T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MİTTAG-LEFFLER VE WRİGHT FONKSİYONLARININ BELİRLİ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Sevil İLGÜN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

HAZİRAN - 2019
KARS

T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MİTTAG-LEFFLER VE WRİGHT FONKSİYONLARININ BELİRLİ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Sevil İLGÜN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

HAZİRAN - 2019

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Sevil İLGÜN'ün Prof. Dr. Nizami MUSTAFA danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Mittag-Leffler ve Wright Fonksiyonlarının Belirli Geometrik Özellikleri " adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek … … ile kabul edilmiştir.

. . / . . / 20..

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA	
Üye	: Prof. Dr. İsa YILDIRIM	
Üye	: Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR	

Bu tezin kabulü Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Sevil İLGÜN
20/06/2019

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

Mittag-Leffler ve Wright Fonksiyonlarının Belirli Geometrik Özellikleri

Sevil İLGÜN

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

Bu tez çalışmasında genelleştirilmiş Mittag-Leffler ve Wright Fonksiyonlarının Belirli Geometrik Özellikleri verilmiştir. Ayrıca, genelleştirilmiş Mittag-Leffler ve Wright fonksiyonlarının yıldızıllığı, konveksliği ve konvekse-yakınlığı U birim açık diskinde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, ünivalent fonksiyon, yıldızıl fonksiyon, konveks fonksiyon, Mittag-Leffler fonksiyonu, Wright fonksiyonu.

2019, 53 Sayfa

ABSTRAT

(M. Sc. Thesis)

Certain Geometric Properties of Mittag-Leffler and Wright Functions

Sevil İLGÜN

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

In this thesis, we give specific geometric properties of the generalized Mittag-Leffler and Wright functions. Also, we investigated starlikeness, convexity and close-to-convexity in the open unit disk U for generalized Mittag-Leffler and Wright functions.

Key Words: Analytic function, univalent function, starlike function, convex function, Mittag-Leffler function, Wright function.

2019, 53 pages

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunulan bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Bu çalışmada her türlü kolaylığı sağlayan ve tezin hazırlanışında yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Nizami MUSTAFA'ya ve tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım matematik bölümü öğretim üyelerinden Prof. Dr. Erhan DENİZ ve Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR'a en içten dileklerimle sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten dolayı sevgili aileme teşekkür ederim.

Sevil İLGÜN

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^{+}$	: Sayma sayıları kümesi
$U(z_0, r)$	: z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk
U	: $\{z : \lvert z\rvert < 1, z \in \mathbb{C}\}$ merkezil açık birim disk
$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	: Genelleştirilmiş kompleks düzlem
A	: $\left\{ f : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \;\; z \in U \right\}$ sınıfı
$\mathcal{S}$	: $\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in U$ için f ünivalent$\}$ sınıfı
$\mathcal{P}$	: Caratheodory sınıfı
Ω	: Schwarz fonksiyonlarının sınıfı
$\mathcal{S}^*$	: Yıldızıl fonksiyonların sınıfı
C	: Konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*(\beta)$	: $\beta -$ Mertebeden yıldızıl (starlike) fonksiyonların sınıfı
$C(\beta)$	: $\beta -$ Mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı
$\operatorname{Re} f(z)$	: $f(z)$ fonksiyonunun reel kısmı
$\operatorname{Im} f(z)$	: $f(z)$ fonksiyonunun sanal kısmı
$(a)_n$	: Pochhammer (veya Apell) sembolü
$\Gamma(z)$	: Euler gama fonksiyonu
$F(a,b;c;z)$	: Gauss hipergeometrik fonksiyonu
$J_v(\mathrm{z})$	: Bessel fonksiyonu
$I_v(\mathrm{z})$	: Modifiye Bessel fonksiyonu
$j_v(\mathrm{z})$	: Küresel Bessel fonksiyonu
$i_v(\mathrm{z})$	: Modifiye Küresel Bessel fonksiyonu
$w_{v,b,c}(z)$	: Genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu
$u_{v,b,c}(z)$	: Normalize edilmiş genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu

1. GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Geometrik fonksiyonlar teorisi, ilk olarak G. Bernard Rieman'ın 1851 yılında kompleks düzlemin bir $D \subset \mathbb{C}\,(D \neq \mathbb{C})$ alt bölgesini D_1 bölgesi üzerine resmeden bir f analitik fonksiyonunun varlığını gösteren ve adına "Riemann dönüşüm teoremi" denilen teoremiyle ortaya çıkmıştır. Fakat bu teorem, 20. yüzyılın başlarına kadar bazı araştırmacılara göre kullanışlı olmadığından, bazı araştırmacılara göre de önemi fazla anlaşılmadığından pek fazla uygulama alanı bulamamıştır. 1907 yılında meşhur matematikçilerden biri olan Koebe'nin, bu teoremi hem analitik hem de ünivalent (yalınkat) fonksiyonlar için

> "Kompleks düzlemin $D \subset \mathbb{C}\,(D \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı bir alt bölgesini U açık birim diski üzerine resmeden f analitik ve ünivalent fonksiyonu vardır. Ayrıca $\forall\, z_0 \in D$ çin $f(z_0) = 0,\ f'(z_0) > 0$ şartlarını sağlayan bir tek analitik ve ünivalent fonksiyon vardır."

biçiminde ifade etmesi geometrik fonksiyonlar teorisine yeni bir boyut kazandırmıştır. Koebe'nin bu teoreminde f analitik ve ünivalent fonksiyonunun tanım kümesi olan D yerine U açık birim diski ve $f(z_0) = 0,\ f'(z_0) > 0$ şartı yerine de $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ biçimindeki şartları alınırsa, f fonksiyonu $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ şeklinde seri açılımına sahip olur. Literatürde, $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ şartlarına *normalize şartları* ve bu şartı sağlayan fonksiyonlara da *normalize edilmiş fonksiyon* denir. Bu tipteki analitik fonksiyonların kümesi A, bu kümede tanımlı ünivalent fonksiyonların kümesi de $\mathcal{S}$ ile gösterilir. 1914 yılında alan teoreminin Gronwall tarafından ispatı ve 1916 yılında Bieberbach'ın ortaya koyduğu normalize edilmiş fonksiyonlar için katsayı tahmini ve bu tahminin sonuçları geometrik fonksiyonlar teorisi için yeni bir dönemin başlangıcı olmuştur.

Matematiksel fizik, hidrodinamik, radyo fiziği, atom ve nükleer fizik gibi uygulama alanlı problemlerin çözümünde kullanılan önemli bir fonksiyon Bessel fonksiyonudur.

Bu fonksiyon ilk olarak 1732 yılında Bernoulli tarafından tanımlanmıştır. Fakat ismini F.W. Bessel (1784-1846)'den almaktadır. Bessel, bu fonksiyonu Kepler'in "aynı yerçekimi ivmesi altında hareket eden farklı üç kütlenin hareketini hesaplama" problemini çözme sonucunda elde etmiştir.

Sunulan bu tez genel olarak altı ana başlık altında toplanmıştır.

Tezin giriş kısmında tez konusu ile ilgili geçmişten günümüze yapılan çalışmalar tarihi bir seyir içinde sunulmuştur.

Genel bilgiler olarak adlandırılan ikinci bölümde, tezde kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Materyal ve yöntem olarak adlandırılan üçüncü bölümde, Pochammer sembolü, Mittag-Leffler ve Wright fonksiyonunun belirli geometrik özelliklerinden bahis edilmiştir.

Bulgular bölümünde normalize edilmiş Mittag-leffler ve Wright fonksiyonunun geometrik özellikleri verilmiştir.

Tartışma ve sonuç bölümünde tez genel anlamda değerlendirilmiş, benzer konudaki çalışmalarla kıyaslama yapılmıştır.

Kaynakça bölümünde tezde kullanılan kaynaklar verilmiştir.

1.2. Genel Kavramlar

Bu bölümde, tezde ihtiyaç duyulacak bazı temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 1.2.1: $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ ve $z_0 \in A$ olsun. Eğer, sonlu

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa f fonksiyonu $z_0 \in A$ noktasında diferensiyallenebilirdir (türevlenebilirdir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır [23].

Tanım 1.2.2: Bir $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ kompleks fonksiyonu bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında ve bu noktanın belli bir $U(z_0, r)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferensiyallenebiliyorsa f 'ye z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer, bu fonksiyon bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktasında analitikse S 'de analitik denir. Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir [23].

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \text{ ve } \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

olarak ifade edilen Cauchy-Riemann koşullarını sağlar [23].

Teorem 1.2.1: (Liouville Teoremi): Tam ve sınırlı bir fonksiyon sabittir [23].

Kompleks fonksiyonlar teorisinde analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.2.2: f pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisinin sınırladığı bölgede ve bu eğrinin üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin sınırladığı bölgenin içinde keyfi bir nokta ise her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

eşitliği sağlanır [23].

Cauchy-Türev formülünün en önemli sonuçlarından biri şudur: f fonksiyonu sınırlı bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de bu bölgede analitiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n! \tag{1.2.1}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir. Fakat bu hükmü reel değişkenli her fonksiyon için söyleyemeyiz. Yani, reel değişkenli her fonksiyon bir noktada birinci mertebeden türeve sahipse bu noktada daha yüksek mertebeden türevi vardır diyemeyiz. Örneğin, $f(x) = x^{5/2}$ reel değişkenli fonksiyonunun $x = 0$ noktasında birinci ve ikinci mertebeden türevi olduğu halde, aynı fonksiyonun $x = 0$ noktasında üçüncü mertebeden türevi yoktur.

<u>Teorem 1.2.3</u>: Sabitten farklı bir f fonksiyonu kompleks düzlemin bir bölgesinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini bu bölgenin sınırında alamaz [23].

<u>Sonuç 1.2.1</u>: B kompleks düzlemde sınırlı bir bölge ve sabit olmayan f fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini B bölgesinin sınırında alır [23].

Maksimum prensibinin önemli sonuçlarından birisi aşağıda ifade edilen Schwarz lemmasıdır.

<u>Lemma 1.2.1</u>: f fonksiyonu U açık birim diskinde analitik ve $f(0) = 0$ olsun. Eğer, U diskinde $|f(z)| \leq 1$ ise bu durumda $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$'dır. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu için sağlanır [23].

