T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MEROMORF Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BELLİ ALT SINIFLARI İÇİN KATSAYI EŞİTSİZLİĞİ

Hatice Tuğba YOLCU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Erhan DENİZ

AĞUSTOS-2019

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Hatice Tuğba YOLCU 'nun Prof. Dr.Erhan DENİZ'in danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Meromorf Bi-Ünivalent Fonksiyonların Belli Alt Sınıfları İçin Katsayı Eşitsizliği" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

22/08/2019

	Adı ve Soyadı	**imza**
Başkan	**:Prof. Dr. İsa YILDIRIM**	....
Üye	**:Prof. Dr. Erhan DENİZ**	....
Üye	**:Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR**	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü YönetimKurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . /. . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ

EnstitüMüdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

H.Tuğba YOLCU

22.08.2019

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

Meromorf Bi-Ünivalent Fonksiyonların Belli Alt Sınıfları İçin Katsayı Eşitsizliği

Hatice Tuğba YOLCU

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erhan DENİZ

Bu tez çalışmasında, esasen Faber polinomları kullanılarak kompleks mertebeden meromorf bi-subordinasyon fonksiyonların genel katsayısı için bir üst sınır bulunmuştur. Daha sonra aynı fonksiyonlar için ilk katsayılara ilişkin üst sınır problemi çözülmüştür. Ayrıca, parametrelerin özel durumlarında bi-ünivalent fonksiyonların özel alt sınıfları için üst sınırlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Meromorf bi-ünivalent fonksiyon, Meromorf bi-yıldızıl fonksiyon, Faber polinomu, Subordinasyon.

2019, 68 sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

Coefficient Inequality for Certain Subclasses of Meromorphic Bi-univalent Functions

Hatice Tuğba YOLCU

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Erhan DENİZ

In this thesis, essentially an upper bound for general coefficient of the meromorphic bi-subordinate functions of complex order by using Faber polynomial is obtained. Later, the initial coefficients problem is solved for the same functions. Morever, upper bounds for special subclasses of bi-univalent functions in special cases of parameters are given.

Keywords: Meromorphic bi-univalent function, Meromorphic bi-starlike function, Faber polynomial, Subordination.

2019, 68 pages

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır. Tez konusunu veren, engin tecrübesiyle bana yol gösteren, çalışmalarımda etkin katkısı bulunan, vaktini ve bilgisini benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi danışman hocam Sayın Prof. Dr. Erhan DENİZ'e ve çalışmam esnasında, tezin hazırlanması sürecinde değerli fikir ve düşüncelerinden yararlandığım Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi sayın Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR'a teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Hatice Tuğba YOLCU

Kars – 2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{U}$	$\{z : \lvert z\rvert < 1, z \in \mathbb{C}\}$ kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$U(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk
Δ	$\{z : \lvert z\rvert > 1, z \in \mathbb{C}\}$ kümesi
$\mathcal{A}$	$\left\{ f : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \ z \in \mathbb{U} \right\}$ kümesi
$\mathcal{S}$	$\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in \mathbb{U}$ için f ünivalent$\}$ kümesi
Θ	Bi-ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{P}$	Caratheodory sınıfı
Ω	Schwarz fonksiyonlarının sınıfı
$\mathcal{S}^*$	Yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*(\alpha)$	$\alpha-$Mertebeden yıldızıl (starlike) fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{M}$	$\left\{ h : \forall \xi \in \Delta \text{ için } h(\xi) = \xi + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\xi^n} \right\}$ kümesi
$\mathcal{M}_0$	$\{h : \forall \xi \in \Delta$ için $h(\xi) \in \mathcal{M}$ ve $c_0 = 0\}$ kümesi
Σ	$\{h \in \mathcal{M} : \forall \xi \in \Delta$ için $h-$ünivalent$\}$ kümesi
Σ_0	$\{h \in \mathcal{M}_0 : \forall \xi \in \Delta$ için $h-$ünivalent$\}$ kümesi
Σ^*	Meromorf yıldızıl fonksiyonların sınıfı
Σ_B	Meromorf bi-ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\Sigma_B^*(\alpha)$	$\alpha-$Mertebeden meromorf bi-yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$f \prec g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir
$\arg f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun argümanı
$\operatorname{Re} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun reel kısmı
$\operatorname{Im} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun sanal kısmı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Ünivalent fonksiyonlarla ilgili çalışmalar ilk olarak 1907 yılında Koebe tarafından yapılmış olup bunu 1916 da Bieberbach'ın katsayı tahminleri için yaptığı çalışmaları takip etmiştir [1-3]. Ünivalent fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar, $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ birim diskinde analitik, ünivalent ve $f(0)=0$, $f'(0)=1$ şartlarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu bir $\mathcal{S}$ sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır. Ünivalent fonksiyonlar, özellikle katsayı tahminleri ile 20. yüzyılın başlarında yoğun olarak çalışılmaya başlanmıştır. Hatta birçok ünlü matematikçilerin o dönemin in iyi problemleri arasında katsayı probleminin de yer aldığını iddia etmektedirler. Öyle ki, 1916 yılında Bieberbach tarafından ileri sürülen $z\in\mathbb{U}$ olmak üzere $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ biçiminde bir Taylor açılımına sahipse $n=2,3,...$ için $|a_n|\leq n$ tahmini uzun yıllar matematikçiler tarafından ispatlanmaya çalışılmış ve 1984 yılına kadar bu tahmin sadece a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 katsayıları için doğrulanabirken 1984 yılında Branges tarafından tüm a_n katsayıları için ispatlanmıştır.

Bieberbach tahmininin ispatlanmasına kadar olan sürede matematikçiler bununla birlikte birçok problemi de ele almışlardır. Bu problemlerden biri hem kendisi hemde tersi ünivalent olan yani kısaca bi-ünivalent fonksiyonların belirttiği serinin katsayıları için bir üst sınır bulmaktır. Bu problemle ilgili ilk çalışma 1967 yılında Lewin [4] tarafından yapılmıştır. Lewin çalışmasında Grunsky eşitsizliğini kullanarak her $f,f^{-1}\in\mathcal{S}$ için $|a_2|\leq 1.51$ olduğunu ispatlamıştır. Yalnız bu üst sınır kesin değildir. 1979 yılında Brannan ve Clunie [5] $|a_2|\leq\sqrt{2}$ bularak Lewin'in sonucunu iyileştirmiştir. Netanyahu [6] 1968 yılında $\max|a_2|=4/3$ olarak ispatlamıştır. Styer ve Wright [7] çalışmasında Netanyahu'nun çalışmasından yola çıkarak $|a_2|>4/3$ eşitsizliğini sağlayan bi-ünivalent fonksiyonların var olduğuna dair bazı örnekler vermiştir. Yine bu konuyla alakalı Tan [8] ve Brannan ve Taha [9] önemli katkılar sunmuşlardır. Bu konuyla ilgili detaylı çalışma Sibel Kaya Kına'ın [10] yüksek lisans tez çalışmasına konu olmuştur. Tez çalışmasında bi-ünivalent fonksiyonların katsayıları ile ilgili detaylı bilgiye ulaşılabilir. Buraya kadar anlatılan katsayıların Laurent serisinin analitik kısmındaki katsayılar olduğununu unutmamak gerekir.

Laurent serisinin esas kısmındaki katsayılar için ise katsayı problemi ayrı bir çalışma sahasıdır. Bu alandaki çalışmalar $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ birim diskin dışında tanımlı $g(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$ şeklindeki meromorf-ünivalent fonksiyonlar üzerine olmuştur. Bu fonksiyonların sınıfı Σ ile gösterilir. Σ sınıfına ait fonksiyonların katsayı problemi ilk defa Schiffer [11] tarafından yapılmıştır. Bu ünlü matematikçi $g(z) \in \Sigma$ için $|b_2| < \frac{2}{3}$ olduğunu göstermiştir. Daha sonra 1971'de Duren [12] $1 \le k < \frac{n}{2}$ için $b_k = 0$ olması durumunda $g(z) \in \Sigma$ için $|b_n| \le \frac{2}{n+1}$ olduğunu ispatlamıştır. Springer [13] meromorf fonksiyonların tersinin katsayısı üzerine bir çalışma yapmıştır. Springer çalışmasında $g(z) \in \Sigma$ olmak üzere;

$$g^{-1}(w) = w + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{w^n} \qquad \left(M < |w| < \infty, M > 0\right)$$

tersine ait katsayılar için

$$|B_3| \le 1 \text{ ve } \left| B_3 + \frac{1}{2} B_1^2 \right| \le \frac{1}{2}$$

eşitsizliklerini elde etmiştir.

Aynı çalışmada

$$|B_{2n-1}| \le \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

olduğu varsayımını ortaya koymuştur. 1977 yılında Kubato [14] $n = 3, 4, 5$ için Springer'in bu tahminini doğrulamıştır. Aynı yıl Schober [15] $1 \le n \le 7$ için B_{2n-1} katsayıları için kesin sınırlar elde etmiştir. Son yıllarda ise Kapoor ve Mishra [16] $\alpha-$mertebeden meromorf yıldızıl fonksiyonların tersinin katsayılarını araştırmışlardır.

2010 yılından itibaren ise hem kendisi hem de tersi Σ sınıfından veya alt sınıflarından olan fonksiyonlar için katsayı problemi üzerine yoğunlaşıldığı görülmektedir. Bu konudaki fonksiyonlar

$$g(w) = w + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{w^n} \in \Sigma$$

ve

$$g^{-1}(w) = w - b_0 - \frac{b_1}{w} - \frac{b_2 + b_0 b_1}{w^2} - \frac{b_3 + 2b_0 b_2 + b_0^2 b_1 + b_1^2}{w^3} + \cdots \in \Sigma$$

şeklindedir.

İlk olarak 2011 yılında Halim ve arkadaşları [17] α - mertebeden meromorf bi-yıldızıl, α - mertebeden güçlü meromorf bi-yıldızıl ve α - mertebeden β tipli güçlü meromorf Bazilevic bi-yıldızıl fonksiyonlar için b_0 ve b_1 için kesin olmayan üst sınırlarını vermiştir. 2013 yılında Panigrahi [18] çalışmasında $\alpha-$mertebeden meromorf bi-yıldızıl ve $\alpha-$mertebeden güçlü meromorf bi-yıldızıl fonksiyonların genelleştirilmişleri olan sırasıyla $\alpha-$mertebeden meromorf $\lambda-$bi-konveks ve $\alpha-$mertebeden güçlü meromorf $\lambda-$bi-konveks fonksiyonları tanımlayarak bu fonksiyonların ilk üç katsayıları için kesin olmayan bir üst sınır bulmuştur. Aynı yıl Hamidi ve arkadaşları [19,20] iki farklı çalışmada ilk defa Faber polinomlarını kullanarak $\alpha-$mertebeden meromorf bi-yıldızıl fonksiyonlar ve meromorf bi-yıldızıl fonksiyonların $B\Sigma(\alpha;\lambda)$ alt sınıf için genel b_n katsayısının bir üst sınırını bulmuşlardır. 2014 yılında Hamidi ve arkadaşları [21], 2015 yılında ise Bulut ve arkadaşları [22] $B\Sigma(\alpha;\lambda)$ sınıfının genel versiyonunu tanımlayarak 2013 yılında Hamidi ve arkadaşları tarafından bulunan sonucu genelleştirmişlerdir. Yine 2015 de Xiao ve Xu [23] çalışmasında meromorf bi-univalent fonksiyonların üç farklı alt sınıfına ait fonksiyonların başlangıç katsayıları için kesin olmayan üst sınırlar elde etmişlerdir. 2017 yılında Salehian ve Zireh [24] ve Sim ve Kwon [25] meromorf bi-ünivalent fonksiyonların genel alt sınıflarını tanımlayarak bu sınıfa ait fonksiyonların başlangıç katsayılarıyla ilgili kesin olmayan bir üst sınır elde ederek bu yıla kadar olan bir çok çalışmayı da genelleştirmişlerdir. 2018 yılında ise Sakar [26], Jahani ve arkadaşları [27] ve Motamednezhad ve Salahian [28] meromorf bi-ünivalent fonksiyonların farklı genel alt sınıflarını tanımlayarak bu sınıfa ait fonksiyonların başlangıç katsayılarının üst sınır bulma üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Şunu belirtelim ki, bu çalışmaların tamamında bulunan üst sınırlar kesin değildir. Dolayısıyla meromorf bi-ünivalent fonksiyonların katsayı problemi ile ilgili açık problem olan her $n \in \mathbb{N}$ için genel b_n katsayılarının kesin üst sınırını bulmak halen güncelliğini korumaktadır.

Bu tez çalışmasında ise subordinasyon tarafından tanımlanan meromorf bi-ünivalent fonksiyonların belli bir genel alt sınıfı için $n \geq 1$ olması durumunda $|b_n|$ modülünün bir üst sınırı elde edilmiştir. Ayrıca $\mathcal{P}$ ve Ω sınıflarına ait fonksiyonların katsayı özellikleri kullanılarak $|b_0|$ ve $|b_1|$ modüllerinin bir üst sınırı verildi. Bulunan sonuçlar literatürde bulunan bir çok sonucun genelleştirilmişi ve iyileştirilmişidir.

Tezin Kuramsal Temeller başlığı altında tezde kullanılacak temel tanım ve bilgiler sunuldu. Materyal ve Yöntem kısmında ise meromorf bi-ünivalent fonksiyonların alt sınıfları için katsayı problemi ile ilgili bu güne kadar yapılan çalışmaların bir özeti verildi. Bulgular kısmında ise ilk defa bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar ispatlarıyla verilmiştir.

1.2 Genel Kavramlar

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar sunuldu. Bu kavramlar Ponnusamy ve Silverman'ın [29] kitabından alınmıştır.

Tanım 1.2.1 (r-komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ bir reel sayı olmak üzere $U(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ ifadesi z_0 merkezli, r yarıçaplı açık disk (veya z_0 noktasının $r-$komşuluğu) olarak adlandırılır.

$\overline{U}(z_0, r)$ ile $U(z_0, r)$ nin kapanışını, $\overset{0}{U}(z_0, r)$ ile $U(z_0, r)$ nin delinmiş komşuluğunu, $\partial U(z_0, r)$ ile de onun sınırını ve orijin merkezli r yarıçaplı diski $U(0, r) = U_r$ ile göstereceğiz. Özel durumda orijin merkezli açık birim disk $\mathbb{U} = \{z : |z| < 1,\ z \in \mathbb{C}\}$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.2 (İç Nokta): $S \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. $z_0 \in S$ noktası için $U(z_0, r) \subset S$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına S kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 1.2.3 (Açık Küme): Bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer S kümesinin her noktası S nin bir iç noktası ise S kümesine açık küme denir.

Tanım 1.2.4 (Kapalı Küme): $S \subset \mathbb{C}$ olsun. S kümesinin tümleyeni açık küme ise, S kümesine kapalı küme denir.

Tanım 1.2.5 (Bağlantılı Küme): Eğer $S \subset S_1 \cup S_2$, $S \cap S_1 \neq \varnothing$, $S \cap S_2 \neq \varnothing$ ve $S \cap S_1 \cap S_2 = \varnothing$ olacak şekilde S_1 ve S_2 gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise $S \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bu S kümesine bağlantısız küme denir.

Tanım 1.2.6 (Bölge): Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

Tanım 1.2.7 (Analitik fonksiyon): $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0, A nın bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa f fonksiyonu z_0 noktasında diferensiyellenebilirdir (veya türevlenebilirdir) denir. Bu limitin değeri $f'(z_0)$ veya $\frac{df}{dz}(z_0)$ ile gösterilir ve buna f fonksiyonun z_0 noktasındaki türevi adı verilir. f fonksiyonu, z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferensiyellenebilirse f fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

olarak ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

Kompleks fonksiyonlar teorisinde, analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.2.1 (Cauchy-Türev Formülü): f, pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n = 0, 1, 2...$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

dir [29].

Cauchy-Türev formülünün en önemli sonuçlarından biri şudur: f, bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analitiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n! \qquad (1.2.1)$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir.

Bunun yanı sıra bir f fonksiyonu, analitik olmadığı bazı noktaların civarındaki halka bölgelerde de seri ile temsil edilebilir.

Tanım 1.2.8:

(i) f fonksiyonunun analitik olduğu $A(R_1;R_2)=\{z: R_1<|z-z_0|<R_2\}$ halka bölgesindeki

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

serisine, f fonksiyonunun z_0 noktası civarındaki Laurent serisi denir.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ serisine Laurent serisinin esas kısmı, $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ serisine de Laurent serisinin analitik kısmı denir.

