T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

PADOVAN $p-$CİRCULANT VE PADOVAN $p-$HURWİTZ DİZİLERİ

Güzel MUTLUGÜNEŞ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ömür DEVECİ

EYLÜL-2019
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

PADOVAN p – CİRCULANT VE PADOVAN p – HURWİTZ DİZİLERİ

Güzel MUTLUGÜNEŞ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ömür DEVECİ

Bu tez çalışması 2017-FM-63 numaralı proje ile Kafkas Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü tarafından desteklenmiştir.

EYLÜL-2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Güzel MUTLUGÜNEŞ'in Prof. Dr. Ömür DEVECİ danışmanlığında Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı "Padovan p-Circulant Ve Padovan p-Hurwitz Dizileri" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy . . birliği . .ile kabul edilmiştir.

20 / 09 / 2019

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Ömür DEVECİ	
Üye	: Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK	
Üye	: Dr. öğr. Üyesi Sait TAŞ	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Güzel Mutlugüneş
20/09/2019

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

PADOVAN $p-$CİRCULANT VE PADOVAN $p-$HURWİTZ DİZİLERİ

Güzel MUTLUGÜNEŞ

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ömür DEVECİ

Bu tezde, Padovan p-circulant ve Padovan p-Hurwitz dizileri tanımlanmıştır. Tanımlanan dizilerin Binet formülleri, permanental, determinantal, üstel ve toplamsal temsilleri ve sonlu toplamları gibi çeşitli özellikleri verilmiştir. Daha sonra, tanımlanan dizilerin m modülüne göre periyotları belirlenmiş ve bu dizilerin üreteç matrisleri m modülüne göre indirgenerek bu matrislerin kuvvetleri yardımıyla devirli gruplar üretilmiştir. Üretilen devirli grupların mertebeleri ve dizilerin periyotları arasında bağıntılar elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen bulguların uygulaması olarak, Padovan p-circulant dizisi Q_{2^m} genelleştirilmiş quaternion grupta ve Padovan p-Hurwitz dizisi ise SD_{2^n} semidihedral grupta incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Padovan p- Circulant Dizisi, Padovan p- Hurwitz Dizisi, Circulant Matrisi, Hurwitz Matrisi, Grup, Periyot.

2019, 60 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

PADOVAN $p-$CIRCULANT AND PADOVAN $p-$HURWITZ SEQUENCES

GÜZEL MUTLUGÜNEŞ

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ömür DEVECİ

In this thesis, Padovan p-circulant and Padovan p-Hurwitz sequences were identified. Miscellaneous properties of defined sequences such as Binet formulas, permanent, determinative, exponential and additive representations and finite totals were given. Later, the periods of the defined sequences were determined according to the m modulo and cyclic groups were produced with the help of the force of these matrices by reducing according to the m modulo the generator matrices of this sequences. The relations between the order of the cyclic groups produced and the periods of the sequences were obtained. Also, Padovan p-circulant sequence were examined in the Q_{2^m} generalized quaternion group and Padovan p-Hurwitz sequence were also examined in the SD_{2^n} semidihedral group as applications of the result obtained.

Key Words: Padovan p-Circulant Sequence, Padovan p-Hurwitz Sequence, Circulant Matrix, Hurwitz Matrix, Group, Period.

2019, 60 pages

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır.

Tez konumu belirleyen, çalışmalarım boyunca engin tecrübesiyle bana yol gösteren, vaktini ve bigisini benden esirgemeyen, kendimi geliştirmeye yönelik fırsat sunan değerli hocam Prof. Dr. Ömür DEVECİ'ye şükranlarımı sunarım.

Tezimin hazırlanması sırasında benden hiçbir yardımı esirgemeyen Yeşim Aküzüm'e ve Özgür Erdağ'a teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatımın her alanında olduğu gibi, tez çalışmamı hazırlarken de her aşamada bana yardımcı olan, karşılaştığım bütün zorlukları kolaylaştıran, eşime ve beni en iyi şekilde yetiştiren, bügüne kadar hiçbir desteğini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Güzel MUTLUGÜNEŞ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

e	:	Grubun birim elemanı
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
G	:	Grup
$\lvert G\rvert$	:	Grubun mertebesi
$H \leq G$	:	H, G nin alt grubu
$(R,+,\cdot)$	:	Halka
$\det A$	:	A matrisinin determinantı
$per(A)$	:	A matrisinin permanenti
$M \circ K$	:	M ve K matrislerinin Hadamard çarpımı
SD_{2^n}	:	Semidihedral grup
Q_{2^m}	:	Quaternion grup
C_n	:	Circulant matrisi
H_n	:	Hurwitz matrisi
$K(k_1,k_2,\ldots,k_v)$	:	$v\times v$ tipli Companion matrisi
$\{P(n)\}$	:	Padovan dizisi
$Pap(n+p+2)$	:	Padovan p -sayısı
M	:	Padovan p -matrisi
$\{Pap(n)\}$	:	Genelleştirilmiş Padovan $p-$ dizisi
$Pap(G;x_1,x_2,\ldots,x_p)$	:	Padovan $p-$ orbiti
$LPap(G;x_1,x_2,\ldots,x_p)$	:	Padovan p -orbitinin periyot uzunluğu
x_{n+p+3}	:	Padovan p -circulant sayısı

C_p	:	Padovan p -circulant matrisi
a_{n+p+2}	:	Padovan p -Hurwitz sayısı
$M\left[m_{ij}\right]_{(p+2)\times(p+2)}$	:	Padovan p -Hurwitz matrisi
$\{a_n\}$	:	Padovan p- Hurwitz dizisi
$P_{h-p}\left(G;x_0,x_1,\ldots,x_{j-1}\right)$	:	Padovan p- Hurwitz orbiti
$\{x_n\}$	:	Padovan p- circulant dizisi
$LP_{c-p}\left(G;x_1,x_2,\ldots,x_j\right)$	:	Padovan p- circulant orbitinin periyot uzunluğu

1. GİRİŞ

Disiplinler arası ilişki noktasında indirgemeli dizilere sıkça rastlanmaktadır. Bu tür çalışmalara örnek olarak [1, 5, 20, 32, 35] deki bilimsel çıktıları verilebilir.

Birçok bilim insanı tarafından cebirsel anlamda indirgemeli dizilerin üreteç matrisi ve üreteç fonksiyonunu kullanarak bu dizilerin Binet formülü, üstel, permanental ve toplamsal temsilleri gibi çeşitli yapısal özelliklerini elde etmiştir ve bu tür çalışmalar hala güncelliğini korumaktadır. Bu çalışmalara örnek olarak [6, 13, 12, 16, 15, 10, 11, 20, 21, 22, 23, 30, 33, 39, 40] deki çalışmalar verilebilir.

İndirgemeli diziler, cebirsel yapılara ilk olarak Wall'ın [41] deki çalışması ile taşınmıştır. Wall bu çalışmasında devirli gruplarda klasik Fibonacci dizisini incelemiştir. Daha sonra Wilcox [42] deki çalışmasıyla teoriyi abelyen (değişmeli) gruplara genişletmiştir. Sonraki süreçte, konsept farklı indirgemeli diziler ve farklı cebirsel yapılara taşınmıştır [3, 7, 14,12,31, 34, 36].

Bu çalışmada, Padovan p-circulant dizisini ve Padovan p-Hurwitz sayıları tanımlanmış, çeşitli özellikleri belirlenmiş ve bu diziler gruplara taşınmıştır. Bu anlamda;

Ipek, Deveci, ve Shannon, [26] daki çalışmalarında Padovan p-dizisinin karakteristik polinomu üzerinden circulant matrisi ve bu matris yardımıyla da Padovan p-circulant dizisini tanımlamışlardır. Ayrıca tanımlanan bu dizi için Binet formülü, permanental, determinantal, üstel ve toplamsal temsilleri ve sonlu toplam gibi çeşitli özellikleri belirlemişlerdir.

Deveci, Ipek ve Doğan, [19] daki çalışmalarında Padovan p-Hurwitz sayılarını tanımlamışlardır ve tanımlanan bu sayılar için Binet formülü, permanental, determinantal, üstel ve toplamsal temsilleri ve sonlu toplamı gibi çeşitli özellikleri belirlemişlerdir.

Ipek ve Deveci [25] deki çalışmalarında Padovan p-circulant dizisinin m modülüne göre periyotlarını belirlemişlerdir. Ayrıca Padovan p-circulant dizisini Q_{2^m} genelleştirilmiş quaternion grubunda incelemiş ve periyot uzunluklarını hesaplamışlardır.

Ipek ve Deveci [18] çalışmalarında Padovan p-Hurwitz dizisinin m modülüne göre periyotlarını belirlemişlerdir. Daha sonra Padovan p-Hurwitz dizisinin üreteç matrisi olan Padovan p-Hurwitz matrisini göz önüne almışlardır. Böylece bu matris üreteç matris olarak seçilip devirli gruplar elde edilmiştir. Ayrıca Padovan p-Hurwitz dizisini SD_{2^n} semidihedral grubunda incelemiş ve periyot uzunluklarını hesaplamışlardır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Kuramsal Temeller

2.1.1 Cebirsel Yapılar

<u>*Tanım 2.1.1.1:*</u> K bir küme olsun. $K \times K$ dan K ya tanımlı

$$\circ : K \times K \to K, (x, y) \to x \circ y$$

fonksiyonuna K kümesi üzerinde tanımlı bir ikili işlem denir. Bu işlemde tanımlı K kümesine cebirsel yapı denir ve $(K, \circ)$ şeklinde gösterilir.

<u>*Tanım 2.1.1.2:*</u> $G \neq \emptyset$ bir küme ve $\circ$, G üzerinde bir ikili işlem olsun. Buna göre eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(G, \circ)$ cebirsel yapısına (veya G kümesine $\circ$ işemine göre) bir grup denir.

i. $\forall a, b \in G$ için $a \circ b \in G$ (Kapalılık şartı)

ii. $\forall a, b, c \in G$ için $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (Birleşme özelliği)

iii. $\forall a \in G$ için $a \circ e = e \circ a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır (Birim elemanın varlığı)

iv. G kümesindeki her bir a için e, G nin birim elemanı olmak üzere

$a \circ a' = a' \circ a = e$

olacak şekilde $a' \in G$ vardır (Ters elemanın varlığı).

<u>*Tanım 2.1.1.3:*</u> $(G, \circ)$ cebirsel yapısı Kapalılık ve Birleşme özelliklerine sahipse G ye $\circ$ ikili işlemine göre bir yarı grup denir.

<u>*Tanım 2.1.1.4:*</u> $(G, \circ)$ cebirsel yapısı bir grup olsun. Eğer $\forall a, b \in G$ için $a \circ b = b \circ a$ oluyor ise bu gruba değişmeli (abelyen grubu) grup denir.

Teorem 2.1.1.1: $(G,\circ)$ bir grup olsun. Buna göre

i. G nin birimi tektir.

ii. G nin her elemanının tersi tektir.

iii. $a \in G$ için $a \circ a = a$ ise $a = e$ dir.

iv. G grubunda soldan ve sağdan kısaltma kuralları geçerlidir. Yani $a,b,c \in G$ için

$$a \circ b = a \circ c \text{ ise } a = c \text{ (soldan kısaltma kuralı)}$$

$$b \circ a = c \circ a \text{ ise } b = c \text{ (sağdan kısaltma kuralı)}$$

v. $a,b \in G$ için $a \circ x$ ve $y \circ a = b$ denklemlerinin G deki işlemleri tektir.

vi. $a \in G$ için $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$ dır [38].

Tanım 2.1.1.5: $(G,\circ)$ cebirsel yapısının eleman sayısı sonlu ise G nin eleman sayısı $|G|$ veya $\circ(G)$ ile gösterilir. $(G,\circ)$ bir sonlu grup ve $|G| = n$ ise G ye n. mertebeden bir grup denir.

Tanım 2.1.1.6: $(G,\circ)$ cebirsel yapısı bir grup ve $\varnothing \neq H \subseteq G$ olsun. H alt kümesi “$\circ$” işlemine göre bir grup oluyor ise H ye G nin alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.1.1: Çift tam sayıların $2\mathbb{Z}$ kümesi toplama işlemine göre $(\mathbb{Z},+)$ grubunun bir alt grubudur. Ancak tek tamsayıların $2\mathbb{Z}+1$ kümesi toplamaya göre $(\mathbb{Z},+)$ grubunun alt grubu değildir. Çünkü tek tam sayının toplamı bir çift tamsayının toplamı olup $2\mathbb{Z}+1$ kapalı değildir [8].

Teorem 2.1.1.2 (Lagrange Teoremi): $(G,\circ)$ cebirsel yapısı bir sonlu grup olmak üzere $H \leq G$ olsun. O halde H ın mertebesi G nin mertebesini böler. Yani $\dfrac{\circ(H)}{\circ(G)}$ dir [38].

Tanım 2.1.1.7: $(G,\circ)$ cebirsel yapısı bir grup ve $\varnothing \neq A \subseteq G$ olsun. G grubunun A yı içeren bütün alt gruplarının ailesinin kesişimini $< A >$ ile gösterelim. O halde $< A >$, G nin bir alt grubudur. Bu alt grup A yı içeren en küçük alt grubu oluşturur ve A nın ürettiği alt grup olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.1.8: G bir grup olmak üzere $a = \{a^n : n \in Z\}$ alt grubuna G nin a elemanı tarafından üretilen devirli alt grubu denir ve $\langle a \rangle$ ile gösterilir.

Yani,

$$a = \{a^n : n \in Z\} = H$$

dir.

Buradan hareketle devirli grup şu şekilde de tanımlanabilir:

G bir grup olmak üzere G de $G = \{a^n : n \in Z\}$ olacak şekilde bir a elamanı varsa o zaman G grubuna devirli grup denir. Böylece bir a elamanına G nin üreteci denir ve $G = \langle a \rangle$ şeklinde gösterilir [38].

Tanım 2.1.1.9: G bir grup ve $a \in G$ olsun. a nın ürettiği $\langle a \rangle$ devirli grubunun mertebesine a elemanının mertebesi denir ve $o(a)$ ile gösterilir [9].

Teorem 2.1.1.3: Her devirli grup değişmelidir [38].

Teorem 2.1.1.4: Bir devirli grubun her alt grubu da devirlidir [38].

Teorem 2.1.1.5: $G=\langle a\rangle$ ve $o(G)=n$ olan bir devirli grup olsun. O takdirde G nin a^k tarafından üretilmesi için yani $G=\langle a^k\rangle$ olması için gerek ve yeter şart k ile n nin aralarında relatif asal yani $(k,n)=1$ olmasıdır [38].

Tanım 2.1.1.10: G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. Eğer G nin herhangi bir elemanı S nin sonlu sayıdaki elemanlarının ve bu elemanların terslerinin bir çarpımı olarak tek türlü yazılabiliyorsa G grubuna S kümesi üzerinde serbesttir denir [27].

Tanım 2.1.1.11: X bir küme; $F(X)$, X üzerinde serbest grup ve $R\subseteq F(X)$ olsun. $G=\langle X:R\rangle$ ye G grubunun serbest veya basit takdimi denir. Burada X kümesine tanımlayıcı gerenler kümesi , $r\in R$ için $r=e$ olacak şekildeki denklemlerin kümesine ise tanımlayıcı bağıntılar kümesi ve r elemanlarına da bağıntılar denir.
Hem X hem de R sonlu kümeler olmak üzere bir G grubu $\langle X,R\rangle$ şeklinde takdim edilirse bu gruba sonlu takdim edilmiş grup denir [27].

Tanım 2.1.1.12: $G=\langle X:R\rangle$ ve $H=\langle Y:S\rangle$ olmak üzere $G\times H$ direkt çarpımı, $[X,Y]=\{[x,y]:x\in X, y\in Y\}$

$$G\times H=\langle X,Y:R,S,[R,S]\rangle$$

şeklinde tanımlanır [27].

Tanım 2.1.1.13: G , j -gerenli bir grup olmak üzere

$$X=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_j)\in G\times G\times\cdots\times G \,\middle|\, \langle\{x_1,x_2,\ldots,x_j\}\rangle=G\right\}$$

eşitliği verilsin. O zaman $(x_1,x_2,\ldots,x_j)$ ye G nin bir geren j -lisi denir.

Tanım 2.1.1.14: $(G,*)$ ve $(H,\circ)$ iki grup olmak üzere $\varphi:G\to H$ dönüşümü verilsin. Eğer $\forall x,y\in G$ için

$$\varphi(x*y)=\varphi(x)\circ\varphi(y)$$

şartını sağlıyorsa φ ye bir grup homomorfizmi ya da kısaca bir homomorfizm denir.