Teorem 1.2.4: $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir B bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$, B bölgesinde minimum değerini alamaz [23].

Sonuç 1.2.2: B kompleks düzlemde sınırlı bir bölge, $f(z)$ bu bölgede sabit olmayan bir fonksiyon olsun. Ayrıca, $f(z)$ fonksiyonunun B bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini B bölgesinin sınırında alır [23].

1.3. Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda, ünivalent fonksiyon kavramı tanıtılarak bu fonksiyon yardımıyla bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.3.1: f, $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in B$ için $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$ ise (veya $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$ ise) f fonksiyonuna B bölgesinde ünivalent (yalınkat veya schlicht) fonksiyon denir [2].

Eğer, f fonksiyonu z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f 'ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 1.3.1: Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerekli ve yeterli koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır [2].

Ayrıca, $f'(z_0) \neq 0$ şartı $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerek şarttır, fakat yeterli değildir. Yani, f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$ 'dır. Tersi daima doğru değildir.
Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örnek 1.3.1: $f(z)=z^2$ fonksiyonu $B=\{z:1<|z|<2, 0<\arg z<3\pi/2\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir. Gerçekten $f(z)=z^2$ fonksiyonu, B bölgesinde analitik ve her $z_0 \in B$ için $f'(z_0)\neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{5}{3\sqrt{2}}+i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)=f\left(-\frac{5}{3\sqrt{2}}-i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)=i\frac{25}{9}$$

olduğundan $f(z)=z^2$ fonksiyonu B bölgesinde ünivalent değildir.

Eğer, $B\subset\mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise bu durumda $z\in B$ noktasında $f'(z)$ türevi f nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme (uzunluklar için) ve yerel dönme etkenleridir. Buna ilave olarak, $f:B\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinantı $Jf(z)=|f'(z)|^2$ ile verilmektedir. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür.

Böylece, Teorem 1.3.1 den analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 1.3.2: Eğer, bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer, bir f fonksiyonu, bir $B\subset\mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, f fonksiyonu B bölgesinde konformdur denir [2].

Örneğin $f(z)=e^z$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzleminin tamamında konformdur.

Teorem 1.3.2: f fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z)\neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur [2].

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur.
En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm a, b, c, d $ad - bc \neq 0$ koşulunu sağlayan kompleks sabitler olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

genişletilmiş kompleks düzlemi $\left(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}\right)$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

$z-$düzlemindeki $D \subset \mathbb{C}\ (D \neq \mathbb{C})$ bölgesini, $w-$düzlemindeki D_1 bölgesi üzerine resmeden f analitik fonksiyonunun varlığı 1851 yılında Riemann tarafından ortaya atılmıştır.

Teorem 1.3.3: Kompleks düzlemin her $D \subset \mathbb{C}\ (D \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak U açık birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in D$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan ve D yi U birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır [2].

1.4. Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde geometrik fonksiyonlar teorisinin özel bir konusu olan ünivalent fonksiyonları biraz daha ayrıntılı ele alacağız. Analitik olarak bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoreminden, keyfi bir basit bağlantılı bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonu yerine U açık birim diskte tanımlı bir f ünivalent fonksiyonu seçilebilir. Bu fonksiyon için $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ normalizasyon şartları göz önüne alınırsa (1.2.1) serisi ($z_0 = 0$ için)

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n, \quad (z\in U) \tag{1.4.1}$$

şeklini alır. Burada, (1.4.1) şeklinde tanımlanmış fonksiyona *normalize edilmiş* analitik fonksiyon denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını A ile göstereceğiz ve kısaca

$$A=\left\{ f:\forall z\in U \text{ için } f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \right\}$$

yazacağız.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinin temel taşı olan bir sınıfı aşağıda tanımlayalım.

Tanım 1.4.1**:** U birim diskinde ünivalent olan $f\in A$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa $\mathcal{S}$ sınıfı denir ve kısaca

$$\mathcal{S}=\left\{ f\in A:\forall z\in U \text{ için } f-\text{ünivalent}\right\}$$

şeklinde gösterilir [6,22].

$\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı fonksiyon örneklerini aşağıda verelim.

(i) $w=f(z)=z(1-z)^{-1}$ fonksiyonu U açık birim diskini $\mathrm{Re}(w)>-1/2$ sağ yarı düzlemine resmeder.

(ii) $f(z)=z(1-z^2)^{-1}$ fonksiyonu U açık birim diskini $\mathbb{C}\setminus\{(-\infty,-1/2]\cup(1/2,\infty]\}$ bölgesi üzerine resmeder.

(iii) $f(z)=z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonu U açık birim diskini $\mathbb{C}\setminus(-\infty,-1/4]$ bölgesi üzerine resmeder.

Ayrıca, şunu da belirtelim ki, $\mathcal{S}$ sınıfına ait iki fonksiyonun toplamı $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmayabilir.

Örneğin,

$$f_1(z)=\frac{z}{1-z} \text{ ve } f_2(z)=\frac{z}{1+iz}$$

fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmasına rağmen

$$f_1'(z)=\frac{1}{(1-z)^2} \text{ ve } f_2'(z)=\frac{1}{(1+iz)^2}$$

türevlerinden

$$f_1'(z)+f_2'(z)=\frac{2-2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

elde edilir. Buradan, $z_0=\frac{1+i}{2}\in U$ noktasında $f_1'(z_0)+f_2'(z_0)=0$ olduğu görülür.

Bununla beraber $\mathcal{S}$ sınıfındaki birçok özellik bazı dönüşümler altında korunur.

Tanım 1.4.2: U açık birim diskinde $p(0)=1$, $\operatorname{Re}\left(p(z)\right)>0$ koşullarını sağlayan $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya $\mathcal{P}$ sınıfı denir [2].

Örneğin $p(z)=(1+z)/(1-z),\, z\in U$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olup, U açık birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. Ayrıca, $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z)=1+z^n$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen $n\in\mathbb{N}_0,\, n\geq 2$ için ünivalent değildir.

Tanım 1.4.3: U açık birim diskinde $\phi(0)=0$ ve $|\phi(z)|<1$ koşullarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir ve Ω ile gösterilir [2].

Bunların yanı sıra, $\mathcal{P}$ sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıda olduğu gibi önemli bir bağ vardır:

$$p \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \phi(z) = \frac{p(z)-1}{p(z)+1} \in \Omega.$$

$\mathcal{P}$ ve Ω sınıflarını tanımladıktan sonra, $\mathcal{S}$ sınıfının iki önemli alt sınıfını aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Tanım 1.4.4: $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. B kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w \in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B kümesinde kalıyorsa, B'ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir. Eğer, bir f fonksiyonu U açık birim diskini w_0 noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna w_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel durumda, f fonksiyonu U açık birim diskini yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. $f \in A$ olması durumunda yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir [2, 22].

Yıldızıl fonksiyonların geometrik tanımını analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.4.1: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{S}^*$ olması için gerek ve yeter şart

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

olmasıdır. Ayrıca, $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \in \mathcal{S}^* \Rightarrow |a_n|\le n$ [6, 22].

Kısaca, yıldızıl fonksiyonların kümesi

$$\mathcal{S}^*=\left\{ f\in\mathcal{S} : \forall z\in U \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0 \right\}$$

şeklinde gösterilir.

Örneğin, $\mathcal{S}^*$ sınıfına ait fonksiyonlardan en önemlilerinden birisi $z\in U$ olmak üzere,

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde tanımlanan Koebe fonksiyonudur. Bu fonksiyonu

$$k(z)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-1\right]$$

şeklinde yazabiliriz.
Ayrıca, $k(z)$ fonksiyonu

$$u(z)=\frac{1+z}{1-z},\quad g(z)=u^2(z),\quad k(z)=\frac{1}{4}\left[g(z)-1\right]$$

biçiminde yazılarak U açık birim diskini $-\infty$ dan $-1/4$ e kadar negatif reel ekseni çıkartılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak dönüştürdüğünü görebiliriz. $k(z)$ dönüşümü ünivalent fonksiyonlar teorisinde çok sayıda problemde önemli rol oynar.

Görüldüğü gibi

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+\sum_{n=2}^{\infty}nz^n\in\mathcal{S}^*.$$

Ayrıca, Teorem 1.4.1 kullanılarak da $z=re^{i\theta}$ ve $(0\le r<1, 0\le\theta\le 2\pi)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)&=\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)\\&=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}\ge\frac{1+r}{1-r}>0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $k(z)\in\mathcal{S}^*$ olduğu görülür.

Koebe fonksiyonunun dönmeleri her $z\in U$ için

$$k_\theta(z)=\frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$$

şeklinde tanımlanır ve $k_\theta(z)$ fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardır. Bu dönüşüm ile birim diskin görüntüsü $+\infty$ dan $-e^{-i\theta}/4$ ışın hariç kompleks düzlem olur. $\alpha\in(0,2]$ ve $z\in U$ olmak üzere

$$f(z)=\frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}-1\right]$$

fonksiyonu, "genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu" olarak adlandırılır ve $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Tanım 1.4.5: $B\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1,w_2\in B$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B içinde kalıyorsa B'ye konveks küme denir. Eğer, bir f fonksiyonu birim diski konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. $f\in A$ olması durumunda konveks fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir [8, 22].

Konveks fonksiyonları analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıdaki gibidir.

<u>Teorem 1.4.2</u> : $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu halde $f \in C$ olması için gerek ve yeter şart

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0 \text{ ya da } \mathrm{Re}\left(\frac{\left(zf'(z)\right)'}{f'(z)}\right)>0$$

olmasıdır. Ayrıca, $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \in C \Rightarrow |a_n|\leq 1$ [12,16].

Örneğin,

$$f\left(z\right)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n-1}z^{2n-1}\in C$$

dır. Gerçekten $z=re^{i\theta}$ $\left(0\leq r<1, 0\leq\theta\leq 2\pi\right)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}&=\mathrm{Re}\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1+r^2e^{i2\theta}}{1-r^2e^{i2\theta}}\right)\\&=\frac{1-r^4}{1+r^4-2r^2\cos 2\theta}\geq\frac{1-r^2}{1+r^2}>0\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 1.4.1 ve 1.4.2'nin bir sonucu olarak ilk kez Alexander tarafından verilmiş olan aşağıdaki teorem $\mathcal{S}^*$ ve C sınıflarına ait fonksiyonlar arasındaki çok önemli bir bağlantıyı ifade eder.