Tanım 1.2.9: **(i)** f fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse z_0 noktasına f fonksiyonunun singüler noktası denir.

(ii) z_0, f fonksiyonunun bir singüler noktası olsun. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının $\overset{\circ}{D}(z_0,r)$ delinmiş bir komşuluğunda analitik oluyorsa z_0 noktasına f fonksiyonunun ayrık singüler noktası denir.

(iii) z_0, f fonksiyonunun bir singüler noktası olsun. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının $\overset{\circ}{D}(z_0,r)$ her delinmiş komşuluğunda en az bir singüler noktaya sahipse z_0 noktasına f fonksiyonunun ayrık olmayan singüler noktası denir.

Ayrık singüler noktaların uygun bir delinmiş komşuluğunda fonksiyon analitik olup Laurent serisine açılabilir. Bu seri göz önüne alınarak ayrık singüler noktalar, kaldırılabilir singüler nokta, kutup noktası ve esas singüler nokta diye sınıflandırılır. Biz burada sadece kutup noktasından bahsedeceğiz.

Tanım 1.2.10 (Kutup noktası): z_0, f fonksiyonunun bir ayrık singüler noktası olsun. Bu noktanın uygun bir delinmiş komşuluğundaki Laurent serisini göz önüne alalım. Bu serinin esas kısmında sonlu sayıda terim varsa z_0 noktasına f fonksiyonunun kutup noktası denir.

Tanım 1.2.11 (Meromorf fonksiyon): Bir f fonksiyonunun bir B bölgesindeki singüler noktaları sadece kutup noktaları ise f fonksiyonuna B bölgesinde meromorf fonksiyon denir.

Bu bölümün kalan kısmında analitik ve ünivalent fonksiyon kavramları tanıtılacak ve bu fonksiyonlar yardımıyla bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.2.12 (Ünivalent fonksiyon): f, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in A$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) f fonksiyonuna A bölgesinde ünivalent (yalınkat veya schlicht) fonksiyon denir.

Eğer f, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 1.2.2: Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerek ve yeterli koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır.

Ayrıca $f'(z_0) \neq 0$ şartı $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerek şarttır fakat yeterli değildir. Yani sadece f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$. Tersi daima doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örnek 1.2.1: $f(z)=z^2$ fonksiyonu $A=\{z:1<|z|<2, 0<\arg z<3\pi/2\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir. Gerçekten $f(z)=z^2$ fonksiyonu, A bölgesinde analitik ve her $z_0 \in A$ için $f'(z_0)\neq 0$ olduğundan yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{5}{3\sqrt{2}}+i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)=f\left(-\frac{5}{3\sqrt{2}}-i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)=i\frac{25}{9}$$

olduğundan $f(z)=z^2$ fonksiyonu A bölgesinde ünivalent değildir.
Eğer $A\subset\mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise, bu durumda $z\in A$ noktasında $f'(z)$ türevi, f nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme (uzunluklar için) ve yerel dönme etkenleridir. Buna ilave olarak, $f:A\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinantı $Jf(z)=|f'(z)|^2$ ile verilmektedir. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür. Böylece Teorem 1.2.2 den analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 1.2.13 (Konform dönüşüm): Eğer bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer bir f fonksiyonu, bir $A\subset\mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, f fonksiyonu A bölgesinde konformdur denir.

Örneğin $f(z)=e^z$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzleminin tamamında konformdur.

Teorem 1.2.3: f fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z)\neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur.

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm; a, b, c, d kompleks sabitler olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

genişletilmiş kompleks düzlemi $\left(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}\right)$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

$z-$düzlemindeki $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\ (\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ bölgesini, $w-$düzlemindeki $\mathcal{D}_1$ bölgesi üzerine resmeden f analitik fonksiyonunun varlığı 1851 yılında Riemann tarafından ortaya atılmıştır.

Teorem 1.2.4 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\ (\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak $\mathbb{U}$ birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan ve $\mathcal{D}$ yi $\mathbb{U}$ birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır.

1.3. Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde geometrik fonksiyonlar teorisinin özel bir konusu olan ünivalent fonksiyonları biraz daha ayrıntılı sunacağız. Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoreminden, keyfi bir basit bağlantılı bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonu yerine $\mathbb{U}$ açık birim diskte tanımlı bir f ünivalent fonksiyonu seçilebilir. Bu fonksiyon için $f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$ normalizasyon şartları göz önüne alınırsa (1.2.1) serisi

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad (z \in \mathbb{U}) \tag{1.3.1}$$

şeklini alır. Burada (1.3.1) şeklinde tanımlanmış fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli olan bazı temel fonksiyon sınıfları

$$\mathcal{A}=\left\{ f:\forall z\in \mathbb{U} \text{ için } f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \text{ şeklindeki analitik fonksiyon} \right\}$$

$$\mathcal{S}=\left\{ f\in \mathcal{A}:\forall z\in \mathbb{U} \text{ için } f-\text{ünivalent} \right\}$$

$$\mathcal{M}=\left\{ h:\forall \xi\in \Delta \text{ için } h(\xi)=\xi+c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\xi^n} \text{ şeklindeki meromorf fonksiyon} \right\}$$

$$\mathcal{M}_0=\left\{ h:\forall \xi\in \Delta \text{ için } h(\xi)\in \mathcal{M} \text{ ve } c_0=0 \right\}$$

$$\Sigma=\left\{ h\in \mathcal{M}:\forall \xi\in \Delta \text{ için } h-\text{ünivalent} \right\}$$

$$\Sigma_0=\left\{ h\in \mathcal{M}_0:\forall \xi\in \Delta \text{ için } h-\text{ünivalent} \right\}$$

şeklinde verilir. Çalışmamız boyunca Σ ve Σ_0 sınıflarına Δ bölgesinde ünivalent meromorf fonksiyonların sınıfları diyeceğiz. $h\in\Sigma$ fonksiyonu Δ bölgesini, bağlantılı kompakt bir kümenin tümleyenine resmeder. Bunların yanı sıra $\mathcal{S}$ sınıfı ile Σ sınıfı arasında yakın bir ilişki vardır. Örneğin;

- Eğer $f\in\mathcal{S}$ ve $\beta\in\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ her $\xi\in\Delta$ için $h(\xi)=\dfrac{1}{f(1/\xi)}+\beta\in\Sigma$ dır. (1.3.2)

- Eğer $h\in\Sigma$ ve $\beta\in\mathbb{C}-h(\Delta)$ $\Rightarrow$ her $z\in\mathbb{U}$ için $f(z)=\dfrac{1}{h(1/z)-\beta}\in\mathcal{S}$ dır. (1.3.3)

Ayrıca $\mathcal{S}$ ve Σ sınıflarına ait bazı fonksiyon örnekleri aşağıda verilmiştir:

(i) $w=f(z)=z(1-z)^{-1}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini, $\operatorname{Re} w>-1/2$ sağ yarı düzlemine resmeder.

(ii) $f(z)=z(1-z^2)^{-1}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini, $\mathbb{C}-\left\{(-\infty,-1/2]\cup(1/2,\infty]\right\}$ bölgesi üzerine resmeder.

(iii) $f(z)=z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini, $\mathbb{C}-(-\infty,-1/4]$ bölgesi üzerine resmeder.

(iv) $h(\xi)=\xi-2+\dfrac{1}{\xi}$ fonksiyonu Δ bölgesini, $\mathbb{C}-[-4,0]$ bölgesi üzerine resmeder.

Ayrıca şunu da belirtelim ki, $\mathcal{S}$ sınıfına ait iki fonksiyonun toplamı $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmayabilir. Örneğin;

$$f_1(z)=\frac{z}{1-z} \text{ ve } f_2(z)=\frac{z}{1+iz}$$

fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmasına rağmen

$$f_1'(z)=\frac{1}{(1-z)^2} \text{ ve } f_2'(z)=\frac{1}{(1+iz)^2}$$

türevlerinden

$$f_1'(z)+f_2'(z)=\frac{2-2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

elde edilir. Buradan $z=\frac{1+i}{2}\in\mathbb{U}$ noktasında $f_1'(z)+f_2'(z)=0$ olduğu görülür. Bununla beraber $\mathcal{S}$ sınıfındaki birçok özellik bazı dönüşümler altında korunur.

Teorem 1.3.1: $f\in\mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eşlenik alma: $g(z)=\overline{f(\overline{z})}=z+\overline{a}_2z^2+...$ ise, $g\in\mathcal{S}$ dir.

(ii) Döndürme (Rotasyon): $\theta\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z)=e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_ne^{i(n-1)\theta}z^n, \quad (z\in\mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iii) Genişleme (Dilatasyon): $0<r<1$ olmak üzere

$$g(z)=r^{-1}f(rz)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nr^{n-1}z^n, \quad (z\in\mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iv) Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0\in\mathbb{U}$ olmak üzere

$$g(z)=\frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z}_0z}\right)-f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}, \quad (z\in\mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(v) Değer bölgesi dönüşümü: ψ fonksiyonu $f(\mathbb{U})$ da ünivalent ve $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon ise $\psi\circ f\in\mathcal{S}$ dir.

(vi) Çıkarılmış değer dönüşümü: $w\notin f(\mathbb{U})$ olsun. Bu durumda,

$$g(z)=\frac{f(z)}{1-f(z)/w}, \quad (z\in\mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(vii) *n.* kök dönüşümü: Eğer $n=2,3,...$ ise

$$g(z)=\sqrt[n]{f(z^n)}=z+\frac{a_2}{n}z^{n+1}+\frac{1}{2n^2}(2na_3-(n-1)a_2^2)z^{2n+1}+..., \quad (z\in\mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir [1-3].

Tanım 1.3.1 ($\boldsymbol{\mathcal{P}}$ sınıfı): $\mathbb{U}$ birim diskinde $p(0)=1,$ $\operatorname{Re} p(z)>0$ koşullarını sağlayan $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya $\mathcal{P}$ sınıfı denir [1-3].

Örneğin; $p(z)=(1+z)/(1-z), z\in\mathbb{U}$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olup, $\mathbb{U}$ birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. Ayrıca, $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z)=1+z^n$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen $n\in\mathbb{N}_0, n\geq 2$ için ünivalent değildir.

Tanım 1.3.2 (**Ω** sınıfı): $\mathbb{U}$ birim diskinde $\phi(0)=0$ ve $|\phi(z)|<1$ koşullarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir ve Ω ile gösterilir [1,2].

Bunların yanı sıra, $\mathcal{P}$ sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıda olduğu gibi önemli bir bağ vardır:

$$p(z)\in\mathcal{P}\Leftrightarrow p(z)=\frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)}, \quad \phi(z)\in\Omega.$$

$\mathcal{P}$ ve Ω sınıflarını tanımladıktan sonra, $\mathcal{S}$ sınıfının iki önemli alt sınıfını aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Tanım 1.3.3 ($\boldsymbol{\mathcal{S}^*}$ sınıfı): $\mathcal{B}\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. $\mathcal{B}$ kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w\in\mathcal{B}$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen $\mathcal{B}$ kümesinde kalıyorsa, $\mathcal{B}$ ye

w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir. Eğer bir f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini veya Δ birim diskin dışını w_0 noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna sırasıyla w_0 noktasına göre; yıldızıl fonksiyon veya meromorf yıldızıl fonksiyon denir. Özel durumda, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini veya Δ birim diskin dışını yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon veya meromorf yıldızıl fonksiyon denir. $f \in \mathcal{A}$ olması durumunda yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile, $f \in \mathcal{M}$ olması durumunda da meromorf yıldızıl fonksiyonların sınıfı Σ^* ile gösterilir [1-3].

Yıldızıl fonksiyonların yukarıdaki geometrik tanımını analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıda verilmiştir.

<u>Teorem 1.3.2</u>: $f \in \mathcal{A}$ (veya $f \in \mathcal{M}$) olsun. Bu halde $f \in \mathcal{S}^*$ (veya $f \in \Sigma^*$) olması için gerek ve yeter şart

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

olmasıdır. [1-3].

$\mathcal{S}^*$ ve Σ^* sınıflarına ait fonksiyonlar için genel katsayı tahminlerinin kesin sınırları aşağıdaki şekildedir:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}^* \Rightarrow |a_n| \le n$$

$$h(\xi) = \xi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\xi^n} \in \Sigma^* \Rightarrow |c_n| \le \frac{2}{n+1}.$$

Örneğin, $\mathcal{S}^*$ sınıfına ait fonksiyonlardan en önemlilerinden birisi $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere,

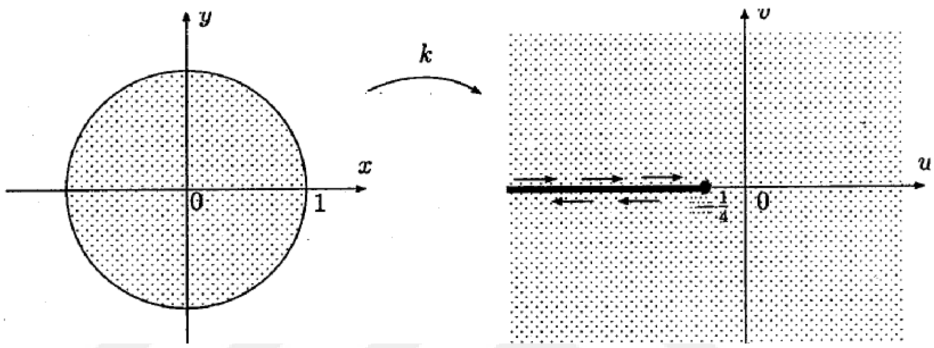
$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde tanımlanan Koebe fonksiyonudur. Bu fonksiyonu $k(z)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-1\right]$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca $k(z)$ fonksiyonu,

$$u(z)=\frac{1+z}{1-z},\quad g(z)=u^2(z),\quad k(z)=\frac{1}{4}\left[g(z)-1\right]$$

biçiminde yazılarak $\mathbb{U}$ birim diskini $-\infty$ dan $-1/4$ e kadar negatif reel ekseni çıkartılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak dönüştürdüğünü görebiliriz. $k(z)$ dönüşümü ünivalent fonksiyonlar teorisinde çok sayıda problemde önemli rol oynar.



Şekil 2.1: Koebe fonksiyonu

Yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi $k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+\sum_{n=2}^{\infty}nz^n\in\mathcal{S}^*$ dır. Ayrıca Teorem 1.3.2 kullanılarak da $z=re^{i\theta}$ ve $\left(0\le r<1, 0\le\theta\le 2\pi\right)$ olmak üzere,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}\ge\frac{1+r}{1-r}>0$$

elde edilir. Buradan da $k(z)\in\mathcal{S}^*$ olduğu görülür.

Koebe fonksiyonunun dönmeleri (rotation), her $z\in\mathbb{U}$ için,

$$k_\theta(z)=\frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$$

şeklinde tanımlanır ve $k_\theta(z)$ fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardır. Bu dönüşüm ile birim diskin görüntüsü $+\infty$ dan $-e^{-i\theta}/4$ ışın hariç kompleks düzlem olur. $\alpha\in(0,2]$ ve $z\in\mathbb{U}$ olmak üzere $f(z)=\frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha-1\right]$ fonksiyonu, "genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu" olarak adlandırılır ve $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Şimdi ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahip olan kavramını verelim.

Tanım 1.3.4: f ve g fonksiyonları $\mathbb{U}$ birim diskinde tanımlı iki analitik fonksiyon olsun. $\mathbb{U}$ birim diskinde $f(z) = g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega \in \Omega$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da g fonksiyonuna subordinedir denir ve $f \prec g$ ile gösterilir [1-3].

Eğer g ünivalent ise $f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$ ve $f(\mathbb{U}) \subseteq g(\mathbb{U})$ gerektirmesi doğrudur.

Subordinasyon prensibi (Lindelöf Prensibi): Eğer f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik, ünivalent ve g fonksiyonu da $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik bir fonksiyon ayrıca $g(0) = f(0)$ ve $g(\mathbb{U}) \subset f(\mathbb{U})$ ise, bu durumda U_r diskinde her $r < 1$ için $|g'(0)| \le |f'(0)|$ ve $g(U_r) \subset f(U_r)$ dir [1-3].