<u>*Tanım 2.1.1.15:*</u> $\varphi : G \to H$, örten ve $1-1$ bir grup homomorfizmi ise φ ye bir grup izomorfizmi denir ve $G \cong H$ şeklinde gösterilir.

<u>*Tanım 2.1.1.16*</u>*:* $m \geq 3$ için Q_{2^m} quaternion grubu

$$Q_{2^m} = \langle x, y : x^{2^{m-1}} = e, y^2 = x^{2^{m-2}}, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$$

şeklinde takdim edilir.

<u>*Tanım 2.1.1.17:*</u> Her $n \geq 4$ için SD_{2^n} grubu

$$SD_{2^n} = \left\langle a, b \middle| a^{2^{n-1}} = b^2 = e, b^{-1}ab = a^{-1+2^{n-2}} \right\rangle$$

şeklinde takdim edilirse 2^n mertebeli bir semidihedral grubu olarak tanımlanır. Burada a ve b nin mertebeleri sırasıyla 2^{n-1} ve 2 dir.

<u>*Tanım 2.1.1.18:*</u> $R \neq \emptyset$ bir küme olsun. R kümesi üzerinde toplama $(+)$ ve çarpma $(\cdot)$ denilen iki tane ikili işlem tanımlı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa o zaman $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

i . $(R, +)$ değişmeli bir gruptur.

ii. $(R, +, \cdot)$ kümesi çarpma işlemine göre kapalılık özelliğine sahiptir. Yani $\forall a, b \in R$ için $ab \in R$ dir.

iii. $(R, +, \cdot)$ kümesi çarpma işlemine göre birleşme özelliğine sahiptir. Yani $\forall a, b, c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$ dir.

iv. Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır. Yani $\forall a, b, c \in R$ için

$$a(b+c) = ab + ac$$

ve

$$(b+c)a = ba + ca$$

dır.

Örnek 2.1.1.2: F kümesi $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bütün fonksiyonların kümesi olsun. Yani

$$F = \{ f : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$$

olsun. Fonksiyonların bilinen toplamına göre yani $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall f, g \in F$ için

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

işlemine göre $(F,+)$ değişmeli bir gruptur. Eğer çarpma işlemi de

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

şeklinde tanımlanırsa o takdirde $(F,+,\cdot)$ cebirsel yapısının bir halka olduğu kolayca görülebilir [38].

Tanım 2.1.1.19: Birimli ve değişmeli bir H halkasının sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise H ye bir cisim denir [29].

Örnek 2.1.1.3: $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ cebirsel yapıları bir cisim olmasına karşılık $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ tamsayılar halkası bir cisim değildir. Gerçekten sözgelimi $2 \in \mathbb{Z}$ nin çarpmaya göre tersi $\frac{1}{2}$ olup $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ bir cisim olamaz [38].

2.1.2 Matris Cebiri

Tanım 2.1.2.1: F bir cisim ve $a_{ij} \in F$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir dikdörtgen tabloya matris denir. m satır ve n sütundan oluşan bir matrise $m \times n$ tipli matris ve a_{ij} sayılarına ise matrisin elemanları denir.

A matrisinin $i.$ satırı $i = 1,2,\ldots m$ için $r_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$ ve $j.$ sütunu $j = 1,2,\ldots n$ için

$$c_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir. $m \times n$ tipli. matris, kısaca $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.2.1: A, B ve C aynı mertebeden matrisler ve λ_1, λ_2 birer skaler olmak üzere,

i. $A + B = B + A$ değişme özelliği)

ii. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (birleşme özelliği)

iii. $A + 0 = 0 + A = A$ (etkisiz eleman)

iv. $A - A = 0$

v. $\lambda_1 (A + B) = \lambda_1 A + \lambda_1 B$

vi. $(\lambda_1 + \lambda_2) A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$

vii. $(\lambda_1 \lambda_2) A = \lambda_1 (\lambda_2 A)$

viii. $1.A = A.1 = A$

özellikleri vardır [2].

Tanım 2.1.2.2: Bir satır matris ile bir sütun matrisinin çarpılabilmesi için onların her birinin aynı elemana sahip olması gerekir. Eğer $u = [u_1, \ldots, u_m]$ ve $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$ ise, o zaman uv aşağıdaki gibi tanımlanan 1×1 bir matristir [37].

$$uv = [u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_m v_m] = \left[\sum_{j=1}^{m} u_i v_j \right].$$

Tanım 2.1.2.3: $A = [a_{ij}]$ bir $m \times r$-matris ve $B = [b_{ij}]$ bir $r \times n$-matris ise bunların çarpımı $i = 1, 2, \ldots m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ için

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ir} b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$$

olmak üzere $AB=\left[c_{ij}\right]$, $m\times n$-matristir [2].

Tanım 2.1.2.4: Bir matrisin satır sayısı ile sütun sayısı eşit ise bu matrise kare matris denir.

$$A=\begin{bmatrix} i-2 & 3 \\ 5 & i-4 \end{bmatrix}$$

matrisi 2×2 tipinde bir kare matristir.

Tanım 2.1.2.5: $A=\left[a_{ij}\right]$, $n\times n$ tipinde bir kare matris olmak üzere $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ elemanlarına A nın asal köşegen elemanları denir. Bir kare matriste asal köşegen dışındaki tüm elemanlar sıfır ise bu matrise köşegen matris denir. Örneğin;

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisi köşegen matristir.

Tanım 2.1.2.6: Bir köşegen matriste asal köşegen üzerindeki bütün elemanlar birbirine eşit ise bu matrise skaler matris denir.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisi bir skaler matristir.

Tanım 2.1.2.7: Skaler bir matriste asal köşegen üzerindeki tüm elemanlar 1 olarak verilmiş ise bu matrise birim matris denir. $n\times n$ mertebeden birim matris I_n ile gösterilir.

Tanım 2.1.2.8: $A=\left(a_{ij}\right)$, $m\times n$ tipli bir matrisin satırları ile sütunlarının yer değiştirmesi sonucu elde edilen matrise A matrisin transpozu denir ve A^T ile gösterilir.

Tanım 2.1.2.9: $A=\left(a_{ij}\right)$, $n\times n$ tipli bir kare matris ve I birim matris olmak üzere,

$$AB=BA=I$$

olacak şekilde $B=\left(b_{ij}\right)$, $n\times n$ tipli bir kare matris olarak verilsin. O halde B matrisine A matrisinin tersi denir ve $B=A^{-1}$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.2.2: Bir kare matrisin tersi varsa o zaman bu ters tektir [37].

Teorem 2.1.2.3: Eğer A ve B ters çevrilebilir iki $n\times n$ tipli matris ise, o zaman AB çarpımı da ters çevrilebilirdir ve

$$\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

dir [37].

Tanım 2.1.2.10: $A=\left(a_{ij}\right)$, $n\times n$ tipli kare matrisin $n\geq 2$ için determinantı, $1\leq i\leq n$ olmak üzere,

$$\det\left(A\right)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

olarak ifade edilir. Bu ifadeye ise $A=\left(a_{ij}\right)$, $n\times n$ tipli matrisinin $i.$ satıra göre açılımı denir.

Teorem 2.1.2.4: Bir A kare matrisinin ters çevrilebilir olması için gerek ve yeter şart $\det A\neq 0$ olmasıdır [37].

Teorem 2.1.2.5: Bir A kare matrisinin determinantı ile A nın transpozunun determinant değeri aynıdır. Yani

$$detA=detA^{T}$$

dır [37].

Tanım 2.1.2.11: Bir $A\in M_{n}\left(F\right)$ matrisinin permanenti $per\left(A\right)$ veya $p\left(A\right)$ ile gösterilir ve

$$per(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)}$$

olarak tanımlanır.

<u>*Tanım 2.1.2.12*</u> $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ve $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ olmak üzere, $AX=\lambda X$

denklemini sağlayan λ ya A matrisinin özdeğeri veya karakteristik değeri denir.
$AX=\lambda X$ denkleminden, $\left(AX-\lambda X\right)=0 \Rightarrow \left(A-\lambda I\right)X=0$ denklemi elde edilir. Bu denklem bir lineer homojen denklem sistemini verir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümü olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Yani,

$$\left|A-\lambda I\right|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

olmalıdır. $\left|A-\lambda I\right|$ ifadesi λ ya göre $n.$ dereceden bir polinom olup bu polinoma A matrisinin karakteristik polinomu denir. $\left|A-\lambda I\right|=0$ denklemine de A matrisinin karakteristik denklemi denir. Karakteristik polinom

$$P\left(\lambda\right)=\lambda^{n}+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$$

şeklinde bir polinomdur [2].

<u>*Tanım 2.1.2.13:*</u> Eğer verilen bir $n\times n$ tipli A matrisi bir D köşegen matrisine benzer ise, o takdirde A matrisine köşegenleştirilebilirdir denir. Diğer bir deyimle D köşegen bir matris olmak üzere

$$P^{-1}AP=D$$

olacak şekilde tekil olmayan bir P matrisi varsa, o zaman A matrisine köşegenleştirilebilirdir denir [37].

<u>*Tanım 2.1.2.14:*</u> $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ sayıları için $n\times n$ tipli Circulant matrisi:

$$C_n=\begin{bmatrix} c_0 & c_{n-1} & \cdots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & \cdots & c_3 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & c_0 & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup $(n-1)$. dereceden $P(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}$ polinomu ise C_n matrisinin yardımcı polinomu olarak adlandırılır.

<u>*Tanım 2.1.2.15:*</u> n. dereceden P reel polinomu

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

şekinde verilmiş olsun. P polinomuna karşılık gelen Hurwitz matrisi aşağıdaki gibidir [24]:

$$H_n=\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_3 & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_0 & a_2 & \ddots & & & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & a_1 & & \ddots & & a_n & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_0 & & & \ddots & a_{n-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & & & a_{n-2} & a_n & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}.$$

<u>*Tanım 2.1.2.16:*</u> $v\times v$ tipli $K(k_1,k_2,\ldots,k_v)$ Companion matrisi aşağıdaki gibi gösterilir:

$$K(k_1,k_2,\ldots,k_V)=\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_v \\ 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

<u>*Teorem 2.1.2.6:*</u> $K^u(k_1,k_2,\ldots,k_v)$ matrisinin i. satır ve j. sütunundaki elamanı

$$k_{i,j}^{(u)}(k_1,k_2,\ldots,k_v)=\sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_v)}\frac{t_j+t_{j+1}+\cdots+t_v}{t_1+t_2+\cdots+t_v}\times\binom{t_1+\cdots+t_v}{t_1,\ldots,t_v}k_1^{t_1}\cdots k_v^{t_v} \qquad (2.1.2.1)$$

olup burada toplam, negatif olmayan tam sayılar üzerinden $t_1+2t_2+\cdots+vt_v=u-i+j$ koşulunu sağlamaktadır ve $\binom{t_1+\cdots+t_v}{t_1,\ldots,t_v}=\frac{(t_1+\cdots+t_v)!}{t_1!\cdots t_v!}$ çok katlı bir katsayıdır. Eğer $u=i-j$ ise (2.1.2.1) denklemindeki katsayılar 1 olarak tanımlanır [28].

Tanım 2.1.2.17: $x_1,x_2,\ldots,x_n$ sayıları için $n\times n$ tipli Vandermonde matrisi aşağdaki gibi gösterilir:

$$V_n=\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_1^{\,2} & \cdots & x_1^{\,n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^{\,2} & \cdots & x_2^{\,n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^{\,2} & \cdots & x_n^{\,n-1}\end{bmatrix}.$$

Tanım 2.1.2.18: $A=\left[a_{ij}\right]$ ve $B=\left[b_{ij}\right]$ matrisleri $m\times n$ tipli matrisler olsun. $A\circ B=\left[a_{ij}b_{ij}\right]_{m\times n}$ çarpımına A ile B matrislerinin Hadamard çarpımı denir.

Tanım 2.1.2.19: Bir M matrisi için $perM=\det(M\circ K)$ olacak şekilde bir $n\times n$ tipli $(1,-1)$ K matrisi var ise, bu takdirde ve M matrisi değiştirilebilir (convertible) matris olarak adlandırılır ve $M\circ K$ notasyonu ile Hadamard çarpımı gösterilir.

Tanım 2.1.2.20: Eğer bir $u\times v$ tipli $A=\left[a_{i,j}\right]$ gerçel matrisinin n. sütunu (veya satırı) iki tane sıfırdan farklı eleman içeriyor ise bu matrise n. sütuna (veya satıra) göre indirgenebilir (contractible) matris denir.

2.1.3 Lineer İndirgemeli Diziler

Tanım 2.1.3.1: R birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere, R nin elemanlarının $a_1,a_2,\ldots,a_k$ başlangıç elemanlarıyla $n\geq 1$ için,

$$a_{n+k}=c_1a_{n+k-1}+c_2a_{n+k-2}+\ldots+c_ka_n \tag{2.1.3.1}$$

şeklindeki homojen olmayan lineer indirgemeli bağıntıyı sağlayan diziye homojen lineer indirgemeli dizi denir. Burada $c_1, c_2, ..., c_k \in R$ olacak şekilde sabit katsayılar olup c_k, R halkasının sıfır böleni olamaz [33].

Tanım 2.1.3.2: $f(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + ... + c_{k-1} x + c_k$ şeklindeki k. dereceden polinoma, (2.1.3.1) denkleminde ifade edilen lineer indirgemeli bağıntı için karakteristik polinom denir. Sırayla 2 ve 3 mertebeli lineer indirgemeli diziler, binary ve ternory lineer indirgemeli diziler diye adlandırılır. Ayrıca $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlanan lineer indirgemeli diziler sırayla tamsayı, rasyonel, reel ve kompleks lineer indirgemeli diziler olarak adlandırılır.

c_k, R nin terslenebilir bir elemanı ise (2.1.3.1) de tanımlanan dizi $a_0, a_{-1}, a_{-2}, ...,$ şeklinde devam eder [33].

Eğer R sıfır bölene sahip değilse bu durumda $\{a_n\}$ dizisi minimal uzunluktaki bir dizisinin minimal polinomudur. Minimal polinomun derecesine $\{a_n\}$ dizisinin mertebesi denir.

Tanım 2.1.3.3: R değişmeli ve birimli bir halka olmak üzere, R nin elemanlarının $a_1, a_2, ..., a_k$ başlangıç elemanlarıyla $n \geq 1$ için,

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + ... + c_k a_n + c_{k+1}$$

şeklindeki bağıntı yardımıyla tanımlanan diziye, homojen olmayan lineer indirgemeli dizi denir.

Bu bağıntı kullanılarak

$$a_{n+k+1} = (c_1 + 1) a_{n+k} + \sum_{i=1}^{k-1} (c_{i+1} - c_i) a_{n+k-i} - c_k a_n \qquad (2.1.3.2)$$

şeklindeki $n+1$ mertebeli homojen olmayan indirgemeli bağıntı elde edilebilir. (2.1.3.2) bağıntısı için

$$F(x) = \left(x^k - c_1 x^{k-1}, ..., c_{k-1} x - c_k\right)(x-1)$$

şeklindeki karakteristik polinom elde edilir [20].

Tanım 2.1.3.4: $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ başlangıç değerleri ve $c_0, c_1, ..., c_{k-1}$ ler sabitler olmak üzere,

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + ... + c_{k-1} a_{n+k-1}$$

şeklindeki k-basamak lineer indirgeme bağıntısıyla tanımlanan dizi için, dizinin elemanları:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$A^n = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

şeklindeki denklem yardımıyla elde edilmiştir [29].

Tanım 2.1.3.5: Eğer bir dizi belli bir noktadan sonra sadece sabit bir alt dizinin tekrarı şeklinde meydana geliyorsa bu diziye periyodik dizi denir. Örneğin; $x, y, z, \mathrm{q}, \mathrm{w}, \mathrm{z}, \mathrm{q}, \mathrm{w}, \mathrm{z}, \mathrm{q}, \mathrm{w}, ...$ dizisi periyodu 3 olan bir periyodik dizidir.

Tanım 2.1.3.6: Bir dizideki ilk k eleman tekrar eden bir alt dizi şeklinde ise bu diziye k periyotlu basit periyodik dizi denir. Örneğin; $a, b, c, d, e, a, b, c, d, e, ...$ dizisi basit periyodik olup periyodu 5 dir.

2.1.4 Padovan Dizileri

Tanım 2.1.4.1: $\{P(n)\}$ Padovan dizisi $n \geq 3$ ve $P(0) = P(1) = P(2) = 1$ olmak üzere

$$P(n) = P(n-2) + P(n-3)$$

şeklindedir. Yani Padovan dizisi

$$1,1,1,2,2,3,4,5,7,9,12,16,...$$

şeklindedir.

