. Yani

$$\left| l_{N,k}(t) \right| \leq c_{16}, \left| \frac{dl_{N,k}(t)}{dt} \right| \leq c_{17}, \; N,k = 1,2..., \forall t \in [0,T] \tag{3.1.38}$$

dır.

Şimdi tespit edilmiş her k ve keyfi $N \geq k$ için $l_{N,k}(t)$ $, N;k = 1,2....$ fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında aynı dereceden sürekli olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için (3.1.11) sisteminin k. denklemini $(t, t+\Delta t)$ aralığında integrallersek aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left| l_{N,k}(t+\Delta t) - l_{N,k}(t) \right| \leq \int_t^{t+\Delta t} \left| \int_D a_0 \Delta \psi^N (x,\tau) u_k(x) dx \right| d\tau +$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t} \left| \int_D i a_1(x) \nabla \psi^N (x,\tau) u_k(x) dx \right| d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \left| \int_D a(x) \psi^N (x,\tau) u_k(x) dx \right| d\tau +$$

$$+\int_{t}^{t+\Delta t}\left|\int_D v_0(x)\psi^N(x,\tau)u_k(x)\,dx\right|d\tau+\int_{t}^{t+\Delta t}\left|\int_D v_1(x)\psi^N(x,\tau)u_k(x)\,dx\right|d\tau+$$

$$+\int_{t}^{t+\Delta t}\left|\int_D f(x,t)u_k(x)\,dx\right|d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafında Caucyh-Bunyakowski eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|l_{N,k}(t+\Delta t)-l_{N,k}(t)\right|\le a_0\int_{t}^{t+\Delta t}\left\|\Delta\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(D)}\left\|u_k\right\|_{L_2(D)}d\tau+$$

$$+\sqrt{3}\mu_1\int_{t}^{t+\Delta t}\left\|\nabla\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(D)}\left\|u_k\right\|_{L_2(D)}d\tau+(\mu_0+b_0+b_1)\int_{t}^{t+\Delta t}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(D)}\left\|u_k\right\|_{L_2(D)}d\tau+$$

$$+\int_{t}^{t+\Delta t}\left\|f(.,\tau)\right\|_{L_2(D)}\left\|u_k\right\|_{L_2(D)}d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.13) kestiriminden ve u_k’lar için varsayılan (3.1.9) şartı kullanılırsa

$$\left|l_{N,k}(t+\Delta t)-l_{N,k}(t)\right|\le c_{18}d_k\Delta t\ \ N,k=1,2,... \tag{3.1.39}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{18}>0$ sabiti N,k ve t’den bağımsızdır.

(3.1.11) sistemindeki k. Denklemin t’ye göre türevini alıp sonra $(t,t+\Delta t)$ aralığında integralleyip toplayalım. Bu durumda

$$\left|\frac{dl_{N,k}(t+\Delta t)}{dt}-\frac{dl_{N,k}(t)}{dt}\right|\le\int_{t}^{t+\Delta t}\left|a_0\frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial\tau}\Delta u_k(x)\,dx\right|d\tau+$$

$$+\int_{t}^{t+\Delta t}\left|\int_D i\frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial\tau}\nabla\left(a_1(x)u_k(x)\right)dx\right|d\tau+\int_{t}^{t+\Delta t}\left|\int_D a(x)\frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial\tau}u_k(x)\right|d\tau+$$

$$+\int_{t}^{t+\Delta t}\left|\int_D v_0(x)\frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial\tau}u_k(x)\right|d\tau+\int_{t}^{t+\Delta t}\left|\int_D iv_1(x)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\psi^N(x,\tau)\right)u_k(x)\,dx\right|d\tau+$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\left|\int_D i\frac{\partial f(x,\tau)}{\partial\tau}u_k(x)\,dx\right|d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Cauchy-Bunyakowski eşitsizliğinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|\frac{dl_{N,k}(t+\Delta t)}{dt}-\frac{dl_{N,k}(t)}{dt}\right|\le a_0\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial\tau}\right\|_{L_2(D)}d\tau\left\|\Delta u_k\right\|_{L_2(D)}+$$

$$b_1\int_t^{t+\Delta t}\left\|\partial\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(D)}d\tau\left\|\Delta u_k\right\|_{L_2(D)}+\sqrt{3}\mu_1\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial\tau}\right\|_{L_2(D)}d\tau\left\|\nabla u_k\right\|+$$

$$+\left(\mu_0+b_0+b_1+\sqrt{3}\mu_2\right)\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial\tau}\right\|_{L_2(D)}d\tau\left\|u_k\right\|+\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial f(.,\tau)}{\partial\tau}\right\|_{L_2(D)}d\tau\left\|u_k\right\|_{L_2(D)}. \quad (3.1.40)$$

(3.1.40) eşitsizliğinde (3.1.13) - (3.1.29) kestirimlerini ve (3.1.9) şartını kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\frac{dl_{N,k}(t+\Delta t)}{dt}-\frac{dl_{N,k}(t)}{dt}\right|\le c_{19}d_k(\Delta t)^{1/2},\ N,k=1,2,\ldots. \quad (3.1.41)$$

Burada $c_{19}>0$ sabiti N,k ve t'den bağımsızdır. (3.1.39) ve (3.1.41) eşitsizliklerinden k tespit edildiğinde $\forall N\ge k$ için $\left\{l_{N,k}(t)\right\}$, $\left\{\frac{dl_{N,k}(t)}{dt}\right\}$, $N,k=1,2...$ fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında düzgün sınırlı ve eş sürekli olduğu anlaşılır. Bu takdirde köşegen sürecin yardımıyla öyle $N_m, m=1,2,...$ sayısı seçebiliriz ki $l_{N_{m,k}}(t)$ alt dizisi $[0,T]$ aralığında her bir $k=1,2,...$ için $l_k(t)$ fonksiyonuna yakınsar. $l_k(t)$ fonksiyonlarını kullanarak aşağıdaki $\psi(x,t)$ fonksiyonunu tanımlayalım:

$$\psi(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} l_k(t)u_k(x), \tag{3.1.42}$$

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{dl_k(t)}{dt}u_k(x), \tag{3.1.43}$$

$[8]$ çalışmasında olduğu gibi hareket ederek $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\},\left\{\frac{\partial\psi^{N_m}(x,t)}{\partial t}\right\}$ dizilerinin $\overset{0}{W}{}_2^2(D),\ L_2(D)$ uzaylarında $\psi(x,t),\ \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$ fonksiyonlarına t'ye göre düzgün olarak zayıf yakınsadığını elde edebiliriz ve $\psi(x,t)$ fonksiyonunun B_0 uzayının elamanı olduğunu elde edebiliriz.