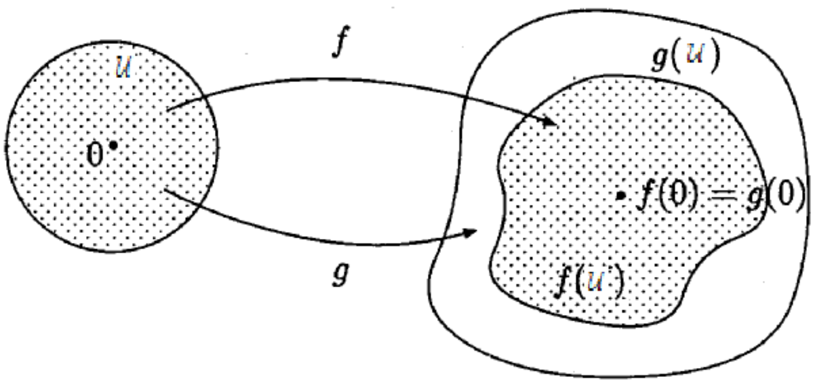
Özellikle, eğer $f \prec g$ ise

$$\max_{|z| \le r} |f(z)| \le \max_{|z| \le r} |g(z)|, \quad (r \in (0,1))$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca,

$$p(z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow p(z) \prec \frac{1+z}{1-z} \quad \text{ve} \quad \phi(z) \in \Omega \Leftrightarrow \phi(z) \prec z$$

gerektirmeleri yazılır.



Şekil 2.2: $f \prec g$ Subordinasyonu

Tanım 1.3.5 $f \in \mathcal{A}$ (veya $f \in \mathcal{M}$) olsun. O halde $0 \le \beta < 1$ olmak üzere $z \in \mathbb{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \beta$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ (veya $f \in \mathcal{M}$) fonksiyonuna $\beta-$mertebeden yıldızıl fonksiyon (veya meromorf $\beta-$mertebeden yıldızıl fonksiyon) denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da $\beta-$mertebeden yıldızıl fonksiyonların (veya meromorf $\beta-$mertebeden yıldızıl fonksiyonların) sınıfı denir ve $\mathcal{S}^*(\beta)$ (veya $\Sigma^*(\beta)$) ile gösterilir [2].

Subordinasyon kullanılarak $\mathcal{S}^*(\beta)$ veya $\Sigma^*(\beta)$ sınıfları

$$\mathcal{S}^*(\beta) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}, 0 \le \beta < 1 \right\}$$

ve

$$\Sigma^*(\beta) = \left\{ f \in \mathcal{M} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+\dfrac{1-2\beta}{z}}{1-\dfrac{1}{z}}, z \in \Delta, 0 \le \beta < 1 \right\}$$

şeklinde de yazılabilir. Özel olarak $\mathcal{S}^*(0) = \mathcal{S}^*$ ve $\Sigma^* = \Sigma^*(\beta)$ yazılır. Buradan da anlaşıldığı üzere $\mathcal{S}^*(\beta) \subset \mathcal{S}^*$ ve $\Sigma^*(\beta) \subset \Sigma^*$ dır.

Tanım 1.3.6: $\varphi : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $\varphi(0) = 1,\ \varphi'(0) > 0,\ \operatorname{Re}(\varphi(\mathrm{z})) > 0$ koşullarını sağlasın. Ayrıca $\varphi(\mathbb{U})$ da reel eksene göre simetrik olsun. Bu koşullarını sağlayan fonksiyonlar $\mathcal{W}$ sınıfındandır denilir [1-3].

Bu durumda $\varphi \in \mathcal{W}$ ise

$$\varphi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots \quad (z \in \mathbb{U},\ B_k \in \mathbb{C})$$

şeklinde Taylor açılımına sahiptir. Aynı $\mathcal{W}$ sınıfı ile $\mathcal{P}$ sınıfı arasında yakından bir ilişki vardır. Öyle ki; $p, q \in \mathcal{P}$ ve $u, v : \mathbb{U} \to \mathbb{U},\ u(0) = v(0) = 0$ fonksiyonları için

$$p(z) = \frac{1+u(\mathrm{z})}{1-u(\mathrm{z})} = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots$$

ve

$$q(z)=\frac{1+v(z)}{1-v(z)}=1+q_1z+q_2z^2+...$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

$$u(z)=\frac{p(z)-1}{p(z)+1}=\frac{p_1}{2}z+\frac{1}{2}\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)z^2+...$$

ve

$$v(z)=\frac{q(z)-1}{q(z)+1}=\frac{q_1}{2}z+\frac{1}{2}\left(q_2-\frac{q_1^2}{2}\right)z^2+...$$

yazılır.

Böylece

$$\varphi(u(z))=1+\frac{B_1p_1}{2}z+\left\{\frac{1}{2}\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)B_1+\frac{1}{4}p_1^2B_2\right\}z^2+...$$

ve

$$\varphi(v(z))=1+\frac{B_1q_1}{2}z+\left\{\frac{1}{2}\left(q_2-\frac{q_1^2}{2}\right)B_1+\frac{1}{4}q_1^2B_2\right\}z^2+...$$

elde edilir. Benzer durum, $p,q\in\mathcal{P}$ ve $u,v:\mathbb{U}\to\mathbb{U},\ u(0)=v(0)=0,\ |u(z)|<1,\ |v(z)|<1$ fonksiyonlarının $\phi(z)=p\left(\frac{1}{z}\right),\ \psi(z)=q\left(\frac{1}{z}\right)$ ve $u_1(z)=u\left(\frac{1}{z}\right),\ v_1(z)=v\left(\frac{1}{z}\right)$ fonksiyonları için de geçerlidir. Yani

$$\phi(z)=\frac{1+u_1(z)}{1-u_1(z)}=1+\frac{p_1}{z}+\frac{p_2}{z^2}+...$$

ve

$$\psi(z)=\frac{1+v_1(z)}{1-v_1(z)}=1+\frac{q_1}{z}+\frac{q_2}{z^2}+...$$

olsun. Bu durumda

$$u_1(z)=\frac{\phi(z)-1}{\phi(z)+1}=\frac{p_1}{2}\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)\frac{1}{z^2}+... \qquad (1.3.4)$$

$$v_1(z)=\frac{\psi(z)-1}{\psi(z)+1}=\frac{q_1}{2}\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\left(q_2-\frac{q_1^2}{2}\right)\frac{1}{z^2}+... \qquad (1.3.5)$$

yazılır.

Tanım 1.3.7 (Ma-Minda Yıldızıl Fonksiyon): $f\in\mathcal{A}$ $\left(\text{veya}\, f\in\mathcal{M}\right)$ ve $\varphi\in\mathcal{W}$ olsun. Her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\varphi(z)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara Ma-Minda yıldızıl fonksiyon (veya Meromorf Ma-Minda yıldızıl fonksiyon) denir. Ma-Minda yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*\left[\varphi\right]$ ve Meromorf Ma-Minda yıldızıl fonksiyonların sınıfı da $\Sigma^*\left[\varphi\right]$ ile gösterilir (bkz. [10]).

Özel durumda

$$\Sigma^*\left[\frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}\right]=\Sigma^* \text{ ve } \Sigma^*\left[\frac{1+\frac{1-2\beta}{z}}{1-\frac{1}{z}}\right]=\Sigma^*(\beta)\ \ (0\le\beta<1)$$

yazılır.

Tanım 1.3.8 ($\gamma-$Mertebeden Ma-Minda Yıldızıl Fonksiyon): $f\in\mathcal{A}$ $\left(\text{veya}\, f\in\mathcal{M}\right)$ ve $\varphi\in\mathcal{W}$ olsun. $\gamma\in\mathbb{C}/\left\{0\right\}$ olmak üzere her $z\in\mathbb{U}$ için

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right)\prec\varphi(z)$$

koşulunu sağlayan fonksiyona $\gamma-$kompleks mertebeden Ma-Minda yıldızıl fonksiyon (veya $\gamma-$kompleks mertebeden meromorf Ma-Minda yıldızıl fonksiyon) denilir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{S}^*[\gamma;\varphi]$ $\left(\text{veya}\ \Sigma^*[\gamma;\varphi]\right)$ ile gösterilir (bkz. [21]).

Bu sınıflar için γ nın özel durumlarında $\Sigma^*[1;\varphi]=\Sigma^*[\varphi]$ elde edilir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ilk olarak bi-ünivalent fonksiyonun tanımı ve seriye açılımı gibi bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra meromorf bi-ünivalent fonksiyonların sınıfının belli alt sınıflarına ait fonksiyonlar için katsayı problemine ilişkin yapılan çalışmalar tarihi seyir içinde sunulmuştur.

2.1 Meromorf Bi-ünivalent Fonksiyonların Tanımı ve Bazı Özellikleri

Bu başlık altında bi-ünivalent fonksiyonun tanımı ve seriye açılımı gibi bazı özellikleri verildi.

Tanım 2.1.1: Hem kendisi hemde tersi ünivalent olan fonksiyona bi-ünivalent fonksiyon denir.

Bir f fonksiyonun tersi f^{-1} ile gösterilirse

$$f^{-1}\left(f(z)\right)=z$$

yazılır. Diğer taraftan Koebe-çeyrek teoremine göre her $\mathbb{U}$ diskinin $f\in\mathcal{S}$ altında görüntüsü orijin merkezli $\frac{1}{4}$ yarıçaplı diski ihtiva ettiğini biliyoruz. Böylece her $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu

$$f^{-1}\left(f(z)\right)=z,\quad \left(z\in\mathbb{U}\right)$$

ve

$$f\left(f^{-1}(w)\right)=w,\quad \left(|w|<r_0\left(f\right), r_0\left(f\right)\geq\frac{1}{4}\right)$$

olacak şekilde f^{-1} tersine sahiptir.

Bu durumda $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in\mathcal{S}$ alınırsa, $f^{-1}(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n$ olacağı açıktır. Bu durumda

$$f\left(f^{-1}(w)\right)=f^{-1}\left(w\right)+a_2\left[f^{-1}\left(w\right)\right]^2+a_3\left[f^{-1}\left(w\right)\right]^3+...$$
$$=w+\sum_{n=2}^{\infty}b_nw^n+a_2\left[w+\sum_{n=2}^{\infty}b_nw^n\right]^2+a_3\left[w+\sum_{n=2}^{\infty}b_nw^n\right]^3+...$$
$$=w+(a_2+b_2)w^2+(b_3+2a_2b_2+a_3)w^3+(b_4+2a_2b_3+a_2b_2{}^2+3a_3b_2+a_4)w^3+...$$
$$=w$$

şeklinde olur. Buradan karşılıklı w nın aynı dereceli kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse a_n ile b_n ler arasında

$$a_2+b_2=0\Rightarrow b_2=-a_2$$
$$b_3+2a_2b_2+a_3=0\Rightarrow b_3=2a_2^2-a_3$$
$$b_4+2a_2b_3+a_2b_2{}^2+3a_3b_2+a_4=0\Rightarrow b_4=-5a_2^3+5a_2a_3-a_4$$

şeklinde bağıntılar elde edilir. Böylece

$$f^{-1}(w)=w-a_2w^2+\left(2a_2^2-a_3\right)w^3-\left(5a_2^3-5a_2a_3+a_4\right)w^4+...$$

olarak yazılır. Buradan $f^{-1}(z)\in\mathcal{A}$ olduğu görülmektedir. Yalnız şunu söylemekte fayda vardır her $f(z)\in\mathcal{S}$ için $f^{-1}(z)\in\mathcal{S}$ olmayabilir. Örneğin; $f(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}=z+\sum_{n=2}^{\infty}nz^n$ Koebe fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun tersi için son eşitlikteki f^{-1} in açılımı kullanılırsa

$$f^{-1}(z)=z-2z^2+5z^3-14z^4+...$$

olduğu görülür. Yine $f(z)\in\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlar için $|a_n|\leq n$ olduğu bilgisinden yola çıkarak $|a_n|\nleq n$ ise $f(z)\notin\mathcal{S}$ olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla Koebe fonksiyonun tersinin katsayılarına bakıldığında örneğin üçüncü katsayı için $|b_3|=5\nleq 3$ olduğundan $\mathcal{S}$ sınıfına ait olamaz. Bu durum diğer katsayılar içinde geçerlidir. Bundan dolayı kendisi ve tersi ünivalent fonksiyonları bir kategoride incelemek bir problem olarak karşımıza çıkar.

Bundan sonra $\mathcal{S}$ sınıfında bi-ünivalent fonksiyonların oluşturduğu sınıfı Θ ile göstereceğiz. Yani

$$\Theta=\left\{f\in\mathcal{S}:\ \forall z\in\mathbb{U}\text{ için } f^{-1}(z)\in\mathcal{S}\right\}$$

şeklinde yazılır.

Θ sınıfından fonksiyonlara örnek olarak

$$f_1(z) = \frac{z}{1-z}$$

$$f_2(z) = -\log(1-z)$$

$$f_3(z) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

fonksiyonları verilebilir. Diğer taraftan,

$$f_4(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$f_5(z) = z - \frac{z^2}{2}$$

$$f_6(z) = \frac{z}{1-z^2}$$

fonksiyonları Θ sınıfına ait değildir.

Benzer şekilde her $g \in \Sigma$ fonksiyonu

$$g^{-1}\left(g(z)\right) = z, \quad (z \in \Delta)$$

ve

$$g\left(g^{-1}(w)\right) = w, \quad \left(M < |w| < \infty, M > 0\right)$$

olacak şekilde g^{-1} tersine sahiptir. Son eşitlikte $g(w) = w + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{w^n} \in \Sigma$ ve tersi $g^{-1}(w) = w + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{w^n}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} w = g\left(g^{-1}(w)\right) &= g^{-1}(w) + b_0 + b_1\left[g^{-1}(w)\right]^{-1} + b_2\left[g^{-1}(w)\right]^{-2} \ldots \\ &= w + \sum_{n=0}^{\infty} B_n w^{-n} + b_0 + b_1\left[w + \sum_{n=0}^{\infty} B_n w^{-n}\right]^{-1} + b_2\left[w + \sum_{n=0}^{\infty} B_n w^{-n}\right]^{-2} + \ldots \\ &= (b_0 + B_0) + w + \frac{b_1 + B_1}{w} + \frac{B_2 - b_1 B_0 + b_2}{w^2} + \frac{B_3 - b_1 B_1 + b_1 B_0^2 - 2b_2 B_0 + b_3}{w^3} + \cdots. \end{aligned}$$

şeklinde olur. Buradan karşılıklı w nın aynı dereceli kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse B_n ile b_n ler arasında

$$b_0 + B_0 = 0 \Rightarrow B_0 = -b_0$$
$$b_1 + B_1 = 0 = 0 \Rightarrow B_1 = -b_1$$
$$B_2 - b_1 B_0 + b_2 = 0 \Rightarrow B_2 = -b_2 - b_0 b_1$$
$$B_3 - b_1 B_1 + b_1 B_0^2 - 2b_2 B_0 + b_3 = 0 \Rightarrow B_3 = -\left(b_3 + 2b_0 b_2 + b_0^2 b_1 + b_1^2\right)$$

şeklinde bağıntılar elde edilir. Böylece

$$g^{-1}(w) = w - b_0 - \frac{b_1}{w} - \frac{b_2 + b_0 b_1}{w^2} - \frac{b_3 + 2b_0 b_2 + b_0^2 b_1 + b_1^2}{w^3} + \cdots$$

olarak yazılır. Buradan $g^{-1} \in \mathcal{M}$ olduğu görülmektedir. Yalnız şunu söylemekte fayda vardır her $g \in \Sigma$ için $g^{-1} \in \Sigma$ olmayabilir. Eğer $g \in \Sigma$ fonksiyonu için $g^{-1} \in \Sigma$ oluyorsa g fonksiyonuna meromorf bi-univalent fonksiyon denir. Meromorf bi-ünivalent fonksiyonların oluşturduğu sınıfı Σ_B ile göstereceğiz. Yani

$$\Sigma_B = \left\{ g \in \Sigma : \ \forall z \in \Delta \text{ için } g^{-1}(z) \in \Sigma \right\}$$

şeklinde yazılır.

2.2 Meromof Bi-ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları İçin Katsayı Eşitsizlikleri

Bu başlık altında meromorf bi-ünivalent fonksiyonların sınıfının belli alt sınıflarına ait fonksiyonlar için katsayı problemine ilişkin yapılan çalışmalar tarihi seyir içinde verilmiştir. Bi-ünivalent fonksiyonların Θ sınıfına ait fonksiyonlar için katsayı üzerine yapılan çalışmalar Sibel Kaya Kına'nın tezinde ayrıntılı olarak verildi (bkz. [10]). Şimdi Σ_B sınıfının alt sınıflarına ait fonksiyonlar için bulunan katsayı sınırları verilecektir. Bu konuyla ilgili ilk çalışma 2011 yılında Halim, Hamidi ve Ravichandran'a [17] ait olup buldukları sonuçlar aşağıda verilmiştir. Tez boyunca b_j ler ile $g(w)$ ve tersi $g^{-1}(w)$ fonksiyonun katsayıları anlaşılacaktır. Yani

$$g(w) = w + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{w^n} \in \Sigma \tag{2.2.1}$$

$$g^{-1}(w) = w - b_0 - \frac{b_1}{w} - \frac{b_2 + b_0 b_1}{w^2} - \frac{b_3 + 2b_0 b_2 + b_0^2 b_1 + b_1^2}{w^3} + \cdots \tag{2.2.2}$$

dir.

