T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN BİR TERS PROBLEMİN VARYASYONEL METOTLARLA ÇÖZÜMÜ

Muhammed Emin DADAŞ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY

HAZİRAN -2019
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN BİR TERS PROBLEMİN VARYASYONEL METOTLARLA ÇÖZÜMÜ

Muhammed Emin DADAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY

HAZİRAN -2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı **Yüksek Lisans öğrencisi Muhammed Emin DADAŞ**'ın **Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY** danışmanlığında **yüksek lisans** tezi olarak hazırladığı **"Schrödinger Denklemi için Bir Ters Problemin Varyasyonel Metotlarla Çözümü"** adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oybirliği **ile kabul** edilmiştir.

27/06/2019

	Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	: Prof. Dr. Gabil YAGUB	
Üye	: Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY	N. Yıldırım
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Fatma TOYOĞLU	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İmza

Muhammed Emin DADAŞ

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN BİR TERS PROBLEMİN VARYASYONEL METOTLARLA ÇÖZÜMÜ

Muhammed Emin DADAŞ

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY

Bu tezde bir ters problemin çözümü bir varyasyonel metotla incelenmiştir. İlk olarak lineer olmayan Schrödinger denklemi için bir ters problem ifade edilir. Bu ters problem bir gözlem fonksiyoneli aracılığıyla bir varyasyonel probleme dönüştürülür. Oluşturulan bu varyasyonel problemin çözümlerinin varlık ve tekliği ispatlanır. Gözlem fonksiyonelinin diferansiyellenebilir olduğu elde edilerek varyasyonel problemin çözümü için bir gerek şart verilir.

Anahtar Kelimeler: Schrödinger Denklemi, Ters Problem, Varyasyonel Metot

2019 , 46 Sayfa

ABSTRACT

(Master Thesis)

SOLUTION WITH VARIATIONAL METHODS OF AN INVERSE PROBLEM FOR THE SCHRODINGER EQUATION

Muhammed Emin DADAS

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY

In this thesis, the solution of an inverse problem has been examined by a variational method. Firstly, an inverse problem for nonlinear Schrödinger equation is expressed. This inverse problem is converted to a variational problem by means of an observation functional. The existence and uniqueness of solutions of the constituted variational problem are proved. The differentiability of observation functional is obtained and a necessary condition for the solution of the variational problem is given.

Key Words: Schrödinger Equation, Inverse Problem, Variational Method

2019, 46 pages

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans programım boyunca değerli bilgilerini benimle paylaşan, fikirleriyle beni aydınlatan, çalışmalarım esnasında kıymetli zamanını bana ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle elinden geleninin fazlasını yapan, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen, öğrencisi olmaktan gurur duyduğum değerli danışmanım Sayın Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım esnasında yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB'a saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Manevi desteğini esirgemeyen Sayın Dr. Öğr. Üyesi Rabia ÇAKAN AKPINAR'a ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca beni bugünlere en iyi şekilde yetiştirerek getiren ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürler. Dostluğuyla her zaman yanımda olan değerli arkadaşım Kamuran ASLAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Muhammed Emin DADAŞ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\forall$	: Herhangi
$T \rangle 0$	: Verilen sayı
$\alpha \geq 0$	: Verilen bir sayı
$i = \sqrt{-1}$	: Sanal Birim
$b_0 > 0$	: Verilen herhangi bir sayı
$I = (0, l)$	: Verilen Bölge
$\Omega = I \times (0, T)$	: Verilen Bölge
$\Omega_t = I \times (0, t)$	: Verilen Bölge
$\tilde{\Omega}_t = I \times (t, T)$	: Verilen Bölge

1. GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Kuantum mekaniğin temel denklemi olan Schrödinger denklemi, bir kuvvet alanındaki bir parçacığın (veya parçacıklar sisteminin) davranışını tanımlayan ve göreceli olmayan bir dalga denklemidir. Bu denklemin çözümü, parçacığın davranışlarının uzay ve zaman değişkeninde nasıl değiştiği hakkında bize bilgi verir. Schrödinger denklemi, Newton denklemine kabaca çok benzemektedir. Klasik bir parçacık için Newton'un ikinci kanununun yaptığı şeyi bir kuantum parçacık için Schrödinger denklemi yapar. Klasik mekanikte, Newton denklemini çözdüğümüzde biz zamana bağlı olarak bir parçacığın konumunu bulabiliriz. Ancak Schrödinger denklemini çözdüğümüzde bir dalga fonksiyonu elde ederiz ki bu dalga fonksiyonunun karesi, uzayda verilen bir bölgede parçacığın bulunma olasılığını belirtir.

Lineer olmayan Schrödinger denklemi lineer olmayan optikte, su dalgalarının değişiminde, hidromanyetik ve plazma dalgalarında, bir katıdaki ısı pulsunun (ısı atımı) yayılımında, (bir sıvı ile dolu) viskoelastik tüpteki lineer olmayan dalgalarda, lineer olmayan kararsızlık problemlerinde ortaya çıkar [12, 25, 30-31, 33-34]. Bu çalışmada

$$\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} + r_2(x,t,\psi)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + r_1(x,t,\psi)\frac{\partial \psi}{\partial x} + r_0(x,t,\psi)\psi = 0, \tag{1.1}$$

denkleminin bir özel durumu ile verilen lineer olmayan bir Schrödinger denklemi için bir ters problemi göz önüne alacağız. Burada $\varepsilon = sbt$ bir sayı $\psi(x,t)$ fonksiyonu dalga fonksiyonudur. $j = 0,1,2$ için (1.1) denklemindeki $r_j(x,t,\psi)$ katsayıları ortamın varyasyonunu tanımlar. Eğer r_j katsayıları $\psi(x,t)$ fonksiyonuna bağlı ise bu, ortamın lineer olmayan özelliklere sahip olduğunu gösterir [42]. (1.1) denkleminde $\varepsilon = i$ olarak alınırsa $j = 0,1,2$ için $r_j(x,t,\psi)$ katsayılarının özelliklerine bağlı olarak (1.1) denkleminden lineer ve lineer olmayan Schrödinger denklemleri elde edilir.

Bilindiği gibi lineer olmayan Schrödinger denklemi için ters problemler genelde lineer olmayan ortamlarda ışık demetlerinin dağılımında ortaya çıkar [36]. Her ters problemi direkt olarak çözüp çözemeyeceğimizi düşünmek gayet doğaldır. Tabi ki her ters problemi direkt olarak çözemeyiz. Bu yüzden biz ters problemlerin çözümlerini, verilen problemi bir varyasyonel probleme dönüştürerek araştırırız.

Schrödinger denklemi için ters problemlerin varyasyonel metotlarla çözümü daha önceden [3-5, 8-9, 16-23, 29, 37] çalışmalarında incelenmiştir. Ancak [3, 5, 19-20, 22-23, 29, 37] çalışmalarında $r_0(x,t,\psi)=r_0(x,t,\psi),\ r_1(x,t,\psi)=0, r_2(x,t,\psi)=r_2(x,t)$ olduğunda (1.1) denkleminden elde edilen lineer olmayan Schrödinger denklemi için bir ters problemin çözümü varyasyonel metotlarla incelenmiştir. [4] çalışmasında ise (1.1) denkleminde r_j katsayıları $r_0(x,t,\psi)=r_0(x,t,\psi), r_1(x,t,\psi)=r_1(x,t), r_2(x,t,\psi)=r_2(x,t)$ biçiminde olduğunda (1.1) den elde edilen bir boyutlu lineer olmayan Schrödinger denklemi için bir ters problemin çözümü varyasyonel metot ile çalışılmıştır.

Yukarıda bahsedilen çalışmalardan farklı olarak bu çalışmada biz, (1.1) denkleminde r_j katsayıları $r_0(x,t,\psi)=r_0(x,t,\psi), r_1(x,t,\psi)=r_1(x,t), r_2(x,t,\psi)=r_2(x,t)$ biçiminde olduğunda farklı katsayılarla (1.1) denkleminden elde edilen lineer olmayan Schrödinger denklemi için bir ters problemin çözümünü varyasyonel metotlarla inceleyeceğiz.

Bu çalışma 4 bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, bu çalışmada kullanacağımız genel bilgiler ve bazı kavramların tanımları ifade edilmiş olup, teorem ve lemmalar verilmiştir.

Tezin 2. bölümü, 2.1 ve 2.2 bölümlerinden oluşmaktadır. 2.1. bölümünde ters problem ifade edilmiş olup 2.2. bölümünde ise ters problem bir varyasyonel probleme dönüştürülmüştür.

Tezin 3. bölümü 3 alt bölümden, yani 3.1, 3.2 ve 3.3 bölümlerinden oluşmaktadır. 3.1. bölümde varyasyonel problemin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlandı. 3.2 bölümde gözlem fonksiyonelinin diferansiyellenebilirliği ispatlandı. 3.3 bölümünde ise varyasyonel problemin çözümü için bir gerek şart verildi.

Tezin 4. bölümü tartışma ve sonuç bölümünden oluşmaktadır. Bu bölümde, elde edilen sonuçlar verilmiş olup, bu sonuçların önceki çalışmalardan farklılığı vurgulanmıştır.

1.2 Kuramsal Temeller

Bu çalışmada kullanacağımız lemma, teorem ve tanımları bu bölümde açıklayacağız.

Tanım 1.2.1. Tam lineer normlu X uzayına *Banach uzayı* denir [10].

Tanım 1.2.2. X uzayı, üzerindeki iç çarpımın ürettiği norma göre Banach uzayı ise X e *Hilbert uzayı* denir [1].

Tanım 1.2.3. I, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge ve $p \geq 1$ gerçel sayı olmak üzere, I üzerinde

$$\int_I |u(x)|^p dx < \infty, \quad x \in I$$

koşulunu sağlayan u fonksiyonlar sınıfına $L_p(I)$ *uzayı* denir. Bu uzay üzerindeki norm

$$\|u\|_{L_p(I)} = \left(\int_I |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlanır [1].

Tanım 1.2.4. Ω üzerinde hemen hemen sınırlı fonksiyonların uzayına $L_\infty(\Omega)$ uzayı denir ve bu uzay üzerindeki norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = ess\sup_{x\in I}|u(x)|$$

$$= \inf\left(C>0:\ hemen\ hemen\ \ x\in I \text{ için } |u(x)|\le C\right)$$

[1].

Tanım 1.2.5. $L_2(\Omega)$ uzayı

$$\int_\Omega |u(x,t)|^2 dxdt < \infty$$

olacak şekilde Ω üzerinde ölçülebilir u fonksiyonlarının Hilbert uzayıdır.

Tanım 1.2.6. $I\subset\mathbb{R}^n$ de bir bölge, $m>0$ bir tamsayı ve $1\le p\le\infty$ olsun

$$W_p^m(I)=\left\{u\in L_p(I):\ D^\alpha u\in L_p(I),\ 0\le|\alpha|\le m\right\}$$

biçiminde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir. Burada α

$$|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n \qquad \left(\alpha_i\in\mathbb{N}\right)$$

ve

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}...\partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

dir. Bu lineer uzay üzerindeki norm, $1\le p<\infty$ için;

$$\|u\|_{W_p^m(I)} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L_p(I)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ için;

$$\|u\|_{W_\infty^m(I)} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(I)}$$

şeklindedir. Sobolev uzayları Banach uzaylarıdır. $m = 0$ için $W_p^0(I) = L_p(I)$ dır. $p = 2$ ise $\mathrm{W}_2^m(I)$ uzayı Hilbert uzayıdr. Bu uzay üzerindeki iç çarpım

$$\langle u, v \rangle_m = \int_I \sum_{|\alpha| \le m} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

biçiminde tanımlanır [10].

<u>Tanım 1.2.7</u>**.** $I \subset \mathbb{R}^n$ de bir bölge ve $\overset{0}{W}{}_p^m(I)$ uzayı, $D(I)$ uzayının $\mathrm{W}_p^m(I)$ uzayındaki normuna göre kapanışıdır. Burada $D(I)$ uzayı I bölgesinde kompakt supporta sahip her mertebeden sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonların uzayıdır.

<u>Tanım 1.2.8.</u> Bir X metrik uzayı üzerindeki bir $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun supportu, f ' nin sıfırdan farklı olduğu noktaların kümesinin kapanışıdır. Yani

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : f(x) \ne 0\}}$$

dır. Eğer $\operatorname{supp} f$ kümesi X in kompakt bir alt kümesi ise f ye *kompakt supporta sahiptir* denir.

<u>Tanım 1.2.9.</u> $W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayı, elemanlarının kendisi ve onların t değişkenine gore 1. mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan fonksiyonların Sobolev uzayıdır. Bu uzaydaki iç çarpım

$$\langle u,v\rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)}=\int_\Omega\left(u\bar{v}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\bar{v}}{dt}\right)dxdt$$

biçimindedir.

Tanım 1.2.10. $C^k([a,b];X)$ uzayı $u:[a,b]\to X$ biçiminde k kez sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonların Banach uzayıdır. Bu uzayda norm

$$\|u\|_{C^k([a,b],X)}=\sum_{i=0}^{k}\max_{t\in[a,b]}\left\|\frac{d^iu(t)}{dt^i}\right\|_X$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.2.11. $(a,b)\subset\mathbb{R}$ ve $L_2(a,b)$ içinden alınmış $f_1(x), f_2(x),...,$ fonksiyon dizisi $\forall\ g(x)\in L_2(a,b)$ için

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(x)f_n(x)dx=\int_a^b g(x)f(x)dx$$

eşitliğini sağlarsa $f(x)\in L_2(a,b)$ fonksiyonuna *zayıf yakınsaktır* denir [38].

Tanım 1.2.12. $\{f_n(x)\}$ fonksiyon dizisinin $f(x)\in L_p(a,b)$ ye normda (kuvvetli) yakınsaması

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^p dx=0$$

olarak tanımlanır. Bu formdaki yakınsamaya p. *mertebeden kuvvetli yakınsama* denir [38].