Padovan sayıları;

$$Q=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$Q^n=\begin{bmatrix} P(n-5) & P(n-3) & P(n-4) \\ P(n-4) & P(n-2) & P(n-3) \\ P(n-3) & P(n-1) & P(n-2) \end{bmatrix}$$

elde edilmiştir [35].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Padovan p-Sayıları

Tanım 3.1.1: $p\left(p=2,3,4\ldots\right)$ ve $n\geq 1$ için Padovan p-sayıları

$$Pap\left(1\right)=Pap\left(2\right)=\cdots=Pap\left(p\right)=0,\ Pap\left(p+1\right)=1 \text{ve} Pap\left(p+2\right)=0$$

başlangıç değerleri ile birlikte

$$Pap\left(n+p+2\right)=Pap\left(n+p\right)+Pap\left(n\right) \tag{3.1.1}$$

şeklindeki lineer homojen indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [17].

Eğer (3.1.1) ifadesinde $p=2$ alınırsa $n\geq 1$ için $Pa2\left(2n+1\right)=F_n$ eşitliği elde edilir.

(3.1.1) bağıntısından Padovan p-sayıları için

$$\begin{bmatrix} Pap\left(n+p+2\right) \\ Pap(n+p+1) \\ \vdots \\ Pap\left(n+2\right) \\ Pap\left(n+1\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Pap(n+p+1) \\ Pap(n+p) \\ \vdots \\ Pap(n+1) \\ Pap(n) \end{bmatrix}$$

eşitliği yazılabilir. Burada

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilen M matrisi, Padovan p-matrisi olarak adlandırılır [17].

Tümevarım yöntemiyle $n\geq 1$ için

$$M^n=\begin{bmatrix} Pap(n+p+1) & Pap(n+p+2) & Pap(n+1) & Pap(n+2) & \cdots & Pap(n+p) \\ Pap(n+p) & Pap(n+p+1) & Pap(n) & Pap(n+1) & \cdots & Pap(n+p-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Pap(n+1) & Pap(n+2) & Pap(n-p+1) & Pap\left(n-p+2\right) & \cdots & Pap(n) \\ Pap(n) & Pap(n+1) & Pap(n-p) & Pap(n-p+1) & \cdots & Pap(n-1) \end{bmatrix} \tag{3.1.2}$$

olduğu görülmektedir ve buradan $\det M = (-1)^{p+1}$ olduğu için $\det M^n = (-1)^{np+n}$ sonucuna ulaşılmaktadır [17].

Lemma 3.1.1: Padovan p-sayılarının karakteristik denklemi $x^{p+2} - x^p - 1 = 0$ olup bu denklemin çok katlı kökü yoktur [17].

İspat: $f(x) = x^{p+2} - x^p - 1$ için α, $f(x)$ in bir çok katlı kökü olsun. Bu durumda $\alpha \notin \{0,1\}$ dır. Eğer α, $f(x)$ in bir çok katlı kökü ise, o zaman $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ olmalıdır. $f'(\alpha) = 0$ ve $\alpha \neq 0$ olduğunda $\alpha^2 = \dfrac{p}{p+2}$ ifadesi elde edilir. Fakat $f(\alpha) = 0$ olduğunda $\alpha^p(\alpha^2 - 1) - 1 = 0$ olur. Böylece $\left(\dfrac{p}{p+2}\right)^{\frac{p}{2}} . \left(\dfrac{-2}{p+2}\right) = 1$ sonucuna varılır. O halde $p \geq 2$ için eşitliğin sol tarafının 1 den küçük olması mümkün değildir. böylece bir çelişki meydana gelir ve bu çelişki ile Lemmanın ispatı tamamlanmış olur

M Padovan p-matrisinin karakteristik polinomu $f(u) = u^{p+2} - u^p - 1$ olsun. Eğer M matrisinin öz değerleri $u_1, u_2, \ldots, u_{p+2}$ ise Lemma 3.1.1 den bu özdeğerlerin birbirinden farklı olduğu görülmektedir.

$(p+2) \times (p+2)$ tipli V_p Vandermonde matrisi:

$$V_p = \begin{bmatrix} u_1^{p+1} & u_2^{p+1} & \cdots & u_{p+2}^{p+1} \\ u_1^p & u_2^p & \cdots & u_{p+2}^p \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{p+2} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ve $(p+2) \times 1$ tipli A_p^i matrisi:

$$A_p{}^i = \begin{bmatrix} u_1^{n+p+2-i} \\ u_2^{n+p+2-i} \\ \vdots \\ u_{p+2}^{n+p+2-i} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilsin ve $V_p^{(i,j)}$ matrisi, V_p matrisinin j. sütununun A_p^i sütun matrisi ile değiştirilmesi sonucu elde edilsin.

Padovan p-sayıları için Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilebilir:

<u>*Teorem 3.1.1:*</u> $M^n = \left[m_{ij} \right]$ olmak üzere

$$m_{ij} = \frac{\det\left(V_p^{(i,j)}\right)}{\det\left(V_p\right)}$$

dır [17].

<u>*İspat:*</u> M matrisinin öz değerleri birbirinden farklı olduğu için M matrisi köşegenleştirilebilirdir. $D = (u_1, u_2, \ldots, u_{p+2})$ olsun. Bu durumda $MV_p = V_p D$ eşitliği elde edilir. V_p matrisi tersinir bir matris olduğu için $\left(V_p\right)^{-1} MV_p = D$ eşitliği sağlanır ki, bu da M matrisinin D matrisine benzer olduğunu göstermektedir.

Dolayısıyla $n \geq 1$ için $M^n V_p = V_p D^n$ olduğu görülmektedir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&m_{i1}u_1^{p+1} + m_{i2}u_1^{p} + \cdots + m_{ip+2} = u_1^{n+p+2-i} \\
&m_{i1}u_2^{p+1} + m_{i2}u_2^{p} + \cdots + m_{ip+2} = u_2^{n+p+2-i} \\
&\vdots \\
&m_{i1}u_{p+2}^{p+1} + m_{i2}u_{p+2}^{p} + \cdots + m_{ip+2} = u_{p+2}^{n+p+2-i}
\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi yazılabilir. Her $i, j = 1, 2, \ldots, p+2$ için lineer denklem sisteminin çözümünden

$$m_{ij} = \frac{\det\left(V_p^{(i,j)}\right)}{\det\left(V_p\right)}$$

olduğu görülmektedir.

<u>*Sonuç 3.1.1:*</u>

$$Pap(n) = \frac{\det\left(V_p^{(p+2,1)}\right)}{\det\left(V_p\right)} = \frac{\det\left(V_p^{(2,3)}\right)}{\det\left(V_p\right)} = \frac{\det\left(V_p^{(p+1,p+2)}\right)}{\det\left(V_p\right)}$$

[17].

Aşağıdaki teorem ile üreteç fonksiyonu yardımıyla Padovan p -sayılarının üstel temsili verilmiştir.

<u>*Teorem 3.1.2:*</u> $0 \le x^2 + x^{p+2} < 1$ için Padovan p -sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{1}{1 - x^2 - x^{p+2}}$$

şeklinde tanımlanır [17]:

$$g(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i}}{i} (1 + x^p)^i \right).$$

<u>*İspat:*</u> $g(x)$ Padovan p -sayılarının üreteç fonksiyonu olsun. O halde

$$\begin{aligned} g(x) = Pap(p+1) + Pap(p+2)x + Pap(p+3)x^2 + \cdots + \\ + Pap((p+n+1)x^n + Pap(p+n+2)x^{n+1} + \cdots \end{aligned}$$

dir. Padovan p -sayılarının tanımından $g(x) - x^2 g(x) - x^{p+2} g(x) = Pap(p+1) = 1$ eşitliği yazılabilir. Böylece $0 \le x^2 + x^{p+2} < 1$ için $g(x) = \dfrac{1}{1 - x^2 - x^{p+2}}$ eşitliği elde edilir. Aynı zamanda basit bir hesaplama ile

$$In\ g(x) = -In\left\{1 - x^2\left(1 + x^p\right)\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i}}{i} (1 + x^p)^i$$

ifadesi yazılabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağdaki teorem ile Padovan p -sayıları için bir toplamsal temsil verilmiştir.

<u>*Teorem 3.1.3:*</u> $j = \dfrac{n - 2m}{p}$ olmak üzere

$$Pap(n + p + 1) = \sum_{\frac{n}{p+2} \le m \le n} \binom{m}{j}$$

dır [17].

<u>*İspat:*</u> Teorem 3.1.3 den açıkça görülür ki $g(x)$ de x^n nin katsayısı $Pap(p+n+1)$ dır. Binom açılımı ile

$$g(x)=\frac{1}{1-x^2-x^{p+2}}=\frac{1}{1-\left(x^2+x^{p+2}\right)}=1+\left(x^2+x^{p+2}\right)+\left(x^2+x^{p+2}\right)^2+$$

$$+\cdots+(x^2+x^{p+2})^n+\cdots$$

$$=1+x^2\left(1+x^p\right)+x^4\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}x^{pj}+$$

$$+\cdots+x^{2n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{pj}+\cdots,$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$\left(x^2+x^{p+2}\right)^m=\left(x^2\left(1+x^p\right)\right)^m=x^{2m}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^{pj}$$

olduğundan pozitif m ve n tamsayıları için $\left(x^2+x^{p+2}\right)^m$ deki x^n nin katsayısı $j=\dfrac{n-2m}{p}$ olmak üzere $\dbinom{m}{j}$ şeklinde elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

<u>Sonuç 3.1.2:</u> i.

$$Pap(n)=\sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_{p+2})}\binom{t_1+t_2+\cdots+t_{p+2}}{t_1,t_2,\ldots,t_{p+2}}$$

olup burada toplam negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1+2t_2+\cdots+(p+2)t_{p+2}=n-p-1$ koşulunu sağlamaktadır.

ii.

$$Pap(n)=\sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_{p+2})}\left(\frac{t_{p+2}}{t_1+t_2+\cdots+t_{p+2}}\right)\binom{t_1+t_2+\cdots+t_{p+2}}{t_1,t_2,\ldots,t_{p+2}}$$

olup burada toplam negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1+2t_2+\cdots+(p+2)t_{p+2}=n+1$ koşulunu sağlamaktadır.

iii.

$$Pap(n)=\sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_{p+2})}\left(\frac{t_3+t_4+\cdots+t_{p+2}}{t_1+t_2+\cdots+t_{p+2}}\right)\binom{t_1+t_2+\cdots+t_{p+2}}{t_1,t_2,\ldots,t_{p+2}}$$

olup burada toplam negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1+2t_2+\cdots+(p+2)t_{p+2}=n+1$ koşulunu sağlamaktadır [17].

<u>İspat:</u> Teorem 2.1.2.6 dan,

i. durum için $i = p+2,\; j=1$

ii. durum için $i = p+1$ ve $j = p+2$

iii.durum için ise $i=2$ ve $j=3$ alınırsa (3.1.2) eşitliğinden sonuç açık olarak görülür.

Padovan p -sayılarının toplamsal temsili S_n ile gösterilsin. Yani,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Pap(p+i)$$

olsun. Ayrıca $(p+3)\times(p+3)$ tipli T ve K_n matrisleri:

$$\mathrm{T}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0 \;\; 0 \\ 1 & \\ 0 & \\ 0 & M \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

ve

$$K_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0 \;\; 0 \\ S_n & \\ S_{n-1} & \\ \vdots & M^n \\ \vdots & \\ S_{n-p-1} & \end{bmatrix}$$

şekline ifade edilsin. n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak T^n nin K_n ye eşit olduğu görülür.

<u>*Teorem 3.1.4:*</u> Padovan p -sayılarının toplamsal temsili

$$S_n = \sum_{i=0}^{p+1} Pap(n+p+2-i) - 1$$

şeklindedir [17].

İspat: $\left(p+3\right)\times\left(p+3\right)$ tipli U ve D_1 matrisleri sırasıyla aşağdaki gibi verilsin:

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & u_1^{p+1} & u_2^{p+1} & \cdots & u_{p+2}^{p+1} \\ -1 & u_1^{p} & u_2^{p} & \cdots & u_{p+2}^{p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -1 & u_1 & u_2 & \cdots & u_{p+2} \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$D_1=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & u_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{p+2} \end{bmatrix},$$

burada $u_1,u_2,\ldots,u_{p+2}$ değerleri $u^{p+2}-u^p-1=0$ denklemin kökleridir. U matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak

$$\det(U)=\det(V_p)$$

eşitliği elde edilir. $(1-u)(u^{p+2}-u^p-1)=0$, U matrisinin karakteristlik denklemi ve $1,u_1,u_2,\ldots,u_{p+2}$ lerde U matrisinin öz değeleri olup Lemma 3.1.1 den bu öz değerlerin birbirinden farklı olduğu görülmektedir. Böylece U matrisi köşegenleştirilebilir olup $TU=UD_1$ eşitliği elde elde edilmektedir. Ayrıca U matrisi tersinir matris olduğundan $U^{-1}TU=D_1$ eşitliği sağlanır ki bu da T matrisinin D_1 matrisi ile benzer olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla $T^nU=UD_1^n$ eşitliği yazılır ve böylece, $K_nU=UD_1^n$ elde edilir. $K_n=\left[k_{i\,j}\right]$ olmak üzere $S_n=k_{2,1}$ olduğundan matrisler üzerinde çarpma işlemi yardımıyla

$$S_n-\left(\sum_{i=0}^{p+1}Pap\left(n+p+2-i\right)\right)=-1$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$S_n=\sum_{i=0}^{p+1}Pap(n+p+2-i)-1$$

olur.

Tanım 3.1.2: $n\times n$ tipli $A_p^n=\left[a_{ij}\right]$ süper köşegen matrisi:

$$A_p^n=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc} & & & & & (p+2)-\text{inci} & & & \\ & & & & & \downarrow & & & \end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\end{array}$$

şeklinde tanımlanır [17].

Teorem 3.1.5 $n\geq 1$ ve $p\geq 2$ için A_p^n matrisinin permanenti $Pap(n+p+1)$ dir [17].

İspat: Teoremi ispatlamak için tümevarım yöntemi kullanılır. Öncelikle $n<p+2$ durumunu göz önüne alalım. A_p^n matrisinin ve Padovan p-sayılarının tanımından $perA_p^1=Pap(p+2)=0$ ve $A_p^2=Pap(p+3)=1$ olduğu görülür. Aynı zamanda $3\leq\lambda\leq p+1$ için

$$\mathrm{A}_P^{\lambda}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & 0\\ 1 & 0 & & 1 & & \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 1\\ 0 & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. O halde:

$$perA_p^{\lambda}=\begin{cases}1, & \text{eğer } \lambda \text{ tek sayı ise}\\ 0, & \text{eğer } \lambda \text{ çift sayı ise}\end{cases}$$

yazılır. Buna ek olarak

$$Pap(\lambda+p+1)=\begin{cases}1, & \text{eğer } \lambda \text{ tek sayı ise}\\ 0, & \text{eğer } \lambda \text{ çift sayı ise}\end{cases}\qquad 3\leq\lambda\leq p+1 \text{ için}$$

olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla $1 \leq n \leq p+1$ için $perA_p^n = Pap(n+p+1)$ eşitliği elde edilir. Şimdi $n \geq p+2$ için denklemin sağlandığı kabul edelim. Bu durumda denklemin $n+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. Eğer A_p^λ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perA_p^n$ genişletilir ise, $perA_p^{n+1} = perA_p^{n-1} + perA_p^{n-p-1}$ eşitliği elde edilir. $perA_p^{n-1} = Pap(n+p)$ ve $perA_p^{n-p-1} = Pap(n)$ olduğundan $perA_p^{n+1} = Pap(n+p+2)$ elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

3.1.1 Gruplarda Padovan p-Dizileri

$\{Pap(n)\}$ genelleştirilmiş Padovan p-dizisi m modülüne göre indirgenirse, tekrar eden

$$\{Pap_m(n)\} = \{Pap_m(1), Pap_m(2), \ldots, Pap_m(p+2), \ldots, Pap_m(i), \ldots\}$$

dizisi elde edilir ve burada $Pap_m(i) \equiv Pap(i) \pmod{m}$ dir [17].

<u>*Teorem 3.1.1.1:*</u> $\{pap_m(n)\}$ dizisi basit periyodik bir dizidir [17].

