T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAMMA VE BETA YILDIZIL FONKSİYONLARININ ÇEŞİTLİ ÖZELLİKLERİ

Mustafa ATEŞ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

Temmuz - 2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Mustafa ATEŞ'in Prof. Dr. Nizami MUSTAFA'nın danışmanlığında Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı "Gamma ve Beta Yıldızıl Fonksiyonlarının Çeşitli Özellikleri" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ..birliği.. ile kabul edilmiştir.

04/07/2019

	Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA	
Üye	: Prof. Dr. Erhan DENİZ	
Üye	: Doç. Dr. Ali Hikmet DEĞER	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ../ .. / 2019 gün ve .. . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mustafa ATEŞ
04.07.2019

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

Gamma ve Beta Yıldızıl Fonksiyonların Çeşitli Özellikleri

Mustafa ATEŞ

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

Bu yüksek lisans tez çalışmasında analitik ve ünivalent fonksiyonların belli bir alt sınıfının katsayı problemi incelendi. Çalışmada bu sınıfa ait olan fonksiyonun ters fonksiyonunun katsayı problemi ve logaritmik katsayı problemi de ele alındı.

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, ünivalent fonksiyon, ters fonksiyon, katsayı problemi, logaritmik katsayı.

2019, 44 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

Various Properties of Gamma and Beta Starlike Functions

Mustafa ATEŞ

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

In this master thesis, the coefficient problem of a certain subclass of analytical and univalent functions was examined. In the study, the coefficient problem of the inverse function and the logarithmic coefficient problem of the function belonging to this class were also examined.

Key Words: Analytic function, univalent function, inverse function, coefficient problem, logarithmic coefficient.

2019, 44 pages

ÖNSÖZ

Tez çalışması sırasında her türlü bilgi, teşvik ve deneyimleri ile yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Nizami MUSTAFA'ya ve yüksek lisans eğitimim süresince her türlü maddi ve manevi destekleri ile göstermiş oldukları sabırdan dolayı aileme şükranlarımı bir borç bilirim.

Mustafa ATEŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
U	$U=\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert<1\}$ merkezil açık birim disk
$f(U)$	U açık birim diskinin f fonksiyonu altında görüntüsü
A	U 'da analitik ve $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulunu sağlayan $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n, a_n\in\mathbb{C}, n=2,3,\ldots$ fonksiyonlarının sınıfı
S	A 'nın ünivalent fonksiyonlarından oluşan alt sınıfı
C	U 'da konveks fonksiyonların sınıfı
S^*	U 'da yıldızıl (Starlike) fonksiyonların sınıfı
$U(z_0,\varepsilon)$	z_0 noktasının ε komşuluğu
$S^*(\alpha)$	$S^*(\alpha)=\left\{f\in S:\mathrm{Re}\left\{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\alpha,\ z\in U\right\}$
$C(\alpha)$	$C(\alpha)=\left\{f\in S:\mathrm{Re}\left\{1+\dfrac{zf''(z)}{f(z)}\right\}>\alpha,\ z\in U\right\}$

$\aleph(\alpha,\beta,\gamma)$

$$\aleph(\alpha,\beta,\gamma)=\left\{\begin{array}{l} f\in S: \\ \mathrm{Re}\left[\dfrac{zf'(z)+\gamma z^2 f''(z)}{\gamma z\left[f'(z)+\beta z f''(z)\right]+(1-\gamma)\left[\beta z f'(z)+(1-\beta)f(z)\right]}\right]>\alpha, \\ z\in U \end{array}\right\}$$

$\aleph(\beta,\gamma)$

$$\aleph(\beta,\gamma)=\left\{\begin{array}{l} f\in S: \\ \operatorname{Re}\left[\dfrac{zf'(z)+\gamma z^2 f''(z)}{\gamma z\left[f'(z)+\beta z f''(z)\right]+(1-\gamma)\left[\beta z f'(z)+(1-\beta)f(z)\right]}\right]>0, \\ z\in U \end{array}\right\}$$

1. GENEL BİLGİLER

1.1. GİRİŞ

Bilinmektedir ki, katsayı (fonksiyonun katsayılarının modüllerinin bir üst sınırının bulunması) problemi fonksiyonlar teorisinin önemli konularındandır. Bu konuda analitik fonksiyonların farklı alt sınıfları için çok sayıda çalışma mevcuttur (örnek için bakınız [1 - 16]).

Analitik ve ünivalent fonksiyonların belli bir sınıfına ait olan fonksiyonların tersinin katsayı problemi de ilgi çekici problemlerdendir.

Analitik fonksiyonlar teorisinin bir ilginç konusu da logaritmik katsayı problemi denilen problemdir. Belli bir sınıftan olan fonksiyonun değişkene oranının logaritmasının katsayılarının modülünün üst sınırının bulunmasına analitik fonksiyonlar teorisinde logaritmik katsayı problemi denmektedir (bakınız [1]).

Bu tez çalışmasında aşağıdaki konular ele alındı:

1. Analitik ve ünivalent fonksiyonların belli bir alt sınıfı için katsayı problemi çalışıldı. Tez çalışmasında analitik ve ünivalent fonksiyonların belli bir alt sınıfının ilk üç katsayıları için değerlendirmeler elde edildi.

2. Analitik ve ünivalent fonksiyonların belli bir alt sınıfının ters fonksiyonlarının katsayı problemi çalışıldı. Tez çalışmasında ters fonksiyonların ilk üç katsayıları için değerlendirmeler elde edildi.

3. $f(z)$ tez çalışmasında tanımlanan sınıftan olmak üzere $\log\left(\frac{f(z)}{z}\right) = g(z)$ fonksiyonunun katsayı problemi incelendi.

Ele alınan yüksek lisans tezi, birinci bölümü kuramsal temeller, ikinci bölümü materyal ve yöntemleri ve üçüncü bölüm ise araştırma bulguları olmak üzere, üç bölümden oluşur.

1.2. KURAMSAL TEMELLER

1.2.1. Genel Kavramlar

Tezin bu kısmında temel bilgilere yer verilmiştir.

Tanım 1.2.1.1 (Komşuluk): $\varepsilon > 0$ bir sayı olmak üzere

$$U(z_0,\varepsilon) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon \}$$

kümesine $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının $\varepsilon -$ *komşuluğu* denir.

Tanım 1.2.1.2: Karmaşık düzlemde, verilen bir kümeye ait noktanın belli bir komşuluğu tamamen bu küme içinde kalıyor ise bu noktaya bu kümenin bir *iç nokta*'sı denir. Sadece iç noktalardan oluşan kümeye *açık küme* denir.

Tanım 1.2.1.3: Kümeye ait olmayan noktalardan oluşan kümeye kümenin *tümleyeni* ve tümleyeni açık olan kümeye de *kapalı küme* denir.

Tanım 1.2.1.4 (Bağlantılı Küme): Herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası kümeye ait ise kümeye (doğrusal) *bağlantılı küme* denir.

Tanım 1.2.1.5: Karmaşık düzlemin açık ve bağlantılı kümesine bir *bölge* denir.

1.2.2. Analitik Fonksiyonlar ve Bazı Alt Sınıfları

Tanım 1.2.2.1: $f(z)$ karmaşık değişkenli ve karmaşık değerli fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun.
Eğer, sonlu

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa bu fonksiyona z_0 noktasında türevlenebilir (veya diferansiyellenebilir) denir. Eğer, bir fonksiyon tanımlı olduğu bir noktanın belli bir komşuluğunda türevlenebilirse bu fonksiyona bu noktada *analitik fonksiyon* denir [18].

