T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOTANJANT DEMETTE AFİN KONNEKSİYONUN G-LİFTİ

Esen KEMER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Rabia ÇAKAN AKPINAR

NİSAN-2019

KARS

T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOTANJANT DEMETTE AFİN KONNEKSİYONUN G-LİFTİ

Esen KEMER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Rabia ÇAKAN AKPINAR

NİSAN-2019

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Esen KEMER'in Dr. Öğr. Üyesi Rabia ÇAKAN AKPINAR danışmanlığında Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı "Kotanjant Demette Afin Konneksiyonun g-lifti" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

19/ 04/ 2019

		Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	:	Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK	
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Çağrı KARAMAN	
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Rabia ÇAKAN AKPINAR	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ

Enstitü Müdür V.

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Esen KEMER

Tarih

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır. Tez konusunu veren, engin tecrübesiyle bana yol gösteren, çalışmalarımda etkin katkısı bulunan, vaktini ve bilgisini benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Rabia ÇAKAN AKPINAR'a şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten dolayı aileme teşekkür ederim.

Kars-2019 Esen KEMER

İÇİNDEKİLER

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

KOTANJANT DEMETTE AFİN KONNEKSİYONUN G-LİFTİ

Esen KEMER

Kafkas Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Rabia ÇAKAN AKPINAR

Sunulan bu tezde Riemann manifoldu üzerindeki Tanjant ve Kotanjant demetler arasında oluşturulan müzikal izomorfizmden bahsedildi. Müzikal izomorfizm aracılığla kotanjant demette oluşturulan $g-lift$ tanımlandı. Müzikal izomorfizm aracılığıyla kotanjant demette $g-lift$ ${}^{G}\overset{*}{\nabla}$ afin konneksiyonu ve $g-lift$ ${}^{G}\overset{*}{R}$ eğrilik tensörü elde edildi. İlk olarak eğer ∇ bir Riemann konneksiyonu ise $g-lift$ ${}^{G}\overset{*}{\nabla}$ afin konneksiyonu ve tam lift ${}^{C}\overset{*}{\nabla}$ burulmasız afin konneksiyonun çakıştığı ispatlandı. İkinci olarak eğer ∇ bir Riemann konneksiyonu ise $g-lift$ ${}^{G}\overset{*}{R}$ eğrilik tensörü ve tam lift ${}^{C}\overset{*}{R}$ eğrilik tensörünün çakıştığı ispatlandı.

Anahtar Kelimeler: Riemann Manifold, Müzikal İzomorfizm, Tam Lift, $g-lift$, Afin Konneksiyon, Eğrilik Tensörü.

2019, 70 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

THE G-LIFT OF AFFINE CONNECTION IN THE COTANGENT BUNDLE

Esen KEMER

Kafkas University

Graduate School of Applied and Natural Sciences

Department of Mathemetics

Supervisor: Assist. Prof . Dr. Rabia ÇAKAN AKPINAR

In this thesis, it is mentioned that the musical isomorphisms are constituted between the tangent and cotangent bundles on the Riemannian manifold. The $g-lift$ is defined in the cotangent bundle via the musical isomorphism. The $g-lift$ ${}^{G}\overset{*}{\nabla}$ affine connection and the $g-lift$ ${}^{G}\overset{*}{R}$ curvature tensor are obtaiened in the cotangent bundle via the musical isomorphism. Firstly, it is proved that the $g-lift$ ${}^{G}\overset{*}{\nabla}$ affine connection coincide with the complete lift ${}^{C}\overset{*}{\nabla}$ torsion free affine connection if ∇ is a Riemannian connection. Secondly, it is proved that the $g-lift$ ${}^{G}\overset{*}{R}$ curvature tensor coincide with the complete lift ${}^{C}\overset{*}{R}$ curvature tensor if ∇ is a Riemannian connection.

Key Words: Riemannian Manifold, Musical Isomorphism, Complete Lift, $g-lift$, Affine Connection, Curvature Tensor.

2019, 70 pages

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$T(M_n)$	:	M_n Manifoldunun Tanjant Demeti
$T_x(M_n)$	:	$x \in M_n$ Noktasındaki Tanjant Uzay
$T^*(M_n)$	:	M_n Manifoldunun Kotanjant Demeti
$\Im_q^p(M)$	:	M Manifoldu Üzerinde (p,q) Tipli Tensör Alanının Kümesi
∇_X	:	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
∇	:	Afin Konneksiyon
$R_{ijk}{}^h$	:	Eğrilik Tensörü
V	:	Dikey Lift
C	:	Tam Lift
π	:	Tabii İzdüşüm
${}^R\nabla$	:	Riemann Genişlemesi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Diferansiyel geometri, sonsuz küçükler analizin yöntemlerini kullanarak öncelikle eğriler ve yüzeyler olmak üzere, geometrik formları araştıran matemetiğin bir alt dalıdır. Herşeyden önce eğrilerin ve yüzeylerin keyfi küçük parçalarının özeliklerini incelemek diferansiyel geometrinin ayırt edici özelliğidir.

Diferansiyel geometrinin kökeni 18. yüzyılın ilk yarısına dayanmaktadır ve Euler ile Monge'un adlarıyla ilişkilidir. Yüzeylerin teorisi üzerine ilk kapsamlı çalışma 1807 yılında Monge'in Analizin Geometriye Uygulamaları çalışmasında yapılmıştır. 1827 yılında Gauss yüzey teorisin temellerini oluşturan ''General Investigations Concerning Curved Surfaces'' adlı çalışmayı modern haliyle yayınlamıştır. O zamandan beri, diferansiyel geometri yanlızca bir analiz uygulaması olmaktan çıkmış ve matematikte bağımsız bir rol üstlenmiştir.

Öklid dışı geometrinin Lobachevsky tarafından keşfi, diferansiyel geometride dahil olmak üzere tüm geometrilerin gelişiminde büyük rol oynamıştır. Böylece 1854 yılında Riemann, "The Hypotheses which lie at the Foundations of Geometry" (Geometrinin Temelinde Yatan Hipotezler) çalışması üzerine olan dersleriyle Riemannian geometrisinin temellerini kurmuştur (Pogorelov, 1959).

Diferansiyel geometrinin tanjant demet çalışmaları 1960 yılında Davies (Davies, 1966; Davies, 1969), Yano ve Davies (Yano ve Davies,1963; Yano ve Davies,1971), Dombrowski (Dombrowski, 1962), Ledger (Ledger ve Yano, 1965; Ledger ve Yano 1967), Tachibana ve Okumura (Tachibana ve Okumura, 1962), Sasaki (Sasaki, 1958), ve Yano (Yano, 1967a) tarafından başlatılmıştır.

Kobayashi ve Yano tanjant demette tensor alanlarının ve konneksiyonların dikey ve tam lift teorilerini geliştirmiştir (Yano ve Kobayashi,1966).

Kotanjant demette tensor alanlarının ve konneksiyonlarının dikey, tam ve yatay teorisi Patterson ve Yano tarafından geliştirilmiştir (Yano ve Patterson, 1967; Yano, 1967b).

Riemannian Manifoldu üzerindeki tanjant ve kotanjant demetler arasında müzikal izomorfizm sağlanır. Müzikal izomorfizm teriminin tam kökeni bilinmemektedir. Ancak Marcel Berger ‘in 1971 yılında yapmış olduğu ‘‘Lespectred’une Variate Riemannienne’’ çalışmasında ilk defa müzikal izomorfizm terimi görülmektedir (Berger ve ark., 1971). g metrik tensöre göre tanımlanan müzikal izomorfizm Poor’un “Differential Geometric Structures” adlı kitabında bahsedilmektedir (Poor, 1981).

Boucetta ve Saassai yaptığı çalışmada müzikal izomofizm aracılığıyla tanjant demetteki Poisson tensörünün kotanjant demete geriçekimiyle elde edilen Poisson tensörler üzerinde araştırmaları olmuştur. Çalışmalarında Kotanjant demetteki Poisson tensörünün kotanjant demetteki yapılarla uyumluluğu ve M manifoldu üzerinde Poisson tensörünün g nin Levi-Civita konneksiyonuna göre paralelliği araştırılmıştır (Boucetta ve Saassai, 2011).

Cakan, Akbulut ve Salimov 2016 yılında yaptığı çalışmada tanjant demetteki tam liftleri kullanarak müzikal izomorfizm aracılığıyla kotanjant demetteki tensör alanlarının tam liftlerini oluşturmuştur (Cakan ve ark., 2016).

Salimov ve Cakan 2017 yılında tensör alanlarının $g-lift$ ini tanımlamış ve kotanjant demette bazı tensör alanlarının $g-lift$ leri üzerine araştırmalar yapmıştır (Salimov ve Cakan, 2017).

Cakan 2017 yılında kotanjant demette $gh-lift$ i tanımlamış ve müzikal izomorfizm aracılığı ile tanjant demetten kotanjant demete bazı tensör alanlarının yatay liftlerinin taşınmasıyla elde edilen tensör alanlarının $gh-lift$ leri üzerine çalışma yapmıştır (Cakan, 2018).

Sunulan bu tezde kotanjant demette afin konneksiyonun $g-lift$ i araştırılmıştır. Bunun akabinde kotanjant demette eğrilik tensörünün $g-lift$ i incelenmiştir. Bu sebeple çalışmanın anlaşılabilmesi için birinci bölümde ilgili özelikler ve tanımlar kuramsal temeller adı altında verilmiştir.

İkinci bölümde ise tanjant demet, tanjant demette fonksiyonların ve vektör alanlarının dikey lifti, tanjant temette vektör alanlarının, afin konneksiyonların ve eğrilik tensörünün tam lifti, kotanjant demet, kotanjant demette fonksiyonların ve $(0,1)$ tipli tensör alanlarının dikey lifti, kotanjant demette temel 1-form, kotanjant demette Riemannian genişlemesi, kotanjant demette vektör alanlarının, burulmasız afin konneksiyonun ve eğrilik tensörünün tam lifti hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise $g-lift$ ${}^{G}\overset{*}{\nabla}$ konneksiyonun katsayıları müzikal izomorfizm aracılığıyla elde edilerek kotanjant demette tam lift ${}^{C}\overset{*}{\nabla}$ konneksiyonun katsayılarıyla kıyaslanmıştır. Bunun ardından müzikal izomorfizm aracılıyla $g-lift$ ${}^{G}\overset{*}{R}$ eğrilik tensörünün bileşenleri hesaplanmış ve kotanjant demetteki tam lift ${}^{C}\overset{*}{R}$ eğrilik tensörünün bileşenleri ile kıyaslanmıştır.

1.2. Kuramsal Temeller

1.2.1. Diferansiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 1.2.1.1: M Hausdorff uzayı olsun. Herhangi bir $U \subset M$ açık kümesinden $\varphi(U) \subset R^n$ kümesine tanımlanan

$$\varphi : U \to \varphi(U) \subset R^n$$

homeomorfizmine M 'de $n-$ boyutlu harita veya koordinat sistemi denir. U açık kümesine ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi adı verilir ve (U, φ) şeklinde ifade edilir. Herhangi $x \in U$ için,

$$\varphi(x) = (x^1, x^2, ..., x^m) \in R^n$$

olur. Buradaki $x^1, ..., x^n$ reel sayıları x noktasının koordinatlarıdır (Salimov ve Mağden, 2008).

Tanım 1.2.1.2: M Hausdorff uzayı olsun. $n-$ boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha, \quad \left(A - indisler\ kümesi \right)$$

ise M ye $n-$ boyutlu topolojik manifold veya sadece $n-$ boyutlu manifold denir (Salimov ve Mağden, 2008).

Tanım 1.2.1.3: M, $n-$ boyutlu manifold olsun. Eğer M üzerindeki haritaların bir ailesi olan $\mathrm{A}=\{(U,\varphi),(V,\phi),...\}$ kümesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa A koleksiyonuna M üzerinde $r.$ mertebeden diferansiyellenebilir yapı (veya atlas) adı verilir (Şahin, 2012) :

(1) $\{U,V,W,...\}$ açık kümelerinin kolleksiyonu M manifoldunun bir açık örtüsüdür.

(2) A daki herhangi iki harita $r.$ mertebeden uyumludur.

(3) A maksimaldir, yani eğer bir $(\bar{\varphi},\bar{U})$ haritası A daki bütün koordinat atlasları ile uyumlu ise bu durumda $(\bar{\varphi},\bar{U})\in A$ dır.

Tanım 1.2.1.4: Eğer bir M manifoldu üzerinde $r.$ mertebeden diferansiyellebilir bir atlas varsa M manifolduna $r.$ mertebeden diferansiyellenebilir manifold denir (Şahin, 2012).

Tanım 1.2.1.5: Diferansiyellenebilir yapının her bir atlasına M manifoldunun uyumlu haritası adı verilir. Eğer atlas her mertebeden diferansiyellenebiliyorsa M manifolduna $C^{\infty}-$ manifold (veya kısaca diferansiyellenebilir manifold) adı verilir (Şahin, 2012).

1.2.2. Diferansiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin Konneksiyon

Tanım 1.2.2.1: M_n, $n-$boyutlu C^∞ sınıfından bir manifold olsun. $T(M_n)$ cebirinin

$$D = \nabla_X : T(M_n) \to T(M_n)\,, \qquad X \in \Im_0^1(M_n)$$

diferansiyelleme işlemi $\forall\, f, g \in C^\infty(M_n, \mathbb{R}),\ \forall\, X, Y \in \Im_0^1(M_n),\ \forall t \in T(M_n)$ için

i) $\nabla_{fX+gY} t = f\nabla_x t + g\nabla_Y t$

ii) $\nabla_X(ft) = X\left[f\right]t + f\nabla_X t$

şartları sağlanıyorsa ∇_X 'e X vektör alanı yönünde kovaryant türev adı verilir.

$\nabla : \Im_0^1(M_n) \times \Im_0^1(M_n) \to \Im_0^1(M_n)$ şeklinde tanımlanan dönüşüme afin konneksiyon, (M, ∇) çiftine afin konneksiyonlu uzay adı verilir. (Salimov ve Mağden, 2008).

$X, Y \in \Im_0^1(M_n),\ \omega \in \Im_1^0(M_n)$ olmak üzere $\nabla_X Y \in \Im_0^1(M_n)$ olur. $(\nabla Y)(X, \omega) = (\nabla_X Y)(\omega)$ olup $\nabla Y \in \Im_1^1(M_n)$ dir.

Eğer $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ ise $\nabla_X \omega \in \Im_1^0(M_n)$ olur. $(\nabla\omega)(X, Y) = (\nabla_X \omega)(Y)$ olup $\nabla\omega \in \Im_2^0(M_n)$ dir.

Daha da genellemek gerekirse $t \in \Im_s^r(M_n)$ ise $\nabla_X t \in \Im_s^r(M_n)$ dir. $(\nabla t)\left(X, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{r}{\xi}, X_{1,...,} X_s \right) = (\nabla_X t)\left(\overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{r}{\xi}, X_1, ..., X_s \right)$ olup $\nabla t \in \Im_{s+1}^r(M_n)$ dir.

Buradan görülür ki kovaryant türev, uygulanan tensörlerin kovaryantlık mertebesini bir artırır.

<u>Tanım 1.2.2.2:</u> M_n manifoldu üzerinde U koordinat komşuluğundaki x^i lokal koordinatları ve bu komşuluktaki $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ doğal vektör alanları göz önüne alınsın. $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$ olarak tanımlanan n^3 sayıda U komşuluğunda tayin edilmiş C^∞ sınıfındaki Γ_{ij}^k fonksiyonlarına ∇ konneksiyonunun katsayıları adı verilir.