<u>Teorem 1.4.3</u> (Alexander Teoremi): $f \in \mathcal{S}$ ve $z \in U$ olmak üzere, $g(z)=zf'(z)$ olsun. Bu durumda, $f \in C$ olması için gerek ve yeter şart $g \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır [6, 8, 22].

Tanım 1.4.6: $0 \le \beta < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \beta$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonuna $\beta-$mertebeden yıldızıl fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da $\beta-$mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{S}^*(\beta)$ ile gösterilir [6].

Tanım 1.4.7: $0 \le \beta < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \beta \text{ ya da } \mathrm{Re}\left(\frac{(zf'(z))'}{f'(z)}\right) > \beta$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonuna β mertebeden konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $C(\beta)$ ile gösterilir [6].

Özel olarak, $\mathcal{S}^*(0) = \mathcal{S}^*$ ve $C(0) = C$ yazılır. Buradan da anlaşıldığı üzere $\mathcal{S}^*(\beta) \subset \mathcal{S}^*$ ve $C(\beta) \subset C$'dir.

Tanım 1.4.8: $0 \le \beta < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right) > \beta$$

koşulunu sağlayan bir $g \in S^*$ fonksiyonu varsa bu durumda $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonuna β mertebeden konvekse yakın fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $K_g(\beta)$ ile gösterilir [2, 6, 22].

Özel olarak $K_g(0)=K_g$ sınıfına konvekse yakın fonksiyonların sınıfı, bu sınıfa ait fonksiyonlara da konvekse yakın fonksiyon denir.

Ayrıca $\operatorname{Re}\left(\dfrac{zf'(z)}{g(z)}\right)>\beta$ eşitsizliğinde $g(z)=z\in\mathcal{S}^*$ alınırsa konvekse yakınlık şartı için daha kullanışlı olan $\operatorname{Re}\big(f'(z)\big)>\beta$ elde edilmiş olur. Yani $\operatorname{Re} f'(z)>\beta$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar da $K_g(\beta)$ sınıfından olur.

Yukarıdaki sınıflar arasında $C\subset\mathcal{S}^*\subset K\subset\mathcal{S}\subset\mathcal{A}$ içerme bağıntısı vardır.

<u>Tanım 1.4.9.</u> (Pochhammer (Apell) sembolü): Γ Gama fonksiyonunu göstermek üzere $n\in\mathbb{N}_0,\ a\in\mathbb{C}$ ve $a\neq 0,-1,-2,...$ olması durumunda

$$(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}=\begin{cases}1, & n=0;\ a\in\mathbb{C}-\{0\}\\ a(a+1)...(a+n\text{-}1), & n\in\mathbb{N};\ a\in\mathbb{C}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer, a ve $a+n$ negatif tamsayı ise

$$(a)_n=\lim_{t\to 0}\frac{\Gamma(a+n+t)}{\Gamma(a+t)}$$

formülü geçerlidir.

Pochhammer sembolü için $(a)_{n+1}=(a+n)(a)_n$ eşitsizliği her zaman sağlanır.

Özel olarak $n=0$ alınırsa $(a)_0=1$ şeklinde tanımlanır.

2. MATERYAL VE YÖNTEMLER

Bilindiği üzere [13], Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_\alpha(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)},\ z\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re}(\alpha)>0. \tag{2.1.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu, $\left[\operatorname{Re}(\alpha)\right]^{-1}$ mertebeden z ’nin tam fonksiyonudur.
$E_\alpha(z)$ ’nin bir genelleştirilmişi

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)},\ z,\alpha,\beta\in\mathbb{C};\operatorname{Re}(\alpha)>0 \tag{2.1.2}$$

fonksiyonudur.

Mittag-Leffler fonksiyonu tabii olarak kesir mertebeli diferansiyel ve integral denklemlerin çözümünde ve özellikle kinetik denklemlerin kesirsel genellemesinin araştırılmasında, çok-ayrıntılı nakil ve karmaşık sistemlerin çalışmasında görülür [21,43]. Bu fonksiyonların önemli özellikleri birçok matematikçi tarafından araştırılmıştır [3, 4].

Bu tezde, biz $E_{\alpha,\beta}$ Mittag-Leffler fonksiyonunun geometrik özelliklerini çalışıyoruz. Mittag Leffler fonksiyonu A sınıfına ait olmadığı açıktır.

Bu nedenle, Mittag Leffer fonksiyonunun aşağıdaki şekilde normalleştirilmesi doğaldır

$$\begin{gathered}E_{\alpha,\beta}(\mathrm{z})=\Gamma(\beta)zE_{\alpha,\beta}(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha(\mathrm{n}-1)+\beta}z^n,\\ z,\alpha,\beta\in\mathbb{C};\operatorname{Re}(\alpha)>0,\beta\neq 0,-1,\ldots\,.\end{gathered} \tag{2.1.3}$$

$E_{\alpha,\beta}$ fonksiyonu özel durumda birçok iyi-bilinen fonksiyon içermektedir.
Örneğin,

$$
\begin{aligned}
&E_{0,1}(z)=\frac{z}{z-1},\ E_{1,1}(z)=ze^{z},\ E_{2,1}(z)=z\cosh(\sqrt{z}),\\
&E_{1,2}(z)=e^{z}-1,\ E_{1,3}(z)=\frac{2(e^{z}-z-1)}{z},\\
&E_{1,4}(z)=\frac{6(e^{z}-1-z)-3z^{2}}{z^{2}},\ E_{2,2}(z)=\sqrt{z}\sinh(z),\\
&E_{3,1}(z)=\frac{z}{2}\left[e^{z1/3}+2e^{-\frac{1}{2}z^{1/3}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}z^{1/3}\right]
\end{aligned}
\tag{2.1.4}
$$

İyi bilinmektedir ki Wright fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$
W_{\lambda,\mu}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!\Gamma(\lambda n+\mu)},\quad \lambda>-1,\mu\in C \tag{2.1.6}
$$

Eğer, $\lambda>-1$ ise (2.1.6) serisi her $z\in\mathbb{C}$ için mutlak yakınsaktır; $\lambda=-1$ iken bu seri $|z|<1$ için mutlak yakınsaktır. Dahası, $\lambda>-1$ için, $W_{\lambda,\mu}$ z'nin tam fonksiyonudur. Wright fonksiyonları ilk defa Wright tarafından [30] tanıtılmış ve parçacıkların asmiptotik teorisinde, Mikusinski işlemsel kalkulusünde ve Hankel tipi integral dönüşüm teorisinde geniş olarak kullanılmıştır. Son zamanlarda bu fonksiyonlar kesir dereceden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde ortaya çıkmıştır, Green fonksiyonlarının da Wright fonksiyonları yardımı ile ifadesi bulunmuştur (bkz. [21, 27]).

Eğer λ bir pozitif rasyonel sayı ise, o halde $W_{\lambda,\mu}$ Wright fonksiyonu genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar yardımı ile ifade edilebilir (bkz. [7, Bölüm 2.1]). Özel durumda $\lambda>-1$ ve $\mu=v+1$ iken, $W_{1,v+1}(-z^{2}/4)$ fonksiyonları J_{v} Bessel fonksiyonları yardımı ile aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$
J_{v}(z)=(\frac{z}{2})^{v}W_{1,v+1}(-\frac{z^{2}}{4})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(z/2)^{2n+v}}{n!\Gamma(n+v+1)} \tag{2.1.7}
$$

Ayrıca, $W_{1,\nu+1}(-z) \equiv J_{\nu}^{\lambda}$ $(\lambda > 0, \nu > -1)$ fonksiyonu genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu olarak bilinir. Keza Wright fonksiyonu Array fonksiyonu, Wittakar fonksiyonu, (Wright-tipli) fonksiyonları ve bunun gibi çeşitli basit fonksiyonları da genelleştirir [7]. Wright fonksiyonu $W_{\lambda,\mu}$'nin A kümesine ait olmadığı kolayca görülür. Biz Wright fonksiyonunun aşağıda belirtilen iki çeşit normalleştirilmişini ele alacağız:

$$W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z) = \Gamma(\mu) z W_{\lambda,\mu} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu) z^{n+1}}{n!\Gamma(\lambda n + \mu)}, (\lambda > -1, \mu > 0, z \in U) \tag{2.1.8}$$

ve

$$\begin{aligned} W_{\lambda,\mu}^{(2)}(z) &= \Gamma(\lambda+\mu)\left[W_{\lambda,\mu}(z) - \frac{1}{\Gamma(\mu)} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+\mu) z^{n+1}}{(n+1)!\Gamma(\lambda n + \lambda + \mu)}, (\lambda > -1, \lambda+\mu > 0, z \in U) \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Şunu belirtelim ki

$$W_{1,\nu+1}^{(1)}(-z) = J_{\nu}(z) = \Gamma(\nu+1) z^{1-\nu/2} J_{\nu}(2\sqrt{z}). \tag{2.1.10}$$

Burada, $J_{\nu}(z)$ normalleştirilmiş Bassel fonksiyonudur (bkz. [25, 29]).

Dahası, $W_{\lambda,\mu}^{(1)}$ ve $W_{\lambda,\mu}^{(2)}$'nin aşağıdaki ilişkileri sağladığını kolayca görebiliriz:

$$\lambda, z\left(W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)\right)' = (\mu-1) W_{\lambda,\mu-1}^{(1)}(z) + (\lambda-\mu+1) W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z) \tag{2.1.11}$$

$$\lambda, z\left(W_{\lambda,\mu}^{(2)}(z)\right)' = (\lambda+\mu-1) W_{\lambda,\mu-1}^{(2)}(z) + (\mu-1) W_{\lambda,\mu}^{(2)}(z) \tag{2.1.12}$$

$$z\left(W_{\lambda,\mu}^{(2)}(z)\right)' = W_{\lambda,\lambda+\mu}^{(1)}(z). \tag{2.1.13}$$

Bu fonksiyonların bazı özellikleri üzerine [15-18] çalışmalarını gösterebiliriz.