Tanım 1.2.13. $(a,b) \subset \mathbb{R}$, A, $L_2(a,b)$ uzayında bir küme olsun. Eğer $L_2(a,b)$ uzayının her noktası A' ya ait bir dizinin limiti ise, A kümesine $L_2(a,b)$ de her yerde *yoğundur* denir [38].

Tanım 1.2.14. X bir reel normlu uzay olmak üzere $F : M \subseteq X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli verilsin. Eğer, her bir $u \in M$ ve M deki her bir $\{u_n\}$ dizisi için

$$u_n \xrightarrow{zayıf} u \quad \text{olduğunda} \quad F(u_n) \to F(u)$$

oluyorsa F ye *zayıf (dizisel) süreklidir* denir [40].

Tanım 1.2.15. X bir reel normlu uzay olmak üzere $F : M \subseteq X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli verilsin. Eğer $n \to \infty$ için $u_n \xrightarrow{zayıf} u$ olduğunda M deki her bir $\{u_n\}$ dizisi ve her bir $u \in M$ için

$$F(u) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} F(u_n)$$

oluyorsa F ye *alttan zayıf(dizisel) yarı süreklidir* denir [40].

Tanım 1.2.16. X bir reel normlu uzay olsun ve $F : M \subseteq X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli verilsin. Eğer $n \to \infty$ için $u_n \to u$ oduğunda M deki her bir $\{u_n\}$ dizisi için

$$F(u) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} F(u_n)$$

oluyorsa F fonksiyoneline $u \in M$ noktasında *alttan (dizisel) yarı süreklidir* denir [40].

Tanım 1.2.17. U bir vektör uzayı olsun. Bu uzayın bir vektörüne bir skaler sayı karşılık getiren lineer bir $f:U\to\mathbb{R}$ fonksiyonu lineer fonksiyonel olarak adlandırılır. U üzerindeki sınırlı lineer fonsiyonellerin uzayına U *nun duali* denir ve U^* ile gösterilir.

Tanım 1.2.18. X bir Banach uzayı, X^* da X in dual uzayı ve $\phi_n(x)\in X^*$ olsun. Eğer her $x\in X$ ve $n\to\infty$ için

$$\phi_n(x)\to\phi(x)$$

oluyorsa $\{\phi_n\}$ dizisi ϕ fonksiyonuna $*-$*zayıf yakınsıyordur* denir ve $\phi_n(x)\xrightarrow{*-zayıf}\phi$ olarak gösterilir [13].

Tanım 1.2.19. V, X lineer uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $u,v\in V$ ve $\alpha\in[0,1]$ için $\alpha u+(1-\alpha)v\in V$ oluyorsa V kümesine X de *konveks (dışbükey) küme* denir [2].

Tanım 1.2.20. $(U,\|\ \|)$ bir normlu uzay olsun. $0<\varepsilon\le 2$ şartını sağlayan her ε sayısı için, $u,v\in U$ için $\|u\|=\|v\|=1$ ve $\|u-v\|\ge\varepsilon$ iken $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|\le 1-\delta(\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon)>0$ sayısı varsa $(U,\|\ \|)$ uzayına *düzgün konveks uzay* denir. $1<p<\infty$ için $L_p(\Omega)$ uzayı düzgün konveks uzaydır [2].

Tanım 1.2.21. X ve Y normlu uzaylar olsun. Eğer

i) X, Y nin bir alt vektör uzayı

ii) Her $x\in X$ için $Ix=x$ olarak tanımlanan $I: X\to Y$ özdeşlik operatörü sürekliyse,

X uzayı Y uzayına *(sürekli) gömülür* denir. Yani, $X\subset Y$ ve her $x\in X$ için $\|Ix\|_Y\le\|x\|_X$ olacak şekilde bir M sabiti vardır. Eğer I operatörü kompakt ise X uzayı Y uzayına *kompakt gömülür* denir [2].

Tanım 1.2.22. V, W bir Banach uzayı, $U \subset V$ bir açık küme ve $F : U \to W$ bir dönüşüm olsun. Eğer F dönüşümünü

$$F(x+h) = F(x) + DF(x)h + RF(x,h),$$

biçiminde yazabiliyorsak bu dönüşüme $x \in U$ noktasında *Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir* denir. Burada $DF(x)$' e, x noktasında F nin Frechet türevi denir. $DF(x)$, $\mathrm{V} \to \mathrm{W}$' a sınırlı bir dönüşümdür. $RF(x,h)$ ise

$$\lim_{h \to 0} \frac{RF(x,h)}{\|h\|} = 0$$

eşitliğini sağlar.

Teorem 1.2.1. $D \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir bölge olsun. Herhangi $u(x) \in \overset{0}{W}{}_m^1(D)$ fonksiyonu ve $m \geq 1,\ r \geq 1$ sayıları için $\alpha = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} + \frac{1}{r}\right)^{-1}$ olmak üzere

$$\|u\|_{L_q(D)} \leq \beta \|u_x\|_{L_m(D)}^{\alpha} \|u\|_{L_r(D)}^{1-\alpha}$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca,

1. $m \geq n = 1$ için $q \in [r, \infty]$ ve $\beta = \left(1 + \frac{(m-1)r}{m}\right)^{\alpha}$ dır.
2. $n > 1$ ve $m < n$ için $\beta = \left(\frac{(n-1)m}{n-m}\right)^{\alpha}$ ve eğer, $r \leq \frac{nm}{n-m}$ ise $q \in \left[r, \frac{nm}{n-m}\right]$ ve $r \geq \frac{nm}{n-m}$ ise $q \in \left[\frac{nm}{n-m}, r\right]$ dir.

3. $m > n > 1$ için $\mathrm{q} \in [r, \infty)$ ve $\beta = \max\left\{\frac{q(n-1)}{n}, 1 + (m-1)mr\right\}^{\alpha}$

dır [28].

Teorem 1.2.2. (Weierstrass Teoremi) U, B Banach uzayında zayıf kompakt bir küme olsun. $J(u)$ ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan zayıf yarı sürekli bir fonksiyonel olsun. Bu takdirde $J_* = \inf\limits_U J(u) > -\infty$, $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \varnothing$ zayıf kompakttır ve U dan alınan herhangi minimalleştirici dizi, minimum noktaları kümesine zayıf yakınsar [35].

Teorem 1.2.3. (Goebel Teoremi) Kabul edelim ki, $\tilde{X}$ düzgün konveks uzay, U kümesi $\tilde{X}$ uzayının kapalı sınırlı kümesi, $I(v)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde tanımlanan alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli fonksiyonel ve $\alpha > 0$, $\beta \geq 1$ verilen sayılar olsun. Bu takdirde $\tilde{X}$ uzayında her yerde olan öyle bir G altkümesi vardır ki, $\forall w \in G$ için

$$J_\alpha(v) = I(v) + \alpha \|v - w\|_{\tilde{X}}^{\beta}$$

fonksiyoneli U kümesi üzerinde en küçük değerini alır. Eğer $\beta > 1$ ise $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli en küçük değerini U kümesi üzerinde bir tek noktada alır [11].

Teorem 1.2.4. U, B Banach uzayının konveks boş olmayan bir alt kümesi, $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede birinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyonel ve $U_* = \left\{u \in U : J(u) = J_* = \inf\limits_U J(u)\right\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalarının kümesi olsun. Bu takdirde $\forall u_* \in U_*$ ve $\forall u \in u$ için $\left(J^{'}(u), u - u_*\right)_B \geq 0$ şartı sağlanır [35].

Teorem 1.2.5. (Cauchy-Bunjakovskii Eşitsizliği) Eğer, $f(x) \in L_2(a,b)$ ve ise

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leq \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]$$

eşitsizliği sağlanır [38].

Lemma 1.2.1. (T.H. Gronwall) Farzedelim ki $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları bir $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde $f(x)\geq 0,\ g(x)\geq 0$ olmak üzere sürekli reel değerli fonksiyonlar olsun. Eğer

$$f(x)\leq c+k\int_a^x g(s)f(s)ds, \qquad c,k\geq 0$$

ise

$$f(x)\leq ce^{\int_a^x kg(s)ds}$$

dir [15].

Lemma 1.2.2. $f(x,t,u)$ fonksiyonu $\{(x,t)\in\Omega,\ u\in(-\infty,\infty)\}$ kümesinde tanımlı ölçüleblir bir fonksiyon ve hemen hemen $(x,t)\in\Omega$ için u göre sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $L_1(\Omega)$ dan olan $\{u_k(x,t)\}$ dizisi $L_1(\Omega)$ olan $u(x,t)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsıyorsa ve $q>1$ ve $\|f(.,.,u_k(.,.)\|_{L_q(\Omega)}\leq c$ ise bu durumda $q^*<q$ için $f\left(x,t,u_k(x,t)\right)$ fonksiyonlar dizisi $L_{q^*}(\Omega)$ normunda $f\left(x,t,u_k(x,t)\right)$ fonksiyonuna yakınsar; $L_q(\Omega)$ da ise zayıf yakınsar. Eğer $\{u_k(x,t)\}$ dizisi $L_1(\Omega)$ da u fonksiyonuna kuvvetli yakınsıyorsa ve $q>1$ için $\|u_k\|_{L_q(\Omega)}\leq c$ ise bu takdirde $\{u_k(x,t)\}$ dizisi u ya $q^*<q$ için $L_{q^*}(\Omega)$ da kuvvetli yakınsar [27].

Lemma 1.2.3. (ε - Cauchy Eşitsizliği) Keyfi a,b ve herhangi $\varepsilon>0$ için

$$|ab|\leq\frac{\varepsilon}{2}|a|^2+\frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir [28].

Lemma 1.2.4. (Young Eşitsizliği) a ve b reel sayılar ve $p>1$ olsun. Bu durumda

$$ab \leq \frac{p-1}{p} a^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{p} b^{p}$$

dir [14].

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1 Ters Problem

Bu bölümde, Schrödinger denklemi ile verilen 1. ve 2. çeşit sınır değer problemleri göz önüne alınır. Bu problemlerin çözümleri tanımlanır ve çözümlerin varlık ve tekliğini ifade eden teorem verilir. Ayrıca, bu sınır değer problemleri kullanılarak oluşturulan ters problem ifade edilir.

Schrödinger denklemi ile ifade edilen 1. çeşit ve 2. çeşit sınır değer problemleri aşağıdaki gibi olsun:

$$i\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - a_2(x)\psi_1 + v(x)\psi_1 + ia_3|\psi_1|^2 \psi_1 = f_1 \tag{2.1}$$

$$\psi_1(x,0) = \varphi_1(x),\ x \in I,\ \psi_1(0,t) = \psi_1(l,t) = 0,\ t \in (0,T) \tag{2.2}$$

ve

$$i\frac{\partial \psi_2}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - a_2(x)\psi_2 + v(x)\psi_2 + ia_3|\psi_2|^2 \psi_2 = f_2 \tag{2.3}$$

$$\psi_2(x,0) = \varphi_2(x),\ x \in I,\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(l,t) = 0,\ t \in (0,T). \tag{2.4}$$

Burada $x \in I,\ t \in (0,T),\ (x,t) \in \Omega,$ a_0, a_3 verilen pozitif reel sayılar, $a_1(x),\ a_2(x),\ \varphi_1(x), \varphi_2(x),\ f_1(x,t), f_2(x,t)$ fonksiyonları ise verilen fonksiyonlar olup sırasıyla

$$\begin{aligned} &\textit{hemen hemen } x \in I \textit{ için } |a_1(x)| \le \mu_1, \left|\frac{da_1(x)}{dx}\right| \le \mu_2 \\ &a_1(0) = a_1(l),\ \mu_1, \mu_2 = sbt > 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$hemen\ hemen\ x \in I\ için\ 0 < \mu_3 \le a_2(x) \le \mu_4,\ \mu_3, \mu_4 = sbt > 0 \tag{2.6}$$

$$\varphi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^2(I),\ \varphi_2 \in W_2^2(I),\ \frac{d\varphi_2(0)}{dx} = \frac{d\varphi_2(l)}{dx} = 0,\ k = 1,2 \text{ için } f_k \in W_2^{0,1}(\Omega) \tag{2.7}$$

şartlarını sağlar. $v(x) \in L_2(I)$ fonksiyonu

$$hemen\ \ hemen\ x \in I\ için\ |v(x)| \le b_0 \tag{2.8}$$

olacak şekilde bir reel değerli fonksiyondur.

Şimdi (2.1)-(2.2), (2.3)-(2.4) sınır değer problemlerinin çözümlerini tanımlayalım.

<u>Tanım 2.1.1.</u> $B_1 = C^0\left([0,T], \overset{0}{W}{}_2^2(I)\right) \cap C^1\left([0,T], L_2(I)\right)$ uzayından olan bir $\psi_1(x,t)$ fonksiyonu eğer hemen hemen $x \in I$ ve herhangi $t \in [0,T]$ için (2.1) denklemini, hemen hemen $x \in I$ ve hemen hemen $t \in (0,T)$ için sırasıyla (2.2) şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona *(2.1)-(2.2) sınır değer probleminin çözümü* denir.

<u>Tanım 2.1.2.</u> $B_2 = C^0\left([0,T], W_2^2(I)\right) \cap C^1\left([0,T], L_2(I)\right)$ uzayından olan bir $\psi_2(x,t)$ fonksiyonu eğer hemen hemen $x \in I$ ve herhangi $t \in [0,T]$ için (2.3) denklemini, hemen hemen $x \in I$ ve hemen hemen $t \in (0,T)$ için sırasıyla (2.4) şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona *(2.3)-(2.4) sınır değer problemlerinin çözümü* denir.