Sonuçlara geçmeden önce ispatlarda sıkça kullanılan bir lemmayı verelim.

<u>Lemma 2.2.1</u>: $p \in \mathcal{P}$ ve $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $|c_n| \leq 2$ dir. Eşitlik ancak ve ancak $p(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu ile sağlanır [1,2].

<u>Tanım 2.2.1</u>: $g \in \Sigma$ ve $h = g^{-1}$ olsun. Eğer $g \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) > \alpha \quad (z \in \Delta, 0 \leq \alpha < 1)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(\frac{wh'(w)}{h(w)}\right) > \alpha \quad (w \in \Delta, 0 \leq \alpha < 1)$$

şartlarını sağlıyorsa g fonksiyonuna $\alpha-$mertebeden meromorf bi-yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\Sigma_B^*(\alpha)$ ile gösterilir [17].

Kısaca $\Sigma_B^*(\alpha) = \left\{ g(z) \in \Sigma^*(\alpha) : g^{-1}(w) \in \Sigma^*(\alpha),\, z, w \in \Delta \right\}$ dır.

<u>Teorem 2.2.1</u>: $g \in \Sigma_B^*(\alpha)$ olsun. Bu durumda

$$|b_0| \leq 2(1-\alpha) \quad \text{ve} \quad |b_1| \leq (1-\alpha)\sqrt{4\alpha^2 - 8\alpha + 5}$$

eşitsizlikleri sağlanır [17].

<u>İspat</u>: $g \in \Sigma_B^*(\alpha)$ fonksiyonu (2.2.1) ve (2.2.2) şeklinde verilsin. Dolayısıyla (2.2.1) den

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = 1 - \frac{b_0}{z} + \frac{b_0^2 - 2b_1}{z^2} - \frac{b_0^3 - 3b_1 b_0 + 3b_2}{z^3} + \cdots \quad (z \in \Delta) \qquad (2.2.3)$$

ve (2.2.2) den $h = g^{-1}$ için

$$\frac{wh'(w)}{h(w)} = 1 + \frac{b_0}{w} + \frac{b_0^2 + 2b_1}{w^2} + \frac{b_0^3 + 6b_1 b_0 + 3b_2}{w^3} + \cdots \quad (w \in \Delta) \qquad (2.2.4)$$

yazılır. $g \in \Sigma_B^*(\alpha)$ olduğundan

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = \alpha + (1-\alpha)p(z) \quad (z \in \Delta) \qquad (2.2.5)$$

ve

$$\frac{wh'(w)}{h(w)}=\alpha+(1-\alpha)q(w) \quad (w\in\Delta) \tag{2.2.6}$$

olacak şekilde Δ kümesinde pozitif reel kısma sahip

$$p(z)=1+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\frac{c_3}{z^3}+\cdots \quad (z\in\Delta) \tag{2.2.7}$$

ve

$$q(w)=1+\frac{d_1}{w}+\frac{d_2}{w^2}+\frac{d_3}{w^3}+\cdots \quad (w\in\Delta) \tag{2.2.8}$$

fonksiyonları vardır. Böylece (2.2.5) ve (2.2.7) den

$$\frac{zg'(z)}{g(z)}=1+\frac{(1-\alpha)c_1}{z}+\frac{(1-\alpha)c_2}{z^2}+\frac{(1-\alpha)c_3}{z^3}+\cdots$$

yazılır. Son eşitlik (2.2.3) ile karşılaştırıldığında

$$(1-\alpha)c_1=-b_0 \tag{2.2.9}$$

ve

$$(1-\alpha)c_2=b_0^2-2b_1 \tag{2.2.10}$$

bulunur. Diğer taraftan (2.2.6) ve (2.2.8) den

$$\frac{wh'(w)}{h(w)}=1+\frac{(1-\alpha)d_1}{w}+\frac{(1-\alpha)d_2}{w^2}+\frac{(1-\alpha)d_3}{w^3}+\cdots$$

yazılır. Dolayısıyla son eşitlik ve (2.2.4) den

$$(1-\alpha)d_1=b_0 \tag{2.2.11}$$

ve

$$(1-\alpha)d_2=b_0^2+2b_1 \tag{2.2.12}$$

bulunur. (2.2.9) ve (2.2.11) den

$$c_1=-d_1$$

ve

$$b_0^2=\frac{(1-\alpha)^2}{2}\left(c_1^2+d_1^2\right)$$

elde edilir.

(2.2.7) ve (2.2.8) deki p ve q fonksiyonları Lemma 2.2.1’e göre $|c_n|\le 2$ ve $|d_n|\le 2$ dir. Böylece

$$\left|b_0^2\right| = \frac{(1-\alpha)^2}{2}\left|c_1^2 + d_1^2\right| \leq 4(1-\alpha)^2$$

ya da

$$\left|b_0\right| \leq 2(1-\alpha)$$

bulunur. Diğer taraftan (2.2.10) ve (2.2.12) eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa

$$b_0^4 - 4b_1^2 = (1-\alpha)^2 c_2 d_2$$

veya

$$4b_1^2 = -(1-\alpha)^2 c_2 d_2 + b_0^4$$

elde edilir. Son eşitlikte her tarafın mutlak değeri alınıp, Lemma 2.2.1 deki $\left|c_n\right| = \left|d_n\right| \leq 2$ eşitsizlikleri ve $\left|b_0\right| \leq 2(1-\alpha)$ eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|b_1\right| \leq (1-\alpha)\sqrt{4\alpha^2 - 8\alpha + 5}$$

elde edilir.

Halim, Hamidi ve Ravichandran aynı makalede $\alpha-$mertebeden güçlü meromorf bi-yıldızıl fonksiyonları tanımlayarak onların ilk iki katsayısı için bir üst sınır bulmuştur.

<u>Tanım 2.2.2</u>: $g \in \Sigma$ ve $h = g^{-1}$ olsun. Eğer $g \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\left|\arg\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (z \in \Delta, 0 < \alpha \leq 1)$$

ve

$$\left|\arg\left(\frac{wh'(w)}{h(w)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (w \in \Delta, 0 < \alpha \leq 1)$$

şartlarını sağlıyorsa g fonksiyonuna $\alpha-$mertebeden güçlü meromorf bi-yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\tilde{\Sigma}_B^*(\alpha)$ ile gösterilir [17].

Aslında $\Sigma_B^*(\alpha)$ ve $\tilde{\Sigma}_B^*(\alpha)$ sınıfları birbirleriyle bağlantılıdır. Öyleki $\Sigma_B^*(0) = \tilde{\Sigma}_B^*(1)$ dir. $\tilde{\Sigma}_B^*(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonlar için ilk iki katsayının sınırları aşağıdadır.

Teorem 2.2.2: $g \in \tilde{\Sigma}_B^*(\alpha)$ olsun. Bu durumda

$$|b_0| \le 2\alpha \quad \text{ve} \quad |b_1| \le \sqrt{5}\alpha^2$$

eşitsizlikleri sağlanır [17].

İspat: (2.2.1) ve (2.2.2) şeklinde verilen $g \in \tilde{\Sigma}_B^*(\alpha)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $\tilde{\Sigma}_B^*(\alpha)$ sınıfının tanımından

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = \left(p(z)\right)^{\alpha} \quad (z \in \Delta) \tag{2.2.13}$$

ve

$$\frac{wh'(w)}{h(w)} = \left(q(w)\right)^{\alpha} \quad (w \in \Delta) \tag{2.2.14}$$

olacak şekilde Δ kümesinde pozitif reel kısma sahip

$$p(z) = 1 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \cdots \quad (z \in \Delta)$$

ve

$$q(w) = 1 + \frac{d_1}{w} + \frac{d_2}{w^2} + \frac{d_3}{w^3} + \cdots \quad (w \in \Delta)$$

fonksiyonları vardır. Diğer taraftan Binom açılımından

$$\left(p(z)\right)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha c_1}{z} + \frac{\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)c_1^2 + \alpha c_2}{z^2} + \frac{\frac{1}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)c_1^3 + \alpha(\alpha-1)c_1c_2 + \alpha c_3}{z^3} + \cdots$$

yazılır. Böylece son eşitlik ve (2.2.3) eşitliği (2.2.13) de yerine yazılıp $\frac{1}{z}$ nin kuvvetlerinin karşılıklı katsayıları eşitlenirse

$$\alpha c_1 = -b_0 \tag{2.2.15}$$

ve

$$\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)c_1^2 + \alpha c_2 = b_0^2 - 2b_1 \tag{2.2.16}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\left(q(w)\right)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha d_1}{w} + \frac{\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)d_1^2 + \alpha d_2}{w^2} + \frac{\frac{1}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)d_1^3 + \alpha(\alpha-1)d_1d_2 + \alpha d_3}{w^3} + \cdots$$

yazılır. Son eşitlik ve (2.2.4) eşitliği (2.2.13) de yerine yazılıp $\frac{1}{w}$ nin kuvvetlerinin karşılıklı katsayıları eşitlenirse

$$\alpha d_1 = b_0 \tag{2.2.17}$$

ve

$$\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)d_1^2 + \alpha d_2 = b_0^2 + 2b_1 \tag{2.2.18}$$

elde edilir.

Böylece (2.2.15) ve (2.2.17) den

$$c_1 = -d_1$$

ve

$$b_0^2 = \frac{\alpha^2}{2}\left(c_1^2 + d_1^2\right)$$

yazılır. Son eşitlikte Lemma 2.2.1 deki $|c_1| \leq 2$ ve $|d_1| \leq 2$ eşitizlikleri uygulanırsa

$$\left|b_0^2\right| = \frac{\alpha^2}{2}\left|c_1^2 + d_1^2\right| \leq \frac{\alpha^2}{2}\left(\left|c_1^2\right| + \left|d_1^2\right|\right) \leq 4\alpha^2$$

ya da

$$|b_0| \leq 2\alpha$$

bulunur. Diğer taraftan (2.2.16) ve (2.2.18) eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa

$$2b_0^4 - 8b_1^2 = \frac{1}{4}\alpha^2(\alpha-1)^2\left(c_1^4 + d_1^4\right) + \alpha^2\left(c_2^2 + d_2^2\right) + \alpha^2(\alpha-1)\left(c_1^2 c_2 + d_1^2 d_2\right)$$

ve bu eşitlikte $b_0^2 = \frac{\alpha^2}{2}\left(c_1^2 + d_1^2\right)$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b_1^2 = {} & \frac{1}{32}\alpha^2(\alpha-1)^2\left(c_1^4 + d_1^4\right) + \frac{\alpha^2}{8}\left(c_2^2 + d_2^2\right) \\ & + \frac{\alpha^2(\alpha-1)}{8}\left(c_1^2 c_2 + d_1^2 d_2\right) - \frac{\alpha^4}{16}\left(c_1^4 + d_1^4\right) - \frac{\alpha^4}{8}c_1^2 d_1^2 \end{aligned}$$

olur. Son eşitlikte her iki tarafın mutlak değeri alınıp, Lemma 2.2.1 deki $|c_n| = |d_n| \leq 2$ eşitsizlikleri ve $|b_0| \leq 2\alpha$ eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|b_1^2\right| \leq \alpha^2(\alpha-1)^2 + \alpha^2 + 2\alpha^2(\alpha-1) + 2\alpha^4 + 2\alpha^4 = 5\alpha^4$$

elde edilir. Sonuç olarak her iki tarafın karakökünden istenilen sonuca ulaşılır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Aynı çalışmada yazarlar $\alpha-$mertebeden β tipli meromorf güçlü Bazilevic bi-ünivalent fonksiyonu tanımlayarak bu fonksiyonun kesin olmayan katsayı sınırlarını vermişlerdir.

Tanım 2.2.3: $g\in\Sigma$ ve $h=g^{-1}$ olsun. Eğer $g\in\Sigma$ fonksiyonu

$$\left|\arg\left(\left(\frac{z}{g(z)}\right)^{1-\beta} g'(z)\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2}\quad (z\in\Delta,\, 0<\alpha\leq 1,\, \beta\geq 0)$$

ve

$$\left|\arg\left(\left(\frac{w}{h(w)}\right)^{1-\beta} h'(w)\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2}\quad (w\in\Delta,\, 0<\alpha\leq 1,\, \beta\geq 0)$$

şartlarını sağlıyorsa g fonksiyonuna $\alpha-$mertebeden β tipli meromorf güçlü Bazilevic bi-ünivalent fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\Sigma_B(\beta,\alpha)$ ile gösterilir [17].

Teorem 2.2.3: $g\in\Sigma_B(\beta,\alpha)$ olsun. Bu durumda

$$|b_0|\leq\frac{2\alpha}{1-\beta}\quad \text{ve}\quad |b_1|\leq\frac{2\alpha^2}{(1-\beta)(2-\beta)}\sqrt{2(1-\beta)(2-\beta)+1}$$

eşitsizlikleri sağlanır [17].

Yine aynı çalışmada yazarlar önemli bir noktaya değinmiştir. Eğer (2.2.1) de verilen $g(w)=w+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{w^n}$ fonksiyonunda $b_0=0$ alınması durumunda yukarıdaki ispatlarda görüleceği üzere $c_1=d_1=0$ olur. Bu durumda ispat tekrardan gözden geçirilirse Teorem 2.2.1 ve 2.2.3 aşağıdaki şekilde verilir.

Teorem 2.2.4: $g\in\Sigma_B^*(\alpha)$ ve $b_0=0$ olsun. Bu durumda

$$|b_1|\leq\alpha$$

eşitsizliği sağlanır [17].

Teorem 2.2.5: $g \in \Sigma_B(\beta, \alpha)$ ve $b_0 = 0$ olsun. Bu durumda

$$|b_1| \leq \frac{2\beta^2}{2-\alpha}$$

eşitsizliği sağlanır [17].

Aynı yıl Panigrahi [18] çalışmasında $\alpha-$mertebeden meromorf bi-yıldızıl ve $\alpha-$mertebeden güçlü meromorf bi-yıldızıl fonksiyonların genelleştirilmişleri olan sırasıyla $\alpha-$mertebeden meromorf $\lambda-$bi-konveks ve $\alpha-$mertebeden güçlü meromorf $\lambda-$bi-konveks fonksiyonları tanımlayarak bu fonksiyonların ilk üç katsayıları için kesin olmayan bir üst sınır bulmuştur.

Tanım 2.2.4: $g \in \Sigma$ ve $h = g^{-1}$ olsun. Eğer $g \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left(\lambda \frac{zg'(z)}{g(z)} + (1-\lambda)\left(1 + \frac{zg''(z)}{g'(z)}\right)\right) > \alpha \quad (z \in \Delta,\, 0 \leq \alpha < 1,\, \lambda \geq 1)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(\lambda \frac{wh'(w)}{h(w)} + (1-\lambda)\left(\frac{wh''(w)}{h'(w)}\right)\right) > \alpha \quad (w \in \Delta,\, 0 \leq \alpha < 1,\, \lambda \geq 1)$$

şartlarını sağlıyorsa g fonksiyonuna $\alpha-$mertebeden meromorf $\lambda-$bi-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $T_{\Sigma_B'}(\alpha, \lambda)$ ile gösterilir [18].

$T_{\Sigma_B'}(\alpha, \lambda)$ sınıfında özel olarak $\lambda = 1$ alınırsa $\Sigma_B^*(\alpha)$ sınıfı elde edilir.

Teorem 2.2.6: $g \in T_{\Sigma_B'}(\alpha, \lambda)$ olsun. Bu durumda

$$|b_0| \leq \frac{2(1-\alpha)}{\lambda},$$

$$|b_1| \leq \frac{(1-\alpha)}{2\lambda - 1}\sqrt{1 + \frac{4(1-\alpha)^2}{\lambda^2}},$$

$$|b_2| \leq \frac{2(1-\alpha)}{3(3\lambda-2)}\left(1 + \frac{4(1-\alpha)^2}{\lambda^2}\right)$$

eşitsizlikleri sağlanır [18].