U koordinat komşuluğunda lokal koordinatları $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ olan yeni bir koordinat sistemi tanımlansın. Bu takdirde

$$\nabla_{i'} \partial_{j'} = \Gamma_{i'j'}^{k'} \partial_{k'} \tag{1.1}$$

olur. $\partial_{i'} = \dfrac{\partial}{\partial x^{i'}}$ olduğundan (1.1) eşitliği ve ∇ nın $\nabla_{fX} t = f \nabla_X t$ özelliğinden

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} \partial_{k'} = \nabla_{\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \partial_i} \partial_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \nabla_{\partial_i} \partial_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \nabla_i \partial_{j'} \tag{1.2}$$

bulunur. ∇ nın $\nabla_X f = Xf$ özelliğine göre

$$
\begin{aligned}
\nabla_i \partial_{j'} &= \nabla_i \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \partial_j\right) = \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \partial_j + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \partial_k \\
&= \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \partial_{k'} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \partial_{k'} \qquad (1.3) \\
&= \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\right) \partial_{k'}
\end{aligned}
$$

eşitliği yazılır. (1.2) ve (1.3) eşitliklerinden $\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)$ ve $\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)$ matrislerinin birbirinin tersi olduğu ve $\partial_{k'}$ vektörlerinin çatı olduğu dikkate alınırsa,

$$
\Gamma_{i'j'}^{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}
$$

eşitliği yazılır. Elde edilen bu eşitliğe yeni koordinat sistemine göre konneksiyon dönüşüm kuralı adı verilir.

1.2.3. Tensör Alanları

Tanım 1.2.3.1: V boştan farklı bir küme ve F de bir cisim olsun. V üzerinde $+ : V \times V \to V, +(x, y) = x + y$ ve $\cdot : F \times V \to V$, $\cdot(\lambda, x) = \lambda x$ işlemlerini tanımlansın. Eğer her $x, y, z \in V$ ve $\lambda, \mu \in F$ için,

(i) $(x+y)+z=x+(y+z)$,

(ii) $x+y=y+x$,

(iii) $x+\circ=x$ olacak şekilde V kümesinin sıfır elemanı diye adlandırılan bir $\circ\in V$ elemanı vardır,

(iv) Her bir $x\in V$ elemanı için x elemanının $+$ işlemine göre tersi diye adlandırılan ve $x+(-x)=\circ$ eşitliğini sağlayan bir $-x\in V$ elemanı vardır,

(v) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$,

(vi) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$,

(vii) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$,

(viii) $\bullet x=x$ olacak şekilde $\bullet\in F$ vardır,

şartları sağlanıyorsa V kümesine F cismi üzerinde vektör uzayı adı verilir (Şahin, 2012).

<u>Tanım 1.2.3.2:</u> V ve W, aynı F cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $T:V\to W$ bir

dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa T dönüşümüne bir lineer dönüşüm denir (Şahin, 2012):

(i) Herhangi $\upsilon, \omega \in V$ için $T(\upsilon + \omega) = T(\upsilon) + T(\omega)$.

(ii) Herhangi $\lambda \in F$ ve $\upsilon \in V$ için $T(\lambda\upsilon) = \lambda T(\upsilon)$.

Tanım 1.2.3.3: V bir F cismi üzerinde vektör uzayı olsun. Bir $f : V \to F$ dönüşümü her $u, \upsilon \in V$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in F$ için

$$f(\lambda_1 u + \lambda_2 \upsilon) = \lambda_1 f(u) + \lambda_2 f(\upsilon)$$

ise f dönüşümüne lineer fonksiyonel adı verilir. Böylece bir lineer fonksiyonel V vektör uzayının elemanlarına skalerler karşılık getiren bir lineer dönüşümdür. Lineer fonksiyonellerin kümesi $(f_1 + f_2)(\upsilon) = f_1(\upsilon) + f_2(\upsilon)$ ve $(\lambda_1 f)(\upsilon) = \lambda_1 f(\upsilon)$ işlemleri ile birlikte F cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına V uzayının dual uzayı denir ve V^* ile gösterilir. V^* dual uzayın elemanlarına dual vektör (kovektör) adı verilir (Şahin, 2012).

Tanım 1.2.3.4: V bir vektör uzayı ve V^* da V vektör uzayının dual uzayı olsun. Bu durumda $\phi : \overbrace{V \times V \ldots \times V}^{m \text{ tane}} \times \overbrace{V^* \times V^* \ldots \times V^*}^{n \text{ tane}} \to \mathbb{R}$ ile tanımlanan ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n \in V$ ve $\upsilon_1^*, \upsilon_2^*, \ldots, \upsilon_m^* \in V^*$ olmak üzere

$\phi(\upsilon_1,...,\lambda_1\upsilon_k+\lambda_2\upsilon_k',...)=\lambda_1\phi(\upsilon_1,..\upsilon_k,...)+\lambda_2\phi(\upsilon_1,...,\upsilon_k',...)$ şartını sağlayan ϕ dönüşümüne m. mertebeden kovaryant ve n. mertebeden kontravaryant tensör adı verilir (Şahin, 2012).

Tanım 1.2.3.5: V bir vektör uzayı ve V^*, V uzayının dual vektör uzayı olsun. $T_s^r(V), V$ üzerindeki r. metebeden kovaryant ve s. mertebeden kontravaryant tensörlerin uzayı olmak üzere

$$C_j^i : T_s^r \to T_{s-1}^{r-1}$$
$$A \to (C_j^i A)(X_1,...,X_{r-1},\omega^1,...,\omega^{s-1}) = C\left\{A(.,X_1...,X_{r-1},.,\omega^1,...,\omega^{s-1})\right\}$$

ve

$$C_j^i A = \sum_m A(X_m, X_1,...,X_{r-1},\omega^m,\omega^1,...,\omega^{s-1})$$

ile tanımlanan operatöre daraltma operatörü denir. Burada $X_m, X_1,...,X_{r-1}$ ve $\omega^m,\omega^1,...,\omega^{s-1}$, V üzerindeki sırasıyla baz vektörler ve dual baz vektörleridir (Şahin, 2012).

Tanım 1.2.3.6: $S_2(B_n)$, $\Im_2^0(V_n)$ uzayının bütün simetrik tensörlerinin alt uzayı olsun. Herhangi bir $g \in S_2(V_n)$ tensörünü için ve $\vec{x}=0$ şartı sağlansın. O halde

$$g(\vec{x},\vec{y})=0,\ \ \forall\vec{y}\in B_n$$

yazılır. Burada g tensörüne regüler tensör adı verilir (Salimov ve Mağden, 2008).

Tanım 1.2.3.7: $g(\vec{x},\vec{y})=0,\ \forall\vec{y}\in V_n$ eşitliğini koordinatlarla yazılacak olursa

$$g_{ij}x^i y^j=0$$

biçiminde olur. Her y^j için bu eşitlik sağlanacağından

$$g_{ij}x^i=0, \qquad j=1,...,n$$

bulunur. Yazılan bu denklem sisteminin $x^i=0$ çözümüne sahip olması için

$$Det(g_{ij})\neq 0$$

olmalıdır. Burada (g_{ij}), g tensörüne karşılık gelen matristir. $g\in S_2(V_n)$ tensörü regüler tensör olduğu takdirde g tensörüne V_n uzayında esas tensör denir.

Esas tensöre karşılık gelen (g_{ij}) matrisinin tersi $(\tilde{g}^{ij})$ ile ifade edilsin. O halde

$$\tilde{g}^{kj} g_{ji} = \delta_i^k$$

yazılır. V_n ve V_n^* uzayları arasındaki

$$\xi_i = g_{ik} x^k, \;\; (\eta_i = g_{ik} y^k)$$

dönüşümü $\tilde{g}^{kj} g_{ji} = \delta_i^k$ eşitliğine göre yazılırsa

$$x^k = \tilde{g}^{ki} \xi_i, (y^k = \tilde{g}^{ki} \eta_i)$$

olur. $g \in S_2(V_n)$ tensörüne karşılık gelen invaryant bilineer formu

$$\omega = g(\vec{x}, \vec{y}) = g_{ij} x^i y^j$$

şeklinde ifade edilsin. Burada $\xi_i = g_{ik} x^k, \;\; (\eta_i = g_{ik} y^k)$ ve $x^k = \tilde{g}^{ki} \xi_i, (y^k = \tilde{g}^{ki} \eta_i)$ eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\omega = g(\vec{x}, \vec{y}) = g_{ij} x^i y^j = x^i \eta_i = \tilde{g}^{ij} \eta_i \xi_j$$

olur. Yani , g tensörü verildiğinde kovektör değişkenlerinin $\omega = \tilde{g}^{ij} \eta_i \xi_j$ invaryant bilineer formu bulunmuş olur. Burada $\tilde{g}^{ij}$, $(2,0)$ tipli tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre karşılık g tensörünün ters tensörü adı verilir. Dikkat edilirse

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\eta, \xi) &= \tilde{g}^{ij} \eta_i \xi_j = \eta_i x^i = g_{ik} y^k x^i, \\
\tilde{g}(\xi, \eta) &= \tilde{g}^{ji} \xi_j \eta_i = \xi_j y^j = g_{jk} x^k y^j \\
&= g_{ki} x^i y^k = g_{ki} y^k x^i = \tilde{g}(\eta, \xi)
\end{aligned}$$

olduğundan $\tilde{g}^{ij}$ tensörü simetriktir.

Böylelikle V_n uzayında g tensörü verildiğinde V_n den V_n^* a bir izomorfizm bulunur. Bu ifadeye göre vektör ve kovektör aynılaştırılır ve aynı $\vec{x}$ sembolü ile ifade edilir. Yani

$$x_k = g_{ki} x^j, \qquad x^i = \tilde{g}^{ik} x_k$$

yazılır. Bu şekilde yapılan işlemlere indisin indirilmesi $(x^i \to x_k)$ ve yükseltmesi $(x_k \to x^i)$ işlemleri adı verilir.

Tanım 1.2.3.8: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve T_p, her $p \in M_n$ noktasındaki tanjant vektör uzayı olsun. M_n manifoldunun her $p \in M_n$ noktasına T_p uzayından bir X_p vektörü karşılık getiren X vektör değerli fonksiyonuna vektör alanı denir (Salimov ve Mağden, 2008).

f , M_n manifoldunda bir dönüşüm ise o halde Xf 'de M_n manifoldunda

$$(Xf)(p) = X_p f$$

ile tanımlanan bir dönüşümdür. Herhangi bir $U \subset M_n$ koordinat komşuluğu alınsın. Bu komşuluktaki bir vektör alanı

$$X = \xi^i \partial_i$$

olarak yazılabilir. ξ^i ler komşuluktaki lokal koordinatlara bağlıdır. Yani

$$\xi^i = \xi^i(x^i, ..., x^n), \qquad i = 1, ..., n$$

yazılır.

Tanım 1.2.3.9: M_n , C^∞ sınıfından bir manifold ve $\Im_q^p(m)$, her $m \in M_n$ noktasındaki (p,q) tipli tensör uzayı olsun. M_n manifoldunun her $m \in M_n$ noktasına $\Im_q^p(m)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren T fonksiyonuna (p,q) tipli tensör alanı denir (Bishop and Goldberg, 1968).

Eğer $p=1$, $q=0$ olursa vektör alanı elde edilir. Yani, $(1,0)$ tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p=q=0$ olursa her $m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir. O halde $(0,0)$ tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Tanım 1.2.3.10: Herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü alınsın. Eğer bu tensör simetrik tensör ise T tensör alanına simetrik tensör alanı denir. Herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü alınsın. Eğer bu tensör antisimetrik tensör ise T tensör alanına antisimetrik tensör alanı denir (Bishop and Goldberg, 1968).

1.2.4. Eğrilik ve Burulma Tensörleri

M_n üzerinde $V=V\left(x^1,\cdots,x^n\right)$ skaler alanı göz önüne alınsın. Bu fonksiyonun

$$dV=\partial_i V dx^i$$

tam diferansiyelinin koordinat dönüşümünde invaryant kaldığı, yani korunduğu açıktır. Buna göre de dV ye koordinatları

$$V_i = \partial_i V$$

olan kovektör karşılık gelir.

<u>Tanım 1.2.4.1:</u> $V_i = \partial_i V$ olmak üzere V_i ye V skaler alanının gradient kovektörü ve ya 1- formu denir. V_i gradient kovektör ise

$$\partial_{[i} V_{j]} = 0 \tag{1.4}$$

olduğu açıktır. Burada $[. \ , \ .]$ sembolü antisimetrikleşme işlemini göstermektedir (Salimov ve Mağden, 2008).

(M_n, ∇) afin konneksiyonlu uzay olsun. V_i gradient kovektörünün kovaryant türevi alınırsa,

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma_{ji}^k V_k \tag{1.5}$$

bulunur. (1.5) eşitliğinde j ve i indislerine göre antisimetrikleşme işlemi uygulanırsa, (1.4) eşitliği göz önüne alınarak

$$\nabla_{[j}V_{i]} = -\Gamma^k_{[ji]}V_k = S^k_{ij}V_k \tag{1.6}$$

bulunur.

Tanım 1.2.4.2: $\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma^k_{ji}V_k$ eşitliğinin sol tarafı tensör, sağ tarafındaki V_k da $(0,1)$ tipli tensör olduğundan

$$S^k_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}) \tag{1.7}$$

ifadesindeki S^k_{ij} da $(1,2)$ tipli tensör olur. S^k_{ij} tensörüne ∇ konneksiyonunun burulma tensörü denir. $S^k_{ij} = -S^k_{ji}$ olduğu açıktır. Burulma tensörünün invaryant formdaki yazılışı ise

$$2S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \quad \forall X,Y \in \Im^1_0(M_n) \tag{1.8}$$

biçimindedir. (1.8) eşitliğinde $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ alınırsa (1.7) kolayca bulunur (Salimov ve Mağden, 2008).

Tanım 1.2.4.3:

$$R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \ \forall X,Y,Z \in \Im_0^1(M_n) \tag{1.9}$$

biçimde tanımlanan tensöre konneksiyonun eğrilik tensörü denir.

Bazen $R(X,Y,Z)$ gösterimi yerine $R(X,Y)Z$ de kullanılır.

$$R(X,Y,Z) = -R(Y,Z,X) \tag{1.10}$$

olduğu (1.9) eşitliğinden görülür. R nin X, Y ve Z değişkenlerine göre lineerlik şartı sağladığı kolayca gösterilebilir. Bu takdirde, $R(X,Y,Z) \in \Im_0^1(M_n)$ olduğundan dolayı $R \in \Im_3^1(M_n)$ olur. (1.9) eşitliğinde $X = \partial_i, Y = \partial_j$, $Z = \partial_k$ alınarak R nin doğal çatıdaki koordinatlarını

$$R_{ijk}{}^{s} = \partial_i \Gamma_{jk}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s + \Gamma_{im}^s \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^s \Gamma_{ik}^m \tag{1.11}$$

biçimde yazılır (Salimov ve Mağden, 2008).

$S=0$ olması durumunda ∇ lineer konneksiyonu torsiyonsuzdur (burulmasıdır) denir. Eğer $R=0$ ise M manifoldu flattır (düzlemsel) denir (Şahin, 2012).

1.2.5. Riemann Manifoldu

<u>Tanım 1.2.5.1:</u> M bir diferansiyellenebilir manifold ve manifold üzerindeki diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\Im_0^1(M)$ olsun. Bu durumda

$$g:\Im_0^1(M)\times\Im_0^1(M)\to C^\infty(M)$$

ile tanımlı g bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani $\forall X,Y\in\Im_0^1(M)$ için

(a) $g(X,Y)=g(Y,X)$,

(b) $g(X,X)\geq 0$ $\forall X$ için $g(X,X)=0 \Leftrightarrow X=0$

şartları sağlanıyorsa g bilineer formuna Riemann metriği veya metrik tensör adı verilir. Bu durumda (M,g) ikilisine Riemann manifoldu denir (Şahin, 2012).

Yukarıdaki tanımda (b) pozitif tanımlılık şartı yerine, ondan daha zayıf olan "$\forall Y$ için $g(X,Y)=0$ olması $X=0$ olmasını gerektirir" şartı ile değiştirilirse (M,g) ikilisine pseudo Riemann (yarı-Riemann) manifoldu denir. Bu şarta metriğin yozlaşmama (non-dejenere olma) şartı denir (Kühnel, 2005).

Tanım 1.2.5.2: Riemannian manifoldu üzerinde $\nabla_k g_{ij} = 0$ şartını sağlayan burulmasız lineer konneksiyona Riemannian konneksiyonu adı verilir.