[6] çalışmasında kullanılan metodu kullanarak ve [24, 41] çalışmalarındaki sonuçları göz önüne alırsak aşağıdaki teoremin geçerli olduğunu kolaylıkla söyleyebilirz:

<u>Teorem 2.1.1.</u> Farz edelim ki $a_1(x),\ a_2(x),\ k = 1,2$ için $\varphi_k(x),\ f_k(x,t)$ ve $v(x)$ fonksiyonları sırasıyla (2.5), (2.6), (2.7) ve (2.8) şartlarını sağlasın. Bu durumda (2.1)-

(2.2), (2.3)-(2.4) problemlerinin sırasıyla B_1 ve B_2 uzaylarına ait olan tek ψ_1 ve ψ_2 çözümleri vardır ve bu çözümler $\forall\ t \in [0,T]$ için

$$\|\psi_1(.,t)\|^2_{\overset{0}{W_2^2}(I)} + \left\|\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right\|^2_{L_2(I)} \le c_1\left(\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W_2^2}(I)} + \|f_1\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi_1\|^6_{\overset{0}{W_2^1}(I)}\right) \tag{2.9}$$

$$\|\psi_2(.,t)\|^2_{W_2^2(I)} + \left\|\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right\|^2_{L_2(I)} \le c_2\left(\|\varphi_2\|^2_{W_2^2(I)} + \|f_2\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi_2\|^6_{W_2^1(I)}\right) \tag{2.10}$$

değerlendirmelerini sağlar. Burada $c_1, c_2 > 0$ sabitleri $\varphi_1,\ f_1,\ \varphi_2,\ f_2$ ve t den bağımsızdır.

Şimdi ters problemi ifade edelim:

Ters problemimiz

$$\psi_1(x,t) = \psi_2(x,t),\ (x,t) \in \Omega \tag{2.11}$$

ek şartı altında sırasıyla (2.1)-(2.2), (2.3)-(2.4) problemlerinde bilinmeyen ψ_1 ,ψ_2 ve $v(x)$ katsayısının bulunması problemidir. Burada $v(x)$ katsayısı

$$V = \{v : v(x) \in L_2(I),\ hemen\ hemen\ x \in I\ için\ |v(x)| \le b_0\}$$

kümesinde araştırılır.

2.2 Ters Problemin Varyasyonel Formülü

Bu bölümde 2.1. bölümde ifade ettiğimiz ters problemi bir varyasyonel problem olarak formüle edeceğiz. Bunun için [21] çalışmasındaki metodu kullanarak ters problemi bir varyasyonel problem olarak aşağıdaki gibi ifade ederiz:

$$J_\alpha(v) = \|\psi_1 - \psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha\|v - w\|^2_{L_2(I)} \tag{2.12}$$

fonksiyonelinin V kümesi üzerinde (2.1)-(2.2), (2.3)-(2.4) şartları altında minimumunun bulunması problemidir. Burada $w \in L_2(I)$ verilen bir fonksiyondur.

İşlem kolaylığı için (2.1)–(2.2), (2.3)–(2.4) problemlerini aşağıdaki şekilde tek bir problem olarak ifade edelim :

$$i\frac{\partial\psi_k}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\psi_k}{\partial x} - a_2(x)\psi_k + v(x)\psi_k + ia_3|\psi_k|^2|\psi_k| = f_k,\ k=1,2 \tag{2.13}$$

$$\psi_k(x,0) = \varphi_k(x),\ x \in I,\ k=1,2 \tag{2.14}$$

$$\psi_1(0,t) = \psi_1(l,t) = 0,\ \frac{\partial\psi_2(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial\psi_2(l,t)}{\partial x} = 0,\ t \in (0,T) \tag{2.15}$$

Böylece varyasyonel problemimiz (2.13)–(2.15) şartları altında V kümesi üzerinde (2.12) fonksiyonelinin minimumunun bulunması problemi olur.

3. BULGULAR

3.1 Varyasyonel Problemin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu bölümde öncelikle Goebel Teoremini kullanarak varyasyonel problemin $\alpha > 0$ için tek çözüme sahip olduğu ve sonra $\alpha \geq 0$ için en az bir çözüme sahip olduğu gösterilir. Bunun için ilk olarak aşağıdaki Lemma ispatlanır:

<u>Lemma 3.1.1.</u> $J_0(v) = \|\psi_1 - \psi_2\|^2_{L_2(\Omega)}$, V kümesi üzerinde sürekli bir fonksiyoneldir.

<u>İspat :</u> (2.13)–(2.15) probleminin herhangi $v \in V$ ve $v + \delta v \in V$ elemanlarına karşılık gelen çözümleri sırasıyla $\psi_k = \psi_k(x,t;v)$ ve $\psi_{k\delta} = (x,t;v+\delta v)$ olsun. Burada $\delta v \in L_\infty(I)$, herhangi $v \in V$ elemanına verilen bir artıştır. Bu durumda $k = 1,2$ için $\delta\psi_k = \delta\psi_k(x,t) \equiv \psi_k(x,t;v+\delta v) - \psi_k(x,t;v)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} & i\frac{\partial \delta\psi_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \delta\psi_k}{\partial x^2} + i a_1(x)\frac{\partial \delta\psi_k}{\partial x} - a_2(x)\delta\psi_k + (v(x) + \delta v(x))\delta\psi_k + \\ & i a_3\left[\left(|\psi_{k\delta}|^2 + |\psi_k|^2\right)\delta\psi_k + \psi_{k\delta}\psi_k(\delta\bar{\psi}_k)\right] = -\delta v(x)\psi_k,\ (x,t) \in \Omega,\ k = 1,2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\delta\psi_k(x,0) = 0,\ x \in I,\ k = 1,2 \tag{3.2}$$

$$\delta\psi_1(0,t) = \delta\psi_1(l,t) = 0,\ \frac{\partial \delta\psi_2(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \delta\psi_2(l,t)}{\partial x} = 0,\ t \in (0,T) \tag{3.3}$$

sınır değer problemlerinin çözümü olur.

Şimdi bu sınır değer probleminin çözümü için bir değerlendirme elde etmeye çalışalım. Bunun için (3.1) denkleminin her iki tarafını $\delta\bar{\psi}_k$ fonksiyonu ile çarpalım ve elde edilen eşitliği Ω_t bölgesi üzerinde integralleyelim. Bu durumda

$$\int_{\Omega_t}\Bigg[i\frac{\partial\psi_k}{\partial t}\delta\overline{\psi}_k + a_0\frac{\partial^2\delta\psi_k}{\partial x^2}\delta\overline{\psi}_k + ia_1(x)\frac{\partial\psi_k}{\partial x}\delta\overline{\psi}_k - a_2(x)\left|\delta\psi_k\right|^2 +$$

$$(v(x)+\delta v(x)\left|\delta\psi_k\right|^2 + ia_3\left(\left|\psi_{k\delta}\right|^2+\left|\psi_k\right|^2\right)\left|\delta\psi_k\right|^2 + ia_3\psi_{k\delta}\psi_k(\delta\overline{\psi}_k)^2\Bigg]dxd\tau$$

$$= \int_{\Omega_t} -\delta v(x)\psi_k\delta\overline{\psi}_k dxd\tau$$

eşitliği yazılır. Bu eşitliğin sol tarafındaki 2. terime kısmi integrasyon formülü uygulayıp, (3.3) şartını kullandıktan sonra elde edilen eşitlikten kompleks eşleniğini çıkarırsak,

$$\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\delta\psi_k}{\partial t}\delta\overline{\psi}_k + \frac{\partial\delta\overline{\psi}_k}{\partial t}\delta\psi_k\right)dxd\tau + \int_{\Omega_t} a_1(x)\left(\frac{\partial\delta\psi_k}{\partial x}\delta\overline{\psi}_k + \frac{\partial\delta\overline{\psi}_k}{\partial x}\delta\psi_k\right)dxd\tau +$$

$$2a_3\int_{\Omega_t}\left(\left|\psi_{k\delta}\right|^2+\left|\psi_k\right|^2\right)\left|\delta\psi_k\right|^2 dxd\tau + 2a_3\int_{\Omega_t}\mathrm{Re}\left(\psi_{k\delta}\psi_k(\delta\overline{\psi}_k)^2\right)dxd\tau$$

$$= -2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left(\delta v\psi_k\delta\overline{\psi}_k\right)dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\frac{\partial\delta\psi_k}{\partial t}\delta\overline{\psi}_k + \frac{\partial\delta\overline{\psi}_k}{\partial t}\delta\psi_k = \frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\delta\psi_k\right|^2\right)$$

ve

$$\left(\frac{\partial\delta\psi_k}{\partial x}\delta\overline{\psi}_k + \frac{\partial\delta\overline{\psi}_k}{\partial x}\delta\psi_k\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\delta\psi_k\right|^2\right)$$

olduğunu göz önüne alarak

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\delta\psi_k\right|^2\right)dxd\tau$$

integralinde (3.2) şartını kullanırsak

$$\left\|\delta\psi_k(.,t)\right\|_{L_2(I)}^2 + \int_{\Omega_t} a_1(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\delta\psi_k\right|^2\right)\right)dxd\tau + 2a_3\int_{\Omega_t}\left(\left|\psi_{k\delta}\right|^2 + \left|\psi_k\right|^2\right)\left|\delta\psi_k\right|^2 dxd\tau +$$
$$2a_3\int_{\Omega_t} \mathrm{Re}\left(\psi_{k\delta}\psi_k(\delta\bar{\psi}_k)^2\right)dxd\tau = -2\int_{\Omega_t} \mathrm{Im}\left(\delta v\psi_k\delta\bar{\psi}_k\right)dxd\tau \tag{3.4}$$

eşitliği yazılır. (3.4) denkleminin her iki tarafına $\int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x)}{\partial x}\left|\delta\psi_k\right|^2 dxd\tau$ terimini eklersek

$$\left\|\delta\psi_k(.,t)\right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\left|\delta\psi_k\right|^2\right)dxd\tau + 2a_3\int_{\Omega_t}\left(\left|\psi_{k\delta}\right|^2 + \left|\psi_k\right|^2\right)\left|\delta\psi_k\right|^2 dxd\tau +$$
$$2a_3\int_{\Omega_t} \mathrm{Re}\left(\psi_{k\delta}\psi_k(\delta\bar{\psi}_k)^2\right)dxd\tau = -2\int_{\Omega_t} \mathrm{Im}\left(\delta v\psi_k\delta\bar{\psi}_k\right)dxd\tau + \int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x)}{\partial x}\left|\delta\psi_k\right|^2 dxd\tau \tag{3.5}$$

eşitliği yazılır. (3.5) de (3.3) şartı kullanılırsa ve her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$\left\|\delta\psi_k(.,t)\right\|_{L_{2(I)}}^2 + 2a_3\int_{\Omega_t}\left(\left|\psi_{k\delta}\right|^2 + \left|\psi_k\right|^2\right)\left|\delta\psi_k\right|^2 dxd\tau \le$$
$$2a_3\int_{\Omega_t}\left(\left|\psi_{k\delta}\right|\left|\psi_k\right|\left|\delta\psi_k\right|^2\right)dxd\tau + 2\int_{\Omega_t}\left(\left|\delta v\right|\left|\psi_k\right|\left|\delta\psi_k\right|\right)dxd\tau + \int_{\Omega_t}\left(\left|\frac{da_1(x)}{dx}\right|\left|\delta\psi_k\right|^2\right)dxd\tau \tag{3.6}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.6) eşitsizliğinde (2.5) şartını kullanarak eşitsizliğin sağ tarafındaki 1.ve 2. terimlere Young eşitsizliğini uygularsak

$$\left\|\delta\psi_k(.,t)\right\|_{L_{2(I)}}^2 + a_3\int_{\Omega_t}\left(\left|\psi_{k\delta}\right|^2 + \left|\psi_k\right|^2\right)\left|\delta\psi_k\right|^2 dxd\tau \le$$
$$\int_{\Omega_t}\left(\left|\delta v\right|^2\left|\psi_k\right|^2\right)dxd\tau + \int_{\Omega_t}\left(\left|\delta\psi_k\right|^2\right)dxd\tau + \mu_2\int_{\Omega_t}\left(\left|\delta\psi_k\right|^2\right)dxd\tau$$

olup

$$\|\delta\psi_k(.,t)\|^2_{L_{2(I)}} + a_3\int_{\Omega_t}\left(|\psi_{k\delta}|^2+|\psi_k|^2\right)|\delta\psi_k|^2\,dxd\tau \le (1+\mu_2)\int_{\Omega_t}|\delta\psi_k|^2dxd\tau +$$

$$\int_{\Omega_t}|\delta v|^2|\psi_k|^2\,dxd\tau \qquad (3.7)$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlikte $a_3 > 0$ olduğundan eşitsizliğin sol tarafındaki ikinci terimin pozitif olduğunu gözönüne alırsak

$$\|\delta\psi_k(.,t)\|^2_{L_{2(I)}} \le (1+\mu_2)\int_{\Omega_t}|\delta\psi_k|^2dxd\tau + \int_{\Omega_t}|\delta v|^2|\psi_k|^2\,dxd\tau$$

eşitsizliği yazılır. Burada

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_t}|\delta v|^2|\psi_k|^2dxd\tau &\le \int_0^T\int_I|\delta v|^2|\psi_k|^2dxd\tau\\ &\le \int_0^T ess\sup_{x\in I}|\delta v|^2\int_I|\psi_k|^2dxd\tau\\ &= \|\delta v\|^2_{L_\infty(I)}\int_0^T\|\psi_k(.,t)\|^2_{L_2(I)}dt\end{aligned}$$

olduğunu dikkate alarak, $\forall\ t\in[0,T]$ için (2,9), (2.10) değerlendirmelerini kullanırsak

$$\|\delta\psi_k(.,t)\|^2_{L_2(I)} \le (1+\mu_2)\int_0^T\|\delta\psi_k(.,\tau)\|^2_{L_2(I)} + c_3\|\delta v\|^2_{L_\infty(I)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada Gronwall lemmasını uygularsak

$$\|\delta\psi_k(.,t)\|^2_{L_2(I)} \le c_4\|\delta v\|^2_{L_\infty(I)} \qquad (3.8)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$\int_{\Omega_t}|\delta v|^2|\psi_k|^2dxd\tau \le c_3\|\delta v\|^2_{L_\infty(I)}$$

olduğunu göz önüne alarak (3.8) eşitsizliğini (3.7) de kullanırsak $\forall\ t\in[0,T]$ için

$$\left\|\delta\psi_k(.,t)\right\|^2_{L_2(I)} + a_3\int_{\Omega_t}\left(\left|\psi_{\delta k}\right|^2 + \left|\psi_k\right|^2\right)\left|\delta\psi_k\right|^2 dxd\tau \le c_5\left\|\delta v\right\|^2_{L_\infty(I)} \tag{3.9}$$

değerlendirmesini elde ederiz.. Burada $c_3,\ c_4,\ c_5 > 0$ sabitleri δv den bağımsızdır.