<u>*İspat:*</u> Farzedelimki $X_p = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{p+2}) \mid 0 \leq x_i \leq m-1\}$ olsun. Bu durumda $|X_p| = m^{p+2}$ dir. Z_m nin elemanlarının m^{p+2} tane farklı $(p+2)$-tiplisi mevcut olduğundan, bu $(p+2)$-tiplilerden en az bir tanesi $\{Pap(n)\}$ dizisinde iki kez ortaya çıkar. Bundan dolayı bu $(p+2)$-lileri takip eden alt dizi tekrarlanır. Böylece dizi periyodiktir. $v > u$ olmak üzere

$$Pap_m(u+1) = Pap_m(v+1), Pap_m(u+2) = Pap_m(v+2), \ldots,$$
$$Pap_m(u+p+2) = Pap_m(v+p+2)$$

ise $v \equiv u(\operatorname{mod} p+2)$ sonucuna ulaşılır. Padovan p-sayısının tanımından

$$Pap(n) = Pap(n+p+2) - Pap(n+p)$$

yazılır. Böylece

$$Pap_m(u) = Pap_m(v), Pap_m(u-1) = Pap_m(v-1), \ldots,$$

$$Pap_m(2) = Pap_m(v-u+2), Pap_m(1) = Pap_m(v-u+1),$$

eşitlikleri elde edilir ki bu da $\{Pap(n)\}$ dizisinin basit periyodik olduğunu gösterir.

<u>*Örnek 3.1.1.1:*</u> $\{Pap3_2(n)\}$ dizisi:

$$\{0,0,0,1,0,1,0,1,1,1,0,1,1,0,0,0,1,1,1,1,1,0,0,1,1,0,1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,\ldots\}$$

şeklindedir [17].

$$Pa3_2(32) = Pa3_2(1) = 0,\ Pa3_2(33) = Pa3_2(2) = 0,\ \ Pa3_2(34) = Pa3_2(3) = 0,$$
$$Pa3_2(35) = Pa3_2(4) = 1 \text{ ve } Pa3_2(36) = Pa3_2(5) = 0$$

olduğundan bu dizinin periyodu $hPa3_2 = 31$ olup, dizi basit periyodiktir.

Verilen bir $A = [a_{ij}]$ matrisi için, A matrisinin her elemanının $\bmod m$ ye göre indirgenmesi $A(\bmod m)$ şeklinde ifade edilir. Yani $A(\bmod m) = (a_{ij}(\bmod m))$ dir. $\langle A\rangle_m = \{A^i(\bmod m) \mid i \geq 0\}$ kümesini göz önüne alalım. Eğer $\text{obeb}(m, \det A) = 1$ ise $\langle A\rangle_m$ kümesi bir devirli grup olur. $|\langle A\rangle_m|$ ile $\langle A\rangle_m$ nin mertebesi gösterilmiştir.

Dolayısıyla (3.1.2) eşitliğinden her pozitif tam sayı için $\langle M\rangle_m$ bir devirli gruptur.

<u>*Teorem 3.1.1.2:*</u> t asal sayısı ve α pozitif tam sayı olmak üzere m sayısı $m = t^\alpha$ olacak şekilde asal çarpanlarına ayrılıyorsa $hPap_{t^\alpha} = |\langle M\rangle_{t^\alpha}|$ olur [17].

<u>*İspat:*</u> $|\langle M\rangle_{t^\alpha}| = u$ olsun. Bu durumda (3.1.2) eşitliğinden

$$Pap(u+1) \equiv Pap(u+2) \equiv \cdots \equiv Pap(u+p) \equiv 0(\bmod t^\alpha), \quad Pap(u+1+p) \equiv 1(\bmod t^\alpha)$$

ve $Pap(u+p+2) \equiv 0(\bmod t^\alpha)$, olduğu görülmektedir. Yani,

$$Pap(u+1) \equiv Pap(1)(\bmod t^\alpha), Pap(u+2) \equiv$$
$$Pap(2)(\bmod t^\alpha), \ldots, Pap(u+p) \equiv Pap(p)(\bmod t^\alpha), Pap(u+p+1) \equiv Pap(p+1)(\bmod t^\alpha)$$

ve $Pap(u+p+2) \equiv Pap(p+2)(\mathrm{mod}\, t^{\alpha})$ olur. $hPap_{t^{\alpha}}$, $\{Pap_{t^{\alpha}}(n)\}$ dizisinin periyodu olduğundan $hPap_{t^{\alpha}} | u$ elde edilir. İspat için $hPap_{t^{\alpha}}$ nın $\left|\langle M \rangle_{t^{\alpha}}\right|$ ile bölünebilir olduğunu göstermek yeterlidir. (3.1.2) eşitliğinden $M^{hPap_{t^{\alpha}}}(\mathrm{mod}\, t^{\alpha}) \equiv I$ olup I, $(p+2)\times(p+2)$ tipinde birim matristir. Dolayısıyla $\left|\langle M \rangle_{t^{\alpha}}\right| hPap_{t^{\alpha}}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

<u>Lemma 3.1.1.1:</u> $n > p+2$ ve $p \geq 2$ için

$$x^n = Pap(n)x^{p+1} + Pap(n+1)x^p + \sum_{i=0}^{p-1} Pap(n-1-i)x^i \qquad (3.1.1.1)$$

dır[17].

<u>İspat:</u> n üzerinde tümevarım yöntemi uygulanarak ispat yapılacaktır. t asal ve α bir pozitif tamsayı olmak üzere $G_p^{t^{\alpha}} = \left\{x^n (\mathrm{mod}\, t^{\alpha}) : n \in Z, x^{p+2} = x^p + 1\right\}$ olsun. O halde; $G_p^{t^{\alpha}}$ nin devirli bir grup olduğu açıktır.

<u>3.1.1.3 Teorem:</u> t asal ve α bir pozitif tamsayı olmak üzere $G_p^{t^{\alpha}}$ devirli grubu $\langle M \rangle_{t^{\alpha}}$ grubuna izomorftur [17].

<u>İspat:</u> t asal ve α bir pozitif tamsayı olsun. O halde $hPap_{t^{\alpha}} > 2p+2$ olduğu açıktır. (3.1.1.1) eşitliğinden $x^{hPap_{t^{\alpha}}} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, t^{\alpha})$ olduğu görülür. Böylece $\left|G_p^{t^{\alpha}}\right| = hPap_{t^{\alpha}}$ dır. Dolayısıyla Teorem 3.1.1.2 den $G_p^{t^{\alpha}} \equiv (M)_{t^{\alpha}}$ denkliği elde edilmektedir.

<u>Teorem 3.1.1.4:</u> *i.* t bir asal sayı ve u, $hPap_{t^{u+1}} \neq hPap_{t^u}$ eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayı olsun. Bu takdirde her $\sigma > u$ için $hPap_{t^{\sigma}} = t^{\sigma-u}.hPap_{t^u}$ eşitliği yazılır. Özellikle $hPap_t \neq hPap_{t^2}$ ise, her $\sigma > 1$ için $hPap_{t^{\sigma}} = t^{\sigma-1}.hPap_t$ olur.

ii. t_i ler farklı asallar olmak üzere $m = \Pi_{i=1}^{v} t_i^{e_i}$, $(v \geq 1)$ olsun. O halde

$$hPap_m = lcm\left[hPap_{t_1^{e_1}}, hPap_{t_2^{e_2}}, \ldots, hPap_{t_v^{e_v}}\right]$$

olur [17].

İspat: *i.* Teorem 3.1.1.2 den a, $M^{hPap_{t^{a+1}}} \equiv I\left(\bmod t^{a+1}\right)$ olacak şekilde pozitif bir tam ise $M^{hPap_{t^{a+1}}} \equiv I\left(\bmod t^{a}\right)$ dır. Böylece $hPap_{t^a}$ nin $hPap_{t^{a+1}}$ yi böldüğü görülmektedir. Diğer taraftan $M^{hPap_{t^a}} = I + \left(\bmod_{ij}^{(a)} \cdot t^a\right)$ eşitliği yazılarak, binom açılımından

$$M^{hPap_{t^{a \cdot t}}} = \left(I + \left(\bmod_{ij}^{(a)} \cdot t^a\right)\right)^t = \sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i} \left(m_{ij}^{(a)} \cdot t^a\right)^i \equiv I\left(\bmod t^{a+1}\right)$$

eşitliği elde edilir ki, bu eşitlik yardımıyla $hPap_{t^{\alpha}}.t$ nin $hPap_{t^{\alpha \cdot t}}$ tarafından bölünebilir olduğunu gösterir. Böylece $hPap_{t^{a+1}} = hPap_{t^a}$ ya da $hPap_{t^{a+1}} = hPap_{t^{a \cdot t}}$ olduğunu gösterir ki buradaki ikinci durumun sağlanması t tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(a)}$ nin var olması ile mümkündür. u, $hPap_{t^{u+1}} \neq hPap_{t^u}$ olacak şekilde en küçük pozitif tamsayısı olduğundan t tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(u)}$ vardır. Diğer taraftan t tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(u)}$ olduğundan, t tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(u+1)}$ in de mevcut olduğu görülür. Dolayısıyla $hPap_{t^{u+2}} \neq hPap_{t^{u+1}}$ sonucu elde edilir ve bu durum göz önüne alınarak $hPap_{t^{u+2}} = t.hPap_{t^{u+1}} = t^2.hPap_{t^u}$ eşitliğine ulaşılır. Böylece u üzerinde tümevarım yöntemi uygulanarak her $\sigma > u$ için $hPap_{t^{\sigma}} = t^{\sigma - u}.hPap_{t^u}$ eşitliği elde edilir. Özellikle $u = 1$ ve $n > 1$ ise $hPap_{t^{\sigma}} = t^{\sigma - 1}.hPap_t$ olur.

ii. $\left\{Pap_{t_i^{e_i}}(n)\right\}$ dizisinin periyodu $hPap_{t_i^{e_i}}$ olduğundan bu dizi sadece $\lambda.hPap_{t_i^{e_i}}$, $(\lambda \in N)$ uzunluğundaki bloklarda tekrar eder. Ayrıca $hPap_m$, $\left\{Pap_m(n)\right\}$ dizisinin periyodu olduğundan, $\left\{Pap_{t_i^{e_i}}(n)\right\}$ dizisi her i değeri için $hPap_m$ terimde bir tekrar eder. Böylece her i değeri için $hPap_m$ periyodu $\lambda.hPap_{t_i}^{e_i}$ şeklinde olup, bu sayı $\{Pap_m(n)\}$ nin periyodunu vermektedir. Dolayısıyla $hPap_m = lcm\left[hPap_{t_1^{e_1}}, hPap_{t_2^{e_2}}, \ldots hPap_{t_v^{e_v}}\right]$ elde edilmektedir.

Tanım 3.1.1.1: $n \geq 1$ olmak üzere $\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) \in X$, p-gerenlisi için $Pap\left(G; x_1, x_2, \ldots, x_p\right) = \{a_i\}$ Padovan p-orbiti

$$a_0 = e,\ a_1 = x_1,\ a_2 = x_2, \ldots, a_p = x_p,\ a_{p+1} = e,\ a_{n+p+1} = a_{n-1} \cdot a_{n+p-1},$$

şeklinde tanımlanır [17].

Teorem 3.1.1.5: Sonlu bir G grubunun Padovan p-orbiti basit periyodiktir [17].

İspat: G grubunun mertebesi n olsun. G grubunun elemanlarının farklı sıralı $(p+2)$-lilerin sayısı n^{p+2} olduğundan en az bir tanesi Padovan p-orbitinde iki kez ortaya çıkar. Böylece bu tekrarlardan dolayı Padovan p-orbiti periyodiktir. Padovan p-dizisi periyodik olduğundan $u > v$ olmak üzere $a_{u+1} = a_{v+1},\ a_{u+2} = a_{v+2}, \ldots, a_{u+p+2} = a_{v+p+2}$ olacak şekilde u ve v doğal sayıları vardır. Diğer taraftan Padovan p-orbiti tanımından $a_u = \left(a_{u+p+2}\right).\left(a_{u+p}\right)^{-1}$ ve $a_v = \left(a_{v+p+2}\right).\left(a_{v+p}\right)^{-1}$ yazılır. Böylece $a_{u-v} = a_{v-v} = a_0,\ a_{u-v+1} = a_{v-v+1} = a_1, \ldots, a_{u-v+p+1} = a_{v-v+p+1} = a_{p+1}$ elde edilir ki bu da Padovan p-orbitinin basit periyodik olduğu anlamına gelir.

$LPap\left(G; x_1, x_2, \ldots, x_p\right)$ notasyonu ile $Pap\left(G; x_1, x_2, \ldots, x_p\right)$ Padovan p-orbitinin periyot uzunluğu gösterilsin.

Teorem 3.1.1.6: $n \geq 3$ olmak üzere x, y geren çifti için Q_{2^n} quaternion grubunun Padovan 2-orbitinin periyot uzunluğu $LPa2\left(Q_{2^n}; x, y\right)$ ve $LPa2\left(Q_{2^n}; y, x\right)$ için $2^{n-1}.3$ dir [17].

İspat: İlk olarak $Q_{2^m} = \langle x, y : \mathrm{x}^{2m-1} = e, y^2 = x^{2^{m-2}}, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$ takdimiyle verilen Q_{2^m} quaternion grubunu ele alalım. Grup takdiminde verilen $xy = yx^{-1}$ ile $yx = x^{-1}y$ bağıntıları yardımıyla $Pa2\left(Q_{2^n}; x, y\right)$ Padovan 2-orbiti

$$e, x, y, e, y, x, y^2, x, y^3, x^2, y, x^3, e, x^5, y, x^8,$$
$$y, x^{13}, y^2, x^{21}, y^3, x^{34}, y, x^{55}, e, x^{89}, y, x^{144}, ...$$

şeklinde elde edilir.

Yukardaki ifadeler kullanılarak

$$a_0 = e,\ a_1 = x,\ a_2 = y,\ e, \ldots,$$
$$a_{12} = e,\ a_{13} = x^5,\ a_{14} = y,\ a_{15} = x^8, \ldots,$$
$$a_{24} = e,\ a_{25} = x^{89},\ a_{26} = y,\ a_{27} = x^{144}, \ldots,$$
$$a_{48} = e,\ a_{49} = x^{28657},\ a_{50} = y,\ a_{51} = x^{46368}, \ldots,$$
$$a_{12\cdot 2^i} = e,\ a_{12\cdot 2^i+1} = x^{2^{i+2}\cdot\lambda_1+1},\ a_{12\cdot 2^i+2} = y,\ a_{12\cdot 2^i+3} = x^{2^{i+3}\cdot\lambda_2}, \ldots,$$

şeklindeki dizi elde edilir. Burada λ_1 ve λ_2 tek sayı ve $n \in N$ dir. Böylece $n \geq 3$ için $2^{n-1} \mid 2^{i+2}$ olacak şekilde en küçük $i \in N$ sayısının belirlenmesi gerekir.

Bu durumda $i = n-3$ alınırsa $x_{2^{n-1}.3} = e,\ x_{2^{n-1}.3+1} = x$, $x_{2^{n-1}.3+2} = y,\ x_{2^{n-1}.3+3} = e$ elde edilir. $x_{2^{n-1}.3},\ x_{2^{n-1}.3+1},\ x_{2^{n-1}.3+2}$ ve $x_{2^{n-1}.3+3}$ tekrar eden elementler olduğundan x, y, e ve e başlangıç değerlerine bağlı olarak dizi $\left(2^{n-1}.3\right)$. elemandan sonra tekrar eder. Dolayısıyla $LPa2\left(Q_{2^n}; x, y\right) = 2^{n-1}.3$ dir.

$Pa2\left(Q_{2^n}; x, y\right)$ Padovan 2 -orbiti

$$e, y, x, e, x, y, x^2, y, x^3, y^2, x^5, y^3, x^8, y, x^{13}, e$$
$$x^{21}, y, x^{34}, y, x^{55}, y^2, x^{89}, y^3, x^{144}, y, x^{233}, e...$$

şeklindedir. Yukarıdaki ifadeler kullanılarak

$$a_0 = e, a_1 = y, a_2 = x, e, \ldots,$$
$$a_{12} = x^8, a_{13} = y, a_{14} = x^{13}, a_{15} = e, \ldots,$$
$$a_{24} = x^{144}, a_{25} = y, a_{26} = x^{233}, a_{27} = e, \ldots,$$
$$a_{48} = x^{46368}, a_{49} = y, a_{50} = x^{75025}, a_{51} = e, \ldots,$$
$$a_{12.2^i} = x^{2^{i+3}.\beta_1}, a_{12.2^i+1} = y\ , a_{12.2^i+2} = x^{2^{i+2}.\beta_2+1}, a_{12.2^i+3} = e, \ldots,$$

şeklindeki dizi elde edilir. Buradan β_1 ve β_2 tek sayı ve $i \geq 0$ olup $LPa2\left(Q_{2^n}; y, x\right) = 2^{n-1}.3$ olur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 Padovan p -Circulant Sayıları

Tanım 4.1.1: $p \geq 2$ ve $n \geq 1$ için Padovan p -circulant sayıları

$$x_1 = \cdots = x_{p+2} = 0 \text{ ve } x_{p+3} = 1$$

başlangıç değerleri ile birlikte

$$x_{n+p+3} = x_{n+p+2} - x_{n+p} - x_n \tag{4.1.1}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [26].