Şimdi $\psi(x,t)$ limit fonksiyonun Tanım (3.1.1) anlamında (2.1.1) - (2.1.2) başlangıç sınır değer probleminin çözümü olduğunu gösterelim. Bu amaçla ilk önce gösterelim ki bu limit fonksiyonu hemen hemen $x\in D$ herhangi $t\in[0,T]$ için (2.1.1) denklemini sağlıyordur. Bu nedenle $N=N_m$ olduğunda (3.1.11)'nin k. denklemini $\overline{\eta}_k(t)$ sürekli fonksiyonlarını çarpıp elde edilen denklemleri k üzerinden $k=1$'den $N\le N_m$' ye kadar toplarsak aşağıdaki özdeşliği elde ederiz:

$$\int_D\Bigg(i\frac{\partial\psi^{N_m}(x,t)}{\partial t}-a_0\Delta\psi^{N_m}(x,t)+ia_1(x)\nabla\psi^{N_m}(x,t)-a(x)\psi^{N_m}(x,t)+v_0(x,t)\psi^{N_m}(x,t)+$$
$$+iv_1(x)\psi^{N}(x,t)-f(x,t)\Bigg)\overline{\eta}^{N'}(x,t)\,dx=0\ \ \forall t\in[0,T]. \tag{3.1.44}$$

Burada $\overline{\eta}^{N'}(x,t)=\sum_{k=1}^{N'}\overline{\eta}_k(t)u_k(x),\quad N\le N_m$'dir.

$\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ dizisinin $\psi(x,t)$ fonksiyonuna

$$\left\|\psi^{N_m}(.,t)-\psi(.,t)\right\|_{L_2(D)}\to 0\ \ \forall t\in[0,T]. \tag{3.1.45}$$

yakınsama özelliklerini dikkate alıp $m \to \infty$ için sonuncu integral özdeşliğinde limite geçersek aşağıdaki integral özdeşliğini elde ederiz:

$$\int_D \left(i\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} - a_0 \Delta \psi(x,t) + i a_1(x) \nabla \psi(x,t) - a(x)\psi(x,t) + v_0(x)\psi(x,t) + \right.$$

$$\left. + i v_1(x)\psi(x,t) - f(x,t) \right) \overline{\eta}^{N'}(x,t)\, dx = 0,\ \forall t \in [0,T] \qquad (3.1.46)$$

Burada $\forall \overline{\eta}(x,t) \in L_2(\Omega)$'dır.

$\overline{\eta}^{N'}(x,t) = \sum_{k=1}^{N'} \overline{\eta}_k(t) u_k(x),\ N \le N_m$ biçiminde olan test fonksiyonu $C^0([0,T], L_2(D))$, uzayında yoğun olduğundan (3.1.46) özdeşliğinden $\psi(x,t)$ limit fonksiyonun (2.1.1) denklemini hemen hemen $x \in D$ ve herhangi $t \in [0,T]$ için sağladığını elde ederiz. Başlangıç sınır değer şartlarının sağlanması $\psi(x,t)$ limit fonksiyonu için $t=0$ olduğunda (3.1.45) bağıntısının geçerli olmasından ve B_0 uzayının $L_2(S)$'ye kompakt gömülmesinden çıkar.

Böylelikle $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (2.1.1) - (2.1.2) başlangıç sınır değer probleminin çözümü olduğu ve B_0 uzayının elemanı olduğu ispatlandı. Bu çözüm için (3.1.1) kestiriminin geçerli olduğunu (3.1.13) kestiriminden aşağı limite geçerek elde edebiliriz.

Şimdi teoremin ispatını devam ettirerek (2.1.1) - (2.1.2) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün bir tek olduğunu gösterelim. Farz edelim ki $\psi(x,t)$ ve $\Phi(x,t)$ fonksiyonları (2.1.1) - (2.1.2) problemini herhangi iki çözümü olsun. $w(x,t) = \psi(x,t) - \Phi(x,t)$'dir. Bu takdirde (2.1.1) - (2.1.2) şartlarından $w = w(x,t)$ fonksiyonunun aşağıdaki sınır değer probleminin çözümü olduğu çıkar:

$$i\frac{\partial w}{\partial t} + a_0 \Delta w + a_1(x) \nabla w - a(x) + v_0(x) w + i v_1(x) w = 0,\ (x,t) \in \Omega \qquad (3.1.47)$$

$$w(x,0)=0,\ x\in D,\ w|_S=0 \qquad (3.1.48)$$

Bu sınır değer probleminin çözümü için kestirim elde etmeye çalışalım. Bu amaçla (3.1.47) denkleminin her iki tarafını $\overline{w}(x,t)$ ile çarpıp Ω_t üzerinden integralleyelim. Sınır değer şartlarını ve kısmi integrasyon formülünü kullanırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz: $\forall t\in[0,T]$ için

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial w}{\partial t}\overline{w}-a_0|\nabla w|^2+ia_1(x)\nabla w\overline{w}-a(x)|w|^2+v_0(x)|w|^2+iv_1(x)|w|^2\right)dxdt=0.$$

Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkartalım. Bu takdirde (3.1.48) sınır değer şartlarını yeniden kullanırsak kolaylıkla aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t}i\left(\frac{\partial w}{\partial \tau}\overline{w}+\frac{\partial \overline{w}}{\partial \tau}\right)dxd\tau+2i\int_{\Omega_t}v_1(x)|w|^2\,dxd\tau=-i\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial a_{1,j}(x)}{\partial x_j}|w|^2\,dxd\tau \quad \forall t\in[0,T].$$

Buradan da (3.1.48) yer alan başlangıç sınır değer şartını kullanarak aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\|w(.,t)\|^2_{L_2(D)}\le 2\mu_2\int_{\Omega_t}|w|^2dxd\tau+2b_1\ \forall t\in[0,T].$$

Sonuncu eşitsizliğe Gronwall lemmasını uygularsak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\|w(.,t)\|^2_{L_2(D)}=0 \quad \forall t\in[0,T].$$

Buradan

$$w(x,t)=0,\forall\, x\in \overset{0}{D}\ \ \forall t\in[0,T]$$

bağıntısı elde ediyoruz ki bu da (2.1.1) - (2.1.2) başlangıç sınır değer probleminin çözümü tektir. Teorem (3.1.2) ispatlandı.

