T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜNE KOLLOKASYON YÖNTEMİNİN UYGULAMASI

Erdem Özal YAMEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

KARS-2019

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜNE KOLLOKASYON YÖNTEMİNİN UYGULAMASI

Erdem Özal YAMEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

TEMMUZ 2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Erdem Özal YAMEN' in Prof. Dr. Nizami MUSTAFA' nın danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümüne Kollokasyon Yönteminin Uygulanması" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy . birliği . . . ile kabul edilmiştir.

04./07./ 20.09

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	**: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA**	
Üye	**: Prof. Dr. Erhan DENİZ**	
Üye	**: Doç. Dr. Ali Hikmet DEĞER**	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Erdem Özal YAMEN
04 / 07 / 2019

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümüne Kollokasyon Yönteminin Uygulaması

Erdem Özal YAMEN

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

Bu tez çalışması "Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümüne kollokasyon yönteminin uygulanması" konusu üzerine hazırlanmıştır.

Tez dört bölümden ibarettir. Birinci bölümde genel bilgiler, ikinci bölümde tezde kullanılan yöntemler, üçüncü bölümde Cauchy çekirdeği ile doğrusal olmayan bir singüler integral denklemin çözümü ve doğrusal olmayan operatör denklemin yaklaşık çözümü, dördüncü bölümde sonuçların tartışması verilmiştir.

Tezde, singüler integral denklemler, kapalı aralıkta ve düzlemde kapalı eğri üzerinde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Singüler İntegral, Doğrusal Olmayan Operatör Denklemleri, Kollokasyon Metodu

2019, 62 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

Application of the Collocation Method to the Approximate Solution of Singular Integral Equations

Erdem Özal YAMEN

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

This thesis work has been prepared on the subject "Application of the Collocation Method to the Approximate Solution of Singular Integral Equations"

The thesis includes four main sections. In the first section, general definations, in the second section, methods used the thesis, in the third section the solution of nonlinear singular integral equation with the Cauchy Kernel and the approximate solution of the nonlinear operator eqation and finally in the fourth section, discussion of results are given.

In this thesis, singular integral equations are investigated in closed intervals and on closed curves of the plane as well.

Key Words: Singular Integral, Singular Integral Equation, Collocation Method

2019, 62 pages

ÖNSÖZ

Tez çalışması sırasında her türlü bilgi, teşvik ve deneyimleri ile yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Nizami MUSTAFA 'ya ve yüksek lisans eğitimim süresince her türlü maddi ve manevi destekleri ile göstermiş olduğu sabırdan dolayı sevgili eşime teşekkür ederim.

Erdem Özal YAMEN

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER DİZİNİ

$A(D)$	D'de analitik fonksiyonlar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\omega(\phi,\delta)$	ϕ'nin süreklilik modülü
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
i	Sanal Birim $i^2=-1$
$f(U)$	U kümesinin f dönüşümü altındaki görüntüsü
$H_\alpha(X)$	X 'de α üssü ile Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlar kümesi
$KH_\alpha(X)$	X kümesinde K katsayılı α üssü ile Hölder sınıfı
$KH_\alpha^{(n)}(X)$	X kümesinde n. mertebeden türevi K katsayılı ve α üssü ile Hölder sınıfından olan fonksiyonların kümesi
$C(X)$	X kümesinde sürekli fonksiyonların kümesi
$arg(z)$	z' nin argümanı
$Re(z)$	z'nin reel kısmı
$Im(z)$	z'nin sanal kısmı
$S_r(z_0)$	z_0 merkezli r yarıçaplı yuvar
mes(γ)	γ eğrisinin uzunluğu

1. GENEL BİLGİLER

1.1 GİRİŞ

Esneklik teorisi, aerodinamik, hidrodinamik, termodinamik, mekanik ve matematiksel fiziğin birçok problemi doğrusal olmayan singüler integral denkleminin çözümüne dönüştürülebilir [6,8,21,23,24].

Ayrıca, analitik fonksiyonlar teorisinde, doğrusal olmayan sınır değer problemlerinin çözümleri, doğrusal olmayan singüler integral denkleminin çözümüne indirgenebilir [6,24]. Lineer olmayan singüler integral denkleminin çözümü bu nedenle çok önemlidir.

Ayrıca, singüler integral denklemlerinin çözümüne indirgenen birçok problem için bu singüler integral denklemlerin yaklaşık çözümünü bilmek yeterlidir. Buna göre singüler integral denklemlerin yaklaşık çözümü önem taşır. Bu konuda birçok çalışma vardır. Bununla ilgili geniş bilgiyi [16,25,26,27,33,34,35,36] den görebiliriz.

Bilindiği gibi [34] klasik Dirichlet probleminin çözümü, Cauchy çekirdekli singüler integral denklemin çözümüne indirgenir.

Sonlu basit bağlantılı bölgeler olması durumunda modifiye Dirichlet problemi Dirichlet klasik problemi ile çakışır. Unutmamak gerekir ki eğer D^+ düzgün L eğrisi tarafından sınırlanan bir bölge ise sınır integral denklemi

$$\varphi(t_0) + Re\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt = f(t_0)(t_0 \in L) \qquad (1.1.1)$$

şeklinde singüler integral denklem yardımı ile yazılabilir. Burada, $f(t_0)$ L sınır üzerinde verilen reel bir fonksiyondur.

$\varphi(t)$ reel fonksiyonu (1.1.1) denklemi için çözüm olmak üzere istenen harmonik fonksiyon

$$u(x,y) = Re\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-z}dt \; (z = x + iy \in D^+) \tag{1.1.2}$$

şeklinde olup bir Cauchy integralidir.

D^- sonlu bir bölge olması durumunda modifiye Dirichlet problemi için $u(x,y)$ çözümü, C önceden verilmeyen bir sabit olmak üzere

$$\phi(t_0) - Re\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\phi(t)}{t-t_0}dt = f(t_0) + C(Im\phi\,(t) \equiv 0) \tag{1.1.3}$$

şeklinde yazılabilir. $\varphi(t)$ ve C bulunduktan sonra Dirichlet klasik problemi için çözümü $u(x,y) - C$ formunda elde edebiliriz.

Ayrıca, matematiksel fizikte sınır değer problemlerin geniş bir sınıfının çözümü

$$f(t_0) = a(t_0)\phi(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\phi(t)}{t-t_0}dt + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma k(t,t_0)\phi(t)dt \tag{1.1.4}$$

şeklindeki singüler integral denklemlere indirgenebilir. Burada, γ, herhangi parçalı düzgün bir eğri [31], t_0 ve t noktaları γ eğrisi üzerinde noktalar, $a(t), b(t)$ ve $k(t_0,t)$ fonksiyonları $H_\alpha(\gamma), 0 < \alpha \leq 1$ Hölder şartını sağlayan γ üzerinde tanımlanabilinen fonksiyonlardır. Ayrıca, γ üzerindeki her yerde $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ dır.

Doğrusal olmayan singüler integral denklemin çözümünde, bir denklemin çözümü iki yönü ile ele alınır. İlk sorun denklemin çözümünün varlığını ve tekliğini belirlemektir. İkinci sorun eğer çözüm varsa denklemin çözümünü bulmaktır.

Bazen, doğrusal olmayan singüler integral denklemin çözümünün varlığını kanıtlamak çözümü bulmak kadar zor ve önemlidir. Ayrıca, bu denklemin çözümü mutlaka analitik olarak elde edilmeyebilir. Bu durumda yaklaşık çözümler araştırılır.

Lineer olmayan singüler integral denklemlerin çözümleri ile ilgili son çalışmalar temelde sayısal çözümlerle ilgilidir (bakınız [1,2,10,11,15,37]). Tek çözümün varlığı varsayılır ve daha sonra denklemin çözümü için sayısal yöntemler uygulanır. Bunun için singüler integral denklemlere karşılık gelen sayısal denklem sistemi oluşturulmalıdır. Bu cebirsel denklemleri oluşturabilmek için singüler integral denklemlerin kapsadığı singüler integralin yaklaşımı önem taşır.

Bu tez çalışmasında (bakınız[10,11,37]) incelenen denklemler, reel sayı ekseni üzerindeki kapalı aralıklar üzerinde tanımlı ve bazıları logaritmik singüleritesi olan [37] ve bazıları doğrusal Cauchy integral çekirdekli olan Hilbert çekirdeğine [10] sahip olan doğrusal olmayan singüler integral denklemler şeklinde tanımlanmıştır [11].

Buna karşılık, bu tezde genel doğrusal olmayan singüler integral denklemin

$$F\left(t,\varphi(t),S_\gamma k(.,\varphi(.))(t)\right)=f(t),t\in\gamma \tag{1.1.5}$$

çözümü incelenmiştir. Buradaki γ bir kapalı düzgün eğridir.

Burada, D_0 ve $\widetilde{D}$, kümeleri aşağıda gösterildiği gibidir

$$D_0=\{(t,\varphi):t\in\gamma,\ \varphi\in\mathbb{C}\}=\gamma\times\mathbb{C},$$

$$\widetilde{D}=\{(t,\varphi,s):t\in\gamma,\varphi,s\in\mathbb{C}\}=\gamma\times\mathbb{C}^2,$$

$k:D_0\rightarrow\mathbb{C},F:D\rightarrow\mathbb{C},f:\gamma\rightarrow\mathbb{C}$ bilinen fonksiyonlar,

$$S_\gamma k(.,\varphi(.))(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{k(\tau,\varphi(\tau))}{\tau - t}dx, \qquad t \in \gamma$$

Cauchy çekirdeği ile bir lineer olmayan singüler integral denklem,
ve $\varphi : \gamma \to \mathbb{C}$ bilinmeyen fonksiyondur.

Çalışmamızda, denklem (1.1.5) fonksiyonel analiz yöntemleri kullanılarak araştırılmış ve $(H_\alpha (\gamma); \| \cdot \|_\alpha)$ Hölder uzayında (1.1.5) denkleminin tek çözümünün varlığı için koşullar bulunmuştur.

Ek olarak, sayısal çözüm için bir iterasyon yapıldı ve yakınsak olduğu gösterildi.

Bu çalışmada

$$F(x) = 0 \tag{1.1.6}$$

tipli operatör denklemlerin varlığı için yeterli koşulları bulmaya çalıştık ve bu denklemin yaklaşık çözümü için bir iterasyon verdik. Burada, $F: X \to Y$ bir lineer olmayan bir operatör X ve Y Banach uzayıdır. İlk yaklaşım keyfi olarak seçildiğinde, verilen iterasyonun denklem çözümüne yakınsadığı gösterilmiştir.

$F: X \to Y$ operatörü X'te Frechet diferansiyelidir. Bazı $x_0 \in X$ ve $r > 0$ için

$$D(x_0;r) = \{x \in X: \|x_0 - x\| < r\}$$

dir

İlk yaklaşım olarak $x_0 \in X$ alırsak,

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_{n-1})]^{-1}, \; n = 1,2,.. \tag{1.1.7}$$

denklem (1.1.6) için tanımlarız.

Bilindiği gibi, eğer operatör $[F']^{-1}: Y \to X$ her $x_n, n = 0,1,2, \ldots$ [12,13] için bulunabilir ise denklem (1.1.7) cinsinden verilen iterasyon elde edilebilir. Bununla birlikte, uygulamalarda bu ters operatörleri bulmak için harcanan büyük zorluklar nedeniyle, çoğu zaman

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_0)]^{-1} F(x_{n-1}), \; n = 1,2, \ldots \tag{1.1.8}$$

$[F'(x_0)]^{-1}: Y \to X$ ters operatörü tek bir x_0 noktasında bulunduğunda iterasyonun (1.1.7)' ye göre tekrarlaması tercih edilir.

Literatürde, (1.1.6) denkleminin yaklaşık çözümü için kullanılan iterasyon (1.1.7), (1.1.8) denkleminde verilen iterasyonun değiştirilmiş Newton Kantorowich iterasyonu olarak adlandırılan esas veya prensip iterasyonu olarak bilinir [13]. Denklemin bu iterasyon yöntemleriyle çözülmesi Newton-Kantorowich metodu olarak da bilinir.