Tanım 1.2.2.2: $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşulunu sağlayan ve $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna *normalize edilmiş fonksiyon* denir [19].

U birim diskinde normalize edilmiş analitik ve

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \ a_n \in \mathbb{C}, n = 2, 3, ... \qquad (1.2.2.1)$$

şekilli seri açılımına sahip olan $f(z)$ fonksiyonlarının sınıfı A ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde yazılır

$$A = \left\{ f : \forall z \in U \text{ için} f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ şeklindeki analitik fonksiyonlar} \right\}.$$

Tanım 1.2.2.3: Kompleks düzlemin bir D altkümesi üzerinde tanımlanmış bir $f(z)$ analitik fonksiyonu, kendi $f(D)$ resmi üzerine birebir oluyorsa bu fonksiyona D bölgesinde *ünivalent fonksiyon* denir.

Bir başka deyişle $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere $f(z_1)=f(z_2)$ olduğunda $z_1 = z_2$ ya da $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna D bölgesinde *ünivalent fonksiyon* denir [19].

U bölgesinde analitik ve ünivalent olan (1.2.2.1) şekilli fonksiyonların sınıfı S olsun. Yani, $S=\{f \in A : f - \text{ünivalenttir}\}$ [20].

Tanım 1.2.2.4 : Karmaşık düzlemde bir bölgenin belli bir noktasını keyfi noktasıyla birleştiren doğru parçası bu bölgeye ait ise bu bölgeye bu *noktaya göre yıldızıl (starlike) bölge* denir. Karmaşık düzlemin orijine göre yıldızıl bölgesine (kısaca) *yıldızıl bölge* denir [20].

Tanım 1.2.2.5 : Karmaşık düzlemde tanımlı görüntü kümesi yıldızıl olan bir analitik ünivalent fonksiyona *yıldızıl fonksiyon* denir [20].

Not: Biz bu tez çalışmamızda açık birim diskte yıldızıl fonksiyonlar sınıfını araştıracağız.

Teorem 1.2.2.1 : $f \in S$ fonksiyonunun U 'da yıldızıl olabilmesi için gerek ve yeter şart her $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

şartının sağlanmasıdır.

Normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir. Yani,

$$S^* = \left\{ f \in S : \mathrm{Re}\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0,\ z \in U \right\}$$

olarak tanımlanır [20].

<u>Tanım 1.2.2.6</u> : $f \in S$ olsun. Eğer, U kümesinde $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna α *mertebeden yıldızıl fonksiyon* denir ve α mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı $S^*(\alpha)$ ile gösterilir.

Yani,

$$S^*(\alpha) = \left\{ f \in S : \mathrm{Re}\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha,\ z \in U \right\}$$

[21].

<u>Tanım 1.2.2.7</u> : B karmaşık düzlemde bir bölge olmak üzere B 'deki her nokta çiftini birleştiren doğru parçası yine B bölgesinde kalıyorsa B 'ye *konveks bölge* denir [20].

<u>Tanım 1.2.2.8</u> : $f \in A$ olmak üzere $f(U)$ bölgesi bir konveks bölge ise, $f(z)$ fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir [20].

<u>Teorem 1.2.2.2</u> : $f \in S$ fonksiyonunun U 'da konveks olması için gerekli ve yeterli şart her $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0$$

sağlanmasıdır.

Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir. Yani,

$$C=\left\{f\in S:\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f(z)}\right\}>0,\ \mathrm{z}\in U\right\}$$

[20].

Tanım 1.2.2.9 : $f\in S$ olsun. Eğer, U diskinde $\alpha\geq 0$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonu α *mertebeden konvekstir* denir ve α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı $C(\alpha)$ ile gösterilir.

Yani,

$$C(\alpha)=\left\{f\in S:\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f(z)}\right\}>\alpha,\ \mathrm{z}\in U\right\}$$

[22].

Konveks ve yıldızıl fonksiyonlar arasındaki ilişki aşağıda teoremde verilmiştir.

Teorem 1.2.2.3 (Alexander teoremi): $f\in C\Leftrightarrow zf'\in S^{*}$ [19].

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Materyaller

Tezin bu bölümünde kullanılacak olan bazı ön bilgiler verilecektir.

Her $f \in S$ fonksiyonu için $D=\{w:|w|<r_0(f)\}$, $r_0(f)\geq 1/4$ diskinde tanımlanan ve

$$f^{-1}(w)=w+A_2w^2+A_3w^3+A_4w^4+\cdots,\ w\in D, \tag{2.1.1}$$

burada $A_2=-a_2$, $A_3=2a_2^2-a_3$, $A_4=-5a_2^3+5a_2a_3-a_4$, şekilli seri açılımına sahip analitik $f^{-1}(w)$ ters fonksiyonu vardır (örneğin bakınız [17]).

Bilindiği üzere, (1.2.2.1) şekilli analitik fonksiyonların bazı ilk katsayılarının değerlendirilmesine geometrik fonksiyonlar teorisinde katsayı problemi denir.

Buna göre, (2.1.1) şekilli analitik fonksiyonların bazı ilk katsayılarının değerlendirilmesine de geometrik fonksiyonlar teorisinde ters fonksiyonun katsayı problemi denir (örneğin bakınız [1]).

Bununla beraber, $f \in S$ olmak üzere $\log(f(z)/z)$ fonksiyonunun katsayıları için sınır değerlendirmelerin bulunması önemli problemlerdendir (örneğin bakınız [1]).

Biz tez çalışmamızda analitik ve ünivalent fonksiyonların aşağıda tanımlanan bazı alt sınıflarını inceledik.

Tanım 2.1.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f \in S$ fonksiyonlarının

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)+\gamma z^2 f''(z)}{\gamma z\left[f'(z)+\beta z f''(z)\right]+(1-\gamma)\left[\beta z f'(z)+(1-\beta)f(z)\right]}\right]>\alpha,\ z\in U$$

koşulunu sağlayan alt sınıfına $\aleph(\alpha,\beta,\gamma), \beta\in[0,1)$, $\alpha\in[0,1)$ $\gamma\geq 0$ sınıfı diyeceğiz.

<u>Hatırlatma 2.1.1:</u> Özel durumda Tanım 2.1.1'de $\gamma=0$ ve $\beta=0$ alınırsa iyi bilinen $S^*(\alpha)=\aleph(\alpha,0,0), \alpha\in[0,1)$ sınıfını ve $\gamma=1$ ve $\beta=0$ yazılırsa $C(\alpha)=\aleph(\alpha,0,1)$, $\alpha\in[0,1)$ sınıfını elde ederiz.

<u>Tanım 2.1.2:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f\in S$ fonksiyonlarının

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)+\gamma z^2 f''(z)}{\gamma z\left[f'(z)+\beta z f''(z)\right]+(1-\gamma)\left[\beta z f'(z)+(1-\beta)f(z)\right]}\right]>0,$$

koşulunu sağlayan alt sınıfına $\aleph(\beta,\gamma)$, $\beta\in[0,1)$, $\gamma\geq 0$ sınıfı diyeceğiz.

<u>Hatırlatma 2.1.2:</u> Özel durumda Tanım 2.1.2'de $\gamma=0$ ve $\beta=0$ yazılırsa iyi bilinen $S^*=\aleph(0,0)$ sınıfını ve $\gamma=1$ ve $\beta=0$ yazılırsa $C=\aleph(0,1)$ sınıfını elde ederiz.

2.2. Yöntemler

Tezin bu alt bölümüde tezde kullanılacak bazı yardımcı lemmalar verilecektir.