(4.1.1) bağıntısı yardımıyla, Padovan p -circulant sayıları için Companion matris formundaki üreteç matrisi:

$$C_p = \left[c_{ij}\right]_{(p+3)\times(p+3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde belirlenmiştir ve bu matris Padovan p -circulant matrisi olarak adlandırılmıştır.

$\alpha \geq 0$ için

$$\left(C_p\right)^\alpha \begin{bmatrix} x_{p+3} \\ x_{p+2} \\ \vdots \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\alpha+p+3} \\ x_{\alpha+p+2} \\ \vdots \\ x_{\alpha+1} \end{bmatrix}$$

eşitliği görülür. $\alpha \geq p$ için α üzerinden tümevarım uygulanarak Padovan p -circulant matrisinin α. kuvveti

$$\left(C_p\right)^\alpha = \begin{bmatrix} x_{\alpha+p+3} & x_{\alpha+p+4} - x_{\alpha+p+3} & x_{\alpha+p+5} - x_{\alpha+p+4} & -x_{\alpha+3} & -x_{\alpha+4} & \ldots & -x_{\alpha+p+2} \\ x_{\alpha+p+2} & x_{\alpha+p+3} - x_{\alpha+p+2} & x_{\alpha+p+4} - x_{\alpha+p+3} & -x_{\alpha+2} & -x_{\alpha+3} & \ldots & -x_{\alpha+p+1} \\ x_{\alpha+p+1} & x_{\alpha+p+2} - x_{\alpha+p+1} & x_{\alpha+p+3} - x_{\alpha+p+2} & -x_{\alpha+1} & -x_{\alpha+2} & \ldots & -x_{\alpha+p} \\ x_{\alpha+p} & x_{\alpha+p+1} - x_{\alpha+p} & x_{\alpha+p+2} - x_{\alpha+p+1} & -x_{\alpha} & -x_{\alpha+1} & \ldots & -x_{\alpha+p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_{\alpha+2} & x_{\alpha+3} - x_{\alpha+2} & x_{\alpha+4} - x_{\alpha+3} & -x_{\alpha-p+2} & -x_{\alpha-p+3} & \ldots & -x_{\alpha+1} \\ x_{\alpha+1} & x_{\alpha+2} - x_{\alpha+1} & x_{\alpha+3} - x_{\alpha+2} & -x_{\alpha-p+1} & -x_{\alpha-p+2} & \ldots & -x_{\alpha} \end{bmatrix} \tag{4.1.2}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\det\left(C_p\right)^{\alpha}=\left(-1\right)^{p\alpha+\alpha}$ dır.

<u>*Lemma 4.1.1:*</u> Padovan p -circulant dizsinin karakteristik denklemi

$$x^{p+3}-x^{p+2}+x^{p}+1=0$$

olup bu denklemin çok katlı kökü yoktur [26].

<u>*İspat:*</u> z nin, $f(x)$ in bir çok katlı kökü olduğunu kabul edelim. Bu durumda z , $f(x)$ in bir çok katlı kök olduğundan $f\,'(x)$ inde bir köküdür. Yani

$$f(z)=z^{p+3}-z^{p+2}+z^{p}+1=0$$

ve

$$f\,'(z)=\left(p+3\right)z^{p+2}-\left(p+2\right)z^{p+1}+pz^{p-1}=z^{p-1}\left(\left(p+3\right)z^{3}-\left(p+2\right)z^{2}+p\right)=0$$

olmalıdır. Buradan $f\left(0\right)\neq 0$ olduğundan $\left(p+3\right)z^{3}-\left(p+2\right)z^{2}+p=0$ dır. Bu ifadenin kökleri

$$z_1=\frac{\left(\sqrt[3]{2}\left(-p-2\right)^{2}\right)}{3\left(p+3\right)\left(-25p^{3}-150p^{2}+3\sqrt{3}\sqrt{23p^{6}+276p^{5}+1230p^{4}+2380p^{3}+1563p^{2}-288p}-219p+16\right)^{\frac{1}{3}}}+$$
$$\frac{3\left(p+3\right)\left(-25p^{3}-150p^{2}+3\sqrt{3}\sqrt{23p^{6}+276p^{5}+1230p^{4}+2380p^{3}+1563p^{2}+288p}-219p+16\right)^{\frac{1}{3}}}{3\sqrt[3]{2}\left(p+3\right)}-\frac{-p-2}{3(p+3)}$$

$$z_2=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-p-2\right)^{2}}{3\times 2^{\frac{2}{3}}\left(p+3\right)\left(-25p^{3}-150p^{2}+3\sqrt{3}\sqrt{23p^{6}+276p^{5}+1230p^{4}+2380p^{3}+1563p^{2}-288p}-219p+16\right)^{\frac{1}{3}}}-$$
$$\frac{\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)(-25p^{3}-150p^{2}+3\sqrt{3}\sqrt{23p^{6}+276p^{5}+1230p^{4}+2380p^{3}+1563p^{2}-288p}-219p+16)^{\frac{1}{3}}}{6\sqrt[3]{2}\left(p+3\right)}-\frac{-p-2}{3\left(p+3\right)}$$

ve

$$z_3=\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(-p-2\right)^{2}}{3x2^{\frac{2}{3}}\left(p+3\right)\left(-25p^{3}-150p^{2}+3\sqrt{3}\sqrt{23p^{6}+276p^{5}+1230p^{4}+2380p^{3}+1563p^{2}-288p}-219p+16\right)^{\frac{1}{3}}}-$$
$$\frac{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(-25p^{3}-150p^{2}+3\sqrt{3}\sqrt{23p^{6}+276p^{5}+1230p^{4}+2380p^{3}+1563p^{2}-288p}-219p+16\right)^{\frac{1}{3}}}{6\sqrt[3]{2}\left(p+3\right)}-\frac{-p-2}{3\left(p+3\right)}$$

olduğu görülmektedir. Bu durumda $p \geq 2$ için $f\left(z_1\right) \neq 0$, $f\left(z_2\right) \neq 0$ ve $f\left(z_3\right) \neq 0$ olduğundan bir çelişki elde edilir ve bu çelişki ile Lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

$x^{p+3} - x^{p+2} + x^p + 1 = 0$ denkleminin kökleri $x_1, x_2, \ldots, x_{p+3}$ ise, Lemma 4.1.1 ile bu köklerin birbirinden farklı olduğu görülmektedir. $(p+3) \times (p+3)$ tipli V^p Vandermonde matrisi:

$$V^p = \begin{bmatrix} \left(x_1\right)^{p+2} & \left(x_2\right)^{p+2} & \cdots & \left(x_{p+3}\right)^{p+2} \\ \left(x_1\right)^{p+1} & \left(x_2\right)^{p+2} & \cdots & \left(x_{p+3}\right)^{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & & x_{p+3} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

W_i^p matrisi:

$$W_i^p = \begin{bmatrix} (x_1)^{n+p+3-i} \\ (x_2)^{n+p+3-i} \\ \vdots \\ (x_{p+3})^{n+p+3-i} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilsin ve $V_{i,j}^p$ matrisi, V^p matrisinin j. sütununun W_i^p sütun matrisiyle yer değiştirmesi sonucu elde edilsin [26].

<u>*Teorem 4.1.1:*</u> $\alpha \geq p$ ve $p \geq 2$ için $\left(C_p\right)^{\alpha} = \left[c_{i,j}^{p,\alpha}\right]$ olmak üzere

$$c_{i,j}^{p,\alpha} = \frac{\det V_{i,j}^p}{V^p}$$

dır [26].

<u>*İspat:*</u> $x_1, x_2, \ldots, x_{p+3}$ öz değerleri birbirinden farklı olduğu için C_p matrisi köşegenleştirilebilirdir. $G_p = diag\left(x_1, x_2, \ldots, x_{p+3}\right)$ olsun. Bu durumda C_p matrisi köşegenleştirilebilir olduğundan $G_p V^p = V^p G_p$ eşitliği elde edilir. Ayrıca $\det V^p \neq 0$ olduğundan V^p matrisi tersinir matristir. Böylece $\left(V^p\right)^{-1} C_p V^p = G_p$ eşitliği sağlanır ki, bu da C_p matrisinin G_p matrisine benzer olduğunu göstermektedir.

$\alpha \geq p$ ve $p \geq 2$ için $(C_p)^\alpha V^p = V^p (G_p)^\alpha$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{cases} c_{i,1}^{p,\alpha}(x_1)^{p+2} + c_{i,2}^{p,\alpha}(x_1)^{p+1} + \cdots + c_{i,p+3}^{p,\alpha} = (x_1)^{\alpha+p+3-i} \\ c_{i,1}^{p,\alpha}(x_2)^{p+2} + c_{i,2}^{p,\alpha}(x_2)^{p+1} + \cdots + c_{i,p+3}^{p,\alpha} = (x_2)^{\alpha+p+3-i} \\ \vdots \\ c_{i,1}^{p,\alpha}(x_{p+3})^{p+2} + c_{i,2}^{p,\alpha}(x_{p+3})^{p+1} + \cdots + c_{i,p+3}^{p,\alpha} = (x_{p+3})^{\alpha+p+3-i} \end{cases}$$

linner denklem sistemi yazılabilir. Her $i, j = 1,2,\ldots, p+3$ için linner denklem sisteminin çözümünden

$$c_{i,j}^{p,\alpha} = \frac{\det V_{i,j}^p}{V^p}$$

olduğu görülmektedir.

<u>*Sonuç 4.1.1:*</u> $4 \leq n \leq p+3$ ve $p \geq 2$ için x_α, α. Padovan p-circulant sayısı olmak üzere

$$x_\alpha = \frac{\det V_{n,n}^p}{V^p}$$

eşitliği elde edilir [26].

<u>*Tanım 4.1.2:*</u> $k \geq p+3$ için $k \times k$ tipli $G(k,p) = \left[g_{i,j}^{k,p}\right]$ süper köşegen matrisi;

$$g_{i,j}^{k,p} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } i=t \text{ ve } j=t \text{ ise } 1\leq t\leq k, \\ & \text{ve} \\ & i=t+1 \text{ ve } j=t \text{ ise } 1\leq t\leq k-1 \\ & \text{eğer } i=t \text{ ve } j=t+2 \text{ ise } 1\leq t\leq k-2, \\ -1 & \text{ve} \\ & i=t \text{ ve } j=t+p+2 \text{ ise } 1\leq t\leq k-p-2, \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanımıştır.

Yani $G(k,p) = \left[g_{i,j}^{k,p}\right]$ süper köşegen matrisi;

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} &&&&&&(p+3)-\text{inci}&&&&& \\ &&&&&&\downarrow&&&&& \end{array} \\ G(k,p)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklindedir [26].

<u>*Teorem 4.1.2:*</u> $k \geq p+3$ ve $p \geq 2$ için

$$perG(k,p) = x_{k+p+3}$$

eşitliği elde edilir [26].

<u>*İspat:*</u> Teoremi ispatlamak için k üzerinden tümevarım yöntemini uygulanır. Denklemin $k \geq p+3$ için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda denklemin $k+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. Eğer $G(k,p)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perG(k,p)$ genişletilir ise,

$$perG(k+1,p) = perG(k,p) - perG(k-2,p) - perG(k-p-2,p)$$

eşitliği elde edilir.

$perG(k,p) = x_{k+p+3}$, $perG(k-2,p) = x_{k+p+1}$ ve $perG(k-p-2,p) = x_{k+1}$ olduğundan $perG(k+1,p) = x_{k+p+4}$ eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$k \geq p+3$ için $k \times k$ tipli $Y(k,p) = \left[y_{i,j}^{k,p} \right]$ matrisi;

$$y_{i,j}^{k,p} = \begin{cases} 1 & \begin{array}{c} \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \le t \le k, \\ \text{ve} \\ i = t+1 \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \le t \le k-1 \end{array} \\ -1 & \begin{array}{c} \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+2 \text{ ise } 1 \le t \le k-p-2, \\ \text{ve} \\ i = t \text{ ve } j = t+p+2 \text{ ise } 1 \le t \le k-p-2, \end{array} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$k > p+3$ için $k \times k$ tipli $L(k,p) = \left[l_{i,j}^{k,p}\right]$ matrisi;

$$L(k,p) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & (k-p-3)-\text{inci} & \\ & \downarrow & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & Y(k-1,p) & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklinde tanımlanır [26].

<u>*Teorem 4.1.3:*</u> *i.* $k \ge p+3$ için

$$perY(k,p) = -x_k$$

eşitliği elde edilir.

ii. $k > p+3$ için

$$perL(k,p) = -\sum_{i=1}^{k-1} x_i$$

eşitliği elde edilir [26].

<u>*İspat:*</u> *i.* Denklemin $k \ge p+3$ için sağladığını kabul edelim. Bu durumda denklemin $k+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. Eğer $Y(k,p)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perY(k,p)$ genişletilir ise,

$$perY(k+1,p) = perY(k,p) - perY(k-2,p) - perY(k-p-2,p)$$
$$= -x_k + x_{k-2} + x_{k-p-2} = -x_{k+1}$$

eşitliği elde edilir.

ii. Eğer $L(k,p)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perL(k,p)$ genişletilir ise,

$$L(k,p) = perL(k-1,p) + perY(k-1,p)$$

eşitliği elde edilir. Teorem 4.1.3 ün sonuçları ve Teorem 4.1.4 ün *i.* kısmı dikkate alınarak tümevarım yöntemi ile ispat tamamlanmış olur.

$k > p+3$ için $n \times n$ tipli R matrisi;

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $perG(k,p) = \det(G(k,p)oR)$,

$perY(k,p) = \det(Y(k,p)oR)$ ve $perL(k,p) = \det(L(k,p)oR)$ eşitlikleri elde edilir.

<u>*Sonuç 4.1.2:*</u> $k > p+3$ için

$$\det(G(k,p)oR) = x_{k+p+3},$$
$$\det(Y(k,p)oR) = -x_k$$

ve

$$\det(L(k,p)oR) = -\sum_{i=i}^{k-1} x_i$$

eşitlikleri elde edilir[26].

<u>*Sonuç 4.1.3:*</u> x_α, α. Padovan p-circulant sayısı olsun. O halde

$$\begin{aligned} x_\alpha &= -\sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_{p+3})} \frac{t_4+t_5+\cdots+t_{p+3}}{t_1+t_2+\cdots+t_{p+3}} \times \binom{t_1+\cdots+t_{p+3}}{t_1,\ldots,t_{p+3}} (-1)^{t_3+t_{p+3}} \\ &= -\sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_{p+3})} \frac{t_5+t_6+\cdots+t_{p+3}}{t_1+t_2+\cdots+t_{p+3}} \times \binom{t_1+\cdots+t_{p+3}}{t_1,\ldots,t_{p+3}} (-1)^{t_3+t_{p+3}} \\ &= \cdots \\ &= -\sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_{p+3})} \frac{t_{p+3}}{t_1+t_2+\cdots+t_{p+3}} \times \binom{t_1+\cdots+t_{p+3}}{t_1,\ldots,t_{p+3}} (-1)^{t_3+t_{p+3}} \end{aligned}$$

olup burada toplam negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1+2t_2+\cdots+(p+3)t_{p+3}=\alpha$ koşulu sağlanmaktadır [26].

<u>İspat</u>: Teorem 2.1.2.6 da $4 \le i, j \le p+3$ olacak şekilde $v = p+3$ ve $i = j$ alınırsa (4.1.2) eşitliğinden sonuç açık olarak görülür.

$p \ge 2$ için Padovan p -circulant sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$g^p(y) = \frac{y^{p+2}}{1-y+y^3+y^{p+3}}$$

dır [26].