Bu tez çalışmamızda temel sonuçlarımızı kanıtlamak için aşağıdaki lemmalara ihtiyacımız olacaktır.

Lemma 2.1.1: (Fejer [5]) $a_1 = 1$ ve $\{a_n\}_{n\geq 1}$ negatif olmayan reel sayıların dizisi olsun. Eğer, $\{a_n\}_{n\geq 2}$ dizisi konveks azalansa, yani $0 \geq a_{n+2} - a_{n+1} \geq a_{n+1} - a_n$ koşulunu sağlarsa o halde

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}\right) > 1/2, z \in U .$$

Lemma 2.1.2: (Fejer [5]) $a_1 = 1$ ve $\{a_n\}_{n\geq 1}$ negatif olmayan reel sayıların dizisi olsun.
Eğer,

$$\Delta a_n = na_n - (n+1)a_{n+1}, \Delta a_n^2 := \Delta a_n - \Delta a_{n+1} = na_n - 2(n+1)a_{n+1} + (n+2)a_{n+2}$$

farkları negatif değilse,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

fonksiyonu U açık birim diskte yıldızıldır.

Lemma 2.1.3: (Kakeya [11]) Eğer, $c_0 > c_1 > ...... > c_n > 0$ ise, o halde $c_0 + c_1 z + ... + c_n z^n$ polinomunun kökleri $|z| > 1$ yi sağlar.

Lemma 2.1.4: (MacGregor [12]) Eğer, $f \in A$ fonksiyonu her $z \in U$ için $|f(z)/z - 1| < 1$ koşulunu sağlarsa, o halde f $U_{1/2} = \{z : |z| < 1/2\}$'de ünivalent ve yıldızıldır.

Lemma 2.1.5: (MacGregor [12]) Eğer, $f \in A$ fonksiyonu her bir $z \in U$ için $\left|f'(z)-1\right|<1$ koşulunu sağlarsa, o halde f $U_{1/2}$ 'de konvekstir.

Lemma 2.1.6: (Ozaki [19]) f fonksiyonu (1.4.1) şeklinde olsun. O halde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|na_n-(n+1)a_{n+1}\right|\leq 1 \tag{2.1.14}$$

$f \in K_g$ ve $g(z)=z/(1-z)$ ile.

$a_n \in \mathbb{R}$ için (2.1.14) koşulunun $1 \geq 2a_2 \geq ...... \geq na_n \geq (n+1)a_{n+1} .... \geq 0$ ‘ye denk olduğunu gözlemliyoruz.

Lemma 2.1.7: ([9]). h U 'de $h(0)=1$ şartıyla konveks (ünivalent) bir fonksiyon ve $\phi(\mathrm{z})=1+q_1 z+q_2 z^2+...$ fonksiyonu U 'da analitik bir fonksiyon olsun. Eğer, $\gamma \neq 0$ $\phi(\mathrm{z})+(1/\gamma)z\phi^{'}(\mathrm{z})<h(z)$, için $\mathrm{Re}(\gamma)\geq 0$ ve $\mathrm{Re}(\gamma)\geq 0$ ise, o zaman $\phi(\mathrm{z})<\psi(\mathrm{z})=\gamma \mathrm{z}^{-\gamma} f_0^z t^{\gamma-1}h(t)dt<h(z), z \in U$ ve $\psi(z)$ konvekstir.

Lemma 2.1.8: ([14]). Eğer, $f \in A$ ve her $z \in U$ için $\left|f^{'}(z)-1\right|<2/\sqrt{5}$ sağlıyorsa, o halde f U 'da yıldızıldır.

Lemma 2.1.9: ([30]). $f \in A$ olsun. Eğer , M sayısı *cos M= M* denkleminin kökü olmak üzere

$$\left|\frac{zf^{'}(z)}{f(z)}-1\right|<M, z \in U$$

koşulu sağlanıyorsa, o halde $\mathrm{Re}(f^{'}(z))>0$.

Lemma 2.1.10: ([20]). $\beta \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ ve $c \in \mathbb{C}$, $|c| \le 1$, $c \ne -1$ koşullarını sağlayan kompleks sayılar olsun. Eğer, $h \in A$ fonksiyonu

$$\left| c|z|^{2\beta} + (1-|z|^{2\beta}) \frac{zh''(z)}{\beta h'(z)} \right| \le 1, \; z \in U$$

koşulunu sağlarsa

$$C_\beta(z) = \left\{ \beta \int_0^z t^{\beta-1} h'(t)\,dt \right\}^{1/\beta} , \; z \in U$$

integral operatörü U ’da analitik ve ünivalenttir.

$\beta = 1$ ve $c = 0$ için Lemma 2.1.10’nun ünivalentlik için Becker’ın kriterine denk olduğunu gözlemleriz, hangisi ki şöyle ifade ediliyor [2]: her bir $z \in U$ için $(1-|z|^2)\left|zf''(z)/f'(z)\right| \le 1$ koşulunu sağlıyorsa, f fonksiyonu U ’da ünivalenttir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu başlık altında Mittag-Leffler fonksiyonları ve Wright fonksiyonları yardımıyla onların özel kombinasyonlarının tanım ve bazı özellikleri sunulmuştur.

3.1. Mittag-Leffler Fonksiyonunun Yıldızıllık, Konvekslik ve Konvekse-Yakınlık Özellikleri

Bu alt başlıkta normalleştirmeleri ile birlikte Mittag-Leffler fonksiyonları göz önüne alınmıştır. Mittag-Leffler fonksiyonlarının açık birim diskte ünivalentlik, yıldızıllık, konvekslik ve konvekse-yakınlık gibi özelliklere sahip olması için birkaç yeterli koşullar verilmiştir. Elde edilen sonuçlar D. Bansal ve J. K. Prajapat'a aittir [1].

Teorem 3.1.1: Eğer , $\alpha \geq 1$ v$\beta \geq$ $\Gamma(\alpha+\beta) \geq 4\Gamma(\beta)$ koşulunu sağlarsa, $E_{\alpha,\beta}(z)$ fonksiyonu U açık birim diskinde yıldızıldır.

İspat: (2.1.3)'den

$$\Delta a_n = na_n - (n+1)a_{n+1} = \Gamma(\beta)\left[\frac{n}{\Gamma(\alpha(n-1)+\beta)} - \frac{n+1}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\right] \tag{3.1.1}$$

elde ederiz. Öncelikle belirtilen koşullardan $n \geq 2$ için $\Delta a_n \geq 0$ olduğunu gösterelim. Unutmayın ki

$$\begin{aligned} n\Gamma(\alpha n+\beta) &= n\Gamma(\alpha(n-1)+\alpha+\beta) \geq n\Gamma(\alpha(n-1)+1+\beta) \\ &= n(\alpha(n-1)+\beta)\Gamma(\alpha(n-1)+\beta) \\ &= n^2\Gamma(\alpha(n-1)+\beta) \geq (n+1)\Gamma(\alpha(n-1)+\beta) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

(3.1.2)'yi (3.1.1)'de kullanarak, $n \geq 2$ için $\Delta a_n \geq 0$ elde ederiz. Aynı zamanda, $\Gamma(\alpha+\beta) \geq 4\Gamma(\beta) > 2\Gamma(\beta)$ koşulu $\Delta a_1 \geq 0$ olduğunu gösterir. Dahası,

$$\Delta a_n^2 = na_n - 2(n+1)a_{n+1} + (n+2)a_{n+2}$$

$$\frac{n\Gamma(\beta)}{\Gamma[\alpha(n-1)+\beta]} - \frac{2(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma[\alpha n+\beta]} + \frac{(n+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma[\alpha(n+1)+\beta]} \geq 0$$

olarak

$$n\Gamma\left[an+\beta\right]\geq 2\left(n+1\right)\Gamma\left[\alpha\left(n-1\right)+\beta\right] \qquad \forall\alpha\geq 1,$$

$$\beta\geq 1 \qquad\qquad \Gamma\left(\alpha+\beta\right)\geq 4\Gamma\left(\beta\right), n\in\mathbb{N}.$$

O halde, Lemma 2.1.2 gereğince $E_{\alpha,\beta}(\mathrm{z})$ fonksiyonu U 'dd yıldızıl olduğu görülür. İspat tamamdır.

<u>Örnek 3.1.1</u>: Teorem 3.1.1'de $\alpha=1$ alırsak $E_{1,\beta}$ $\beta\geq 4$ için yıldızıl olduğu açıktır. Özel durumda

$$E_{1,4}\left(z\right)=\frac{6\left(e^{z}-1-z\right)-3z^{2}}{z^{2}} \quad ,$$

U 'da yıldızıldır.

Ayrıca, $\alpha=2$ için Teorem 4.1.1'in $\Gamma\left(\alpha+\beta\right)\geq 4\Gamma\left(\beta\right)$ koşulu $\beta\left(\beta+1\right)\geq 4$ denktir, öyleki $E_{2,\beta}$ her $\beta\geq\left(-1+\sqrt{17}\right)/2$ için yıldızıldır.

Özel durumda ,

$E_{2,2}\left(z\right)=\sqrt{z}\sinh\left(\sqrt{z}\right)$, U 'da yıldızıldır.

Ek olarak, $\alpha=3$ olarak alırsak, o halde Teorem 3.1.1'e göre $E_{3,\beta}$

$$\beta\geq -1+\frac{\left(54-3\sqrt{321}\right)^{\frac{1}{3}}}{3}+\frac{\left(18+\sqrt{321}\right)^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}}\approx 0.79632$$

için yıldızıldır.

Özel durumda,

$$E_{3,1}\left(z\right)=\frac{z}{2}\left[e^{z^{1/3}}+2e^{-\frac{1}{2}z^{1/3}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z^{1/3}\right)\right]$$

U 'da yıldızıldır.

Hatırlatma 3.1.1: Teorem 3.1.1. ve Örnek 3.1.1.'den gözlemliyoruz: eğer $E_{\alpha,\beta}$'nin α parametresi artırsa o zaman $E_{\alpha,\beta}$'nin yıldızıllığını korumak için β parametresi azalacaktır.

Teorem 3.1.2: Eğer, $\alpha \geq 1$ ve $\beta \geq \left(3+\sqrt{17}\right)/2$ ise o zaman $E_{\alpha,\beta}$ fonksiyonu U'da yıldızıldır.