P ile U açık birim diskte analitik, $p(0)=1$, $\operatorname{Re} p(z)>0$ koşullarını sağlayan,

$$p(z)=1+p_1 z+p_2 z^2+\cdots,\ z\in U. \qquad (2.2.1)$$

seri açılımlı $p(z)$ foksiyonlarının sınıfını gösterelim.

Lemma 2.2.1 ([22]): $p \in P$ fonksiyonunun katsayıları için $|p_n| \leq 2,\ n = 1,2,3,...$ eşitsizlikleri kesindir ve $|z| \leq 1$ ve $|w| \leq 1$ olmak üzere bazı z ve w karmaşık değerleri için

$$2p_2 = p_1^2 + \left(4 - p_1^2\right)z, \tag{2.2.2}$$

$$4p_3 = p_1^3 + 2\left(4 - p_1^2\right)p_1 z - \left(4 - p_1^2\right)p_1 z^2 + 2\left(4 - p_1^2\right)\left(1 - |z|^2\right)w \tag{2.2.3}$$

eşitlikleri doğrudur.

Lemma 2.2.2 ([2, 23]): Eğer, $p \in P$ ise

$$\left|p_2 - \frac{\mu}{2}p_1^2\right| \leq 2 \cdot \max\left\{1, |\mu - 1|\right\} = 2\begin{cases} 1 & \text{eğer } \mu \in [0,2], \\ |\mu - 1|, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Bazı Analitik Fonksiyon Sınıfları İçin Katsayı Problemi

3.1.1 $\aleph(\alpha,\beta,\gamma)$, $\beta\in[0,1),\gamma\geq 0,\alpha\in[0,1)$ Altsınıfı İçin Katsayı Problemi

Tezimizin bu bölümünde, $\aleph(\alpha,\beta,\gamma)$, $\beta\in[0,1)$, $\gamma\geq 0$, $\alpha\in[0,1)$ altsınıfına ait olan fonksiyonların bazı ilk katsayılarının modülleri için kesin eşitsizlikler verilir.

Teorem 3.1.1.1: (1.2.2.1) formülü ile verilen f fonksiyonu $\aleph(\alpha,\beta,\gamma)$, $\beta\in[0,1)$, $\alpha\in[0,1)$, $\gamma\geq 0$ altsınıfına ait ise bu fonksiyonun seri açılımındaki ilk üç katsaysı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_2|\leq\frac{2(1-\alpha)}{(1-\beta)(1+\gamma)},\quad |a_3|\leq\frac{1-\alpha}{(1-\beta)(1+2\gamma)}+\frac{2(1-\alpha)^2(1+\beta)}{(1-\beta)^2(1+2\gamma)}$$

ve

$$|a_4|\leq\frac{(1-\alpha)\left\{2(1-\beta)^2+2(1-\alpha)(1-\beta)(3+4\beta)+4(1-\alpha)^2(1+\beta)(1+2\beta)\right\}}{3(1-\beta)^3(1+3\gamma)}.$$

İspat : $f\in\aleph(\alpha,\beta,\gamma)$, $\beta\in[0,1)$, $\alpha\in[0,1)$, $\gamma\geq 0$ olsun. Bu demek olur ki, $p\in P$ Lemma 2.2.1'de tanımlanan fonksiyon olmak üzere,

$$\frac{zf'(z)+\gamma z^2f''(z)}{\gamma z\left[f'(z)+\beta zf''(z)\right]+(1-\gamma)\left[\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)\right]}=\alpha+(1-\alpha)p(z),\ z\in U.\quad (3.1.1.1)$$

Eğer,

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n=z+\alpha_2 z^2+\alpha_3 z^3+\alpha_4 z^4+\cdots,$$

$$(1-\beta)f(z)=z-\beta z+\sum_{n=2}^{\infty}(1-\beta)a_n z^n$$
$$=z-\beta z+(1-\beta)\alpha_2 z^2+(1-\beta)\alpha_3 z^3+(1-\beta)\alpha_4 z^4+...,$$

$$f'(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}na_n z^{n-1}=1+2a_2 z+3a_3 z^2+4a_4 z^3+\cdots,$$

$$zf'(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}na_n z^n=z+2a_2 z^2+3a_3 z^3+4a_4 z^4+\cdots,$$

$$\beta zf'(z)=\beta z+\sum_{n=2}^{\infty}n\beta a_n z^n=\beta z+2\beta a_2 z^2+3\beta a_3 z^3+4\beta a_4 z^4+\cdots$$

$$f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n z^{n-2}=2a_2+6a_3 z+12a_4 z^2+\cdots,$$

$$\beta zf''(z)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\beta a_n z^{n-1}=2\beta a_2 z+6\beta a_3 z^2+12\beta a_4 z^3+\cdots,$$

$$\gamma z^2 f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\gamma a_n z^n=2\gamma a_2 z^2+6\gamma a_3 z^3+12\gamma a_4 z^4+\cdots,$$

eşitliklerini dikkate alırsak basit hesaplamalarla (3.1.1.1) eşitliğini aşağıdaki şekilde yazarız:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(1-\beta)\left[1+(n-1)\gamma\right]a_n z^n=\left\{z+\sum_{n=2}^{\infty}\left[1+(n-1)\gamma\right]\left[1+(n-1)\beta\right]a_n z^n\right\}\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha)p_n z^n$$
$$(1-\beta)(1+\gamma)a_2 z^2+2(1-\beta)(1+2\gamma)a_3 z^3+3(1-\beta)(1+3\gamma)a_4 z^4+\cdots$$
$$=\left[(1-\alpha)p_1\right]z^2+\left[(1-\alpha)p_2+(1-\alpha)(1+\gamma)(1+\beta)a_2 p_1\right]z^3$$
$$+\left[(1-\alpha)p_3+(1-\alpha)(1+\gamma)(1+\beta)a_2 p_2+(1-\alpha)(1+2\gamma)(1+2\beta)a_3 p_1\right]z^4. \tag{3.1.1.2}$$

(3.1.1.2)'de z değişkeninin aynı kuvvetlerinin katsayılarını eşitlersek

$$(1-\beta)(1+\gamma)a_2=(1-\alpha)p_1, \tag{3.1.1.3}$$

$$2(1-\beta)(1+2\gamma)a_3=(1-\alpha)p_2+(1-\alpha)(1+\gamma)(1+\beta)a_2 p_1, \tag{3.1.1.4}$$

$$3(1-\beta)(1+3\gamma)a_4=(1-\alpha)p_3+(1-\alpha)(1+\gamma)(1+\beta)a_2p_2 \\ +(1-\alpha)(1+2\gamma)(1+2\beta)a_3p_1 \tag{3.1.1.5}$$

elde ederiz.