<u>Teorem 4.1.4:</u> Padovan p -circulant sayılarının üstel temsili aşağdaki gibidir [26]:

$$g^p(\text{y}) = y^{p+2}\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(y)^i}{i}\left(1-y^2+y^{p+2}\right)^i\right).$$

<u>İspat:</u>

$$\begin{aligned} In\; g^p(\text{y}) &= In\frac{y^{p+2}}{1-y+y^3+y^{p+3}} \\ &= Iny^{p+2} - In\left(1-y+y^3+y^{p+3}\right) \end{aligned}$$

ve

$$-In\left(1-y+y^3+y^{p+3}\right) = -\Big[-y\left(1-y^2-y^{p+2}\right) - \frac{1}{2}y^2\left(1-y^2-y^{p+2}\right)^2 - \cdots - \frac{1}{n}y^n\left(1-y^2-y^{p+2}\right)^n - \cdots$$
$$-\frac{1}{n}y^n\left(1-y^2-y^{p+2}\right)^n - \cdots\Big]$$

olduğundan

$$In\frac{g^{p}(y)}{y^{p+2}}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(y)^{i}}{i}\left(1-y^{2}+y^{p+2}\right)^{i}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi Padovan p-circulant sayılarının toplamsal temsillerini göz önüne alalım.

$S_{\alpha}=\sum_{n=1}^{\alpha}x_{n}$ olmak üzere $(p+4)\times(p+4)$ tipli M_{p} matrisinin toplamsal temsili aşağdaki gibi gösterilsin:

$$M_{p}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & C_{p} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Bu durumda tümevarım yöntemi kullanılarak $(M_{p})^{\alpha}$ matrisi:

$$(M_{p})^{\alpha}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{\alpha+p+2} & & & \\ S_{\alpha+p+1} & & (C_{p})^{\alpha} & \\ \vdots & & & \\ S_{\alpha} & & & \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir[26].

4.2 Padovan p -Hurwitz Sayıları

<u>*Tanım 4.2.1:*</u> $p(4,6,8,....)$ ve $n\geq 0$ için Padovan p-Hurwitz sayıları

$$a_{0}=a_{1}=\cdots=a_{p}=0 \text{ ve } a_{p+1}=1$$

başlangıç değerleri ile birlikte

$$a_{n+p+2}=a_{n+\frac{p}{2}+1}-a_{n+\frac{p}{2}}-a_{n} \qquad (4.2.1)$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [19].

(4.2.1) bağıntısı yardımıyla Padovan p-Hurwitz sayıları için Companion matris formundaki üreteç matrisi:

$$
M\left[m_{ij}\right]_{(p+2)x(p+2)} =
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \left(\frac{p}{2}+1\right)-\text{inci} & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & &
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

şeklinde belirlenmiştir ve bu matris Padovan p-Hurwitz matrisi olarak adlandırılmıştır α üzerinde tümevarım yöntemi uygulanarak Padovan p-Hurwitz matrisinin α. kuvveti:

$$
(M)^{\alpha} =
\begin{bmatrix}
a_{n+p+1} & a_{n+p+2} & \cdots & a_{n+\frac{3p}{2}+1} & -a_{n+p} - a_{n+\frac{p}{2}} & -a_{n+\frac{p}{2}+1} & -a_{n+\frac{p}{2}+2} & & \cdots & -a_{n+p} \\
a_{n+p} & a_{n+p+1} & \cdots & a_{n+\frac{3p}{2}} & -a_{n+p-1} - a_{n+\frac{p}{2}-1} & -a_{n+\frac{p}{2}} & -a_{n+\frac{p}{2}+1} & & \cdots & -a_{n+p-1} \\
a_{n+p-1} & a_{n+p} & \cdots & a_{n+\frac{3p}{2}-1} & -a_{n+p-2} - a_{n+\frac{p}{2}-2} & -a_{n+\frac{p}{2}-1} & -a_{n+\frac{p}{2}} & & \cdots & -a_{n+p-2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
a_{n+\frac{p}{2}+1} & a_{n+\frac{p}{2}+2} & \ddots & a_{n+p+1} & -a_{n+\frac{p}{2}} - a_{n} & -a_{n+1} & -a_{n+2} & & \cdots & -a_{n+\frac{p}{2}} \\
a_{n+\frac{p}{2}} & a_{n+\frac{p}{2}+1} & \cdots & a_{n+p} & -a_{n+\frac{p}{2}-1} - a_{n-1} & -a_{n} & -a_{n+1} & & \cdots & -a_{n+\frac{p}{2}-2} \\
a_{n+\frac{p}{2}-1} & a_{n+\frac{p}{2}} & \cdots & a_{n+p-1} & -a_{n+\frac{p}{2}-2} - a_{n-2} & -a_{n-1} & -a_{n} & & \cdots & -a_{n+\frac{p}{2}-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+\frac{p}{2}+1} & -a_{n} - a_{n-\frac{p}{2}} & -a_{n-\frac{p}{2}+1} & -a_{n-\frac{p}{2}+2} & & \ddots & -a_{n} \\
a_{n} & a_{n+1} & \cdots & a_{n+\frac{p}{2}} & -a_{n-1} - a_{n-\frac{p}{2}-1} & -a_{n-\frac{p}{2}} & -a_{n-\frac{p}{2}+1} & & \cdots & -a_{n-1}
\end{bmatrix}
\tag{4.2.2}
$$

şeklinde elde edilmiştir.

<u>*Lemma 4.2.1:*</u> $p \geq 4$ için Padovan p-Hurwitz dizisinin karakteristlik denklemi

$$f(x) = x^{p+2} - x^{\frac{p}{2}+1} + x^{\frac{p}{2}} + 1 = 0$$

olup bu denklemin çok katlı kökü yoktur [19].

İspat: u nun $f(x)$ in bir çok katlı kökü olduğunu kabul edelim. Bu durumda u, $f(x)$ çok katlı bir kök olduğundan $f'(x)$ inde bir köküdür. Yani

$$f(u) = u^{p+2} - u^{\frac{p}{2}+1} + u^{\frac{p}{2}} + 1 = 0$$

ve

$$f'(u) = (p+2)u^{p+1} - \left(\tfrac{p}{2}+1\right)u^{\frac{p}{2}} + \tfrac{p}{2}u^{\frac{p}{2}-1} = u^{\frac{p}{2}-1}\left((p+2)u^{\frac{p}{2}+2} - \left(\tfrac{p}{2}+1\right)u + \tfrac{p}{2}\right) = 0$$

olmalıdır. $f(0) \neq 0$ olduğundan

$$x^{p+2} - x^{\frac{p}{2}+1} + x^{\frac{p}{2}} + 1 = 0$$

ve

$$(p+2)x^{\frac{p}{2}+2} - \left(\tfrac{p}{2}+1\right)x + \tfrac{p}{2} = 0$$

eşitlikleri elde edilir ki bu eşitliklerden de $p = 4,6$ için ortak bir kökün olmadığı görülür. Fakat genel durumun ispatı için $n \geq 4$ için $\frac{p}{2} = n$ alınırsa

$$x^{2n+2} - x^{n+1} + x^{n} + 1 = 0$$

ve

$$(2n+2)x^{n+2} - (n+1)x + n = 0$$

eşitlikleri elde edilir. α nın ortak bir kök olduğunu varsayalım. Son eşitlikten $\alpha^{n} = \dfrac{(n+1)\alpha - n}{(2n+2)\alpha^{2}}$ yazılabilir bu da birinci eşitlikte yerine yazılırsa

$$\left(\frac{(n+1)\alpha - n}{(2n+2)\alpha^{2}}\right)^{2}\alpha^{2} - \left(\frac{(n+1)\alpha - n}{(2n+2)\alpha^{2}}\right)\alpha + \left(\frac{(n+1)\alpha - n}{(2n+2)\alpha^{2}}\right) + 1 = 0$$

ifadesi elde edilir. Mathematica wolfrom 10.0 [6] gibi uygun yazılımlar kullanılarak denklemin bir kökünün olmadığı görülür, bu ise bir çelişki meydana getirmektedir. Bu çelişkiden dolayı $f(x) = 0$ denkleminin çok katlı bir köke sahip olmadığını gösterir.

$(p+2)\times(p+2)$ tipli $V^{(p)}$ Vandermonde matrisi:

$$V^{(p)} = \begin{bmatrix} (x_1)^{p+1} & (x_2)^{p+1} & \cdots & (x_{p+2})^{p+1} \\ (x_1)^{p} & (x_2)^{p} & \cdots & (x_{p+2})^{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & & x_{p+2} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ve $(p+2)\times 1$ tipli $W^{(p)}(i)$ matrisi:

$$W^{P}(i)=\begin{bmatrix} (x_1)^{n+p+2-i} \\ (x_2)^{n+p+2-i} \\ \vdots \\ (x_{p+2})^{n+p+2-i} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilsin ve $V^{(p)}(i,j)$ matrisi $V^{(p)}$ matrisinin $j.$ sütununun $W^{(p)}(i)$ sütun matrisi ile değiştirilmesi sonucu elde edilsin [19].

<u>*Teorem 4.2.1:*</u> $\alpha \geq 1$ için $(M)^{\alpha}=\left[m_{i,j}^{(\alpha)}\right]$ olsun. O halde

$$m_{i,j}^{(\alpha)}=\frac{\det V^{(p)}(i,j)}{V^{(p)}}$$

dır [19].

<u>*İspat:*</u> M matrisinin öz değerleri birbirinden farklı olduğu için M matrisi köşegenleştirilebilirdir. $D=diag(x_1,x_2,\ldots,x_{p+2})$ olsun. Bu durumda M matrisi köşegenleştirilebilir olduğundan $MV^{(p)}=V^{(p)}D$ eşitliği elde edilir. Ayrıca $\det V^{(p)}\neq 0$ olduğundan $V^{(p)}$ matrisi tersinir matristir. Böylece $\left(V^{(p)}\right)^{-1}MV^{(p)}=D$ eşitliği sağlanır ki, bu da M matrisinin D matrisine benzer olduğunu göstermektedir. $\alpha \geq 1$ için $(M)^{\alpha}V^{(p)}=V^{(p)}(D)^{\alpha}$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{cases} m_{i,1}^{(\alpha)}(x_1)^{p+1}+m_{i,2}^{(\alpha)}(x_1)^{p}+\cdots+m_{i,p+2}^{(\alpha)}=(x_1)^{n+p+2-i} \\ m_{i,1}^{(\alpha)}(x_2)^{p+1}+m_{i,2}^{(\alpha)}(x_2)^{p}+\cdots+m_{i,p+2}^{(\alpha)}=(x_2)^{n+p+2-i} \\ \vdots \\ m_{i,1}^{(\alpha)}(x_{p+2})^{p+1}+m_{i,2}^{(\alpha)}(x_{p+2})^{p}+\cdots+m_{i,p+2}^{(\alpha)}=(x_1)^{n+p+2-i} \end{cases}$$

linner denklem sistemi yazılabililmektedir. Her $i,j=1,2,\ldots,p+2$ için linner denklem sisteminin çözümünden

$$m_{i,j}^{(\alpha)}=\frac{\det V^{(p)}(i,j)}{V^{(p)}}$$

olduğu görülmektedir.

Sonuç 4.2.1: $2 \le k \le \frac{p}{2}+1$ olacak şekilde $i=\frac{p}{2}+k$ ve $j=i+1$ için a_n, n. Padovan p-Hurwitz dizisi olmak üzere

$$a_n = \frac{\det V^{(p)}(p+2,1)}{V^{(p)}}$$

ve

$$a_n = -\frac{\det V^{(p)}(p+2,1)}{V^{(p)}}$$

eşitlikleri elde edilir [19].

Sonuç 4.2.2: a_u, u. Padovan p-Hurwitz dizisi olsun. O halde

i. $a_u = \sum_{(t_1,t_2,\dots,t_{p+2})} \binom{t_1+\cdots+t_{p+2}}{t_1,\dots,t_{p+2}}$ olup burada toplam negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1+2t_2+\cdots+(p+2)t_{p+2}=u+p+1$ koşulunu sağlamaktadır.

ii. $a_u = \sum_{(t_1,t_2,\dots,t_{p+2})} \frac{t_{\frac{p}{2}+k+1}+t_{\frac{p}{2}+k+2}+\cdots+t_{p+2}}{t_1+t_2+\cdots+t_{p+2}} \times \binom{t_1+\cdots+t_{p+2}}{t_1,\dots,t_{p+2}}$ olup burada toplam negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1+2t_2+\cdots+(p+2)t_{p+2}=u+1$ koşulunu sağlamaktadır. Ayrıca $2 \le k \le \frac{p}{2}+1$ dir [19].

İspat: Teorem 2.1.2.6 dan

i. durum için $n=p+2$, $i=p+2$, $j=1$ alınırsa

ii. durum için ise $2 \le k \le \frac{p}{2}+1$ olacak şekilde $n=p+2$, $i=\frac{p}{2}+k$ ve $j=\frac{p}{2}+k+1$, alınırsa (2.1.2.1) ve (4.2.2) eşitliklerinde sonuç açık olarak görülür.

Tanım 4.2.2: $p \ge 4$ için $u \times u$ tipli $N_u^p = \left[n_{i,j}^p\right]$ süper köşegen matrisi;

$$n_{i,j}^{p}=\begin{cases}1 & \text{eğer } i=k+1 \text{ ve } j=k \text{ ise } 1\le k\le u-1, \\ & \text{ve} \\ & i=k \text{ ve } j=k+\frac{p}{2} \text{ ise } 1\le k\le u-\frac{p}{2}, \\ & \text{eğer } i=k \text{ ve } j=k+\frac{p}{2}+1 \text{ ise } 1\le k\le u-\frac{p}{2}-1, \\ & \text{ve} \\ -1 & \\ & i=k \text{ ve } j=k+p+1 \text{ ise } 1\le k\le u\text{-}p\text{-}1, \\ 0 & \text{diğer durumlarda.}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [19].

Teorem 4.2.2: $p\ge 4$ için a_α, α. Padovan p-Hurwitz dizisi olmak üzere: $u\ge p+2$ için

$$per\left(N_u^p\right)=a_{u+p+1}$$

eşitliği elde edilir [19].

İspat: Tümevarım yöntemi kullanılarak ispat yapılacaktır. Denklemin $u\ge p+2$ için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda denklemin $u+1$ için sağlandığı gösterilmelidir. Eğer N_u^p matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $per\left(N_u^p\right)$ genişletilir ise,

$$per\left(N_{u+1}^p\right)=per\left(N_{u-\frac{p}{2}}^p\right)-per\left(N_{u-\frac{p}{2}-1}^p\right)-per\left(N_{u-p-1}^p\right)$$

eşitliği elde edilir. $per\left(N_{u-\frac{p}{2}}^p\right)=a_{u-\frac{p}{2}}$, $per(N_{u-\frac{p}{2}-1}^p)=a_{u-\frac{p}{2}-1}$ ve $per\left(N_{u-p-1}^p\right)=a_{u-p-1}$ Padovan p-Hurwitz dizisinin indirgeme bağıntıları kullanılarak $per\left(N_u^p\right)=a_{u+p+1}$ eşitliği elde edilir.

$u>p+2$ ve $p\ge 4$ için $u\times u$ tipli $H_u^p=\left[h_{i,j}^p\right]$ ve $K_u^p=\left[k_{i,j}^p\right]$ matrisleri;

$$h_{i,j}^{p}=\begin{cases} 1 & \begin{array}{c} \text{eğer } i=m+1 \text{ ve } j=m \text{ ise } 1\le m\le u-1, \\ \text{ve} \\ i=m \text{ ve } j=m+\frac{p}{2} \text{ ise } 1\le m\le u-p-1, \end{array} \\ -1 & \begin{array}{c} \text{eğer } i=m \text{ ve } j=m+p+1 \text{ ise } 1\le m\le u-p-1, \\ i=m \text{ ve } j=m+\frac{p}{2} \text{ ise } 1\le m\le u-p-1, \\ \text{ve} \\ i=m \text{ ve } j=m+\frac{p}{2} \text{ ise } u-p\le m\le u-1 \end{array} \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

ve

$$K_u^p=\begin{array}{c} \qquad\qquad (u-p-2)-\text{inci} \\ \qquad\qquad \downarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & H_{u-1}^{p} & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklinde tanımlanır [19].

<u>*Teorem 4.2.3:*</u> $u>p+2$ için a_α, α. Padovan p-Hurwitz dizisi olmak üzere

$$per(H_u^p)=a_{u+p+2}$$

ve

$$per(K_u^p)=\sum_{\tau=0}^{u+1} a\tau$$

dir [19].