$R_{ijks}{}^{\bullet} = R_{ijk}{}^{l} g_{ls}$ olmak üzere Riemannian konneksiyonun eğrilik tensörü,

$$R_{ij(ks)}^{\bullet} = 0$$
$$R_{(ij)ks}^{\bullet} = 0$$
$$R_{ijks}^{\bullet} = R_{ksij}^{\bullet}$$
$$R_{ijks}^{\bullet} + R_{jkis}^{\bullet} + R_{kijs}^{\bullet} = 0$$

şartlarını sağlar (Salimov ve Mağden, 2008)

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Tanjant Demet

M_n, C^∞ sınıfından n - boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant uzay $T_p(M_n)$ olsun.

$$T(M_n) = \bigcup_{p \in M_n} T_P(M_n) \tag{2.1}$$

ile tanımlanan $T(M_n)$ kümesine tanjant demet denir.

$T(M_n)$ nin herhangi bir $\tilde{p}$ noktası, yani $\tilde{p} \in T_p(M_n)$ için M_n manifold üzerindeki $T(M_n)$ tabii demet yapısını tanımlayan $\pi : T(M_n) \to M_n$ demet projeksiyonu $\tilde{p} \mapsto p$ ifadesine karşılık gelir. Yani $\pi(\tilde{p}) = p$ olur. $\pi^{-1}(p) = T(M_n)$ kümesine M_n temel uzayının p noktasındaki fibresi denir ve M ye taban uzayı denir. Doğal olarak bir çapraz kesit $f : M \to T(M)$ ortaya çıkar. $f(P)$, M nin herhangi bir P noktası için $T_p(M)$ nin sıfır vektörüdür. Bu f çapraz kesite ya da $f(M)$ görüntüsüne çapraz kesit adı verilir. Sıfır çapraz kesit $f(M)$, M taban uzayı ile tanımlanır. Bu nedenle M, $T(M)$ de diferansiyellenebilen bir alt manifoldudur. Varsayılsın ki M taban uzay $\{U; x^h\}$ bu koordinat komşulukları sistemi tarafından örtülsün. Burada $\{x^h\}$ komşulukta tanımlanan yerel lokal koordinatlardır. $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesi $U \times R^n$ direk çarpımına diferansiyellenebilir homeomorfdur. Burada R^n, R reel sayılar alanı üzerindeki $n-$ boyutlu vektor uzayıdır. $\tilde{p} \in T_p(M_n)$ $(p \in U)$ noktası (p, X) sıralı çifti ile gösterilir ve $X \in R^n$ vektörünün bileşenleri $T_p(M_n)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\}$ $(\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h})$ doğal bazına göre $\tilde{p}(y^h) = (x^{\bar{h}})$ $\bar{h} = n+1, \ldots, 2n$ kartezyen koordinatları ile verilir. U komşuluğunda $p = \pi(\tilde{p})$ nin koordinatları (x^h) $h = 1, \ldots, n$ ile gösterilirse, $\tilde{p}$ noktası uygun $(x^h, x^{\bar{h}}) \mapsto \tilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ ile verilir. Böylece, $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde $(x^h, x^{\bar{h}})$ lokal koordinatlar sistemi elde edilmiş olur. Burada $(x^h, x^{\bar{h}})$ ya (x^h) dan indirgenmiş $\pi^{-1}(U)$ da koordinatlar denir.

M_n manifoldunun $p = \pi(\tilde{p})$ noktasını ihtiva eden diğer bir koordinat komşuluğu $\{U', x^{h'}\}$ ise $\pi^{-1}(U')$ koordinat komşuluğu $\tilde{p}$ ihtiva eder ve $\pi^{-1}(U')$ ya göre $\tilde{p}$ nın indirgenmiş koordinatları $(x^{h'}, y^{h'})$ ile verilir .Burada

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}(x) \\ y^{h'} = \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} y^h \end{cases} \tag{2.2}$$

olarak verilir. $x^{h'}(x),$ p noktasındaki $x^1, x^2, \ldots, x^n$ değişkenlerinin C^∞ sınıfından olan diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}} = y^h,$ $x^{\bar{h}'} = y^{h'}$ ile yazılırsa (2.2) denklemi

$$x^{p'} = x^{p'}(x), \; p' = 1, \ldots, 2n \tag{2.3}$$

olarak yazılır. (2.2) denkleminin Jakobianı

$$\left(\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p}}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} & 0\\ \dfrac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^{h}\partial x^{i}}y^{i} & \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}}\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

matrisi ile verilir. (2.2) denklemin tersi ise

$$\begin{cases} x^{h}=x^{h}(x') \\ y^{h}=\dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}}y^{h'} \end{cases} \tag{2.5}$$

veya

$$x^{p}=x^{p}(x'), \qquad p=1,\dots,2n \tag{2.6}$$

olarak yazılır. (2.5) denkleminin Jakobianı

$$\left(\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{p'}}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} & 0\\ \dfrac{\partial^2 x^{h}}{\partial x^{h'}\partial x^{i'}}y^{i'} & \dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}}\end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Matrisleri ile verilir. (2.4) ve (2.7) denklemleri $T(M_n)$ tanjant demetin daima yönlendirilebilir olduğunu gösterir.

M_n manifoldu üzerindeki C^∞ sınıfında (r,s) tipli tüm tensor alanlarının kümesi $T_s^r(M_n)$ ve M_n deki tüm tensor alanlarının kümesini ise $T(M_n)=\sum_{r,s=0}^{\infty} T_s^r(M_n)$ ile gösterilir. $T(M_n)$ 'e tüm tensör alanlarının tensör cebiri denir.Aynı şekilde $T(M_n)$ tanjant demetindeki tensör alanlarının kümeleri ise sırasıyla $T_s^r(T(M_n))$ ve $T(T(M_n))$ olarak gösterilir (Yano ve Ishihara, 1973).

2.2. Tanjant Demette Fonksiyonların Dikey Lifti

Eğer f, M manifoldu üzerinde tanımlı bir fonksiyon ise ${}^V f$ fonksiyonu $\pi : T(M) \to M$ ve $f : M \to R$ nin birleşkesiyle elde edilen $T(M)$ tanjant demetteki bir fonksiyondur ve

$$ {}^V f = f \circ \pi \tag{2.8}$$

şeklinde yazılır. Eğer bir $\tilde{P} \in \pi^{-1}(U)$ noktası (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara sahipse o halde

$$ {}^V f(\tilde{P}) = {}^V f(x,y) = f \circ \pi(\tilde{P}) = f(P) = f(x) \tag{2.9}$$

ifadesi yazılır.

Bu nedenle ${}^{V}f(\tilde{P})$ değeri her bir fibre $T_p(M)$ boyunca sabittir ve $P=\pi(\tilde{P})\in M$ noktasında f nin $f(P)$ değerine eşittir. ${}^{V}f$ ifadesine f fonksiyonunun dikey lifti denir.

(2.9) eşitliğinden herhangi $f,g\in\Im_0^0(M)$ için

$$
{}^{V}(gf)={}^{V}(g)\,{}^{V}(f) \tag{2.10}
$$

ifadesi yazılır. (2.9) den görülür ki $f\mapsto {}^{V}f$ eşlemesi sabit katsayılara göre $\Im_0^0(M)$ den $\Im_0^0(T(M))$ ye bir lineer izomorfizm belirler.

Eğer ω, M manifoldu üzerinde bir 1-form ise, $\iota\omega$ ifadesi $T(M)$ tanjant demette bir fonksiyon olarak kabul edilir. Eğer ω, M manifoldunun bir U koordinat komşuluğunda $\omega=\omega_i dx^i$ lokal ifadesine sahipse, o halde $\iota\omega$, $\pi^{-1}(U)$ da indirgenmiş koordinatlara göre

$$
\iota\omega=\omega_i y^i \tag{2.11}
$$

lokal ifadesine sahip olur. Böylece f, M manifoldu üzerinde bir fonksiyon ise $\iota(df)$, $\pi^{-1}(U)$ deki indirgenmiş koordinatlara göre

$$\iota(df) = (\partial_i f) y^i \tag{2.12}$$

lokal ifadesine sahiptir.

2.3. Tanjant Demette Vektör Alanların Dikey Lifti

Tüm $f \in \Im_0^0(M)$ için $\tilde{X}^V f = 0$ eşitliğini sağlayacak şekilde $\tilde{X} \in \Im_0^1(T(M))$ olsun. Bu durumda $\tilde{X}$ e dikey vektör alanı denir. $\begin{pmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$, indirgenen koordinatlara göre $\tilde{X}$ in bileşenleri olsun. Sonra $\tilde{X}^V f = 0$ eşitlikten tüm $f \in \Im_0^0(M)$ için $\tilde{X}^h \partial_h f = 0$ elde edilir. Burada $\tilde{X}^h = 0$ olduğu görülür. O halde

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

yazılır.

$\tilde{X}$ nın dikey olması için gerek ve yeter şart $\pi^{-1}(U)$ daki $\tilde{X}$ nın bileşenlerinin (2.13) eşitliğini sağlamasıdır.

Varsayılsın ki $X \in \Im_0^1(M)$ olsun. Böylece X, M manifoldu üzerinde bir vektör alanı olur. ω , M manifoldu üzerinde keyfi bir 1- form olmak üzere $T(M)$ tanjant demetteki ${}^V X$ vektör alanı

$$ {}^V X(\iota\omega) = {}^V(\omega(X)) \tag{2.14} $$

olarak tanımlanır.

${}^V X$ ye X in $T(M)$ tanjant demet üzerindeki dikey lifti denir. Eğer X^h ve ω_i sırasıyla U daki lokal koordinatlara göre X in ve ω nın bileşenleri ve $\begin{pmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ da $\pi^{-1}(U)$ daki indirgenmiş koordinatlara göre ${}^V X$ nin bileşenleri ise (2.14) eşitliğinden

$$ \tilde{X}^j(\partial_j \omega_i)y^i + \tilde{X}^{\bar{j}}\omega_j = \omega_i X^i $$

eşitliği elde edilir. Burada herhangi bir ω_i için $\tilde{X}^h = 0$, $\tilde{X}^{\bar{h}} = X^h$ olur. Böylece $T(M)$ tanjant demette ${}^V X$ dikey lifti indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^V X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix} \tag{2.15} $$

bileşenine sahiptir. Dolayısıyla X in $T(M)$ tanjant demetteki ${}^{V}X$ dikey lifti $T(M)$ tanjant demette bir dikey vektör alanıdır.

Sonuç olarak, herhangi $X \in \Im_0^1(M)$ ve $f \in \Im_0^0(M)$ için ${}^{V}X$ nin tanımından,

$$ {}^{V}X\,{}^{V}f = 0 \tag{2.16} $$

elde edilir.

Herhangi $X, Y \in \Im_0^1(M)$ ve $f \in \Im_0^0(M)$ için (2.15) ve ya (2.16) yı kullanarak ve (2.9) u hesaba katarak kolayca aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$ {}^{V}(X+Y) = {}^{V}X + {}^{V}Y \tag{2.17} $$

$$ {}^{V}(fX) = {}^{V}f\,{}^{V}X $$

2.4. Tanjant Demette Vektör Alanlarının Tam Lifti

$X \in \Im_0^1(M)$ olsun. f, M manifoldunda keyfi bir fonksiyon olmak üzere $T(M)$ tanjant demette ${}^{C}X$ vektör alanı

$$ {}^{C}X\,{}^{C}f = {}^{C}(Xf) \tag{2.18} $$

eşitliğiyle tanımlanır. ${}^{C}X$ ye $T(M)$ tanjant demette X vektör alanının tam lifti denir.

Eğer $\pi^{-1}(U)$ da indirgenmiş koordinatlara göre X^{h} , U da X in bileşenleri ve $\begin{pmatrix} \tilde{X}^{h} \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$, ${}^{C}X$ 'nin bileşenleri ise herhangi bir $f \in \Im_{0}^{0}(M)$ için ${}^{C}X\,{}^{C}f = {}^{C}(Xf)$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{j}(\partial_{j}\partial_{i}f)y^{i} + \tilde{X}^{\bar{j}}\partial_{j}f &= \partial_{i}(X^{j}\partial_{j}f)y^{i} \\ &= X^{j}(\partial_{i}\partial_{j}f)y^{i} + (y^{i}\partial_{i}X^{j})\partial_{j}f \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\tilde{X}^{h} = X^{h}$, $\tilde{X}^{\bar{h}} = y^{i}\partial_{i}X^{h}$ dır.

Böylece M manifoldundaki X^{h} bileşenli X vektör alanının ${}^{C}X$ tam lifti $T(M)$ tanjant demetteki indirgenmiş koordinatlara göre,

$$ {}^{C}X = \begin{pmatrix} X^{h} \\ \partial X^{h} \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

bileşenlere sahiptir.

2.5. Tanjant Demette Afin Konneksiyonların ve Eğrilik Tensörünün Tam Lifti

Varsayılsın ki M, ∇ afin konneksiyonlu bir manifold olsun. Herhangi bir $X, Y \in \Im_0^1(M)$ için

$$ {}^{C}\nabla_{{}^{C}X}{}^{C}Y = {}^{C}(\nabla_X Y) \tag{2.20} $$

eşitliğini sağlayan $T(M)$ tanjant demette tek bir ${}^{C}\nabla$ afin konneksiyonu vardır. M manifoldunda (x^h) lokal koordinatlara göre ∇ afin konneksiyonunun bileşenleri Γ_{ji}^{h} ve $T(M)$ tanjant demette (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre ${}^{C}\nabla$ afin konneksiyonunun bileşenleri ${}^{C}\Gamma_{DB}^{A}$ olsun. M manifoldunda (x^h) lokal koordinatlara göre X ve Y, sırasıyla bileşenleri X^h ve Y^h olan keyfi vektör alanları olsun. $T(M)$ tanjant demette (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre ${}^{C}X$ ve ${}^{C}Y$ sırasıyla

$$ {}^{C}X : \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}, \qquad {}^{C}Y : \begin{pmatrix} Y^h \\ \partial Y^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{Y}^h \\ \tilde{Y}^{\bar{h}} \end{pmatrix} $$

bileşenlerine sahiptir. Bu bileşenler kullanılarak (2.20) eşitliği

$$ \begin{aligned} \tilde{X}^j(\partial_j \tilde{Y}^h + \tilde{\Gamma}_{ji}^{h}\tilde{Y}^i + \tilde{\Gamma}_{ji}^{h}\tilde{Y}^{\bar{i}}) + \tilde{X}^j(\partial_{\bar{j}} \tilde{Y}^h + \Gamma_{\bar{j}i}^{h}\tilde{Y}^i + \tilde{\Gamma}_{\bar{j}\,\bar{i}}^{h}\tilde{Y}^{\bar{i}}) \\ = X^j(\partial_j Y^h + \Gamma_{j\,i}^{h} Y^i) \end{aligned} $$

ve

$$\tilde{X}^{j}(\partial_j \tilde{Y}^{\bar{h}} + \Gamma_{j\ i}^{\bar{h}} \tilde{Y}^{i} + \tilde{\Gamma}_{j\ \bar{i}}^{\bar{h}} \tilde{Y}^{\bar{i}}) + \tilde{X}^{\bar{j}}(\partial_j \tilde{Y}^{\bar{h}} + \tilde{\Gamma}_{\bar{j}\ i}^{\bar{h}} \tilde{Y}^{i} + \tilde{\Gamma}_{\bar{j}\ \bar{i}}^{\bar{h}} \tilde{Y}^{i})$$
$$= y^{k}\partial_k \left\{ X^{j}(\partial_j Y^{h} + \Gamma_{j\ i}^{h} Y^{i}) \right\}$$

formlarında yazılır. Bu eşitliklerden

$$\begin{aligned} &{}^{C}\Gamma_{j\ i}^{h} = \Gamma_{j i}^{h}\,, \quad {}^{C}\Gamma_{j\ \bar{i}}^{h} = 0, \quad {}^{C}\Gamma_{\bar{j}\ i}^{h} = 0\,, \quad {}^{C}\Gamma_{\bar{j}\ \bar{i}}^{h} = 0 \\ &{}^{C}\Gamma_{j\ i}^{\bar{h}} = y^{s}\partial_s \Gamma_{j i}^{h}\,, \quad {}^{C}\Gamma_{j\ \bar{i}}^{\bar{h}} = \Gamma_{j i}^{h}\,, \quad {}^{C}\Gamma_{\bar{j}\ i}^{\bar{h}} = \Gamma_{j i}^{h}\,, \quad {}^{C}\Gamma_{\bar{j}\ \bar{i}}^{\bar{h}} = 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

elde edilir.