$\alpha = 0$ için (2.12) formülünü kullanırsak

$$\begin{aligned}
\delta J_0(v) &= J_0(v+\delta v) - J_0(v)\\
&= \int_\Omega \left|\psi_{1\delta} - \psi_{2\delta}\right|^2 dxd\tau - \int_\Omega \left|\psi_1 - \psi_2\right|^2 dxd\tau\\
&= \int_\Omega \left[\left(\psi_{1\delta} - \psi_{2\delta}\right)\left(\bar\psi_{1\delta} - \bar\psi_{2\delta}\right) - \left(\psi_1 - \psi_2\right)\left(\bar\psi_1 - \bar\psi_2\right)\right] dxd\tau\\
&= \int_\Omega \Big\{\left[\left(\psi_1 + \delta\psi_1\right) - \left(\psi_2 + \delta\psi_2\right)\right]\left[\left(\bar\psi_1 + \delta\bar\psi_1\right) - \left(\bar\psi_2 + \delta\bar\psi_2\right)\right] -\\
&\quad \left(\left|\psi_1\right|^2 - \psi_1\bar\psi_2 - \psi_2\bar\psi_1 + \left|\psi_2\right|^2\right)\Big\} dxd\tau\\
&= \int_\Omega \Big[\left(\psi_1 - \psi_2\right)\left(\delta\bar\psi_1 - \delta\bar\psi_2\right) + \left(\delta\psi_1 - \delta\psi_2\right)\left(\bar\psi_1 - \bar\psi_2\right) +\\
&\quad \left|\delta\psi_1\right|^2 + \left|\delta\psi_2\right|^2 - 2\operatorname{Re}\left(\delta\psi_1 - \delta\bar\psi_2\right)\Big] dxd\tau\\
&= \int_\Omega \Big\{2\operatorname{Re}\left[\left(\psi_1 - \psi_2\right)\left(\delta\bar\psi_1 - \delta\bar\psi_2\right)\right] - 2\operatorname{Re}\left(\delta\psi_1\delta\bar\psi_2\right) +\\
&\quad \left|\delta\psi_1\right|^2 + \left|\delta\psi_2\right|^2\Big\} dxd\tau
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned}
\left|\delta J_0(v)\right| &\le 2\int_\Omega \left|\psi_1 - \psi_2\right|\left|\delta\psi_1 - \delta\psi_2\right| dxd\tau + 2\int_\Omega \left|\delta\psi_1\right|\left|\delta\psi_2\right| dxd\tau + \left\|\delta\psi_1\right\|^2_{L_2\Omega} + \left\|\delta\psi_2\right\|^2_{L_2\Omega}\\
&\le 2\int_\Omega \left(\left|\psi_1\right| + \left|\psi_2\right|\right)\left(\left|\delta\psi_1\right| + \left|\delta\psi_2\right|\right) dxd\tau + \int_\Omega \left|\delta\psi_1\right|^2 dxd\tau + \int_\Omega \left|\delta\psi_2\right|^2 dxd\tau +\\
&\quad \left\|\delta\psi_1\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\delta\psi_2\right\|^2_{L_2(\Omega)}\\
&\le 2\Big[\left\|\psi_1\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\delta\psi_1\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|\psi_1\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\delta\psi_2\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|\psi_2\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\delta\psi_1\right\|_{L_2(\Omega)} +\\
&\quad \left\|\psi_2\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\delta\psi_2\right\|_{L_2(\Omega)}\Big] + 2\left\|\delta\psi_1\right\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\left\|\delta\psi_2\right\|^2_{L_2(\Omega)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Yukarıdaki eşitsizlikte (2.9), (2.10), (3.9) değerlendirmelerini kullanırsak $\forall\, v \in V$ için

$$|\delta J_0(v)| \leq c_6 \left(\|\delta v\|_{L_\infty(I)} + \|\delta v\|^2_{L_\infty(I)} \right) \tag{3.10}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_6 > 0$, δv den bağımsızdır. Böylece (3.10) dan

$$\|\delta v\|_{L_\infty(I)} \to 0 \quad \text{olduğunda} \quad |\delta J_0(v)| \to 0$$

limit bağıntısı yazılır. Dolayısıyla $\forall\, v \in V$ için $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu kolaylıkla söyleyebiliriz.

<u>Teorem 3.1.1.</u> Farzedelim ki Teorem 2.1.1 in şartları sağlansın ve $w \in L_2(I)$ verilen bir eleman olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ ve $\forall\, w \in G$ için varyasyonel problem tek çözüme sahip olacak şekilde $L_2(I)$ uzayında yoğun bir G alt kümesi vardır.

<u>İspat:</u> $J_0(v)$ fonksiyoneli sürekli olduğundan bu fonksiyonel alttan yarı süreklidir. Ayrıca $\forall\, v \in V$ için $J_0(v) \geq 0$ olduğundan alttan sınırlıdır. V kümesi, $L_\infty(I)$ uzayında kapalı, sınırlı ve konveks bir kümedir ve $L_\infty(I)$ uzayı düzgün konveks uzaydır [39]. V kümesinin, $L_2(I)$ uzayında da kapalı, sınırlı ve konveks bir küme olduğu kolaylıkla gösterilebilr. Böylece Goebel teoreminin şartları sağlanmış olur. Dolayısıyla Teorem 3.1.1 ispatlanmış olur.

<u>Teorem 3.1.2.</u> $\alpha \geq 0$ ve w verilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca Teorem 2.1.1 in sağlandığını kabul edelim. Bu durumda varyasyonel problem en az bir çözüme sahiptir.

<u>İspat:</u> $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli için herhangi bir $\{v_m\} \subset V$ minimalleştirici dizisini göz önüne alalım. Yani

$$\lim_{m\to\infty} J_\alpha(v_m) = \inf_{v \in V} J_\alpha(v) = J_{\alpha^*}$$

olsun.

$v_m \in V$ elemanına karşılık (2.1)-(2.2) ve (2.3)-(2.4) sınır değer problemlerinin çözümü sırasıyla $\psi_{1m} = \psi_{1m}(x,t) = \psi_1(x,t;v_m)$ ve $\psi_{2m} = \psi_{2m}(x,t) = \psi_2(x,t;v_m)$ olsun. $m = 1, 2, ...$ için $v_m \in V$ olduğu için Teorem 2.1.1 den her bir $m = 1, 2...$ için (2.1)-(2.2), (2.3)-(2.4) sınır değer problemlerinin sırasıyla B_1, B_2 uzaylarında tek ψ_{1m}, ψ_{2m} çözümleri vardır ve $\forall\ t \in [0,T]$, $m = 1, 2...$ için bu çözümler aşağıdaki değerlendirmeleri sağlar:

$$\|\psi_{1m}(.,t)\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(I)} + \left\|\frac{\partial \psi_{1m}}{\partial t}\right\|^2_{L_2(I)} \le c_1 \left(\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(I)} + \| f_1\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi_1\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(I)} \right), \tag{3.11}$$

$$\|\psi_{2m}(.,t)\|^2_{W_2^2(I)} + \left\|\frac{\partial \psi_{2m}}{\partial t}\right\|^2_{L_2(I)} \le c_2 \left(\|\varphi_2\|^2_{W_2^2(I)} + \| f_2\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi_2\|^6_{W_2^1(I)} \right). \tag{3.12}$$

V kümesi $L_\infty(I)$ Banach uzayında sınırlı bir küme olduğundan $L_\infty(I)$ uzayında

$$m \to \infty \quad için \quad L_\infty(I) \text{ da } v_{m_p} \xrightarrow{*-zayıf} v$$

olacak şekilde $\{v_m\}$ dizisinden bir $\{v_{m_p}\}$ alt dizisi seçebiliriz. İşlem kolaylığı için bu alt diziyi yine $\{v_m\}$ ile gösterelim. Yani

$$m \to \infty \quad için \quad L_\infty(I) \text{ da } v_m \xrightarrow{*-zayıf} v \tag{3.13}$$

yazılır. V kümesi $L_\infty(I)$ da kapalı, sınırlı ve konveks bir küme olduğundan [26] çalışmasındaki bilinen teoereme göre V kümesi $L_\infty(I)$ da $*-zayıf$ kapalı bir kümedir. Yani $v \in V$ dir. Bu durumda $\forall\ q \in L_1(I)$ için

$$\lim_{m\to\infty} \int_I v_m(x) q(x) dx = \int_I v(x) q(x) dx \tag{3.14}$$

limit bağıntısı yazılır.

(3.11)-(3.12) kestirimlerinden $k=1,2$ için $\{\psi_{km}\}$ dizilerinin sırasıyla B_1 ve B_2 uzayının normunda düzgün sınırlı olduğu elde edilir. Dolayısıyla $k=1,2$ için $\{\psi_{km}\}$ dizilerinden $\forall\, t\in[0,T]$ ve $m\to\infty$ için $\psi_1\in B_1$, $\psi_2\in B_2$ elemanlarına zayıf yakınsayan $\{\psi_{1m_p}\}$, $\{\psi_{2m_p}\}$ alt dizilerini seçmek mümkündür. İşlem kolaylığı için bu alt dizileri yine $k=1,2$ için $\{\psi_{km}\}$ ile gösterelim. Bu durumda bu alt dizi için aşağıdaki limit bağıntılarını kolaylıkla yazabiliriz:

$\forall\, t\in[0,T]$ ve $k=1,2,\ m\to\infty$ için

$$\overset{0}{W}{}_2^2(I) \text{ uzayında } \psi_{km}(.,t)\xrightarrow{zayıf}\psi_k(.,t) \tag{3.15}$$

$$L_2(I) \text{ uzayında } \frac{\partial\psi_{km}}{\partial t}(.,t)\xrightarrow{zayıf}\frac{\partial\psi_k}{\partial t}(.,t). \tag{3.16}$$

Şimdi $k=1,2$ için ψ_k limit fonksiyonlarının (2.13) denklemini $\forall\, t\in[0,T]$ ve hemen hemen $x\in I$ için sağladığını gösterelim. $k=1,2$ ve her bir $m=1,2$ için $\psi_{km}(x,t)$ fonksiyonlarının $\forall\, t\in[0,T]$ ve $\forall\, g_k\in L_2(I)$ için

$$\begin{aligned}&\int_I\Big(i\frac{\partial\psi_{km}}{\partial t}(x,t)+a_0\frac{\partial^2\psi_{km}}{\partial x^2}(x,t)+ia_1(x)\frac{\partial\psi_{km}}{\partial x}-a_2(x)\psi_{km}(x,t)+v_m(x)\psi_{km}(x,t)+\\&\quad ia_3\left|\psi_{km}(x,t)\right|^2\psi_{km}(x,t)-f_k(x,t)\Big)\overline{g}_k(x)dx=0\end{aligned} \tag{3.17}$$

integral özdeşliğini sağladığı açıktır.

[7, 32] çalışmalarından bilindiği gibi B_1 uzayı $C^0\left([0,T],L_2(I)\right)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $k=1,2$, $m\to\infty$ ve $\forall\, t\in[0,T]$ için

$$\left\|\psi_{km}(.,t)-\psi_k(.,t)\right\|_{L_2(I)}\xrightarrow{t \text{ ye göre düzgün}}0 \tag{3.18}$$

limit bağıntıları yazılır.

Şimdi her bir $t \in [0,T]$ ve $\forall\, g_k \in L_2(I)$ için $m \to \infty$ olduğunda

$$\int_I v_m(x)\psi_{km}(x,t)\overline{g}_k(x)dx \to \int_I v(x)\psi_k(x,t)\overline{g}_k(x)dx, \quad k=1,2 \tag{3.19}$$

ve

$$\int_I |\psi_{km}(x,t)|^2 \psi_{km}(x,t)\overline{g}_k(x)dx \to \int_I |\psi_k(x,t)|^2 \psi_k(x,t)\overline{g}_k(x)dx \tag{3.20}$$

limit bağıntılarının geçerli olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\begin{aligned}\int_I v_m(x)\psi_{km}(x,t)\overline{g}_k(x)dx &= \int_I v_m(x)\big(\psi_{km}(x,t)-\psi_k(x,t)\big)\overline{g}_k dx + \\ \int_I \big(v_m(x)-v(x)\big)\psi_k(x)\overline{g}_k dx &+ \int_I v(x)\psi_k(x,t)\overline{g}_k dx\end{aligned} \tag{3.21}$$

eşitliğini kullanalım. (3.21) eşitliğinin sağ tarafındaki 1. terim için

$$\begin{aligned}\int_I v_m(x)\big(\psi_{km}-\psi_k\big)\overline{g}_k dx &\le \left|\int_I v_m(x)\big(\psi_{km}-\psi_k\big)\overline{g}_k dx\right| \\ &\le \int_I |v_m(x)||\psi_{km}-\psi_k||g_k|dx \\ &\le ess\sup|v_m(x)|\int_I |\psi_{km}-\psi_k||g_k|dx \\ &\le ess\sup|v_m(x)|\,\|\psi_{km}(.,t)-\psi_k(.,t)\|_{L_2(I)}\,\|g_k\|_{L_2(I)} \to 0\end{aligned}$$

olduğunu göz önüne alarak, burada (3.18) limit bağıntısı kullanılırsa $m \to \infty$ için

$$\int_I v_m(x)\big(\psi_{km}-\psi_k\big)\overline{g}_k dx \to 0 \tag{3.22}$$

bağıntısı elde edilir. (3.21) in sağ tarafındaki 2. terim için, $g_k \in L_2(I)$ ve $\psi_k \in L_2(I)$ olduğundan $\psi_k(x)\,\overline{g}_k(x) \in L_1(I)$ olduğunu dikkate alarak (3.14) limit bağıntısını kullanırsak $m \to \infty$ için

$$\int_I \left(v_m(x) - v(x)\right)\psi_k(x)\overline{g}_k dx \to 0 \tag{3.23}$$

olduğunu elde ederiz.