(3.1.1.3) – (3.1.1.4) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{(1-\alpha)p_1}{(1-\beta)(1+\gamma)} \\ a_3 &= \frac{(1-\alpha)p_2}{2(1-\beta)(1+2\gamma)}+\frac{(1-\alpha)(1+\gamma)(1+\beta)a_2p_1}{2(1-\beta)(1+2\gamma)}, \\ a_4 &= \frac{(1-\alpha)p_3}{3(1-\beta)(1+3\gamma)}+\frac{(1-\alpha)(1+\gamma)(1+\beta)a_2p_2}{3(1-\beta)(1+3\gamma)} \\ &+\frac{(1-\alpha)(1+2\gamma)(1+2\beta)(1+2\beta)a_3p_1}{3(1-\beta)(1+3\gamma)} \end{aligned} \tag{3.1.1.6}$$

yazar, a_2'nin ifadesini ikinci eşitlikte, a_2 ve a_3'ün ifadelerini de üçüncü eşitlikte yerine koyarsak a_3 ve a_4 katsayıları için buluruz

$$a_3=\frac{(1-\alpha)p_2}{2(1-\beta)(1+2\gamma)}+\frac{(1-\alpha)^2(1+\beta)p_1^2}{2(1-\beta)^2(1+2\gamma)}, \tag{3.1.1.7}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{(1-\alpha)p_3}{3(1-\beta)(1+3\gamma)}+\frac{(1-\alpha)^2(3+4\beta)p_1p_2}{6(1-\beta)^2(1+3\gamma)} \\ &+\frac{(1-\alpha)^3(1+\beta)(1+2\beta)p_1^3}{6(1-\beta)^3(1+3\gamma)} \end{aligned} \tag{3.1.1.8}$$

Görüldüğü üzere, her $\gamma \geq 0$, $\beta \in [0,1)$, $\alpha \in [0,1)$ için (3.1.1.6), (3.1.1.7) ve (3.1.1.8) eşitliklerinde p_1, p_2, p_3, p_1p_2, p_1^2 ve p_1^3 parametrelerinin katsayıları pozitiftir. Buna göre, bu eşitliklere üçgen eşitsizliğini uygularsak $|a_2|$, $|a_3|$ ve $|a_4|$ için elde ederiz

$$|a_2| \leq \frac{(1-\alpha)}{(1-\beta)(1+\gamma)}|p_1|,$$

$$|a_3| \le \frac{(1-\alpha)}{2(1-\beta)(1+2\gamma)}|p_2| + \frac{(1-\alpha)^2(1+\beta)}{2(1-\beta)^2(1+2\gamma)}|p_1^2|,$$

$$|a_4| \le \frac{(1-\alpha)}{3(1-\beta)(1+3\gamma)}|p_3| + \frac{(1-\alpha)^2(3+4\beta)}{6(1-\beta)^2(1+3\gamma)}|p_1||p_2|$$
$$+\frac{(1-\alpha)^3(1+\beta)(1+2\beta)}{6(1-\beta)^3(1+3\gamma)}|p_1^3|.$$

Ayrıca, Lemma 2.2.1 gereğince $|p_n| \le 2$, $n=1,2,3,\ldots$ olduğundan sonuncu eşitsizliklerden

$$|a_2| \le \frac{2(1-\alpha)}{(1-\beta)(1+\gamma)},$$

$$|a_3| \le \frac{(1-\alpha)}{(1-\beta)(1+2\gamma)} + \frac{2(1-\alpha)^2(1+\beta)}{(1-\beta)^2(1+2\gamma)},$$

$$|a_4| \le \frac{(1-\alpha)\left\{2(1-\beta)^2 + 2(1-\alpha)(1-\beta)(3+4\beta) + (1-\alpha)^2(1+\beta)(1+2\beta)\right\}}{3(1-\beta)^3(1+3\gamma)}$$

elde edilir.

Bununla teoremde verilen eşitsizliklerin doğruluğu ispatlandı.

Şimdi eşitsizliklerin kesin olduğunu görelim. Doğrudan da $p_1 = p_2 = p_3 = 2$ alınırsa (3.1.1.6) – (3.1.1.8) eşitliklerinden görüldüğü üzere eşitsizliklerin üçü de eşitlik olarak gerçekleşir.

Öte yandan

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n ,$$

dolayısıyla bu fonksiyon için $p_n = 2$, $n = 1,2,3,...$ olduğundan (3.1.1.1) koşulunda $p(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ alır ve bu koşulu yeniden düzenlersek

$$\begin{aligned}&\{1-\beta-[(1-2\alpha)\beta+1]z\}\gamma z^2 y'' + \{(1-\beta)(1-\gamma)-[(1-2\alpha)(\beta+(1-\beta)\gamma)+1]z\}y' \\ &-(1-\beta)(1-\gamma)[1+(1-2\alpha)z]y = 0\end{aligned}$$

diferansiyel denkleminin bir özel çözümü için teoremde elde edilen eşitsizlikler kesindir.

Bununla Teorem 3.1.1.1'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.1.1.1'den aşağıdaki sonuçları özel durum olarak elde ederiz.

<u>Teorem 3.1.1.2:</u> [5] (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\beta,\gamma)$, $\beta \in [0,1)$, $\gamma \geq 0$ altsınıfından ise bu fonksiyonun ilk üç katsaysı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_2| \leq \frac{2}{(1-\beta)(1+\gamma)}, \quad |a_3| \leq \frac{3+\beta}{(1-\beta)^2(1+2\gamma)}$$

ve

$$|a_4| \leq \frac{2(\beta^2+5\beta+6)}{3(1-\beta)^3(1+3\gamma)}.$$

<u>Sonuç 3.1.1.1:</u> (1.2.2.1) formülü ile verilen f fonksiyonu $\aleph(\alpha,\beta,0)$, $\beta \in [0,1)$, $\alpha \in [0,1)$ altsına ait ise bu fonksiyonun seri açılımındaki ilk üç katsaysı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_2| \leq \frac{2(1-\alpha)}{1-\beta}, \quad |a_3| \leq \frac{1-\alpha}{1-\beta} + \frac{2(1-\alpha)^2(1+\beta)}{(1-\beta)^2}$$

ve

$$|a_4| \leq \frac{(1-\alpha)\left\{2(1-\beta)^2 + 2(1-\alpha)(1-\beta)(3+4\beta) + 4(1-\alpha)^2(1+\beta)(1+2\beta)\right\}}{3(1-\beta)^3}.$$

<u>Sonuç 3.1.1.2:</u> (1.2.2.1) formülü ile verilen f fonksiyonu $\aleph(\alpha,0,\gamma)$, $\alpha \in [0,1)$, $\gamma \geq 0$ altsına ait ise bu fonksiyonun seri açılımındaki ilk üç katsaysı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_2| \leq \frac{2(1-\alpha)}{1+\gamma}, \quad |a_3| \leq \frac{(1-\alpha)(3-2\alpha)}{1+2\gamma}$$

ve

$$|a_4| \leq \frac{2(1-\alpha)(2\alpha^2 - 7\alpha + 6)}{3(1+3\gamma)}.$$

<u>Sonuç 3.1.3</u> : (1.2.2.1) formülü ile verilen f fonksiyonu $\aleph(\alpha,0,0) = S^*(\alpha)$ $\alpha \in [0,1)$ altsına ait ise bu fonksiyonun seri açılımındaki ilk üç katsaysı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_2| \leq 2(1-\alpha), \quad |a_3| \leq (1-\alpha)(3-2\alpha)$$

ve

$$|a_4| \leq \frac{2(1-\alpha)(2\alpha^2 - 7\alpha + 6)}{3}.$$

Sonuç 3.1.1.4: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu S^* altsınıfından ise bu fonksiyonun ilk üç katsaysı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_n| \leq n, \quad n = 2,3,4.$$

Sonuç 3.1.1.5: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu C, altsınıfından ise bu fonksiyonun ilk üç katsaysı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_n| \leq 1, \quad n = 2,3,4.$$