(2.21) deki eşitlikler aracılığıyla tanımlanan ${}^{C}\Gamma_{D\ B}^{A}$, $T(M)$ tanjant demette global olarak bir afin konneksiyon belirtir. Bu afin konneksiyona $T(M)$ tanjant demette ∇ afin konneksiyonun tam lifti denir ve ${}^{C}\nabla$ ile gösterilir.

Önerme 2.5.1: Eğer R eğrilik tensörü ise ${}^{C}R$, ${}^{C}\nabla$ nin eğrilik tensörüdür (Yano ve Kobayashi, 1966).

İspat: Herhangi $X, Y \in \Im_0^1(M)$ için önerme aşağıdaki formülden yazılır.

$$
\begin{aligned}
{}^{C}R({}^{C}X,{}^{C}Y)\,{}^{C}Z = {}^{C}(R(X,Y)Z) &= {}^{C}(\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z)\\
&= {}^{C}\nabla_{{}^{C}X}\,{}^{C}\nabla_{{}^{C}Y}\,{}^{C}Z-{}^{C}\nabla_{{}^{C}Y}\,{}^{C}\nabla_{{}^{C}X}\,{}^{C}Z-{}^{C}\nabla_{\left[{}^{C}X,{}^{C}Y\right]}\,{}^{C}Z
\end{aligned}
$$

olur. Böylece önerme 2.5.1 ispatlanmış olur.

Aşağıda $T(M)$ tanjant demette üzerinde ${}^{C}R$ eğrilik tensörünün tam liftinin bileşenleri verilecektir. R_{kji}^{h} , R eğrilik tensörünün bileşeni olmak üzere

$$
R_{kji}^{h}=\partial_k\Gamma_{j\,i}^{h}-\partial_j\Gamma_{k\,i}^{h}+\Gamma_{k\,t}^{h}\Gamma_{j\,i}^{t}-\Gamma_{j\,t}^{h}\Gamma_{k\,i}^{t}
$$

eşitliği ile verilir.

$T(M)$ tanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre ${}^{C}R$ eğrilik tensörünün tam liftinin ${}^{C}R_{DEB}^{A}$ bileşenleri

$$
\begin{aligned}
&{}^{C}R_{kji}^{h}=R_{kji}^{h},\quad {}^{C}R_{kij}^{\bar h}=y^{s}\partial_s R_{kji}^{h},\quad {}^{C}R_{\bar k ji}^{h}=0\\
&{}^{C}R_{k\bar j i}^{h}=0,\quad {}^{C}R_{kj\bar i}^{h}=0,\quad {}^{C}R_{\bar k\bar j i}^{h}=0,\quad {}^{C}R_{k\bar j\bar i}^{h}=0\\
&{}^{C}R_{\bar k j\bar i}^{h}=0,\quad {}^{C}R_{\bar k\bar j i}^{\bar h}=0,\quad {}^{C}R_{k\bar j\bar i}^{\bar h}=0,\quad {}^{C}R_{\bar k j\bar i}^{\bar h}=0\\
&{}^{C}R_{\bar k\bar j\bar i}^{h}=0,\quad {}^{C}R_{\bar k\bar j\bar i}^{\bar h}=0\quad {}^{C}R_{kj\bar i}^{\bar h}=R_{kji}^{h},\quad {}^{C}R_{k\bar j i}^{\bar h}=R_{kji}^{h},\\
&{}^{C}R_{\bar k ji}^{\bar h}=R_{kji}^{h}
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

olarak verilir.

2.6. Kotanjant Demet

M_n diferansiyellenebilir n boyutlu bir manifold ve $T_p^*(M_n)$ ise $P \in M$ noktasındaki kotanjant uzay yani P noktasındaki $T_p(M_n)$ tanjant uzayının dual uzayı olsun.

$$T^*(M_n) = \bigcup_{P \in M_n} T_P^*(M_n)$$

kümesine kotanjant demet denir.

M_n baz uzayının $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluklar sistemiyle örtüldüğü kabul edilsin. Burada (x^h), U komşuluğunda tanımlı lokal koordinatlardır. R^n, R üzerinde n- boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere $\pi^{-1}(U) \subset T^*(M_n)$ açık kümesi $U \times R^n$ direk çarpımına diferansiyellenebilir homeomoftur. Gerçekten de $\tilde{P} \in T_p^*(M_n)$ $(P \in U)$ noktası (P, p) sıralı çifti ile gösterilir ve $p \in R^n$ vektörünün bileşenleri $T_p^*(M_n)$ kotanjant uzayında dx^h doğal çatıya göre $\tilde{P}$ nın (p_i) bileşenleri ile verilir. U komşuluğunda $P = \pi(\tilde{P})$ noktasının koordinatları (x^h) $h = 1, ..., n$ ile gösterilirse, $\tilde{P}$ noktası uygun $(x^h, p_i) \to \tilde{P} \in \pi^{-1}(U)$ ile verilmiş olur. Dolayısıyla $\pi^{-1}(U) \subset T^*(M_n)$ açık kümesinde (x^h, p_i) lokal koordinatlar sistemi elde edilmiş olur. Burada (x^h, p_i) lokal koordinatlar sistemine (x^h) dan indirgenmiş $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda koordinatlar denir.

Eğer $(U', x^{h'})$, $P = \pi(\tilde{P})$ noktasını ihtiva eden M_n deki bir başka koordinat komşuluğu ise $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğu $\tilde{P}$ noktasını ihtiva eder ve $\pi^{-1}(U')$ ya göre $\tilde{P}$ nın indirgenmiş koordinatları $(x^{h'}, p_{i'})$ ile verilecektir. Burada

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}(x) \\ p_{i'} = \dfrac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} p_i \end{cases} \tag{2.23}$$

ile verilir. $x^{h'}(x)$, C^{∞} sınıfından diferansiyellenebilir fonksiyonun $x^1,\ldots,x^n$ olmak üzere n tane değişkeni vardır. Bu değişkenlerin türevleri p noktasında değer alır. $x^{\overline{h}} = p_h$ ve $x^{\overline{h}'} = p_{h'}$ ile gösterilirse (2.23) denklemi

$$x^{A'} = x^{A'}(x) \tag{2.24}$$

olarak yazılır. (2.23) nin Jakobian matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{A'}}{\partial x^{A}}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^{i}} & 0 \\ \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} \dfrac{\partial^2 x^{h}}{\partial x^{i'} \partial x^{h'}} p_h & \dfrac{\partial x^{i}}{\partial x^{h'}} \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

olarak verilir. (2.23) denkleminin tersi,

$$\begin{cases} x^{h} = x^{h}(x') \\ p_{h} = \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} p_{h'} \end{cases} \quad \text{ya da } x^{A} = x^{A}(x') \tag{2.26}$$

şeklinde yazılır. Ters Jakobian matrisi

$$\frac{\partial x^{A}}{\partial x^{A'}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} & 0\\ \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial^{2}x^{h'}}{\partial x^{i}\partial x^{h}}p_{h'} & \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}}\end{pmatrix} \tag{2.27}$$

olarak elde edilir. Jakobian matrisi ve ters Jakobian matrisi daima $T^{*}(M)$ kotanjant demetin yönlendirilebilir olduğunu gösterir.

2.7. Kotanjant Demette Temel 1-form

$\pi^{-1}(U)\in T^{*}(M)$ kotanjnat demette bileşenleri $(p_i,0)$ olan p 1-formunu ele alınsın. Burada (x^{h},p_i) indirgenmiş koordinatlara göre $p=p_i dx^{i}$ dir. (2.23) den $\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(U')$ da $p_i dx^{i}=p_{i'}dx^{i'}$ olduğu gösterilir. Burada $p=p_i dx^{i}$ bir global bir 1-formu belirler. p 1-formuna $T^{*}(M)$ kotanjant demette temel 1-form denir. p temel 1-formun dp dış diferansiyeli $\pi^{-1}(U)$ da

$$dp=dp_i\wedge dx^{i}$$

olarak verilen 2-formdur.

Eğer

$$dp = \frac{1}{2}\xi_{CB}dx^{C} \wedge dx^{B}$$

yazılırsa

$$\left(\xi_{CB}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i \\ -\delta_j^i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

elde edilir. (2.28) deki $\left(\xi_{CB}\right)$ matrisi tekil olmadığı için tersi vardır. $\left(\xi^{BA}\right)$ ile tersi ifade edilirse $\xi^{BA}\xi_{CB} = \delta_C^A$ olduğu için

$$\left(\xi^{BA}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_i^h \\ \delta_h^i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

elde edilir.

2.8. Kotanjant Demette Fonksiyonun ve (0,1) Tipli Tensör Alanının Dikey Lifti

f, M manifoldu üzerinde bir fonksiyon olsun. $T^*(M)$ kotanjant demetteki ${}^{V}f$ fonksiyonu $f : M \to R$ ve $\pi : T^*(M) \to M$ lerin bileşkesiyle elde edilir. Yani

$$^{V}f = f \circ \pi \tag{2.30}$$

olur. Böylece eğer $\tilde{P} \in T_p^*(M)$ ise,

$$^{V}f(\tilde{P}) = f(P) \tag{2.31}$$

yazılır.

Herhangi $f, g \in \Im_0^0(M)$ için,

$$^{V}(fg) = {}^{V}f\, {}^{V}g, \qquad {}^{V}(f+g) = {}^{V}f + {}^{V}g \tag{2.32}$$

olur. Böylece ${}^{V}f$ nin değeri her bir fibre boyunca sabittir. O halde ${}^{V}f$ ye f fonksiyonunun dikey lifti denir.

Her $f \in \Im_0^0(M)$ için $\tilde{X}\ {}^{V}f = 0$ eşitliğini sağlayan bir $\tilde{X} \in \Im_0^1(T^*(M))$ olsun. Böylece $\tilde{X}$ ye $T^*(M)$ kotanjant demette dikey vektör alanı denir. $\tilde{X}$ in dikey olması için gerek ve yeter şart

$$(\tilde{X}^A) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{X}^{\bar{i}} \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

formda bileşenlere sahip olmasıdır. Yani, $\pi^{-1}(U)$ da her (x^h, p_i) indirgenmiş koordinatlara göre $\tilde{X}^i = 0$ dır.

Varsayalım ki M manifoldunda ω_i lokal bileşenli bir $\omega \in \Im_1^0(M)$ olsun. Böylece lokal ifadesi $\omega = \omega_i dx^i$ olan bir 1-formdur. Sonra, $\pi : T^*(M) \to M$ izdüşümünün diferansiyelinin dual dönüşümünü π^* ile göstererek $T^*(M)$ kotanjant demette $\pi^*\omega$ 1-formu elde edilir. Burada (x^h, p_i) indirgenmiş koordinatlara göre $\pi^*\omega$ nın lokal ifadesi $\pi^*\omega = \omega_i dx^i$ dir. $\pi^*\omega = \tilde{\omega}_B d^B$ koyarak $T^*(M)$ kotanjant demette

$$\tilde{\omega}^A = \tilde{\omega}_B \xi^{BA} \tag{2.34}$$

lokal bileşenli bir vektör alanı elde edilir. Burada ξ^{BA} (2.29) da tanımlanmıştır. Bu şekilde tanımlanan vektör alanına M manifoldundaki ω 1-formun dikey lifti denir. ${}^V\omega$ ile gösterilir. $T^*(M)$ kotanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre ${}^V\omega$

$${}^V\omega : \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_i \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

formunda bileşenlere sahiptir. Herhangi $f \in \Im_0^0(M)$ için,

$$ {}^{V}\omega({}^{V}f) = 0 \qquad (2.36) $$

yazılır. Böylece ${}^{V}\omega$ bir dikey vektör alanıdır.

Herhangi $f \in \Im_0^0(M)$ ve $\omega, \theta \in \Im_1^0(M)$ için

$$ {}^{V}(\omega+\theta) = {}^{V}\omega + {}^{V}\theta \qquad (2.37) $$

$$ {}^{V}(f\omega) = {}^{V}f\,{}^{V}\omega \qquad (2.38) $$

$$ \left[{}^{V}\omega, {}^{V}\theta\right] = 0 \qquad (2.39) $$

ifadeleri yazılır.

Her U ’ daki dx^h doğal koçatı için (x^h, p_i) indirgenmiş koordinatlarına göre $\pi^{-1}(U)$ da

$$ {}^{V}\left(dx^h\right) = \frac{\partial}{\partial p_h} \qquad (2.40) $$

eşitliği vardır.

2.9. Kotanjant Demette Vektör Alanlarının Tam Lifti

Varsayılsın ki $\tilde{X} \in \Im_0^1(T^*(M))$ olsun. $T^*(M)$ kotanjant demette $\iota X = p_i X^i$ şeklinde tanımlanan ιX bir fonksiyondur. Her $\pi^{-1}(U)$ da (x^h, p_i) indirgenmiş koordinatlara göre lokal ifadesi

$$d(\iota X) = p_i(\partial_a X^i)dx^a + X^i dp_i$$

olan $d(\iota X)$ dış diferansiyeli bir 1-formdur. Burada X^h, U daki X in lokal bileşenleridir. $d(\iota X)$ in bileşenlerini $\tilde{X}_B$ ile göstererek $T^*(M)$ kotanjant demette bir ${}^C X$ vektör alanı tanımlanır. $T^*(M)$ kotanjant demette bir vektör alanı $\tilde{X}^A = \tilde{X}_B \xi^{BA}$ bileşenlere sahiptir. Yani ${}^C X$ nin bileşenleri $\pi^{-1}(U)$ daki (x^h, p_i) indirgenmiş koordinatlara göre

$${}^C X : \begin{pmatrix} X^h \\ -p_i(\partial_h X^i) \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

olur. Burada X^h, X in M manifoldu üzerindeki lokal bileşenleridir. ${}^C X$ 'ye $T^*(M)$ kotanjant demetteki X vektör alanının tam lifti denir.

Herhangi $f \in \Im_0^0(M)$ ve $X \in \Im_0^1(M)$ için (2.41) ten,

$$^{C}X^{V}f = {}^{V}(Xf) \tag{2.42}$$

yazılır.

2.10. Kotanjant Demette Riemann Genişlemesi

∇, M manifoldu üzerinde burulmasız afin konneksiyon olsun ve $\{U, x^h\}$, M manifoldunda bir koordinat komşuluğu olsun. (U, X^h) koordinat komşuluğuna göre ∇ nın bileşenleri için $\Gamma^h_{j\,i}$ yazılır. $T^*(M)$ kotanjant demetteki $(0,2)$ tipli $\tilde{g}$ tensör alanı $\pi^{-1}(U)$ da bileşenleri $\tilde{g}_{CB}$ olmak üzere indirgenmiş koordinatlara göre

$$\begin{aligned} &\tilde{g}_{ij} = -2p_a\Gamma^a_{j\,i}\,, \qquad &&\tilde{g}_{\bar{j}i} = \delta^j_i\,, \\ &\tilde{g}_{j\bar{i}} = \delta^i_j &&\tilde{g}_{\bar{j}\bar{i}} = 0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

olarak yazılır. $\tilde{g}$ Pseudo-Riemann metriğin satır elemanı

$$ds^2 = 2dx^i\delta p_i$$

olarak verilir. Burada $\delta p_i = dp_i - p_a\Gamma^a_{j\,i}dx^j$ dir. Bu tensör alanına ∇ burulmasız afin konneksiyonun Riemann genişlemesi denir ve ${}^{R}\nabla$ ile gösterilir.