3.2. Özel Gradient Terim İçeren Üç Boyutlu Schrödinger Denklemi İçin İkinci Tip Başlangıç Sınır Değer Probleminin Galerkin Yöntemiyle Çözümü

Bu bölümde ikinci çeşit başlangıç sınır değer probleminin çözümüne Galerkin yöntemini uygulayıp çözümün varlığı ve tekliğinin inceleyeceğiz. Bunun için aşağıdaki problemi göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t}+a_0\Delta\psi+ia_1(x)\nabla\psi-a(x)\psi+v_0(x)\psi+iv_1(x)\psi=f(x,t),(x,t)\in\Omega \tag{3.2.1}$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x),\ x\in D,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial v}\right|_S=0 \tag{3.2.2}$$

Burada $i=\sqrt{-1}$ sanal birim, $a_0>0, a_1>0$ verilen sayı, v vektörü Γ sınırının dış normali, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, Δ - laplace operatörü, $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$, ∇ -nabla operatörü, $D\in R^3$ verilen konveks sınırlı bölge, $\Omega=D\times(0,T)$, $S=\Gamma\times(0,T)$ ve $\Gamma-D$ bölgesinin sınırı, $a(x),v_0(x),v_1(x)$ verilen reel değere sahip ölçülebilir fonksiyonlar olup

$$0<a(x)\leq\mu_0\ \overset{0}{\forall} x\in D,\quad \mu_0=\text{sabit}>0\,, \tag{3.2.3}$$

$$|v_0(x)|\leq b_0,\ |v_1(x)|\leq b_1\ \overset{0}{\forall}(x,t)\in\Omega,\ b_{0,}b_1=\text{ sabit }>0\,. \tag{3.2.4}$$

$a_1(x)=(a_{11}(x),a_{12}(x),a_{13}(x))$ reel değerli ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar olup

$$|a_{1j}(x)|\leq\mu_2,\ \left|\frac{\partial a_{1j}(x)}{\partial x_k}\right|\leq\mu_3\ \overset{0}{\forall} x\in D,\ j,k=\overline{1,3},\ \ \mu_2,\mu_3\ \text{sabit}>0\,,$$

$$\left.a_{1j}(x)\right|_\Gamma=0,\ j=\overline{1,3}\,. \tag{3.2.5}$$

Burada $\varphi(x)$, $f(x,t)$- kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonlar olup

$$\varphi\in W_2^2(D),\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|_\Gamma=0,\ f\in W_2^{0,1}(\Omega) \tag{3.2.6}$$

dır.

Görüldüğü üzere (3.2.1) - (3.2.2) şartlarından $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonunun bulunması problemi (3.2.1) denklemi için ikinci çeşit başlangıç sınır değer problemidir.

Tanım 3.2.1. $B_1 \equiv C^0\left([0,T], W_2^2(D)\right) \cap C^1\left([0,T], L_2(D)\right)$, Banach uzayından olan hemen hemen $x \in D$ ve hemen hemen $(\xi,t) \in S$ için (3.2.1) - (3.2.2) şartlarını sağlayan $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonunu (3.2.1) - (3.2.2) başlangıç sınır değer problemine ait çözüm olarak anlayacağız.

Teorem 3.2.2. Farz edelim ki; $a(x), a_1(x), v_0(x), v_1(x), \varphi(x), f(x,t)$ fonksiyonları (3.2.3) - (3.2.6) şartlarını sağlasın. Bu takdirde (3.2.1) - (3.2.2) sınır değer probleminin B_1 uzayına ait olan çözümü tek olup bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\left\|\psi(.,t)\right\|_{W_2^2(D)} + \left\|\frac{\partial \psi(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(D)} \le c_{20}\left(\|\varphi\|_{W_2^2(D)} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right),\ \forall t \in [0,T]. \tag{3.2.7}$$

Burada $c_{20} > 0$ sabiti φ, t ve f den bağımsızdır.

İspat: Bu teoremin ispatı teorem (3.1.2) de olduğu gibi Galerkin yöntemini kullanalım. Bu amaçla $W_2^2(D)$ uzayından olan $L_2(D)$'de ortonormal olan $u_k = u_k(x), k = 1,2,...$ fonksiyonlar sistemini temel fonksiyonlar sistemi olarak

$$LX(x) = -a_0\frac{d^2X}{dx^2} + a(x)X = \lambda X(x), x \in D, \left.\frac{\partial X}{\partial v}\right|_{\Gamma} = 0 \tag{3.2.8}$$

Özdeğer problemlerinin $\lambda = \lambda_k$, $k = 1,2,...$ değerlerine karşılık gelen öz fonksiyonlar sistemini alalım. Burada L operatörü aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$L = -a_0\Delta + a(x) \tag{3.2.9}$$

Bilindiği gibi L operatörünün katsayısı olan $a(x) > \mu_0 > 0$ olduğundan $\lambda = \lambda_k, k = 1,2,...$ özdeğerleri reeldir ve

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le ...... \le \lambda_k \le ...... \le \lambda_k \to \infty \, , k \to \infty \tag{3.2.10}$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada $u_k = u_k(x), k = 1, 2, ...$ öz fonksiyonları reeldir ve $W_2^1(D)$, $W_2^2(D)$ uzayında ortogonallik şartını sağlar. Burada $u_k = u_k(x), k = 1, 2, ...$ öz fonksiyonlarının $L_2(D)$ 'de ortonormal olduğunu kabul edelim.

$$(u_k, u_m)_{L_2(D)} = \int_D u_k(x) u_m(x) dx = \delta_k^m \tag{3.2.11}$$

olsun. Burada (3.2.10) ün geçerli olduğunu varsayalım.

$$\delta_k^m = \begin{cases} 1, k = m \\ 0, k \neq m, k, m = 1, 2, ... \end{cases} \tag{3.2.12}$$

Kronocker sabitleridir.

$W_2^1(D)$ ve $W_2^2(D)$ de ortogonallik aşağıdaki gibi anlaşılır:

$$[u_k, u_m] = (u_k, u_m)_{W_2^1(D)} = \int_D \left(a_0 \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + a(x) u_k u_m \right) dx = \lambda_k \delta_k^m, \; k, m = 1, 2, ... \tag{3.2.13}$$

$$\{u_k, u_m\} = (Lu_k, Lu_m)_{L_2(D)} = (u_k, u_m)_{W_2^2(D)} = \lambda_k^2 \delta_k^m, \; k, m = 1, 2, ... \tag{3.2.14}$$

Bu şartların yanı sıra farz edelim ki

$$\|u_k\|_{W_2^2(D)} \le d_k < \infty, \; k = 1, 2, ... \tag{3.2.15}$$

şartıda sağlansın. Burada $d_k > 0, k = 1, 2, ...$ sabitlerdir.

Galerkin yöntemine göre (3.2.1) - (3.2.2) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün Galerkin yaklaşımlarını aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\psi^N(x,t) = \sum_k^N C_k^N(t) u_k(x). \tag{3.2.16}$$

Burada $C_k^N(t)=(\psi^N(.,t),u_k)_{L_2(D)}$, $k=\overline{1,N}$ katsayıları aşağıdaki Cauchy probleminin çözümüdür:

$$i\frac{d}{dt}(\psi^N(.,t),u_k)_{L_2(D)}-\left(L\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(D)}+i\left(a_1(.)\nabla\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(D)}+$$

$$\left(v_0(.)\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(D)}+i\left(v_1(.)\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(D)}=f_k(t),\ k=1,2.....N,t\in\left[0,T\right] \quad (3.2.17)$$

$$C_k^N(t)=(\psi^N(.,t),u_k)_{L_2(D)},k=\overline{1,N} \quad (3.2.18)$$

Burada $f_k(t)=\left(f(.,t),u_k\right)_{L_2(D)}$ 'dir. Burada (3.2.17) denklemler sistemi homojen olmayıp sabit katsayılı lineer adi diferansiyel denklemler sistemidir. Denklemlerin sağ tarafları karesiyle integrallenebilir fonksiyonlardır. $\left[19\right]$ çalışmasından bilindiği üzere verilen şartlar altında (3.2.16) - (3.2.17) Cauchy probleminin çözümü vardır ve tektir.