Sonuç 3.1.1.6: (1.2.2.1) formülü ile verilen f fonksiyonu $\aleph(\alpha,0,1) = C(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$, $\gamma \geq 0$ altsına ait ise bu fonksiyonun seri açılımındaki ilk üç katsaysı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_2| \leq 1-\alpha, \quad |a_3| \leq \frac{(1-\alpha)(3-2\alpha)}{3}$$

ve

$$|a_4| \leq \frac{(1-\alpha)(2\alpha^2-7\alpha+6)}{6}.$$

Sonuç 3.1.1.7: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\alpha,\beta,1)$, $\beta \in [0,1)$ $\alpha \in [0,1)$ altsınıfından ise bu fonksiyonun ilk üç katsaysı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_2| \leq \frac{1-\alpha}{1-\beta}, \quad |a_3| \leq \frac{1-\alpha}{3(1-\beta)} + \frac{2(1-\alpha)^2(1+\beta)}{3(1-\beta)^2}$$

ve

$$|a_4| \le \frac{(1-\alpha)\left\{2(1-\beta)^2+2(1-\alpha)(1-\beta)(3+4\beta)+4(1-\alpha)^2(1+\beta)(1+2\beta)\right\}}{12(1-\beta)^3}.$$

3.1.2 $\aleph(\alpha,\beta,\gamma)$, $\beta\in[0,1), \gamma\ge 0, \alpha\in[0,1)$ Altsınıfına Ait olan Fonksiyonun Tersi İçin Katsayı Problemi

Bu bölümde, biz (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f\in\aleph(\alpha,\beta,\gamma)$, $\beta\in[0,1), \gamma\ge 0$, $\alpha\in[0,1)$ fonksiyonunun f^{-1} tersinin ilk katsayılar için değerlendirmeler verilir.

Teorem 3.1.2.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\alpha,\beta,\gamma)$, $\beta\in[0,1)$, $\gamma\ge 0, \alpha\in[0,1)$ altsınıfından ise bu fonksiyonun f^{-1} tersinin ilk üç katsaysı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|A_2| \le \frac{2(1-\alpha)}{(1-\beta)(1+\gamma)}, \quad \gamma\ge 0.$$

$\gamma\in\left[0,1+\sqrt{2}\right]$ için

$$|A_3| \le \begin{cases} \dfrac{(1-\alpha)|\mu-1|}{(1-\beta)(1+2\gamma)} & \text{eğer } \alpha\in[0,\alpha_0), \\ \dfrac{1-\alpha}{(1-\beta)(1+2\gamma)} & \text{eğer } \alpha\in[\alpha_0,1), \end{cases}$$

burada

$$\alpha_0 = \frac{2\left[2(1+2\gamma)-(1-\beta)(1+\gamma)^2\right]}{4(1+2\gamma)-(1-\beta)(1+\gamma)^2} \text{ ve } \mu = \frac{2(1-\alpha)\left[4(1+2\gamma)-(1+\beta)(1+\gamma)^2\right]}{(1-\beta)(1+\gamma)^2}.$$

$\gamma\ge 1+\sqrt{2}$ için

$$|A_3| \le \begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{(1-\beta)(1+2\gamma)} & \text{eğer } \alpha \in [0,\alpha_0) \text{ ve } \beta \ge \beta_0, \\ \dfrac{(1-\alpha)|\mu-1|}{(1-\beta)(1+2\gamma)} & \text{eğer } \alpha \in [\alpha_0,1) \text{ ve } \beta \in [0,\beta_0], \end{cases}$$

burada, $\beta_0 = 1 - \dfrac{4(1+2\gamma)}{(1+\gamma)^2}$.

<u>İspat:</u> $f \in \aleph(\alpha,\beta,\gamma)$, $\beta \in [0,1), \gamma \ge 0, \alpha \in [0,1)$ olsun. Bu durumda, $\aleph(\alpha,\beta,\gamma) \subset S$ olduğundan f fonksiyonunun $D = \{w : |w| < r_0(f)\}$, $r_0(f) \ge \dfrac{1}{4}$ açık birim diskinde tanımlı ve

$$f^{-1}(w) = w + A_2 w^2 + A_3 w^3 + A_4 w^4 + \cdots$$

şekilli bir f^{-1} tersi vardır, burada

$$A_2 = -a_2,\ A_3 = 2a_2^2 - a_3,\ A_4 = -5a_2^3 + 5a_2 a_3 - a_4. \tag{3.1.2.1}$$

Böylece, (3.1.2.1)'in birinci eşitliğinden ve Teorem 3.1.1.1'den A_2 için yazarız:

$$A_2 = -\frac{(1-\alpha)p_1}{(1-\beta)(1+\gamma)}. \tag{3.1.2.2}$$

Sonuncu eşitlikten

$$|A_2| \le \frac{2(1-\alpha)}{(1-\beta)(1+\gamma)}$$

elde ederiz.

Şimdi, $|A_3|$ için bir değerlendirme bulalım. (3.1.2.1)'in ikinci eşitliğinden ve (3.1.1.6), (3.1.1.7)'den aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$A_3 = -\frac{1-\alpha}{2(1-\beta)(1+2\gamma)}\left[p_2 - \frac{4(1+2\gamma)-(1+\beta)(1+\gamma)^2}{(1-\beta)(1+\gamma)^2}(1-\alpha)p_1^2\right]. \qquad (3.1.2.3)$$

Buradan

$$|A_3| = \frac{1-\alpha}{2(1-\beta)(1+2\gamma)}\left|p_2 - \frac{4(1+2\gamma)-(1+\beta)(1+\gamma)^2}{(1-\beta)(1+\gamma)^2}(1-\alpha)p_1^2\right|$$

ya da $\mu = \dfrac{2(1-\alpha)\left[4(1+2\gamma)-(1+\beta)(1+\gamma)^2\right]}{(1-\beta)(1+\gamma)^2}$ olmak üzere,

$$|A_3| = \frac{1-\alpha}{2(1-\beta)(1+2\gamma)}\left|p_2 - \frac{\mu}{2}p_1^2\right|$$

yazılır.

Şimdi sonuncu eşitliğe Lemma 2.2.2'yi uygulayalım.

$\gamma \in \left[0, 1+\sqrt{2}\right)$ olsun. Bu durumda,

$$\mu \le 2 \iff \alpha \in [\alpha_0, 1)$$

ve

$$\mu > 2 \iff \alpha \in [0, \alpha_0),$$

burada

$$\alpha_0 = \frac{2\left[2(1+2\gamma)-(1-\beta)(1+\gamma)^2\right]}{4(1+2\gamma)-(1-\beta)(1+\gamma)^2}.$$

Buna gore, Lemma 2.2.2 gereğince $\gamma \in \left[0, 1+\sqrt{2}\right)$ durumunda aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz

$$|A_3| \le \begin{cases} \dfrac{(1-\alpha)|\mu-1|}{(1-\beta)(1+2\gamma)} & \text{eğer } \alpha \in [0, \alpha_0), \\ \dfrac{1-\alpha}{(1-\beta)(1+2\gamma)} & \text{eğer } \alpha \in [\alpha_0, 1), \end{cases}$$

burada

$$\alpha_0 = \frac{2\left[2(1+2\gamma)-(1-\beta)(1+\gamma)^2\right]}{4(1+2\gamma)-(1-\beta)(1+\gamma)^2}.$$

Şimdi $\gamma \ge 1+\sqrt{2}$ olsun. Bu durumda,

$$|A_3| \le \begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{(1-\beta)(1+2\gamma)} & \text{eğer } \alpha \in [0, \alpha_0) \text{ ve } \beta \ge \beta_0, \\ \dfrac{(1-\alpha)|\mu-1|}{(1-\beta)(1+2\gamma)} & \text{eğer } \alpha \in [\alpha_0, 1) \text{ ve } \beta \in [0, \beta_0], \end{cases}$$

burada, $\alpha_0 = \dfrac{2\left[2(1+2\gamma)-(1-\beta)(1+\gamma)^2\right]}{4(1+2\gamma)-(1-\beta)(1+\gamma)^2}$ ve $\beta_0 = 1 - \dfrac{4(1+2\gamma)}{(1+\gamma)^2}$.