$X,Y \in \Im_0^1(M)$ ve $\omega,\theta \in \Im_1^0(M)$ için,

$$\begin{aligned} &{}^R\nabla({}^V\omega, {}^V\theta) = 0, \\ &{}^R\nabla({}^V\omega, {}^C X) = {}^V(\omega(X)), \\ &{}^R\nabla({}^C X, {}^C Y) = -\gamma(\nabla_X Y + \nabla_Y X) \end{aligned} \tag{2.44}$$

yazılır. $(\tilde{g}_{CB})$ matrisinin ters matrisi $(\tilde{g}^{CB})$

$$(\tilde{g}^{CB}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i \\ \delta_i^j & 2p_a\Gamma_{ji}^a \end{pmatrix}$$

olarak verilir.

2.11. Kotanjant Demette Burulmasız Afin Konneksiyonun ve Eğrilik Tensörünün Tam Lifti

${}^C\overset{*}{\nabla}$, ${}^R\nabla$ Riemann genişlemesi tarafından belirlenen Levi-Civita konneksiyonu olsun. ${}^C\overset{*}{\nabla}$ ye $T^*(M)$ kotanjant demette burulmasız afin konneksiyonun tam lifti denir.

$T^*(M)$ kotanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre ${}^C\overset{*}{\nabla}$ nin $\overset{*}{\Gamma}{}_{CB}^{A}$ bileşenleri,

$$
\begin{aligned}
&{}^{C}\overset{*}{\Gamma}{}^{h}_{j\,i} = \Gamma^{h}_{j\,i}\,, \quad {}^{C}\overset{*}{\Gamma}{}^{h}_{j\,\bar{i}} = 0\,, \quad {}^{C}\overset{*}{\Gamma}{}^{h}_{\bar{j}\,i} = 0\,, \quad {}^{C}\overset{*}{\Gamma}{}^{h}_{\bar{j}\,\bar{i}} = 0, \\
&{}^{C}\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar{h}}_{j\,i} = p_a(\partial_h \Gamma^{a}_{j\,i} - \partial_j \Gamma^{a}_{i\,h} - \partial_i \Gamma^{a}_{j\,h} + 2\Gamma^{a}_{h\,t}\Gamma^{t}_{j\,i}), \\
&{}^{C}\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar{h}}_{j\,\bar{i}} = -\Gamma^{i}_{j\,h}\,, \quad {}^{C}\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar{h}}_{\bar{j}\,i} = -\Gamma^{j}_{h\,i} \quad {}^{C}\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar{h}}_{\bar{j}\,\bar{i}} = 0
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

olarak verilir. (2.45) kullanılarak aşağıdakileri önerme yazılır.

<u>Önerme 2.11.1.</u> Herhangi $X, Y \in \Im^1_0(M)$ ve $\omega, \theta \in \Im^0_1(M)$; $F \in \Im^1_1(M)$ için M manifoldundaki ∇ burulmasız afin konneksiyonun $T^*(M)$ kotanjant demette ${}^{C}\overset{*}{\nabla}$ tam liftine göre kovaryant türevi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$
\begin{aligned}
&{}^{C}\overset{*}{\nabla}_{{}^{V}\omega}{}^{V}\theta = 0, \quad {}^{C}\overset{*}{\nabla}_{{}^{V}\omega}{}^{C}Y = -\gamma(\omega \circ (\nabla Y)), \quad {}^{C}\overset{*}{\nabla}_{{}^{C}X}{}^{V}\theta = {}^{V}(\nabla_X \theta), \\
&{}^{C}\overset{*}{\nabla}_{{}^{C}X}{}^{C}Y = {}^{C}(\nabla_X Y) + \gamma\left\{(\nabla X)(\nabla Y) + (\nabla Y)(\nabla X) + R(\ \ , X)Y + R(\ \ , Y)X\right\}, \\
&{}^{C}\overset{*}{\nabla}_{{}^{V}\omega}\gamma F = \gamma(\omega \circ F), \quad {}^{C}\overset{*}{\nabla}_{{}^{C}X}\gamma F = \gamma(\nabla_X F - (\nabla X)F).
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

Burada R, ∇ nin eğrilik tensörüdür ve herhangi $Z \in \Im^1_0(M)$ için $R((\ \ , X)Y)Z = R(Z, X)Y$ dir.

(2.46) ü kullanarak $T^*(M)$ kotanjant demette ${}^{C}\overset{*}{\nabla}$ nin ${}^{C}\overset{*}{\boldsymbol{R}}$ eğrilik tensörünün ${}^{C}\overset{*}{R}{}^{A}_{DBE}$ bileşenleri, $\pi^{-1}(U)$ da indirgenmiş koordinatlara göre

$$
\begin{aligned}
{}^{C}\overset{*}{R}_{kji}{}^{h} &= R_{kji}{}^{h}, \\
{}^{C}\overset{*}{R}_{kji}{}^{\bar{h}} &= p_a(\nabla_h R_{kji}{}^{a} - \nabla_i R_{kjh}{}^{a} \\
&\quad + \Gamma_h{}^{a}{}_{t} R_{kji}{}^{t} + \Gamma_k{}^{a}{}_{t} R_{ihj}{}^{t} + \Gamma_j{}^{a}{}_{t} R_{hik}{}^{t} + \Gamma_i{}^{a}{}_{t} R_{kjh}{}^{t}) \\
{}^{C}\overset{*}{R}_{kj\bar{i}}{}^{\bar{h}} &= -R_{kjh}{}^{i}, \quad {}^{C}\overset{*}{R}_{k\bar{j}i}{}^{\bar{h}} = -R_{hik}{}^{j}, \quad {}^{C}\overset{*}{R}_{\bar{k}ji}{}^{\bar{h}} = R_{hij}{}^{k}
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

dir. $T^*(M)$ kotanjant demette ${}^{C}\overset{*}{\boldsymbol{R}}$ eğrilik tensörünün diğer bileşenleri sıfıra eşittir. Burada $R_{kji}{}^{h}$, U daki ∇ burulmasız afin konneksiyonun R eğrilik tensörünün bileşenleridir.

3. BULGULAR

3.1. Kotanjant Demette $g-lift$

(M,g), boyutu n olan düzgün pseudo-Riemann manifold olsun. $T(M)=\bigcup_{x\in M_n} T_x(M)$, M manifoldu üzerinde bir tanjant demet belirtir. $T(M)$ tanjant demetin lokal koordinatı $y_x = y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} \in T_x(M)$ olmak üzere $(x^i, x^{\bar{i}}) = (x^i, y^i)$ dir. $T^*(M)=\bigcup_{x\in M_n} T_x^*(M)$, M manifoldu üzerinde bir kotanjant demet belirtir. $T^*(M)$ kotanjant demetin lokal koordinatı $p_x = p_i dx^i \in T_x^*(M),\ \forall x \in M$ olmak üzere $(x^i, \tilde{x}^{\bar{i}}) = (x^i, p_i)$ dir. i indisi $\{1,...,n\}$ aralığında ve $\bar{i}$ indisi $\{n+1,...,2n\}$ aralığındadır.

g herhangi bir pseudo Riemann metriği olsun. g pseudo-Riemann metriğinin önemli bir özelliği $T(M)$ tanjant ve $T^*(M)$ kotanjant demetleri arasında $g^\flat : T(M) \to T^*(M)$ ve $g^\sharp : T^*(M) \to T(M)$ olarak tanımlanan müzikal izomorfizmleri sağlamasıdır.

Müzik notasyonunda $\flat$ bemol sembolü notayı yarım ses aşağı indirir. Bu müzik notasyonu dikkate alınarak $g^\flat$ müzikal izomorfizmi

$$g^\flat : x^J = (x^j, x^{\bar{j}}) = (x^j, y^j) \to \tilde{x}^M = (x^m, \tilde{x}^{\bar{m}}) = (\delta_j^m x^j, p_m = g_{mj} y^j)$$

olarak ifade edilir. Bir başka müzik notasyonunda $\sharp$ diyez sembolü notayı yarım ses yukarı çıkarır. Bu müzik notasyonu dikkate alınarak $g^\sharp$ müzikal izomorfizmi

$$g^{\sharp} : \tilde{x}^{M} = (x^{m}, \tilde{x}^{\bar{m}}) = (x^{m}, p_{m}) \to x^{J} = (x^{j}, x^{\bar{j}}) = (\delta_{m}^{j} x^{m}, y^{j} = g^{jm} p_{m})$$

olarak ifade edilir.

$g^{\flat}$ ve $g^{\sharp}$ müzikal izomorfizmlerinin Jakobi matrisleri

$$(g_{*}^{\flat}) = (\tilde{A}_{J}^{M}) = \left(\frac{\partial \tilde{x}^{M}}{\partial x^{J}} \right) = \begin{pmatrix} \delta_{j}^{m} & 0 \\ y^{s} \partial_{j} g_{ms} & g_{mj} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

ve

$$(g_{*}^{\sharp}) = (A_{M}^{J}) = \left(\frac{\partial x^{J}}{\partial \tilde{x}^{M}} \right) = \begin{pmatrix} \delta_{m}^{j} & 0 \\ p_{s} \partial_{m} g^{js} & g^{jm} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

olarak elde edilir (Cakan ve ark., 2016).

$\Im_{q}^{p}(M)$, M manifoldu üzerinde (p,q) tipli bütün diferensiyellenebilir tensör alanlarının kümesidir. ∇, M manifoldu üzerinde afin konneksiyon ve ${}^{C}\nabla$, $T(M)$ tanjant demet üzerinde ∇ afin konneksiyonun tam lifti olsun. M manifoldu üzerinde $\left(x^{h}\right)$ lokal koordinatlara göre ∇ afin konneksiyonun bileşenleri Γ_{ij}^{k} ve $T(M)$ tanjant demet üzerinde $\left(x^{h}, y^{h}\right)$ indirgenmiş koordinata göre ${}^{C}\nabla$ afin konneksiyonun bileşenleri ${}^{C}\Gamma_{ij}^{k}$ olur. Salimov ve Cakan çalışmasında bazı tensör alanlarının tam liftlerini tanjant demetten kotanjant demete müzikal izomorfizm aracılığla transfer ederek kotanjant demette yeni bir lift olan tensör alanlarının $g-lift$ leri elde etmiştir. Bu çalışmada müzikal izomorfizmler aracılığla ∇ afin konneksiyonun kotanjant demette $g-lift$ i ${}^{G}\nabla$ elde edilmiştir.

R, M manifoldu üzerinde bileşenleri R_{kji}^{h} olan ∇ afin konneksiyonunun eğrilik tensörü olsun. Yine bu çalışmada müzikal izomorfizmler aracılığla R eğrilik tensörünün kotanjant demette $g-lift$ i ${}^{G}R$ elde edilmiştir. $g-lift$ ${}^{G}\nabla$ ve $g-lift$ ${}^{G}R$ elde edilmesinin ardından çeşitli sonuçlara ulaşılmıştır.

3.2. Kotanjant Demette Afin Konneksiyonun $g-lift$ i

M , üzerinde ∇ afin konneksiyon olan bir manifold olsun. $T(M)$ tanjant demet herhangi $X,Y \in \Im_0^1(M)$ için

$$ {}^{C}\nabla_{X^{C}} Y^{C} = {}^{C}\left(\nabla_{X} Y\right) \tag{3.3} $$

eşitliğini sağlayan tek bir ${}^{C}\nabla$ afin konneksiyon vardır. Γ_{ji}^{h}, M manifoldu üzerinde $\left(x^{h}\right)$ lokal koordinatlara göre ∇ afin konneksiyonun bileşenleri olsun. ${}^{C}\Gamma_{ij}^{k}$, $T(M)$ tanjant demet üzerinde $\left(x^{h}, y^{h}\right)$ indirgenmiş koordinata göre ${}^{C}\nabla$ afin konneksiyonun bileşenleri olsun. $T(M)$ tanjant demette tam lift ${}^{C}\nabla$ nin bileşenleri $\left(x^{h}, y^{h}\right)$ indirgenmiş koordinata göre (2.21) eşitliklerinde verilmiştir (Yano ve Ishihara, 1973).

<u>Teorem 3.2.1:</u> (M, g) bir pseudo-Riemann manifold olsun. ${}^{C}\nabla$ ve ${}^{C}\overset{*}{\nabla}$ sırasıyla ∇ afin konneksiyonun $T(M)$ tanjant demet ve $T^{*}(M)$ kotanjant demetteki tam liftleri olsun. Eğer ∇ bir Riemann konneksiyon ise müzikal izomorfizmler aracılığıyla elde edilen $T^{*}(M)$ kotanjant demetteki $g-lift$ ${}^{G}\overset{*}{\nabla}$ ile $T^{*}(M)$ kotanjant demetteki tam lift ${}^{C}\overset{*}{\nabla}$ çakışır.

<u>İspat:</u> $A_{JI}^{K} = \dfrac{\partial^2 x^K}{\partial x^J \partial x^I}$ olmak üzere

$$
\begin{gathered}
A_{ji}^{k} = 0, \quad A_{j\bar{i}}^{k} = 0, \quad A_{\bar{j}i}^{k} = 0, \quad A_{\bar{j}\bar{i}}^{k} = 0 \\
A_{ji}^{\bar{k}} = \frac{p_s \partial^2 g^{ks}}{\partial x^j \partial x^i}, \quad A_{j\bar{i}}^{\bar{k}} = \partial_l g^{ki}, \quad A_{\bar{j}i}^{\bar{k}} = \partial_i g^{kj}, \quad A_{\bar{j}\bar{i}}^{\bar{k}} = 0 .
\end{gathered}
$$

$H, I, \ldots = 1, \ldots, 2n$ olmak üzere (3.1), (3.2) ve (2.21) eşitlikleri kullanılarak elde edilen

$$
g_{*}^{\flat}\, {}^{C}\Gamma = \left({}^{G}\overset{*}{\Gamma}{}_{JI}^{H} \right) = \tilde{A}_J^M \tilde{A}_I^S A_K^H \;\; {}^{C}\Gamma_{MS}^{K} + A_K^H \tilde{A}_{JI}^{K}
$$

eşitliğinden $T^{*}(M)$ kotanjant demette $g-lift$ ${}^{G}\overset{*}{\nabla}$ ın konneksiyon katsayıları hesaplanır.