Newton Kantorowich metodunun doğrusal olmayan fonksiyonel denklemlerin yaklaşık çözümünü bulmak için kullanıldığı çeşitli çalışmalar vardır [7].

Birçok doğrusal olmayan sınır değer problemi iterasyon (yinelemeli) yöntem ile doğrusal olmayan operatör denklemlerine [4,12,13,19,32] indirgenerek çözülebilir. İterasyon yöntemleri sınır değer problemlerinin [18,24] aşağı, yukarı ve pozitif çözümlerini bulmak için yaklaşık yöntem olarak uygulanmaktadır. Newton-Kantorowich yöntemi ayrıca, lineer olmayan singüler integral denklemin çözümünün bulunmasında kullanılır [1,11,38,39].

İterasyon (1.1.7) ve (1.1.8) in yakınsaması üzerine yapılan çalışmalardan ilk yaklaşım denklem (1.1.6)'nın çözümüne yakın seçildiğinde iterasyonun yakınsadığı bilinmektedir [38]. Buna göre bu çalışmalarda ilk yaklaşımın iterasyonun yakınsaması için denklem çözümüne yakın seçilmesi gerekir. Ama çözüme yakın ilk yaklaşımı seçmek için çözümün var olduğu aralık bilinmelidir. Bununla birlikte, çözümün varoluş aralığını bulmak bazen zor veya imkansız olabilir.

Bu zorluklardan dolayı, denklemin çözümüne yakın ilk yaklaşımı seçmekten kaçındık. Dolayısıyla, ilerleyen kısımlarda denklem (1.1.6)' da formu verilen denklemin yaklaşık çözümü için (1.1.7) ve (1.1.8) iterasyonlarından farklı bir iterasyon vereceğiz. Verilen iterasyonlar için (1.1.6) denkleminin yaklaşık çözümüne yakın seçmek zorunda değiliz.

.

1.2 KURAMSAL TEMELLER

1.2.1 Genel Kavramlar

Tezin bu bölümünde tezde kullanılan temel bilgiler verildi.

Tanım 1.2.1.1: $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. $\varepsilon > 0$ için

$$U(z_0,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < \varepsilon\}$$

kümesine z_0 noktasının ε *−komşuluğu* denir.

Tanım 1.2.1.2: $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olmak üzere, $z_0 \in A$ noktası için $U(z_0,\varepsilon) \subset A$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir *iç noktası* denir.

Tanım 1.2.1.3: Bir $A \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer, A kümesinin her noktası A'nın bir iç noktası ise, yani A kümesi kendi içine eşitse, A kümesine *açık küme* denir.

Tanım 1.2.1.4: $A \subset \mathbb{C}$ olsun. A kümesinin tümleyeni açık küme ise, A kümesine *kapalı küme* denir.

Tanım 1.2.1.5: $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna göre $\mathbb{C}$ düzleminde *eğri* denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırası ile *eğrinin başlangıç noktası* ve *bitim noktası* denir.

Tanım 1.2.1.6: $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ bir olmak üzere $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ'ya *kapalı eğri* denir.

Tanım 1.2.1.7: $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ bir eğri ve $t_1, t_2 \in [a, b]$ olsun. $t_1 = t_2$ için $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ ise γ'ya basit kapalı eğri ya da Jordan eğrisi denir. Eğer, γ basit bir eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ'ya *basit kapalı eğri* denir. Bir γ eğrisi verildiğinde γ' türevi var ve sürekli ise γ'ya diferansiyellenebilir eğri denir. Diferansiyellenebilir bir γ eğrisi ve $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ'ya *düzgün eğri* denir.

Tanım 1.2.1.8: Eğer, $A \subset A_1 \cup A_2$, $A \cap A_1 \neq \emptyset$ ve $A \cap A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ olacak şekilde A_1 ve A_2 gibi boş olmayan iki açık ve ayrık küme bulunamaz ise $A \subset \mathbb{C}$ kümesine *bağlantılıdır* denir. Aksi halde A'ya *bağlantısız küme* denir.

Tanım 1.2.1.9: Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı olan kümeye $\mathbb{C}$'de bir *bölge* denir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Tez boyunca, $\gamma \subset \mathbb{C}$ eğrisinin kapalı, düzgün basit bir eğri olduğunu ve $mes(\gamma) = \ell$ değerinin, uzunluğunu ifade ettiğini varsayıyoruz

Tanım 2.1: [6,24]. Eğer her $t_1, t_2 \in \gamma$ için

$$|\varphi(t_1 - t_2)| \leq c \cdot |t_1 - t_2|^\alpha$$

koşulunu sağlayacak şekilde $c > 0$ ve $\alpha \in (0,1]$ varsa$\varphi : \gamma \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun α üssü ile γ eğrisi üzerinde Hölder koşulunu sağladığı söylenir. α üssüyle Hölder koşulunu sağlayan tüm $\varphi : \gamma \to \mathbb{C}$ fonksiyonların kümesini $H_\alpha(\gamma)$ ile göstereceğiz. $\varphi \in H_\alpha(\gamma)$ için $\alpha \in (0,1)$ vektör uzayı, burada norm olan $(H_\alpha(\gamma);\ \|\cdot\|_\alpha)$ bir Banach uzayıdır. Ayrıca

$$\|\varphi\|_\infty = \|\varphi\|_{H(\gamma)} \equiv \|\varphi\|_\infty + H(\varphi, \alpha;\ \gamma)$$

olup, burada

$$\|\varphi\|_\infty = max\{|\varphi(t)| : t \in \gamma\},$$

$$H(\varphi, \alpha;\ \gamma) = sup\left\{\frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} : t_1, t_2 \in \gamma, t_1 \neq t_2\right\}$$

olarak verilmiştir. $H(\varphi, \alpha;\ \gamma)$ sayısı fonksiyonun Hölder sabiti olarak tanımlanır. Bu durumda

$$\varphi \in L_p(\gamma) = \left\{\varphi : \gamma \to \mathbb{C} : \int_\gamma |\varphi(\tau)|^p |d\tau| < +\infty\right\}, \quad p > 1$$

$\varphi \in L_p(\gamma)$ için $\left(L_p(\gamma);\ \|\cdot\|_p\right)$ vektör uzayının

$$\|\varphi\|_p = \|\varphi\|_{L_p(\gamma)} \equiv \left(\int_\gamma |\varphi(\tau)|^p \, |dx|\right)^{1/p} \text{ (bakınız [11])}$$

normuna sahip bir Banach alanı olmasına izin verelim.

Teorem 2.1: Verilen iki metrik uzay (X, ρ_1) ve (X, ρ_2), aşağıdaki koşulları sağlar:

(1) (X, ρ_1) kompakt metrik uzaydır;

(2) $M\rho_1$ Metriğe göre X teki her bir yakınsak dizi, aynı zamanda başka bir metrik ρ_2 ye göre de yakınsaktır.

(3) $A : X \to X$ operatörü ρ_2 ölçüsüne göre bir büzülme dönüşümüdür. Yani

Her x, y $için \in X$ için

$$\rho_2(Ax, Ay) \leq q \cdot \rho_2(x, y)$$

koşulunu sağlayan $0 \leq q_1 < 1$ sayısı vardır.

Bu durumda, operatör denklemi

$$x = Ax$$

$x_* \in X$ tek bir çözüme sahip ve herhangi bir başlangıç yaklaşımı $x_0 \in X$ için dizisinde $(x_n) \subset X, n = 1, 2, \ldots$ olarak tanımlanan

$$x_n = Ax_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

dizisi x_*'a yakınsar ve

$$\rho_2(x_n, x_*) \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot \rho_2(x_0, x_1)$$

dir.

(1.1.5) deki denklemi şöyle ifade edelim

$$\varphi(t) = \Phi\left(t, \varphi(t), f(t), S_\gamma k(., \varphi(\cdot))(t)\right), \; t \in \gamma \tag{2.1}$$

$$\Phi\ (t,\varphi(t),f(t),S_\gamma k(.,\varphi(\cdot))(t))$$

$$= \varphi(t) - f(t) + F(t,\varphi(t),f(t),S_\gamma k(.,\varphi(\cdot))(t))\,, \quad t \in \gamma,$$

(1.1.5) ve (2.1) denklemleri denktir. Dolayısıyla bundan sonra (1.1.5) yerine (2.1) denklemini araştıracağız.

Tanım 2.2: Eğer $t_1, t_2 \in \gamma$ ve $(t_k, \varphi_k) \in D_0$, $(t_k, \varphi_k, f_k, s_k) \in D$, $k = 1, 2, \alpha \in (0,1)$ için aşağıdaki

$$|\,k\,(t_1, \varphi_1) - k(t_2, \varphi_2)\,| \leq m_1 |t_1 - t_2|^\alpha + m_2\,|\,\varphi_1 - \varphi_2\,| \tag{2.2}$$

ve

$$|\Phi(t_1, \varphi_1, f_1, s_1) - \Phi(t_2, \varphi_2, f_2, s_2)|$$

$$\leq n_1\,|t_1 - t_2|^\alpha + n_2 |\,\varphi_1 - \varphi_2\,| + n_3 |\,f_1 - f_2\,| + n_4 |\,s_1 - s_2\,| \tag{2.3}$$

eşitsizliklerini sağlayan $m_1, m_2, n_1, n_2, n_3, n_4$ pozitif sayıları varsa

$$D = \widetilde{D} \times \mathbb{C} = \{(t,\varphi,f,s) : t \in \gamma, \varphi, f, s \in \mathbb{C}\} = \gamma \times \mathbb{C}^3,$$

$k(t,\varphi)$ ve $\Phi(t,\varphi,f,s)$ fonksiyonların sırasıyla $H_{\alpha,1}(m_1, m_2; D_0)$ ve $H_{\alpha,1,1,1}(n_1, n_2, n_3, n_4; D)$ sınıflarından olduğunu söyleyeceğiz.

Tanım 2.3 (Fréchet Türevi): X ve Y Banach uzayları ve lineer olmayan $F: D \subset X \to Y$ operatörü verilmiş olsun. Eğer, $\forall x \in D$ için

$$F(x) = F(x_0) + A(x - x_0) + w(x - x_0)$$

koşulunu sağlayan $A \in L(X, Y)$ operatörü ve

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|w(x - x_0\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

olacak şekilde $w: D \to Y$ operatörü varsa, $F(x)$ operatörüne $x_0 \in D$ noktasındaki Fréchet türevi denir [22].

<u>Teorem 2.2 (Arzela-Ascoli Teoremi)</u>: Bir $K \subset C[0,1]$ kümesinin ön kompakt olması için gerek ve yeter şart her $x(t) \in K$ fonksiyonunun düzgün sınırlı ve aynı dereceden sürekli olmasıdır.[20].

<u>Teorem 2.3 (Schauder Sabit Nokta Teoremi)</u>: F operatörü X normlu uzayının dışbükey kapalı D alt kümesini kendisine dönüştürür, yani $F(D) \subset D$. Eğer F operatörü D üzerinde tamamen sürekli ise onun D üzerinde sabit noktası vardır [22].

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 Cauchy Çekirdeği ile Lineer Olmayan Singüler İntegral Denklemlerin Çözümü

Bu bölüm, (2.1) denkleminin çözümünü ele almaktadır. [29]

Lemma 3.1.1: Eğer $\varphi \in H_\alpha(\gamma)$, $\alpha \in (0,1)$, ise o zaman $p > 1$ ve $\forall\, \varepsilon \in (0, \ell]$ için

$$\|\varphi\|_\infty \leq \varepsilon^\alpha \|\varphi\|_\alpha + \frac{\varepsilon^{-1/p}}{\sqrt[p]{2}} \|\varphi\|_p \qquad (3.1.1)$$

eşitsizliği doğrudur :

İspat: $\varphi \in H_\alpha(\gamma)$, $\alpha \in (0,1)$, fonksiyonu verilmiş olsun. $t, \tau \in \gamma$ için $\rho\,(t, \tau)$ ile γ eğrisindeki t ve τ noktaları arasındaki en kısa uzunluğu göstersin. Bu durumda; γ , üzerindeki herhangi bir t noktası için basit bir eğri olduğundan

$$U\,(t;\ \varepsilon) = \{\tau \in \gamma :\ p(t,\tau) < \varepsilon\} \subset \gamma$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır.