İspat:

$$p(z) = \frac{z\left(E_{\alpha,\beta}(z)\right)'}{E_{\alpha,\beta}(z)}, z \in U$$

olarak tanımlanan fonksiyon olsun. $\frac{E_{\alpha,\beta}(z)}{z} \neq 0$ olduğundan, p fonksiyonu U'da analitiktir ve $p(0)=1$'dır. Sonucu kanıtlamak için, $\mathrm{Re}\left(p(z)\right) > 0, z \in U$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\Gamma(\beta+n) \leq \Gamma(\alpha n+\beta), \forall \alpha \geq 1; \beta \geq 1 \qquad n \in \mathbb{N}$$

olduğundan,

$$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha n+\beta)} \leq \frac{1}{\beta(\beta+1)....(\beta+n-1)}, n \in \mathbb{N} \tag{3.1.3}$$

olacaktır.

Ayrıca, verilen koşula göre

$$\frac{n}{\beta(\beta+1)....(\beta+n-1)} \leq \frac{1}{\beta(\beta+1)^{n-2}}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{3.1.4}$$

Eğer, $z \in U$ o halde (2.1.3), (3.1.3) ve (3.1.4)'ü kullanarak,

$$
\begin{aligned}
\left|\left(E_{\alpha,\beta}(z)\right)' - \frac{E_{\alpha,\beta}(z)}{z}\right| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\Gamma(\beta)}{\Gamma(an+\beta)} z^n\right| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\beta(\beta+1)...(\beta+n-1)} \\
&\leq \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^n = \frac{2\beta+1}{\beta^2}
\end{aligned} \tag{3.1.5}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{E_{\alpha,\beta}(z)}{z}\right| &\geq 1 - \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta) z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\right| \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta(\beta+1)...(\beta+n-1)} \\
&> 1 - \frac{1}{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^n = \frac{\beta^2-\beta-1}{\beta^2}
\end{aligned} \tag{3.1.6}
$$

alırız.

(3.1.5) ve (3.1.6)'dan

$$
\left|\frac{z\left(E_{\alpha,\beta}(z)\right)'}{E_{\alpha,\beta}(z)} - 1\right| = \left|\frac{\left(E_{\alpha,\beta}(z)\right)' - \frac{E_{\alpha,\beta}(z)}{z}}{\frac{E_{\alpha,\beta}(z)}{z}}\right| < \frac{2\beta+1}{\beta^2-\beta-1}, z \in U
$$

elde ediyoruz.

Bu demek olur ki; eğer, $\frac{2\beta+1}{\beta^2-\beta-1} \leq 1$ ise $E_{\alpha,\beta}(z)$ U'de yıldızıldır, ayrıca bu eşitsizlik teoremde verilen $\beta \geq \left(3+\sqrt{17}\right)/2$ hipotezin aynısıdır.

Bununla teoremin ispatı tamamdır.

<u>Teorem 3.1.3</u>: $\alpha \geq 1$ ve $\eta < 1$ olsun $\varphi(\eta) = \frac{(3-n)+\sqrt{5\eta^2-18\eta+17}}{2(1-\eta)}$

olduğunu varsayalım. Eğer, $\beta \geq \varphi(\eta)$ ise $E_{\alpha,\beta}$ fonksiyonu U açık birim diskinde η mertebeden yıldızıl fonksiyondur.

İspat: Teorem 3.1.2 ispatını müteakiben eğer, $\frac{2\beta+1}{\beta^2-\beta-1}\leq 1-\eta$ ise, $E_{\alpha,\beta}$ η mertebeden yıldızıl fonksiyondur, ayrıca bu eşitsizlik verilen hipotezin direkt bir sonucudur.

Teorem 3.1.4: Eğer,

(a) $\alpha \geq 1$ ve $\beta \geq \left(1+5\sqrt{2}\right)/2$ ise $E_{\alpha,\beta}$, $U_{1/2}$'de ünivalent ve yıldızıldır.

(b) $\alpha \geq 1$ ve $\beta \geq \left(3+\sqrt{17}\right)/2$ ise $E_{\alpha,\beta}$, $U_{1/2}$'de konvekstir.

İspat : (a) Hesaplamaya göre

$$\left|\frac{E_{\alpha,\beta}(z)}{z}-1\right| < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\beta(\beta+1).....(\beta+n-1)} < \frac{1}{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\beta+1)^n} = \frac{\beta+1}{\beta^2}.$$

Lemma 2.1.4'e göre, eğer $\beta+1<\beta^2$ *ise* $E_{\alpha,\beta}$, $U_{1/2}$'de yıldızıldır, ayrıca verilen hipotez altında bu doğrudur. Bu nedenle $E_{\alpha,\beta}$, $U_{1/2}$'de yıldızıldır.

(b) Basit hesaplamalarla Lemma 2.1.6'yı kullanarak sahibiz,

$$\left|E'_{\alpha,\beta}(z)-1\right| < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha n+\beta)} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\beta(\beta+1)...(\beta+n-1)}$$
$$< \frac{1}{\beta}+\frac{2}{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^n = \frac{3\beta+2}{\beta^2} \leq 1$$

elde ederiz. O halde, Lemma 2.1.5 gereğince $E_{\alpha,\beta}$, $U_{1/2}$'de konvekstir.

Örnek 3.1.2:

(a) $E_{1,2} = e^z-1$, $E_{1,3} = \frac{2}{z}\left(e^z-z-1\right)$, $E_{1,4} = \frac{1}{z}\left[6\left(e^z-1\right)-3z\right]$, $E_{1,2} = \sqrt{z}\sinh\left(\sqrt{z}\right)$

fonksiyonları $U_{1/2}$ 'de yıldızıl ve ünivalenttir.

(b) $E_{1,4}=\frac{1}{z}\left[6\left(e^{z}-1\right)-3z\right]$ fonksiyonu $U_{1/2}$ 'de konvekstir.

Teorem 3.1.5: $\Gamma\left(\alpha+\beta\right)\geq 2\Gamma\left(\beta\right)$ koşulunu sağlayan her $\alpha\geq 1$ ve $\beta\geq 1$ sayıları için $E_{\alpha,\beta}\in K_g,\ z\in U$ burada $g(z)=z/(1-z)$ dir, dolayısıyla $E_{\alpha,\beta}(z)$, U 'da ünivalenttir.

İspat: Lemma 2.1.6' yı kullanarak

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|na_n-\left(n+1\right)a_{n+1}\right|\leq 1,\ z\in U$$

veya

$$1\geq 2a_2\geq ....\geq na_n\geq\left(n+1\right)a_{n+1}....\geq 0 \tag{3.1.7}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$na_n\geq\left(n+1\right)a_{n+1}$ için $\alpha\geq 1,\ \beta\geq 1$ ve $\Gamma\left(\alpha+\beta\right)\geq 2\Gamma\left(\beta\right), n\in\mathbb{N}$ olduğundan (3.1.7) sağlanmıştır. Bu teoremin ispatını tamamlamaktadır.

Örnek 3.1.3: $\alpha=1$ olsun. O halde Teorem 3.1.5'in $\Gamma\left(\alpha+\beta\right)\geq 2\Gamma\left(\beta\right)$ koşulu $\beta\geq 2$ olmasını gerektirir. Böylece, $E_{1,\beta}\left(z\right)$ tüm $\beta\geq 2$ değerleri için konvekse yakındır. Böylece,

$$E_{1,2}\left(z\right)=e^{z}-1\ ,\ E_{1,3}\left(z\right)=\frac{2\left(e^{z}-z-1\right)}{z}\text{ ve } E_{1,4}\left(z\right)=\frac{6\left(e^{z}-1-z\right)-3z^{2}}{z^{2}}$$

$z/\left(1-z\right)$ yıldızıl fonksiyonuna göre, U 'da konvekse yakın olurlar.

Eğer, biz $\alpha=2$ alırsak, o halde $\Gamma\left(\alpha+\beta\right)\geq 2\Gamma\left(\beta\right)$ koşulu $\beta\left(\beta+1\right)\geq 2$ koşulunu doğurur ki, $\beta\geq 1$ için sağlanır. Buna göre,

$$E_{2,1}(z) = z\cosh\left(\sqrt{2}\right) \text{ ve } E_{2,2}(z) = \sqrt{z}\sinh\left(\sqrt{z}\right)$$

fonksiyonları U 'da konvekse-yakınlar.

Teorem 3.1.6: Eğer, $\alpha \geq 1$ ve $\beta \geq \left(3+\sqrt{17}\right)/2$ ise o halde $E_{\alpha,\beta}$ fonksiyonu $E_{1,\beta}$ 'ya göre konvekse yakındır.

İspat: Tanımı uyarınca, öyle $g \in S^*$ fonksiyonun mevcut olduğunu göstermeliyiz ki

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zE'_{\alpha,\beta}(z)}{g(z)}\right) > 0 \ , \ z \in U \ .$$

Bu aşağıdakinin ispatı ile gösterilebilir:

$$\left|\frac{zE'_{\alpha,\beta}(z)}{g(z)} - 1\right| < 1, z \in U \ .$$

Teorem 3.1.2'den, hipotez altında $E_{1,\beta}$ 'in U 'da yıldızıl olduğunu görüyoruz. Eğer, $z \in U$ ise,

$$\begin{aligned}\left|E'_{\alpha,\beta}(z) - \frac{E'_{1,\beta}(z)}{z}\right| &< \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha n+\beta)} - \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\beta)}\right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\beta)}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\beta(\beta+1)\ldots.(\beta+n-1)} < \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^n = \frac{2\beta+1}{\beta^2} \quad (3.1.8)\end{aligned}$$

ve

$$\left|\frac{E_{1,\beta}(z)}{z}\right| \geq 1-\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta)z^n}{\Gamma(n+\beta)}\right| \geq 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\beta(\beta+1)....(\beta+n-1)}$$
$$> 1-\frac{1}{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^n = \frac{\beta^2-\beta-1}{\beta^2} \tag{3.1.9}$$

olur.

(3.1.8) ve (3.1.9) dan

$$\left|\frac{zE'_{\alpha,\beta}(z)}{E_{1,\beta}(z)}-1\right| = \left|\frac{E'_{\alpha,\beta}(z)-\frac{E_{1,\beta}(z)}{z}}{\frac{E_{1,\beta}(z)}{z}}\right| < \frac{2\beta+1}{\beta^2-\beta-1} \leq 1$$

$z \in U$ elde ederiz.