$$
\begin{aligned}
{}^{G}\overset{*}{\Gamma}{}^{h}_{ji} &= \tilde{A}^{m}_{j}\tilde{A}^{s}_{i}A^{h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{ms} + \tilde{A}^{m}_{j}\tilde{A}^{s}_{i}A^{h}_{\bar{k}}\,{}^{C}\Gamma^{\bar{k}}_{ms} + \tilde{A}^{\bar{m}}_{j}\tilde{A}^{s}_{i}A^{h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{\bar{m}s} + \tilde{A}^{m}_{j}\tilde{A}^{\bar{s}}_{i}A^{h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{m\bar{s}} \\
&\quad + \tilde{A}^{\bar{m}}_{j}\tilde{A}^{\bar{s}}_{i}A^{h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{\overline{ms}} + \tilde{A}^{\bar{m}}_{j}\tilde{A}^{s}_{i}A^{h}_{\bar{k}}\,{}^{C}\Gamma^{\bar{k}}_{\bar{m}s} + \tilde{A}^{m}_{j}\tilde{A}^{\bar{s}}_{i}A^{h}_{\bar{k}}\,{}^{C}\Gamma^{\bar{k}}_{m\bar{s}} + \tilde{A}^{\bar{m}}_{j}\tilde{A}^{\bar{s}}_{i}A^{h}_{\bar{k}}\,{}^{C}\Gamma^{\bar{k}}_{\overline{ms}} \\
&\quad + A^{h}_{k}\tilde{A}^{k}_{ji} + A^{h}_{\bar{k}}\tilde{A}^{\bar{k}}_{ji} \\
&= \delta^{s}_{m}\delta^{s}_{i}\delta^{h}_{k}\Gamma^{k}_{ms} = \Gamma^{h}_{ji}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{G}\overset{*}{\Gamma}{}^{h}_{j\bar{i}} &= \tilde{A}^{\tilde{m}}_{j}\tilde{A}^{s}_{\bar{i}}A^{h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{ms} + \tilde{A}^{m}_{j}\tilde{A}^{s}_{\bar{i}}A^{h}_{\bar{k}}\,{}^{C}\Gamma^{\bar{k}}_{ms} + \tilde{A}^{\bar{m}}_{j}\tilde{A}^{s}_{\bar{i}}A^{h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{\bar{m}s} + \tilde{A}^{m}_{j}\tilde{A}^{\bar{s}}_{\bar{i}}A^{h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{m\bar{s}} \\
&+ \tilde{A}^{\bar{m}}_{j}\tilde{A}^{\bar{s}}_{\bar{i}}A^{h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{\overline{ms}} + \tilde{A}^{\bar{m}}_{j}\tilde{A}^{s}_{\bar{i}}A^{h}_{\bar{k}}\,{}^{C}\Gamma^{\bar{k}}_{\bar{m}s} + \tilde{A}^{m}_{j}\tilde{A}^{\bar{s}}_{\bar{i}}A^{h}_{\bar{k}}\,{}^{C}\Gamma^{\bar{k}}_{m\bar{s}} + \tilde{A}^{\bar{m}}_{j}\tilde{A}^{\bar{s}}_{\bar{i}}A^{h}_{\bar{k}}\,{}^{C}\Gamma^{\bar{k}}_{\overline{ms}} \\
&+ A^{h}_{k}\tilde{A}^{k}_{j\bar{i}} + A^{h}_{\bar{k}}\tilde{A}^{\bar{k}}_{j\bar{i}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{G}\overset{*}{\Gamma}{}^{h}_{\bar{j}i} &= \tilde{A}^{m}_{\bar{j}}\tilde{A}^{s}_{i}A^{h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{ms} + \tilde{A}^{m}_{\bar{j}}\tilde{A}^{s}_{i}A^{h}_{\bar{k}}\,{}^{C}\Gamma^{\bar{k}}_{ms} + \tilde{A}^{\bar{m}}_{\bar{j}}\tilde{A}^{s}_{i}A^{h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{\bar{m}s} + \tilde{A}^{m}_{\bar{j}}A^{\bar{s}}_{i}A^{h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{m\bar{s}} \\
&+ \tilde{A}^{\bar{m}}_{\bar{j}}\tilde{A}^{\bar{s}}_{i}A^{h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{\overline{ms}} + \tilde{A}^{\bar{m}}_{\bar{j}}\tilde{A}^{s}_{i}A^{h}_{\bar{k}}\,{}^{C}\Gamma^{\bar{k}}_{\bar{m}s} + \tilde{A}^{m}_{\bar{j}}\tilde{A}^{\bar{s}}_{i}A^{h}_{\bar{k}}\,{}^{C}\Gamma^{\bar{k}}_{m\bar{s}} + \tilde{A}^{\bar{m}}_{\bar{j}}\tilde{A}^{\bar{s}}_{i}A^{h}_{\bar{k}}\,{}^{C}\Gamma^{\bar{k}}_{\overline{ms}} \\
&+ A^{h}_{k}\tilde{A}^{k}_{\bar{j}i} + A^{h}_{\bar{k}}\tilde{A}^{\bar{k}}_{\bar{j}i} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{G}\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar{h}}_{j\bar{i}} &= \tilde{A}^{m}_{j}\tilde{A}^{s}_{\bar{i}}A^{\bar{h}}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{ms} + \tilde{A}^{m}_{j}\tilde{A}^{s}_{\bar{i}}A^{\bar{h}}_{\bar{k}}\,{}^{C}\Gamma^{\bar{k}}_{ms} + \tilde{A}^{\bar{m}}_{j}\tilde{A}^{s}_{\bar{i}}A^{\bar{h}}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{\bar{m}s} + \tilde{A}^{m}_{j}\tilde{A}^{\bar{s}}_{\bar{i}}A^{\bar{h}}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{m\bar{s}} \\
&+ \tilde{A}^{\bar{m}}_{j}\tilde{A}^{\bar{s}}_{\bar{i}}A^{\bar{h}}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{\overline{ms}} + \tilde{A}^{\bar{m}}_{j}\tilde{A}^{s}_{\bar{i}}A^{\bar{h}}_{\bar{k}}\,{}^{C}\Gamma^{\bar{k}}_{\bar{m}s} + \tilde{A}^{m}_{j}\tilde{A}^{\bar{s}}_{\bar{i}}A^{\bar{h}}_{\bar{k}}\,{}^{C}\Gamma^{\bar{k}}_{m\bar{s}} + \tilde{A}^{\bar{m}}_{j}\tilde{A}^{\bar{s}}_{\bar{i}}A^{\bar{h}}_{\bar{k}}\,{}^{C}\Gamma^{\bar{k}}_{\overline{ms}} \\
&+ A^{\bar{h}}_{k}\tilde{A}^{k}_{j\bar{i}} + A^{\bar{h}}_{\bar{k}}\tilde{A}^{\bar{k}}_{j\bar{i}} \\
&= \delta^{m}_{j}g^{si}g_{hk}\Gamma^{k}_{ms} + g_{hk}\partial_{j}g^{ki} \\
&= g^{si}\frac{1}{2}\left(\partial_{j}g_{sh} + \partial_{s}g_{hj} - \partial_{h}g_{js}\right) - g^{ki}\partial_{j}g_{hk} \\
&= \frac{1}{2}g^{si}\left(-\partial_{j}g_{sh} - \partial_{h}g_{js} + \partial_{s}g_{hj}\right) \\
&= -\frac{1}{2}g^{si}\left(\partial_{j}g_{sh} + \partial_{h}g_{js} - \partial_{s}g_{hj}\right) \\
&= -\Gamma^{i}_{jh}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{G}\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar h}_{\bar j i} &= \tilde{A}^{m}_{\bar j}\tilde{A}^{s}_{i}A^{\bar h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{ms} + \tilde{A}^{m}_{\bar j}\tilde{A}^{s}_{i}A^{\bar h}_{\bar k}\,{}^{C}\Gamma^{\bar k}_{ms} + \tilde{A}^{\bar m}_{\bar j}\tilde{A}^{s}_{i}A^{\bar h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{\bar m s} + \tilde{A}^{m}_{\bar j}\tilde{A}^{\bar s}_{i}A^{\bar h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{m\bar s} \\
&+ \tilde{A}^{\bar m}_{\bar j}\tilde{A}^{\bar s}_{i}A^{\bar h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{\overline{ms}} + \tilde{A}^{\bar m}_{\bar j}\tilde{A}^{s}_{i}A^{\bar h}_{\bar k}\,{}^{C}\Gamma^{\bar k}_{\overline{ms}} + \tilde{A}^{m}_{\bar j}\tilde{A}^{\bar s}_{i}A^{\bar h}_{\bar k}\,{}^{C}\Gamma^{\bar k}_{m\bar s} + \tilde{A}^{\bar m}_{\bar j}\tilde{A}^{\bar s}_{i}A^{\bar h}_{\bar k}\,{}^{C}\Gamma^{\bar k}_{\overline{ms}} \\
&+ A^{\bar h}_{k}\tilde{A}^{k}_{\bar j i} + A^{\bar h}_{\bar k}\tilde{A}^{\bar k}_{\bar j i} \\
&= g^{mj}\delta^{s}_{i}g_{hk}\Gamma^{k}_{ms} + g_{hk}\partial_{i}g^{kj} \\
&= g^{mj}g_{hk}\Gamma^{k}_{mi} - g^{kj}\partial_{i}g_{hk} \\
&= g^{kj}g_{hm}\Gamma^{m}_{ki} - g^{kj}\partial_{i}g_{hk} \\
&= g^{kj}\frac{1}{2}\left(\partial_{k}g_{hi} + \partial_{i}g_{hk} - \partial_{h}g_{ki}\right) - g^{kj}\partial_{i}g_{hk} \\
&= -\frac{1}{2}g^{kj}\left(\partial_{h}g_{ki} + \partial_{i}g_{hk} - \partial_{k}g_{hi}\right) \\
&= -\Gamma^{j}_{hi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{G}\overset{*}{\Gamma}{}^{h}_{\overline{ji}} &= \tilde{A}^{m}_{\bar j}\tilde{A}^{s}_{\bar i}A^{h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{ms} + \tilde{A}^{m}_{\bar j}\tilde{A}^{s}_{\bar i}A^{h}_{\bar k}\,{}^{C}\Gamma^{\bar k}_{ms} + \tilde{A}^{\bar m}_{\bar j}\tilde{A}^{s}_{\bar i}A^{h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{\bar m s} + \tilde{A}^{m}_{\bar j}\tilde{A}^{\bar s}_{\bar i}A^{h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{m\bar s} \\
&+ \tilde{A}^{\bar m}_{\bar j}\tilde{A}^{\bar s}_{\bar i}A^{h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{\overline{ms}} + \tilde{A}^{\bar m}_{\bar j}A^{s}_{\bar i}A^{h}_{\bar k}\,{}^{C}\Gamma^{\bar k}_{\bar m s} + \tilde{A}^{m}_{\bar j}\tilde{A}^{\bar s}_{\bar i}A^{h}_{\bar k}\,{}^{C}\Gamma^{\bar k}_{m\bar s} + \tilde{A}^{\bar m}_{\bar j}\tilde{A}^{\bar s}_{\bar i}A^{h}_{\bar k}\,{}^{C}\Gamma^{\bar k}_{\bar m\bar s} \\
&+ A^{h}_{k}\tilde{A}^{k}_{\overline{ji}} + A^{h}_{\bar k}\tilde{A}^{\bar k}_{\overline{ji}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{G}\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar h}_{\bar j\bar i} &= \tilde{A}^{m}_{\bar j}\tilde{A}^{s}_{\bar i}A^{\bar h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{ms} + \tilde{A}^{m}_{\bar j}\tilde{A}^{s}_{\bar i}A^{\bar h}_{\bar k}\,{}^{C}\Gamma^{\bar k}_{ms} + \tilde{A}^{\bar m}_{\bar j}\tilde{A}^{s}_{\bar i}A^{\bar h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{\bar m s} + \tilde{A}^{m}_{\bar j}\tilde{A}^{\bar s}_{\bar i}A^{\bar h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{m\bar s} \\
&+ \tilde{A}^{\bar m}_{\bar j}\tilde{A}^{\bar s}_{\bar i}A^{\bar h}_{k}\,{}^{C}\Gamma^{k}_{\overline{ms}} + \tilde{A}^{\bar m}_{\bar j}\tilde{A}^{s}_{\bar i}A^{\bar h}_{\bar k}\,{}^{C}\Gamma^{\bar k}_{\bar m s} + \tilde{A}^{m}_{\bar j}\tilde{A}^{\bar s}_{\bar i}A^{\bar h}_{\bar k}\,{}^{C}\Gamma^{\bar k}_{m\bar s} + \tilde{A}^{\bar m}_{\bar j}\tilde{A}^{\bar s}_{\bar i}A^{\bar h}_{\bar k}\,{}^{C}\Gamma^{\bar k}_{\overline{ms}} \\
&+ A^{\bar h}_{k}\tilde{A}^{k}_{\bar j\bar i} + A^{\bar h}_{\bar k}\tilde{A}^{\bar k}_{\bar j\bar i} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}^{G}\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar h}_{ji} = \tilde A^m_s \tilde A^s_i A^{\bar h}_k\, {}^C\Gamma^k_{ms} + \tilde A^m_j \tilde A^s_i A^{\bar h}_{\bar k}\,{}^C\Gamma^{\bar k}_{ms} + \tilde A^{\bar m}_j \tilde A^s_i A^{\bar h}_k\,{}^C\Gamma^k_{\bar m s} + \tilde A^m_j \tilde A^{\bar s}_i A^{\bar h}_k\,{}^C\Gamma^k_{m\bar s} \\
&+\tilde A^{\bar m}_j \tilde A^{\bar s}_i A^{\bar h}_k\,{}^C\Gamma^k_{\overline{ms}} + \tilde A^{\bar m}_j\tilde A^s_i A^{\bar h}_{\bar k}\,{}^C\Gamma^{\bar k}_{\bar m s} + \tilde A^m_j \tilde A^{\bar s}_i A^{\bar h}_{\bar k}\,{}^C\Gamma^{\bar k}_{m\bar s} + \tilde A^{\bar m}_j\tilde A^{\bar s}_i A^{\bar h}_{\bar k}\,{}^C\Gamma^{\bar k}_{\overline{ms}} \\
&+A^{\bar h}_k \tilde A^k_{ji} + A^{\bar h}_{\bar k}\tilde A^{\bar k}_{ji} \\
&= \delta^m_j \delta^s_i y^t \partial_k g_{th}\Gamma^k_{ms} + \delta^m_j \delta^s_i g_{hk} y^t \partial_t \Gamma^k_{ms} + p_t \partial_j g^{mt} \delta^s_i g_{hk}\Gamma^k_{ms} \\
&+\delta^m_j p_t \partial_i g^{st} g_{hk}\Gamma^k_{ms} + g_{hk} p_t \partial^2_{ji} g^{tk} \\
&= y^t\left(\partial_k g_{th}\right)\Gamma^k_{ji} + g_{hk} y^t \partial_t \Gamma^k_{ji} + p_t \partial_j g^{mt} g_{hk}\Gamma^k_{mi} + p_t \partial_i g^{st} g_{hk}\Gamma^k_{js} \\
&+g_{hk} p_t \partial^2_{ji} g^{tk} \\
&= y^t\left(\partial_k g_{th}\right)\Gamma^k_{ji} + g_{hk} y^t \partial_t \Gamma^k_{ji} + p_t\left(\partial_j g^{mt}\right) g_{mk}\Gamma^k_{mi} + p_t\left(\partial_i g^{st}\right) g_{hk}\Gamma^k_{js} \\
&-p_t\left(\partial_j \Gamma^t_{ih}\right) - g_{hk} p_t \Gamma^t_{is}\partial_j g^{sk} - g_{hk} p_t\left(\partial_j \Gamma^k_{is}\right) g^{ts} - g_{hk} p_t \Gamma^k_{is}\partial_j g^{ts} \\
&= -p_t\left(\partial_j \Gamma^t_{ih}\right) + y^t\left(\partial_k g_{th}\right)\Gamma^k_{ji} + g_{hk} y^t \partial_t \Gamma^k_{ji} + p_t\left(\partial_i g^{st}\right) g_{hk}\Gamma^k_{js} \\
&-g_{hk} p_t \Gamma^t_{is}\partial_j g^{sk} - g_{hk} p_t\left(\partial_j \Gamma^k_{is}\right) g^{ts} \\
&= -p_t\left(\partial_j \Gamma^t_{ih}\right) + y^t\left(\partial_k g_{th}\right)\Gamma^k_{ji} + g_{hk} y^t \partial_t \Gamma^k_{ji} - g_{hk} p_t\left(\partial_j \Gamma^k_{is}\right) g^{ts} \\
&+p_t\left(\partial_i g^{st}\right) g_{hk}\Gamma^k_{js} - g_{hk} p_t \Gamma^t_{is}\left(\partial_j g^{sk}\right) \\
&= -p_t\left(\partial_j \Gamma^t_{ih}\right) + y^t\left(\partial_k g_{th}\right)\Gamma^k_{ji} + g_{hk}\left(g^{ts} p_s \partial_t \Gamma^k_{ji} - p_t g^{ts}\partial_j \Gamma^k_{is}\right) \\
&+p_t\left(-\Gamma^s_{im} g^{mt} - \Gamma^t_{im} g^{sm}\right) g_{hk}\Gamma^k_{js} - g_{hk} p_t \Gamma^t_{is}\left(-\Gamma^s_{jm} g^{mk} - \Gamma^k_{jm} g^{ms}\right) \\
&= -p_t\left(\partial_j \Gamma^t_{ih}\right) + y^t\left(\partial_k g_{th}\right)\Gamma^k_{ji} + g_{hk} g^{ts} p_s\left(\partial_t \Gamma^k_{ji} - \partial_j \Gamma^k_{it}\right) \\
&-g_{hk} p_s\left(\Gamma^t_{im}\Gamma^k_{jt} g^{ms} + \Gamma^s_{im}\Gamma^k_{jt} g^{tm}\right) + g_{hk} p_s\left(\Gamma^s_{it}\Gamma^t_{jm} g^{mk} + \Gamma^s_{it}\Gamma^k_{jm} g^{mt}\right) \\
&= -p_t\left(\partial_j \Gamma^t_{ih}\right) + g^{ts} p_s\left(\Gamma^m_{kt} g_{mh} + \Gamma^m_{kh} g_{tm}\right)\Gamma^k_{ji} + g_{hk} g^{ts} p_s\left(\partial_t \Gamma^k_{ji} - \partial_j \Gamma^k_{it}\right) \\
&-g_{hk} p_s\left(\Gamma^t_{im}\Gamma^k_{jt} g^{ms} + \Gamma^s_{im}\Gamma^k_{jt} g^{tm}\right) + g_{hk} p_s\left(\Gamma^s_{it}\Gamma^t_{jm} g^{mk} + \Gamma^s_{it}\Gamma^k_{jm} g^{mt}\right) \\
&= -p_t\left(\partial_j \Gamma^t_{ih}\right) + p_s \Gamma^s_{hk}\Gamma^k_{ji} + g^{ts} g_{mh} p_s \Gamma^m_{kt}\Gamma^k_{ji} + g_{hk} g^{ts} p_s\left(\partial_t \Gamma^k_{ji} - \partial_j \Gamma^k_{it}\right) \\
&-g_{hk} p_s\left(\Gamma^t_{im}\Gamma^k_{jt} g^{ms} + \Gamma^s_{im}\Gamma^k_{jt} g^{tm}\right) + g_{hk} p_s\left(\Gamma^s_{it}\Gamma^t_{jm} g^{mk} + \Gamma^s_{it}\Gamma^k_{jm} g^{mt}\right) \\
&+p_t R^t_{hij} - p_t R^t_{hij} \\
&= p_s\left(\partial_h \Gamma^s_{ij} - \partial_i \Gamma^s_{jh} - \partial_j \Gamma^s_{ih} + 2\Gamma^s_{hk}\Gamma^k_{ij}\right) + g_{hk} g^{ts} p_s\left(\partial_t \Gamma^k_{ji} - \partial_j \Gamma^k_{it}\right) - p_t R^t_{hij} \\
&-g_{hk} g^{ms} p_s \Gamma^t_{im}\Gamma^k_{jt} - g_{hk} g^{mt} p_s \Gamma^s_{im}\Gamma^k_{jt} + g_{hk} g^{mt} p_s \Gamma^s_{it}\Gamma^t_{jm} + g_{mh} g^{ts} p_s \Gamma^m_{kt}\Gamma^k_{ji} \\
&= p_s\left(\partial_h \Gamma^s_{ij} - \partial_i \Gamma^s_{jh} - \partial_j \Gamma^s_{ih} + 2\Gamma^s_{hk}\Gamma^k_{ij}\right) - p_t R^t_{hij} + g_{hk} g^{ms} p_s\left(\Gamma^k_{mt}\Gamma^t_{ji} - \Gamma^t_{im}\Gamma^k_{jt}\right) \\
&+g_{hk} g^{mt} p_s\left(\Gamma^s_{it}\Gamma^k_{jm} - \Gamma^s_{im}\Gamma^k_{jt}\right) + g_{hk} g^{ms} p_s \partial_m \Gamma^k_{ji} - g_{hk} g^{ms} p_s \partial_j \Gamma^k_{im} \\
&= p_s\left(\partial_h \Gamma^s_{ij} - \partial_i \Gamma^s_{jh} - \partial_j \Gamma^s_{ih} + 2\Gamma^s_{hk}\Gamma^k_{ij}\right) - p_t R^t_{hij} + g_{hk} g^{ms} p_s\left(\partial_m \Gamma^k_{ji} - \partial_j \Gamma^k_{im} + \Gamma^k_{mt}\Gamma^t_{ji} - \Gamma^t_{im}\Gamma^k_{jt}\right) \\
&+g_{hk} g^{mt} p_s\left(\Gamma^s_{it}\Gamma^k_{jm} - \Gamma^s_{im}\Gamma^k_{jt}\right)
\end{aligned}
$$