Dolayısıyla,

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{U(t;\,\varepsilon)} \varphi(\tau) d\tau + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{U(t;\,\varepsilon)} [\varphi(t) - \varphi(\tau)]\, d\tau, \quad t \in \gamma$$

şeklinde yazılabilir.

Buna göre, eğer Hölder eşitsizliğini yukarıdaki eşitsizliklerin sağ tarafındaki ilk integrallere uygulanırsa, γ üzerinde herhangi bir nokta olan t için

$$|\varphi(t)| \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{U(t;\,\varepsilon)} |\varphi(\tau)||d\tau| + \frac{1}{2\varepsilon} H(\varphi, \alpha;\ \gamma) \int_{U(t;\,\varepsilon)} |t - \tau|^\alpha\, |d\tau|$$

$$\leq \frac{1}{2\varepsilon} \left(\int_{U(t;\,\varepsilon)} |\varphi(\tau)|^p |d\tau|\right)^{1/p} \cdot \left(\int_{U(t;\,\varepsilon)} |d\tau|\ \right)^{1-\frac{1}{p}} + \varepsilon^\alpha \cdot H(\varphi, \alpha;\ \gamma)$$

$$\leq \frac{1}{2\varepsilon^{1/p}} \cdot \|\varphi\|_p + \varepsilon^\alpha \cdot \|\varphi\|_\alpha, \quad t \in \gamma$$

ve sonuç olarak,

$$|\varphi(t)| \leq \varepsilon^\alpha \cdot \|\varphi\|_\alpha + \frac{1}{2\varepsilon^{1/p}} \cdot \|\varphi\|_p$$

elde edilir.

Son eşitsizlikten (3.1.1) eşitsizliğinin ispatı yapılmış olur.

Lemma 3.1.2: $\varphi \in H_\alpha(\gamma)$, $\alpha \in (0,1)$ ve $p > 1$ için

$$\|\varphi\|_\infty \leq M(\alpha, p) \cdot \|\varphi\|_\alpha^{\frac{1}{1+\alpha p}} \cdot \|\varphi\|_p^{\frac{\alpha p}{1+\alpha p}} \tag{3.1.2}$$

eşitsizliği doğrudur.

Burada,

$$M(\alpha, p) = max\{M_1(\alpha,p), M_2(\alpha,p)\},$$

$$M_1(\alpha,p) = (n(\alpha,p))^\alpha + (2.n(\alpha,p))^{-1/p}$$

$$M_2(\alpha,p) = \frac{\sqrt[p]{2}}{\sqrt[p]{2}-1}(n(\alpha,p))^\alpha$$

$$n(\alpha,p) = (\alpha \cdot p \cdot \sqrt[p]{2})^{\frac{-p}{1+\alpha p}}$$

dır [29]

İspat: Kolaylık sağlamak için eğer $A = \|\varphi\|_\infty$, $B = \|\varphi\|_\alpha$, $C = \|\varphi\|_p$ alırsak, o zaman Lemma 3.1.1 den $\forall \varepsilon \in (0, \ell]$,

$$A \leq \varepsilon^\alpha \cdot B + \frac{C}{2^{1/p}} \varepsilon^{-1/p} \tag{3.1.3}$$

yazılabilir.

$\alpha \in (0,1)$ için $p > 1$, $\theta = \theta(\varepsilon), \theta : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\theta(\varepsilon) = B.\varepsilon^{\alpha} + \frac{C}{2^{1/p}}\,\varepsilon^{-1/p}$$

Fonksiyonunu $\theta = \theta(\varepsilon)$ noktasında en küçük değerini aldığını göstermek kolaydır

$$\varepsilon_* = n(\alpha,p)\cdot\left(C/_B\right)^{\frac{p}{1+\alpha p}}$$

$$n(\alpha,p) = \left(\alpha\cdot p\cdot\sqrt[p]{2}\right)^{\frac{p}{1+\alpha p}}$$

Dolayısıyla,

$$min\{\theta(\varepsilon) : \varepsilon \in (0,+\infty)\} = \theta(\varepsilon_*) = M_1(\alpha,p)\cdot B^{\frac{1}{1+\alpha p}}\cdot C^{\frac{\alpha p}{1+\alpha p}} \tag{3.1.4}$$

değerlendirmesi doğrudur.

Burada,

$$M_1(\alpha,p) = (n(\alpha,p))^{\alpha} + \left(2\cdot(n(\alpha,p))\right)^{-1/p}$$

Eğer, $\varepsilon_* \in (0,\ell]$, sonra (3.1.3) ve (3.1.4) deki denklemlerden,

$$\|\varphi\|_{\infty} \leq M_1(\alpha,p)\cdot \|\varphi\|_{\alpha}^{\frac{1}{1+\alpha p}}\cdot\|\varphi\|_{p}^{\frac{\alpha p}{1+\alpha p}} \tag{3.1.5}$$

elde edilir.

Eğer $\varepsilon_* > \ell$ olduğu dikkate alınırsa

$$C = \|\varphi\|_p \leq \|\varphi\|_{\infty}\cdot\left(\int_{\gamma} |d\tau)|\ \right)^{1/p} = \ell^{1/p}\cdot A$$

(3.1.3) denkleminden,

$$A \leq B \cdot \ell^{\alpha} + \frac{\ell^{-1/p}}{\sqrt[p]{2}} \cdot \ell^{-1/p} \cdot A$$

elde edilir.

Sonuç olarak,

$$A \leq \frac{\sqrt[p]{2}}{\sqrt[p]{2}-1} \cdot B \cdot \ell^{\alpha}$$

elde edilir.

Öyleyse, $\ell < \varepsilon_*$ için

$$A \leq \frac{\sqrt[p]{2}}{\sqrt[p]{2}-1} \cdot B \cdot \varepsilon_*^{\alpha} = \frac{\sqrt[p]{2}}{\sqrt[p]{2}-1} \cdot (n(\alpha,p))^{\alpha} \cdot B^{\frac{1}{1+\alpha p}} \cdot C^{\frac{\alpha p}{1+\alpha p}}$$

doğrudur.

Yani, son olarak,

$$\|\varphi\|_{\infty} \leq M_2(\alpha,p) \cdot \|\varphi\|_{\alpha}^{\frac{1}{1+\alpha p}} \cdot \|\varphi\|_{p}^{\frac{\alpha p}{1+\alpha p}} \tag{3.1.6}$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada,

$$M_2(\alpha,p) = \frac{\sqrt[p]{2}}{\sqrt[p]{2}-1} \cdot (n(\alpha,p))^{\alpha}$$

(3.1.5) ve (3.1.6) eşitsizliklerinden, Lemma 3.1.2 kanıtlanmış olur.

<u>Lemma 3.1.3</u>:

$$D_{0r} = \{(t,\varphi) \in D_0 : t \in \gamma, |\varphi| \leq r\}, \qquad r > 0,$$

$$B_0(0;r) = \{\varphi \in H_\alpha(\gamma) : \|\varphi\|_\alpha \leq r\}, \qquad \alpha \in (0,1)$$

ve

$$k_1(t) = k\big(t,\varphi(t)\big), \quad t \in \gamma$$

olmak üzere, eğer $\varphi \in B_\alpha(0;r)$ ve $k \in H_{\alpha,1}(m_1,m_2;D_{0r})$ ise, $k_1(t)$ fonksiyonu aşağıdaki

$$|k_1(t)| \leq m_0 + m_2 \cdot r, \quad t \in \gamma,$$

$$|k_1(t_1) - k_1(t_2)| \leq (m_1 + m_2 \cdot r) \cdot |t_1 - t_2|^\alpha, \; t_1, t_2 \in \gamma \qquad (3.1.7)$$

eşitsizlikleri sağlar. Burada, $m_0 = max\{|k(t,0)| : t \in \gamma\}$ dir.

İspat: $t, t_1, t_2 \in \gamma$ ve $\alpha \in B_\alpha(0;r)$ için $0 < \alpha < 1$, $r > 0$ için denklem (2.2)'ye uygun olarak

$$|k_1(t)| \leq \big|k\big(t,\varphi(t)\big) - k(t,0)\big| + |k(t,0)|$$

$$\leq m_2|\varphi(t)| + m_0 \leq m_0 + m_2 \cdot r$$

olduğu görülebilir. Dolayısıyla

$$|k_1(t_1) - k_1(t_2)| = |k(t_1,\varphi(t_1)) - k(t_2,\varphi(t_2))|$$

$$\leq m_1 \cdot |t_1 - t_2|^\alpha + m_2 \cdot |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|$$

$$\leq (m_1 + m_2 \cdot H(\varphi,\alpha;\gamma)) \cdot |t_1 - t_2|^\alpha$$

$$\leq (m_1 + m_2 \cdot \|\varphi\|_\alpha \cdot |t_1 - t_2|^\alpha$$

$$\leq (m_1 + m_2 \cdot r) \cdot |t_1 - t_2|^\alpha$$

dir.

Böylece (3.1.7) eşitsizliği ispatlanmıştır.

Sonuç 3.1.1: Eğer Lemma 3.1.3' ün koşulları sağlanırsa, o zaman $k_1 \in H_\alpha(\gamma)$ ve değerlendirmeyi takip eden $\|k_1\|_\alpha$ normu için

$$\|k_1\|_\alpha \leq m_0 + m_1 + 2 \cdot m_2 . r \tag{3.1.8}$$

doğrudur.

Şimdi, $k \in H_{\alpha,1}(m_1, m_2;\ D_0)$ ve $\varphi \in H_\alpha(\gamma)$ için $0 < \alpha < 1$, $\widetilde{k_1} : \gamma \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu açıklanmıştır:

$$\widetilde{k_1}(t) = S_\gamma k(\cdot, \varphi(\cdot))(t), \quad t \in \gamma \tag{3.1.9}$$

sınırlı $S_\gamma : H_\alpha(\gamma) \to H_\alpha(\gamma), \alpha \in (0,1)$ [2], [33] operatörü için aşağıdaki norm verilsin.

$$\|S_\gamma\|_\alpha = \|S_\gamma\|_{H_\alpha(\gamma)} \equiv sup\left\{\|S_\gamma\varphi\|_\alpha : \varphi \in H_\alpha(\gamma), \|\varphi\|_\alpha \leq 1\right\} \tag{3.1.10}$$

Lemma 3.1.4: Eğer $k \in H_{\alpha,1}(m_1, m_2; D_{0r})$ ve $\varphi \in B_\alpha(0; r)$, $0 < \alpha < 1$ ise, (3.1.9) formülü ile bulunmuş $\widetilde{k_1}(t)$ fonksiyonu $H_\alpha(\gamma)$ sınıfında ve değerlendirmeyi takip eden $\|k_1\|_\alpha$ normu için

$$\|k_1\|_\alpha \leq (m_0 + m_1 + 2 \cdot m_2 . r) \cdot \|S_\gamma\|_\alpha = L_1 \tag{3.1.11}$$

doğrudur.

İspat: (3.1.1) sonucundan, $\widetilde{k_1}(t)$ tanımından ve $S_\gamma : H_\alpha(\gamma) \to H_\alpha(\gamma), \alpha \in (0,1)$ [6], [24] özelliklerinden, $k_1 \in H_\alpha(\gamma)$, $\alpha \in (0,1)$ olduğu açıktır.

(2.1.9) tanımından ve $S_\gamma : H_\alpha(\gamma) \to H_\alpha(\gamma), \alpha \in (0,1)$ sınırlılık operatöründen,

$$\|\widetilde{k_1}\|_\alpha \leq \|k(\cdot, \varphi(\cdot))\|_\alpha \cdot \|S_\gamma\|_\alpha$$

elde edilir.