Bu bize Re$\left(\frac{zE'_{\alpha,\beta}(z)}{E_{1,\beta}(z)}\right) > 0$, olduğunu gösterir, böylelikle $E_{\alpha,\beta}$ U ‘da konvekse yakındır.

<u>Teorem 3.1.7</u>: Her $\alpha \geq 1$ ve $\beta \geq 1$ için $\left|E_{\alpha,\beta}(z)\right| \leq r \times \Phi(1;\beta;r)$ ’dir, burada $\Phi(1;\beta;r)$ confluent hipergeometrik fonksiyondur (bkz. [21]) ve $|z| = r < 1$.

<u>İspat:</u>

$$E_{\alpha,\beta}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta)z^n}{\Gamma((n-1)\alpha+\beta)}$$

olduğundan (3.1.3)’ü kullanarak

$$\left|E_{\alpha,\beta}(z)\right| \leq |z| + \left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta)z^n}{\Gamma((n-1)\alpha+\beta)}\right| \leq |z| + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{|z|^n}{\beta(\beta+1)...(\beta+n-2)}$$
$$= |z|(1+\frac{|z|}{\beta}+\frac{|z|^2}{\beta(\beta+1)}+...) = r \times \Phi(1;\beta;r)$$

elde ederiz. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 3.1.1: Her bir $\alpha \geq 1$ ve $\beta \geq 1$ için, $\left|E_{\alpha,\beta}(z)\right| \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} r \times \Phi(1;\beta;r)$, burada $|z| = r < 1$.

İspat : (3.1.2)' yi ve Teorem 3.1.7'yi kullanarak gerekli sonuca ulaşırız.

Sonuç 3.1.1'de $\beta = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 3.1.2: Her bir $\alpha \geq 1$ için, $\left|E_a(z)\right| \leq \phi(1;1;r) = e^r$, burada $|z| = r < 1$

$$
\begin{aligned}
E^m_{\alpha,\beta}(\mathrm{z}) &= z + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(a+\beta)} z^2 + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2a+\beta)} z^3 + \ldots + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma((m-1)a+\beta)} z^m \\
&= z + \sum_{n=2}^{m} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma((n-1)a+\beta)} z^n, (m \geq 1)
\end{aligned}
$$

normalleştirilmiş Mittag Leffler fonksiyonunun m .kısmi toplamlarını gösterir.

Teorem 3.1.8: $\alpha \geq 1$ ve $\beta > 1$ için $E^m_{\alpha,\beta}(\mathrm{z})$'nin, $z = 0$ hariç olmak üzere tüm $m-1$ kökleri $|z| = 1$ dışındadır.

İspat:

$$P(z) = 1 + \sum_{n=2}^{m} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma((n-1)a+\beta)} z^{n-1}$$

olmak üzere,

$$E^m_{\alpha,\beta}(\mathrm{z}) = z\left[1 + \sum_{n=2}^{m} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma((n-1)a+\beta)} z^{n-1}\right] = zP(z),\ m \geq 1$$

yazabiliriz.

$$1 > \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(a+\beta)} > \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2a+\beta)} > ... > \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma((m-1)a+\beta)},\ a \geq 1, \beta \geq 1$$

olduğu kolayca görülür. Buna göre Lemma 2.1.3'ü uygulayarak $\alpha \geq 1$ ve β ≥1 için $P(z)$'nin $m-1$ köklerinin hepsi $|z|=1$ dışında olduğunu söyleyebiliriz. Böylelikle $E^{m}_{\alpha,\beta}(z)$'nın tüm m köklerinin içerisinden $m-1$ kökleri bulunmaktadır ve $z=0$ kökü ise $|z|=1$ içerisindedir.

3.2. Wright fonksiyonlarının Ünivalentlik, Yıldızıllık, Konvekslik ve Konvekse-Yakınlık Özellikleri

Bu alt başlıkta biz $W^{(1)}_{\lambda,\mu}$ ve $W^{(2)}_{\lambda,\mu}$ fonksiyonları için ünivalentlik, yıldızıllık, konvekslik ve konveksliğe-yakınlık için belirli kriterler araştırıyoruz. Burada verilen sonuçlar J. K. Prajapat'a aittir [26].

Teorem 3.2.1: Eğer,

(a) $\lambda \geq 1$ ve $\mu \geq 1+\sqrt{3}$ ise $W^{(1)}_{\lambda,\mu}$ U 'da yıldızıldır.

(b) $\lambda \geq 1$ ve $\lambda+\mu \geq 1+\sqrt{3}$ ise $W^{(2)}_{\lambda,\mu}$ U 'da konvekstir.

İspat : (a) $p(z)$, $p(z) = z\left(W^{(1)}_{\lambda,\mu}(z)\right)' / W^{(1)}_{\lambda,\mu}(z), z \in U$, eşitliği ile tanımlansın. $W^{(1)}_{\lambda,\mu}(z)/z \neq 0, z \in U$ olduğundan, p fonksiyonu U 'da analitiktir ve $p(0)=1$. Sonucu kanıtlamak için, $\mathrm{Re}(p(z))>0$, $z \in U$ olduğunu göstermeliyiz. Bu kolayca görülebilir ki eğer, $|p(z)-1|<1$, $z \in U$ ise, $\mathrm{Re}(p(z))>0$, $z \in U$.

Teoremin hipotezi altında, $\Gamma(\mu+n) \leq \Gamma(\lambda n+\mu)$, $n \in \mathbb{N}$ eşitsizliği sağlanır ve bu

$$\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)} \leq \frac{1}{\mu(\mu+1)...(\mu+n-1)} \ ,\ n \in \mathbb{N} \tag{3.2.1}$$

eşitsizliğine denktir.

Eğer, $z \in U$ için (2.1.8) ve (3.2.1)'i kullanarak elde ederiz

$$\begin{aligned}\left|\left(W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)\right)' - \frac{W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)}{z}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\Gamma(\mu)z^n}{n!\Gamma(\lambda n+\mu)}\right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!\mu(\mu+1)...(\mu+n-1)} \\ &< \frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{\mu+1})^n = \frac{\mu+1}{\mu^2}\end{aligned} \qquad (3.2.2)$$

Ve

$$\begin{aligned}\frac{W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)}{z} \geq 1 - \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)z^n}{n!\Gamma(\lambda n+\mu)}\right| &\geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!\mu(\mu+1)...(\mu+n-1)} \\ &> 1 - \frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{\mu+1})^n = \frac{\mu^2-\mu-1}{\mu^2}.\end{aligned} \qquad (3.2.3)$$

(3.2.2) ve (3.2.3)'den

$$|p(z)-1| = \left|\frac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)\right)'}{W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)} - 1\right| = \left|\frac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)\right)' - \frac{W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)}{z}}{\frac{W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)}{z}}\right| < \frac{\mu+1}{\mu^2-\mu-1}, z \in U \qquad (3.2.4)$$

elde ederiz.

(3.2.4)'ten görüldüğü üzere, $\mu^2 - 2\mu - 2 > 0$ ise $|p(z)-1| < 1$, dolayısıyla da $\mathrm{Re}(p(z)) > 0$ olur. Ayrıca, $\mu^2 - 2\mu - 2 > 0$ eşitsizliği $\mu \geq 1+\sqrt{3}$ hipotezine denktir. Böylece, teoremin (a) şıkkı ispatlandı.

(b) $W_{\lambda,\mu}^{(2)}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart $z\left(W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)\right)'$ yıldızıl olmasıdır. Öte yandan, (2.1.13)'den $z\left(W_{\lambda,\mu}^{(2)}(z)\right)' = W_{\lambda,\lambda+\mu}^{(1)}(z)$ olduğundan teoremin (a) şıkkı gereğince $W_{\lambda,\mu}^{(2)}$ konvekstir.

Teoremin ispatı tamamdır.

Eğer, Teorem 3.2.1'de $\lambda = 1, \mu = \nu + 1$ ve $z = -z$ $(z \in U)$ olarak alırsak aşağıdaki elde ederiz.

Sonuç 3.2.1: Eğer,

(a) $v \geq \sqrt{3}$ ise J_v U 'da yıldızıldır.

(b) $v \geq -1+\sqrt{3}$ ise $J_v(z)/z$ U 'da konvekstir.

(c) $v \geq -1+\sqrt{3}$ ise $J_v(z) = \Gamma(v+2)(J_v(2\sqrt{z})/z^{v/2} - 1/\Gamma(v+1))$ fonksiyonu U 'da yıldızıldır.

Hatırlatma 3.2.1: Eğer , $\lambda \geq 1$ ve μ

$$\cos\left(\frac{\mu+1}{\mu^2-\mu-1}\right) = \frac{\mu+1}{\mu^2-\mu-1}, \mu > (1+\sqrt{5})/2 \qquad (3.2.5)$$

denkleminin çözümü ise (3.2.4) ve Lemma 2.1.9'dan $\mathrm{Re}\left(\left(W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)\right)'\right) > 0$ olduğunu gözlemleriz

Teorem 3.2.2: Eğer,

(a) $\lambda = 1$ ve $\mu \geq \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ ise $W_{\lambda,\mu}^{(1)}$, $U_{1/2}$ 'de yıldızıldır.

(b) $\lambda = 1$ ve $\mu \geq 1+\sqrt{3}$ ise $W_{\lambda,\mu}^{(1)}, U_{1/2}$ 'de konvekstir.

(c) $\lambda = 1$ ve $\mu > \mu^*$ ise μ^*, $\mu^2 - \sqrt{5}\mu - \sqrt{5} = 0$ eşitliğinin pozitif köküyken, $W_{\lambda,\mu}^{(1)}$ U 'da yıldızıldır.