Tanım 2.2.5: $g \in \Sigma$ ve $h = g^{-1}$ olsun. Eğer $g \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\left|\arg\left(\lambda \frac{zg'(z)}{g(z)} + (1-\lambda)\left(1+\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (z \in \Delta,\, 0 \le \alpha < 1,\, \lambda \ge 1)$$

ve

$$\left|\arg\left(\lambda \frac{wh'(w)}{h(w)} + (1-\lambda)\left(\frac{wh''(w)}{h'(w)}\right)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (w \in \Delta,\, 0 \le \alpha < 1,\, \lambda \ge 1)$$

şartlarını sağlıyorsa g fonksiyonuna $\alpha-$mertebeden güçlü meromorf $\lambda-$bi-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $M_{\Sigma_B'}(\alpha,\lambda)$ ile gösterilir [18].

Özel durumda $M_{\Sigma_B'}(\alpha,1) = \tilde{\Sigma}_B^*(\alpha)$ dır.

Teorem 2.2.7: $g \in M_{\Sigma_B'}(\alpha,\lambda)$ olsun. Bu durumda

$$|b_0| \le \frac{2\alpha}{\lambda},$$

$$|b_1| \le \frac{\alpha}{2\lambda-1}\sqrt{(2-\alpha)^2 + \frac{4\alpha^2}{\lambda^2}},$$

$$|b_2| \le \frac{2\alpha}{3(3\lambda-2)}\left(\frac{2\left(6\alpha^2 - \lambda^2(\alpha^2-3\alpha+2)\right)}{3\lambda^2} + 3 - 2\alpha\right)$$

eşitsizlikleri sağlanır [18].

- ✓ Teorem 2.2.6 da b_0 ve b_1 için $\lambda = 1$ alınırsa Teorem 2.2.1 deki sonuçlara,
- ✓ Teorem 2.2.7 de b_0 için $\lambda = 1$ alınırsa Teorem 2.2.2 deki sonuç, b_1 için $\lambda = 1$ alınırsa da Teorem 2.2.2 deki sonuçtan daha zayıf bir sonuç elde edildiği görülmektedir.

Buraya kadar yapılan çalışmalardan görülüyor ki araştırmacılar meromorf bi-ünivalent fonksiyonların belli alt sınıflarına ait fonksiyonlar için b_0 ve b_1 katsayılarının kesin olmayan üst sınırları üzerinde durmuşlardır. Giriş bölümünde de bahsedildiği üzere (meromorf) bi-ünivalent fonksiyonların genel katsayısı için bir üst sınır henüz bulunamamıştır. Bu açık problem halen güncelliğini korumaktadır. Yalnız bu açık probleme ilk defa 2013 yılında Hamidi, Halim ve Jahangiri [19,20] kısmen de olsa bir cevap bulmuştur. Onlar ilk $n-1$ tane terimin sıfır olması durumunda $n.$ katsayının yani b_n nin kesin olmayan bir üst sınırını Faber polinomlarını kullanarak elde etmişlerdir. 2006 yılında Airault and Bonali [30] $g \in \mathcal{M}$ fonksiyonlarının Faber polinomu seri açılımını kullanarak $h = g^{-1}$ fonksiyonunun seri açılımı için genel bir ifade vermişlerdir. Şimdi bulunan bu ifadeyi verelim. Öncelikle Δ kümesinde

$$g(w) = w + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{w^n}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Airault and Bonali [30] çalışmasında

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}\left(b_0, b_1, b_2, ..., b_n\right) \frac{1}{z^{n+1}}$$

olduğunu bulmuştur. Burada $F_{n+1}\left(b_0, b_1, b_2, ..., b_n\right)$, $(n+1)$. dereceden bir Faber polinomudur.

Genel olarak $F_{n+1}\left(b_0, b_1, b_2, ..., b_n\right)$ fonksiyonu

$$A\left(i_1, i_2, ..., i_{n+1}\right) := \left(-1\right)^{(n+1)+2i_1+...+(n+2)i_{n+1}} \frac{(i_1 + i_2 + ... + i_{n+1} - 1)!\left(n+1\right)}{\left(i_1!\right).\left(i_2!\right)...\left(i_{n+1}!\right)}$$

olmak üzere

$$F_{n+1}\left(b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n\right) = \sum_{i_1+2i_2+\cdots+(n+1)i_{n+1}=n+1} A\left(i_1, i_2, \cdots, i_{n+1}\right)\left(b_0^{i_1} b_1^{i_2} \cdots b_n^{i_{n+1}}\right)$$

olarak verilir (bkz. [30]). Özel durumda $F_{n+1}\left(b_0, b_1, b_2, ..., b_n\right)$ in ilk 5 terimleri

$$\begin{aligned}
F_1 &= -b_0, \\
F_2 &= b_0^2 - 2b_1, \\
F_3 &= -b_0^3 + 3b_1 b_0 - 3b_2, \\
F_4 &= b_0^4 - 4b_0^2 b_1 + 4b_0 b_2 + 2b_1^3 - 4b_3, \\
F_5 &= -b_0^5 + 5b_0^3 b_1 - 5b_0^2 b_2 - 5b_0 b_1^2 + 5b_1 b_2 + 5b_0 b_3 - 5b_4
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Yukarıdaki aynı düşünceyle $h = g^{-1}$ fonksiyonunun katsayıları

$$h(w) = g^{-1}(w) = w - b_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_{n+1}^{n}\left(b_0, b_1, ...\right) \frac{1}{w^n} \quad \left(w \in \Delta\right)$$

olur. Burada K_{n+1}^{n} ifadesi ise

$$\begin{aligned} K_{n+1}^{n} &= nb_0^{n-1}b_1 + n(n-1)b_0^{n-2}b_2 \\ &+ \frac{1}{2!}n(n-1)(n-2)b_0^{n-3}(b_3+b_1^2) \\ &+ \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)(n-3)b_0^{n-4}(b_4+3b_1b_2) \\ &+ \sum_{j\geq 5} b_0^{n-j}V_j \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada V_j ler $5 \leq j \leq n$ için $b_1, b_2, ...b_n$ değişkenli bir polinomdur. Özel durumda ilk üç terim

$$\begin{aligned} &K_2^1 = b_1, \\ &\frac{1}{2}K_3^2 = b_2 + b_0b_1, \\ &\frac{1}{3}K_4^3 = b_3 + 2b_0b_2 + b_0^2b_1 + b_1^2 \end{aligned}$$

dir.

Genel durumda her $p \in \mathbb{N}$ için K_n^p nin açılımı (bkz [31])

$$K_n^p = pa_n + \frac{p(p-1)}{2}D_n^2 + \frac{p!}{(p-3)!3!}D_n^3 + ... + \frac{p!}{(p-n)!n!}D_n^n$$

şeklindedir. Burada $a_1 = 1$ ve $\mu_k\ (k = 1, 2, ..., n)$ lar $\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n = p,$ $\mu_1 + 2\mu_2 + ... + n\mu_n = n$ koşullarını sağlayan negatif olmayan sayılar olmak üzere

$$D_n^p = D_n^p(a_1, a_2, ..., a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p!(a_1)^{\mu_1} \dots (a_n)^{\mu_n}}{\mu_1! \dots \mu_n!} \quad (p \leq n)$$

şeklindedir (bkz [30]). $D_n^n(a_1, a_2, ..., a_{s+n}) = a_1^n$ olduğu açıktır (bkz [30]).

Diğer taraftan

$$A_n = \frac{1}{n}K_{n+1}^n(b_0, b_1, ...)$$

olsun. $0 \leq k \leq n-1$ için $b_k = 0$ koşulu altında $A_n = b_n\ (n \geq 4)$ olduğu şu şekilde görülebilir.

$n = 2$ için

$$A_2 = \frac{1}{2}K_3^2(b_0, b_1, b_2) = \frac{1}{2}2(b_2 + b_0b_1) = b_2 + b_0b_1$$

olup $b_0 = b_1 = 0$ koşulu altında

$$A_2 = \frac{1}{2} K_3^2 \left(0,0,b_2\right) = b_2$$

$n = 3$ için

$$A_3 = \frac{1}{3} K_4^3 \left(b_0, b_1, b_2, b_3\right) = \frac{1}{3} 3\left(b_3 + 2b_0 b_2 + b_0^2 b_1 + b_1^2\right) = b_3 + 2b_0 b_2 + b_0^2 b_1 + b_1^2$$

olup $b_0 = b_1 = b_2 = 0$ koşulu altında

$$A_3 = \frac{1}{3} K_4^3 \left(0,0,0,b_3\right) = b_3$$

olur. Bu durum genel olarak $0 \le k \le n-1$ için $b_k = 0$ koşulu altında devam ettirilirse $A_n = b_n \ \left(n \ge 2\right)$ olduğu görülür.

Ayrıca $\dfrac{zg'(z)}{g(z)}$ nin Faber polinomları ile ifadesine benzer şekilde

$$\frac{wh'(w)}{h(w)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \left(B_0, B_1, B_2, ..., B_n\right) \frac{1}{w^n}$$

dir. Burada $F_n \left(B_0, B_1, B_2, ..., B_n\right)$, $n.$ dereceden bir Faber polinomu olup

$$\begin{aligned}
F_n = & \frac{-n\left(n-(n+1)\right)!}{n!\left(n-2n\right)!} B_0^n \\
& - \frac{n\left(n-(n+1)\right)!}{(n-2)!\left(n-(2n-1)\right)!} B_0^{n-2} B_1 \\
& - \frac{n\left(n-(n+1)\right)!}{(n-3)!\left(n-(2n-2)\right)!} B_0^{n-3} B_2 \\
& - \frac{n\left(n-(n+1)\right)!}{(n-4)!\left(n-(2n-3)\right)!} B_0^{n-4} \left[B_3 + \frac{n-\left(2n-3\right)}{2} B_1^2 \right] \\
& - \sum_{j \ge 5} B_0^{n-j} K_j
\end{aligned}$$

ve $5 \le j \le n$ için K_j ler $B_1, B_2, ...B_{n-1}$ değişkenli bir polinomdur.

Hamidi, Halim ve Jahangiri [20] 2013 yılında ilk defa Faber polinomlarını kullanarak $\alpha-$mertebeden meromorf bi-yıldızıl fonksiyonlar için b_n katsayısının bir üst sınırını bulmuşlardır.

Teorem 2.2.8: $g \in \Sigma_B^*(\alpha)$ olsun. Eğer n tek sayısı için $b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1} = 0$ veya n çift sayısı için $b_0 = b_1 = \cdots = b_{n-1} = 0$ ise bu durumda

$$|b_n| \le \frac{2(1-\alpha)}{n+1} \quad (n \ge 1)$$

dir [20].

Aynı çalışmada yazarlar özel olarak b_0 ve b_1 katsayıları için aşğıdaki üst sınırı elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.9: $g \in \Sigma_B^*(\alpha)$ olsun. Bu durumda $|b_0| \le \sqrt{2(1-\alpha)}$ ve $|b_1| \le 1-\alpha$ dır [20].

Not: $\alpha-$mertebeden meromorf bi-yıldızıl fonksiyonlar için Teorem 2.2.1 ve Teorem 2.2.9 deki b_0 ve b_1 katsayılarının üst sınırları karşılaştırıldığında

$$|b_0| \le \sqrt{2(1-\alpha)} \le 2(1-\alpha) \quad \text{ve} \quad |b_1| \le 1-\alpha \le (1-\alpha)\sqrt{4\alpha^2 - 8\alpha + 5}$$

olduğu kolayca görülür. O halde Hamidi ve arkadaşlarının Teorem 2.2.9 de buldukları sonuçlar Halim ve arkadaşlarının Teorem 2.2.1 de buldukları sonuçtan daha iyi olduğu açıktır. Sonuç olarak Teorem 2.2.8 ile Teorem 2.2.1 deki sonucu genelleştirip, Teorem 2.2.7 ile de iyileştirmişlerdir.

Aynı yıl Hamidi, Halim ve Jahangiri [19] yine Faber polinomlarını kullanarak meromorf bi-ünivalent fonksiyonların belli bir alt sınıfı için b_n katsayısının bir üst sınırını bulmuşlardır.

Tanım 2.2.6: $g \in \sum$ ve $h = g^{-1}$ olsun. Eğer $g \in \sum$ fonksiyonu

$$\mathrm{Re}\left((1-\lambda)\frac{g(z)}{z} + \lambda g'(z) \right) > \alpha \quad (z \in \Delta, 0 \le \alpha < 1, \lambda \ge 1)$$

ve

$$\mathrm{Re}\left((1-\lambda)\frac{h(w)}{w} + \lambda h'(w) \right) > \alpha \quad (w \in \Delta, 0 \le \alpha < 1, \lambda \ge 1)$$

şartlarını sağlıyorsa g fonksiyonuna $B\Sigma(\alpha;\lambda)$ sınıfındadır denilir [19].

Teorem 2.2.10: $g \in B\Sigma(\alpha;\lambda)$ $\left(0 \le \alpha < 1, \lambda \ge 1\right)$ olsun. Eğer $0 \le k \le n-1$ için $b_k = 0$ ise bu durumda

$$|b_n| \le \frac{2(1-\alpha)}{(n+1)\lambda - 1} \quad (n \ge 1)$$

dir [19].

İspat: $g \in \mathcal{M}$ fonksiyonu (2.2.1) şeklinde olsun. Bu durumda

$$\left(1-\lambda\right)\frac{g(z)}{z} + \lambda g'(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\left(n+1\right)\lambda\right)\frac{b_n}{z^{n+1}} \tag{2.2.21}$$

ve $h = g^{-1}$ için

$$\begin{aligned}\left(1-\lambda\right)\frac{h(w)}{w} + \lambda h'(w) &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\left(n+1\right)\lambda\right)\frac{B_n}{w^{n+1}} \\ &= 1-(1-\lambda)\frac{b_0}{w} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(n+1\right)\lambda\right)\frac{1}{n}K_{n+1}^{n}\left(b_0,b_1,...\right)\frac{1}{w^{n+1}}\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

elde edilir. Diğer taraftan $g \in B\Sigma(\alpha;\lambda)$ olduğundan tanım gereği Δ kümesinde $\operatorname{Re} p(z) > 0$ ve $\operatorname{Re} q(w) > 0$ olacak şekilde $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{-n}$ ve $q(w) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n w^{-n}$ fonksiyonları vardır. Böylece

$$\left(1-\lambda\right)\frac{g(z)}{z} + \lambda g'(z) = 1 + \left(1-\alpha\right)\sum_{n=1}^{\infty} K_n^1\left(c_1,c_2,...,c_n\right)z^{-n} \tag{2.2.23}$$

$$\left(1-\lambda\right)\frac{h(w)}{w} + \lambda h'(w) = 1 + \left(1-\alpha\right)\sum_{n=1}^{\infty} K_n^1\left(d_1,d_2,...,d_n\right)w^{-n} \tag{2.2.24}$$

yazılır. (2.2.21) ve (2.2.23) deki eşitliklerin sağ tarafları eşitlenirse

$$\left(1-\lambda\left(n+1\right)\right)b_n = \left(1-\alpha\right)K_{n+1}^1\left(c_1,c_2,...,c_{n+1}\right),$$

ve benzer şekilde (2.2.22) ve (2.2.24) deki ifadelerin sağ tarafları eşitlenirse

$$\begin{cases} -(1-\lambda)b_0 = (1-\alpha)d_1 \\ -\dfrac{1}{n}\left(1-\left(n+1\right)\lambda\right)K_{n+1}^{n}\left(b_0,b_1,...,b_n\right) = \left(1-\alpha\right)K_{n+1}^1\left(d_1,d_2,...,d_{n+1}\right) \end{cases}$$

elde edilir. Hipotezden $0 \le k \le n-1$ için $b_k = 0$ olduğundan $B_n = -b_n$ ve böylece

$$\begin{cases}(1-\lambda(n+1))b_n = (1-\alpha)c_{n+1}\\ -(1-\lambda(n+1))b_n = (1-\alpha)d_{n+1}\end{cases}$$

bulunur. Buradan Lemma 2.2.1 kullanılırsa

$$|b_n| \leq \frac{(1-\alpha)|c_{n+1}|}{|1-(n+1)\lambda|} = \frac{(1-\alpha)|d_{n+1}|}{|1-(n+1)\lambda|} \leq \frac{2(1-\alpha)}{(n+1)\lambda-1}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.10 da bulunan sonuç $b_1, b_2, \cdots$ katsayıları için bir üst sınırdır. Yazarlar aynı çalışmada (2.2.21)-(2.2.24) eşitliklerinde özel olarak $n = 0,1,2$ alıp b_0 ve buna bağlı $b_2 + b_0 b_1$ için de bir üst sınır elde etmişlerdir. Buldukları sonuç aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.2.11: $g \in B\Sigma(\alpha;\lambda)$ $(0 \leq \alpha < 1,\ \lambda \geq 1)$ olsun. Bu durumda

$$|b_0| \leq \frac{2(1-\alpha)}{\lambda-1}$$
$$|b_1| \leq \frac{2(1-\alpha)}{2\lambda-1}$$
$$|b_2| \leq \frac{2(1-\alpha)}{3\lambda-1}$$
$$|b_2 + b_0 b_1| \leq \frac{2(1-\alpha)}{3\lambda-1}$$

dir [19].