Bu eşitsizlikten ve (3.1.8) eşitsizliğinden bu başlık (lemma) kanıtlanmış olur.

Lemma 3.1.5: $r > 0$ ve $t \in \gamma$ için

$$D_r = \{(t, \varphi, f, s) : t \in \gamma, |\varphi| \leq r, |f| \leq r, |s| \leq r\}$$

ve

$$\widetilde{\Phi}(t) = \Phi\left(t, \varphi(t), f(t), (S_\gamma \circ k_1)(t)\right)$$

olmak üzere, eğer $k \in H_{\alpha,1}(m_1, m_2; D_{0r}), \Phi \in H_{\alpha,1,1,1}(n_1, n_2, n_3, n_4; D_r)$ ve $\varphi, f \in B_\alpha(0; r)$, $\alpha \in (0,1)$ ise o zaman $t, t_1, t_2 \in \gamma$ için

$$|\widetilde{\Phi}(t)| \leq n_0 + n_2 \cdot r + n_3 \cdot L_1$$

$$|\widetilde{\Phi}(t_1) - \widetilde{\Phi}(t_2)| \leq n_1 + (n_2 + n_3) \cdot r + n_4 \cdot L_1 |t_1 - t_2|^\alpha$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Burada, $n_0 = \|\Phi(\cdot, 0,0,0\|_\infty$ dir.

İspat: $\varphi, f \in B_\alpha(0; r), \alpha \in (0,1)$ ve $t, t_1, t_2 \in \gamma$ için (1.2.3) eşitsizliği ve Lemma 3.1.4' ün gerektirdiği gibi

$$|\widetilde{\Phi}(t)| \leq \left|\Phi\left(t, \varphi(t), f(t), (S_\gamma \circ k_1)(t)\right) - \Phi(t, 0,0,0)\right| + |\Phi(t, 0,0,0)|$$

$$\leq n_2 \cdot |\varphi(t)| + n_3 \cdot |f(t)| + n_4 \cdot \left|(S_\gamma \circ k_1)(t)\right| + n_0$$

$$\leq n_0 + (n_2 + n_3) \cdot r + n_4 \cdot L_1$$

ve

$$\left|\tilde{\Phi}(t_1) - \tilde{\Phi}(t_2)\right| \leq n_1 \cdot |t_1 - t_2|^\alpha + n_2 |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| + n_3 \cdot |f(t_1) - f(t_2)|$$

$$+ n_4 \cdot \left|(S_\gamma \circ k_1)(t_1) - (S_\gamma \circ k_1)(t_2)\right|$$

$$\leq (n_1 + (n_2 + n_3) \cdot r + n_4 \cdot L_1) \cdot |t_1 - t_2|^\alpha$$

olduğu kolayca görülebilir.

Lemma 3.1.5 ten aşağıdaki sonuç çıkarılabilir.

Sonuç 3.1.2: Eğer Lemma 3.1.5 in koşulları sağlanırsa, $\tilde{\Phi} \in H_\alpha(\gamma)$ ve $\|\tilde{\Phi}\|_\alpha$ normu için aşağıdaki eşitsizlik geçerli olur:

$$\|\tilde{\Phi}\|_\alpha \leq 2 \cdot \{max(n_0, n_1) + (n_2 + n_3) \cdot r + n_4 \cdot L_1\} = L$$

Sonuç 3.1.3: Eğer Lemma 3.1.5'in koşulları sağlanırsa, aşağıdaki şekilde tanımlanan

$$A(\varphi)(t) = \Phi\left(t, \varphi(t), f(t), (S_\gamma \circ k_1)(t)\right), \quad t \in \gamma \qquad (3.1.12)$$

A operatörü $B_\alpha(0; r)$ yi $B_\alpha(0; L)$ ye dönüştürür.

Sonuç 3.1.4: Eğer Lemma 3.1.5'in koşulları sağlanıyorsa, $L \leq r$ ise, (3.1.12) formülü ile tanımlanan A operatörü $B_\alpha(0; r)$ küresini dönüştürür.

Lemma 3.1.6: $B_\alpha(0;r)$, $\alpha \in (0,1)$ küresi $(H_\alpha(\gamma);\ \|\varphi\|_\infty)$ uzayında kompakttır.

İspat: $B_\alpha(0;r)$ küresinin tanımından, $\alpha \in (0,1)$ ve $\varphi\epsilon B_\alpha(0;r)$ için $\|\varphi\|_\alpha \leq r$ olduğundan ve böylece $\|\varphi\|_\infty \leq r$ elde edilmiştir.

Sonuç olarak, $B_\alpha(0;r)$ küresinin uzayda düzgün şekilde bağlı olduğu küme $((H_\alpha(\gamma);\ \|\varphi\|_\infty)$ açıktır.

Ayrıca, $\varepsilon > 0$ için alınırsa $\delta = (\varepsilon/r)^{1/\alpha}$, o zaman $t_1, t_2 \in \gamma$ ve $\varphi \in B_\alpha(0;r)$ için

$$|t_1 - t_2| < |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq r \cdot |t_1 - t_2|^\alpha < \varepsilon$$

elde edilir.

Buradan $B_\alpha(0;r)$ küresinin elemanlarının aynı dereceden sürekli olduğu görülmüştür. Dolayısıyla, Arzela-Ascoli kompaktlık teoremine göre $B_\alpha(0;r)$ kümesi $(H_\alpha(\gamma);\ \|\varphi\|_\infty$) burada kompakttır.

Lemma 3.1.6'ya göre aşağıdaki sonuç belirtilmiştir:

Sonuç 3.1.5: $\alpha \in (0,1)$ için $B_\alpha(0;r)$, $(H_\alpha(\gamma);\ \|\varphi\|_\infty$)' nin bir alt uzayıdır.

Şimdi, uzayda $H_\alpha(\gamma)$ iki dönüşümü tanımlanmıştır. $\varphi, \tilde{\varphi} \in (H_\alpha(\gamma), \alpha \in (0,1), p > 1$ için ve

$$d_\infty(\varphi, \tilde{\varphi}) = \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_\infty \text{ ve } d_p(\varphi, \tilde{\varphi}) = \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_p$$

verilir.

$$d_\infty: H_\alpha(\gamma) \times H_\alpha(\gamma) \to [0, +\infty) \text{ ve } d_p: H_\alpha(\gamma) \times H_\alpha(\gamma) \to [0, +\infty)$$

dönüşümünün $H_\alpha(\gamma)$, $\alpha \in (0,1)$ uzayındaki metrikler olduğu açıktır ve dolayısıyla $(H_\alpha(\gamma);\ d_\infty)$ ve $(H_\alpha(\gamma);\ d_p)$ nin metrik alanıdır.

Lemma 3.1.7: $\alpha \in (0,1)$ için ve $p > 1$ için d_∞ ve d_p metriklerine göre yakınsama $B_\alpha(0;r)$ alt uzayına denktir.

İspat: $\varphi_0, \varphi_n \in B_\alpha(0;r)$, $\alpha \in (0,1)$, $n = 1,2,\ldots$. bu durumda

$$d_p(\varphi_0, \varphi_n) = \|\varphi_0 - \varphi_n\|_p \leq \ell^{\frac{1}{p}} \cdot \|\varphi_0 - \varphi_n\|_\infty = \ell^{\frac{1}{p}} \cdot d_\infty(\varphi_0, \varphi_n)$$

verildiği gibi,

$$\lim_{n\to\infty} d_\infty(\varphi_0, \varphi_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d_p(\varphi_0, \varphi_n) = 0$$

olduğu açıktır.

Bunun tersinin doğru olduğuna bakılmıştır. (3.1.2) eşitsizliğinde $\varphi_0, \varphi_n \in B_\alpha(0;r)$ için

$$\|\varphi_0 - \varphi_n\|_\infty \leq M(\alpha,p) \cdot \|\varphi_0 - \varphi_n\|_\alpha^{\frac{1}{1+\alpha p}} \cdot \|\varphi_0 - \varphi_n\|_p^{\frac{1}{1+\alpha p}}$$

veya

$$d_\infty(\varphi_0, \varphi_n) \leq (2r)^{\frac{1}{1+\alpha p}} \cdot M(\alpha,p) \cdot (d_p(\varphi_0, \varphi_n))^{\frac{\alpha p}{1+\alpha p}}$$

yazılabilir.

Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} d_p(\varphi_0, \varphi_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d_\infty(\varphi_0, \varphi_n) = 0$$

kabul edilmiştir.

Dolayısıyla, lemma kanıtlanmış olur.

Şimdi, sınırlı operatör $S_\gamma: L_p(\gamma) \to L_p(\gamma)$, $p \in (1,+\infty)$ (bakınız [6],[24]) için

$$\|S_\gamma\|_p = \|S_\gamma\|_{L_p(\gamma)} \equiv sup\left\{\|S_\gamma \varphi\|_p : \| \quad \|_p \leq 1\right\}$$

olsun.

Lemma 3.1.8: Eğer $k \in H_{\alpha,1}(m_1, m_2; D_{0r})$ ve $\Phi \in H_{\alpha,1,1,1}(n_1, n_2, n_3, n_4; D_r)$ $\alpha \in (0,1)$ için operatör A, yeni formül (3.1.12) ile açıklanmış,
$\varphi, \tilde{\varphi} \in B_\alpha(0;r)$ için

$$d_p\big(A(\varphi), A(\tilde{\varphi})\big) \leq M_3(p) \cdot d_\infty(\varphi, \tilde{\varphi}),\ p > 1 \qquad (3.1.13)$$

eşitsizliğini sağlar

Burada,

$$M_3(p) = (n_2 + n_4 \cdot m_2 \cdot \|S_\gamma\|_p)\ell^{1/p}$$

İspat: $t \in \gamma$ ve $\varphi, \tilde{\varphi} \in B_\alpha(0;r)$ için lemma varsayımından,

$$|A(\varphi)(t) - A(\tilde{\varphi})(t)|$$

$$= \left|\Phi\left(t, \varphi(t), f(t), S_\gamma k(\cdot, \varphi(\cdot)(t))\right) - \Phi(t, \tilde{\varphi}(t), f(t), S_\gamma k(\cdot, \tilde{\varphi}(\cdot)(t)))\right|$$

$$\leq n_2 \cdot |\varphi(t) \cdot \tilde{\varphi}(t)| + n_4 \cdot \left|S_\gamma k\left(\cdot, \varphi(\cdot)\right) - S_\gamma k(\cdot, \tilde{\varphi}(\cdot))\ (t)\right|$$

yazılabilir.

Son eşitsizlikten, Minkowski eşitsizliğine ve lemmanın koşullarına göre,

$$\left(S_\gamma |A(\varphi((t) - A(\tilde{\varphi})(t)|^p |dt|\right)^{1/p}$$

$$\left(\int_\gamma [n_2 \cdot |\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| + n_4 \cdot |S_\gamma(k(\cdot, \varphi(\cdot)) - k(\cdot, \tilde{\varphi}(\cdot)))(t)|]^p |dt|\right)^{1/p}$$

$$\leq n_2 \cdot \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_p + n_4 \cdot \|S_\gamma\|_p \cdot \|k(\cdot, \varphi(\cdot)) - k(\cdot, \tilde{\varphi}(\cdot))\|_p$$

$$\leq \left(n_2 + n_4 \cdot m_2 \cdot \|S_\gamma\|_p\right) \cdot \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_p$$

dir. Bu yüzden

$$d_p(A(\varphi),A(\tilde{\varphi})) \leq \left(n_2 + n_4 \cdot m_2 \cdot \|S_\gamma\|_p \right) \cdot \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_p$$

kabul edilebilir.

$p > 1$ için

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_p \leq \ell^{1/p} \cdot \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_\infty$$

dir. Son eşitsizlikten

$$d_p(A(\varphi),A(\tilde{\varphi})) \leq \left(n_2 + n_4 \cdot m_2 \cdot \|S_\gamma\|_p \right) \cdot \ell^{\frac{1}{p}} \cdot d_\infty(\varphi, \tilde{\varphi})$$

elde edilir.