(3.2.17) - (3.2.18) Cauchy probleminin N 'e bağlı çözümleri için kestirimler elde edelim.

Lemma 3.2.3 : (3.2.17) - (3.2.18) Cauchy probleminin çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\sum_{k=1}^{N}\left|C_k^N(t)\right|^2+\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{dC_k^N(t)}{dt}\right|^2\le\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{W_2^2(D)}+\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(D)}$$

$$\le c_{21}\left(\|\varphi\|_{W_2^2(D)}^2+\|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2\right)\ \forall t\in\left[0,T\right],N=1,2,\dots. \quad (3.2.19)$$

İspat: (3.2.17) sisteminin k. denklemini $\overline{C}_k^N(t)$ ile çarpıp $k=\overline{1,N}$ kadar toplayıp $\left(0,t\right)$ aralığında integralleyelim. Ayrıca $u_k\big|_\Gamma=0,k=1,2,3...$ şartlarını kullanırsak

$$\int_{\Omega_t} i\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N-a_0\left|\nabla\psi^N\right|^2+ia_1(x)\nabla\psi^N\overline{\psi}^N-a(x)\left|\psi^N\right|^2+v_0(x)\left|\psi^N\right|^2+iv_1(x)\left|\psi^N\right|^2$$

$$=\int_{\Omega_t}\left(f\overline{\psi}^N\right)dxdt\quad\forall t\in\left[0,T\right]$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak

$$i\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N+\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\psi^N\right)dxdt+i\int_{\Omega_t}\left(a_1(x)\nabla\psi^N\overline{\psi}^N+a_1(x)\nabla\overline{\psi}^N\psi^N\right)dxdt+$$

$$+2i\int_{\Omega_t}v_1(x)\left|\psi^N\right|^2dxdt=2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(f\overline{\psi}^N\right)dxdt\quad\forall t\in[0,T]$$

eşitliğini elde ederiz.

Burada $a_{1,j}(x),\ j=\overline{1,3}$ fonksiyonunun diferansiyellenebilir olduğundan yararlanırsak sonuncu eşitliği aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi^N\right|^2dxdt+\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{1,j}(x)\left|\psi^N\right|^2\right)dxdt=-2\int_{\Omega_t}v_1(x)\left|\psi^N\right|^2dxdt+$$

$$\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial a_{1,j}(x)}{\partial x_j}\left|\psi^N\right|^2dxdt+2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(f\overline{\psi}^N\right)dxdt,\forall t\in[0,T]\,. \tag{3.2.20}$$

Burada $u_k=u_k(x),k=1,2,...$ fonksiyonları için $u_k|_{\Gamma}=0,k=1,2,3...$ şartını kullanırsak (3.2.16) formülünden aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\psi^N(x,t)\big|_{\Gamma}=0,t\in(0,T),N=1,2,...\ . \tag{3.2.21}$$

Bu şartları ve denklemin katsayıları üzerine konulan şartları dikkate alırsak (3.2.20) eşitliğinden aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(D)}\le\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(D)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}$$

$$+(2\mu_2+2b_1+1)\int_0^t\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(D)}d\tau,\forall t\in[0,T]. \tag{3.2.22}$$

(3.2.16) formülünden yararlanarak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(D)}=\sum_{k=1}^{N}\left|c_k^N(0)\right|^2\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_k\right|^2=\|\varphi\|^2_{W_2^2(D)}. \tag{3.2.23}$$

Bu bağıntının yardımıyla (3.2.22) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(D)} \le \|\varphi\|^2_{W_2^2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + (2\mu_2 + 2b_1 + 1)\int_0^t \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(D)} d\tau \quad \forall t \in [0,T].$$

Bu eşitsizlikten ve Gronwall lemmasından yararlanarak aşağıdaki kestirimi elde ederiz.

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(D)} \le c_{22}\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \; \forall t \in [0,T]. \qquad (3.2.24)$$

Burada $c_{22} > 0$ sabiti f , φ ve N den bağımsızdır.

Şimdi $\dfrac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}$ türevini değerlendirelim. Bu amaçla (3.2.17) sistemini aşağıdaki şekilde yazalım:

$$i\frac{d}{dt}(\psi^N(.,t),u_k)_{L_2(D)} - \left(a_0\nabla\psi^N(.,t),\nabla u_k\right)_{L_2(D)} - \left(a(.)\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(D)} +$$

$$+\left(v_0(.,t)\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(D)} + i\left(a_1(.)\nabla\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(D)} + \left(v_1(.,t)\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(D)}$$

$$= f_k(t),\; k = 1,2,..,N. \qquad (3.2.25)$$

Bu sistemin her iki tarafının t'ye göre türevini alıp elde edilen sistemin $\lambda_k \overline{C}_k^N(t)$ ile çarpıp bulunan denklemleri k üzerinden 1 den N ye kadar toplayalım. Sonra elde edilen eşitliği $(0,t)$ aralığı üzerinde integralliyelim. Bu takdirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t^2}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t} - a_0\sum_{j=1}^3\left|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t\partial x_j}\right|^2 + i\sum_{j=1}^3 a_{1,j}(x)\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x_j\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t} - a(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 + \right.$$

$$\left. + v_0(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 + iv_1(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2\right)dxdt = \int_{\Omega_t}\frac{\partial f(x,\tau)}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N(x,\tau)}{\partial t}dxdt \quad \forall t \in [0,T].$$

Yukarıdaki eşitlikten kompleks eşleniğini çıkarırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 dxdt + 2\int_{\Omega_t} v_1(x)\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 dxdt + \int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{1,j}(x)\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2\right)dxdt =$$

$$\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{3} a_{1,j}(x)\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 dxdt + 2\int_{\Omega_t} \operatorname{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxdt$$

$$-2\int_{\Omega_t} \operatorname{Im}\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial t}\left(\psi^N\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxdt \quad \forall t\in[0,T]. \qquad (3.2.26)$$

Diğer taraftan (2.1.16) formülünün ve $u_k = u_k(x), k=1,2,...$ için $u_k|_{\Gamma} = 0, k=1,2,3...$ şartını kullanırsak aşağıdaki şartı yazabiliriz:

$$\left.\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|_S = 0, N=1,2,3\ldots. \qquad (3.2.27)$$

(3.2.27) şartını ve Cauchy-Bunyakowski eşitsizliğini bunların yanı sıra (3.2.24) kestirimini kullanarak (3.2.26)'dan aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(D)} + \le \left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(D)} + c_{23}\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) +$$

$$(2\mu_2 + 2b_1 + 1)\int_{\Omega_t}\left\|\frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(D)} d\tau, \forall t\in[0,T]. \qquad (3.2.28)$$

Burada $c_{23} > 0$ sabiti f,φ ve N den bağımsızdır.