Bununla $|A_3|$ için teoremde verilen eşitsizlik ispatlandı.

Bununla teoremde istenen eşitsizlikler ispatlandı.

Şimdi bulunan sonuçların kesin olduğunu gösterelim.

Doğrudan da $p_1 = 2$ alınırsa her $\beta \geq 0$ için $|A_2|$ için bulduğumuz eşitsizliğin kesin olduğu (3.1.2.2) eşitliğinden görülür.

$\gamma \in \left[0, 1+\sqrt{2}\right]$ iken $\alpha \in [\alpha_0, 1)$ durumunda $p_1 = p_2 - 2 = 0$ ve $\alpha \in [0, \alpha_0]$ durumunda da $2p_1 = 2 = p_2$ seçilirse (3.1.2.3) eşitliğinden $|A_3|$ için bulduğumuz eşitsizliğin kesin olduğu görülür.

$\gamma \geq 1+\sqrt{2}$ iken $\alpha \in [0, \alpha_0]$ ve $\beta \geq \beta_0$ durumunda $p_1 = p_2 - 2 = 0$ ve $\alpha \in [\alpha_0, 1)$ ve $\beta \in [0, \beta_0]$ durumunda da $2p_1 = 2 = p_2$ seçilirse (3.1.2.3) eşitliğinden $|A_3|$ için bulduğumuz eşitsizliğin kesin olduğu görülür.

Bununla Teorem 3.1.2.1'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.1.2.1'den aşağıdaki sonuçlar özel durum olarak elde edilir.

<u>Teorem 3.1.2.2:</u> [5] (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\beta,\gamma)$, $\beta \in [0,1)$, $\gamma \geq 0$ altsınıfından ise bu fonksiyonun f^{-1} tersinin ilk üç katsaysı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|A_2| \leq \frac{2}{(1-\beta)(1+\gamma)},$$

$$|A_3| \leq \begin{cases} \dfrac{|\mu - 1|}{(1-\beta)(1+2\gamma)} & \text{eğer } \gamma \in \left[0, 1+\sqrt{2}\right], \\ \dfrac{1}{(1-\beta)(1+2\gamma)} & \text{eğer } \gamma \geq 1+\sqrt{2}, \end{cases}$$

burada

$$\mu=\frac{2\left[4(1+2\gamma)-(1+\beta)(1+\gamma)^2\right]}{(1-\beta)(1+\gamma)^2}.$$

Sonuç 3.1.2.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\alpha,\beta,0)$, $\beta\in[0,1)$, $\alpha\in[0,1)$ altsınıfından ise bu fonksiyonun f^{-1} tersinin ilk üç katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|A_2|\le\frac{2(1-\alpha)}{1-\beta},$$

$$|A_3|\le\begin{cases}\dfrac{(1-\alpha)|\mu-1|}{1-\beta} & \text{eğer } \alpha\in[0,\alpha_0),\\[2ex] \dfrac{1-\alpha}{1-\beta} & \text{eğer } \alpha\in[\alpha_0,1),\end{cases}$$

burada

$$\alpha_0=\frac{2(1+\beta)}{3+\beta} \text{ ve } \mu=\frac{2(1-\alpha)(3-\beta)}{1-\beta}.$$

Sonuç 3.1.2.2: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\alpha,\beta,1)$, $\beta\in[0,1)$, $\alpha\in[0,1)$ altsınıfından ise bu fonksiyonun f^{-1} tersinin ilk üç katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|A_2|\le\frac{1-\alpha}{1-\beta},$$

$$|A_3|\le\begin{cases}\dfrac{(1-\alpha)|\mu-1|}{3(1-\beta)} & \text{eğer } \alpha\in[0,\alpha_0),\\[2ex] \dfrac{1-\alpha}{3(1-\beta)} & \text{eğer } \alpha\in[\alpha_0,1),\end{cases}$$

burada

$$\alpha_0 = \frac{1+2\beta}{2+\beta} \text{ ve } \mu = \frac{2(1-\alpha)(2-\beta)}{1-\beta}.$$

Sonuç 3.1.2.3: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\alpha,0,\gamma)$, $\gamma \geq 0$, $\alpha \in [0,1)$ altsınıfından ise bu fonksiyonun f^{-1} tersinin ilk üç katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|A_2| \leq \frac{2(1-\alpha)}{1+\gamma}, \quad \gamma \geq 0.$$

$\gamma \in \left[0, 1+\sqrt{2}\right]$ için

$$|A_3| \leq \begin{cases} \dfrac{(1-\alpha)|\mu-1|}{1+2\gamma} & \text{eğer } \alpha \in [0,\alpha_0), \\ \dfrac{1-\alpha}{1+2\gamma} & \text{eğer } \alpha \in [\alpha_0,1), \end{cases}$$

burada

$$\alpha_0 = \frac{2(\gamma^2-2\gamma-1)}{\gamma^2-6\gamma-3} \text{ ve } \mu = \frac{2(1-\alpha)(3+6\gamma-\gamma^2)}{(1+\gamma)^2}.$$

$\gamma \geq 1+\sqrt{2}$ için

$$|A_3| \leq \frac{(1-\alpha)|\mu-1|}{1+2\gamma}.$$

Sonuç 3.1.2.4 : (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\alpha,0,0) = S^*(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$ altsınıfından ise bu fonksiyonun f^{-1} tersinin ilk üç katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|A_2| \leq 2(1-\alpha),$$

$$|A_3| \leq \begin{cases} (1-\alpha)(5-6\alpha) & \text{eğer } \alpha \in \left[0, \frac{2}{3}\right), \\ 1-\alpha & \text{eğer } \alpha \in \left[\frac{2}{3}, 1\right). \end{cases}$$

<u>Sonuç 3.1.2.5</u> : 1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\alpha,0,1) = C(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$ altsınıfından ise bu fonksiyonun f^{-1} tersinin ilk üç katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|A_2| \leq (1-\alpha),$$

$$|A_3| \leq \begin{cases} \frac{(1-\alpha)(3-4\alpha)}{3} & \text{eğer } \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ \frac{1-\alpha}{3} & \text{eğer } \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$$

Teorem 3.1.2.2'den aşağıdaki sonuçları yazarız.

<u>Sonuç 3.1.2.6</u> : (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\beta,0)$, $\beta \in [0,1)$ altsınıfından ise bu fonksiyonun f^{-1} tersinin ilk üç katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|A_2| \leq \frac{2}{1-\beta},$$

$$|A_3| \leq \frac{5-\beta}{(1-\beta)^2}.$$

Sonuç 3.1.2.7 : (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\beta,1)$, $\beta \in [0,1)$ altsınıfından ise bu fonksiyonun f^{-1} tersinin ilk üç katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|A_2| \leq \frac{1}{1-\beta},$$

$$|A_3| \leq \frac{2(2-\beta)-(1-\beta)(1+\gamma)^2}{3(1-\beta)^2}.$$

Sonuç 3.1.2.8 : (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(0,0) = S^*$ altsınıfından ise bu fonksiyonun f^{-1} tersinin ilk üç katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|A_2| \leq 2, \; |A_3| \leq 5.$$

Sonuç 3.1.2.9 : (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(0,1) = C$ altsınıfından ise bu fonksiyonun f^{-1} tersinin ilk üç katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|A_2| \leq 1, \; |A_3| \leq 1.$$

3.1.3, $\aleph(\alpha,\beta,\gamma)$, $\beta \in [0,1), \gamma \geq 0, \alpha \in [0,1)$ Altsınıfı İçin Logaritmik Katsayı Problemi

Bu bölümde, (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f \in \aleph(\alpha,\beta,\gamma)$ fonksiyonu için $g(z) = \log\left(\frac{f(z)}{z}\right)$ fonksiyonunun katsayısı problemi inceleniyor.