İspat: (a) Basit bir hesaplamayla elde ederiz:

$$\left|\frac{W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)}{z} - 1\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!\mu(\mu+1)...(\mu+n-1)} < \frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu+1}\right)^n = \frac{\mu+1}{\mu^2}.$$

Lemma 2.1.4'ten görüldüğü üzere, $W_{\lambda,\mu}$ yıldızıldır, eğer $\mu^2 - \mu - 1 \geq 0$ ise ki bu da teoremin hipotezinden sağlanıyor. Bununla sonuç ispatlanmıştır. (b) Lemma 2.1.5'i kullanarak, elde ederiz:

$$\left|\left(W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)\right)'-1\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\Gamma(\mu)z^n}{n!\Gamma(\lambda n+\mu)}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\Gamma(\mu)}{n!\Gamma(\lambda n+\mu)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)}{n!\Gamma(\lambda n+\mu)}$$
$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu(\mu+1)...(\mu+n-1)}<\frac{2(\mu+1)}{\mu^2}\le 1. \qquad (3.2.6)$$

Bu bize $W_{\lambda,\mu}^{(1)}$ 'in $U_{1/2}$ 'da konveks olduğunu gösterir.

(c) Lemma 2.1.8'i ve (3.2.6)'yı kullanırsak, eğer $\mu^2-\sqrt{5}\mu-\sqrt{5}>0$ ise $W_{\lambda,\mu}^{(1)}$ 'in U 'da yıldızıl olduğunu görürüz. Bbu sonucu kanıtlar.

Teorem 3.2.2'da $\lambda=1, \mu=v+1$ ve $z=-z$ ayarlarsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

<u>Sonuç 3.2.2</u>: Eğer,

(a) $v\ge\frac{1}{5}(-1+\sqrt{5})$ ise J_v, $U_{1/2}$ 'de yıldızıldır.

(b) $v\ge\sqrt{3}$ ise J_v, $U_{1/2}$ 'de konvekstir.

(c) $v>v^*$, v^* 'ın $v^2-\left(\sqrt{5}-2\right)v-\left(2\sqrt{5}-1\right)=0$

denkleminin pozitif kökü iken J_v U 'de yıldızıldır.

<u>Teorem 3.2.3</u>: $\lambda\ge 1$ ve $0\le\eta<1$ olsun. Aynı zamanda

$$\varphi(\eta)=(2-\mu)+\sqrt{5\eta^2-16\eta+12}\,/\,2(1-\eta)$$

olduğunu varsayalım. Eğer,

(a) $\mu\ge\varphi(\eta)$ ise $W_{\lambda,\mu}^{(1)}$ α dereceden yıldızıl fonksiyondur.

(b) $\mu+\lambda\ge\varphi(\eta)$ ise $W_{\lambda,\mu}^{(1)}$ α dereceden konveks fonksiyondur.

(c) $\mu+\lambda\ge\varphi(\eta)$ ise $W_{\lambda,\mu}^{(1)}$ α dereceden konveks fonksiyondur.

İspat : Teorem 3.2.1'deki ispatı takiben, eğer $(\mu+1)/(\mu^2-\mu-1)\leq 1-\eta$ ise $W_{\lambda,\mu}^{(1)}$'in α dereceden yıldızıl olduğuna ulaşırız. Bu hipotezin direkt sonucudur. Dolayısıyla da sonuçtur. Geriye kalan kısımlar benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.2.4: Eğer, $\lambda\geq 1$ ve $v\geq 1+2\sqrt{2}$ ise $W_{\lambda,v+1}^{(1)}$, U'da J_v'e göre konvekse-yakındır.

İspat: Tanım gereği, $J_v(z)$ fonksiyonu için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z\left(W_{\lambda,v+1}^{(1)}(z)\right)'}{J_v(z)}\right)>0,\ z\in U$$

koşulunu sağladığını göstermek gerekiyor ki bu da

$$\left|\frac{z\left(W_{\lambda,v+1}^{(1)}(z)\right)'}{J_v(z)}-1\right|<1,\ z\in U$$

eşitsizliğinin sağlanmasıyla sağlanır.

$z\in U$ için basit bir hesaplamayla

$$\begin{aligned}\left|\left(W_{\lambda,v+1}^{(1)}(z)\right)'-\frac{J_v(z)}{z}\right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(v+1)}{n!}\left|\frac{n+1}{\Gamma(\lambda n+v+1)}-\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+v+1)}\right|\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(v+1)}{n!}\left[\frac{n+1}{\Gamma(\lambda n+v+1)}-\frac{1}{\Gamma(n+v+1)}\right]\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)\Gamma(v+1)}{n!\Gamma(n+v+1)}\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!(v+1)...(v+n)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(v+1)...(v+n)}<\frac{3}{v+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{v+2}\right)^n=\frac{3(v+2)}{(v+1)^2}\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

ve

$$\left|\frac{J_v(z)}{z}\right| \geq 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(v+1)...(v+n)} > 1-\frac{1}{v+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{v+2}\right)^n = \frac{v^2+v-1}{(v+1)^2} \tag{3.2.8}$$

olacaktır.

(3.2.7) ve (3.2.8)'den elde ederiz

$$\left|\frac{z\left(W^{(1)}_{\lambda,v+1}(z)\right)'}{J_v(z)}-1\right| = \left|\frac{\left(W^{(1)}_{\lambda,v+1}(z)\right)'-\frac{J_v(z)}{z}}{\frac{J_v(z)}{z}}\right| < \frac{3(v+2)}{v^2+v-1} \leq 1, z \in U .$$

Bu gösterir ki, Sonuç 3.2.8'e göre J_v fonksiyonu hipotez dahilinde yıldızıl olduğundan, $\mathrm{Re}(z\left(W^{(1)}_{\lambda,v+1}(z)\right)' / J_v(z)) > 0$ olacaktır, bu nedenle $W^{(1)}_{\lambda,v+1}$ U 'de konvekse-yakındır.

$\beta \neq 0$ gibi bir β karmaşık sayısı için, aşağıdaki gibi bir $F_\beta : U \to \mathbb{C}$ integral operatörü tanımlayalım:

$$F_\beta(z) = \left\{\beta\int_0^z t^{\beta-2}W^{(1)}_{\lambda,\mu}(t)dt\right\}^{1/\beta}, z \in U \tag{3.2.9}$$

Şunu belirtelim ki $F_\beta \in A$. Bir sonraki teoremde, F_β 'nin U 'da ünivalent olması için koşullar bulacağız.

Teorem 3.2.5: $\lambda > -1$ ve $\mu > 0$ olsun. Aynı zamanda $\varsigma = (\mu+1)/(\mu^2-\mu-1)$ ve M 'nin $\left|W^{(1)}_{\lambda,\mu}(z)\right| \leq M$ koşulunu sağlayan bir pozitif reel sayı olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar doğrudur:

(a) Eğer $\varsigma + |\beta-1| + M/|\beta| \leq 1$ ise F_β U 'da ünivalenttir.

(b) Eğer c, $c \neq 1$ ve $|c| + \varsigma/|\beta| \leq 1$ koşullarını sağlayan bir karmaşık sayı ise F_β U 'da ünivalenttir.

İspat : (a) Basit bir hesaplamayla

$$\frac{zF''_{\beta}(z)}{F'_{\beta}(z)}=\frac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)\right)'}{W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)}+\frac{z^{\beta-1}}{\beta}W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)+\beta-2,\ z\in U \tag{3.2.10}$$

olacaktır.

$W_{\lambda,\mu}^{(1)}\in A$ olduğundan, hipotez ve Schwarz Lemması gereğince U 'da $\left|W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)\right|\leq M\left|z\right|$ elde ederiz. Şimdi (3.2.4) ve üçgen eşitsizliğini kullanarak:

$$(1-|z|^{2})\left|\frac{zF''_{\beta}(z)}{F'_{\beta}(z)}\right|\leq(1-|z|^{2})\left\{|\beta-1|+\left|\frac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)\right)'}{W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)}-1\right|+\frac{|z|^{\Re(\beta)}}{|\beta|}\left|\frac{W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)}{z}\right|\right\}$$

$$<(1-|z|^{2})\left\{\varsigma+|\beta-1|++\frac{M}{|\beta|}\right\}\leq 1$$

elde ederiz. Bu, F_{β} 'nin Becker'ın ünivalentlik kriterini sağladığını gösterir. Bu nedenle F_{β} U 'da ünivalenttir.

(b) Aşağıdaki şekilde bir fonksiyon tanımlayalım:

$$G(z)=\int_{0}^{z}\frac{W_{\lambda,\mu}^{(1)}(t)}{t}dt,\ z\in U\ .$$

$G\in A$ olduğu gözlemlenir. (3.2.4) ve üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\left|c|z|^{2\beta}+(1-|z|^{2\beta})\frac{zG''(z)}{G'(z)}\right|\leq\left|c|z|^{2\beta}+(1-|z|^{2\beta)}\left(\frac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)\right)'}{W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)}-1\right)\right|\leq|c|+\frac{\varsigma}{|\beta|}\leq 1$$

elde ederiz ki bu da Lemma 2.1.10'dan dolayı F_{β} nin U 'da ünivalent olduğunu doğurur.

<u>Teorem 3.2.6</u>: $\lambda>0$ ve $\mu>1$ olsun. Aynı zamanda,

$$M := M(\lambda,\mu) = \frac{\lambda(\mu+\lambda-1)}{(\mu-1)\left\{|\mu-\lambda-1| + \sqrt{2(\mu-1)^2 + 2(\mu-1)\lambda + \lambda^2}\right\}} \qquad (3.2.11)$$

olduğunu varsayalım.

Eğer,

$$\left|\frac{W^{(1)}_{\lambda,\mu-1}(z)}{z} - 1\right| < M \ , \ z \in U$$

ise, o halde $W^{(1)}_{\lambda,\mu}$ U 'da yıldızıldır.

<u>İspat</u>:

$$q(z) = \frac{W^{(1)}_{\lambda,\mu}(z)}{z} \quad \text{ve} \quad r(z) = \frac{z\left(W^{(1)}_{\lambda,\mu}(z)\right)'}{W^{(1)}_{\lambda,\mu}(z)}$$

olduğunu farz edelim.

q ve r fonksiyonlarının U 'da analitik olduğu ve $q(0) = r(0) = 1$ koşullarını sağladığı açıktır. (2.1.11)'i kullanarak elde ederiz

$$\frac{W^{(1)}_{\lambda,\mu-1}(z)}{z} = q(z) + \frac{\lambda}{\mu-1} zq'(z) < 1 + Mz, z \in U \ . \qquad (3.2.13)$$

Şimdi Lemma 2.1.7'yi kullanarak,

$$|q(z) - 1| < R \qquad (3.2.14)$$

burada, $R = M(\mu-1)/(\lambda+\mu-1)$ sonucunu çıkarıyoruz. Hesaplama ile,

$$\left|\frac{W^{(1)}_{\lambda,\mu-1}(z)}{z} - 1\right| = \left|\frac{q(z)(\lambda r(z) + \mu - \lambda - 1}{\mu-1} - 1\right| < \frac{(\lambda+\mu-1)R}{\mu-1} \qquad (3.2.15)$$

elde ederiz.