Lemma 3.1.9: Eğer $k \in H_{\alpha,1}(m_1, m_2; D_{0r})$ ve $\Phi \in H_{\alpha,1,1,1}(n_1, n_2, n_3, n_4; D_r)$, $\alpha \in (0,1)$ ise

$$A: B_\alpha(0;r) \to B_\alpha(0;r), \alpha \in (0,1)$$

operatörü d_∞ metriğine göre sürekli bir operatördür.

İspat: $\varphi_0, \varphi_n \in B_\alpha(0;r), \alpha \in (0,1)$, $n = 1,2,\ldots,$ için Lemma 3.1.2 gereğince (eşitsizlik (2.2)) , yazılabilir

$$\|A(\varphi_0) - A(\varphi_n)\|_\infty$$

$$\leq M(\alpha,p) \cdot \|A(\varphi_0) - A(\varphi_n)\|_\alpha^{\frac{1}{1+\alpha p}} \cdot \|A(\varphi_0) - A(\varphi_n)\|_\alpha^{\frac{\alpha p}{1+\alpha p}}.$$

Buradan, (3.1.13) eşitsizliğine göre

$$\|A(\varphi_0) - A(\varphi_n)\|_\infty \leq c \cdot (d_\infty(\varphi_0, \varphi_n))^{\frac{\alpha p}{1+\alpha p}}$$

elde edilir.

Burada, c sabiti:

$$c = c(\alpha,p) = M(\alpha,p) \cdot (M_3(p))^{\frac{\alpha p}{1+\alpha p}} \cdot (2 \cdot r)^{\frac{1}{1+\alpha p}}$$

şeklinde tanımlanır.

Son eşitsizlikten, eğer

$$\lim_{n \to \infty} d_\infty(\varphi_0, \varphi_n) = 0$$

ise

$$\lim_{n \to \infty} d_\infty(A(\varphi_0), A(\varphi_n)) = 0$$

olduğu anlaşılmıştır.

Şimdi lineer olmayan (2.1) Cauchy singüler integral denklemlerinin çözümü ile ilgili aşağıdaki sonuçları sunalım.

Teorem 3.1.1: Eğer $k \in H_{\alpha,1}(m_1, m_2; D_{0r})$, $\Phi \in H_{\alpha,1,1,1}(n_1, n_2, n_3, n_4; D_r)$, $\alpha \in (0,1)$ ve $L \leq r$ ise Cauchy singüler integral denklemi $B_\alpha(0;r)$ küresinde en az bir çözüme sahiptir.

İspat: Lemma 3.1.6 uyarınca $B_\alpha(0;r)$, $H_\alpha(\gamma), \alpha \in (0,1)$ alanının bir kompakt kümesidir. Dahası eğer $L \leq r$ ise formül (3.1.12) ile tanımlanan Sonuç 3.1.4 'ten A operatörü dış bükey, kapalı ve kompakt $B_\alpha(0;r)$ küresini kendisine dönüştürür. Dolayısıyla, A operatörü $H_\alpha(\gamma), \alpha \in (0,1)$ içinde kompakttır. Diğer perspektiften Lemma 3.1.9 uyarınca, operatör A $B_\alpha(0;r)$ küresinde sürekli olduğu için $B_\alpha(0;r)$ küresinde tamamen süreklidir. Böylece, Schouder sabit nokta prensibi gereğince$A$

oeratörü $B_\alpha(0;r)$ küresinde bir daralma dönüşümüdür. Sonuç olarak (2.1) denklemi $H_\alpha(\gamma), \alpha \in (0,1)$ uzayında bir çözüme sahiptir.

3.1.1 teoremi, (2.1) Cauchy singüler integral denkleminin çözümüne ilişkindir.
Şimdi (2.1) denklemi çözümünün tekliği araştırılmıştır ve bu çözüme bir yaklaşımın nasıl bulunabileceği sorunu çözülebilir. Sıradaki teorem bununla alakalıdır.

Teorem 2.1.2: Eğer $k \in H_{\alpha,1}(m_1,m_2;D_{0r})$, $\Phi \in H_{\alpha,1,1,1}(n_1,n_2,n_3,n_4;D_r)$, $\alpha \in (0,1)$ ve $L \leq r$ ve

$$A = n_2 + n_4 \cdot m_2 \cdot \|S_\gamma\|_p < 1$$

ise o zaman (2.1) lineer olmayan Cauchy singüler integral denklemi sadece bir $\varphi_* \in B_\alpha(0;r)$ çözüme sahiptir. Herhangi bir başlangıç $\varphi_0 \in B_\alpha(0;r)$ için bu çözüm terimi

$$\varphi_n(t) = \Phi\left(t, \varphi_{n-1}(t), f(t), S_\gamma k(\cdot, \varphi_{n-1}(\cdot))(t)\right), \; t \in \gamma \qquad (3.1.14)$$

olarak tanımlanan (φ_n), $n = 1,2,\ldots$ dizisinin limiti olarak bulunabilir.
Ayrıca, φ_n yaklaşımı için aşağıdaki değerlendirme doğrudur:

$$d_p(\varphi_*, \varphi_n) \leq \frac{\Delta^n}{1-\Delta} \cdot d_p(\varphi_0, \varphi_1), \; n = 1,2,\ldots. \qquad (3.1.15)$$

İspat: (2.1) denkleminin Teorem 2.1 ile tek bir çözümünün olduğu kanıtlanmıştır. (2.1) denkleminin Teorem 2.1 'in koşullarını sağladığı gösterilmiştir.

Teorem 2.1 varsayımlarını değiştirmeden, eğer $B_\alpha(0;r) = X$, $d_\infty = \rho_1$ ve $d_p = \rho_2$ alınırsa Lemma 3.1.6 'ya göre, Sonuç 3.1.5 ve Lemma 3.1.7 'nin birinci ve ikinci koşullarının Teorem 2.1' de sağlandığı görülür.

Şimdi, $\Delta < 1$ iken formül (3.1.12) ile tanımlanan A operatörünün,

$B_\alpha(0;r), \alpha \in (0,1)$ uzayında daralma dönüşümü olduğunu $d_p, p > 1$ uyarınca söylenebilir.

$\varphi_1, \varphi_2 \in B_\alpha(0;r), \alpha \in (0,1)$ için Lemma 3.1.8 ile birlikte

$$\|A(\varphi_1) - A(\varphi_2)\|_p \leq \left(n_2 + n_4 \cdot m_2 \cdot \|S_\gamma\|_p\right) \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|_p$$

eşitsizliği kanıtlanır.

Burada, $\varphi_1, \varphi_2 \in B_\alpha(0;r), \alpha \in (0,1)$ için

$$d_p(A(\varphi_1), A(\varphi_2)) \leq \Delta \cdot d_p(\varphi_1, \varphi_2) \qquad (3.1.16)$$

elde edilmiştir.

Böylece $\Delta < 1$ olduğunda, A operatörü, $d_p, p > 1$ metriğine göre $B_\alpha(0;r), \alpha \in (0,1)$ üzerinde bir büzülüme dönüşümüdür. Bu yüzden Teorem 2.1'e göre

$$\varphi = A_\varphi$$

operatör denklemi ve sonuç olarak (2.1) denklemi tek bir $\varphi_* \in B_\alpha(0;r)$ çözümüne sahiptir.

Şimdi, $\varphi_* \in B_\alpha(0;r)$ çözümünün herhangi bir $\varphi_0 \in B_\alpha(0;r)$ yaklaşımı için terimleri $\varphi_n(t) = A\varphi_{n-1}(t), \quad t \in \gamma, \quad n = 1,2,\ldots$ $(\varphi_n), n = 1,2,\ldots$ olan dizinin limiti olduğunu gösterelim.

$n = 1,2,\ldots$ için (3.1.16) eşitsizliğinden

$$d_p(\varphi_{n+1}, \varphi_n) \leq \Delta \cdot d_p(\varphi_n, \varphi_{n-1})$$

yazılabilir.

Bu eşitsizlikten,

$$d_p(\varphi_{n+1}, \varphi_n) \leq \Delta^n \cdot d_p(\varphi_0, \varphi_1)$$

elde edilir.

Benzer şekilde $m, n(m, n \in \mathbb{N})$ için

$$d_p(\varphi_{n+1}, \varphi_n) \leq \Delta^n \cdot d_p(\varphi_0, \varphi_m)$$

yazılabilir.

Ayrıca,

$$d_p(\varphi_0, \varphi_m) \leq (\Delta^{m-1} + \Delta^{m-2} + \cdots + \Delta + 1) \cdot d_p(\varphi_0, \varphi_1)$$

elde edilir.

$$d_p(\varphi_n, \varphi_{n+m}) \leq \frac{1-A^m}{1-A} \cdot A^n \cdot d_p(\varphi_0, \varphi_1) \quad (3.1.17)$$

(3.1.17) eşitsizliğinden, (φ_n), $n = 1,2, \ldots$ dizisinin $d_p, p > 1$ metriğine göre bir Cauchy dizisi olduğu görülebilir. Çünkü $(B_\alpha(0; r); d_p)$ alanı, Sonuç 2.1.5 ve Lemma 3.1.7 ' ye göre tam bir metrik uzaydır, burada bir $\tilde{\varphi} \in B_\alpha(0; r)$ elemanı vardır öyle ki

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \tilde{\varphi} \text{ veya } \lim_{n\to\infty} d_p(\varphi_n, \tilde{\varphi}) = 0.$$

Şimdi, $\tilde{\varphi} = \varphi_*$ olduğunu gösterelim.

$n = 1,2, \ldots$ için

$$d_p(\varphi_{n+1}, A(\tilde{\varphi})) \leq d_p(A(\varphi_n), A(\tilde{\varphi})) \leq \Delta \cdot d_p(\varphi_n, \tilde{\varphi})$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} d_p(\varphi_n, \tilde{\varphi}) = 0$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} d_p(\varphi_{n+1}, A(\tilde{\varphi})) = 0$$

elde edilir.

Böylece

$$d_p(\tilde{\varphi}, A(\tilde{\varphi})) \leq d_p(\tilde{\varphi}, \varphi_{n+1}) + d_p(\varphi_{n+1}, A(\tilde{\varphi}))$$

eşitsizliğinden $\tilde{\varphi} = A\tilde{\varphi}$ olduğu elde edilir.

Buradan, $\tilde{\varphi} = \varphi_*$ olduğu görülmektedir.

Bu nedenle,

$$\varphi(t) = A(\varphi)(t), \qquad t \in \gamma$$

operatör denkleminin tek çözümü terimleri $(\varphi_n) \subset B_\alpha(0;r)$, $\alpha \in (0,1)$ $n = 1,2,\ldots$ olarak tanımlanan dizinin limitidir:

$$\varphi_n(t) = A\varphi_{n-1}(t), \ t \in \gamma, n = 1,2,\ldots.$$

Böylece,

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_{n+m}(t) = \varphi_*(t), \ \lim_{m\to\infty} \Delta^m = 0$$

olduğundan (3.1.17) eşitsizliği gereğince (3.1.15) sağladığı görülmektedir.

Böylece teorem ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.2 ve Lemma 3.1.7 'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.6: Terimleri

$$\varphi_n(t) = A\varphi_{n-1}(t), \qquad t \in \gamma, n = 1,2,\ldots$$

şeklinde tanımlanan $(\varphi_n) \subset B_\alpha(0;r)$, $\alpha \in (0,1)$ $n = 1,2,\ldots$ dizisi, keyfi $\varphi_0 \in B_\alpha(0;r)$, $\alpha \in (0,1)$ için nonlineer (2.1) Cauchy singüler integral denkleminin tek çözümüne yakınsıyor.