2014 yılında Hamidi ve arkadaşları [21] $B\Sigma(\alpha;\lambda)$ sınıfının genel bir versiyonunu tanımlayarak ve Teorem 2.2.8 ve 2.2.9 deki ispat yöntemini kullanarak Teorem 2.2.8-2.2.11 deki sonuçları genelleştirmişlerdir.

Tanım 2.2.7: $g \in \sum$ ve $h = g^{-1}$ olsun. Eğer $g \in \sum$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left((1-\lambda)\left(\frac{g(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda g'(z)\left(\frac{g(z)}{z}\right)^{\mu-1}\right) > \alpha \quad (z \in \Delta,\ 0 \leq \alpha < 1,\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ \mu \geq 0)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left((1-\lambda)\left(\frac{h(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda h'(w)\left(\frac{h(w)}{w}\right)^{\mu-1}\right)>\alpha \quad (w\in\Delta,\, 0\le\alpha<1,\, 0\le\lambda\le 1,\, \mu\ge 0)$$

şartlarını sağlıyorsa g fonksiyonuna $\mathcal{M}_{\Sigma}(\lambda,\mu,\alpha)$ sınıfındadır denilir [21].

<u>Teorem 2.2.12</u>: $g\in\mathcal{M}_{\Sigma}(\lambda,\mu,\alpha)$ $(0\le\alpha<1,\, 0\le\lambda\le 1,\, \mu\ge 0)$ olsun. Eğer $0\le k\le n-1$ için $b_k=0$ ise bu durumda

$$|b_n|\le\frac{2(1-\alpha)}{|\mu-(n+1)\lambda|} \quad (n\ge 1)$$

dır [21].

<u>Teorem 2.2.13</u>: $g\in B\Sigma(\alpha;\lambda)$ $\left(0\le\alpha<1,\, \lambda\ge 1\right)$ olsun. Bu durumda

$$|b_0|\le\begin{cases}\sqrt{\dfrac{4(1-\alpha)}{|(\mu-1)(\mu-2\lambda)|}}; & 0\le\alpha<1-\dfrac{(\mu-\lambda)^2}{|(\mu-1)(\mu-2\lambda)|}\\[2ex] \dfrac{2(1-\alpha)}{|\mu-\lambda|}; & 1-\dfrac{(\mu-\lambda)^2}{|(\mu-1)(\mu-2\lambda)|}\le\alpha<1\end{cases}$$

$$|b_1|\le\frac{2(1-\alpha)}{|\mu-2\lambda|}$$

dır [21].

Not: Teorem 2.2.12 ve Teorem 2.2.13 de λ ve μ nün özel değerlerinde aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

1. $\mathcal{M}_{\Sigma}(\lambda,1,\alpha)=B\Sigma(\alpha;\lambda)$ (bkz Teorem 2.2.10, Teorem 2.2.11)
2. $\mathcal{M}_{\Sigma}(1,1,\alpha)=\Sigma_B^*(\alpha)$ (bkz Teorem 2.2.8, Teorem 2.2.9).

2015 yılında Bulut, Magesh ve Balaji [22] $B\Sigma(\alpha;\lambda)$ sınıfının farklı genelleştirmesini tanımlayarak Teorem 2.2.10 ve 2.2.11 deki sonuçları genelleştirmişlerdir.

Tanım 2.2.8: $g \in \sum$ ve $h = g^{-1}$ olsun. Eğer $g \in \sum$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left((1-\lambda+2\delta)\frac{g(z)}{z} + (\lambda-2\delta)g'(z) + \delta z g''(z) \right) > \alpha \quad (z \in \Delta, 0 \le \alpha < 1, \lambda \ge 1, \delta \ge 0)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left((1-\lambda+2\delta)\frac{h(w)}{w} + (\lambda-2\delta)h'(w) + \delta w h''(w) \right) > \alpha \quad (w \in \Delta, 0 \le \alpha < 1, \lambda \ge 1, \delta \ge 0)$$

şartlarını sağlıyorsa g fonksiyonuna $R_{\Sigma'}(\alpha, \lambda, \delta)$ sınıfındadır denilir [22].

Teorem 2.2.14: $g \in R_{\Sigma'}(\alpha, \lambda, \delta)$ $\left(0 \le \alpha < 1, \lambda \ge 1, \delta \ge 0\right)$ olsun. Eğer $0 \le k \le n-1$ için $b_k = 0$ ise bu durumda

$$|b_n| \le \frac{2(1-\alpha)}{\left|1+(n+1)(\delta-\lambda)+(n+1)^2\delta\right|} \quad (n \ge 1)$$

dır [22].

Teorem 2.2.15: $g \in R_{\Sigma'}(\alpha, \lambda, \delta)$ $\left(0 \le \alpha < 1, \lambda \ge 1, \delta \ge 0\right)$ olsun. Bu durumda

$$|b_0| \le \begin{cases} \dfrac{2(1-\alpha)}{1-\lambda+\delta}, & \lambda < 1+2\delta \\ \dfrac{2(1-\alpha)}{-1+\lambda-\delta}, & \lambda > 1+2\delta \end{cases}$$

$$|b_1| \le \begin{cases} \dfrac{2(1-\alpha)}{1-2\lambda+6\delta}, & \lambda < \dfrac{1}{2}+3\delta \\ \dfrac{2(1-\alpha)}{-1+2\lambda-6\delta}, & \lambda > \dfrac{1}{2}+3\delta \end{cases}$$

$$|b_2| \le \begin{cases} \dfrac{2(1-\alpha)}{1-3\lambda+12\delta}, & \lambda < \dfrac{1}{3}+4\delta \\ \dfrac{2(1-\alpha)}{-1+3\lambda-12\delta}, & \lambda > \dfrac{1}{3}+4\delta \end{cases}$$

$$|b_2 + b_0 b_1| \le \begin{cases} \dfrac{2(1-\alpha)}{1-3\lambda+12\delta}, & \lambda < \dfrac{1}{3}+4\delta \\ \dfrac{2(1-\alpha)}{-1+3\lambda-12\delta}, & \lambda > \dfrac{1}{3}+4\delta \end{cases}$$

dır [22].

- ✓ Teorem 2.2.14 ve Teorem 2.2.15 de $\delta = 0$ alınırsa Teorem 2.2.10 ve Teorem 2.2.11 deki sonuçlara ulaşılır.

Yine 2015 de Xiao ve Xu [23] çalışmasında meromorf bi-univalent fonksiyonların üç farklı alt sınıfı için başlangıç katsayılarının kesin olmayan üst sınırlarını elde etmişlerdir. Araştırmacılar ilk sonucu Tanım 2.2.5 de verilen $M_{\Sigma'_B}(\alpha,\lambda)$ sınıfının $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2},1\right\}$ değerleri için bulmuştur. Bulunan sonuçlar Teorem 2.2.1 deki sonuçların genelleştirilmişidir.

<u>Teorem 2.2.16</u>: $g \in M_{\Sigma'_B}(\alpha,\lambda)$ $\left(0 \le \alpha < 1,\, \lambda \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2},1\right\}\right)$ olsun. Bu durumda

$$|b_0| \le \frac{2\alpha}{|1-\lambda|} \quad \text{ve} \quad |b_1| \le \frac{\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 5}}{|1-\lambda||2\lambda - 1|}\alpha^2$$

eşitsizlikleri sağlanır [23].

<u>Tanım 2.2.9</u>: $g \in \Sigma$ ve $h = g^{-1}$ olsun. Eğer $g \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left(\left(\frac{z}{g(z)}\right)^{1-\beta} g'(z)\right) > \alpha \quad (z \in \Delta,\, 0 \le \alpha < 1,\, \beta \ge 0)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(\left(\frac{z}{h(w)}\right)^{1-\beta} h'(w)\right) > \alpha \quad (w \in \Delta,\, 0 \le \alpha < 1,\, \beta \ge 0)$$

şartlarını sağlıyorsa g fonksiyonuna $\alpha-$mertebeden β tipli meromorf Bazilevic bi-ünivalent fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı $\Sigma_g^B(\beta,\alpha)$ ile gösterilir [23].

<u>Teorem 2.2.17</u>: $g \in \Sigma_g^B(\beta,\alpha)$ $(0 \le \alpha < 1,\, \beta \ge 0,\, \beta \ne 1, 2)$ olsun. Bu durumda

$$|b_0| \le \frac{2(1-\alpha)}{|1-\beta|} \quad \text{ve} \quad |b_1| \le \frac{2(1-\alpha)}{|1-\beta||2-\beta|}\sqrt{(1-\alpha)^2(2-\beta)^2 + (1-\beta)^2}$$

eşitsizlikleri sağlanır [23].

Tanım 2.2.10: $g(z)=z+\sum_{n=k}^{\infty}\frac{b_n}{z^n},\ 0\le\alpha<1, |\beta|<\frac{\pi}{2}, z\in\Delta$ ve $h=g^{-1}$ olsun. Eğer g fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\beta}\frac{zg'(z)}{g(z)}\right)>\alpha\cos\beta$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\beta}\frac{zh'(w)}{h(w)}\right)>\alpha\cos\beta$$

şartlarını sağlıyorsa g fonksiyonuna zayıf $\alpha-$mertebeden β tipli meromorf spiral bi-ünivalent fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı $\tilde{\Sigma}_g^*(\beta,\alpha)$ ile gösterilir [23].

Teorem 2.2.18: $g\in\tilde{\Sigma}_g^*(\beta,\alpha)$ olsun. Bu durumda

$$|b_0|\le\sqrt[2k]{4(1+\alpha(\alpha-2)\cos^2\beta)}$$

ve

$$|b_k|\le\begin{cases}\dfrac{2}{k+1}\sqrt{\left[1+(1+\alpha(\alpha-2)\cos^2\beta)\right]\left[1+4^{\frac{1}{k}}(1+\alpha(\alpha-2)\cos^2\beta)^{\frac{1}{k}}\right]}; & k \text{ tek tam sayı}\\[2ex] \dfrac{2\left[1+2^{\frac{1}{k}}(1+\alpha(\alpha-2)\cos^2\beta)^{\frac{1}{2k}}\right]}{k+1}\sqrt{1+(1+\alpha(\alpha-2)\cos^2\beta)}; & k \text{ çift tam sayı}\end{cases}$$

eşitsizlikleri sağlanır [23].

2017 yılında Salehian ve Zireh [24] buraya kadar tanımlanan sınıfları ihtiva eden genel bir alt sınıfı tanımlayarak bu sınıfa ait fonksiyonların başlangıç katsayılarıyla ilgili kesin olmayan bir üst sınır elde etmişlerdir.

Tanım 2.2.11: $h,p:\Delta\to\mathbb{C}$ fonksiyonları $\forall z\in\Delta$ için $\min\{\operatorname{Re}(p(z)),\operatorname{Re}(q(z))\}>0$ olacak şekilde

$$p(z)=1+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\frac{c_3}{z^3}+\cdots \quad \text{ve} \quad q(z)=1+\frac{d_1}{z}+\frac{d_2}{z^2}+\frac{d_3}{z^3}+\cdots$$

tipli analitik fonksiyonlar olsun. Ayrıca $g\in\Sigma$ ve $h=g^{-1}$ olsun. Eğer $g\in\Sigma$ fonksiyonu

$$\lambda\frac{zg'(z)}{g(z)}+(1-\lambda)\left(1+\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right)\in p(\Delta)\quad(\lambda\geq 1,\ z\in\Delta)$$

ve

$$\lambda\frac{wh'(w)}{h(w)}+(1-\lambda)\left(\frac{wh''(w)}{h'(w)}\right)\in q(\Delta)\quad(\lambda\geq 1,\ z\in\Delta)$$

şartlarını sağlıyorsa g fonksiyonuna $M_{\Sigma_B}^{p,q}(\lambda)$ sınıfındandır denilir [24].

$M_{\Sigma_B}^{p,q}(\lambda)$ sınıfının özel durumları aşağıda verilmiştir.

- ✓ $M_{\Sigma_B}^{\frac{1+\frac{1-2\alpha}{z}}{1-\frac{1}{z}},\frac{1+\frac{1-2\alpha}{z}}{1-\frac{1}{z}}}(\lambda)=T_{\Sigma_B^{'}}(\alpha,\lambda),\ (0\leq\alpha<1)$
- ✓ $M_{\Sigma_B}^{\left(\frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}\right)^{\alpha},\left(\frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}\right)^{\alpha}}(\lambda)=M_{\Sigma_B^{'}}(\alpha,\lambda),\ (0<\alpha\leq 1)$
- ✓ $M_{\Sigma_B}^{\frac{1+\frac{1-2\alpha}{z}}{1-\frac{1}{z}},\frac{1+\frac{1-2\alpha}{z}}{1-\frac{1}{z}}}(1)=\Sigma_B^{*}(\alpha),\ (0\leq\alpha<1)$
- ✓ $M_{\Sigma_B}^{\left(\frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}\right)^{\alpha},\left(\frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}\right)^{\alpha}}(1)=\tilde{\Sigma}_B^{*}(\alpha),\ (0<\alpha\leq 1).$

<u>Teorem 2.2.19</u>: $g\in M_{\Sigma_B}^{p,q}(\lambda)$ olsun. Bu durumda

$$|b_0|\leq\min\left\{\sqrt{\frac{|c_1|^2+|d_1|^2}{2\lambda^2}},\sqrt{\frac{|c_2|+|d_2|}{2\lambda^2}}\right\},$$

$$|b_1|\leq\min\left\{\frac{|c_2|+|d_2|}{4(2\lambda-1)},\frac{1}{2\lambda-1}\sqrt{\frac{|c_2|^2+|d_2|^2}{8}+\frac{\left(|c_1|^2+|d_1|^2\right)^2}{16\lambda^2}}\right\},$$

$$|b_2|\leq\frac{1}{3(3\lambda-2)}\left[\frac{|d_1|^3}{\lambda^2}+\frac{2(2\lambda-1)|c_3|+\lambda|d_3|}{5\lambda-2}\right]$$

eşitsizlikleri sağlanır [24].

Teorem 2.2.19 da $p(z)=q(z)=\dfrac{1+\dfrac{1-2\alpha}{z}}{1-\dfrac{1}{z}}$ ve $p(z)=q(z)=\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{z}}{1-\dfrac{1}{z}}\right)^{\alpha}$ alınırsa elde edilen sonuçlar sırasıyla Teorem 2.2.6 ve Teorem 2.2.7 deki sonuçlardan daha iyi olduğu görülür.

Aynı yıl Sim and Kwon [25], meromorf bi-ünivalent fonksiyonların farklı iki alt sınıfını tanımlayarak bu sınıflara ait fonksiyonların ilk iki katsayıları için bir üst sınır elde etmişlerdir.

Tanım 2.2.12: $g\in\Sigma$ ve $h=g^{-1}$ olsun. Eğer $g\in\Sigma$ fonksiyonu

$$\alpha<\operatorname{Re}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right)<\beta \quad (z\in\Delta,\, 0\le\alpha<1<\beta)$$

ve

$$\alpha<\operatorname{Re}\left(\frac{wh'(w)}{h(w)}\right)<\beta \quad (w\in\Delta,\, 0\le\alpha<1<\beta)$$

şartlarını sağlıyorsa g fonksiyonuna $\Sigma_{s,\sigma}(\alpha,\beta)$ sınıfındandır denilir [25].

Teorem 2.2.20: $g\in\Sigma_{s,\sigma}(\alpha,\beta)$ olsun. Bu durumda

$$|b_0|\le|P_1|$$

$$|b_1|\le\frac{1}{2}\sqrt{\left|P_1^4-P_1^2+2P_1\,P_2\,-P_2^2\right|+|P_1|^2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada

$$P_1=\frac{\beta-\alpha}{\pi}i\left(1-e^{2\pi i\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}}\right)$$

ve

$$P_2=\frac{\beta-\alpha}{2\pi}i\left(1-e^{4\pi i\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}}\right)$$

dır [25].

Tanım 2.2.13: $g \in \sum$ ve $h = g^{-1}$ olsun. Eğer $g \in \sum$ fonksiyonu

$$\alpha < \operatorname{Re}\left(g'(z)\right) < \beta \quad (z \in \Delta, 0 \le \alpha < 1 < \beta)$$

ve

$$\alpha < \operatorname{Re}\left(h'(w)\right) < \beta \quad (w \in \Delta, 0 \le \alpha < 1 < \beta)$$

şartlarını sağlıyorsa g fonksiyonuna $\Sigma^0_{c,\sigma}(\alpha, \beta)$ sınıfındandır denilir [25].