Şimdi (3.2.28) deki $\left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(D)}$ terimini değerlendirelim. Bunun için (3.2.17) sistemini $t=0$ için yazarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(D)} \leq 5 \left\| L\psi^N(.,0) \right\|^2_{L_2(D)} + 5 \left\| f(.,0) \right\|^2_{L_2(D)} + 20\mu_1^2 \left\| \nabla \psi^N(.,0) \right\|^2_{L_2(D)} +$$

$$5 \left\| v_0(0) \right\|^2_{L_\infty(D)} \left\| \psi^N(.,0) \right\|^2_{L_2(D)} + 5 \left\| v_1(0) \right\|^2_{L_\infty(D)} \left\| \psi^N(.,0) \right\|^2_{L_2(D)} \qquad (3.2.29)$$

$f \in W_2^{0,1}(\Omega)$ olduğundan aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\| f(.,t) \right\|^2_{L_2(D)} \leq c_{24} \left\| f \right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} \ \forall t \in [0,T]. \qquad (3.2.30)$$

Ayrıca (3.2.16) formülünden yaralanarak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$L\psi^N(x,0) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(0) u_k(x) = \sum_{k=1}^{N} (L\varphi, u_k)_{L_2(D)} u_k(x).$$

Buradan aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\| L\psi^N(.,0) \right\|^2_{L_2(D)} = \sum_{k=1}^{N} \left| (L\varphi, u_k)_{L_2(D)} u_k(x) \right|^2 \leq \left\| L\varphi \right\|^2_{L_2(D)}.$$

Bu eşitsizlikten $\varphi \in W_2^2(D)$ şartını ve denklemin üzerine konulan şartları kullanarak aşağıdaki kestirimi kolaylıkla elde edebiliriz:

$$\left\| L\psi^N(.,0) \right\|^2_{L_2(D)} \leq c_{25} \left\| \varphi \right\|^2_{W_2^2(D)} . \qquad (3.2.31)$$

Aynı biçimde aşağıdaki eşitsizliği de elde edebiliriz:

$$\left\| \nabla \psi^N(.,0) \right\|^2_{L_2(D)} \leq c_{26} \left\| \varphi \right\|^2_{W_2^2(D)}. \qquad (3.2.32)$$

(3.2.30) - (3.2.31) eşitsizliklerini dikkate alarak (3.2.29)'dan aşağıdaki kestirim geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(D)} \leq c_{27} \left(\left\| \varphi \right\|^2_{W_2^2(D)} + \left\| f \right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} \right). \qquad (3.2.33)$$

Bu kestirimin yardımıyla (3.2.28) den aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(D)} \le c_{28}\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) +$$

$$(2\mu_2 + 2b_1 + 1)\int_0^t \left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(D)} d\tau \;\; \forall t \in [0,T]. \tag{3.2.34}$$

Buradan Gronwall lemmasının yardımıyla kolaylıkla aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(D)} \le c_{29}\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \forall t \in [0,T]. \tag{3.2.35}$$

Şimdi $\nabla\psi^N(x,t)$ terimini $L_2(D)$ uzayının normunda değerlendirelim. Bu amaçla (2.1.17) sistemindeki k. denklemi $\frac{d\overline{C}_k^N(t)}{dt}$ ile çarptıktan sonra elde edilen eşitlikleri k üzerinden 1 den N ye toplayalım. Elde edilen denklemi $(0,t)$ aralığı üzerinden integralleyerek aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_t}\left(i\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 - a_0\nabla\psi^N \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\overline{\psi}^N\right) + ia_1(x)\partial\psi^N \frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t} - a(x)\psi^N \frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + v_0(x)\psi^N \frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t} + iv_1(x)\psi^N \frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right) dxdt = \int_{\Omega_t} f\,\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t} dxdt \;\; \forall t \in [0,T].$$

Bu eşitliği onun kompleks eşleniği ile toplayalım. Sonra da elde edilen eşitlikte Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği uygulayıp denklemin katsayıları üzerine konulan şartları ve (3.2.24), (3.2.35) kestirimlerini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\|\nabla\psi^N(.,t)\|^2_{L_2(D)} \le \|\nabla\psi^N(.,0)\|^2_{L_2(D)} + c_{30}\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \;\; \forall t \in [0,T].$$

$c_{30} > 0$ sabiti f, φ ve N den bağımsızdır.

Buradan (2.1.32) eşitsizliğinin yardımıyla aşağıdaki kestirimi yazabiliriz:

$$\left\|\nabla \psi^N(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 \le c_{31}\left(\|\varphi\|_{W_2^2(D)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2\right) \ \forall t \in [0,T] \tag{3.2.36}$$

$c_{31} > 0$ sabiti f, φ ve N den bağımsızdır.

Şimdi $\psi^N(x,t)$ fonksiyonunu $W_2^2(D)$ uzayının normunda değerlendirelim. Bunu için (3.2.17) k. denklemi $\dfrac{d\overline{C}_k^N(t)}{dt}$ ile çarptıktan sonra elde edilen eşitlikleri k üzerinden 1 den N ye toplayalım. Bu takdir de aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_D \left|L\psi^N(x,t)\right|^2 dx = \int_D \left[i\frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial t} + ia_1(x)\nabla\psi^N(x,t) + v(x)\psi^N(x,t) + \right.$$

$$\left. iv_1(x)\psi^N(x,t) - f(x,t)\right] L\overline{\psi}^N(x,t)\,dx \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.2.37}$$

Bu eşitlikten yaralanarak Cauchy-Bunyakowski eşitsizliğinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|L\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 \le 5\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(D)}^2 + 5\mu_2^2\left\|\nabla\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 + 5\|v_0\|_{L_\infty(D)}\left\|\nabla\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 +$$

$$+5\|v_1\|_{L_\infty(D)}\left\|\nabla\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 + 5\|f(.,t)\|_{L_2(D)}^2 \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.2.38}$$

Burada (3.2.30) eşitsizliğinin ve (3.2.24), (3.2.35) - (3.2.36) kestirimlerinin yardımıyla sonuncu eşitsizlikten aşağıdaki kestirimleri yazabiliriz:

$$\left\|L\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 \le c_{32}\left(\|\varphi\|_{W_2^2(D)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2\right) \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.2.39}$$

Burada $c_{32} > 0$ sabiti f, φ ve N den bağımsızdır. Laplace operatörü için olan formülü dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\| L\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)} = \left\| -a_0 \Delta \psi^N(.,t) + a(.)\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)} \geq a_0 \left\| \Delta \psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)} - \mu_0 \left\| \psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}$$

Buradan aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\| \Delta \psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}^2 \leq \frac{1}{a_0} \left\| L\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)} + \frac{\mu_0}{a_0} \left\| \psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}. \qquad (3.2.40)$$

Bu eşitsizlikte (3.2.24) kestirimini ve (3.2.39) kestirimini kullanırsak aşağıdaki kestirimi buluruz:

$$\left\| \Delta \psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}^2 \leq c_{33} \left(\|\varphi\|_{W_2^2(D)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 \right). \qquad (3.2.41)$$

Burada $c_{33} > 0$ sabiti f, φ ve N den bağımsızdır.