3.2 Lineer Olmayan Operatör Denklemlerin Çözümü

Bu bölümde

$$F(x) = 0$$

şekilli bir operatör denklemin çözümünün varlığı için yeterli şartlar verilir ve bu denklemin yaklaşık çözümü için bir iterasyon önerilir [30].

Aksi belirtilmedikçe, $F_1 : X \to Y$ *ve* $F_2 : X \to Y$

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

koşulunu sağlayan doğrusal olmayan operatörler olsun.

Burada, F_1 operatörü her $x \in X$ için $[F_1'(x)]^{-1} : Y \to X$ ters operatörü kolayca bulunacak şekilde F_1'- Fréchet türevine sahiptir ve F_2 normu çok küçük bir operatördür.

Bu durumda, (1.1.6) denklemi

$$F_1(x) + F_2(x) = 0 \qquad (3.2.1)$$

olarak yazılabilir.

Bu tez çalışmasında (3.2.1) operatör denkleminin yaklaşık çözümünü bulmak için aşağıdaki iterasyon tercih edilir

$$x_n = x_{n-1} - [F_1'(x_0)]^{-1}[F_1(x_{n-1}) + F_2(x_{n-1})], \; n = 1,2,\ldots, \qquad (3.2.2)$$

x_0 burada X uzayının keyfi elemanıdır.

Eğer F_1' türevi her x_n, $n = 0,1,2,...$, için kolayca bulunabilseydi (3.2.2) iterasyonu aşağıdaki şekilde kullanılabilirdi

$$x_n = x_{n-1} - [F_1'(x_{n-1})]^{-1}[F_1(x_{n-1}) + F_2(x_{n-1})],\ n = 1,2,... \qquad (3.2.3)$$

(3.2.2) iterasyonu uygulamalarda daha kullanışlıdır. (3.2.2) denkleminin çözümü için (3.2.2) iterasyonun yaklaşımı üzerine aşağıdaki teorem verilir. (1.1.6) iterasyonunun çözümü için iterasyon (3.2.3)' e benzer bir teorem verilebilir.

Teorem 3.2.1: X Banach uzayı ve doğrusal olmayan $F_1: X \to X$ ve $F_2: X \to X$ operatörleri için aşağıdaki koşullar sağlansın.

(1) Herhangi bir $x_0 \in X$ için lineer olmayan $F_1: X \to X$ operatörü $D(x_0;r) \subset X$ küresinde Fréchet türevlenebilirdir ve her $x, y \in D(x_0;r)$ için

$$\|F_1'(x) - F_1'(y)\| \leq \ell_1 \|x - y\| \qquad (3.2.4)$$

olacak şekilde $l_1 > 0$ sayısı vardır.

(2) Doğrusal operatör $F_1'(x_0): X \to X$ $[F_1'(x_0)]^{-1}$ ters operatörüne sahiptir ve

$$\|[F_1'(x_0)]^{-1}\| \leq m_1,\ \|[F_1'(x_0)]^{-1}F_1(x_0)\| \leq m_2 \qquad (3.2.5)$$

koşullarını sağlayan $m_1 > 0, m_2 > 0$ sayıları vardır

(3 $[F_1'(x_0)]^{-1}$) ters operatörü ve $F_2 : X \to X$ operatörü

$$\|[F_1'(x_0)]^{-1}F_2(x)\| \le m_3,\ x \in D(x_0;r) \tag{3.2.6}$$

$$\|F_2(x) - F_2(y)\| \le \ell_2 \|x-y\|,\ \forall x,y \in D(x_0;r) \tag{3.2.7}$$

olacak şekilde $m_3 > 0, \ell_2 > 0$ sayıları vardır.

Eğer,

$$m_1\ell_2 < \sqrt{1-2m_1\ell_1(m_1+m_3)} \tag{3.2.8}$$

$$\delta_0 = \frac{1-\sqrt{1-2m_1\ell_1(m_1+m_3)}}{m_1\ell_1} \le r \tag{3.2.9}$$

Koşulları aynı anda sağlanırsa, (3.2.1) denkleminin tek bir $x_* \in \overline{D}(x_0;\delta_0)$ çözümü vardır ve terimleri (3.2.2) formülü ile tanımlanan $x_n, n = 1,2,\dots$, dizisi x_* çözümüne yakınsar.

Ayrıca,

$$q = 1 - \sqrt{1-2m_1\ell_1(m_1+m_3)} + m_1\ell_2$$

q sayısı için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\|x_n - x_*\| \le \frac{q^n}{1-q}(m_2+m_3),\ n = 1,2,\dots \tag{3.2.10}$$

[30].

İspat: Teoremin varsayımları sağlansın. Her $x \in D(x_0;r)$ ve $r > 0$ için

$$\Phi_1(x) = x - [F_1'(x_0)]^{-1}F_1(x)$$

$$\Phi_2(x) = -[F_1'(x_0)]^{-1}F_2(x)$$

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x)$$

olsun. Böylece, (3.2.1) denklemi aşağıdaki gibi yazılır

$$x = \Phi(x). \tag{3.2.11}$$

Doğrusal olmayan $\Phi : \bar{D}(x_0;r) \to X$ operatörü $\bar{D}(x_0;\delta_0), \delta_0 \in (0,r)$ kapalı kürede bir daralma dönüşümü olsun.

$x \in D(x_0;\delta_0)$ için

$$\Phi(x) - x_0 = [F_1'(x_0)]^{-1} \cdot [F_1'(x_0)(x - x_0) - F_1(x) + F_1(x_0)]$$

$$-[F_1'(x_0)]^{-1}F_1(x_0) - [F_1'(x_0)]^{-1} \cdot F_2(x)$$

yazılabilir.

Bu eşitlikten ve (3.2.4), (3.2.5) ve (3.2.6) eşitsizliklerden

$$\|\Phi(x)-x_0\| \leq \frac{1}{2} m_1 \ell_1 \delta_0^2 + m_2 + m_3 \tag{3.2.12}$$

elde edilir.

Son eşitsizlikten ve (3.2.9)' dan

$$\|\Phi(x)-x_0\| \leq \delta_0$$

yazılır.

Böylece, $x \in \overline{D}(x_0;\delta_0)$ için $\Phi(x) \in \overline{D}(x_0;\delta_0)$ elde edilir.

Sonuç olarak, $\Phi(\overline{D}(x_0;\delta_0)) \subset \overline{D}(x_0;\delta_0)$ elde edilir.

$x, y \in \overline{D}(x_0;\delta_0)$ için

$$\Phi(x)-\Phi(y) = x-y-[F_1'(x_0)]^{-1}\cdot[F_1(x)-F_1(y)]$$

$$-[F_1'(x_0)]^{-1}\cdot[F_2(x)-F_2(y)]$$

eşitliği açıktır.

Bu eşitsizlikten ve (3.2.4), (3.2.5) ve (3.2.7) eşitsizliklerinden

$$\|\Phi(x)-\Phi(y)\| \leq (m_1\ell_1\delta_0 + m_1\ell_2)\|x-y\| \tag{3.2.13}$$

olduğu görülebilir.

Diğer yandan Teorem 3.2.1'in, (3.2.8) ve (3.2.9) koşullarından, $m_1\ell_1\delta_0 + m_1\ell_2 < 1$ olduğundan, (3.2.13) eşitsizliğinden operatör Φ 'nın $\overline{D}(x_0;\delta_0)$ küresi içinde büzülme dönüşümü olduğu anlaşılır.

Ayrıca, (3.2.12) ve (3.2.13) eşitsizliklerinden

$$\|\Phi(x_0) - x_0\| \leq (1-q)\delta_0$$

olduğu görülür.

Bu nedenle, Banach sabit nokta ilkesinin bir sonucu olarak lineer olmayan $\Phi : X \to X$ operatörü tek bir $x_* \in \overline{D}(x_0;\delta_0)$ sabit noktaya sahiptir.

Sonuç olarak, (3.2.11) denklemi tek bir $x_* \in \overline{D}(x_0;\delta_0)$ çözümüne sahiptir.

Newton-Kantorovich iterasyonuna göre, aşağıda tanımlanan $(x_n), n = 1, 2, \ldots$ dizisi

$$x_n = \Phi(x_{n-1}), \qquad n = 1,2,\ldots$$

x_* çözümüne yaklaşır ve

$$\|x_n - x_*\| \leq \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\|$$

değerlendirmesi doğrudur.

Sonuç olarak,

$$\|x_1 - x_0\| \leq m_2 + m_3$$

olduğundan, (3.2.10) değerlendirmesi doğrudur.

Φ operatörünün tanımından ve yukarıdaki bilgilerden teoremin ippatı tamamlanmıştır.

Şimdi, Teorem 3.2.1'in bazı uygulamaları üzerine bazı örnekler verelim.

$D = \{(t, s, x) \in \mathbb{R}^3 : t, s \in [a, b], |x| \leq r\}$ bölgesinde sürekli $f(t, s, x)$ fonksiyonu için

$$x(t) = \int_a^b f(t, s, x(s))ds\,,\ t \in [a, b] \tag{3.2.14}$$

doğrusal olmayan Fredholm integral denklemi verilsin.

Burada, $x(t),\ t \in [a, b]$ bilinmeyen fonksiyondur.

(3.2.14) denklemi (1.1.6) denkleminin bir özel durumudur.

$X = Y = (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ olsun.

Burada, $x \in X$ için

$$\|x\|_\infty = max\{|x(t)|: t \in [a, b]\}.$$

$H(t, s, x)$ fonksiyonu D bölgesinde x değişkenine göre birinci mertebeden sürekli kısmi türeve sahip olsun.

$(t, s, x) \in D$ için

$$Q(t,s,x) = f(t,s,x) - H(t,s,x)$$

olsun. Bu durumda, aşağıdaki

$$F_1(x)(t) = x(t) - \int_a^b H(t,s,x(s))ds$$

$$F_2(x)(t) = -\int_a^b Q(t,s,x(s))ds$$

denklemler için (3.2.14)'ü

$$F_1(x) + F_2(x) = 0 \tag{3.2.15}$$

lineer olmayan operatör denklem şeklinde yazabiliriz.

(3.2.15) denkleminin yaklaşık çözümü için (3.2.2) iterasyonu aşağıda belirtildiği gibi ayarlanabilir. (3.2.2) iterasyonunun başlangıç yaklaşımı olarak [a,b] aralığında sürekli keyfi $x_0(t)$ fonksiyonu alınabilir. (3.2.2) iterasyonunun $x_n(t), n = 1,2,\ldots$ terimleri

$$x_n(t) = h_n(t) + x_{n-1}(t) \tag{3.2.16}$$

olarak tanımlanmıştır.

Burada, $h_n(t)$ terimleri aşağıdaki denklemden bulunabilir:

$$F_1'(x_0)h_n = -F_1(x_{n-1}) - F_2(x_{n-1}),\ n = 1,2,\dots. \qquad (3.2.17)$$

Varsayım gereğince, her $x_0 \in X$ için

$$F_1'(x_0)h(t) = h(t) - \int_a^b H_x(t,s,x(s))h(s)ds \qquad (3.2.18)$$

sahibiz.

Buradan, (3.2.17) denklemi çekirdeği $K(t,s) = H_x(t,s,x(s))$ olan aşağıdaki gibi

$$h_n(t) - \int_a^b K(t,s) \cdot h_n(s)ds = q_{n-1}(t) \qquad (3.2.19)$$

lineer Fredholm integral denklemi şeklinde yazılabilir,

Burada,

$$q_{n-1}(t) = -x_{n-1}(t) + \int_a^b H(t,s,x_{n-1}(s))ds + \int_a^b Q(t,s,x_{n-1}(s))ds,\ n = 1,2,\dots.$$

(3.2.19) Fredholm integral denklemini çözdükten sonra, eğer $h_n(t)$ fonksiyonları (3.2.6) formülü ile değiştirilirse (3.2.15) denkleminin yaklaşık çözümü için (3.2.2) iterasyonu elde edilir.