Böylece (3.21) bağıntısında (3.22) ve (3.23) limit bağıntılarını kullanırsak (3.19) limit bağıntısının geçerli olduğunu göstermiş oluruz.

Şimdi (3.20) limit bağıntısının geçerli olduğunu gösterelim. $k = 1,2$ için

$$\left\| |\psi_{km}(.,t)|^2 \psi_{km}(.,t) \right\|_{L_2(I)} = \|\psi_{km}(.,t)\|_{L_6(I)}^3$$

olup burada Kuramsal Temeller Teorem 1.2.1. deki eşitsizliği kullanırsak

$$\begin{aligned} \left\| |\psi_{km}(.,t)|^2 \psi_{km}(.,t) \right\|_{L_2(I)} &= \|\psi_{km}(.,t)\|_{L_6(I)}^3 \\ &\le c_7 \left[\left(\left\| \frac{\partial \psi_{km}}{\partial x} \right\|_{L_2(I)}^2 \right)^2 + \|\psi_{km}\|_{L_2(I)}^2 \right] \end{aligned} \tag{3.24}$$

yazılır. (3.24) de (3.11), (3.12) değerlendirmelerini kullanırsak

$$\left\| |\psi_{km}(.,t)|^2 \psi_{km}(.,t) \right\|_{L_2(I)} = \|\psi_{km}(.,t)\|_{L_6(I)}^3 \le c_8$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (3.18) limit bağıntısını ve Kuramsal Temellerdeki Lemma 1.2.2 yi kullanırsak her bir $t \in [0,T]$ için

$$L_2(I) \text{ da } |\psi_{km}(.,t)|^2 \psi_{km}(.,t) \xrightarrow{zayıf} |\psi_k(x,t)|^2 \psi_k(x,t)$$

yakınsaması elde edilir. Bu da (3.20) limit bağıntısının geçerli olduğunu gösterir.

Böylece (3.17) integral özdeşliğinde $m \to \infty$ için (3.15), (3.16), (3.19), (3.20) limit bağıntılarını kullanırsak, her bir $t \in [0,T]$ ve $\forall\, g_k \in L_2(I),\ k = 1,2$ için

$$\int_I \left[\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} + i a_1(x) \frac{\partial \psi_k}{\partial x} - a_2(x)\psi_k + v(x)\psi_k + i a_3 |\psi_k|^2 \psi_k - f_k \right] \overline{g}_k(x)dx = 0$$

integral özdeşliğini elde ederiz. Bu integral özdeşliğinden de $\psi_k(x,t)$ limit fonksiyonunun hemen hemen $x \in I$ ve $\forall\, t \in [0,T]$ için (2.13) denklemini sağladığını kolaylıkla söyleyebiliriz.

Şimdi $k = 1,2$ için $\psi_k(x,t)$ limit fonksiyonunun başlangıç şartını sağladığını gösterelim:

$$\begin{aligned}
\|\psi_k(.,0) - \varphi\|^2_{L_2(I)} &= \int_I |\psi_k(x,0) - \varphi(x)|^2 dx \\
&= \int_I |\psi_k(x,0) - \psi_{km}(x,0) + \psi_{km}(x,0) - \varphi(x)|^2 dx \\
&\le \int_I \left(|\psi_k(x,0) - \psi_{km}(x,0)| + |\psi_{km}(x,0) - \varphi(x)| \right)^2 dx \\
&\le 2\int_I |\psi_k(x,0) - \psi_{km}(x,0)|^2 dx + 2\int_I |\psi_{km}(x,0) - \varphi(x)|^2 dx
\end{aligned} \tag{3.25}$$

yazılır. Hemen hemen $x \in I$ için $\psi_{km}(x,0) = \varphi(x)$ olduğundan (3.25) eşitsizliğinde bu eşitliği ve $t = 0$ için (3.18) limit bağıntısını kullanırsak

$$0 \le \|\psi_k(.,0) - \varphi\|^2_{L_2(I)} \le 0 \quad \text{olup} \quad \|\psi_k(.,0) - \varphi\|^2_{L_2(I)} = 0$$

yazılır. Yani, $k=1,2$ ve hemen hemen $x\in I$ için $\psi_k(x,0)=\varphi(x)$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $\psi_k(x,t)$ limit fonksiyonlarının (2.14) şartlarını sağladığını göstermiş olduk. Benzer şekilde $\psi_k(x,t)$ limit fonksiyonlarının (2.15) sınır şartlarını sağladığı kolaylıkla gösterilir.

Böylece $\{v_m\}$ dizisinin limit fonksiyonu olan $v(x)$ fonksiyonuna karşılık gelen ve sırasıyla (2.1)-(2.2), (2.3)-(2.4) sınır değer problemlerinin çözümü olan fonsiyonların, $\{\psi_{1m}(x,t)\}$ ve $\{\psi_{2m}(x,t)\}$ dizilerinin limiti olan $\psi_1(x,t),\ \psi_2(x,t)$ fonksiyonları olduğu elde edildi.

Ayrıca (3.11)-(3.12) değerlendirmelerinde alt limite geçilirse ve normun alttan zayıf yarı sürekli olduğu dikkate alınırsa $\psi_1(x,t),\ \psi_2(x,t)$ fonksiyonlarının (2.9)-(2.10) değerlendirmelerini sağladığı elde edilir. Teorem 2.1.1 den çözümün tekliğinden $\psi_1\in B_1,\ \psi_2\in B_2$ yazılır.

B_1 ve B_2 uzayları $L_2(\Omega)$ uzayına kompakt gömüldüğünden

$$k=1,2 \text{ ve } m\to\infty \text{ için } \|\psi_{km}-\psi_k\|_{L_2(\Omega)}\to 0$$

limit bağıntısı yazılır. Bu limit bağıntısını kullanarak, $\alpha\geq 0$ olduğunu ve $L_2(\Omega)$ uzayında normun alttan yarı sürekliliğini dikkate alarak

$$J_{\alpha^*}\leq J_\alpha(v)\leq \lim_{m\to\infty} J_\alpha(v_m)=\inf_{v\in V} J_\alpha(v)=J_{\alpha^*}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu elde edilir. Yani $v\in V$ elemanı $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin minimum noktasıdır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

3.2 Gözlem Fonksiyonelinin Diferansiyellenebilirliği

Bu bölümde, bir eşlenik problem yardımıyla $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin Frechet anlamında diferansiyellenebilir olduğu gösterilir ve fonksiyonelin gradyenti için bir formül elde edilir.

İlk olarak Lagrange çarpanları metodunu kullanarak varyasyonel problemi

$$L\left(v,\psi_1,\psi_2,\eta_1,\eta_2\right)\to\inf$$

biçiminde bir problem olarak yeniden formüle edelim. Burada

$$\begin{aligned}
&L\left(v,\psi_1,\psi_2,\eta_1,\eta_2\right)=J_\alpha(v)\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega\left(i\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+ia_1(x)\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-a_2(x)\psi_1+v(x)\psi_1+ia_3\left|\psi_1\right|^2\psi_1-f_1\right)\overline{\eta}_1dxdt\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega\left(-i\frac{\partial\overline{\psi}_1}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\overline{\psi}_1}{\partial x^2}-ia_1(x)\frac{\partial\overline{\psi}_1}{\partial x}-a_2(x)\overline{\psi}_1+v(x)\overline{\psi}_1-ia_3\left|\psi_1\right|^2\overline{\psi}_1-\overline{f}_1\right)\eta_1dxdt\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega\left(i\frac{\partial\psi_2}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+ia_1(x)\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-a_2(x)\psi_2+v(x)\psi_2+ia_3\left|\psi_2\right|^2\psi_2-f_2\right)\overline{\eta}_2dxdt\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega\left(-i\frac{\partial\overline{\psi}_2}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\overline{\psi}_2}{\partial x^2}-ia_1(x)\frac{\partial\overline{\psi}_2}{\partial x}-a_2(x)\overline{\psi}_2+v(x)\overline{\psi}_2-ia_3\left|\psi_2\right|^2\overline{\psi}_2-\overline{f}_2\right)\eta_2dxdt,
\end{aligned}$$

olup $k=1,2$ için $\eta_k=\eta_k(x,t;v)$ fonksiyonları Lagrange çarpanları, ψ_k fonksiyonları ise (2.13)–(2.15) sınır değer problemlerinin çözümleridir. Böylece $L\left(v,\psi_1,\psi_2,\eta_1,\eta_2\right)$ Lagrange fonksiyonelinin stasyonerlik şartından aşağıdaki eşlenik problemi elde ederiz:

$$\begin{aligned}
&i\frac{\partial\eta_k}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\eta_k}{\partial x^2}+i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\eta_k\right)-a_2(x)\eta_k+v(x)\eta_k-2ia_3\left|\psi_k\right|^2\eta_k+\\
&+ia_3(\psi_k)^2\overline{\eta}_k=2\left(-1\right)^k\left(\psi_1-\psi_2\right)
\end{aligned}\tag{3.26}$$

$$\eta_k(x,T)=0,\ k=1,2\ ,\ x\in(0,l)\tag{3.27}$$

$$\eta_1(0,t)=\eta_1(l,t)=0,\ \ t\in(0,T)\tag{3.28}$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \eta_2}{\partial x}(l,t) = 0, \quad t \in (0,T) \tag{3.29}$$

Görüldüğü gibi eşlenik problem η_1 fonksiyonuna göre 1. çeşit, η_2 fonksiyonuna göre 2. çeşit olmak üzere iki sınır değer problemini içermektedir. (3.26)–(3.29) problemine $\tau = T - t$ değişken dönüşümü yapıldığında elde edilen problemin (2.13)–(2.15) problemi biçiminde olduğu kolaylıkla görülür. Dolayısıyla eşlenik problemin çözümü ile sırasıyla B_1 ve B_2 uzaylarına ait olan η_1 ve η_2 fonksiyonları göz önüne alınır ki bu fonksiyonlar hemen hemen $x \in (0,l)$ ve $\forall\, t \in (0,T)$ için (3.26) denklemini, hemen hemen $x \in (0,l)$ için (3.27) şartını ve hemen hemen $t \in (0,T)$ için sırasıyla (3.28) ve (3.29) şartını sağlarlar. Bu yüzden eşlenik problemin çözümü için aşağıdaki teoremin geçerli olduğunu kolaylıkla söyleyebiliriz:

<u>Teorem 3.2.1</u> Teorem 2.1.1. sağlansın. Bu durumda eşlenik problemin $\forall\, v \in V$ için $\eta_1 \in B_1,\ \eta_2 \in B_2$ olacak şekilde tek çözümü vardır ve bu çözümler $\forall\, t \in [0,T]$ için

$$\|\eta_1(.,t)\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(I)} + \left\|\frac{\partial \eta_1(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(I)} \le c_9 \|\psi_1 - \psi_2\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} \tag{3.30}$$

$$\|\eta_2(.,t)\|^2_{W_2^2(I)} + \left\|\frac{\partial \eta_2(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(I)} \le c_{10} \|\psi_1 - \psi_2\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} \tag{3.31}$$

değerlendirmelerini sağlar. Burada $c_9,\ c_{10} > 0$ sabitleri t den bağımsızdır.

Bu teorem, Teorem 2.1.1 in ispatına benzer olarak Galerkin metoduyla kolaylıkla ispatlanabilir.