<u>*İspat:*</u> Teoremin ilk kısmını göz önüne alalım. Tümevarım yöntemi kullanılarak ispat yapılacaktır. Denklemin $u>p+2$ için sağladığını kabul edelim. Bu durumda, denklemin $u+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. Eğer H_u^p matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $per\left(H_u^p\right)$ genişletilir ise,

$$
\begin{aligned}
per\left(H_{u+1}^{p}\right) &= per\left(H_{u-\frac{p}{2}}^{p}\right) - per\left(H_{u-\frac{p}{2}-1}^{p}\right) - per\left(H_{u-p-1}^{p}\right) \\
&= a_{u+\frac{p}{2}+2} - a_{u+\frac{p}{2}+1} - a_{u+1} \\
&= a_{u+p+2}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Teoremin ikinci kısmını göz önüne alalım. Eğer K_u^p matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $per\left(K_u^p\right)$ genişletilir ise,

$$per(K_u^p) = per(\mathrm{K}_{u-1}^p) + per(H_u^p)$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$u > p+2$ için $u \times u$ tipli T matrisi;

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $u > p+2$ için

$$per\left(N_u^p\right) = \det\left(N_u^p \circ T\right) \ ,$$

$$per\left(H_u^p\right) = \det\left(H_u^p \circ T\right)$$

ve

$$per\left(K_u^p\right) = \det\left(K_u^p \circ T\right)$$

eşitlikleri elde edilir.

<u>*Sonuç 4.2.3:*</u> $p \geq 4$ ve $u > p+2$ için;

$$\det\left(N_u^p \circ T\right) = a_{u+p+2},$$

$$\det\left(\mathrm{H}_u^p \circ T\right) = a_u$$

ve

$$\det\left(H_u^p \circ T\right) = \sum_{\tau=1}^{u-1} a_\tau$$

eşitlikleri elde edilir [19].

$p \geq 4$ için Padovan p -Hurwitz dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{x^{p+1}}{1 - x^{\frac{p}{2}+1} + x^{\frac{p}{2}+2} + x^{p+2}}$$

dır [19].

<u>Teorem 4.2.4:</u> Padovan p -Hurwitz sayılarının üstel temsili aşağıdaki gibidir [19]:

$$g(x) = x^{p+1} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x^{\frac{p}{2}+1}\right)^n}{n} \left(1 - x - x^{\frac{p}{2}+1}\right)^n \right).$$

<u>İspat:</u> $In\ g(x) = In\ x^{p+1} - In\left(1 - x^{\frac{p}{2}+1} + x^{\frac{p}{2}+2} + x^{p+2}\right)$

ve

$$In\left(1 - x^{\frac{p}{2}+1} + x^{\frac{p}{2}+2} + x^{p+2}\right) = -\left[x^{\frac{p}{2}+1}\left(1 - x - x^{\frac{p}{2}+1}\right) + \frac{1}{2}\left(x^{\frac{p}{2}+1}\right)^2 \left(1 - x - x^{\frac{p}{2}+1}\right) + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{i}\left(x^{\frac{p}{2}+1}\right)^i \left(1 - x - x^{\frac{p}{2}+1}\right)^i - \cdots \right]$$

olduğundan

$$g(x) = x^{p+1} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x^{\frac{p}{2}+1}\right)^n}{n} \left(1 - x - x^{\frac{p}{2}+1}\right)^n \right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi Padovan p -Hurwitz sayılarının toplamsal temsillerini düşünelim.

$S_n = \sum_{\tau=1}^{n} a_\tau$ olmak üzere $(p+3) \times (p+3)$ tipli Z_p matrisinin toplamsal temsili aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$Z_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & M & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Bu durumda tümevarım yöntemi kullanılarak $(Z_p)^n$ matrisi:

$$(Z_p)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{n+p} & & & \\ S_{n+p-1} & & (M)^n & \\ \vdots & & & \\ S_{n-1} & & & \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. [19].

4.3 Sonlu Gruplarda Padovan p -Circulant Dizileri

$\{x_n\}$ Padovan *p*-circulan dizisi bir m modülüne göre indirgenirse, tekrar eden

$$\{x_n(m)\} = \{x_1(m), x_2(m), ..., x_{p+2}(m), x_{p+3}(m), ..., x_i(m), ...\}$$

indirgemeli dizisi elde edilir ve burada $x_i(m) = x_i(\bmod m)$ dir. Bu bağıntı (4.1.1) deki bağıntı ile aynıdır [25].

Teorem 4.3.1: $\{x_n(m)\}$ dizisi basit periyodik bir dizidir [25].

İspat: $X = \{(x_1, x_2, ..., x_{p+3}) \mid 0 \le x_i \le m-1\}$ olsun. $|X| = m^{p+3}$ olup sonludur, yani her $j \ge 0$ için $x_{i+p+3}(m) \equiv x_{j+p+3}(m), x_{i+p+2}(m) \equiv x_{j+p+2}(m), x_{i+1}(m) \equiv x_{j+1}(m)$ olacak şekilde $i \ge j$ sayısı vardır. (4.1.1) bağıntısından $x_i(m) \equiv x_j(m), x_{i-1}(m) \equiv x_{j-1}(m), \ldots, x_{i-j+1}(m) \equiv x_1(m)$ olur. Böylece $\{x_n(m)\}$ dizisi basit periyodik bir dizidir.

$p \ge 2$ için $h_{c-p}(m)$ ile $\{x_n(m)\}$ nin en küçük periyodu gösterilir.

Örnek 4.3.1: $p = 2$ için

$$\{x_n(2)\} = \{0,0,0,0,1,1,1,0,1,1,0,0,1,0,1,0,0,0,0,1\}$$

dizisi ele alınırsa, bu dizi her 15 terimde bir başlangıç elemanlarıyla tekrar eder. Böylece $h_{c-2}(2)=15$ olur [25].

Verilen bir $M=\left[m_{ij}\right]$ matrisi için, M nin her elemanının m modülüne göre indirgenmesi $M(\text{mod } m)$ şeklinde ifade edilir. Yani, $M(\text{mod } m)\equiv\left(m_{ij}(\text{mod } m)\right)$ dir. $\left\langle C_p\right\rangle_m=\left\{\left(C_p\right)^i(\text{mod}\, m)\middle| i\geq 0\right\}$ olsun. $\det\left(C_p\right)^i=(-1)^{ip+i}$ olduğundan $\left\langle C_p\right\rangle_m$ devirli gruptur. $\left|\left\langle C_p\right\rangle_m\right|$ ile $\left\langle C_p\right\rangle_m$ nin mertebesi gösterilmiştir. (4.1.2) bağıntısından

$h_{c-p}(m)=\left|\left\langle C_p\right\rangle_m\right|$ olduğu görülür.

<u>*Tanım 4.3.1:*</u> $p\geq 2$ ve $2\leq j\leq p+3$ olmak üzere $\left(x_1,x_2,\ldots,x_j\right)\in X$, j -gerenlisi için $P_{c-p}\left(G;x_1,x_2,\ldots,x_j\right)=\left\{a_n\right\}$ Padovan p -circulant orbiti

$$\begin{cases} a_1=x_1,\, a_2=x_2,\ldots,\, a_j=x_j,\, a_{j+1}=\cdots=a_{p+3}=e & j<p+3 \quad \text{ise,} \\ a_1=x_1,\, a_2=x_2,\ldots,\, a_{p+3}=x_{p+3} & j=p+3 \quad \text{ise,} \end{cases}$$

başlangıç değerleri ve $n\geq 1$ ile birlikte

$$a_{n+p+3}=\left(a_n\right)^{-1}\left(a_{n+p}\right)^{-1}\left(a_{n+p+2}\right)$$

şeklinde tanımlanır [25].

<u>*Teorem 4.3.2:*</u> Sonlu bir G grubunun Padovan *p*- circulant orbiti basit periyodiktir [25].

<u>*İspat:*</u> G grubunun mertebesi n olsun. G grubunun elemanlarının birbirinden farklı sıralı n^{p+3}-lilerin sayısı $(p+3)$ olduğundan en az bir tanesi Padovan p -circulant orbitinde iki kez ortaya çıkar. Böylece bu tekrardan dolayı Padovan p -circulant orbiti periyodiktir. Padovan *p*- circulant orbiti periyodik olduğundan $u>v$ olmak üzere

$$a_{u+1}=a_{v+1},\; a_{u+2}=a_{v+2},\ldots,\; a_{u+p+3}=a_{v+p+3}$$

olacak şekilde u ve v doğal sayılar vardır. Diğer taraftan tanım (4.3.1) den

$$a_u=\left(a_{n+p}\right)^{-1}\left(a_{u+p+2}\right)\left(a_{u+p+3}\right)^{-1} \text{ ile } a_v=\left(a_{v+p}\right)^{-1}\left(a_{v+p+2}\right)\left(a_{v+p+3}\right)^{-1}$$

yazılır. Bu nedenle $a_u=a_v$ eşitliği elde edilir. Böylece

$$a_{u-v+1}=a_{v-v+1}=a_1,\; a_{u-v+2}=a_{v-v+2}=a_2,\ldots,\; a_{u-v+p+3}=a_{v-v+p+3}=a_{p+3}$$

elde edilir ki bu da Padovan p-circulant orbitinin basit periyodik olduğu anlamına gelir.

$LP_{c-p}\left(G;x_1,x_2,\ldots,x_j\right)$ notasyonu ile $P_{c-p}\left(G;x_1,x_2,\ldots,x_j\right)$ Padovan p- circulant orbitinin periyot uzunluğu gösterilsin.

<u>*Teorem 4.3.3:*</u> $m\geq 3$ olmak üzere (x,y) geren çifti için Q_{2^m} quaternion grubunu düşünelim. O zaman $P_{c-p}\left(Q_{2^m};x,y\right)$ Padovan p- circulant orbitinin periyot uzunluğu $2^{m-2}\cdot h_{c-p}(2)$ dir [25].

<u>*İspat:*</u> İlk olarak $Q_{2^m}=\langle x,y:\mathrm{x}^{2m-1}=e, y^2=x^{2^{m-2}}, y^{-1}xy=x^{-1}\rangle$ takdimiyle verilen Q_{2^m} quaternion grubunu ele alalım. Grup takdiminde verilen $xy=yx^{-1}$ ve $yx=x^{-1}y$ bağıntıları yardımıyla Padovan p- circulant orbiti

$$\begin{aligned}
&a_1=x, a_2=y, a_3=e, \ldots, a_{p+3}=e, \ldots,\\
&a_{2h_{c-p}(2)+1}=x^5, a_{2h_{c-p}(2)+2}=yx^4, a_{2h_{c-p}(2)+3}=x^{4\lambda_1},\\
&a_{2h_{c-p}(2)+4}=x^{4\lambda_2}, a_{2h_{c-p}(2)+5}=x^{4\lambda_3},\ldots, a_{2h_{c-p}(2)+p+3}=x^{4\lambda_{p+1}},
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{p+1}\in\mathbb{N}$ dir. Yukardaki ifadeler kullanılarak

$$\begin{aligned}
&a_1=x, a_2=y, a_3=e, \ldots, a_{p+3}=e, \ldots,\\
&a_{2ih_{c-p}(2)+1}=x^{4i+1}, a_{2ih_{c-p}(2)+2}=yx^{4i}, a_{2ih_{c-p}(2)+3}=x^{4ik_1},\\
&a_{2ih_{c-p}(2)+4}=x^{4ik_2}, a_{2ih_{c-p}(2)+5}=x^{4ik_3},\ldots, a_{2ih_{c-p}(2)+p+3}=x^{4ik_{p+1}},
\end{aligned}$$

şeklindeki dizi elde edilir. Burada $k_1,k_2,\ldots,k_{p+1}\in\mathbb{N}$ dir. Böylece $m\geq 3$ için $2^{m-1}\big|4i$ olacak şekilde en küçük $i\in\mathbb{N}$ sayısının belirlenmesi gerekmektedir.

Bu durumda $i=2^{m-3}$ olarak alınırsa;

$$a_{2^{m-2}h_{c-p}(2)+1}=x, a_{2^{m-2}h_{c-p}(2)+2}=y, a_{2^{m-2}h_{c-p}(2)+3}=e,\ldots, a_{2^{m-2}h_{c-p}(2)+p+3}=e$$

elde edilir. $a_{2^{m-2}h_{c-p}(2)+1}, a_{2^{m-2}h_{c-p}(2)+2}, a_{2^{m-2}h_{c-p}(2)+3}, \ldots, a_{2^{m-2}h_{c-p}(2)+p+3}$ tekrar eden elementler olduğundan x,y ve e başlangıç değerlerine bağlı olarak $\left(2^{m-2}\cdot h_{c-p}(2)\right)^{\mathrm{nd}}$. elemandan sonra tekrar eder. $LP_{c-p}\left(Q_{2^m};x,y\right)=2^{m-2}\cdot h_{c-p}(2)$ dir.

4.4 Sonlu Gruplarda Padovan p-Hurwitz Dizileri

$\{a_n\}$ Padovan p-Hurwitz dizisi bir m modülüne göre indirgenirse, tekrar eden

$$\{a_n(m)\} = \{a_0(m), a_1(m), ..., a_p(m), a_{p+1}(m), ..., a_i(m), ...\}$$

indirgemeli dizi elde edilir ve burada $a_i(m)$ ile $a_i \pmod m$ gösterilir.

<u>*Teorem 4.4.1:*</u> $\{a_n(m)\}$ dizisi basit periyodik bir dizidir [18].

<u>*İspat:*</u> Farzedelim ki $A_p = \{(a_0, a_1, \ldots, a_{p+1}) \mid 0 \le a_i \le m-1\}$ olsun. Bu durumda $|A_p| = m^{p+2}$ dir. Z_m nin elemanlarının m^{p+2} tane farklı $(p+2)$-tiplisi mevcut olduğundan, bu $(p+2)$-tipilerden en az bir tanesi $\{a_n(m)\}$ dizisinde iki kez ortaya çıkar. Bundan dolayı bu $(p+2)$-lileri takip eden alt dizi tekrarlanır. Böylece dizi periyodiktir. $v > u$ ve $v \equiv u \pmod{p+1}$ olmak üzere

$$a_{u+1}(m) = a_{v+1}(m), a_{u+2}(m) = a_{v+2}(m), \ldots, a_{u+p+1}(m) = a_{v+p+1}(m)$$

sonucuna ulaşılır. Padovan p-Hurwitz dizisinin tanımından,

$$a_{n+\frac{p}{2}+1} - a_{n+p+2} - a_{n+\frac{p}{2}} = a_n$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitilik kullanılarak

$$a_u(m) = a_v(m), a_{u-1}(m) = a_{v-1}(m), \ldots,$$
$$a_1(m) = a_{v-u+1}(m), a_0(m) = a_{v-u}(m),$$

elde edilir ki bu da $\{a_n(m)\}$ dizisinin basit periyodik dizi olduğunu gösterir.

$\{a_n(m)\}$ dizisinin periyodu $h_{h-p}(m)$ ile gösterilsin. Verilen bir $A = [a_{ij}]$ matrisi için, A nın her elemanının m modülüne göre indirgenmesi $A(\bmod m)$ şeklinde ifade edilir. Yani, $A(\bmod m) = (a_{ij}(\bmod m))$ dir. $p \ge 4$ ve $\langle M \rangle_m = \{M^i(\bmod m) \mid i \ge 0\}$ olmak üzere verilen herhangi bir $p\,(p = 4, 6, 8, \ldots)$ için $\det M = 1$ olduğundan $\langle M \rangle_m$ devirli bir gruptur. $\left|\langle M\rangle_m\right|$ ile $\langle M\rangle_m$ nin mertebesi gösterilmiştir. (4.2.2) bağıntısından $h_{h-p}(m)=\left|\langle M\rangle_m\right|$ olduğu görülür.

Teorem 4.4.2: k bir asal sayı ve $t, h_{h-p}(k)=h_{h-p}(k^t)$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tam sayı olsun. O halde $\alpha \geq t$ için $h_{h-p}(k^\alpha)=k^{\alpha-t}\cdot h_{h-p}(k)$ eşitliği yazılır [18].

İspat: Farzedelim ki q pozitif bir tamsayı olsun. $M^{h_{h-p}(k^{q+1})}\equiv I\left(\bmod k^{q+1}\right)$ olduğundan $M^{h_{h-p}(k^{q+1})}\equiv I\left(\bmod k^{q}\right)$ yazılabilir. Böylece $h_{h-p}(k^q)$ nin $h_{h-p}(k^{q+1})$ yi böldüğü görülmektedir. Ayrıca $M^{h_{h-p}(k^q)}=I+\left(m_{ij}^{(q)}\cdot k^q\right)$ eşitliği yazılarak binom açılımından,

$$M^{h_{h-p}(k^q)\cdot k}=\left(I+\left(m_{ij}^{(q)}\cdot k^q\right)\right)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(m_{ij}^{(q)}\cdot k^q\right)^i\equiv I\left(\bmod k^{q+1}\right)$$

elde edilir ki bu da $h_{h-p}(k^{q+1})$ nin $h_{h-p}(k^q)\cdot k$ tarafından bölünebilir olduğunu gösterir. Böylece $h_{h-p}(k^{q+1})=h_{h-p}(k^q)$ ya da $h_{h-p}(k^{q+1})=h_{h-p}(k^q)\cdot k$ dir. Ancak burada ki ikinci durumun sağlanması, k tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(q)}$ nin var olması ile mümkündür. $h_{h-p}(k^q)\neq h_{h-p}(k^{q+1})$ olduğundan k tarafından bölünemeyen $m_{ij}^{(t+1)}$ vardır. Dolayısıyla $h_{h-p}(k^{q+1})\neq h_{h-p}(k^{q+2})$ sonucu elde edilir ve t üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.3: $t\geq 1$ olmak üzere $m=\prod_{i=1}^{t}k_i^{e_i}$ olacak şekilde asal çarpanlarına ayrılmış olsun. Bu durumda $h_{h-p}(m)$, $h_{h-p}(k_i^{e_i})$ lerin en küçük ortak katına eşittir [18].