Teorem 2.2.21: $g \in \Sigma^0_{c,\sigma}(\alpha, \beta), (b_0 = 0)$ olsun. Bu durumda

$$|b_1| \le \frac{2(\beta - \alpha)}{\pi} \sin\left(\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\pi\right)$$

$$|b_2| \le \frac{(\beta - \alpha)}{\pi} \sin\left(\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\pi\right)$$

eşitsizlikleri sağlanır [25].

2018 yılında Sakar [26] literatürde çok bilinen ve Ozaki-Nonokawa ünivalentlik kriteri olarak adlandırılan bir yeter şarttan yola çıkarak meromorf bi-ünivalent fonksiyonların önemli iki alt sınıfını tanımlamış ve bu sınıflar için katsayı problemini çözmüştür.

Tanım 2.2.14: $g \in \sum$ ve $h = g^{-1}$ olsun. Eğer $g \in \sum$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z^2 g'(z)}{g^2(z)}\right) > 1 - \mu \quad (z \in \Delta, 0 < \mu \le 1)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(\frac{w^2 h'(w)}{h^2(w)}\right) > 1 - \mu \quad (w \in \Delta, 0 < \mu \le 1)$$

şartlarını sağlıyorsa g fonksiyonuna $\mathbb{T}_{\Sigma_\sigma}(\mu)$ sınıfındandır denilir [26].

Teorem 2.2.22: $g \in \mathbb{T}_{\Sigma_\sigma}(\mu)$ olsun. Bu durumda

$$|b_0| \le \sqrt{\frac{2\mu}{3}} \quad \text{ve} \quad |b_1| \le \frac{2\sqrt{2}}{3}\mu$$

eşitsizlikleri sağlanır [26].

Tanım 2.2.15: $g \in \Sigma$ ve $h = g^{-1}$ olsun. Eğer $g \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\left| \arg\left(\frac{z^2 g'(z)}{g^2(z)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (z \in \Delta, 0 < \alpha \leq 1)$$

ve

$$\left| \arg\left(\frac{w^2 h'(z)}{h^2(w)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (w \in \Delta, 0 < \alpha \leq 1)$$

şartlarını sağlıyorsa g fonksiyonuna $\mathbb{T}_{\Sigma_\sigma}^{\alpha}$ sınıfındandır denilir [26].

Teorem 2.2.23: $g \in \mathbb{T}_{\Sigma_\sigma}^{\alpha}$ olsun. Bu durumda

$$|b_0| \leq \alpha\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$|b_1| \leq \begin{cases} \frac{2}{3}\alpha, & 0 < \alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\alpha^2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

eşitsizlikleri sağlanır [26].

Sakar makalesinde ayrıca $b_0 = 0$ alınması durumunda $\mathbb{T}_{\Sigma_\sigma}(\mu)$ ve $\mathbb{T}_{\Sigma_\sigma}^{\alpha}$ sınıflarına ait bir g fonksiyonu için sırasıyla $|b_1| \leq \frac{2}{3}\mu$ ve $|b_1| \leq \frac{2}{3}\alpha$ eşitsizliklerinin doğru olduğunu da göstermiştir.

Aynı yıl Janani, Murugusundaramoorthy ve Vijaya [27] subordinasyon kullanarak meromorf bi-ünivalent fonksiyonların genel bir alt sınıfını tanımlamış ve bu sınıfa ait fonksiyonlar için başlangıç katsayılarının üst sınırını elde etmişlerdir.

Tanım 2.2.16: $\phi \in \mathcal{W}$ fonksiyonu

$$\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \ldots \qquad (B_1, B_2 \in \mathbb{R}\ ,\ B_1 > 0)$$

şeklinde olsun. $g \in \Sigma$ ve $h = g^{-1}$ olmak üzere $g \in \Sigma$ fonksiyonu

$$1+\frac{1}{\gamma}\left[(1-\lambda)\left(\frac{g(z)}{z}\right)^{\mu}+\lambda\frac{z\left(g'(z)\right)^{\mu}}{g(z)}-1\right]\prec\phi(z)\quad(z\in\Delta,\ \gamma\in\mathbb{C}-\{0\},\ 0<\lambda\le 1,\ \mu\ge 1)$$

ve

$$1+\frac{1}{\gamma}\left[(1-\lambda)\left(\frac{h(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda\frac{w\left(h'(w)\right)^{\mu}}{h(w)}-1\right]\prec\phi(w)\quad(w\in\Delta,\ \gamma\in\mathbb{C}-\{0\},\ 0<\lambda\le 1,\ \mu\ge 1)$$

şartlarını sağlıyorsa g fonksiyonuna $\mathcal{P}_{\Sigma}^{\gamma}(\lambda,\mu,\phi)$ sınıfındadır denilir [27].

<u>Teorem 2.2.24</u>: $g\in\mathcal{P}_{\Sigma}^{\gamma}(\lambda,\mu,\phi)$ olsun. Bu durumda

$$|b_0|\le\frac{|\gamma||B_1|}{|\mu-\mu\lambda-\lambda|},$$

$$|b_1|\le\frac{|\gamma||B_1|}{2|\mu-2\mu\lambda-\lambda|}\left(4(B_1-B_2)^2+4B_1^2+8\left|B_1\right|(B_1-B_2)\right|+\frac{|\gamma|^2 B_1^4\left(\mu(\mu-1)(1-\lambda)+2\lambda\right)^2}{\left(\mu-\mu\lambda-\lambda\right)^4}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|b_2|\le\frac{|\gamma||B_1|}{2|\mu-3\mu\lambda-\lambda|}\left(2B_1+4|B_1-B_2|+2|B_1-2B_2+B_3|+\frac{|\gamma|^2 B_1^3\left|\mu(\mu-1)(\mu-2)(1-\lambda)-6\lambda\right|}{3\lambda^3}\right)$$

eşitsizlikleri sağlanır [27].

2018 de Motamednezhad ve Salehian [28] Tanım 2.2.4 verilen $T_{\Sigma_B'}(\alpha,\lambda)$ sınıfı için Teorem 2.2.6 daki sonuçları hem iyileştirmiş hem de genel katsayı için bir formül bulmuştur.

<u>Teorem 2.2.25</u>: $g\in T_{\Sigma_B'}(\alpha,\lambda)$ olsun. Eğer n tek sayısı için $b_1=b_2=\cdots=b_{n-1}=0$ veya n çift sayısı için $b_0=b_1=\cdots=b_{n-1}=0$ ise bu durumda

$$|b_n|\le\frac{2(1-\alpha)}{(n+1)\left((n+1)\lambda-n\right)}\quad(n\ge 1)$$

dir [28].

3. BULGULAR

Çalışmanın temel amacı aşağıda tanımladığımız (bkz. Tanım 3.1) $\mathcal{M}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfında tanımlanmış fonksiyonların genel katsayısı için bir üst sınır elde etmek olacaktır. Teoremin ispatında yoğunlukla Faber polinomlarının özellikleri ve Schwarz fonksiyonlarına ait katsayı eşitsizliği kullanılacaktır.

Tanım 3.1: $\varphi:\mathbb{U}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu Tanım 2.2.16 daki gibi tanımlanan bir fonksiyon ve $f,g\in\Sigma$ $\left(g=f^{-1}\right)$ olsun. $0\le\lambda<1$ ve $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ olmak üzere her $z,w\in\Delta$ için

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z)+\lambda z^2 f''(z)}{\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)}-1\right)\prec\varphi(z)$$

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{wg'(w)+\lambda w^2 g''(w)}{\lambda wg'(w)+(1-\lambda)g(w)}-1\right)\prec\varphi(w)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfına $\mathcal{M}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfındandır denilir [32].

Aşağıdaki teoremde $\mathcal{M}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfı için katsayı eşitsizliği verilmiştir.

Teorem 3.1: $f\in\mathcal{M}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)$ ve $f(z)=z+b_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{z^n}$ $\left(0\le\lambda<1,\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\right)$ olsun. Eğer n tek doğal sayı olduğunda $1\le k\le n-1$ için $b_k=0$ ve n çift doğal sayı olduğunda $0\le k\le n-1$ için $b_k=0$ ise bu durumda

$$|b_n|\le\frac{|\gamma|B_1}{(n+1)\left|1-\lambda(n+1)\right|}\quad(n\ge1)$$

dir [32].

İspat: İlk olarak

$$f(z)=z+b_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{z^n}$$

ve $0\le\lambda<1$ olmak üzere

$$\Lambda\big(f(z)\big)=\lambda zf'(z)+\big(1-\lambda\big)f(z)$$

olsun. Bu durumda

$$f\in\mathcal{M}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{z\Lambda'\big(f(z)\big)}{\Lambda\big(f(z)\big)}-1\right)\prec\varphi(z)$$

$$g=f^{-1}\in\mathcal{M}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{w\Lambda'\big(g(w)\big)}{\Lambda\big(g(w)\big)}-1\right)\prec\varphi(w)$$

yazılır.

Diğer taraftan $f(z)=z+b_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{z^n}$ için

$$\Lambda\big(f(z)\big)=z+\sum_{n=0}^{\infty}\big(1-\lambda(n+1)\big)b_n\frac{1}{z^n}=z+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{1}{z^n}$$

elde edilir. Şimdi Faber polinom açılımını $\mathcal{M}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfındaki fonksiyonların seri açılımına uygularsak (bkz. [31] ve [33])

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{z\Lambda'\big(f(z)\big)}{\Lambda\big(f(z)\big)}-1\right)=1-\frac{1}{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+1}\big(a_0,a_1,a_2,...,a_n\big)\frac{1}{z^{n+1}} \tag{3.1}$$

bulunur. Burada $F_{n+1}\big(a_0,a_1,a_2,...,a_n\big)$ polinomu $(n+1)$. dereceden Faber polinomudur. Daha açık olarak

$$A\big(i_1,i_2,...,i_n\big):=\big(-1\big)^{n+2i_1+...+(n+1)i_n}\frac{(i_1+i_2+...+i_n-1)!n}{\big(i_1!\big).\big(i_2!\big)...\big(i_n!\big)}$$

olmak üzere

$$F_n\big(a_0,a_1,a_2,...,a_{n-1}\big)=\sum_{i_1+2i_2+...+ni_n=n}A\big(i_1,i_2,...,i_n\big)\Big(a_0^{i_1}a_1^{i_2}...a_{n-1}^{i_n}\Big)$$

şeklindedir. Özel durumda $F_{n+1}\big(a_0,a_1,a_2,...,a_n\big)$ in ilk 5 terimleri

$$\begin{aligned}
F_1&=-a_0,\\
F_2&=a_0^2-2a_1,\\
F_3&=-a_0^3+3a_0a_1-3a_2,\\
F_4&=a_0^4-4a_0^2a_1+4a_0a_2+2a_1^3-4a_3,\\
F_5&=-a_0^5+5a_0^3a_1-5a_0^2a_2-5\big(a_1^2-a_3\big)a_0+5a_1a_2-5a_4
\end{aligned}$$

şeklinde olur. (3.1) deki aynı düşünceyle $g=f^{-1}$ fonksiyonunun katsayıları

$$g(w)=f^{-1}(w)=w-b_0-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}K_{n+1}^{n}\left(a_2,a_3,...,a_n\right)\frac{1}{w^n}=w+\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\frac{1}{w^n}$$

olur. Burada $5\leq j\leq n$ için V_j ler $b_1,b_2,...,b_n$ değişkenli polinomlar olmak üzere

$$\begin{aligned}K_{n+1}^{n}&=nb_0^{n-1}b_1+n(n-1)b_0^{n-2}b_2+\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)b_0^{n-3}(b_3+b_1^2)\\&+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)(n-3)b_0^{n-4}(b_4+3b_1b_2)\\&+\sum_{j\geq 5}b_0^{n-j}V_j\end{aligned}$$

şeklindedir. K_{n+1}^{n} in ilk beş terimi

$$\begin{aligned}K_2^1&=b_1,\\K_3^2&=2(b_0b_1+b_2),\\K_4^3&=3(b_0^2b_1+2b_0b_2+b_3+b_1^2),\\K_5^4&=4(b_0^3b_1+3b_0^2b_2+3b_0(b_3+b_1^2)+b_4+3b_1b_2)\end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $A_n=\left(1-\lambda\left(n+1\right)\right)\beta_n$ olmak üzere

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{w\Lambda'\left(g(w)\right)}{\Lambda\left(g(w)\right)}-1\right)=1-\frac{1}{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+1}\left(A_0,A_1,A_2,...,A_n\right)\frac{1}{w^{n+1}}\tag{3.2}$$

yazılır. f ve $g=f^{-1}$ fonksiyonları $\mathcal{M}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfından olduğundan subordinasyonun tanımı gereğince

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{z\Lambda'\left(f(z)\right)}{\Lambda\left(f(z)\right)}-1\right)=\varphi\left(u(z)\right)=1+B_1\sum_{n=1}^{\infty}K_n^{-1}\left(c_1,c_2,...,c_n,B_1,B_2,...,B_n\right)\frac{1}{z^n}\tag{3.3}$$

ve

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{w\Lambda'\left(g(w)\right)}{\Lambda\left(g(w)\right)}-1\right)=\varphi\left(v(w)\right)=1+B_1\sum_{n=1}^{\infty}K_n^{-1}\left(d_1,d_2,...,d_n,B_1,B_2,...,B_n\right)\frac{1}{w^n}\tag{3.4}$$

olacak şekilde

$$u(z)=\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+...+\frac{c_n}{z^n}+...,\quad |u(z)|<1,\ z\in\Delta$$

ve

$$v(w)=\frac{d_1}{w}+\frac{d_2}{w^2}+...+\frac{d_n}{w^n}+...,\quad |v(w)|<1,\ w\in\Delta$$

Schwarz fonksiyonları vardır. Böylece

Genel olarak, $K_n^p := K_n^p\left(k_1,k_2,...,k_n,B_1,B_2,...,B_n\right)$ katsayıları

$$
\begin{aligned}
K_n^p &= \frac{p!}{(p-n)!n!}k_1^n\frac{B_n}{B_1}+\frac{p!}{(p-n+1)!(n-2)!}k_1^{n-2}\frac{B_{n-1}}{B_1}\\
&+\frac{p!}{(p-n+2)!(n-4)!}k_1^{n-3}k_3\frac{B_{n-2}}{B_1}\\
&+\frac{p!}{(p-n+3)!(n-4)!}k_1^{n-4}\left[(-1)^{n+1}k_4\frac{B_{n-3}}{B_1}+(-1)^n\frac{p-n+3}{2}k_2^2\frac{B_{n-2}}{B_1}\right]\\
&+\frac{p!}{(p-n+4)!(n-5)!}k_1^{n-5}\left[(-1)^n k_5\frac{B_{n-4}}{B_1}+(-1)^{n+1}\left(p-n+4\right)k_2k_3\frac{B_{n-3}}{B_1}\right]\\
&+\sum_{j\geq 6}k_1^{n-j}X_j
\end{aligned}
$$

şeklinde olup burada X_j ler, j. dereceden $k_2,k_3,...,k_n$ değişkenli polinomlardır (bkz. [1,2]). Diğer taraftan F_{n+1} in özelliklerinden $1\leq k\leq n-1$ olması durumunda $a_k=0$ alınırsa

$$F_{n+1}(a_0,0,0,...,0,a_n)=(-1)^{n+1}a_0^{n+1}-(n+1)a_n \tag{3.5}$$

yazılır. Şimdi (3.1) ve (3.3) ifadeleri eşitlenirse

$$\frac{1}{\gamma}F_{n+1}\left(a_0,a_1,a_2,...,a_n\right)=B_1K_n^{-1}\left(c_1,c_2,...,c_n,B_1,B_2,...,B_n\right) \tag{3.6}$$

elde edilir. Buradan $1\leq k\leq n-1$ için $a_k=0$ koşulu (3.5) ve (3.6) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\gamma}\left[(-1)^{n+1}a_0^{n+1}-(n+1)a_n\right]\\
&=\frac{1}{\gamma}\left[(-1)^{n+1}\left(1-\lambda\left(n+1\right)\right)b_0^{n+1}-(n+1)\left(1-\lambda\left(n+1\right)\right)b_n\right]=B_1c_{n+1}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

bulunur. Benzer olarak (3.2) ve (3.4) karşılıklı eşitlenirse

$$\frac{1}{\gamma}F_{n+1}\left(A_0,A_1,A_2,...,A_n\right)=B_1K_n^{-1}\left(d_1,d_2,...,d_{n-1},B_1,B_2,...,B_n\right) \tag{3.8}$$

elde edilir. Sonuç olarak $1\leq k\leq n-1$ için $A_k=0$ koşulu altında (3.5) ve (3.8) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\gamma}\left[(-1)^{n+1}A_0^{n+1}-(n+1)A_n\right]\\
&=\frac{1}{\gamma}\left[(-1)^{n+1}\left(1-\lambda\left(n+1\right)\right)\beta_0^{n+1}-(n+1)\left(1-\lambda\left(n+1\right)\right)\beta_n\right]=B_1d_{n+1}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

bulunur.