$$= p_s\left(\partial_h\Gamma_{ij}^s - \partial_i\Gamma_{jh}^s - \partial_j\Gamma_{ih}^s + 2\Gamma_{hk}^s\Gamma_{ij}^k\right) - p_t R_{hij}^t + g^{ms} p_s R_{mjih}$$
$$= p_s\left(\partial_h\Gamma_{ij}^s - \partial_i\Gamma_{jh}^s - \partial_j\Gamma_{ih}^s + 2\Gamma_{hk}^s\Gamma_{ij}^k\right) - y^t g_{ts} R_{hij}^s + y^t R_{tjih}$$
$$= p_s\left(\partial_h\Gamma_{ij}^s - \partial_i\Gamma_{jh}^s - \partial_j\Gamma_{ih}^s + 2\Gamma_{hk}^s\Gamma_{ij}^k\right) + y^t\left(-R_{hijt} + R_{tjih}\right)$$
$$= p_s\left(\partial_h\Gamma_{ij}^s - \partial_i\Gamma_{jh}^s - \partial_j\Gamma_{ih}^s + 2\Gamma_{hk}^s\Gamma_{ij}^k\right) + y^t\left(-R_{hijt} + R_{hijt}\right)$$
$$= p_s\left(\partial_h\Gamma_{ij}^s - \partial_i\Gamma_{jh}^s - \partial_j\Gamma_{ih}^s + 2\Gamma_{hk}^s\Gamma_{ij}^k\right)$$

∇ nın bir Riemann konneksiyonu olması durumunda müzikal izomorfizm aracılığla $T^*(M)$ kotanjant demette elde edilen $g-lift$ ${}^G\overset{*}{\nabla}$ afin konneksiyonun $T^*(M)$ kotanjant demetteki tam lift ${}^C\overset{*}{\nabla}$ burulmasız afin konneksiyonuyla çakıştığı görülür.

3.3. Kotanjant Demette Eğrilik Tensörünün $g-lift$ i

R, M manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyonunun eğrilik tensörü olsun. R_{kji}^h, R eğrilik tensörünün bileşeni olmak üzere

$$R_{kji}^h = \partial_k\Gamma_{ji}^h - \partial_j\Gamma_{ki}^h + \Gamma_{kt}^h\Gamma_{ji}^t - \Gamma_{jt}^h\Gamma_{ki}^t$$

eşitliği ile verilir. ${}^C R$, $T(M)$ tanjant demet üzerinde tam lift ${}^C\nabla$ afin konneksiyonun eğrilik tensörü olur.

$T(M)$ tanjant demet üzerinde $\left(x^h, y^h\right)$ indirgenmiş koordinatlara göre tam lift ${}^C R$ eğrilik tensörünün ${}^C R_{TSN}^{M}$ bileşenleri (2.47) eşitliklerinde verilmiştir.

Teorem 3.3.1: (M,g) bir pseudo-Riemannian manifoldu olsun. ${}^{C}R$ ve ${}^{C}\overset{*}{R}$ sırasıyla eğrilik tensörünün $T(M)$ tanjant demet ve $T^{*}(M)$ kotanjant demetteki tam liftleri olsun. Eğer ∇ bir Riemann konneksiyon ise müzikal izomorfizmler aracılığıyla elde edilen $T^{*}(M)$ kotanjant demetteki $g-lift$ ${}^{G}\overset{*}{R}$ eğrilik tensörü $T^{*}(M)$ kotanjant demetteki tam lift ${}^{C}\overset{*}{R}$ eğrilik tensörüyle çakışır.

İspat: ${}^{C}R$, $T(M)$ tanjant demet üzerinde R eğrilik tensörünün tam lifti olsun.

Elde edilen

$$g_{*}^{\flat}\,{}^{C}R=\left({}^{G}\overset{*}{R}{}_{KJI}^{\;\;H}\right)=\left(A_{\;M}^{H}A_{K}^{T}A_{J}^{S}A_{I}^{N}\,{}^{C}R_{TSN}^{M}\right)$$

eşitliğinde (2.47), (3.1) ve (3.2) eşitlikleri kullanılarak $T^{*}(M)$ kotanjant demette $g-lift$ ${}^{G}\overset{*}{R}$ eğrilik tensörünün bileşenleri hesaplanır.

$$\begin{aligned}
{}^{G}\overset{*}{R}{}_{kji}^{\;\;h}= & \tilde{A}_{m}^{h}A_{k}^{t}A_{j}^{s}A_{i}^{n}\,{}^{C}R_{tsn}^{m}+\tilde{A}_{\bar{m}}^{h}A_{k}^{t}A_{j}^{s}A_{i}^{n}\,{}^{C}R_{tsn}^{\bar{m}}+\tilde{A}_{m}^{h}A_{k}^{\bar{t}}A_{j}^{s}A_{i}^{n}\,{}^{C}R_{\bar{t}sn}^{m}+\tilde{A}_{m}^{h}A_{k}^{t}A_{j}^{\bar{s}}A_{i}^{n}\,{}^{C}R_{t\bar{s}n}^{m}\\
& +\tilde{A}_{m}^{h}A_{k}^{t}A_{j}^{s}A_{i}^{\bar{n}}\,{}^{C}R_{ts\bar{n}}^{m}+\tilde{A}_{\bar{m}}^{h}A_{k}^{\bar{t}}A_{j}^{s}A_{i}^{n}\,{}^{C}R_{\bar{t}sn}^{\bar{m}}+\tilde{A}_{\bar{m}}^{h}A_{k}^{t}A_{j}^{\bar{s}}A_{i}^{n}\,{}^{C}R_{t\bar{s}n}^{\bar{m}}+\tilde{A}_{\bar{m}}^{h}A_{k}^{t}A_{j}^{s}A_{i}^{\bar{n}}\,{}^{C}R_{ts\bar{n}}^{\bar{m}}\\
& +\tilde{A}_{m}^{h}A_{k}^{\bar{t}}A_{j}^{\bar{s}}A_{i}^{n}\,{}^{C}R_{\bar{t}\bar{s}n}^{m}+\tilde{A}_{m}^{h}A_{k}^{t}A_{j}^{\bar{s}}A_{i}^{\bar{n}}\,{}^{C}R_{t\bar{s}\bar{n}}^{m}+\tilde{A}_{m}^{h}A_{k}^{\bar{t}}A_{j}^{s}A_{i}^{\bar{n}}\,{}^{C}R_{\bar{t}s\bar{n}}^{m}+\tilde{A}_{m}^{h}A_{k}^{\bar{t}}A_{j}^{\bar{s}}A_{i}^{\bar{n}}\,{}^{C}R_{\bar{t}\bar{s}\bar{n}}^{m}\\
& +\tilde{A}_{\bar{m}}^{h}A_{k}^{\bar{t}}A_{j}^{\bar{s}}A_{i}^{n}\,{}^{C}R_{\bar{t}\bar{s}n}^{\bar{m}}+\tilde{A}_{\bar{m}}^{h}A_{k}^{t}A_{j}^{s}A_{i}^{\bar{n}}\,{}^{C}R_{\bar{t}s\bar{n}}^{\bar{m}}+\tilde{A}_{\bar{m}}^{h}A_{k}^{t}A_{j}^{\bar{s}}A_{i}^{\bar{n}}\,{}^{C}R_{t\bar{s}\bar{n}}^{\bar{m}}+\tilde{A}_{\bar{m}}^{h}A_{k}^{\bar{t}}A_{j}^{\bar{s}}A_{i}^{\bar{n}}\,{}^{C}R_{\bar{t}\bar{s}\bar{n}}^{\bar{m}}\\
& =\delta_{m}^{h}\delta_{k}^{t}\delta_{j}^{s}\delta_{i}^{n}R_{tsn}^{m}\\
& =R_{kji}^{h}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}^{G}\overset{*}{R}{}_{kj\bar{i}}{}^{h} &= \tilde{A}^{h}_{m}A^{t}_{k}A^{s}_{j}A^{n}_{\bar{i}}\,{}^{C}R^{m}_{tsn} + \tilde{A}^{h}_{\bar{m}}A^{t}_{k}A^{s}_{j}A^{n}_{\bar{i}}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{tsn} + \tilde{A}^{h}_{m}A^{\bar{t}}_{k}A^{s}_{j}A^{n}_{\bar{i}}\,{}^{C}R^{m}_{\bar{t}sn} + \tilde{A}^{h}_{m}A^{t}_{k}A^{\bar{s}}_{j}A^{n}_{\bar{i}}\,{}^{C}R^{m}_{t\bar{s}n} \\
&+ \tilde{A}^{h}_{m}A^{t}_{k}A^{s}_{j}A^{\bar{n}}_{\bar{i}}\,{}^{C}R^{m}_{ts\bar{n}} + \tilde{A}^{h}_{\bar{m}}A^{\bar{t}}_{k}A^{s}_{j}A^{n}_{\bar{i}}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{\bar{t}sn} + \tilde{A}^{h}_{\bar{m}}A^{t}_{k}A^{\bar{s}}_{j}A^{n}_{\bar{i}}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{t\bar{s}n} + \tilde{A}^{h}_{\bar{m}}A^{t}_{k}A^{s}_{j}A^{\bar{n}}_{\bar{i}}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{ts\bar{n}} \\
&+ \tilde{A}^{h}_{m}A^{\bar{t}}_{k}A^{\bar{s}}_{j}A^{n}_{\bar{i}}\,{}^{C}R^{m}_{\bar{t}\bar{s}n} + \tilde{A}^{h}_{m}A^{t}_{k}A^{\bar{s}}_{j}A^{\bar{n}}_{\bar{i}}\,{}^{C}R^{m}_{t\bar{s}\bar{n}} + \tilde{A}^{h}_{m}A^{\bar{t}}_{k}A^{s}_{j}A^{\bar{n}}_{\bar{i}}\,{}^{C}R^{m}_{\bar{t}s\bar{n}} + \tilde{A}^{h}_{m}A^{\bar{t}}_{k}A^{\bar{s}}_{j}A^{\bar{n}}_{\bar{i}}\,{}^{C}R^{m}_{\bar{t}\bar{s}\bar{n}} \\
&+ \tilde{A}^{h}_{\bar{m}}A^{\bar{t}}_{k}A^{\bar{s}}_{j}A^{n}_{\bar{i}}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{\bar{t}\bar{s}n} + \tilde{A}^{h}_{\bar{m}}A^{\bar{t}}_{k}A^{s}_{j}A^{\bar{n}}_{\bar{i}}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{\bar{t}s\bar{n}} + \tilde{A}^{h}_{\bar{m}}A^{t}_{k}A^{\bar{s}}_{j}A^{\bar{n}}_{\bar{i}}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{t\bar{s}\bar{n}} + \tilde{A}^{h}_{\bar{m}}A^{\bar{t}}_{k}A^{\bar{s}}_{j}A^{\bar{n}}_{\bar{i}}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{\bar{t}\bar{s}\bar{n}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{G}\overset{*}{R}{}_{kji}{}^{\bar{h}} &= \tilde{A}^{\bar{h}}_{m}A^{t}_{k}A^{s}_{j}A^{n}_{i}\,{}^{C}R^{m}_{tsn} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}}A^{t}_{k}A^{s}_{j}A^{n}_{i}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{tsn} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{m}A^{\bar{t}}_{k}A^{s}_{j}A^{n}_{i}\,{}^{C}R^{m}_{\bar{t}sn} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{m}A^{t}_{k}A^{\bar{s}}_{j}A^{n}_{i}\,{}^{C}R^{m}_{t\bar{s}n} \\
&+ \tilde{A}^{\bar{h}}_{m}A^{t}_{k}A^{s}_{j}A^{\bar{n}}_{i}\,{}^{C}R^{m}_{ts\bar{n}} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}}A^{\bar{t}}_{k}A^{s}_{j}A^{n}_{i}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{\bar{t}sn} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}}A^{t}_{k}A^{\bar{s}}_{j}A^{n}_{i}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{t\bar{s}n} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}}A^{t}_{k}A^{s}_{j}A^{\bar{n}}_{i}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{ts\bar{n}} \\
&+ \tilde{A}^{\bar{h}}_{m}A^{\bar{t}}_{k}A^{\bar{s}}_{j}A^{n}_{i}\,{}^{C}R^{m}_{\bar{t}\bar{s}n} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{m}A^{t}_{k}A^{\bar{s}}_{j}A^{\bar{n}}_{i}\,{}^{C}R^{m}_{t\bar{s}\bar{n}} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{m}A^{\bar{t}}_{k}A^{s}_{j}A^{\bar{n}}_{i}\,{}^{C}R^{m}_{\bar{t}s\bar{n}} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{m}A^{\bar{t}}_{k}A^{\bar{s}}_{j}A^{\bar{n}}_{i}\,{}^{C}R^{m}_{\bar{t}\bar{s}\bar{n}} \\
&+ \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}}A^{\bar{t}}_{k}A^{\bar{s}}_{j}A^{n}_{i}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{\bar{t}\bar{s}n} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}}A^{\bar{t}}_{k}A^{s}_{j}A^{\bar{n}}_{i}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{\bar{t}s\bar{n}} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}}A^{t}_{k}A^{\bar{s}}_{j}A^{\bar{n}}_{i}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{t\bar{s}\bar{n}} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}}A^{\bar{t}}_{k}A^{\bar{s}}_{j}A^{\bar{n}}_{i}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{\bar{t}\bar{s}\bar{n}} \\
&= y^{c}\partial_{m}g_{hc}\delta^{t}_{k}\delta^{t}_{j}\delta^{n}_{i}R^{m}_{tsn} + g_{hm}\delta^{t}_{k}\delta^{s}_{j}\delta^{n}_{i}y^{d}\partial_{d}R^{m}_{tsn} + g_{hm}p_{e}\partial_{k}g^{te}\delta^{s}_{j}\delta^{n}_{i}R^{m}_{tsn} \\
&+ g_{hm}\delta^{t}_{k}p_{a}\partial_{j}g^{sa}\delta^{n}_{i}R^{m}_{tsn} + g_{hm}\delta^{t}_{k}\delta^{s}_{j}p_{b}\partial_{i}g^{nb}R^{m}_{tsn} \\
&= p_{s}\left(\nabla_{h}R^{s}_{kji} - \nabla_{i}R^{s}_{kjh} + \Gamma^{s}_{ht}R^{t}_{kji} + \Gamma^{s}_{kt}R^{t}_{ihj} + \Gamma^{s}_{jt}R^{t}_{hik} + \Gamma^{s}_{it}R^{t}_{kjh}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{G}\overset{*}{R}{}_{\bar{k}ji}{}^{\bar{h}} &= \tilde{A}^{\bar{h}}_{m}A^{t}_{\bar{k}}A^{s}_{j}A^{n}_{i}\,{}^{C}R^{m}_{tsn} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}}A^{t}_{\bar{k}}A^{s}_{j}A^{n}_{i}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{tsn} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{m}A^{\bar{t}}_{\bar{k}}A^{s}_{j}A^{n}_{i}\,{}^{C}R^{m}_{\bar{t}sn} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{m}A^{t}_{\bar{k}}A^{\bar{s}}_{j}A^{n}_{i}\,{}^{C}R^{m}_{t\bar{s}n} \\
&+ \tilde{A}^{\bar{h}}_{m}A^{t}_{\bar{k}}A^{s}_{j}A^{\bar{n}}_{i}\,{}^{C}R^{m}_{ts\bar{n}} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}}A^{\bar{t}}_{\bar{k}}A^{s}_{j}A^{n}_{i}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{\bar{t}sn} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}}A^{t}_{\bar{k}}A^{\bar{s}}_{j}A^{n}_{i}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{t\bar{s}n} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}}A^{t}_{\bar{k}}A^{s}_{j}A^{\bar{n}}_{i}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{ts\bar{n}} \\
&+ \tilde{A}^{\bar{h}}_{m}A^{\bar{t}}_{\bar{k}}A^{\bar{s}}_{j}A^{n}_{i}\,{}^{C}R^{m}_{\bar{t}\bar{s}n} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{m}A^{t}_{\bar{k}}A^{\bar{s}}_{j}A^{\bar{n}}_{i}\,{}^{C}R^{m}_{t\bar{s}\bar{n}} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{m}A^{\bar{t}}_{\bar{k}}A^{s}_{j}A^{\bar{n}}_{i}\,{}^{C}R^{m}_{\bar{t}s\bar{n}} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{m}A^{\bar{t}}_{\bar{k}}A^{\bar{s}}_{j}A^{\bar{n}}_{i}\,{}^{C}R^{m}_{\bar{t}\bar{s}\bar{n}} \\
&+ \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}}A^{\bar{t}}_{\bar{k}}A^{\bar{s}}_{j}A^{n}_{i}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{\bar{t}\bar{s}n} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}}A^{\bar{t}}_{\bar{k}}A^{s}_{j}A^{\bar{n}}_{i}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{\bar{t}s\bar{n}} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}}A^{t}_{\bar{k}}A^{\bar{s}}_{j}A^{\bar{n}}_{i}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{t\bar{s}\bar{n}} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}}A^{\bar{t}}_{\bar{k}}A^{\bar{s}}_{j}A^{\bar{n}}_{i}\,{}^{C}R^{\bar{m}}_{\bar{t}\bar{s}\bar{n}} \\
&= g_{hm}g^{tk}\delta^{s}_{j}\delta^{n}_{i}R^{m}_{tsn} \\
&= R^{k}_{hji}
\end{aligned}
$$