Fonksiyonelin diferansiyellenebilir olup olmadığını göstermek için $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $\forall\, v \in V$ elemanı üzerindeki artışını hesaplayalım. Bunun için (2.12) formülünü kullanırsak

$$
\begin{aligned}
\delta J_\alpha(v) &= J_\alpha(v+\delta v) - J_\alpha(v) \\
&= \left\|\psi_1(x,t;v+\delta v) - \psi_2(x,t;v+\delta v)\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha\left\|v+\delta v - w\right\|^2_{L_2(I)} \\
&\quad - \left\|\psi_1(x,t;v) - \psi_2(x,t;v)\right\|^2_{L_2(\Omega)} - \alpha\left\|v - w\right\|^2_{L_2(I)} \\
&= \int_\Omega \left|\psi_{1\delta} - \psi_{2\delta}\right|^2 dxdt + \alpha\int_I \left|v+\delta v - w\right|^2 dx \\
&\quad - \int_\Omega \left|\psi_1 - \psi_2\right|^2 dxdt - \alpha\int_I \left|v - w\right|^2 dx \\
&= \int_\Omega \left(\psi_{1\delta} - \psi_{2\delta}\right)\left(\bar\psi_{1\delta} - \bar\psi_{2\delta}\right) dxdt + \alpha\int_I \left(v+\delta v - w\right)\left(\bar v + \delta\bar v - \bar w\right) dx \\
&\quad - \int_\Omega \left(\psi_1 - \psi_2\right)\left(\bar\psi_1 - \bar\psi_2\right) dxdt - \alpha\int_I \left(v - w\right)\left(\bar v - \bar w\right) dx
\end{aligned}
$$

olup gerekli işlemler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\delta J_\alpha(v) &= \int_\Omega \delta v(x)\,\mathrm{Re}(\delta\psi_1\bar\eta_1)dxdt + \int_\Omega \delta v(x)\,\mathrm{Re}(\delta\psi_2\bar\eta_2)dxdt + \\
&\int_\Omega \delta v(x)\,\mathrm{Re}(\psi_1\bar\eta_1)dxdt + \int_\Omega \delta v(x)\,\mathrm{Re}(\psi_2\bar\eta_2)dxdt - \\
&a_3\int_\Omega \left(\left|\psi_{1\delta}\right|^2 - \left|\psi_1\right|^2\right)\mathrm{Im}(\delta\psi_1\bar\eta_1)dxdt - a_3\int_\Omega \left(\left|\psi_{2\delta}\right|^2 - \left|\psi_2\right|^2\right)\mathrm{Im}(\delta\psi_2\bar\eta_2)dxdt - \\
&a_3\int_\Omega \left|\delta\psi_1\right|^2 \mathrm{Im}(\psi_1\bar\eta_1)dxdt - a_3\int_\Omega \left|\delta\psi_2\right|^2 \mathrm{Im}(\psi_2\bar\eta_2)dxdt + \\
&2\alpha\int_0^l \left(v(x) - w(x)\right)\delta v(x)dx - 2\int_\Omega \mathrm{Re}(\delta\psi_1\delta\bar\psi_2)dxdt + \\
&\left\|\delta\psi_1\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\delta\psi_2\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha\left\|\delta v\right\|^2_{L_2(I)}
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$
\begin{aligned}
S &= \int_\Omega \delta v\,\mathrm{Re}(\delta\psi_1\bar\eta_1)dxdt + \int_\Omega \delta v\,\mathrm{Re}(\delta\psi_2\bar\eta_2)dxdt - a_3\int_\Omega \left(\left|\psi_{1\delta}\right|^2 - \left|\psi_1\right|^2\right)\mathrm{Im}(\delta\psi_1\bar\eta_1)dxdt \\
&- a_3\int_\Omega \left(\left|\psi_{2\delta}\right|^2 - \left|\psi_2\right|^2\right)\mathrm{Im}(\delta\psi_2\bar\eta_2)dx - a_3\int_\Omega \left|\delta\psi_1\right|^2 \mathrm{Im}(\psi_1\bar\eta_1)dxdt \\
&- a_3\int_\Omega \left|\delta\psi_2\right|^2 \mathrm{Im}(\psi_2\bar\eta_2)dxdt - 2\int_\Omega \mathrm{Re}(\delta\psi_1\delta\psi_2)dxdt + \left\|\delta\psi_1\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\delta\psi_2\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha\left\|\delta v\right\|^2_{L_2(I)}
\end{aligned}
$$

olarak gösterirsek

$$\delta J_\alpha(v)=\int_0^l\left[\left(\int_0^T \mathrm{Re}(\psi_1\bar{\eta}_1+\psi_2\bar{\eta}_2)dt+2\alpha\left(v(x)-w(x)\right)\right)\delta v(x)\right]dx+S \tag{3.32}$$

biçiminde yazılır.

$$\begin{aligned}|S|\le&\int_\Omega|\delta\psi_1||\eta_1||\delta v|dxdt+\int_\Omega|\delta\psi_2||\eta_2||\delta v|dxdt+a_3\int_\Omega\left(|\psi_{1\delta}|^2-|\psi_1|^2\right)|\delta\psi_1||\eta_1|\,dxdt\\&+a_3\int_\Omega\left(|\psi_{2\delta}|^2-|\psi_2|^2\right)|\delta\psi_2||\eta_2|\,dxdt+a_3\int_\Omega|\delta\psi_1|^2|\psi_1||\eta_1|dxdt+a_3\int_\Omega|\delta\psi_2|^2|\psi_2||\eta_2|dxdt\\&+2\int_\Omega|\delta\psi_1||\delta\psi_2|dxdt+\|\delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)}+\alpha\|\delta v\|^2_{L_2(I)}\\&\le\frac{5}{2}\|\delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)}+\frac{5}{2}\|\delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)}+\alpha\|\delta v\|^2_{L_2(I)}+\frac{1}{2}\int_\Omega|\eta_1|^2|\delta v|^2\,dxdt+\frac{1}{2}\int_\Omega|\eta_2|^2|\delta v|^2\,dxdt\\&+a_3\int_\Omega|\delta\psi_1|^2\left(|\psi_{1\delta}|^2+|\psi_1|^2\right)dxdt+a_3\int_\Omega|\delta\psi_2|^2\left(|\psi_{2\delta}|^2+|\psi_2|^2\right)dxdt+a_3\int_\Omega|\delta\psi_1|^2|\eta_1|^2\,dxdt\\&+a_3\int_\Omega|\delta\psi_2|^2|\eta_2|^2\,dxdt+\frac{1}{2}a_3\int_\Omega|\psi_1|^2|\delta\psi_1|^2\,dxdt+\frac{1}{2}a_3\int_\Omega|\psi_2|^2|\delta\psi_2|^2\,dxdt+\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}|S|\le&\frac{5}{2}\|\delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)}+\frac{5}{2}\|\delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)}+\alpha\|\delta v\|^2_{L_2(I)}+a_3\int_\Omega|\delta\psi_1|^2\left(|\psi_{1\delta}|^2+|\psi_1|^2\right)dxdt+\\&a_3\int_\Omega|\delta\psi_2|^2\left(|\psi_{2\delta}|^2+|\psi_2|^2\right)dxdt+\frac{T}{2}\left(\max_{0\le t\le T}\|\eta_1(.,t)\|^2_{L_\infty(I)}\|\delta v\|^2_{L_2(I)}\right)+\\&\frac{T}{2}\left(\max_{0\le t\le T}\|\eta_2(.,t)\|^2_{L_\infty(I)}\|\delta v\|^2_{L_2(I)}\right)+a_3\int_0^T\|\eta_1(.,t)\|^2_{L_\infty(I)}\|\delta\psi_1\|^2_{L_2(I)}dt+\\&a_3\int_0^T\|\eta_2(.,t)\|^2_{L_\infty(I)}\|\delta\psi_2\|^2_{L_2(I)}dt+\frac{1}{2}a_3\int_0^T\|\psi_1(.,t)\|^2_{L_\infty(I)}\|\delta\psi_1\|^2_{L_2(I)}dt+\\&\frac{1}{2}a_3\int_0^T\|\psi_2(.,t)\|^2_{L_\infty(I)}\|\delta\psi_2\|^2_{L_2(I)}dt\end{aligned} \tag{3.33}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.33) de Kuramsal Temeller Teorem 1.2.1 deki eşitsizliği ve (3.30), (3.31), (2.9), (2.10) değerlendirmelerini ve (3.9) eşitsizliğini kullanırsak

$$|S| \le c_{11} \|\delta v\|^2_{L_\infty(I)}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten de S teriminin $\|\delta v\|_{L_\infty(I)}$ elemanına göre sonsuz küçük olduğunu söyleyebiliriz. Yani,

$$\lim_{\|\delta v\|_{L_\infty(I)} \to 0} \frac{S}{\|\delta v\|_{L_\infty(I)}} = 0$$

olduğundan

$$S = o\left(\|\delta v\|_{L_\infty(I)}\right)$$

yazılır. Böylece (3.32) den

$$\delta J_\alpha(v) = \int_0^l \left[\left(\int_0^T \mathrm{Re}(\psi_1 \bar{\eta}_1 + \psi_2 \bar{\eta}_2) dt + 2\alpha\left(v(x) - w(x)\right) \right) \delta v(x) \right] dx + o\left(\|\delta v\|_{L_\infty(I)}\right)$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlikte fonksiyonelin Frechet anlamında diferansiyellenebilirliğinin tanımını göz önüne alırsak, $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde Frechet diferansiyellenebilir olduğunu ve onun gradyenti için

$$J'_\alpha(v) = \int_0^T \mathrm{Re}(\psi_1 \bar{\eta}_1 + \psi_2 \bar{\eta}_2) d\tau + 2\alpha\left(v(x) - w(x)\right) \qquad (3.34)$$

formülünün geçerli olduğunu kolaylıkla söyleyebiliriz.

Böylece aşağıdaki teoeremi ispat etmiş olduk:

Teorem 3.2.2. Teorem 3.2.1 in şartları sağlansın ve w verilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde Frechet diferansiyellenebilirdir ve onun gradyenti (3.34) formülü ile verilir.

3.3 Varyasyonel Problemin Çözümü İçin Gerek Şart

Bu bölümde gözlem fonksiyonelinin gradyentinin V kümesi üzerinde sürekli olduğu gösterilerek, varyasyonel problemin çözümü için bir gerek şart verilir. Bu amaçla, ilk olarak aşağıdaki lemmayı ispatlayalım:

Lemma 3.3.1. $J'_\alpha(v)$ gradyenti V kümesi üzerinde süreklidir.

İspat: $\|\delta v\|_{L_\infty(I)} \to 0$ olduğunda $\forall v \in V$ için $\|J'_\alpha(v+\delta v)-J'_\alpha(v)\|_{L_1(I)} \to 0$ olduğunu gösterelim. (3.34) formülünü kullanırsak

$$
\begin{aligned}
J'_\alpha(v+\delta v)-J'_\alpha(v) &= \int_0^T \mathrm{Re}(\psi_{1\delta}\bar{\eta}_{1\delta}+\psi_{2\delta}\bar{\eta}_{2\delta})dt + 2\alpha\left(v(x)+\delta v(x)-w(x)\right)- \\
&\int_0^T \mathrm{Re}(\psi_1\bar{\eta}_1+\psi_2\bar{\eta}_2)dt - 2\alpha\left(v(x)-w(x)\right) \\
&= \int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi_{1\delta}\bar{\eta}_{1\delta}-\psi_1\bar{\eta}_1+\psi_{2\delta}\bar{\eta}_{2\delta}-\psi_2\bar{\eta}_2\right)dt + 2\alpha\delta v + \\
&\int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi_{1\delta}(\bar{\eta}_{1\delta}-\bar{\eta}_1)+\psi_1(\bar{\eta}_{1\delta}-\bar{\eta}_1)-\bar{\eta}_{1\delta}\psi_1+\bar{\eta}_1\psi_{1\delta}+\psi_{2\delta}(\bar{\eta}_{2\delta}-\bar{\eta}_2)+\right. \\
&\left.\psi_2(\bar{\eta}_{2\delta}-\bar{\eta}_2)-\bar{\eta}_{2\delta}\psi_2+\bar{\eta}_2\psi_{2\delta}\right)dt + 2\alpha\delta v \\
&= \int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi_{1\delta}\delta\bar{\eta}_1+\psi_1\delta\bar{\eta}_1+\psi_{2\delta}\delta\bar{\eta}_2+\psi_2\delta\bar{\eta}_2-\bar{\eta}_{1\delta}\psi_1\right)dt + \\
&\int_0^T \mathrm{Re}(\bar{\eta}_1\psi_{1\delta}-\bar{\eta}_{2\delta}\psi_2+\bar{\eta}_2\psi_{2\delta})dt + 2\alpha\delta v \\
&= \int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi_{1\delta}\delta\bar{\eta}_1+\psi_{2\delta}\delta\bar{\eta}_2+\psi_1\delta\bar{\eta}_1+\psi_2\delta\bar{\eta}_2-(\bar{\eta}_1+\delta\bar{\eta}_1)\psi_1\right)dt \\
&\int_0^T \mathrm{Re}\left(-(\bar{\eta}_2+\delta\bar{\eta}_2)\psi_2+\bar{\eta}_1\psi_{1\delta}+\bar{\eta}_2\psi_{2\delta}\right)dt + 2\alpha\delta v
\end{aligned}
$$

olup

$$
J'_\alpha(v+\delta v)-J'_\alpha(v) = \int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi_{1\delta}\delta\bar{\eta}_1+\psi_{2\delta}\delta\bar{\eta}_2+\bar{\eta}_1\delta\psi_1+\bar{\eta}_2\delta\psi_2\right)dt + 2\alpha\delta v
$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan

$$\left|J'_\alpha(v+\delta v)-J'_\alpha(v)\right|\le\int_0^T|\psi_{1\delta}||\delta\eta_1|\,dt+\int_0^T|\psi_{2\delta}||\delta\eta_2|\,dt+\int_0^T|\delta\psi_1||\eta_1|\,dt$$
$$+\int_0^T|\delta\psi_2||\eta_2|\,dt+2\alpha\left|\delta v(x)\right| \qquad (3.35)$$

eşitsizliği yazılır.