$[13]$ çalışmasında yer alan konveks D bölgesi için bilinen eşitsizliği kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\| \psi^N(.,t) \right\|_{W_2^2(D)}^2 \leq c_{34} \left(\|\varphi\|_{W_2^2(D)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 \right) \quad \forall t \in [0,T]. \qquad (3.2.42)$$

Bu takdirde bu eşitsizliğin yardımıyla (3.2.35) - (3.2.42) den aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu elde ederiz.

$$\left\| \psi^N(.,t) \right\|_{W_2^2(D)}^2 + \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\| \leq c_{35} \left(\|\varphi\|_{W_2^2(D)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 \right) \quad \forall t \in [0,T]. \qquad (3.2.43)$$

Böylelikle (3.2.35) ve (3.2.42) kestirimlerinin yardımıyla aşağıdaki kestirimi elde ederiz. Burada $c_{35} > 0$ sabittir ve N den bağımsızdır.

$$\sum_{k=1}^{N} \left| C_k^N(t) \right|^2 + \sum_{k=1}^{N} \left| \frac{dC_k^N(t)}{dt} \right|^2 \leq \left\| \psi^N(.,t) \right\|_{W_2^2(D)}^2 + \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(D)}^2 \quad \forall t \in [0,T].$$

Eşitsizliği kullanarak ve $c_{21} = c_{35}$ işaretleyerek lemmanın hükmünün geçerli olduğunu kabul ederiz.

Teoremin ispatının devamı için öncelikle $l_{N,k}(t) = \left(\psi^N(.,t), u_k \right)_{L_2(D)}$, $N, k = 1, 2, ...$ biçiminde $l_{N,k}(t)$ fonksiyonlar ailesini tanımlayalım. (3.2.19) kestiriminden ve $u_k = u_k(x), k = 1, 2, ...$ fonksiyonlarının ortonormalliği şartından yararlanırsak gösterebiliriz ki $l_{N,k}(t)$ ve $\frac{dl_{N,k}(t)}{dt}$ fonksiyonlar ailesini $[0,T]$ aralığında düzgün sınırlıdır. Yani

$$\left|l_{N,k}(t)\right| \le c_{36}, \left|\frac{dl_{N,k}(t)}{dt}\right| \le c_{37}, N,k = 1,2,... \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.2.44}$$

Şimdi tespit edilmiş her k ve keyfi $N \ge k$ için $l_{N,k}(t)$, $N,k = 1,2,...$ fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında aynı dereceden sürekli olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için (3.2.11) sisteminin k. denklemi $(t, t+\Delta t)$ aralığı üzerinden integralini alırsak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|l_{N,k}(t+\Delta t) - l_{N,k}(t)\right| \le \int_t^{t+\Delta t} \left|\int_D a_0 \Delta \psi^N(x,\tau) u_k(x)\,dx\right| d\tau +$$

$$+\int_t^{t+\Delta t} \left|\int_D i a_1(x) \nabla \psi^N(x,\tau) u_k(x)\,dx\right| d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \left|\int_D a(x) \psi^N(x,\tau) u_k(x)\,dx\right| d\tau +$$

$$+\int_t^{t+\Delta t} \left|\int_D v_0(x) \psi^N(x,\tau) u_k(x)\,dx\right| d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \left|\int_D v_1(x) \psi^N(x,\tau) u_k(x)\,dx\right| d\tau +$$

$$+\int_t^{t+\Delta t} \left|\int_D f(x,t) u_k(x)\,dx\right| d\tau .$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafında Caucyh-Bunyakowski eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|l_{N,k}(t+\Delta t) - l_{N,k}(t)\right| \le a_0 \int_t^{t+\Delta t} \left\|\Delta \psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(D)} \left\|u_k\right\|_{L_2(D)} d\tau +$$

$$+\sqrt{3}\mu_1 \int_t^{t+\Delta t} \left\|\nabla \psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(D)} \left\|u_k\right\|_{L_2(D)} d\tau + (\mu_0 + b_0 + b_1) \int_t^{t+\Delta t} \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(D)} \left\|u_k\right\|_{L_2(D)} d\tau +$$

$$+\int_t^{t+\Delta t} \left\|f(.,\tau)\right\|_{L_2(D)} \left\|u_k\right\|_{L_2(D)} d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. (3.2.19) kestiriminden ve u_k'lar için varsayılan (3.2.15) şartı kullanılırsa

$$\left|l_{N,k}(t+\Delta t)-l_{N,k}(t)\right| \le c_{38} d_k \Delta t \quad N,k=1,2,... \tag{3.2.45}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{38}>0$ sabiti N,k ve t'den bağımsızdır.

(3.2.17) sistemindeki $k.$ denkleminin t'ye göre türevini alıp sonra $(t,t+\Delta t)$ aralığında integralleyip toplayalım.

$$\left|\frac{dl_{N,k}(t+\Delta t)}{dt}-\frac{dl_{N,k}(t)}{dt}\right| \le \int_t^{t+\Delta t}\left|a_0 \frac{\partial \psi^N(x,\tau)}{\partial \tau}\Delta u_k(x)\,dx\right|d\tau +$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\left|\int_D i\frac{\partial \psi^N(x,\tau)}{\partial \tau}\nabla\left(a_1(x)u_k(x)\right)dx\right|d\tau+\int_t^{t+\Delta t}\left|\int_D a(x)\frac{\partial \psi^N(x,\tau)}{\partial \tau}u_k(x)\right|d\tau+$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\left|\int_D v_0(x)\frac{\partial \psi^N(x,\tau)}{\partial \tau}u_k(x)\right|d\tau+\int_t^{t+\Delta t}\left|\int_D iv_1(x)\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\psi^N(x,\tau)\right)u_k(x)\,dx\right|d\tau+$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\left|\int_D i\frac{\partial f(x,\tau)}{\partial \tau}u_k(x)\,dx\right|d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Cauchy-Bunyakowski eşitsizliğinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|\frac{dl_{N,k}(t+\Delta t)}{dt}-\frac{dl_{N,k}(t)}{dt}\right| \le a_0\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial \tau}\right\|_{L_2(D)} d\tau\left\|\Delta u_k\right\|_{L_2(D)}+$$

$$b_1\int_t^{t+\Delta t}\left\|\partial \psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(D)} d\tau\left\|\Delta u_k\right\|_{L_2(D)}+\sqrt{3}\mu_1\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial \psi^N(x,\tau)}{\partial \tau}\right\|_{L_2(D)} d\tau\left\|\nabla u_k\right\|+$$

$$+\left(\mu_0+b_0+b_1+\sqrt{3}\mu_2\right)\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial \tau}\right\|_{L_2(D)} d\tau\left\|u_k\right\|+\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial f(.,\tau)}{\partial \tau}\right\|_{L_2(D)} d\tau\left\|u_k\right\|_{L_2(D)}. \tag{3.2.46}$$

(3.2.46) eşitsizliğinde (3.2.19) - (3.2.35) kestirimlerini ve (3.2.15) şartını kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left| \frac{dl_{N,k}(t+\Delta t)}{dt} - \frac{dl_{N,k}(t)}{dt} \right| \leq c_{39} d_k (\Delta t)^{1/2}, N,k = 1,2,... \quad . \tag{3.2.47}$$

Burada $c_{39} > 0$ sabittir ve N,k ve t'den bağımsızdır.