Şimdi, (3.2.19) denklemini çözmek için $\lambda_0 = -1$ sayısının $K(t,s)$ çekirdeğinin bir özdeğeri olsun. Bu durumda, bilindiği üzere (3.2.19) Fredholm integral denklemi çözülebilirdir [7]. Dolayısıyla, (3.2.19) denkleminin çözümü

$$h_n(t) = q_{n-1}(t) + \int_a^b \Re(t,s) q_{n-1}(s) ds$$

olacaktır.

Burada, $\Re(t,s), (t,s) \in [a,b] \times [a,b]$ $K(t,s)$ çekirdeğinin çözücü çekirdeğidir.

Böylece, (3.2.14) denkleminin yaklaşık çözümü için (3.2.2) iterasyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \int_a^b H(t,s,x_{n-1}(s))ds + \int_a^b Q(t,s,x_{n-1}(s))ds \\ &+ \int_a^b \Re(t,s) \, [-x_{n-1}(s) + \int_a^b H(s,\xi,x_{n-1}(\xi))d\xi \\ &+ \int_a^b Q(s,\xi,x_{n-1}(\xi))d\xi] \, ds, \quad n = 1,2,\dots . \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Böylece, (3.2.14) denkleminin tek bir çözümün varlığı ve iterasyonun yaklaşımı üzerine aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.2: $x_0(t) \in C[a,b]$ olsun ve $H(t,s,x)$, $Q(t,s,x)$ fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlasın :

(1) $H(t,s,x)$ ve onun kısmi türevi $H_x(t,s,x)$

$$D = \{(t,s,x) \in \mathbb{R}^3 : t,s \in [a,b], |x - x_0| \le r\}, \qquad r > 0$$

bölgesinde süreklidir. $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$ ve $x_1, x_2 \in [-r,r]$ için

$$|H_x(t,s,x_1) - H_x(t,s,x_2)| \leq \ell_0 |x_1 - x_2|$$

olacak şekilde $\ell_0 > 0$ sayısı vardır.

(2) $\Re(t,s)$ çözücü çekirdeği için

$$\left\| \int_a^b |\Re(\cdot,s)| ds \right\|_\infty \leq m_0$$

olacak şekilde bir tane $m_0 > 0$ sayısı vardır.

(3)

$$\|F_1(x_0)\|_\infty = max\{|F_1(x_0)(t)| : t \in [a,b]\} \leq P_0$$

olacak şekilde $P_0 > 0$ sayısı vardır.

(4) $x \in D(x_0; r) = \{x \in C[a,b]: \|x - x_0\| \leq r\}$ için

$$\left\| \int_a^b |Q(\cdot,s,x)| ds \right\|_\infty \leq \eta_0$$

olacak şekilde öyle bir $\eta_0 > 0$ sayısı vardır.

(5) $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$ *ve* $x_1, x_2 \in [-r,r]$ için

$$|Q(t,s,x_1) - Q(t,s,x_2)| \leq L_0 |x_1 - x_2|$$

olacak şekilde $L_0 > 0$ sayısı vardır.

Eğer

$$q_0 = 2 \cdot (1 + m_0)^2 \cdot (b - a)\ell_0 (P_0 + \eta_0) < 1 - [(1 + m_0)[b - a)L_0]^2 \qquad (3.2.21)$$

$$\delta_0 = \frac{1-\sqrt{1-q_0}}{(1+m_0)(b-a)\ell_0} < r \qquad (3.2.22)$$

ise, (3.2.14) denklemi $x_* \in \bar{D}(x_0;\delta_0)$ tek bir çözüme sahiptir ve bu çözüm terimleri (3.2.20) ile tanımlanan $(x_n(t))$, $n = 1,2,\ldots$ fonksiyon dizinin limitidir. Ayrıca,

$$q_1 = 1 - \sqrt{1-q_0} + (1+m_0)(b-a)L_0$$

için

$$\|x_n - x_*\|_\infty \le \frac{q_1^n}{1-q_1}(1+m_0)(P_0+\eta_0) \qquad (3.2.23)$$

eşitsizliği doğrudur.

<u>İspat</u>: Teoremin varsayımlarından (3.2.18) eşitliği gereği her $x, y \in D(x_0;r)$ için

$$\|F_1'(x) - F_1'(y)\|_\infty \le (b-a)\ell_0\|x-y\|_\infty$$

yazılır.

Tekrar, teoremin varsayımlarından,

$$[F_1'(x_0)]^{-1}y(t) = +y(t) + \int_a^b \Re(t,s)y(s)ds$$

operatörünün normu için

$$\|[F_1'(x_0)]^{-1}\|_\infty \le 1 + m_0,$$

$$\|[F_1'(x_0)]^{-1}F_1(x_0)\|_\infty \le (1+m_0)P_0$$

elde edilir.

Dahası, her $x, y \in D(x_0; r)$ için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:

$$\|[F_1'(x_0)]^{-1} F_2(x)\|_\infty \leq (1 + m_0)\eta_0$$

$$\|F_2(x) - F_2(y)\|_\infty \leq (b - a)L_0\|x - y\|_\infty.$$

Böylece, denklem (3.2.15) için Teorem 3.2.1' in tüm koşulları sağlanır. Bu yüzden, eğer (3.2.21) ve (3.2.22) koşulları da sağlanırsa, Teorem 3.2.1'den (3.2.14) denklemi bir tek $x_* \in \bar{D}(x_0; \delta_0)$ çözüme sahiptir. Ayrıca, (3.2.23) eşitsizliği bu çözüm için sağlanır ve $(x_n(t))$, $n = 1,2,\ldots$ ve fonksiyon dizisi (3.2.20) formülü ile tanımlanır. Sonuç olarak, (3.2.20) iterasyonu, (3.2.14) denkleminin çözümüne yakınsar.

Bununla bu teorem ispatlanmıştır.

<u>Not 3.2.1</u>: Eğer, Teorem 3.2.2'de bahsi geçen $H(t, s, x)$ fonksiyonu norma göre $f(t, s, x)$ fonksiyonuna yeterince yakınsa

$$x(t) = \int_a^b H(t, s, x(s))ds$$

denklemin çözümü (3.2.14) iterasyonu için birinci yaklaşım alınabilir.

<u>Örnek</u>: Teorem 3.2.2'yi kullanarak aşağıdaki doğrusal olmayan integral denklem araştırılmıştır.

$$x(t) = \int_0^1 e^{st} e^{-x^2(s)} ds + \sqrt{t} - \frac{1}{t-1}(e^{t-1} - 1), \ t \in [0,1] \qquad (3.2.24)$$

Denklem (3.2.24)'te, eğer $x(t) = y(t) + \sqrt{t}$ alınırsa,

$$y(t) = \int_0^1 e^{s(t-1)}[e^{-2\sqrt{s}y(s) - y^2(s)} - 1]ds, \ t \in [0,1] \qquad (3.2.25)$$

elde edilir.

Eğer (3.2.25) denklemi çözülürse (3.2.24) denklemi de çözülür.

Eğer,

$$H(s,y) = e^{-2\sqrt{s}y-y^2} - 1$$

$$Q(t,s,y) = \left[1 - e^{s(t-1)}\right]\left[e^{-2\sqrt{s}y-y^2} - 1\right] \qquad (3.2.26)$$

alınırsa (3.2.15) deklemi

$$F_1(y) + F_2(y) = 0 \qquad (3.2.27)$$

doğrusal olmayan operatör denklemi şeklinde yazılır.

Burada,

$$F_1(y)(t) = y(t) - \int_0^1 H\big(s, y(s)\big)ds,$$

$$F_2(y)(t) = \int_0^1 Q\big(t,s,y(s)\big)ds.$$

$r \in (0,1)$ ve $\bar{D}(0,r/2) = \{y \in [0,1] \ldots \|y\|_\infty \leq r/2\}$ olsun ve $y_0 \in \bar{D}(0,r/2)$,

$$D\{(t,s,y) \in \mathbb{R}^3 : t,s \in [0,1], \|y - y_0\|_\infty \leq r/2\}$$

alınsın.

$H\,(s,y)$ ve $Q\,(t,s,y)$ fonksiyonlarının Teorem 3.2.2'nin koşullarını sağladığı gösterilir.

$$H\,(s,y) = e^{-2\sqrt{s}y-y^2} - 1 \text{ ve } H_y(s,y) = -2(\sqrt{s} + y)e^{-2\sqrt{s}y-y^2}$$

fonksiyonlarının D bölgesi üzerinde sürekli olduğu açıktır.

Ayrıca, $s \in [0,1]$ ve $y_1, y_2 \in [y_0 - \frac{r}{2}, y_0 + \frac{r}{2}]$ için y_1 ve y_2 arasında bir ξ noktası vardır ki

$$| H_y(s,y_1) - H_y(s,y_2)| = 2(2(\sqrt{s}+\xi)^2 - 1)\cdot e^{-2\sqrt{s}\xi-\xi^2}|y_1 - y_2|. \quad (3.2.28)$$

(3.2.28) eşitsizliğinden, $\ell_0 = 2(2(1+\mathrm{r}^2) - 1)$ için

$$| H_y(s,y_1) - H_y(s,y_2)| \leq \ell_0|y_1 - y_2|$$

elde edilir.

Sonuç olarak, Teorem 3.2.2'nin ilk koşulu sağlanır.

$y_0 \in \overline{D}(0;r/2)$ için

$$K(s) = H_y(s,y_0(s)) = -2\left(\sqrt{s}+y_0(s)\right)e^{-2y_0(s)-y_0^2(s)}$$

çekirdeğinin çözücü çekirdeği $\Re(s)$'yi bulmak için $[F_1'(y_0)]^{-1}$ ters operatörünün Frechet türevini bulmak gerekir.

$F_1: X \to X(X = (C[0,1]; \|\cdot\|_\infty))$ operatörünün $y_0 \in [0,1]$ noktasındaki Frechet türevi

$$F_1'(y_0)h(t) = h(t) + 2\int_0^1 \left(\sqrt{s}+y_0(s)\right)e^{-2\sqrt{s}y_0(s)-y_0^2(s)}h(s)ds$$

şeklindedir.

Herhangi bir $a(t) \in C[0,1]$ için

$$h(t) + 2\int_0^1 \left(\sqrt{s}+y_0(s)\right)e^{-2\sqrt{s}y_0(s)-y_0^2(s)}h(s)ds = a(t) \quad (3.2.29)$$

olsun.

Şimdi, (3.2.29) doğrusal integral denklemi çözülmüştür.

Eğer,

$$c = 2\int_0^1 \left(\sqrt{s} + y_0(s)\right) e^{-2\sqrt{s}y_0(s) - y_0^2(s)} h(s)ds \qquad (3.2.30)$$

alınır ve $h(t) = a(t) - c$ ifadesi (3.2.30)'da dikkate alınırsa,

$$T(y_0) = 1 + 2\int_0^1 \left(\sqrt{s} + y_0(s)\right) e^{-2\sqrt{s}y_0(s) - y_0^2(s)} ds \neq 0 \quad (3.2.31)$$

için

$$c = \frac{2}{T(y_0)} \int_0^1 \left(\sqrt{s} + y_0(s)\right) e^{-2\sqrt{s}y_0(s) - y_0^2(s)} a(s)ds$$

elde edilir.

Böylece, eğer (3.2.31) koşulu $y_0(t)$ fonksiyonu için sağlanır ise, (3.2.29) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi bulunur:

$$h(t) = a(t) - \frac{2}{T(y_0)} \int_0^1 \left(\sqrt{s} + y_0(s)\right) e^{-2\sqrt{s}y_0(s) - y_0^2(s)} a(s)ds.$$

Son eşitsizlikten

$$\Re(s) = -\frac{2}{T(y_0)} \left(\sqrt{s} + y_0(s)\right) e^{-2\sqrt{s}y_0(s) - y_0^2(s)}$$

olduğu görülür.

Buna göre,

$$[F_1'(y_0)]^{-1} a(t) = a(t) + \int_0^1 \Re(s) a(s) ds$$

elde edilir.