Şimdi $W_{\lambda,\mu}^{(1)}$ 'in yıldızıllığını, her $z \in U$ için $\mathrm{Re}(r(z)) > 0$ olduğunu göstererek tespit edeceğiz. Bunun yanlış olduğunu farz edelim. Bu durumda $r(0)=1$ olduğundan bir $z_0 \in U$ noktası ve p reel sayısı vardır ki $r\left(z_0\right)=ip$ olacaktır. Böyle bir noktada (3.2.15) eşitsizliğinin doğru olduğunu göstererek devam edeceğiz, şöyle ki tüm reel p 'ler için:

$$\left|q(z_0)(ip\lambda+\mu-\lambda-1)-(\mu-1)\right| \geq \left(\lambda+\mu-1\right)R . \tag{3.2.16}$$

Eğer, $q(z_0)=u(z_0)+iv(z_0)=u+iv$ olarak ayarlarsak, o halde üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} E &= \left|q(z_0)(ip\lambda+\mu-\lambda-1)-(\mu-1)\right|^2 \\ &= \left(\mu^2+v^2\right)p^2\lambda^2+2vp\lambda(\mu-1)+\left|q(\mu-\lambda-1)-(\mu-1)\right|^2 \\ &= \left(\mu^2+v^2\right)p^2\lambda^2+2vp\lambda(\mu-1)+\left|(\mu-\lambda-1)(q-1)-\lambda\right|^2 \\ &= \left(\mu^2+v^2\right)p^2\lambda^2+2vp\lambda(\mu-1)+\left[\lambda-\left|\mu-\lambda-1\right|R\right]^2 \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

olacaktır.

Eğer,

$$\begin{aligned} F(p) &= E-(\mu-1)^2M^2 \\ &\geq \left(\mu^2+v^2\right)p^2\lambda^2+2vp\lambda(\mu-1)+\left[\lambda-\left|\mu-\lambda-1\right|R\right]^2-(\mu+\lambda-1)^2R^2 \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

olursa, o halde (3.2.16) herhangi bir reel p için $F(p) \geq 0$ sağlanacaktır. (3.2.18) eşitsizliğinin sağ tarafı ilk katsayısı her zaman pozitif olan p 'nin ikinci dereceden ifadesini içerir ve bu sebeple $F(p) \geq 0$ eşitsizliği mevcuttur, eğer ki aşağıdaki şekilde belirtilen diskriminantı (Δ) negatif ise:

$$\Delta = \lambda^2p^2\left\{v^2(\mu-1)^2-(u^2+v^2)\left[(\lambda-\left|\mu-\lambda-1\right|R)^2-(\mu+\lambda-1)^2R^2\right]\right\} \leq 0 . \tag{3.2.19}$$

Son eşitsizlik

$$v^2\left\{(\mu-1)^2-\left[\left(\lambda|\mu-\lambda-1|R\right)^2-(\mu+\lambda-1)^2R^2\right]\right\}$$
$$\leq \mu^2\left\{\left(\lambda-|\mu-\lambda-1|R\right)^2-(\mu+\lambda-1)^2R^2\right\}$$

eşitsizliğine denktir.

Kolay bir hesaplamadan sonra, aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\frac{v^2}{u^2}\leq\frac{R^2}{1-R^2}\leq\frac{\left(\lambda-|\mu-\lambda-1|R\right)^2-(\mu+\lambda-1)^2R^2}{(\mu-1)^2-\left(\lambda-|\mu-\lambda-1|R\right)^2+(\mu+\lambda-1)^2R^2}.$$

Kabul edilen şartlar altında ve yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki kesrin paydası pozitiftir ki $\Delta\leq 0$ olduğunu doğurur. Bu durum $F(p)$ eşitsizliğinin sağlanmadığını gösterir. Bu bizim (3.2.16) hakkındaki varsayımımızın çelişkisidir ve bundan çıkan sonuç $\mathrm{Re}(r(z))>0$ olup $W_{\lambda,\mu}^{(1)}$ fonksiyonunun yıldızıl fonksiyon olduğunu gösterir. Böylece, ispat tamamdır.

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında genelleştirilmiş Mittag-Leffler ve Wright fonksiyonu tanımlanmıştır. Akabinde genelleştirilmiş Mittag-Leffler ve Wrigh fonksiyonlarının $\beta -$ mertebeden yıldızıllığı ve konveksliği, konvekse yakınlığı ve $U_{1/2}$ diskinde yıldızıllığı ve konveksliği incelenmiştir. Tezde verilen sonuçlar D. Bansal ve J.K. Parapat'ın [1, 41] çalışmasındaki sonuçlardır.

Bu konu üzerine çalışacak araştırmacılar genelleştirilmiş Mittag-Leffler ve Wright fonksiyonların integral operatörlerinin geometrik özelliklerini, kısmi toplamlarını ve düzgün konvekslik, düzgün yıldızıllığı gibi diğer geometrik özelliklerini araştırabilir.

KAYNAKLAR

[1] Bansal, D., Prajapat, J.K., (2016). Certain geometric of the Mittag-Leffler functions. Complex Variables and Elliptic Equations, 61(3), 338-350.

[2] Duren, P.L., (1983). Univalent functions. Springer Verlag. New York.

[3] Dzherbashyan, M.M., (1966). Integral transforms and representations of functions in the complex plane. Moscow, Nauka (Russian).

[4] Erdélyi, A,, Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F.G., (1955). Higher transcendental functions.Vol. 3. New York (NY): McGraw-Hill.

[5] Fejer, L., (1936). Untersuchungen über Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. Acta Litterarum ac Scientiarum, 8, 89–115.

[6] Goodman, A.W., (1983). Univalent functions, Vols. 1-2 Tampa, FL, Mariner.

[7] Gorenflo, R., Luchko, Y., Mainardi, F., (1999). Analytic properties and applications of Wright functions. Frac Cal Appl Anal., 2(4), 383-414.

[8] Graham, I., Kohr, G., (2003). Geometric function theory in one and higherdimensions. Marcel Dekker.

[9] Hallenbeck, D.J., Ruscheweyh, S.T., (1975). Subordination by convex functions. Proc Amer Math. Soc. 52, 191-195.

[10] Hilfer, R., Editör., (2000). Applications of fractional calculus in physics. Singapore, World Scientific.

[11] Kakeya, S., (1912). On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients.Thoku Math. J. 2, 140-142.

[12] MacGregor, T.H., (1963). The Radius of univalens of certain analytic functions ll. Proc Amer Math Soc. 14, 521-524.

[13] Mittag-Leffler, G.M., (1903). Sur la nouvelle fonction $E_{\alpha}(x)$. C.R. Acad. Sci. Paris. 137, 554-558.

[14] Mocanu, P. T., (1988). Some starlikeness conditions for analytic functions. Rev. Roumaine Math. Puress Appl. 33**,** 117-124.

[15] Mustafa, N ., (2017). Integral Operator of the Normalized Wright functions and Their Some Geometric Properties. GUJSci, 30(1), 333-343.

[16] Mustafa, N., Prajapat, J.K., (2016). Corrigendum to Certain Geometric Properties of the Wright function. Integral Transforms Spec. Funct. http://dx.doi.org/10.1080/10652469.2016.1174702.

[17] Mustafa, N., (2016). Some geometric properties of the Wright functions, AIP/Conference Proceedings 1726, 020080; doi:10.1063/1.4945906.

[18] Mustafa, N., (2017). Univalence of Certain Integral Operators Involving Normalized Wright Functions. Commu. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser Al Math. Stat. 66(1), 19-28.

[19] Ozaki, S., (1935). On the theory of multivalent functions. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A.2, 167-188.

[20] Pescar, V., (1996). A new generalization of Ahlfors and Beckers criterion of univalence. Bull Malays Math Soc. (Second Series), 19, 53-54.

[21] Podlubny, L., (1999). Fractional differential equations. San Diego: Academic Press.

[22] Pommerenke, C.H., (1975). Univalent Functions. Vandenhoeck ve Ruprecht Company, s- 376, Göttingen, Berlin.

[23] Ponnusamy, S., Silverman, H., (2006). Complex Variables with Applications. Birkhauser, Boston.

[24] Ponnusamy, S., Vuorinen, M., (2001). Univalence and convexity properties for Gaussian hypergeometric functions. Rocky Mountain J. Math. 31, 327-353.

[25] Prajapat, J.K., (2011). Certain geometric properties of normalized Bessel functions. Appl Math Lett. 24, 2133-2139.

[26] Prajapat, J.K., (2015). Certain geometric properties of the Wright functions. Integral Transform. Spec. Funct. 26, 203-212.

[27] Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.L., (1993). Fractional integralsand derivatives: Theory and applications. Gordon and Breach, New York.

[28] Saxena, R.K., Mathai, A.M., Haubold, H.J., (2002). On fractional kinetic equations. Astrophys. Space Sci. 282, 281-287.

[29] Szasz, R., (2014). About the starlikeness of Bessel functions. Integral Transforms Spec. Funct. 24 (9), 750-755.

[30] Wright, E.M., (1933). On the coefficients of power series having exponential singularities. J London Math Soc. 8, 71-79.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı :Sevil İLGÜN

Doğum Yeri ve Tarihi :Erzurum/Aşkale 10.01.1986

Yabancı Dili :İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Aşkale Anadolu Lisesi -2004

Lisans : Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği -2009

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı (Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı)-2019

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Erzurum Çat Cumhuriyet Yatılı İlköğretim Bölge Ortaokulu 2009-2011 ,Erzurum Haşim İşcan Ortaokulu 2011-2014, Kars Dede Korkut Ortaokulu 2014-2017, Kars Merkez İmam Hatip Ortaokulu 2017-…