(3.2.45) ve (3.2.46) eşitsizliklerinden k tespit edildiğinde $\forall N \geq k$ için $\{l_{N,k}(t)\}$, $\left\{\frac{dl_{N,k}(t)}{dt}\right\}$, $N,k = 1,2,...$ fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında düzgün sınırlı ve eş sürekli olduğu anlaşılır. Bu takdirde köşegen sürecin yardımıyla öyle $N_m, m = 1,2,...$ sayısı seçebiliriz ki $l_{N_{m,k}}(t)$ alt dizisi $[0,T]$ aralığında her bir $k = 1,2,...$ için $l_k(t)$ fonksiyonuna yakınsar. $l_k(t)$ fonksiyonlarını kullanarak aşağıdaki $\psi(x,t)$ fonksiyonunu tanımlayalım:

$$\psi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} l_k(t) u_k(x), \tag{3.2.48}$$

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dl_k(t)}{dt} u_k(x). \tag{3.2.49}$$

[8] çalışmasında olduğu gibi hareket ederek $\{\psi^{N_m}(x,t)\}, \left\{\frac{\partial \psi^{N_m}(x,t)}{\partial t}\right\}$ dizilerinin $L_2(D)$ uzaylarında $\psi(x,t)$, $\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$ fonksiyonlarına t'ye göre düzgün olarak zayıf yakınsadığını ve $\psi(x,t)$ fonksiyonunun B_1 uzayının elamanı olduğunu elde edebiliriz.

Şimdi $\psi(x,t)$ limit fonksiyonun Tanım (3.2.7) anlamında (3.2.1) - (3.2.2) başlangıç sınır değer probleminin çözümü olduğunu gösterelim. Bu amaçla ilk önce gösterelim ki bu limit fonksiyonu hemen hemen $x \in D$ herhangi $t \in [0,T]$ için (3.2.1) denklemini sağlıyordur. Bu nedenle $N = N_m$ olduğunda (3.2.17)'nin k. denklemini $\overline{\eta}_k(t)$ sürekli fonksiyonlarını çarpıp elde edilen denklemleri k üzerinden $k=1$'den $N \le N_m$'ye kadar toplarsak aşağıdaki özdeşliği elde ederiz:

$$\int_D \left(i\frac{\partial \psi^{N_m}(x,t)}{\partial t} - a_0 \Delta \psi^{N_m}(x,t) + i a_1(x) \nabla \psi^{N_m}(x,t) - a(x)\psi^{N_m}(x,t) + v_0(x,t)\psi^{N_m}(x,t) + \right.$$

$$\left. + i v_1(x)\psi^{N_m}(x,t) - f(x,t) \right) \overline{\eta}^{N'}(x,t)\,dx = 0,\ \forall t \in [0,T]. \qquad (3.2.50)$$

Burada $\overline{\eta}^{N'}(x,t) = \sum_{k=1}^{N'} \overline{\eta}_k(t) u_k(x), \quad N \le N_m$ ' dir.

$\{\psi^{N_m}(x,t)\}$ dizisinin $\psi(x,t)$ fonksiyonuna

$$\left\| \psi^{N_m}(.,t) - \psi(.,t) \right\|_{L_2(D)} \to 0 \ \forall t \in [0,T]. \qquad (3.2.51)$$

yakınsama özelliklerini dikkate alıp $m \to \infty$ için sonuncu integral özdeşliğinde limite geçersek aşağıdaki integral özdeşliğini elde ederiz:

$$\int_D \left(i\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} - a_0 \Delta \psi(x,t) + i a_1 \nabla \psi(x,t) - a(x)\psi(x,t) + v_0(x)\psi(x,t) + \right.$$

$$\left. + i v_1(x)\psi(x,t) - f(x,t) \right) \overline{\eta}^{N'}(x,t)\,dx = 0 \quad \forall t \in [0,T]. \qquad (3.2.52)$$

Burada $\forall \overline{\eta}(x,t) \in L_2(\Omega)$'dır.

$\overline{\eta}^{N'}(x,t) = \sum_{k=1}^{N'} \overline{\eta}_k(t) u_k(x), \ N \le N_m$ biçiminde olan test fonksiyonu $C^0([0,T], L_2(D))$, uzayında yoğun olduğundan (3.2.52) özdeşliğinden $\psi(x,t)$ limit fonksiyonun (3.2.1) denklemini hemen hemen $x \in D$ ve herhangi $t \in [0,T]$ için sağladığını elde ederiz. Başlangıç sınır değer şartlarının sağlanması $\psi(x,t)$ limit fonksiyonu için $t = 0$

olduğunda $\left.\dfrac{\partial \psi^{N_m}}{\partial \nu}\right|_S$ dizilerinin $\left.\dfrac{\partial \psi}{\partial \nu}\right|_S$ ye $L_2(S)$'de zayıf yakınsamasından çıkar. Böylelikle $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.2.1) - (3.2.2) başlangıç sınır değer probleminin çözümü olduğu ve B_1 uzayının elemanı olduğu ispatlandı. Bu çözüm için (3.1.1) kestiriminin geçerli olduğu (3.1.13) kestiriminden aşağı limite geçerek elde edebiliriz.

Şimdi teoremin ispatını devam ettirerek (3.2.1) - (3.2.2) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün bir tek olduğunu gösterelim. Farz edelim ki $\psi(x,t)$ ve $\Phi(x,t)$ fonksiyonları (3.2.1) - (3.2.2) problemini herhangi iki çözümü olsun. $w(x,t)=\psi(x,t)-\Phi(x,t)$'dir. Bu takdirde (3.2.1) - (3.2.2) şartlarından $w=w(x,t)$ fonksiyonunun aşağıdaki sınır değer probleminin çözümü olduğu çıkar.

$$i\frac{\partial w}{\partial t}+a_0\Delta w+a_1(x)\nabla w-a(x)+v_0(x)w+iv_1(x)w=0,(x,t)\in\Omega \tag{3.2.53}$$

$$w(x,0)=0\,,x\in D\,,\left.\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right|_S=0 \tag{3.2.54}$$

Bu sınır değer probleminin çözümü için kestirim elde etmeye çalışalım. Bu amaçla (3.2.53) denkleminin her iki tarafını $\overline{w}(x,t)$ ile çarpıp Ω_t üzerinden integralleyelim. Sınır değer şartlarını ve kısmi integrasyon formülünü kullanırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz: $\forall t\in[0,T]$ için

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial w}{\partial t}\overline{w}-a_0|\nabla w|^2+ia_1(x)\nabla w\overline{w}-a(x)|w|^2+v_0(x)|w|^2+iv_1(x)|w|^2\right)dxdt=0\,.$$