$\left|J'_\alpha(v+\delta v)-J'_\alpha(v)\right|$ ifadesini değerlendirebilmek için $\delta\eta_1$ ve $\delta\eta_2$ fonksiyonları için bir değerlendirme elde etmeye çalışalım. Bunun için (3.26)-(3.29) probleminde $\eta_k(x,t;v)$ yerine önce $\eta_k(x,t;v+\delta v)=\eta_{k\delta}$ yazılarak elde edilen problemden (3.26)-(3.29) problemi taraf tarafa çıkarılırsa

$$i\frac{\partial\delta\eta_k}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\delta\eta_k}{\partial x^2}+i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\delta\eta_k\right)-a_2(x)\delta\eta_k+(v+\delta v)\delta\eta_k$$
$$=-ia_3\left(2\left|\psi_{k\delta}\right|^2\eta_{k\delta}-\psi_{k\delta}^2\bar{\eta}_{k\delta}\right)+ia_3\left(2\left|\psi_k\right|^2\eta_k-\psi_k^2\bar{\eta}_k\right)- \qquad (3.36)$$
$$\delta v\eta_k+2(-1)^k\left(\delta\psi_1-\delta\psi_2\right)$$

$$\delta\eta_k(x,T)=0 \qquad (3.37)$$

$$\delta\eta_1(0,t)=\delta\eta_1(l,t)=0 \qquad (3.38)$$

$$\frac{\partial\delta\eta_2}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial\delta\eta_2}{\partial x}(l,t)=0 \qquad (3.39)$$

problemi elde edilir. (3.36) denkleminin her iki tarafını $\delta\bar{\eta}_k$ ile çarpıp, $\tilde{\Omega}_t=(0,l)\mathrm{x}(t,T)$ bölgesi üzerinden integralleyelim ve eşitliğin sol tarafındaki 2. terime kısmi integrasyon uygulayalım. Böylece (3.38), (3.39) sınır şartları kullanılırsa

$$\int_{\tilde{\Omega}_t}\left(i\frac{\partial\delta\eta_k}{\partial t}\delta\overline{\eta}_k - a_0\left|\frac{\partial\delta\eta_k}{\partial x}\right|^2 + i\frac{\partial}{\partial x}\big(a_1(x)\delta\eta_k\big)\delta\overline{\eta}_k - a_2(x)\left|\delta\eta_k\right|^2 + (v+\delta v)\left|\delta\eta_k\right|^2\right)dxd\tau$$
$$= \int_{\tilde{\Omega}_t} 2ia_3\left(\eta_k\delta\overline{\eta}_k\delta\overline{\psi}_k\psi_{k\delta} + \eta_k\delta\overline{\eta}_k\delta\psi_k\overline{\psi}_k + \left|\psi_{k\delta}\right|^2\left|\delta\eta_k\right|^2\right)dxd\tau$$
$$-\int_{\tilde{\Omega}_t} ia_3\left(\psi_k(\delta\psi_k)\overline{\eta}_k(\delta\overline{\eta}_k) + \delta\psi_k\overline{\eta}_k\delta\overline{\eta}_k\psi_{k\delta} + (\psi_{k\delta})^2(\delta\overline{\eta}_k)^2\right)dxd\tau$$
$$+\int_{\tilde{\Omega}_t}\left(\delta v(x)\eta_k\delta\overline{\eta}_k\right)dxd\tau + \int_{\tilde{\Omega}_t} 2(-1)^k(\delta\psi_1 - \delta\psi_2)\delta\overline{\eta}_k dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarır ve (3.37) şartını kullanırsak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\left\|\delta\eta_k(.,t)\right\|^2_{L_2(I)} + 4a_3\int_{\tilde{\Omega}_t}\left|\psi_{k\delta}\right|^2\left|\delta\eta_k\right|^2 dxd\tau = 4\left\|\delta\psi_k(.,T)\right\|^2_{L_2(I)} \\
&-\int_{\tilde{\Omega}_t}\left(\frac{\partial}{\partial x}\big(a_1(x)\delta\eta_k\big)\delta\overline{\eta}_k + \frac{\partial}{\partial x}\big(a_1(x)\delta\overline{\eta}_k\big)\delta\eta_k\right)dxd\tau - 4a_3\int_{\tilde{\Omega}_t}\mathrm{Re}\left(\eta_k\delta\overline{\eta}_k\delta\overline{\psi}_k\psi_{k\delta}\right)dxd\tau \\
&-4a_3\int_{\tilde{\Omega}_t}\mathrm{Re}\left(\eta_k\delta\overline{\eta}_k\delta\psi_k\overline{\psi}_k\right)dxd\tau + 2a_3\int_{\tilde{\Omega}_t}\mathrm{Re}\left(\psi_k\delta\psi_k\overline{\eta}_k\delta\overline{\eta}_k\right)dxd\tau \qquad (3.40) \\
&+2a_3\int_{\tilde{\Omega}_t}\mathrm{Re}\left(\delta\psi_k\overline{\eta}_k\delta\overline{\eta}_k\psi_{k\delta}\right)dxd\tau + 2a_3\int_{\tilde{\Omega}_t}\mathrm{Re}\left(\psi^2_{k\delta}(\delta\overline{\eta}_k)^2\right)dxd\tau \\
&+2\int_{\tilde{\Omega}_t}\mathrm{Im}(\delta v\eta_k\delta\overline{\eta}_k)dxd\tau + 4\int_{\tilde{\Omega}_t}(-1)^k\,\mathrm{Im}\left((\delta\psi_1 - \delta\psi_2)\delta\overline{\eta}_k\right)dxd\tau.
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikte

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(a_1(x)\delta\eta_k\big)\delta\overline{\eta}_k + \frac{\partial}{\partial x}\big(a_1(x)\delta\overline{\eta}_k\big)\delta\eta_k = \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\left|\delta\eta_k\right|^2\right) + \frac{da_1}{dx}\left|\delta\eta_k\right|^2$$

olduğunu dikkate alarak

$$\int_{\tilde{\Omega}_t}\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\left|\delta\eta_k(x,t)\right|^2\right)dxd\tau = \int_t^T\left[a_1(x)\left|\delta\eta_k(x,t)\right|^2\Big|_{x=0}^{x=l}\right]d\tau$$

eşitliğinde (2.5) şartını kullanırsak

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\left|\delta\eta_k(x,t)\right|^2\right)dxd\tau = 0$$

olur. Böylece yukarıdaki ifadeleri (3.40) da göz önüne alarak (3.40) ın her iki tarafının mutlak değerini alalım. Bu durumda

$$\|\delta\eta_k(.,t)\|^2_{L_2(I)} + 4a_3\int_{\Omega_t}|\psi_{k\delta}|^2\left|\delta\eta_k\right|^2 dxd\tau \le 4\|\delta\psi_k(.,T)\|^2_{L_2(I)} + \mu_2\int_{\Omega_t}\left|\delta\eta_k\right|^2 dxd\tau$$
$$+4a_3\int_{\Omega_t}|\eta_k||\delta\eta_k||\delta\psi_k||\psi_{k\delta}|dxd\tau + 4a_3\int_{\Omega_t}|\eta_k||\delta\eta_k||\delta\psi_k||\psi_k|dxd\tau$$
$$+2a_3\int_{\Omega_t}|\psi_k||\delta\psi_k||\eta_k||\delta\eta_k|dxd\tau + 2a_3\int_{\Omega_t}|\delta\psi_k||\eta_k||\delta\eta_k||\psi_{k\delta}|\,dxd\tau$$
$$+2a_3\int_{\Omega_t}|\psi_{k\delta}|^2\left|\delta\eta_k\right|^2 dxd\tau + 2\int_{\Omega_t}|\delta v||\eta_k||\delta\eta_k|dxd\tau + 4\int_{\Omega_t}|\delta\psi_1 - \delta\psi_2||\delta\eta_k|dxd\tau.$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $\varepsilon -$Cauchy ile Young eşitsizliklerini uygularsak,

$$\|\delta\eta_k(.,t)\|^2_{L_2(I)} + 2a_3\int_{\Omega_t}|\psi_{k\delta}|^2\left|\delta\eta_k\right|^2 dxd\tau \le 4\|\delta\psi_k(.,T)\|^2_{L_2(I)} + \mu_2\int_{\Omega_t}\left|\delta\eta_k\right|^2 dxd\tau$$
$$+6a_3\int_{\Omega_t}|\eta_k||\delta\psi_k||\delta\eta_k||\psi_{k\delta}|dxd\tau + 6a_3\int_{\Omega_t}|\eta_k||\delta\psi_k||\delta\eta_k||\psi_k|dxd\tau$$
$$+\int_{\Omega_t}|\delta v|^2|\eta_k|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t}\left|\delta\eta_k\right|^2 dxd\tau + 2\int_{\Omega_t}|\delta\psi_1 - \delta\psi_2|^2 dxd\tau + 2\int_{\Omega_t}\left|\delta\eta_k\right|^2 dxd\tau$$
$$\le 4\|\delta\psi_k(.,T)\|^2_{L_2(I)} + (3+\mu_2)\int_{\Omega_t}\left|\delta\eta_k(x,t)\right|^2 dxd\tau + 6a_3\frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_t}\left|\delta\eta_k\right|^2|\psi_{k\delta}|^2 dxd\tau$$
$$+6a_3\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\Omega_t}\left|\eta_k\right|^2|\delta\psi_k|^2 dxd\tau + 3a_3\int_{\Omega_t}\left|\eta_k\right|^2|\delta\psi_k|^2 dxd\tau + 3a_3\int_{\Omega_t}\left|\delta\eta_k\right|^2|\psi_k|^2 dxd\tau$$
$$+\int_{\Omega_t}|\delta v|^2|\eta_k|^2 dxd\tau + 2\int_{\Omega_t}|\delta\psi_1 - \delta\psi_2|^2 dxd\tau$$

olup burada $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$ alırsak

$$\|\delta\eta_k(.,t)\|^2_{L_2(I)} + a_3\int_{\Omega_t}|\psi_{k\delta}|^2\left|\delta\eta_k\right|^2 dxd\tau \le 4\|\delta\psi_k(.,T)\|^2_{L_2(I)} + (3+\mu_2)\int_{\Omega_t}\left|\delta\eta_k\right|^2 dxd\tau$$
$$+12a_3\int_{\Omega_t}\left|\eta_k\right|^2|\delta\psi_k|^2 dxd\tau + 3a_3\int_{\Omega_t}\left|\delta\eta_k\right|^2|\psi_k|^2 dxd\tau + +\int_{\Omega_t}|\delta v|^2|\eta_k|^2 dxd\tau + 2\int_{\Omega_t}|\delta\psi_1 - \delta\psi_2|^2 dxd\tau$$

eşitsizliği bulunur. Böylece yukarıdaki eşitsizlikten

$$\begin{aligned}
&\left\|\delta\eta_k(.,t)\right\|^2_{L_2(I)} + a_3\int\limits_{\Omega_t}\left|\psi_{k\delta}\right|^2\left|\delta\eta_k\right|^2 dxd\tau \le 4\left\|\delta\psi_k(.,T)\right\|^2_{L_2(I)} + \\
&(3+\mu_2)\int_t^T\left\|\delta\eta_k(.,\tau)\right\|^2_{L_2(I)}d\tau + 12a_3\int_t^T\left\|\eta_k(.,\tau)\right\|^2_{L_\infty(I)}\left\|\delta\psi_k(.,\tau)\right\|^2_{L_2(I)}d\tau + \\
&3a_3\int_t^T\left\|\psi_k(.,\tau)\right\|^2_{L_\infty(I)}\left\|\delta\eta_k(.,\tau)\right\|^2_{L_2(I)}d\tau + \left\|\delta v\right\|^2_{L_\infty(I)}\int_t^T\left\|\eta_k(.,\tau)\right\|^2_{L_2(I)}d\tau + \\
&4\int_0^T\left\|\delta\psi_1(.,t)\right\|^2_{L_2(I)}dt + 4\int_0^T\left\|\delta\psi_2(.,t)\right\|^2_{L_2(I)}dt
\end{aligned} \tag{3.41}$$

eşitsizliği yazılır. (3.41) eşitsizliğinde Kuramsal Temeller Teorem 1.2.1 deki eşitsizliği, (3.30), (3.31), (2.9), (2.10) ve (3.9) değerlendirmeleri kullanılırsa

$$\left\|\delta\eta_k(.,t)\right\|^2_{L_2(I)} + a_3\int\limits_{\Omega_t}\left|\psi_{k\delta}\right|^2\left|\delta\eta_k\right|^2 dxd\tau \le c_{12}\left\|\delta v\right\|^2_{L_\infty(I)} + c_{13}\int_t^T\left\|\delta\eta_k(.,\tau)\right\|^2_{L_2(I)}d\tau \tag{3.42}$$

olup burada $a_3 > 0$ olduğunu dikkate alırsak

$$\left\|\delta\eta_k(.,t)\right\|^2_{L_2(I)} \le c_{12}\left\|\delta v\right\|^2_{L_\infty(I)} + c_{13}\int_t^T\left\|\delta\eta_k(.,\tau)\right\|^2_{L_2(I)}d\tau \tag{3.43}$$

eşitsizliği yazılır. (3.43) de Gronwall lemmasını uygularsak $\forall\ t\in[0,T],\ \ k=1,2$ için

$$\left\|\delta\eta_k(.,t)\right\|^2_{L_2(I)} \le c_{14}\left\|\delta v\right\|^2_{L_\infty(I)} \tag{3.44}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.44) ü (3.42) de dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\left\|\delta\eta_k(.,t)\right\|^2_{L_2(I)} + a_3\int\limits_{\Omega_t}\left|\psi_{k\delta}\right|^2\left|\delta\eta_k\right|^2 dxd\tau \le c_{15}\left\|\delta v\right\|^2_{L_\infty(I)}.$$

(3.35) eşitsizliğini dikkate alırsak

$$\left|J'_\alpha(v+\delta v)-J'_\alpha(v)\right|^2 \le 5\left(\int_0^T|\psi_{1\delta}||\delta\eta_1|\,dt\right)^2+5\left(\int_0^T|\psi_{2\delta}||\delta\eta_2|\,dt\right)^2+5\left(\int_0^T|\delta\psi_1||\eta_1|\,dt\right)^2$$
$$+5\left(\int_0^T|\delta\psi_2||\eta_2|\,dt\right)^2+20\alpha^2\left|\delta v(x)\right|^2$$

olup

$$\begin{aligned}\int_0^l\left|J'_\alpha(v+\delta v)-J'_\alpha(v)\right|^2 &\le 5T\int_0^l\int_0^T|\psi_{1\delta}|^2|\delta\eta_1|^2\,dxdt+5T\int_0^l\int_0^T|\psi_{2\delta}|^2|\delta\eta_2|^2\,dxdt\\ &+5T\int_0^l\int_0^T|\delta\psi_1|^2|\eta_1|^2\,dxdt+5T\int_0^l\int_0^T|\delta\psi_2|^2|\eta_2|^2\,dxdt\\ &+20\alpha^2\int_0^l|\delta v(x)|^2dx\\ &\le 5T\,\|\psi_{1\delta}\|^2_{L_\infty(\Omega)}\int_0^T\|\delta\eta_1(.,t)\|^2_{L_2(I))}dt+5T\,\|\psi_{2\delta}\|^2_{L_\infty(\Omega)}\int_0^T\|\delta\eta_2(.,t)\|^2_{L_2(I))}dt\\ &+5T\,\|\eta_1\|^2_{L_\infty(\Omega)}\int_0^T\|\delta\psi_1(.,t)\|^2_{L_2(I))}dt+5T\,\|\eta_2\|^2_{L_\infty(\Omega)}\int_0^T\|\delta\psi_2(.,t)\|^2_{L_2(I))}dt\\ &+20\alpha^2\,\|\delta v\|^2_{L_2(I)}\end{aligned} \tag{3.45}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.45) de (2.9), (2.10) değerlendirmeleri ve (3.44) eşitsizliği, Kuramsal temeller Teorem 1.2.1 eşitsizliği ile (3.30), (3.31) değerlendirmelerini $\forall\ v\in V$ için kullanırsak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left\|J'_\alpha(v+\delta v)-J'_\alpha(v)\right\|^2_{L_2(I)}\le c_{16}\,\|\delta v\|^2_{L_\infty(I)}$$

Burada $c_{16}>0$ sabiti δv den bağımsızdır. Bu eşitsizlikten de

$$\|\delta v\|^2_{L_\infty(I)}\to 0 \quad \text{olduğunda} \quad \left\|J'_\alpha(v+\delta v)-J'_\alpha(v)\right\|^2_{L_2(I)}\to 0$$

olup

$$\|\delta v\|^2_{L_\infty(I)}\to 0 \quad \text{olduğunda} \quad \left|J'_\alpha(v+\delta v)-J'_\alpha(v)\right|\to 0$$

bağıntısı yazılır. Yani $J'_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde süreklidir.