$$
{}^{G}\overset{*}{R}{}_{k\bar{j}\bar{i}}{}^{\bar{h}} = R^{j}_{khi}, \quad {}^{G}\overset{*}{R}{}_{kj\bar{i}}{}^{\bar{h}} = R^{i}_{kjh}\ , \quad {}^{G}\overset{*}{R}{}_{k\bar{j}\bar{i}}{}^{h} = 0, \quad {}^{G}\overset{*}{R}{}_{\bar{k}ji}{}^{h} = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{G}\overset{*}{R}{}^{h}_{\bar{k}\bar{j}\bar{i}} = {} & \tilde{A}^{h}_{m} A^{t}_{\bar{k}} A^{s}_{\bar{j}} A^{n}_{\bar{i}}\, {}^{C}R^{m}_{tsn} + \tilde{A}^{h}_{\bar{m}} A^{t}_{\bar{k}} A^{s}_{\bar{j}} A^{n}_{\bar{i}}\, {}^{C}R^{\bar{m}}_{tsn} + \tilde{A}^{h}_{m} A^{\bar{t}}_{\bar{k}} A^{s}_{\bar{j}} A^{n}_{\bar{i}}\, {}^{C}R^{m}_{\bar{t}sn} + \tilde{A}^{h}_{m} A^{t}_{\bar{k}} A^{\bar{s}}_{\bar{j}} A^{n}_{\bar{i}}\, {}^{C}R^{m}_{t\bar{s}n} \\
& + \tilde{A}^{h}_{m} A^{t}_{\bar{k}} A^{s}_{\bar{j}} A^{\bar{n}}_{\bar{i}}\, {}^{C}R^{m}_{ts\bar{n}} + \tilde{A}^{h}_{\bar{m}} A^{\bar{t}}_{\bar{k}} A^{s}_{\bar{j}} A^{n}_{\bar{i}}\, {}^{C}R^{\bar{m}}_{\bar{t}sn} + \tilde{A}^{h}_{\bar{m}} A^{t}_{\bar{k}} A^{\bar{s}}_{\bar{j}} A^{n}_{\bar{i}}\, {}^{C}R^{\bar{m}}_{t\bar{s}n} + \tilde{A}^{h}_{\bar{m}} A^{t}_{\bar{k}} A^{s}_{\bar{j}} A^{\bar{n}}_{\bar{i}}\, {}^{C}R^{\bar{m}}_{ts\bar{n}} \\
& + \tilde{A}^{h}_{m} A^{\bar{t}}_{\bar{k}} A^{\bar{s}}_{\bar{j}} A^{n}_{\bar{i}}\, {}^{C}R^{m}_{\bar{t}\bar{s}n} + \tilde{A}^{h}_{m} A^{t}_{\bar{k}} A^{\bar{s}}_{\bar{j}} A^{\bar{n}}_{\bar{i}}\, {}^{C}R^{m}_{t\bar{s}\bar{n}} + \tilde{A}^{h}_{m} A^{\bar{t}}_{\bar{k}} A^{s}_{\bar{j}} A^{\bar{n}}_{\bar{i}}\, {}^{C}R^{m}_{\bar{t}s\bar{n}} + \tilde{A}^{h}_{m} A^{\bar{t}}_{\bar{k}} A^{\bar{s}}_{\bar{j}} A^{\bar{n}}_{\bar{i}}\, {}^{C}R^{m}_{\bar{t}\bar{s}\bar{n}} \\
& + \tilde{A}^{h}_{\bar{m}} A^{\bar{t}}_{\bar{k}} A^{\bar{s}}_{\bar{j}} A^{n}_{\bar{i}}\, {}^{C}R^{\bar{m}}_{\bar{t}\bar{s}n} + \tilde{A}^{h}_{\bar{m}} A^{\bar{t}}_{\bar{k}} A^{s}_{\bar{j}} A^{\bar{n}}_{\bar{i}}\, {}^{C}R^{\bar{m}}_{\bar{t}s\bar{n}} + \tilde{A}^{h}_{\bar{m}} A^{t}_{\bar{k}} A^{\bar{s}}_{\bar{j}} A^{\bar{n}}_{\bar{i}}\, {}^{C}R^{\bar{m}}_{t\bar{s}\bar{n}} + \tilde{A}^{h}_{\bar{m}} A^{\bar{t}}_{\bar{k}} A^{\bar{s}}_{\bar{j}} A^{\bar{n}}_{\bar{i}}\, {}^{C}R^{\bar{m}}_{\bar{t}\bar{s}\bar{n}} \\
& = 0
\end{aligned}
$$

$$
{}^{G}\overset{*}{R}{}^{h}_{k\bar{j}\bar{i}} = 0, \quad {}^{G}\overset{*}{R}{}^{h}_{\bar{k}j\bar{i}} = 0, \quad {}^{G}\overset{*}{R}{}^{\bar{h}}_{\bar{k}\bar{j}i} = 0, \quad {}^{G}\overset{*}{R}{}^{\bar{h}}_{k\bar{j}\bar{i}} = 0,
$$

$$
{}^{G}\overset{*}{R}{}^{\bar{h}}_{\bar{k}j\bar{i}} = 0, \quad {}^{G}\overset{*}{R}{}^{h}_{\bar{k}\bar{j}\bar{i}} = 0, \quad {}^{G}\overset{*}{R}{}^{\bar{h}}_{\bar{k}\bar{j}\bar{i}} = 0
$$

∇ nın bir Riemann konneksiyonu olması durumunda müzikal izomorfizm aracılığla $T^{*}(M)$ kotanjant demette elde edilen $g-lift$ ${}^{G}\overset{*}{R}$ eğrilik tensörünün $T^{*}(M)$ kotanjant demetteki tam lift ${}^{C}\overset{*}{R}$ eğrilik tensörüyle çakıştığı görülür.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Sunulan bu tezde müzikal izomorfizm aracılığıyla $T^*(M)$ kotanjant demette tanımlanan $g-lift$ in elde edilmesi hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra $T^*(M)$ kotanjant demette afin konneksiyonun katsayıları elde edilip ∇ nın bir Riemann konneksiyonu olması durumunda

$$^{G}\overset{*}{\nabla} = {}^{C}\overset{*}{\nabla}$$

$T^*(M)$ kotanjant demette afin konneksiyonun $g-lift$ i ile burulmasız afin konneksiyonun tam liftinin çakıştığı sonucuna varılmıştır. Ardından müzikal izomorfizm aracılığla $T^*(M)$ kotanjant demette $g-lift$ $^{G}\overset{*}{R}$ eğrilik tensörünün katsayıları elde edilip ∇ nın bir Riemann konneksiyonu olması durumunda

$$^{G}\overset{*}{R} = {}^{C}\overset{*}{R}$$

$T^*(M)$ kotanjant demette eğrilik tensörünün $g-lift$ ile tam liftinin çakıştığı sonucuna varılmıştır.

5.KAYNAKLAR

Berger, M., Gauduchon, P. and Mazet, E. (1971). Le Spectre d`une Variete Riemannienne. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Bishop, R.L. and Golberg, S.I. (1968). Tensor Analysis on Manifolds. The Mcmillan Company, New York, 19-135.

Boucetta, M. and Sassai, Z. (2011). A class of Poisson structures compatible with the canonical Poisson structure on the cotangent bundle. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I, 349, 331-335.

Cakan, R. (2018). On gh Lifts of Some Tensor Fields. Comptes rendus de l' Académie bulgare des Sciences, 71(3), 317-324.

Cakan, R., Akbulut, K. and Salimov, A. (2016). Musical Isomorphisms and Problems of Lifts. Chinese Annals of Mathematics, 37B(3), 323-330.

Davies, E.T. (1969). On the Curvature of the Tangent Bundle, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 81 (1), 193-204.

Davies, E.T. (1966). Some Applications of the Theory of Parallel Distributions, Hlavaty Testschript, 80-95.

Dombrowski, P. (1962). On the Geometry of the Tangent Bundles, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 210, 73-88.

Kühnel, W. (2005). Differential Geometry Curves Surfaces Manifolds. American Mathematical Society, New York.

Ledger, A.J. and Yano, K. (1965). The Tangent Bundle of a Locally Symmetric Space. Journal of the London Mathematical Society, 40, 487-492.

Ledger, A.J. and Yano, K. (1967). Almost Complex Structures on Tensor Bundles, Journal of Differential Geometry, 1, 355-368.

Pogorelov, A.V. (1959). Differantial Geometry. Noordhoff, Groningen.

Poor, W.A. (1981). Differential Geometric Structures. McGraw-Hill Book Company, USA.

Şahin, B. (2012). Manifoldların Diferensiyel Geometrisi. Nobel Yayıncılık, Ankara.

Salimov, A. and Cakan, R. (2017). Problem of $g-$ lifts. Proceeding of the Institute of Mathematics and Mechanics, 43(1), 161-170.

Salimov, A.A. and Mağden, A. (2008). Diferansiyel Geometriye Giriş. Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Sasaki, S. (1958). On the Differantial Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds. Tohoku Mathematical Journal, 10, 238-354.

Tachibana, S. and Okumura, M. (1962). On the Almost-Complex Structure of Tangent Bundles of Riemannian Spaces. Tohoku Mathematical Journal, 14, 156-161.

Yano, K. (1967a). Tensor Field and Connections on Cross-Sections in the Tangent Bundle of a Differentiable Manifold. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A, 67(4), 277-288.

Yano, K. (1967b). Tensor Fields and Connections on Cross-sections in the Cotangent Bundle, Tohoku Mathematical Journal, 19, 32-48.

Yano, K. and Davies, E.T. (1963). On the Tangent Bundles of Finsler and Riemannian Manifolds. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 12, 211-228.

Yano, K. and Davies, E.T. (1971). Metrics and Connections in the Tangent Bundle. Kodai Mathematical Seminar Reports, 23, 493-504.

Yano, K. and Ishihara, S. (1973). Tangent and cotangent bundles. Pure and Applied Mathematic,Marcel Dekker, Inc., New York.

Yano, K. and Kobayashi, S. (1966). Prolongations of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundle, I, General Theory. Journal of the Mathematical Society of Japan, 18, 194-210.

Yano, K. and Patterson, E.M. (1967). Vertical and Complete Lifts from a Manifold to its Cotangent Bundle, Journal of the Mathematical Society of Japan, 19, 91-113.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: ESEN KEMER
Doğum Yeri ve Tarihi	: KARS/23.05.1992
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (e-posta)	: esenkemer921@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Kars Cumhuriyet Anadolu Lisesi, 2010
Lisans	: Kafkas Üniversitesi, 2015
Yüksek Lisans	: Kafkas Üniveristesi, 2019