Son eşitlikten kendisinin kompleks eşleniğini çıkartalım. Bu takdirde (3.2.53) sınır değer şartlarını yeniden kullanırsak kolaylıkla aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t} i\left(\frac{\partial w}{\partial \tau}\overline{w}+\frac{\partial \overline{w}}{\partial \tau}\right)dxd\tau + 2ia\int_{\Omega_t} v_1(x)|w|^2\, dxd\tau = -i\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial a_{1,j}(x)}{\partial x_j}|w|^2\, dxd\tau \;\; \forall t\in[0,T].$$

Buradan da (3.2.54) yer alan başlangıç sınır değer şartını kullanarak aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\|w(.,t)\|^2_{L_2(D)} \le 2\mu_2\int_{\Omega_t}|w|^2 dxd\tau + 2b_1 \;\; \forall t\in[0,T].$$

Sonuncu eşitsizliğe Gronwall lemmasını uygularsak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\|w(.,t)\|^2_{L_2(D)} = 0 \quad \forall t\in[0,T].$$

Buradan

$$w(x,t)=0, \forall\, x\in \overset{0}{D} \quad \forall t\in[0,T]$$

bağıntısı elde ediyoruz ki bu da (3.2.1) – (3.2.2) başlangıç sınır değer probleminin bir tek çözüme sahip olduğunu elde ederiz. Teorem (3.2.2) ispatlandı.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada incelenen başlangıç sınır değer problemleri formülize ve dizaynı açısından önceki çalışmalardan önemli ölçüde farklılaşmaktadır. Tezde incelediğimiz problemler üzerine yapılan çalışmalar az sayıda incelendiğinden gerek teorik, gerekse pratik açıdan önem taşımaktadır.

Bu tezde özel gradient terim üç boyutlu Schröedinger denklemi için 1. ve 2. başlangıç sınır değer problemlerine Galerkin methodunu uygulayıp çözümün varlığını ve tekliğini ispatladık. Tezde elde edilen araştırma bulguları ve sonuçları güncel olup önceki çalışmalardan ayrılıp farklılık göstermektedir ve diğer çalışmalarla örtüşmez.

5.KAYNAKLAR

[1] Akbaba, D.G., (2011), Sanal katsayılı gradiyent içeren Schrödinger denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

[2] Aksoy, Y. N., Yıldız, B., Yetişkin, H., (2012), Variational problem with complex coefficient of a nonlinear Schrödinger equation. Proceedings Mathjematical Sciences, 122(3), 469-484.

[3] Aksoy, Y. N., Kocak, Y., Ozeroglu, Y., (2016), On the solvability of initial boundary value problems for nonlinear time-depended Schrödinger equations. Quaestiones Mathematicae, 39:6, 751-771, DOI: 10.2989/16073606.2016.1167135.

[4] Baudoin, L., Kavian, O., Puel, J. P., (2005), Regularityfor a Schrödinger equation with singular potentials and applicationto bilinearoptimal control. J. Differantial Equations. 216,188-222.

[5] İskenderov, A. D., Yagubov, G. Y., (1988), A variational method or solving of he inverse problem of determing the quantum –mechanical potential. Dokl. AN USSR, vol. 303, No. 5, 1044-1048. (in Russian).

[6] İskenderov, A. D., Yagubov, G. Y., (1989), Optimal control of nonlinear the quantum-mechanical systems, Automatic and telemechanics, 12, 27-38.

[7] İskenderov, A. D., Yagubov, G. Y., (2007), Durgun ve lineer olmayan çok boyutlu Schrödinger denkleminde sınırlı olmayan potonsiyelle optimal kontrol. Procedings Lenkara State Universty. Series Natural Sciences. Lenkaran, 3-56

[8] İskenderov, A. D., Yagubov, G. Y., Musayeva, M. A., (2012), Kuantum Potansiyellerinin identifikasyonu. Çaşıoğlu, Baku, 552 (Rusça).

[9] Karakoç, S., (2018), Karesel integrallenebilir kompleks potansiyelli lineer olmayan Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemi. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

[10] Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V., (1989), Fonksiyonlar Teoresinin ve Fonksiyonel Analizin Elemanları. Nauka, Moskava, 624 (Rusça).

[11] Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V. A., Uraltseva, N. N., (1968), Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Amer. Math. Soc. (english trans) Providence, R. I. Nauka, 765.

[12] Ladyzenskaja, O. A., (1976), Parabolik Tip Lineer ve Kuazilineer Denklemler. Nauka, Moskova, (Rusça).

[13] Ladyzenskaja, O. A., (1973), Matematiksel Fiziğin Sınır Değer Problmleri. Moskova, Nauka (Rusça).

[14] Landau, L.D., Lifşhitz E.M., Kuantum Mekaniği Cilt 3-m- 1963-s. 702, (Rusça).

[15] Lions, J. L., Magenes, E., (1972), Non-homogeneous baundary value problems and applications. Vol. 2. Berlin,307.

[16] Mahmudov, N. M., (2007), Solvability of baundary value problems for a Schrödinger equation with pure imaginary coefficent in the nonlinear part of this equation. Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 27(35), 25-36.

[17] Pontryagin, L. S., (1982), Adi diferansiyel denklemler. Moskova, Nauka, 332 (Rusça).

[18] Toyoğlu, F., (2012), İki boyutlu Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri ve onların nümerik çözümü. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

[19] Vasilyev, F. P., (1980), Ekstremal Problemlerin Nümerik Çözüm Metodları,

Moskova, Nauka, 588 p.

[20] Yagubov, G. Y., (1994), Kuazi Linner Schrödinger Denkleminin Katsayı İle Optimal Kontrol. Bilimler Doktoru Tezi, Kiev Devlet Üniversitesi, Kiev, 318 (Rusça)

[21] Yagubov, G. Y., Toyoğlu, F., Subaşı, M., (2012), An optimal control problem for two-dimensional Schöredinger equation. Applied Mathematics and Computation, vol:2018, iss.11, 6177-6187.

[22] Yagub, G., Ibrahimov, N. S., Zengin, M., (2015) Solvability of the initial-baundary value problems fort the nonlinear Schrödinger equation with a special gradient terms, Abstracts of the XXV International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2015), May 11-15, Skhidnytsia, Ukraine, 53-54.

[23] Yetişkin, H., (2005), Kompleks Potansiyelli Schrödinger denklemi İçin Optimal Kontrol Problemi Ve Onun Sonlu Fark Yaklaşımı. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

[24] Zengin, M., (2017) Yüklü parçacıkların lineer ve homojen olmayan ortamda hareketinin optimal kontrolü. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Onur ARAS

Doğum Yeri: Kars

Doğum Tarihi: 30.06.1988

Yabancı Dili: İngilizce

İletişim (e-posta): pltonarss@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Esenyurt Lisesi (2002-2006)

Lisans : Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi (2010-2014)

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü (2015-2019)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Özel Yıldız Anadolu Lisesi (2016-…)