Bilindiği üzere, f fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki eşitlikten tanımlanan δ_n, $n=1,2,3,4,...$ parametrelerine f'nin logaritmik katsayıları denir [1]

$$g(z)=\log\left(\frac{f(z)}{z}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n z^n . \qquad (3.1.3.1)$$

Aşağıdaki teoremde $f\in\aleph(\alpha,\beta,\gamma),\beta\in[0,1),\ \alpha\in[0,1),\ \gamma\geq 0$ fonksiyonunun ilk birkaç logaritmik katsayıları için değerlendirmeler verildi.

Teorem 3.1.3.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\alpha,\beta,\gamma)$, $\beta\in[0,1)$, $\alpha\in[0,1)$, $\gamma\geq 0$ altsınıfından ise (3.1.3.1) eşitliği ile tanımlanan g fonksiyonunun ilk iki katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|\delta_1|\leq\frac{1-\alpha}{(1-\beta)(1+\gamma)},$$

$$|\delta_2|\leq\frac{1-\alpha}{(1-\beta)(1+2\gamma)}\left\{\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)\left[(1+\beta)(1+\gamma)^2-(1+2\gamma)\right]}{(1-\beta)(1+\gamma)^2}\right\}.$$

İspat : $f\in\aleph(\alpha,\beta,\gamma)$, $\beta\in[0,1)$, $\alpha\in[0,1)$, $\gamma\geq 0$ olsun. (3.1.3.1) eşitliğinden δ_n, $n=1,2,3,4,...$ katsayılarını bulalım. Bunun için (3.1.3.1) eşitliğinin her iki tarafının türevini alırsak aşağıdaki eşitliği yazarız:

$$\frac{zf'(z)-f(z)}{zf(z)}=2\sum_{n=1}^{\infty}n\delta_n z^{n-1}=2\left(\delta_1+2\delta_2 z+3\delta_3 z^2+4\delta_4 z^3+\cdots\right).$$

Ayrıca,

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots$$

ve

$$zf'(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^n=z+2a_2z^2+3a_3z^3+4a_4z^4+\cdots$$

olduğunu dikkate alırsak sonuncu eşitlil şöyle yazılır

$$a_2z^2+2a_3z^3+3a_4z^4+\cdots=2\delta_1z^2+\left(4\delta_2+2\delta_1a_2\right)z^3+\left(6\delta_3+4\delta_2a_2+2\delta_1a_3\right)z^4+\cdots.$$

Buradan,

$$2\delta_1=a_2,\ 4\delta_2+2\delta_1a_2=2a_3,$$

dolayısıyla,

$$\delta_1=\frac{a_2}{2},\quad \delta_2=\frac{1}{4}\left(2a_3-a_2^2\right),$$

elde edilir.

Eğer, (3.1.1.6) – (3.1.1.8) eşitliklerinden a_2 ve a_3'ün ifadeleri sonuncu eşitliklerde dikkate alınırsa

$$\delta_1=\frac{(1-\alpha)p_1}{2(1-\beta)(1+\gamma)}, \tag{3.1.3.2}$$

$$\delta_2=\frac{(1-\alpha)}{4(1-\beta)(1+2\gamma)}p_2+\frac{(1+\beta)(1+\gamma)^2-(1+2\gamma)}{4(1-\beta)^2(1+\gamma)^2(1+2\gamma)}(1-\alpha)^2p_1^2 \tag{3.1.3.3}$$

bulunur.

(3.1.3.2) ve (3.1.3.3) eşitliklerinde üçgen eşitsizliklerini ve $|p_n|\le 2$, $n=1,2,3$ olduğunu göz önünde bulundurursak $|\delta_n|$, $n=1,2,3$ için aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$|\delta_1|\le\frac{1-\alpha}{(1-\beta)(1+\gamma)},$$

$$|\delta_2| \le \frac{1-\alpha}{(1-\beta)(1+2\gamma)}\left\{\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)\left[(1+\beta)(1+\gamma)^2-(1+2\gamma)\right]}{(1-\beta)(1+\gamma)^2}\right\}.$$

Bununla teoremde verilen eşitsizliklerin doğruluğu ispatlandı.

Şimdi elde edilen eşitsizliklerin kesin olduğunu gösterelim.

Doğrudan da (3.1.3.2) ve (3.1.3.3) eşitliklerinde $p_1 = p_2 = 2$ seçilirse $|\delta_1|$ ve $|\delta_2|$ için bulunan eşitsizliklerin kesin olduğu görülür.

Bununla Teorem 3.1.3.1'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.1.3.1'den aşağıdaki sonuçlar özel durum olarak elde edilir.

<u>Teorem 3.1.3.2</u>: [5] (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\beta,\gamma)$, $\beta\in[0,1)$ $\gamma \ge 0$ altsınıfından ise (3.1.3.1) eşitliği ile tanımlanan g fonksiyonunun ilk iki katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|\delta_1| \le \frac{1}{(1-\beta)(1+\gamma)}$$

ve

$$|\delta_2| \le \frac{1}{(1-\beta)(1+2\gamma)}\left[\frac{1}{2}+\frac{(1+\beta)(1+\gamma)^2-(1+2\gamma)}{(1-\beta)(1+\gamma)^2}\right].$$

<u>Sonuç 3.1.3.1:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\alpha,\beta,0)$, $\beta\in[0,1)$, $\alpha\in[0,1)$ altsınıfından ise (3.1.3.1) eşitliği ile tanımlanan g fonksiyonunun ilk iki katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|\delta_1| \le \frac{1-\alpha}{1-\beta}, \quad |\delta_2| \le \frac{(1-\alpha)(1+(1-2\alpha)\beta)}{2(1-\beta)^2}.$$

Sonuç 3.1.3.2: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\alpha,\beta,1)$, $\beta \in [0,1)$, $\alpha \in [0,1)$ altsınıfından ise (3.1.3.1) eşitliği ile tanımlanan g fonksiyonunun ilk iki katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|\delta_1| \le \frac{1-\alpha}{2(1-\beta)},$$

$$|\delta_2| \le \frac{1-\alpha}{3(1-\beta)}\left[\frac{1}{2} + \frac{(1-\alpha)(1+4\beta)}{4(1-\beta)}\right].$$

Sonuç 3.1.3.3: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\alpha,0,\gamma)$, $\alpha \in [0,1)$, $\gamma \ge 0$ altsınıfından ise (3.1.3.1) eşitliği ile tanımlanan g fonksiyonunun ilk iki katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|\delta_1| \le \frac{1-\alpha}{1+\gamma},$$

$$|\delta_2| \le \frac{1-\alpha}{1+2\gamma}\left\{\frac{1}{2} + \frac{(1-\alpha)\left[(1+\gamma)^2-(1+2\gamma)\right]}{(1+\gamma)^2}\right\}.$$

Sonuç 3.1.3.4: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\alpha,0,0) = S^*(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$ altsınıfından ise (3.1.3.1) eşitliği ile tanımlanan g fonksiyonunun ilk iki katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|\delta_1| \le 1-\alpha, \quad |\delta_2| \le \frac{1-\alpha}{2}.$$