Buradan, Teorem 2.2'nin ikinci koşulunun

$$m_0 = \frac{2}{|T(y_0)|}\int_0^1 |\sqrt{s} + y_0(s)| e^{-2\sqrt{s}y_0(s) - y_0^2(s)}\, ds$$

için sağlandığı görülür.

Eğer,

$$P_0 = max\left\{\left|y_0(t) - \int_0^1 \left(e^{-2\sqrt{s}y_0(s) - y_0^2} - 1\right)ds\right| : t \in [0,1]\right\}$$

$$\eta_0 = max\left\{\int_0^1 \left|\left(1 - e^{s(t-1)}\right)\left(e^{-2\sqrt{s}y_0(s) - y_0^2} - 1\right)\right| ds : t \in [0,1]\right\}$$

alınırsa; Teorem 3.2.2'nin üçüncü ve dördüncü koşulunun (3.2.27) denklemi için sağlandığı görülür.

Şimdi $Q(t, s, y)$ fonksiyonu Teorem 3.2.2'nin beşinci koşulunu sağlasın. $t, s \in [0,1]$ ve $y_1, y_2 \in [y_0 - \frac{r}{2}, y_0 + \frac{r}{2}]$ için y_1 ve y_2 arasında

$$|Q(t, s, y_1) - Q(t, s, y_2)| = 2|\sqrt{s} + \xi|\, |1 - e^{s(t-1)}| e^{-2\sqrt{s}\xi - \xi^2} |y_1 - y_2| \qquad (3.2.32)$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir tane ξ sayısı vardır.

(3.2.32) denkleminden $L_0 = 2(e-1)(1+r)$ için

$$|Q(t, s, y_1) - Q(t, s, y_2)| \le L_0 |y_1 - y_2|$$

elde edilir.

Bu durumda, eğer koşul (3.2.31) ve aşağıdaki

$$q_0 = 2 \cdot (1 + m_0)^2 \cdot \ell_0 (P_0 + \eta_0) < 1 - [(1 + m_0)L_0]^2$$

$$\delta_0 = \frac{1-\sqrt{1-q_0}}{(1+m_0)\ell_0} < r/2$$

koşullar $y_0 \in \bar{D}(0;r/2)$ başlangıç yaklaşımı için sağlanırsa, Teorem 3.2.2'ye göre, doğrusal olmayan (3.2.27) operatör denkleminin ve sonuç olarak doğrusal olmayan (3.2.25) integral denkleminin $y_* \in \bar{D}(0;\delta_0)$ tek bir çözümü vardır ve bu çözüm aşağıdaki şekilde tanımlanan $(y_n(t)), n = 1,2,\ldots$ dizinin limitidir

$$y_n(t) = \int_0^1 e^{s(t-1)}\left[e^{-2\sqrt{s}y_{n-1}(s)-y_{n-1}^2(s)} - 1\right]ds$$

$$+\int_0^1 \Re(s)\left\{-y_{n-1}(s) + \int_0^1 e^{\xi(s-1)}\left[e^{-2\sqrt{\xi}y_{n-1}(\xi)-y_{n-1}^2(\xi)} - 1\right]d\xi\right\}. \quad (3.2.33)$$

Ayrıca, $(y_n(t)), n = 1,2,\ldots$ dizisi ve $y_*(t)$ çözümü için aşağıdaki değerlendirme doğrudur:

$$\|y_n - y_*\|_\infty \le \frac{q_1^n}{1-q_1}(1+m_0)(P_0+\eta_0),$$

burada, $q_1 = 1-\sqrt{1-q_0} + (1+m_0)L_0$.

Böylece, (3.2.24) denklemi de

$$x_*(t) = y_*(t) + \sqrt{t}$$

tek çözümüne sahiptir.

$$x_n(t) = y_n(t) + \sqrt{t}$$

şeklinde tanımlanan iterasyon bu çözüme yakınsar. Dahası, aşağıdaki doğrudur

$$\|x_n - x_*\|_\infty \le \frac{q_1^n}{1-q_1}(1+m_0)(P_0+\eta_0),\ n = 1,2,\ldots.$$

Şimdi eğer, (3.2.33) iterasyonunun başlangıç yaklaşımı olarak

$$F_1(y)(t) = 0$$

denkleminin çözümü alınırsa her $n = 1,2,\dots$ için $y_n(t) = 0$ olur. Yani (3.2.25) denkleminin çözümü $y_*(t) = 0$ olarak elde edilir ki bu da $(y_n(t))$ $n = 1,2,\dots$ dizisinin limitidir.

Buna göre, (3.2.25) doğrusal olmayan integral denkleminin çözümü

$$x_*(t) = \sqrt{t}$$

olur.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında (3.1başlıktan) Newton-Kantorovich yönteminin lineer olmayan singüler integral denklemlere uygulaması yapılmıştır.

Denklemin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmış ve çözüme yakınsayan iterasyon (yineleme) kurulmuştur. Kurulan iterasyonun çözümüne yakınsama hızı verilmiştir.

Tezin 3.2 alt başlığında lineer olmayan operatör denklemlere değiştirilmiş Newton-Kantorowich yöntemi uygulanmış ve iterasyon kurulmuştur. İterasyonun hızı da belirtilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Amer S. M. , (2001), On the solution of nonlinear singular integral equations with shift in generalized Hölder space, Chaos, Solutions and Fractals 12, 1323-1334.

[2] Amer S. M. , and Dardery S., (2004), On a class of nonlinearsingular integral equations with shift on closed contour, April. Math. Comput. 158,781-791.

[3] Cabada A., Nieto J. J. and Pouso R. L. , (1999), Approximate solutions to a new class of nonlinear diffusion problems, J. Comput. Appl. Math. 108, 219-231

[4] Cabada A. and Nieto J. J. , (2000), Fixed points and approximate slitions for nonlinear operator equations, J. Comput. Appl. Math. 113, 17-25.

[5] David G. , (1982), Courbes corde-are et espaces de Hardy generalizes, Ann. Inst. Fourier 32(3), 227-239.

[6] Gakhov F. D. , (1966), Boundary Value Problems, English Edition, Pergamon Press Ltd.

[7] Galantai A. , (2000), The theory of Newton's method, J. Comput. Appl. Math. 124, 25-44

[8] Gusseinov A. L. and Muhtarov K. S. , (1980), Intoduction to the Theory of Nonlinear Singular Integral Equations, Nauka, Moscow, (in Rusia).

[9] Hutson V. and Pym J. , (1980), Applications of Functional Analysis and Operator Theory, Academic Press, New York.

[10] Ismail A. S. , (2006), On the numerical solution of two-dimensional singular integral equation, Appl. Math. Comput. 173, 389-393.

[11] Junghanns P. and and Müller K. , (2000), A collocation method for nonlinear Cauchy singular integral equations, J. Comput. Appl. Math. 115, 283-300.

[12] Kantorovich L. V. and Akilov G. P. , (1984), Functional Analiysis, Nauka, Moscow, (in Rusian)

[13] Krasnosel'skii M. A. et al., (1972), Approximate Solutions of Operator Equations, English Editions, Wolters-Noordhoff Pulishing, Groningen.

[14] Kong L. , Wang Sh. and Wang J. , (2001), Positive solution of a singular nonlinear third-order periodic boundary value problem, J. Comput. Appl. Math. 132, 247-253

[15] Ladopoulos E. G. and Zisis V. A. , (2000), Nonlinear finite-part singular integral equations arising in two-dimensional fluid mechanics, Nonlin. Anal. 42, 277-290.

[16] Lifanov, I.K. (1996), Singular Integral Equation and Discrete Vortices, VSO, The Netherlands.

[17] Lima P. M. and Carpentier M. P. , (1999), Iterative methods for a singular boundary-value problem, J. Comput. Appl. Math. 111, 173-186.

[18] Liz E. and Pouso R. L. , (1998), Approximation of solutions for nonlinear periodic boundary value problems wiht discontinuous upper and lwer solutions, J. Comput. Appl.Math. 95, 127-138.

[19] Lopez L. , C. (2000), Mastroserio and T. Politi, Newton-type methods for solvin nonlinear equations on quadratic matrix groups, J. Comput. Appl. Math. 115, 357-368.

[20] Lyusternik, L. A. , Sovolyev, B. İ. (1982). Fonksiyonel Analiz Kısa Notlar, Moskova.

[21] Mikhlin S. G. and Prossdorf S. , (1966), Singular Integral Operator, Academic-Verlag, Berlin.

[22] Musayev B. , Alp, M. , (2000), Fonksiyonel Analiz, Kütahya, Türkiye

[23] Muskelishvili N. L. , (1953), Some Basic Problems Of the Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Groningen, The Netherlands.

[24] Muskelishvili N. L. , (1968), Singular Integral Equations, Engilish Edition, Noordhoff Ltd.,Groningen The Netherlands.

[25] Mustafayev N., (1991), ''Düzgün eğri boyunca tanımlı singüler integraller için formül ve bunların singüler integral denklemlerin yaklaşık çözümüne uygulanması'', Doktora Tezi, Bakü, (Rusça).

[26] Mustafayev N. M., (1985), "Kapalı düzgün eğri üzerinde tanımlı fonksiyonlara yaklaşım",Genç Matematikçilerin 6. Respublika Konferansı, Bakü, 171–174.

[27] Mustafayev N. M. (1988), "Kapalı düzgün eğri üzere singüler integrallerin yaklaşımının hatası", Dep. V. VİNİTİ, 338-B88.

[28] Mustafayev N., (1998), Approximate solution of nonlinear singular integral equations, (Russian)-Baku, p. 36, VINITI, No. 338-B88.

[29] Mustafayev N. and Yazar M. I. , (2007), On the approximate solution of a nonlinear singular integral equation with a Cauchy kernel, Far East J. Appl. Math. 27(1), 101-119.

[30] Mustafayev N. , (2007), On the approximate solition of nonlinear operator

equations, Far East J. Appl. Math. 27(1), 121-136.

[31] Nadir M. ve Antıdze, D.J. (2004), On the numerical solution of singuler integral equations using Sandikidze's approximation, 10(1), pp. 83-89.

[32] Nieto J. J. , (1991),An abstract monotone iterative technique, Nonlin. Anal.: Theo. Meth. Appl. 28, 1923-1933.

[33] Sanikidze, D.G. (1974), On a uniform estimate for the approximation of singular integrals with Chebyshev weight by interpolation sums, Soobsh. AN Gruz. SSR 75 (1) 53-55.

[34] Sanıkıdze, J. and Mırıanashvili, M. (2004), Appraximation schemes for singular integrals and their application to some boundary problems, 4(1), pp. 94-104.

[35] Sanikidze, D.G. (1993), On numerical solution of boundary problems by method of approximation of singular integrals, Differ. Uravn., 29, No. 9, pp. 1632-1644, in Russian.

[36] Sanikidze, J. (1971), Approximate solution of singular integral equations in the case of closed contours of integration, Seminar of Institute of Applied Mathematics, Tbilssi.

[37] Tao L. and Yong H. , (2006), Extrapolation method for solving weakly singular nonlinear Volterra integral equations of the second kind. J. Math. Anal. Appl. (JMAA) 1, 1-13.

[38] Trenogin V. A. , (1980), Functional Analysis, Nauka, Moscow, (in Russian).

[39] Tzong-Mou Wu, (2006) Solving the nonlinear equations by the Newton-homotopy

continuation method eiht adjustable auxiliary homotopy function, J. Appl. Math. and Comput. 173, 383-388.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Erdem Özal YAMEN
Doğum Yeri ve Tarihi	: KARS/Susuz 18.10.1986
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (e-posta)	: erdemzal@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Kazım Karabekir Anadolu Öğretmen Lisesi 2004
Lisans	: Samsun 19 Mayıs Üniversitesi 2009
Yüksek Lisans	: Kafkas Üniversitesi 2019

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :

1. Kars Alpaslan Anadolu Lisesi (2009-2010)
2. Kars Hüsnü Özyeğin Anadolu Lisesi (2015-2017)
3. Kars Fen Lisesi (2010-2015 ve 2017-)