İspat: $\left\{a_n\left(k_i^{e_i}\right)\right\}$ dizisinin periyodu $h_{h-p}(k_i^{e_i})$ olduğundan $\left\{a_n\left(k_i^{e_i}\right)\right\}$ dizisi sadece $u\cdot h_{h-p}(k_i^{e_i})$, $(u\in N)$ uzunluğundaki bloklarda tekrar eder. Aynı zamanda $\left\{a_n(m)\right\}$

dizisinin periyodu $h_{h-p}(m)$ olduğundan, her i değeri için $\{a_n(k_i^{e_i})\}$ dizisi $h_{h-p}(m)$ terimde bir tekrar eder. Böylece, her i değeri için $h_{h-p}(m)$ periyodu $u \cdot h_{h-p}(k_i^{e_i})$ şeklinde olup, bu sayı $\{a_n(m)\}$ dizisinin periyodunu vermektedir. Dolayısıyla

$$h_{h-p}(m) = \text{okek}\left[h_{h-p}(k_1^{e_1}), h_{h-p}(k_2^{e_2}), \ldots, h_{h-p}(k_t^{e_t})\right]$$

eşitliği elde edilir.

<u>*Tanım 4.4.1:*</u> $p \geq 4$ ve $2 \leq j \leq p+2$ olmak üzere $(x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}) \in X$, j-gerenlisi için $P_{h-p}(G; x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}) = \{b_n\}$ Padovan p- Hurwitz orbiti

$$\begin{cases} b_0 = x_0, b_1 = x_1, \ldots, b_{j-1} = x_{j-1}, b_j = \cdots = b_{p+1} = e & j < p+1 \text{ ise,} \\ b_0 = x_0, b_1 = x_1, \ldots, b_{p+1} = x_{p+1} & j = p+1 \text{ ise,} \end{cases}$$

başlangıç değerleri ve $n \geq 0$ ile birlikte

$$b_{n+p+2} = (b_n)^{-1}\left(b_{n+\frac{p}{2}}\right)^{-1}\left(b_{n+\frac{p}{2}+1}\right)$$

şeklinde tanımlanır [18].

<u>*Teorem 4.4.4:*</u> Sonlu bir G grubu Padovan p- Hurwitz orbiti basit periyodiktir [18].

<u>*İspat:*</u> G grubunun mertebesi n olsun. G grubunun elemanlarının birbirinden farklı sıralı $n^{(p+2)}$-lilerin sayısı $(p+2)$ olduğundan en az bir tanesi Padovan p- Hurwitz orbitinde iki kez ortaya çıkar. Böylece bu tekrardan dolayı Padovan p- Hurwitz orbiti periyodiktir. Padovan p- Hurwitz orbiti periyodik olduğundan $u > v$ için

$$b_{u+1} = b_{v+1},\ b_{u+2} = b_{v+2}, \ldots,\ b_{u+p+1} = b_{v+p+1}$$

olacak şekilde u ve v doğal sayılar vardır. Diğer taraftan Padovan p- Hurwitz orbiti tanımından

$$b_u = \left(b_{u+\frac{p}{2}}\right)^{-1}\left(b_{u+\frac{p}{2}+1}\right)\left(b_{u+p+2}\right)^{-1} \text{ ve } b_v = \left(b_{v+\frac{p}{2}}\right)^{-1}\left(b_{v+\frac{p}{2}+1}\right)\left(b_{v+p+2}\right)^{-1}$$

yazılır. Bu nedenle $b_u = b_v$ eşitliği elde edilir. Böylece

$$b_{u-v} = b_{v-v} = b_0, b_{u-(v-1)} = b_{v-(v-1)} = b_1,\ b_{u-(v-2)} = b_{v-(v-2)} = b_2, \ldots, b_{u-(v-(p+1))} = b_{v-(v-(p+1))} = b_{p+1}$$

elde edilir ki bu da Padovan p- Hurwitz orbitinin basit periyodik olduğu anlamına gelir.

<u>*Teorem 4.4.5:*</u> (x, y) geren çifti için SD_{2^n} semidihedral grubunun Padovan p- Hurwitz orbitinin periyot uzunluğu $2^{n-2} \cdot h_{h-p}(2)$ dir [18].

<u>*İspat:*</u> Doğrudan hesaplama yöntemi kullanılarak teorem ispatlanır.

Padovan p- Hurwitz orbiti:

$$\begin{aligned} &b_0 = x, b_1 = y, b_3 = e, \ldots, b_{p+1} = e, b_{p+2} = x^{-1}, b_{p+3} = y, \ldots, \\ &b_{2h_{h-p}(2)} = x^5, b_{2h_{h-p}(2)+1} = x^4 y, b_{2h_{h-p}(2)+2} = x^{4\lambda_1}, \\ &b_{2h_{h-p}(2)+3} = x^{4\lambda_2}, b_{2h_{h-p}(2)+4} = x^{4\lambda_3}, \ldots, b_{2h_{h-p}(2)+p+1} = x^{4\lambda_p}, \end{aligned}$$

şeklindedir, burada $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{N}$ dir. Yukardaki ifadeler kullanılarak

$$\begin{aligned} &b_0 = x, b_1 = y, b_2 = e, \ldots, b_{p+1} = e, \ldots, \\ &b_{2ih_{h-p}(2)} = x^{4i+1}, b_{2ih_{h-p}(2)+1} = x^{4i} y, b_{2ih_{h-p}(2)+2} = x^{4ik_1}, \\ &b_{2ih_{h-p}(2)+3} = x^{4ik_2}, b_{2ih_{h-p}(2)+4} = x^{4ik_3}, \ldots, b_{2ih_{h-p}(2)+p+1} = x^{4ik_p}, \end{aligned}$$

şeklindeki dizi elde edilir, burada $k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{N}$ dir. Bu durumda $n \geq 4$ için $2^{n-1} \cdot \beta = 4i \ (\beta \in \mathbb{N})$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekirmektedir. Eğer $i = 2^{n-3}$ seçilirse,

$$b_{2^{n-2} h_{h-p}(2)} = x = b_0,\ b_{2^{n-2} h_{h-p}(2)+1} = y = b_1,\ b_{2^{n-2} h_{h-p}(2)+2} = e = b_2, \ldots, b_{2^{n-2} h_{h-p}(2)+p+1} = e = b_{p+1}$$

elde edilir. Böylece Padovan p-Hurwitz orbitinin periyot uzunluğu $LP_{h-p}(SD_{2^n}; x, y) = 2^{n-2} \cdot h_{h-p}(2)$ olur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, Padovan p-dizisinin karakteristik polinomu yardımıyla circulant ve Hurwitz matrisleri elde edildi. Elde edilen bu circulant ve Hurwitz matrisleri kullanılarak sırasıyla Padovan p-circulant ve Padovan p-Hurwitz dizileri tanımlandı. Tanımlanan dizilerin Binet formülleri, permanental, determinantal, üstel ve toplamsal temsilleri ve sonlu toplamları gibi çeşitli özellikleri belirlendi.

Tanımlanan dizilerin m modülüne göre periyotları belirlendi ve bu dizilerin üreteç matrisleri m modülüne göre indirgenmek suretiyle devirli gruplar üretildi.

Tanımlanan diziler gruplara genişletildi ve bu anlamda diziler, grup elemanları yardımıyla kendi yapısal özellikleri de dikkate alınarak yeniden tanımlandı. Böylece tanımlanan Padovan p-circulant dizisi Q_{2^m} genelleştirilmiş quaternion grubunda ve Padovan p-Hurwitz dizisi de SD_{2^n} semidihedral grubunda incelenmiştir.

6.KAYNAKLAR

[1] Adams, W. and Shanks, D. (1982). Strong Primality Tests that are not sufficient. Mathematics of Compt, 36(159), 255-300.

[2] Ağargün, A. G., Özdağ, H. (2008). Lineer Cebir ve Çözümlü Problemleri. Birsen Yayınevi, İstanbul.

[3] Aydın, H. and Dikici, R. (1998). General Fibonacci sequences in finite groups. The Fibonacci Quart, 36(3), 216-221.

[4] Başar, F. (2012). Lineer Cebir. Sürat Üniversite Yayınları.

[5] Becker, P.G. (1994). k-Regular Power Series and Mahler-Type Functional Equations. J. Number Theory, 49(3), 269-286.

[6] Bicknell, M. (1975). A primer on the Pell sequences and Related sequence. The Fibonacci Quart, 13(4), 345-350.

[7] Campbell, C. M., Doostie, H. and Robertson, E. F. (1990). Fibonacci length of generating pairs in groups in Applications of Fibonacci Numbers. Vol. 3 Eds. G. E. Bergum et al. Kluwer Academic Publishers, pp. 27-35.

[8] Cangül, İ. (2001). Soyut Cebir. Dora Basım-Yayın Dağıtım Ltd. Şti, Bursa.

[9] Çallıalp, F. (2001). Örneklerle Soyut Cebir. Birsen Yayınevi, İstanbul.

[10] Deveci, Ö. and Aküzüm, Y. (2017). The recurrence sequences via Hurwitz matrices. Sci. Ann."Al. I. Cuza",Univ. Iasi, f3, 529-542.

[11] Deveci, Ö., Aküzüm, Y. and Karaduman, E. (2015). The Pell-Padovan p-Sequences and Its Applications.Util. Math. ; 98, 327-347.

[12] Deveci, Ö. (2016). The Pell-Circulant Sequences and their Applications. Maejo Int. J. Sci. Technol., 10(03), 284-293.

[13] Deveci, Ö. The Padovan-Circulant Sequences and Their Applicationsis submitted.

[14] Deveci, Ö. and Karaduman, E. (2012). The generalized order-*k* Lucas sequences in Finite groups. J. Appl. Mat*h*., 464580-1-464580-15.

[15] Deveci, Ö. and Karaduman, E. (2015). The Jacobsthal-Circulant Sequences and Their Applications. Romai J., v.11, no.2, 77–88.

[16] Deveci, Ö., Karaduman, E. and Campbell, C. M. (2017). The Fibonacci-Circulant Sequences and Their Applications. Iran J. Technol. Trans. Sci., 41, 1033-1038.

[17] Deveci, Ö. and E, Karaduman.(2017). On The Padovan p-Numbers.Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 46(4), 579-592.

[18] Deveci, Ö. and İpek, G. (2018). The Padovan *p*-Hurwitz Sequences in Finite Groups. 4th International Congress on Vocationaland Technical Sciences-UMTEB, 7-9 December, Erzurum, Turkey.

[19] Deveci, Ö., İpek, G. and Doğan, T. On The Padovan *p*-Hurwitz Numbers and Their Properties. The Jamaican Journal of Scienceand Technology, in pres.

[20] Everest, G., Poorten, A.V.D., Shparlinski, I., Ward, T. (2003). Recurrence Sequences. American Math. Soc.

[21] Falcon, S. and Plaza, A. (2009). *k*-Fibonacci Sequences Modulo m .Chaos, Solitons & Fractals, 41, 497-504.

[22] Gil, J. B., Wiener, M. D. and Zara, C. Complete Padovan Sequences in Finite Fields.http://arxiv.org/pdf/math/0605348.pdf

[23] Honsberger, R. (1985). The matrix Q, mathematical Gems III. Washington DC, Math. Assoc. Amer., 106-107.

[24] Hurwitz, A. (1895). Ueber die Bedingungen unter welchen eine gleichung nur Wurzeln mit negative reellen teilen besitzt. Mathematische Annalen,46, 273-284.

[25] İpek, G. and Deveci, Ö. (2018). The Padovan *p*-Circulant Sequencesin Finite Groups. 4th International Congress on Vocational and Technical Sciences-UMTEB, 79 December, Erzurum, Turkey.

[26] İpek, G., Deveci, Ö. and Shannon, A.G. On The Padovan *p*–Circulant Numbers, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, in press.

[27] Johnson, D.L. (1990). Presentation of Groups. Cambridge University Press.

[28] J. Hiller., Y, Aküzüm. and Ö. Deveci. (2018). The Adjacency-Pell-Hurwitz Numbers. Integers,18,1-15.

[29] Karakaş, H.İ. (2010). Cebir Dersleri. Tüba Yayınları, Ankara .

[30] Kalman, D. (1982). Generalized Fibonacci numbers by matrix methods. The Fibonacci Quart., 20(1), 73–76.

[31] Karaduman, E. and Aydın, H. (2009). k-nacci Sequences in Some Special Groups of Finite Order. Mathematical and Computer Modelling, 50(1-2), 53-58.

[32] Kılıç, E. and Stakhov, A. P. (2009). On the Fibonacci and Lucas p-numbers, their sums, families of bipartite graphs and permanents of certain matrices. Chaos Solitons Fractals, 40, 2210–2221.

[33] Kılıç, E. and Taşcı, D. (2006). The generalized Binet formula, representation and sums of the generalized order-k Pell numbers. Taiawanese J. Math., 10(6), 1661-1670.

[34] Knox, S.W. (1992). Fibonacci sequences in finite groups. The Fibonacci Quarterly, 30(2), 116-120.

[35] Lien, J. (2005). Padovan Sequence. Pers. Comm., Mar. 11,2005, http://mathworld.wolfram.com/Padovan Sequence.html.

[36] Özkan, E., Aydin, H. and Dikici, R. (2003). 3-step Fibonacci series modulo m. Applied Mathematics and Computation, 143, 165-172.

[37] Taşcı, D. (2005). Lineer Cebir. Gazi Kitapevi .

[38] Taşcı, D. (2010). Soyut Cebir. Alp Yayınevi, Ankara.

[39] Tuğlu, N., Koçer, E. G. and Stakhov, A. P. (2004). Bivariate Fibonacci like *p*-Polinomials. Appl. Math. and Compt, 155, 637-641.

[40] Yılmaz, F. and Bozkurt, D. (2009). The generalized order-k Jacobsthal numbers,.Int. J. Contemp. Math. Sciences, 4(34), 1685-1694.

[41] Wall, D. D. (1960). Fibonacci series modulo m. Amer Math. Monthly; 67, 525-532.

[42] Wilcox, H. J. (1986). Fibonacci Sequences of Period n in Groups.Fibonacci Quart., 24, 356-361.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	: Güzel Mutlugüneş
Doğum Yeri	: Kars / Kağızman
Doğum Tarihi	:10.04.1989
İletişim (e-posta)	:guzelipek_36@hotmail.com

Eğitim Durumu:

Lise	:Kağızman Aras Anadolu Lisesi
Lisans	:Kafkas Üniversitesi/ Fen-Edebiyat Fakültesi
Yüksek Lisans	:Kafkas Üniversitesi/ Fen Bilimleri Estitüsü

Çalıştığı Kurum / Kurumlar Yıl	:Günindi Köyü İlköğretim Okulu 2015
	:Kümbetli Orta Okulu 2017
	:Kars Anadolu İmam Hatip Lisesi 2018
	:Hacı Sait İlbeyi İmam Hatip Orta Okulu 2019

Yayınları:

[1] Deveci, Ö. and İpek, G. (2018). The Padovan *p*-Hurwitz Sequences in Finite Groups. 4th International Congress on Vocationaland Technical Sciences-UMTEB, 7-9 December, Erzurum, Turkey.

[2] Deveci, Ö., İpek, G. and Doğan, T. On The Padovan *p*-Hurwitz Numbers and Their Properties. The Jamaican Journal of Scienceand Technology, in press.

[3] İpek, G., Deveci, Ö. and Shannon, A.G. On The Padovan *p* –Circulant Numbers, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, in press.

[4] İpek, G. and Deveci, Ö. (2018). The Padovan *p*-Circulant Sequences in Finite Groups. 4th International Congress on Vocational and Technical Sciences-UMTEB, 7-9 December, Erzurum, Turkey.