Sonuç 3.1.3.5: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\alpha,0,1)=C(\alpha)$ $\alpha\in[0,1)$ altsınıfından ise (3.1.3.1) eşitliği ile tanımlanan g fonksiyonunun ilk iki katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|\delta_1|\le\frac{1-\alpha}{2},\ |\delta_2|\le\frac{(1-\alpha)(3-\alpha)}{12}.$$

Teorem 3.1.3.2'den aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 3.1.3.6: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\beta,0)$, $\beta\in[0,1)$ altsınıfından ise (3.1.3.1) eşitliği ile tanımlanan g fonksiyonunun ilk iki katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|\delta_1|\le\frac{1}{1-\beta}$$

ve

$$|\delta_2|\le\frac{1+\beta}{2(1-\beta)^2}.$$

Sonuç 3.1.3.7: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(\beta,1)$, $\beta\in[0,1)$ altsınıfından ise (3.1.3.1) eşitliği ile tanımlanan g fonksiyonunun ilk iki katsayısı için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|\delta_1|\le\frac{1}{2(1-\beta)}\ \text{ve}\ |\delta_2|\le\frac{3+4\beta}{12(1-\beta)^2}.$$

Sonuç 3.1.3.8: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(0,0)=S^*$ altsınıfından ise (3.1.3.1) eşitliği ile tanımlanan g fonksiyonunun ilk birkaç katsayılar için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|\delta_n| \leq \frac{1}{n}\ , n=1,2\ .$$

Sonuç 3.1.3.9: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan f fonksiyonu $\aleph(0,1)=C$ altsınıfından ise (3.1.3.1) eşitliği ile tanımlanan g fonksiyonunun ilk birkaç katsayılar için aşağıdaki kesin eşitsizlikler geçerlidir

$$|\delta_n| \leq \frac{1}{2n}\ , n=1,2\ .$$

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Çalışılan bu yüksek lisans tezinde analitik ve ünivalent fonksiyonların $\aleph(\alpha,\beta,\gamma)$, $\alpha,\beta\in[0,1)$, $\gamma\geq 0$, altsınıfı tanıtıldı. Bu sınıftan olan $f\in\aleph(\alpha,\beta,\gamma)$ fonksiyonu, f^{-1} ve $g(z)=\log(f(z)/z)$ fonksiyonları için katsayı problemleri incelendi. Parametrelerin özel değerleri için sonuçlar elde edildi.

Tezde ele alınan sınıf için $a_2a_4-a_3^2$ ikinci Hankel determinantının modülünün bir üst sınır değerlendirmesi de verilebilir.

Ayrıca, f^{-1} fonksiyonu için $A_2A_4-A_3^2$ ikinci Hankel determinantının modülünün bir üst sınır değerlendirmesi verilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Thomas, D. K. (2018). On the coefficients of gamma-starlike functions. Korean Mat. Soc. 55(1), 175-184.

[2] Ali, R. M. (2003). Coefficients of the inverse of strongly starlike functions. Bull. Malays. Math. Soc. 26(2), no. 1, 63-71.

[3] Mustafa, N., Öztürk, T. (2018). On the coefficient bounds of certain subclasses of analytic functions of complex order. Journal of Scientific and Engineering Research, 5(6), 133-136.

[4] Mustafa, N., Gündüz, M. C. (2018). Coefficient bound estimates for alpha-convex functions of order beta. Journal of Scientific and Engineering Research, 5(6), 149-156.

[5] Mustafa, N., Ateş, M. (2018). On the Coefficient Bounds of Gamma and Beta Starlike Functions. Journal of Scientific and Engineering Research, 5(6), 333-341.

[6] Srivastava H. M., Xu Q. H. and Wu G. P., Coefficient estimates for certain subclasses of spiral-like functions of complex opred. Appl. Math. Lett. 23(7), (2010), 763-768.

[7] Xu Q. H., Cai Q. M. and Srivastava H. M. (2013). Sharp coefficient estimates for certain subclasses of starlike functions of complex order. Appl. Math. Comput. 225, 43-49

[8] Noonan J. W., Thomas D. K. (1976). On the second Hankel determinant of areally mean $p-$valent functions. T. Amer. Math. Soc. 1976, 223, 337-346.

[9] Koegh F. R., Merkes E. P. (1969). A coefficient inequality for certain classes of analytic functions. P Amer. Math. Soc. 1969, 20, 8-12.

[10] Caglar, M. & Aslan, S. (2016). Fekete-Szegö inequalities for subclasses of bi-univalent functions satisfying subordinate condition. AIP Conference Proceedings 2016; 1726, 020078, doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.4945904.

[11] Mustafa, N. (2017). Fekete-Szegö problem for certain subclass of analytic and bi-univalent functions. Journal of Scientific and Engineering, 4(8): 390-400.

[12] Mustafa, N., Akbulut, E. (2018). Application of the second Chebyshev polinomials to coefficient estimates of analytic functions. Journal of Scientific and Engineering Research, 5(6): 143-148.

[13] Mustafa, N., Akbulut, E. (2019). Application of the second kind Chebyshev

polinomial to the Fekete-Szegö problem of certain class analytic functions. Journal of Scientific and Engineering Research, 6(2), 154-163.

[14] Orhan, H., Deniz, E. & Raducanu, D. (2010). The Fekete-Szegö problem for subclasses of analytic functions defined by a differential operator related to conic domains. Comput Math Appl 59: 283-295.

[15] Zaprawa, P. (2014). On the Fekete-Szegö problem for classes of bi-univalent functions. Bull Belg Math Soc Simon Stevin 21: 169-178.

[16] Hummel J. (1957). The coefficient regions of starlike functions. Pacific J Math 7: 1381-1389.

[17] Ponnusamy, S., Silverman, H. (2006). Complex variables with Applications. Birkhâuser. Boston.

[18] Duren, P. L. (1983). Univalent Functions. Springer-Verlag, New York.

[19] Goodman, A.W. (1983). Univalent Function-1,2. Mariner Publishing Company Tapma, Florida 311 p.

[20] Lahenkani, J. (1985). Coefficients of power of some subclasses of univalent functions and convolutions of some classes of polynomials and analytic functions. Ph. D. Thesis. Graduate School of Natural and Applied Sciences, London.

[21] Pommerenke, C. H. (1975). Univalent Functions. Vandenhoeck and Ruperch, Gottingen.

[22] Libera, R. J. and Zotkiewicz, E. J. (1982). Early coefficients of the inverse of a regular convex function. Proc. Amer. Math. Soc. 85(2), 225-230.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Mustafa ATEŞ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Iğdır /17.09.1990
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (e-posta)	: mafy2176@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Kars Kredi ve Yurtlar Kurumu
Lisans	: Siirt Üniversitesi
Yüksek Lisans	: Kafkas Üniversitesi/ Fen Bilimleri Enstitüsü/ Matematik Ana Bilim Dalı/ Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Kredi ve Yurtlar Kurumu- KARS/ 26.07.2016

Yayınları (SCI ve diğer) :

1. Mustafa, N., Ateş, M. (2018). On The Coefficient Bounds of Gamma and Beta Starlike Functions. Journal of Scientific and Engineering Research, 5(6), 333-341.
2. Mustafa, N., Nezir, V., Ateş, M. (2018). On the coefficient bounds of gamma and beta starlike functions. ICRAPAM 2018 Conferance Proceedings, Karadeniz Teknik Üniversitesi, July 23-27, 2018, Trabzon, TURKEY.