Teorem 3.3.1. Teorem 3.2.2 ve Lemma 3.3.1 sağlansın ve $v^* = v^*(x)$ fonksiyonu varyasyonel problemin bir çözümü olsun. Bu durumda $\forall\, v \in V$ için

$$\int_0^l \left[\left(\int_0^T \mathrm{Re}(\psi_1^* \bar{\eta}_1^* + \psi_2^*(x,t)\bar{\eta}_2^*(x,t))dt + 2\alpha\left(v^*(x) - w(x)\right) \right) \right] \left(v(x) - v^*(x)\right) dx \le 0$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k = 1,2$ için $\psi_k^*(x,t) = \psi_k^*(x,t;v^*)$ ve $\eta_k^*(x,t) = \eta_k^*(x,t;v^*)$ fonksiyonları sırasıyla (2.13)–(2.15) ve (3.26), (3.29) problemlerinin $v^* \in V$ elemanına karşılık gelen çözümleridir.

İspat: (2.12) formülünden görüldüğü gibi $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli $J_0(v)$ fonksiyoneli ile $\alpha\|v-w\|^2_{L_2(I)}$ fonksiyonelinin toplamından oluşmaktadır. Lemma 3.1.1 den $J_0(v)$ fonksiyonelinin sürekli olduğu açıktır. Ayrıca $\alpha\|v-w\|^2_{L_2(I)}$ fonksiyonelinin sürekli bir fonksiyonel olduğunu dikkate alırsak $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli bir fonksiyonel olduğunu kolaylıkla söyleyebiliriz.

Ayrıca Lemma 3.3.1 den $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin gradyenti olan $J'_\alpha(v)$ fonksiyonelinin de konveks V kümesi üzerinde sürekli olduğu görülür. Dolayısıyla Kuramsal Temellerdeki Teorem 1.2.4 göz önünde bulundurularak $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesindeki v^* elemanında minimum değere sahipse, $\forall\, v \in V$ için

$$\int_0^l \left[\left(\int_0^T \mathrm{Re}(\psi_1^* \bar{\eta}_1^* + \psi_2^*(x,t)\bar{\eta}_2^*(x,t))dt + 2\alpha\left(v^*(x) - w(x)\right) \right) \right] \left(v(x) - v^*(x)\right) dx \le 0$$

eşitsizliği yazılır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Schrödinger denklemi için ters problemlerin varyasyonel metotlarla çözümü daha önce [3-5, 8-9, 16-23, 29, 37] çalışmalarında incelenmiştir. Bu çalışmalarda genellikle lineer Schrödinger denklemleri göz önüne alınmıştır. Ancak [3-5, 19-20, 22-23, 29, 37] çalışmalarında lineer olmayan Schrödinger denklemleri için ters problemler incelenmiştir. [3, 5, 19-20, 22-23, 29, 37] çalışmalarında, (1.1) deki $r_j,\ j=0,1,2$ katsayıları $r_2(x,t,\psi)=r_2(x,t),\ r_1(x,t,\psi)=0$ ve $r_0(x,t,\psi)=r_0(x,t,\psi)$ olduğunda denklem (1.1) den elde edilen lineer olmayan Schrödinger denkleminin farklı şartlar altında çözümü varyasyonel metotlarla araştırılmıştır. Ancak [4] çalışmasında, (1.1) deki $r_j,\ j=0,1,2$ katsayıları $r_2(x,t,\psi)=r_2(x,t),\ r_1(x,t,\psi)=r_1(\mathrm{x,t})$ ve $r_0(x,t,\psi)=r_0(x,t,\psi)$ biçiminde olduğunda (1.1) den elde edilen bir boyutlu lineer olmayan bir Schrödinger denklemi için ters problemin çözümü varyasyonel olarak çalışılmıştır.

Bu çalışmada ise biz, yukarıda bahsedilen çalışmalardan daha genel olarak farklı katsayılar ve farklı şartlar altında lineer olmayan Schrödinger denklemi için bir ters problemin çözümünü varyasyonel olarak araştırdık. Bu amaçla ters problem öncelikle bir gözlem fonksiyoneli kullanılarak varyasyonel probleme dönüştürülmüştür. Varyasyonel problemin çözümünün var ve tek olduğu ispatlanmıştır. Varyasyonel problem için Lagrange fonksiyoneli yardımıyla bir eşlenik problem oluşturularak gözlem fonksiyonelinin Frechet anlamında diferansiyellenebilir olduğu gösterilmiştir ve fonksiyonelin gradyenti elde edilmiştir. Son olarak, gözlem fonksiyonelinin gradyentinin sürekli bir fonksiyonel olduğu gösterilerek çözüm için varyasyonel eşitsizlik formunda bir gerek şart verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Adams, R.A., (1975). Sobolev Spaces. Academic Press, New York.

[2] Aksoy, N.Y., (2009). Lineer Olmayan Schödinger Denkleminin Sınırsız Katsayıyla Optimal Kontrol Problemleri ve Onların Sonlu Fark Yaklaşımı. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

[3] Aksoy, N.Y., (2016). The variational formulation of an inverse problem for multidimensional nonlinear time dependent Schrödinger equation. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 559-571.

[4] Aksoy, N.Y., (2017). Variational method for the solution of an inverse problem. Journal of Computational and Applied Mathematics, 312, 82-93.

[5] Aksoy, N.Y., Yıldız, B., Yetişkin, H., (2012). Variational problem with complex coefficient of nonlinear Schrödinger equation. Proceedings of the Mathematical Sciences , 122(3), 469-484.

[6] Aksoy, N.Y., Koçak, Y., Ozeroğlu, Y., (2016). On the solvability of initial boundary value problems for nonlinear time dependent Schrödinger equations. Quaestiones Mathematicae, 39(6), 751-771.

[7] Baundoin, L., Kavian, O., Puel, J.P., (2005). Regularity for a Schrödinger equation with singular potential and application to bilinear optimal control. Journal Differential Equations, 216, 188-222.

[8] Butkovskiy, A.G., Samoilenko, Yu.I., (1990). Control of quantum mechanical processes and systems. Mathematics and its Applications (Soviet series), 56. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.

[9] Cardoulis, L., Cristofol, M., Gaitan, P., (2008). Inverse problem for the Schrödinger operator in an unbounded strip. Journal of Physics Conference Series, 124(1).

[10] Düzgün, F.G., (2014). Bir Sınıf Doğrusal Olmayan Difüzyon Denklemlerinin İncelenmesi. Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

[11] Goebel, M., (1979). On existence of optimal control. Math.Nachr., 93, 67-73.

[12] Hashimoto, H., Ono, H., (1972). Nonlinear modulation of gravity waves. Journal of the Physical Society of Japan, 33, 805-811.

[13] Hunter, J.K., Nachtergaele, B., (2000). Applied Analysis, California.

[14] https://www.math.upenn.edu/~brweber/courses/2011/math361/Notes/YMandH.pdf

[15] https: // www.youtube.com/watch?v=2UabVmRCgv0, (28.08.2014).

[16] Iskenderov, A.D., (1984). On variational formulations of multidimensional inverse problems of mathematical physics. Doklady Akademii Nauk SSSR, 274(3), 531-533.

[17] Iskenderov, A.D., (2005). Identification problem for the time dependent Schrödinger type equation. Proceedings of the Lankaran State Universty , Natural Sciences Series, Lankaran, 31-53.

[18] Iskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., (1989). A variational method for solving the inverse problem of determining the quantum mechanical potential, Soviet Mathematics Doklady. (English Trans). American Mathematical Society, 38, 637-641.

[19] Iskenderov, A.D., Yagubov, G.Y., (2007). Optimal control problem with unbounded potential for multidimensional, nonlinear and nonstationary Schrödinger equation. Proceedings at the Lankaran State Universty. Natural Sciences Series, Lankaran, 3-56.

[20] Iskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., (2008). Inverse problem of determining the quantum potential in the nonstationary Schrödinger with the complex coefficient in the nonlinear parts equation. Inverse Problems Modeling and Simulation Abstracts, (Fethiye) Turkey.

[21] Iskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., Ibrahimov, N.S., Aksoy, Y.N., (2014). Variation formulation of the inverse problem of determining the complex coefficient of equation of quasioptics. Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications, 2(2), 102-121.

[22] Iskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., Ibrahimov, N.S., Musayeva, M.A., (2012). On a problem of identification of nonlinear time dependent Schrödinger equation with observed overall region. XX. International Conference of problems of decision making under uncertainties (PDMU-2012), Taras Shevchenko National University of Kyix, Ukraine, 159-161.

[23] Iskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., Musayeva, M.A., (2012). The idendification of quantum potentials. Çaşoğlu, Bakü.

[24] Karakoç, S., (2018). Karesel integrallenebilir kompleks potansiyelli lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin çözümü. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

[25] Kelley, P.L., (1965). Self-focusing of optical beams. Pyhsical Review Letters, 15, 1005-1008.

[26] Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V., (1975). Fonksiyonlar Teorisinin ve fonksiyonel analizin elemanları. Nauka , 624, Moskow (Rusça).

[27] Ladyzenskaja, O.A., Solonnikov, V.A., Ural'ceva, N.N., (1967). Linear and Quasilinear Equations Parabolic Type. Nauka, 736, Moskow (Rusça).

[28] Ladyzenskaja, O.A., Solonnikov, V.A., Ural'ceva, N.N., (1968). Linear and Quasilinear Equations Parabolic Type. American Mathematical Society, 646, ABD.(İng).

[29] Mahmudov, N.M., (2010). On a optimal control problem for the Schrödinger equation with the real coefficient. Izv. VUZOV, 11, 31-40.

[30] Ravindran, R., Prasad, P., (1979). A mathematical analysis of nonlinear waves in a fluid-filled viscoelastic tube. Acta Mechanica, 31, 253-280.

[31] Schimizu, K., Ichikawa, Y.H., (1972). Automodulation of Ion oscillation modes in plasma. Journals Physical Society Japan, 33, 789-792.

[32] Simon, J., (1987). Compact sets in the $L^p(0,T;B)$. Annali di Matematica Pura ed Applicata, (4)146, 65-96.

[33] Stewartson, K., Stuart, J.T., (1971). A nonlinear instability theory for a wave system in plane poiseuille flow. Journal of Fluid Mechanic, 48(3), 529-545.

[34] Talanov, V.I., (1965). Self-focusing of wave beams nonlinear media, Soviet Physics. Journal of Experimantal and Theoretical Letters 2, 138-141.

[35] Vasilyev, F.P., (1981). Ekstramal problemlerin çözüm metotları. Nauka, 400, Moskova (Rusça)

[36] Vorontsov, M.A., Shmalgauzen, V.I., (1985). The principles of adaptive optics . Izdatel'stvo Nauka, Moskow (Russian).

[37] Yagubov, G.Ya., Musayeva, M.A., (1997). On the identification problem for nonlinear Schrödinger equation. Differenisial'nye Uravneniya, 3, 1691-1698.

[38] Yıldız, A., Köklü, K.Ö., (2005). Reel Analiz Kitabı. Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.

[39] Yosida, K., (1980). Functional Analysis. Springer Verlag, 624, New York.

[40] Zeidler, E., (1995). Applied Functional Analysis. Main Principles and Their Applications, Springer Verlag, New York.

[41] Zengin, M., (2017). Yüklü parçacıkların lineer ve homojen olmayan ortamda hareketinin optimal kontrolü. Yüksek Lisans tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

[42] Zhuravlev, V.M., (1996). Models of nonlinear wave processes that allow for soliton solutions. Journal of Experimantal and Theoretical Physics, 83(6), 1235-1245.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Muhammed Emin DADAŞ
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Horasan / 28.10.1990
Yabancı Dili	:	İngilizce
İletişim (e-posta)	:	emin_dad@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Patnos Lisesi
Lisans	:	Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2009-2013)
Yüksek Lisans	:	Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Patnos Özel Murat Özel Öğretim Kursu (2016-…)