Diğer taraftan f ve $g = f^{-1}$ fonksiyonlarının katsayıları karşılaştırıldığında $1 \le k \le n-1$ için $b_k = 0$ alınırsa $\beta_0 = -b_0$ ve $\beta_n = -b_n$ yazılır. Buradan n nin çift ve tek olmasına göre aşağıdaki durum elde edilir.

Eğer n tek doğal sayı ise (3.7) ve (3.9) denklemlerinden $\beta_0 = -b_0$ ve $\beta_n = -b_n$ değerlendirmeleri altında

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma}\left[(-1)^{n+1}\left(1-\lambda\left(n+1\right)\right)b_0^{n+1} - (n+1)\left(1-\lambda\left(n+1\right)\right)b_n\right] = B_1 c_{n+1} \\ \frac{1}{\gamma}\left[(-1)^{n+1}\left(1-\lambda\left(n+1\right)\right)b_0^{n+1} + (n+1)\left(1-\lambda\left(n+1\right)\right)b_n\right] = B_1 d_{n+1} \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklemler taraf tarafa çıkarılırsa

$$\frac{2}{\gamma}(n+1)\left(1-\lambda\left(n+1\right)\right)b_n = B_1\left(d_{n+1} - c_{n+1}\right)$$

yazılır. Buradan Schwarz fonksiyonları için $|c_n| \le 1$ ve $|d_n| \le 1$ eşitsizlikleri kullanılırsa

$$|b_n| \le \frac{|\gamma| B_1}{\left(n+1\right)\left|1-\lambda\left(n+1\right)\right|} \quad (n \ge 1)$$

elde edilir.

Benzer şekilde eğer n çift doğal sayı ise (3.7) ve (3.9) denklemlerinden $0 \le k \le n-1$ için $b_k = 0$ olması durumunda

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma}\left[-(n+1)\left(1-\lambda\left(n+1\right)\right)b_n\right] = B_1 c_{n+1} \\ \frac{1}{\gamma}\left[(n+1)\left(1-\lambda\left(n+1\right)\right)b_n\right] = B_1 d_{n+1} \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklemlerden

$$\frac{2}{\gamma}(n+1)\left(1-\lambda\left(n+1\right)\right)b_n = B_1\left(d_{n+1} - c_{n+1}\right)$$

yazılır. Buradan Schwarz fonksiyonları için $|c_n| \le 1$ ve $|d_n| \le 1$ eşitsizlikleri kullanılırsa

$$|b_n| \le \frac{|\gamma| B_1}{\left(n+1\right)\left|1-\lambda\left(n+1\right)\right|} \quad (n \ge 1)$$

sonucuna varılır. Böylece teoremin ispatı tamamdır.

Teorem 3.1 de $\lambda = 0$ alınırsa kompleks mertebeden Ma-Minda tipli meromorf bi-yıldızıl fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1: $f \in \mathcal{M}_{\Sigma}(0, \gamma; \varphi)$ olsun. Eğer n tek doğal sayı olduğunda $1 \le k \le n-1$ için $b_k = 0$ ve n çift doğal sayı olduğunda $0 \le k \le n-1$ için $b_k = 0$ ise bu durumda

$$|b_n| \le \frac{|\gamma| B_1}{n+1} \tag{3.10}$$

dır [32].

Sonuç 4.1 de $\gamma = 1$ ve $\varphi(z) = (1+(1-2\beta)z)/(1-z) = 1 + 2(1-\beta)z + 2(1-\beta)z^2 + ...$ alınırsa Hamidi ve arkadaşlarının Teorem 2.2.8 deki sonucu elde edilir.
Şimdi özel olarak b_0 ve b_1 için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.2: $f \in \mathcal{M}_{\Sigma}(\lambda, \gamma; \varphi)$ ve $f(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$ $\left(0 \le \lambda < 1, \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\right)$ olsun. Bu durumda

$$|b_0| \le \min\left\{ \frac{\sqrt{|\gamma|\left(B_1 + |B_2|\right)}}{1-\lambda}, \frac{\sqrt{|\gamma|\,|B_2 - B_1| + B_1}}{1-\lambda} \right\}$$

ve

$$|b_1| \le \frac{|\gamma| B_1}{2(1-2\lambda)}$$

dır [32].

İspat: (3.6) ve (3.8) eşitliklerinde; $n = 0$ alınırsa

$$-\frac{(1-\lambda)}{\gamma} b_0 = B_1 c_1 \text{ ve } \frac{(1-\lambda)}{\gamma} b_0 = B_1 d_1 \tag{3.11}$$

ve $n = 1$ alınırsa da

$$\frac{(1-\lambda)^2 b_0^2 - 2(1-2\lambda) b_1}{\gamma} = B_1 c_2 + B_2 c_1^2 \tag{3.12}$$

ve

$$\frac{(1-\lambda)^2 b_0^2 + 2(1-2\lambda)b_1}{\gamma} = B_1 d_2 + B_2 d_1^2 \tag{3.13}$$

eşitlikleri yazılır. Böylece (3.11) eşitliklerinden $c_1 = -d_1$ elde edilir. Diğer taraftan (3.12) ve (3.13) eşitliklerinden de $B_1 > 0$ durumu göz önünde de bulundurulursa

$$b_0^2 = \frac{\gamma\left[B_1(c_2 + d_2) + 2B_2 c_1^2\right]}{2(1-\lambda)^2} \tag{3.14}$$

bulunur. (3.14) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınıp $|c_n| \le 1$ ve $|d_n| \le 1$ uygulanırsa

$$|b_0|^2 \le \frac{|\gamma|\left[B_1 + |B_2|\right]}{(1-\lambda)^2} \tag{3.15}$$

elde edilir. Bu teoremdeki b_0 katsayısı için verilen eşitsizliğin ilk sonucudur.

Diğer taraftan $\mathcal{M}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfındaki subordinasyonda (1.5) ve (1.6) fonksiyonları yazılırsa

$$-\frac{(1-\lambda)}{\gamma} b_0 = \frac{B_1 p_1}{2}, \quad \frac{(1-\lambda)}{\gamma} b_0 = \frac{B_1 q_1}{2} \tag{3.16}$$

$$\frac{(1-\lambda)^2 b_0^2 - 2(1-2\lambda)b_1}{\gamma} = \frac{B_1}{2}\left(p_2 - \frac{p_1^2}{2}\right) + \frac{B_2}{4} p_1^2 \tag{3.17}$$

ve

$$\frac{(1-\lambda)^2 b_0^2 + 2(1-2\lambda)b_1}{\gamma} = \frac{B_1}{2}\left(q_2 - \frac{q_1^2}{2}\right) + \frac{B_2}{4} q_1^2 \tag{3.18}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.16) dan $p_1 = -q_1$ olduğu görülür. Bu eşitlik (3.17) ve (3.18) eşitliklerinin toplamında yerine yazılırsa

$$b_0^2 = \frac{\gamma\left[p_1^2(B_2 - B_1) + B_1(p_2 + q_2)\right]}{4(1-\lambda)^2}$$

bulunur. Son eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınıp üçgen eşitsizliği uygulanıp Lemma 2.2.1 deki $|p_n| \le 2$ ve $|p_n| \le 2$ eşitsizlikleri kullanılırsa

$$|b_0| \le \frac{\sqrt{|\gamma|\left[B_1 + |B_2 - B_1|\right]}}{1-\lambda}$$

elde edilir. Bu ise teoremdeki b_0 ın ikinci sonucudur.

Şimdi $|b_1|$ in bir üst sınırını bulalım. Bunun için (3.12) ve (3.13) taraf tarafa toplanır ve $c_1 = -d_1$ yerine yazılırsa

$$\frac{4(1-2\lambda)}{\gamma} b_1 = B_1(d_2 - c_2)$$

bulunur. Son eşitlikte her iki tarafın mutlak değeri alınıp $|c_n| \leq 1$ ve $|d_n| \leq 1$ kullanılırsa

$$|b_1| \leq \frac{|\gamma| B_1}{2(1-2\lambda)}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Not: Teorem 3.1 ve 3.2 de bulunan sonuçlar 2. bölümde verilen bazı sonuçların genelleştirilmişi ve iyileştirilmişidir. Örneğin; Teorem 3.1 ve 3.2 de $\gamma = 1, \lambda = 0$ ve $\varphi(z) = \dfrac{1+(1-2\alpha)z}{1-z} = 1 + 2(1-\alpha)z + 2(1-\alpha)z^2 + \cdots$ alınırsa sırasıyla Teorem 2.2.8 ve 2.2.9 daki sonuçlara ulaşılır. Ayrıca Teorem 3.2 de b_0 için bulunan üst sınır Teorem 2.2.9 dakinden daha iyidir. Benzer şekilde γ, λ ve φ nin farklı özel durumlarında meromorf bi-ünivalent fonksiyonların birçok alt sınıfı için bulunan sonuçlara ulaşılabilir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak meromorf bi-ünivalent fonksiyonların tanım ve bazı özellikleri tanıtıldı. Daha sonra literatür olarak meromorf bi-ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıfları için bu zamana kadar yapılan katsayı eşitsizlikleri verildi. Bu çalışmada meromorf bi-ünivalent fonksiyonların genel bir alt sınıfını tanımlayarak bu sınıfa ait fonksiyonların genel katsayıları için bir üst sınır elde edildi. Ayrıca Caratheory sınıfına ait fonksiyonların özelliğini kullanarak $|b_0|$ ve $|b_1|$ için daha iyi bir üst sınır elde edildi. Özellikle $|b_0|$ için elde edilen sonuç daha kullanışlıdır.

Yapılan çalışma (bkz. [32]) makale olarak yayımlanması için bir dergiye sunuldu. Bulunan sonuç son zamanlarda yapılan Hamidi ve arkadaşlarının [17,20] sonucunun genelleştirilmesi olup ayrıca bu sonuç literatür kısmında verilen bir çok sonucun genel halidir. Bu çalışmadan yola çıkarak bazı araştırmacılar meromorf bi-ünivalent fonksiyonlar teorisinde ele alınan birçok problemi $\mathcal{M}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfı için yapabilir. Örneğin; bu sınıf için Fekete-Szegö ve Hankel determinantı problemi ele alınabilir. Hatta dördüncü ve daha üst katsayılar için sınırlar bulunabilir.

5. KAYNAKLAR

[1] Duren, P. L. (1983). Univalent functions. Springer Verlag, 382, New York Inc.

[2] Goodman, A.W. (1983). Univalent functions I. Mariner publishing company, 245, Tapma, Florida.

[3] Pommerenke, Ch. (1975). Univalent functions, Vandenhoeck ve Ruprecht Company, s- 376, Göttingen, Berlin.

[4] Lewin, M. (1967). On a coefficient problem for bi-univalent functions. Proc. Amer. Math. Soc., 18, 63-68.

[5] Brannan, D. A. and Clunie, J. G. (Eds.), (1980). Aspect of contemporary complex analysis. (Proceedings of the NATO advanced study ınstitute held at the university of durham; July 1-20,1979), Academic Press, New York and London.

[6] Netanyahu, E. (1969). The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in. Arc. Rational Mech. Anal., 32, 100-112.

[7] Styer, D. and Wright D. J. (1981). Results on bi-univalent functions. Proceedings of the American Mathematical Society, 82(2), 243-248.

[8] Tan, D. L. (1984). Coefficient estimates for bi-univalent functions. Chinese Ann. Math. Ser. A, 5, 559–568.

[9] Brannan, D. A. and Taha, T. S. (1986). On some classes of bi-univalent functions. Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 31(2), 70-77.

[10] Kına S. K. (2016). Bi-ünivalent fonksiyonların belli alt sınıfları için katsayı eşitsizliği. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Yüksek Lisans Tezi.

[11] Schıffer, M. (1938). Sur un probleme D'extremum de la representation conforme. Bull. Soc. Math. France, 66, 48-55.

[12] Duren, P.L. (1971). Coefficients of meromorphich schlicht funtions. Proc. Amer. Math., (28), 169-172.

[13] Sprınger, G. (1951). The coefficient problem for schlicht moppings of the exterior of the unit circle. Trans. Amer. Math., 70, 421-450.

[14] Kubato, Y. (1976/77). Coefficients of meromorphic univalent functions. Kodai Math. Sem., 28(2-3), 253-261.

[15] Schober, G. (1977). Coefficients of inverse of meromorphic univalent functions. Proc. Amer. Math., 67(1), 111-116.

[16] Kapoor, G.P. and Mishra, A. K. (2007). Coefficient estimates for inverse of starlike functions of positive order. J. Math. Anal. Appl., 329(2), 922-934.

[17] Halim, S. A., Hamidi, S. A. and Ravichandran, V. (2011). Coefficient estimates for meromorphic bi-univalent functions. preprint, arXiv:1108.4089.

[18] Panigrahi, T. (2013). Coefficient bounds for certain subclasses of meromorphic and bi-univalent functions. Bull. Korean Math. Soc., 50(5), 1531-1538.

[19] Hamidi, S.G., Halim, S.A. and Jahangiri, J.M. (2013). Coefficient estimates for a class of meromorphic bi-univalent functions. C. R. Acad. Sci. Paris., 351, 349-352.

[20] Hamidi, S. G., Halim, S. A. and Jahangiri, J. M. (2013). Faber polynomial coefficient estimates for meromorphic bi-starlike functions. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2013, 4 pp.

[21] Hamidi, S. G., Janani, T. and Murugusundaramoorthy, G. (2014). Coefficient estimates for certain classes of meromorphic bi-univalent functions. C. R. Acad. Sci. Paris., 352, 277-282.

[22] Bulut, S., Magesh, N. and Balajı, V. K. (2015). Faber polynomial coefficient estimates for certain subclases of meromorphic bi-univalent functions. C. R. Acad. Sci. Paris., 353, 113-116.

[23] Xiao, H-G. and Xu, Q-H. (2015). Coefficient estimates for three generalized classes of meromorphic and bi-univalent functions. Filomat, 29(7), 1601-1612.

[24] Salehian, S. and Zireh, A. (2017). Coefficient estimates for certain subclass of meromorphic and bi-univalent functions. Commun. Korean Math. Soc., 2, 389-397.

[25] Young, J. S. and Oh, S. K. (2017). Certain subclasses of meromorphically bi-univalent functions. Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 40, 841-855.

[26] Sakar, F. M. (2018). Estimating coefficients for certain subclasses of meromorphic and bi-univalent functions. Journal of Inequalities and Applications, 2018, 283.

[27] Jahani, T., Murugusundaramoorthy, G. and Vijaya K. (2018). New subclass of pseudo-type meromorphic bi-univalent functıons of complex order. Novi Sad J. Math., 48(1), 93-102.

[28] Motamednezhad, A. and Salehan, S. (2018). Faber polynomial coefficient estimates for certain subclass of meromorphic bi-univalent functions. Commun. Korean Math. Soc., 33(4), 1229-1237.

[29] Ponnusamy, S. and Silverman, H. (2006). Complex variables with applications. Birkhäuser. Boston.

[30] Airault, H. and Bonali, A. (2006). Differential calculus on the Faber polynomials. Bull. Sci. Math., 130(3), 179-222.

[31] Airault, H. (2008). Remarks on Faber polynomials. Int. Math. Forum, 3(9-12), 449-456.

[32] Deniz, E. and Yolcu, H.T. (2019). Coefficient ınequality for certain subclasses of meromorphic bi-univalent functions. Yayınlanması için dergiye sunuldu.

[33] Airault, H. And Ren. J. (2002). An algebra of differential operators and generating functions on the set of univalent functions. Bull. Sci. Math., 126(5), 179-222.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Hatice Tuğba YOLCU

Doğum Yeri: Çivril/Denizli

Doğum Tarihi: 03.06.1982

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise: Ortaklar Anadolu Öğretmen Lisesi AYDIN - 2000

Lisans: Atatürk Üniveristesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği - 2004

Yüksek Lisans: Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı (Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar: 2011 yılında Kars Susuz ATATÜRK Ortaokulu 'nda göreve başladım. 2012 yılından bu yana Kars İSTİKLAL Ortaokulu'nda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktayım.