

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FİNANSAL AKIŞLARIN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ VE ONLARIN
NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Ömer ATALAY
DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil YAGUB

ARALIK-2019
KARS



T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI



**FİNANSAL AKIŞLARIN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ VE ONLARIN
NÜMERİK ÇÖZÜMÜ**

Ömer ATALAY

DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN




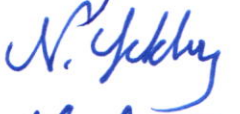

Prof. Dr. Gabil YAGUB

ARALIK-2019

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı doktora öğrencisi Ömer ATALAY'ın Prof. Dr. Gabil YAGUB danışmanlığında doktora tezi olarak hazırladığı "Finansal Akışların Optimal Kontrol Problemleri ve Onların Nümerik Çözümü" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy **birliği** ile kabul edilmiştir.

09/ 12 / 2019

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Gabil YAGUB	
Üye	: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU	
Üye	: Prof. Dr. Ötüken SENER	
Üye	: Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Hakan YETİŞKİN	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve / sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ömer ATALAY

ÖZET

Doktora Tezi

FİNANSAL AKIŞLARIN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ VE ONLARIN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Ömer ATALAY

Kafkas Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gabil YAGUB

Bu tez çalışmasında finansal akışların optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Tezin birinci bölümünde optimal kontrol problemleri ile ilgili genel bilgilere, literatür araştırmasına ve genel tanım, teorem ve lemmalara yer verilmiştir. İkinci bölümde optimal kontrol problemleri ele alınmış, finansal akışların optimal kontrol problemi ifade edilmiştir. Problemin olası kontroller kümesi, ölçülebilir karesel integrallenebilir fonksiyonların uzayıdır. Daha sonra finansal akışların optimal kontrol probleminin ayrık aynısı ve çözüm yöntemi ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde finansal akışların optimal kontrol probleminin iyi konulması ve amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilirliği gösterilmiştir. Sonrasında çözüm için gerek ve yeter şart verilmiştir. Daha sonra bu optimal kontrol probleminin sonlu farklar yöntemi ile ayrık aynısı oluşturularak, çözümünün varlığı gösterilmiş, sonlu fark şemasının hatası değerlendirilmiş ve sonlu fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı incelenmiştir. Üçüncü bölümde elde

edilen ayrık optimal kontrol probleminin gradyent izdüşüm yöntemi ile Matlab R2016a programı ile çözüm algoritması inşa edilmiş ve örnek uygulamalara yer verilmiştir. Dördüncü ve son bölümde ise bu tezin daha önce yapılan çalışmalardan farklılığı vurgulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Optimal kontrol, Finansal akışların kontrolü, Sonlu farklar yöntemi, Gradyent izdüşüm yöntemi, Ölçülebilir karesel integrallenebilir fonksiyonların uzayı.

2019, 126 Sayfa



ABSTRACT

Ph. D. Thesis

OPTIMAL CONTROL PROBLEMS OF FINANCIAL FLOWS AND THEIR NUMERICAL SOLUTION

Ömer ATALAY

Kafkas University

Graduate School of Applied and Natural Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Gabil YAGUB

In this thesis, the optimal control problem of financial flows is discussed. In the first chapter of the thesis, general informations about optimal control problems, literature research and general definitions, theorems and lemmas are given. In the second chapter, optimal control problems are discussed and optimal control problem of financial flows is explained. The set of possible controls of the problem is the space of measurable square-integrable functions. Then, the discrete same of the optimal control problem of financial flows and solution method is expressed. In the third chapter, the well-posedness of the optimal control problem of financial flows and the differentiability of the objective function are shown. Then the necessary and sufficient conditions for the solution are given. Then the discrete form of this optimal control problem is created with the finite difference method, the existence of the solution is shown, the error of the finite difference

scheme is evaluated and the convergence of the finite difference approaches according to the functional is proved. In the third chapter, the solution algorithm of Matlab R2016a program is constructed by using gradient projection method of discrete optimal control problem and sample applications are given. In the fourth and last part, the difference of this thesis from the previous studies is emphasized.

Key Words: Optimal control, Control of financial flows, The finite difference method, The gradient projection method, The space of measurable square-integrable functions.

2019, 126 pages



TEŞEKKÜR

Doktora ders dönemimin başlangıcından, tez çalışmamın son günlerine dek değerli vakitlerini bana ayıran, kıymetli bilgileri ile desteklerini ve özverili katkılarını benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden danışmanım Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB ve hocam Sayın Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY'a en içten teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

Bu zorlu süreçte her vakit yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini hiç esirgemeyen kıymetli eşim Tazegül DEMİR ATALAY, biricik kızım İlkim Hira ve oğlum Ömer Asaf'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Ömer ATALAY

Aralık 2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	IV
ABSTRACT	VI
TEŞEKKÜR	VIII
SİMGELER DİZİNİ.....	XI
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş	1
1.2. Kuramsal Temeller	5
2. MATERYAL VE YÖNTEM	23
2.1. Optimal Kontrol Problemi	23
2.2. Finansal Akışların Optimal Kontrol Problemi	27
2.2.1. Optimal Kontrol Probleminin Konulması.....	28
2.3. Optimal Kontrol Probleminin Nümerik Çözümü	30
2.3.1. Gradyent Yöntemi	31
2.3.2. Gradyent İzdüşüm Yöntemi	32
3. BULGULAR.....	35
3.1. Finansal Akışların Optimal Kontrol Problemi	35
3.1.1. Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulması	38
3.1.2. Amaç Fonksiyonelinin Diferansiyellenebilirliği ve Çözüm İçin Gerek ve Yeterli Şart.....	46
3.2. Finansal Akışların Optimal Kontrol Problemi İçin Sonlu Farklar Yöntemi	58
3.2.1. Optimal Kontrol Probleminin Sonlu Farklar Yöntemi ile Aynısının Oluşturulması.....	58
3.2.2. Ayrık Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı	63
3.2.3. Sonlu Fark Şemasının Hatasının Değerlendirilmesi	65
3.2.4. Sonlu Fark Yaklaşımlarının Fonksiyonele Göre Yakınsaklığı	72

3.3.	Optimal Kontrol Probleminin Nümerik Çözümü	81
3.3.1.	Finansal Akışların Optimal Kontrol Probleminin Gradyent İzdüşüm Yöntemi ile Çözümü	81
3.4.	Matlab Uygulamaları	86
3.4.1.	Örnek Uygulama 1	86
3.4.2.	Örnek Uygulama 2	104
4.	TARTIŞMA VE SONUÇ	112
5.	KAYNAKLAR	114
6.	EKLER	119

SİMGELER DİZİNİ

Tezde kullanılan temel simgeler:

\forall Herhangi

$T > 0$ Verilen sayı

\mathbb{R}^n n boyutlu Öklid uzayı

$\text{int}(U)$ U kümesinin bütün iç noktalarının kümesi

$L_q(0, T)$ $(0, T)$ aralığında q . kuvveti integrallenebilen fonksiyonların kümesi

$W_2^1(0, T)$ Kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0, T)$ uzayından olan *Sobolev* uzayı

$L_2^{(n)}(0, T)$ Ölçülebilir, karesel-integrallenebilir n-boyutlu fonksiyonların uzayı

$P_X(y)$ y noktasının X kümesine izdüşümü

ψ Eşlenik Fonksiyon

Δ Fark operatörü

$[0, \infty]$ $[0, \infty) \cup \{\infty\}$

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

İnsanlar yüzyıllar boyunca karşılaştıkları problemlere en iyi çözümü getirmeye çalışmışlardır. Karşılaşılan bu problemler için çözüm arayışına giren insanlar, her dönemde bu problemlere özgü yöntemler geliştirmiş olmasına rağmen tüm problemlerin çözümüne yol gösterecek yaklaşımlar ortaya koyamamıştır. Ancak daha sonraları “birçok doğa yasasının varyasyon prensipleriyle ifade edilebilir” olmasının anlaşılmasıyla matematiğin çok önemli bir dalı olan “varyasyon hesabı” oluşmuştur[1]. Optimal kontrol teorisi de 300 yılı aşan bir geçmişi olan “Brachistochrone” problemi ile ortaya çıkan varyasyon hesabının bir sonucudur [2, 3].

Optimal kontrol teorisinin kökeni 17. yüzyılda “varyasyon hesabına” dayanmaktadır. Bu yüzyılda Galileo, Fermat, Newton, Leibnitz ve Bernoulli kardeşler gibi ünlü bilim adamları bu alanda çalışmalar yapmışlardır. Varyasyon hesabı 18. yüz yılda Euler ve Lagrange, 19. yüzyılda Legendre, Hamilton, Weierstrass ve Jacobi tarafından geliştirilmiştir. 20. yüzyılın başlarında ise konu üzerinde son dokunuşları Bolza ve Bliss gerçekleştirmiştir. 1957 yılına gelindiğinde Bellman özellikle lineer olmayan geri beslemeli kontrol şeması için Dinamik Programlama olarak adlandırılan Hamilton-Jacobi Teoremine yeni bir bakış açısı kazandırmıştır. Mcshane (1939) ve Pontryagin (1962) eşitsizlik kısıtları içeren kontrol değişkenleri için varyasyon hesabını genişletmiş ve sonuç olarak ortaya “Maksimum İlkesi” çıkmıştır[4, 5].

20. yüzyılın ortalarında teknolojinin hızla gelişmesi sonucu, özellikle de uzay teknolojisinde karşılaşılan problemler klasik varyasyon hesabı yöntemleri ile çözülemediğinden yeni metotların geliştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur[6]. 1950'lerde, özellikle havacılık problemleri üzerine çalışmalar yapan mühendisler bir dizi diferansiyel denklem tarafından oluşturulan bir sistemi kontrol etme problemi ile ilgilenmeye başlamışlardır. Problemlerin çoğunda, doğal olarak, belirli bir performans indeksinin en

aza indirilebilmesi için sistemin kontrol edilebilmesi istenmektedir. Bazı havacılık problemlerinde, performansta küçük bir gelişme sağlanarak maliyette büyük tasarruf sağlanmış ve böylece optimal işlem çok önemli hale gelmiştir[7]. Bu süreçte, Dinamik programlama ve Pontryagin'in maksimum prensibinin formulüasyonu ile 1950'lerde modern anlamda optimal kontrol teorisinin temelleri atılmıştır[6].

Optimal kontrol teorisindeki bu gelişim sadece uzay teknolojilerindeki problemler ve bu problemlerin çözümleri ile sınırlı kalmamıştır. Optimal kontrollerin hesaplanması ve uygulanması için pratik olan teknikler geliştirilmeye başlandıkça bu teori, mühendislik, ekonomi, işletme ve finans gibi birçok farklı alanda kullanılmaya başlanmıştır.

Geçtiğimiz yarım yüzyıl boyunca, finans yönetimi, mühendislik, bilgisayar bilimi, üretim, endüstri ve ekonomi gibi pek çok optimizasyon problemi ortaya çıkmıştır. Genellikle, belli amaçları bazı kısıtlar altında optimize etmek (minimize veya maksimize etmek) gerekmektedir. Örneğin, bir şirket, halihazırda kazandığı kar payından vazgeçmek pahasına gelecekte kazanacağı kar avantajı için kazançlarının ne kadarlık kısmını elinde tutmasına ve ne kadarlık kısmı ile hisse senedi alınacağına karar vermelidir. Bu fikrin amacı, hisse sahipliğinin bugünkü değerini en üst düzeye çıkarmaktır, ancak, birikmiş kârların elde tutulması, mevcut temettüleri azaltmakta ve yeni hisse senedi ihracı, sahibinin öz sermayesinin etkisini azaltabilmektedir[8].

Bazı optimizasyon problemleri, daha karmaşık ve dinamik sistem içeren optimal kontrol problemi içerir. Analitik çözümlerle çözülebilen gerçek dünya optimal kontrol problemleri maalesef oldukça azdır[8]. Bilgisayarların yaygınlaşması ile birlikte optimal kontrol problemlerini çözmek için sayısal algoritmaların üretilmesi, birçok araştırmacı, mühendis ve yöneticinin dikkatinin optimal kontrol problemlerine yönelmesini sağlamıştır. Bu gelişmeyle birlikte analitik çözümü çok karmaşık olan gerçek dünya problemleri, nümerik yöntemler ile kolayca çözülmeye başlanmıştır. Bu sayede optimal kontrol teorisi, diğer farklı bilim alanlarıyla birlikte ekonomi ve finans alanında da çok önemli bir hale gelmiştir.

Son yarım asırda, ekonomi ve finans alanında optimal kontrol problemleri ile ilgili onlarca çalışma yapılmıştır. [8-30] çalışmaları son 50 yılda işletme, ekonomi ve finans alanlarında optimal kontrol teorisine oldukça önemli katkılarda bulunmuşlardır.

Bu çalışma finansal akışların optimal kontrol problemini incelemek üzere hazırlanmıştır. Optimal kontrol problemleri incelenirken aşağıda belirtilen soruların cevapları verilmeye çalışılmıştır:

1. Optimal kontrol problemi iyi konulmuş mudur?

Optimal kontrol problemlerinin iyi konulması gerekmektedir; yani optimal kontrol probleminin çözümünün var olması, amaç fonksiyonelinin alttan sınırlı olması ve herhangi minimalleştirici dizinin minimum noktalar kümesine yakınsaması gerekmektedir.

2. Optimal kontrol probleminin çözümü için gerek ve yeter şartlar nelerdir?

3. Optimal kontrol probleminin nümerik çözümü hesaplanırken hangi çözüm yöntemleri kullanılabilir?

Bu sorular dikkate alınarak hazırlanan bu çalışmanın 2. bölümünde, optimal kontrol probleminin genel tanımı verilerek optimal kontrol problemlerinin tipleri hakkında bilgilere yer verilmiştir. Daha sonra tezde ele alınan finansal akışların optimal kontrol problemi ifade edilmiştir. Optimal kontrol probleminin durumunu oluşturan, Cauchy problemi olarak adlandırılan, başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği için ilgili teorem ifade edilmiştir. Ardından optimal kontrol probleminin çözümü için gradyent yöntemleri ifade edilerek gradyent izdüşüm yönteminin tanımına yer verilmiştir.

3. bölümde, ikinci bölümde verilen finansal akışların optimal kontrol problemi, ayrık aynısı ve nümerik çözümü yer almıştır.

3.1 alt bölümünde optimal kontrol probleminin iyi konulmuş olup olmadığı araştırılmıştır. Bunun için önce problemin çözümünün varlığı ve tekliği için bir teorem ifade edilerek ispatı verilmiştir. Sonra ele aldığımız optimal kontrol probleminin amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilir olduğu gösterilmiş, ardından problemin çözümü için gerek ve yeter şart elde edilmiştir.

3.2. alt bölümde 3.1. alt bölümünde verilen optimal kontrol problemine sonlu farklar yöntemi uygulanarak problemin ayrık aynısı elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen ayrık optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı için bir teorem ifade ve ispat edilmiştir. Ardından ayrık optimal kontrol probleminin sonlu fark şemasının hatası değerlendirilmiştir. Son olarak sonlu fark yaklaşımlarının amaç fonksiyoneline göre yakınsak olduğu ispat edilmiştir.

3.3. alt bölümde, 3.1. alt bölümünde verilen optimal kontrol probleminin 3.2. alt bölümde verilen ayrık aynısı için gradyent iz düşüm yöntemi uygulanmıştır. Noktanın olası kontroller kümesine olan izdüşümü tanımlanarak yineleme formülü elde edilmiştir. Yineleme formülünü durdurulması için kısıtlar oluşturulmuştur. Elde edilen formül için çözüm algoritması inşa edilmiştir.

3.4. bölümde 3.1 alt bölümünde verilen optimal kontrol problemi için iki örnek oluşturulmuştur. Bu örneklerin çözümü için MatlabR2016a programında çözüm algoritması inşa edilerek nümerik çözümleri gerçekleştirilmiştir. Çözümler doğrultusunda elde edilen bulgular yine bu bölümde ele alınmıştır. Matlab çözüm algoritmaları EKLER başlığında verilmiştir.

4. ve son bölümde ise tezin önemi vurgulanarak, literatürde benzer çalışmalar ile farklılıkları ortaya koyulmuştur.

1.2. Kuramsal Temeller

Bu alt bölümde tezde kullanacağımız tanımları, teoremleri ve lemmaları vereceğiz:

Tanım 1.1: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sonsuz kez türevlenebilir bir fonksiyon ve $x_0 \in [a, b]$ olsun.

Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

kuvvet serisine f 'nin x_0 noktasında *Taylor serisi* ya da *Taylor açılımı* denir.

Tanım 1.2: $X \subset \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. Eğer $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in [0, 1]$ için $(\alpha x + (1-\alpha)y) \in X$ ise X kümesine *konveks küme* denir. Başka bir deyişle bir X kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası yine bu kümeye aitse, bu X kümesine *konveks küme* denir.

Tanım 1.3: $X_1, X_2, \dots, X_m, X, Y \in \mathbb{R}^n$ kümeleri verilsin.

$$Z_1 = \left\{ z : z = \sum_{i=1}^m x_i, x_i \in X_i, i = \overline{1, m} \right\}$$

$$Z_2 = \{ z : z = x - y, x \in X \text{ ve } y \in Y \}$$

$$Z_3 = \{ z : z = \lambda x, x \in X \text{ ve } \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Z_1 kümesine X_1, X_2, \dots, X_m kümelerinin *toplamı* denir.

$Z_1 = X_1 + X_2 + \dots + X_m$ ile gösterilir.

Z_2 kümesine X ile Y kümelerinin farkı denir.

Z_3 kümesi X kümesinin sayısı ile λ çarpımı denir ve $Z_3 = \lambda x$ ile gösterilir.

Teorem 1.1: $X_1, X_2, \dots, X_m, X, Y \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri konveks kümeler olsun. Bu takdirde Tanım 1.3 'te verilen Z_1, Z_2 ve Z_3 kümeleri de konveks kümedir.

Teorem 1.2: $X = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \geq 0, j \in I, I = \{1, 2, \dots, n\}, Ax \leq b, \overline{Ax} \leq \overline{b}\}$ kümesi konveks kümedir.

Teorem 1.3: X konveks kümesinin kapanışı olan \overline{X} kümesi de konvekstir.

Tanım 1.4: $X \subset \mathbb{R}^n$, $x^1, x^2, \dots, x^n \in X$ noktaları verilsin. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \geq 0$ reel sayılar ve $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$ olsun.

$$x = \sum_{i=1}^n \beta_i x^i$$

noktasına x^1, x^2, \dots, x^n noktalarının konveks kombinasyonu denir.

Tanım 1.5: $X \subset \mathbb{R}^n$ konveks bir küme, $f(x)$ de bu küme üzerinde tanımlı sonlu değerlere sahip bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ ve $\forall \beta \in [0, 1]$ için

$$f(\beta x + (1 - \beta)y) \leq \beta f(x) + (1 - \beta)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa bu $f(x)$ fonksiyonuna X kümesi üzerinde konveks fonksiyon denir.

Tanım 1.6: $X \subset \mathbb{R}^n$ konveks bir küme, $f(x)$ de bu küme üzerinde tanımlı sonlu değerlere sahip bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in X, x \neq y$ ve $\forall \beta \in (0, 1)$ için

$$f(\beta x + (1-\beta)y) < \beta f(x) + (1-\beta)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa bu $f(x)$ fonksiyonuna X kümesi üzerinde *ciddi (kesin) konveks fonksiyon* denir.

Tanım 1.7: $X \subset \mathbb{R}^n$ konveks bir küme, $f(x)$ de bu küme üzerinde tanımlı sonlu değerlere sahip fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ ve $\forall \beta \in [0,1]$ için

$$f(\beta x + (1-\beta)y) \leq \beta f(x) + (1-\beta)f(y) - \beta(1-\beta)\theta \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}^2$$

olacak şekilde $\theta > 0$ sayısı varsa $f(x)$ fonksiyonuna X kümesi üzerinde $\theta > 0$ sayısı ile *kuvvetli konveks fonksiyon* denir. Burada $\theta > 0$ sayısına *kuvvetli konvekslik katsayısı* denir.

Teorem 1.4: $\forall \theta > 0$ için θ -kuvvetli konveks fonksiyon konveks fonksiyondur. [31].

Lemma 1.1: $f_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin; burada $X \subset \mathbb{R}^n$ konveks kümedir. Eğer f_1 konveks fonksiyon ve f_2 θ -kuvvetli konveks fonksiyon ise $F = f_1 + f_2$ fonksiyonu θ -kuvvetli konveks fonksiyondur[31].

Tanım 1.8: $f : [t_0, T] \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. Sonlu sayıdaki $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k \in [t_0, T]$ noktalarının dışında her yerde sürekli olan ve bu noktalarda I. çeşit kaldırılabilir süreksizliğe sahip olan f fonksiyonuna *parçalı sürekli fonksiyon (p.s.f)* denir.

Tanım 1.9: Eğer x_0 durumunu t_1 anında başlangıç noktasına dönüştüren $t \in [t_0, t_1]$ için sonlu bir $t_1 \geq t_0$ zamanı ve $u(t)$ kontrolü var ise, bu x_0 durumuna t_0 anında *kontrol*

edilebilirdir denir. Eğer tüm x_0 değerleri, tüm t_0 zamanları için kontrol edilebiliyorsa *sistem tamamen kontrol edilebilirdir* veya kısaca *kontrol edilebilirdir* denir.

Tanım 1.10: X , \mathbb{R} üzerinde bir vektör uzay olsun. X üzerinde bir norm aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyondur. Her $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

- a) $\|x\| \geq 0$,
- b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
- d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Üzerinde bir norm ile tanımlanmış olan bir X vektör uzayına *normlu vektör uzay* denir ve $(X, \| \cdot \|)$ ile gösterilir.

Tanım 1.11: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|x\|_{\mathbb{R}^n} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

ile tanımlı $\|x\|_{\mathbb{R}^n}$ fonksiyonu \mathbb{R}^n üzerinde *bir norm* tanımlar. Bu norma *Öklid normu* adı verilir.

Tanım 1.12: Bir normlu vektör uzayı, normdan indirgenen metrikle tam ise bir *Banach uzayı* olarak adlandırılır.

Tanım 1.13: Bir iç çarpım uzayı, iç çarpımın indirgediği normdan indirgenen metriğe göre tam ise bu uzaya *Hilbert uzayı* adı verilir.

Tanım 1.14: $D \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in D$ için

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

olacak şekilde bir $L > 0$ sayısı varsa, f dönüşümüne D üzerinde *Lipschitz koşulunu sağlar* denir. $L > 0$ sayısında da *Lipschitz sabiti* adı verilir. Lipschitz koşulunu sağlayan dönüşümlere çoğunlukla *Lipschitz sürekli dönüşüm* adı verilir.

Tanım 1.15 (Cauchy Dizisi): Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq N$ ve $m \geq N$ olmak üzere, $|x_n - x_m| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N tamsayısı varsa, (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 1.16: Bir metrik uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya *tamdır* denir.

Teorem 1.5 (Analizin Temel Teoremi): $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde f 'nin F gibi ilkel fonksiyonu ($F' = f$) vardır ve

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

dır[32].

Tanım 1.17: Bir X kümesinin alt kümelerinin bir Σ sınıfı aşağıdaki özellikleri sağlarsa, Σ 'ya bir σ -cebiri (veya σ -cisim) denir.

a) $X \in \Sigma$;

b) $\forall S \in \Sigma \Rightarrow X \setminus S \in \Sigma$;

$$c) S_n \in \Sigma, n = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \Sigma.$$

Bu tanımın bir sonucu olarak $\emptyset \in \Sigma$ 'dir. Bu Σ - σ - cebirinin her bir elemanına ölçülebilir küme denir.

Tanım 1.18: X bir küme ve Σ , X 'in alt kümelerinin bir σ -cebiri olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mu: \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonuna bir ölçüm denir:

$$a) \mu(\emptyset) = 0;$$

b) μ sayılabilir toplamsaldır, yani eğer $S_j \in \Sigma$, $j = 1, 2, \dots$ ikişer ikişer ayrık kümelerse o zaman

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j)$$

dir. (X, Σ, μ) üçlüsüne bir ölçüm uzayı denir.

Tanım 1.19: (X, Σ, μ) bir ölçüm uzayı olsun. $\mu(S) = 0$ 'ı sağlayan $S \in \Sigma$ kümesine sıfır ölçüm'e sahiptir denir. $x \in X$ noktalarının bir $P(x)$ özelliği verilsin. Eğer $\{x: P(x) \text{ yanlıştır}\}$ kümesi sıfır ölçüme sahipse $P(x)$ özelliği hemen hemen her yerde (almost everywhere (a.e)) $P(x)$ özelliğini sağlar denir veya alternatif olarak, hemen hemen her $x \in X$ için $P(x)$ özelliği sağlanır denir. Kısaca h.h.h. kısaltması ile gösterilir.

Tanım 1.20: \mathbb{R} içinde bir Σ_L σ -cebiri ve Σ_L üzerinde bir μ_L ölçümü vardır öyle ki herhangi sonlu $I = [a, b]$ aralığı için $I \in \Sigma_L$ ve $\mu_L(I) = l(I)$ 'dir. Bu uzay içinde ölçümü sıfır olan kümeler kesinlikle aşağıdaki özellikleri sağlayan A kümeleridir:

herhangi $\varepsilon > 0$ için $I_j \subset \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots$, aralıklarının bir dizisi vardır ve öyle ki

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \quad \text{ve} \quad \sum_{j=1}^{\infty} l(I_j) < \varepsilon$$

dir. Bu ölçüm Lebesgue ölçümü adını alır ve Σ_L içindeki kümelere *Lebesgue ölçülebilirdir* denir.

Tanım 1.21: (X, Σ, μ) ölçüm uzayını alalım. Herhangi $A \subset X$ altkümesi için A 'nın $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ karakteristik fonksiyonu

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ise} \\ 0, & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanır. Bazı $k \in \mathbb{N}$ için, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ve $S_j \in \Sigma, j=1,2,\dots,k$ olmak üzere bir $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\phi = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{S_j}$$

biçiminde ise ϕ basittir denir. Eğer ϕ negatif değilse ve basit ise o zaman ϕ 'nin (X üzerinde, μ ye göre) integrali

$$\int_X \phi d\mu = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(S_j)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.22: (X, Σ, μ) bir ölçüm uzayı olsun. Bir $f : X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonuna, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \Sigma$$

özellikliğini sağlarsa ölçülebilirdir denir.

Tanım 1.23: Tanım 1.22 de verilen tanıma göre f ölçülebilir olsun. Bu durumda

$$|f|(x) = |f(x)|, \quad f^\pm(x) = \max\{\pm f(x), 0\}$$

ile tanımlı $|f|: X \rightarrow [0, \infty]$ ve $f^\pm: X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonları ölçülebilirdir. Eğer f negatif değilse ve ölçülebilir ise o zaman f nin integrali

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \phi d\mu : \phi \text{ basit ve } 0 \leq \phi \leq f \right\}$$

olarak tanımlanır. Eğer f ölçülebilir ve $\int_X |f| d\mu < \infty$ ise o zaman f 'nin integrallenebilir olduğu söylenir ve f 'nin integrali

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

olarak tanımlanır. Kümesi üzerinde integrallenebilir fonksiyonların kümesi $L_1(X)$ ile gösterilir.

Tanım 1.24: Bazı $n \geq 1$ için $(X, \Sigma, \mu) = (\mathbb{R}^n, \Sigma_L, \mu_L)$ olsun. $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise o zaman f ye *Lebesgue integrallenebilirdir* denir.

Tanım 1.25:

a) $L_2(0, T)$ uzayı Banach uzayı olup, elemanları $(0, T)$ aralığında ölçülebilir ve mutlak değer karesiyle integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle u, v \rangle_{L_2(0, T)} = \int_0^T u(t)v(t) dt$$
$$\|u\|_{L_2(0, T)} = \left(\langle u, u \rangle_{L_2(0, T)} \right)^{1/2} < +\infty.$$

$L_2(0, T)$ uzayı yukarıda tanımlanan iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır.

b) $L_2^{(m)}(0, T)$ uzayı, m-boyutlu $u = u(t) = (u^1(t), u^2(t), \dots, u^m(t))$, $0 \leq t \leq T$ vektör fonksiyonlarının Hilbert uzayıdır. Burada verilen $V(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0, T]$ kümesi için $\forall u^i \in V(t)$, $i = \overline{1, m}$ fonksiyonları kareleri ile birlikte $[0, T]$ üzerinde Lebesgue integrallenebilir. $L_2^1[0, T] = L_2[0, T]$ dir. Bu uzayda u ve v fonksiyonları için iç çarpım

$$\langle u, v \rangle_{L_2^{(m)}(0, T)} = \int_0^T \sum_{i=1}^m u^i(t) v^i(t) dt$$

ve norm

$$\|u\|_{L_2^{(m)}(0, T)} = \left(\int_0^T \sum_{i=1}^m |u^i(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.26: $L_\infty(0, T)$ Banach uzayı olup, $[0, T]$ aralığında ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_\infty(0, T)} &= \text{ess sup} \{ |u(x)| : x \in [0, T] \} = \\ &= \inf \left\{ c \geq 0 : \forall x \in [0, T] \text{ için } |u(x)| \leq c \right\} \end{aligned}$$

normuna sahip $u = u(x)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 1.27:

a) Bir $A_{m \times n}$ matrisinin gerçel değerli elemanları $a_{i,j}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ olsun ve $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü verilmiş olsun. Bu $A_{m \times n}$ matrisin normu aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^n} \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}}.$$

$$b) \text{ vrai max}_{0 \leq t \leq T} \|A(t)\| = \inf_A \sup_{0 \leq t \leq T} \left[\max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \right]$$

Tanım 1.28: $W_2^1(0, T)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0, T)$ uzayından olan *Sobolev uzayıdır*. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^1(0, T)} = \int_0^l \left(\psi(t) \bar{\phi}(t) + \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} \frac{\partial \bar{\phi}(t)}{\partial t} \right) dt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^1(0, T)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^1(0, T)}}.$$

Tanım 1.29: $\{x_n\}$, H Hilbert uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall y \in H$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y)_H = (x, y)_H$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in H$ elemanına *zayıf yakınsıyor* denir.

Tanım 1.30: $\{x_n\}$, $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ elemanına *normda ya da kuvvetli yakınsar* denir.

Tanım 1.31: $\{f_n\}$, bir $X \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ oluyorsa, $\{f_n\}$ dizisi X kümesi üzerinde f bir fonksiyonuna *noktasal yakınsar* denir. Yani, $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ olduğunda $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(x, \varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

Tanım 1.32: $\{f_n\}$, bir X kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer hemen hemen bütün $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ oluyorsa, $\{f_n\}$ dizisi X kümesi

üzerinde f bir fonksiyonuna *hemen hemen her yerde yakınsar* denir. Yani, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ eşitliğini sağlamayan noktaların kümesinin ölçümü sıfırdır.

Tanım 1.33: Sürekli fonksiyonların uzayı üzerinde

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

olarak tanımlanan norm *düzgün ya da sup normu* olarak adlandırılır. $\{f_n\}$, bir X metrik uzayı üzerinde sınırlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ oluyorsa $\{f_n\}$ dizisi $f \in X$ fonksiyonuna *düzgün yakınsar* denir. Burada norm sup normudur.

Tanım 1.34: $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. $0 < \varepsilon \leq 2$ şartını sağlayan her ε sayısı için, eğer, $x, y \in X$ için $\|x\| = \|y\| = 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ iken $\left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $1 < p < \infty$ için $L_p(X)$ uzayı düzgün konvektir.

Tanım 1.35: $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. E içindeki her dizinin E 'de bir limit noktası varsa E kümesine X de *kompakt küme* denir.

Tanım 1.36: $E, (X, \|\cdot\|)$ Banach uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer E içindeki her $\{x_n\}$ dizisinin bir $x \in E$ noktasına zayıf yakınsayan bir alt dizisi varsa E kümesine $(X, \|\cdot\|)$ uzayında *zayıf kompakt küme* denir.

Tanım 1.37 (Steklov Ortalamaları): $u \in L_1(0, T)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda u_h Steklov ortalamaları $0 < h < T$ için

$$u_h = \begin{cases} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(., \tau) d\tau, & t \in (0, T-h] \\ 0 & , t \in (T-h, T] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.38: $(X, \| \cdot \|)$ bir normlu uzay ve $E \subset X$ kümesi verilsin. Eğer E deki bütün yakınsak dizilerin limit noktaları E 'deyse E kümesine X 'de *kapalı küme* denir.

Tanım 1.39: X , bir normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. Eğer X 'in her bir x elemanı, E 'nin elemanlarının bir dizisinin limiti ise E 'ye X 'de *yoğundur* denir.

Tanım 1.40: X bir vektör uzay olmak üzere, $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ (veya \mathbb{C}) lineer operatörüne X kümesi üzerinde *bir lineer fonksiyonel* denir. X kümesi üzerindeki sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına X 'in *duali* denir ve X^* ile gösterilir.

Tanım 1.41: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u \in U$ noktasına kuvvetli yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) \geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında *alttan yarı süreklidir* denir.

Tanım 1.42: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u \in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) \geq J(u)$ şartı

sağlanıyorsa bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında *alttan zayıf yarı süreklidir* denir.

Tanım 1.43: F , bir I aralığı üzerinde tanımlı $f(t)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer $\forall t \in I$ ve $\forall f \in F$ için $|f(t)| \leq M$ olacak şekilde bir $M \geq 0$ sayısı varsa F ye I aralığı üzerinde *sınırlıdır* denir.

Tanım 1.44: B herhangi bir Banach uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli u noktasının herhangi bir $\omega(u, \gamma) = \{v : v \in B, \|v - u\| < \gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B \rightarrow 0} \frac{o(h, u)}{\|h\|_B} = 0$$

olacak şekilde $\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = (J'(u), h)_B + o(h, u)$ şartını sağlayan $J'(u) \in B^*$ elemanı varsa bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında *Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir* denir.

Teorem 1.6 (Weierstrass Teoremi): U, B Banach uzayında zayıf kompakt bir küme olsun. $J(u)$ ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan zayıf yarı sürekli bir fonksiyonel olsun. Bu takdirde $J_* = \inf_U J(u) > -\infty, U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \emptyset$ zayıf kompakttır ve U dan alınan herhangi bir minimalleştirici dizi, minimum noktaları kümesine zayıf yakınsar[33].

Teorem 1.7: Kabul edelim ki, X düzgün konveks uzay, U kümesi X uzayının kapalı sınırlı kümesi, $I(v)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde tanımlanan alttan sınırlı ve alttan

yarı sürekli fonksiyonel ve $\alpha > 0, \beta \geq 1$ verilen sayılar olsun. Bu takdirde X uzayında her yerde yoğun olan öyle bir G alt kümesi vardır ki, $\forall \omega \in G$ için

$$J_\alpha(v) = I(v) + \alpha \|v - \omega\|_X^\beta$$

fonksiyoneli U kümesi üzerinde en küçük değerini alır. Eğer $\beta > 1$ ise $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli en küçük değerini U kümesi üzerinde bir tek noktada alır[34].

Teorem 1.8: U kümesi, B -Banach uzayının konveks bir alt kümesi, $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede birinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyonel ve $U_* = \{u \in U : J(u) = \inf_U J(u)\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalarının kümesi olsun. Bu takdirde $\forall u_* \in U_*$ ve $\forall u \in U$ için $\langle J'(u), u - u_* \rangle \geq 0$ şartı sağlanır[33].

Teorem 1.9: Farz edelim ki U kümesi B -Banach uzayında konveks bir küme olsun. $J(u)$ konveks fonksiyonelinin U kümesi üzerinde alttan zayıf yarı sürekli olması için $J(u)$ fonksiyonelinin U kümesi üzerinde alttan yarı sürekli olması gerek ve yeterlidir. Yani $J(u)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde sürekli ise alttan yarı süreklidir. Altan yarı sürekli olduğunda ise $J(u)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde alttan zayıf yarı süreklidir[33].

Teorem 1.10: Eğer $f \in L_1(t_0, T)$ (veya $L_2(t_0, T)$) ise bu takdirde f_h fonksiyonu f fonksiyonunun Steklov anlamında ortalaması olmak üzere $h \rightarrow 0$ için $\|f_h - f\|_{L_1(t_0, T) \text{ (veya } L_2(t_0, T))} \rightarrow 0$ olur[35].

Teorem 1.11: Farz edelim ki U kümesi B Banach uzayının konveks kümesi olsun. Bu takdirde $J(u) \in C^1(U)$ fonksiyonelinin U kümesi üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $\forall u, v \in U$ için;

$$J(u) \geq J(v) + \langle J'(v), u - v \rangle_B$$

veya

$$\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle_B \geq 0$$

eşitsizliklerinden birinin sağlanmasıdır. Eğer $\text{int}(U) \neq \emptyset$ ve $J(u) \in C^2(U)$ ise bu takdirde $J(u)$ fonksiyonelinin U kümesi üzerinde konveksliği için herhangi $\xi \in B$ için $\forall u \in B$ olduğunda

$$\langle J'(u) \xi, \xi \rangle_B \geq 0$$

şartının sağlanması gerek ve yeterdir[33].

Teorem 1.12 (Bolzano-Weierstrass Teoremi): $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi sınırlı bir dizi olsun. bu durumda $\{a_n\}$ dizisi yakınsak bir alt diziye sahiptir[36].

Lemma 1.2 (Gronwall Lemması): Eğer $g(t)$ fonksiyonu $t_0 \leq t \leq t_1$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve

$$0 \leq g(t) \leq K + L \int_{t_0}^t g(s) ds$$

eşitsizliğini sağlarsa, $t_0 \leq t \leq t_1$ üzerinde

$$0 \leq g(t) \leq K + \exp(L(t - t_0))$$

dır. Burada K ve L negatif olmayan sabitlerdir [37].

Lemma 1.3 (Gronwall Lemmasının Ayrık Aynısı): Eğer $a \geq 0, b \geq 0$ olmak üzere

$\varphi_j, j = \overline{0, N}$ sayıları

$$0 \leq \varphi_0 \leq a, 0 \leq \varphi_{j+1} \leq a + b \sum_{m=0}^j \varphi_m, j = \overline{0, N-1}$$

şartlarını sağlıyorsa bu takdirde

$$0 \leq \varphi_j \leq a(1+b)^j, j = \overline{0, N}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer

$$0 \leq \varphi_{j-1} \leq a + b \sum_{m=j}^{N-1} \varphi_m, j = \overline{0, N-1}, 0 \leq \varphi_{N-1} \leq a$$

şartları sağlanıyorsa bu takdirde

$$0 \leq \varphi_j \leq a(1+b)^{N-j-1}, j = \overline{0, N-1}$$

eşitsizliği geçerlidir [33].

Lemma 1.4 (Cauchy-Bunjakovskii Eşitsizliği): $u, v \in L_2(\Omega)$

$$\left| \int_{\Omega} u \bar{v} dx d\tau \right| \leq \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx d\tau \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx d\tau \right)^{1/2}$$

eşitsizliği geçerlidir [38].

Lemma 1.5 (ε -Cauchy Eşitsizliği): Keyfi a, b sayıları ve herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir [38].

Tanım 1.45 (Noktanın kümeye izdüşümü): $X \subset \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. $X \neq \emptyset$ ve $y \in \mathbb{R}^n$ herhangi bir nokta olsun.

$$\|p - y\|_{\mathbb{R}^n} = \inf_{x \in X} \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}$$

şartını sağlayan $p \in X$ noktasına $y \in \mathbb{R}^n$ noktasının X kümesine izdüşümü denir ve $p = P_X(y)$ veya $p = P(y, X)$ şeklinde gösterilir.

Dikkat edilecek olursa eğer $y \in X$ olduğunda $P(y, X) = 0$ olacağından $y \in X$ noktasının X kümesine izdüşümü $p = y$ yani kendisi olacaktır.

Teorem 1.13: Noktanın kapalı kümeye izdüşümü vardır. Kapalı konveks kümeye izdüşümü tektir. Herhangi bir y noktasının kapalı konveks $X \subset \mathbb{R}^n$ kümesine izdüşümü $p \in X$ olması için gerekli ve yeterli şart:

$$\langle p - y, x - p \rangle \geq 0, \quad x \in X$$

şartının sağlanmasıdır[18].

Tanım 1.46 (Noktanın küreye izdüşümü): $X = S_r(x_0)$ kümesi merkezi x_0 noktası ve yarıçapı r olan bir küre olsun. Açıktır ki $y \notin X$ noktasının X kümesine olan izdüşümü, y ve x_0 noktalarını birleştiren $[y, x_0]$ doğru parçasının $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = r\}$ topu ile kesişme noktasıdır. Buradan izdüşüm

$$p = x_0 + \frac{r(y - x_0)}{\|y - x_0\|}$$

olur. p noktasının izdüşümü olduğunu göstermek için Teorem 1.13 de ifade edilen eşitsizliği kullanalım.

$$\langle p - y, x - p \rangle = \left(\frac{r}{\|x - x_0\|} - 1 \right) \langle y - x_0, x - x_0 \rangle - r \|y - x_0\|, \quad x \in X$$

olduğu açıktır. $\|y - x_0\| > r$ ve Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğine göre keyfi bir $x \in X$ için

$$\langle y - x_0, x - x_0 \rangle \leq \|y - x_0\| \|x - x_0\| \leq \|y - x_0\| r$$

olur. Buradan Teorem 1.13 in sağlandığı görülür. Noktanın küreye izdüşümü

$$P_x(y) = \begin{cases} y, & y \in X \\ x_0 + \frac{r(y - x_0)}{\|y - x_0\|}, & y \notin X \end{cases}$$

dir.

Tanım 1.47 (Euler Metodu): $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad a \leq t \leq b$$

$$x(a) = x_0$$

başlangıç değer (Cauchy) problemi verilsin. $N \in \mathbb{N}$ için $h := (b - a) / N$ zaman adımı ve

$t^i = a + ih, i = 0, 1, \dots, N$ olsun. Bu durumda Euler metodu

$$x^{n+1} = x^n + hf(t^n, x^n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$x^0 = x_0$$

formülü ile x^1, x^2, \dots, x^N yaklaşımlarını hesaplar.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde tez çalışmasında incelenecek olan finansal akışların optimal kontrol problemi ile ilgili materyal ve yöntemlere yer verilmiştir.

2.1. Optimal Kontrol Problemi

Optimal kontrol problemi, Sovyet Bilimler Akademisinin V.A. Steklov Matematik Enstitüsünde Lev Semyonovich Pontryagin'in önderliğinde bir ekip tarafından ortaya atılan ve "Pontryagin'in Maksimum Prensibi" olarak adlandırılan bir teori ile son halini almıştır. Bu teori daha sonra "Optimal Kontrol Teorisi" olarak adlandırılmıştır[31, 39]. Kontrol Teorisi, mekanik sistemler, endüstriyel sistemler, elektrik sistemleri, elektronik-kimyasal sistemleri, eğitim sistemleri, tıbbi sistemler, finansal sistemler gibi sistemlerle ilgili çalışmaları kapsamaktadır. Optimal kontrol teorisinde, herhangi bir çözüm denenmeden önce, problemin iyi tanımlanması gerekmektedir. Bu, optimize edilecek sistemin net bir matematiksel tanımını, sistem üzerinde dayatılan kısıtlamaları ve maksimize (veya minimize) edilecek amaç fonksiyonunu gerektirmektedir.

Kontrol problemlerinin önemli bir kısmı, fiziksel, işletme veya bunların dışında üzerinde çalışılan dinamik sistemin modelleme süreci ile ilgilidir. Bu süreçte amaç, üzerinde durulacak ve sistemin herhangi bir girdiye yanıtını tahmin edebilecek kadar basit matematiksel bir tanıma ulaşmaktır. Amacımız için sistemin modeli, bir adi diferansiyel denklemler sistemi ile tanımlanan sistemler ile sınırlıdır. Bu nedenle bu tip problemlere adi diferansiyel denklemlerle ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemi ismi verilir. Çoğu zaman bu problemler toplanmış parametrelili sistemler için optimal kontrol problemi olarak da adlandırılmaktadır.

I. mertebeden adi diferansiyel denklemler sistemi için bir optimal kontrol problemini ifade edelim. Bilinen bir sistemin $t \in [0, T]$ ($T > 0$ incelenen sistem için bir zaman ufku,

t_0 ise başlangıç zamanı) anında durum değişken vektörü $x(t) \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durum değişkenlerine faz koordinatları da denilmektedir. İncelenen bu sistemin kontrol edilebilir olduğunu varsayalım. Bu sistemin herhangi bir t anında kontrol değişken vektörü olası kontroller kümesi $U \subset D$ nun bir elemanı olan $u(t)$ olsun. Verilen bu $x(t)$ ve $u(t)$ vektörleri için sistemin durum denklemi aşağıdaki gibi bir adi diferansiyel denklemdir;

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2.1.1)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.1.2)$$

Burada $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, t zamanına bağlı bir adi diferansiyel denklemdir. Bu denklemde f fonksiyonu, x, u ve t parametre ve değişkenlerine sahip önceden bilinen bir fonksiyon ve x_0 ise başlangıç durumudur. Burada uygulamada genellikle $u(t)$ fonksiyonu parçalı sürekli fonksiyon olarak seçilir. $u(t)$ kontrolü ve $x(t)$ durum vektörleri fiziksel duruma bağlı ya sınırlı ya da sınırsızdırlar. Dikkat edilecek olursa (2.1.1)-(2.1.2) problemi bir Cauchy problemidir. Verilen bu adi diferansiyel denklemler sistemi için optimal kontrol problemlerinde en sık kullanılan amaç fonksiyoneli;

$$J(u) = \int_{t_0}^T f_0(t, x(t), u(t)) dt + \Phi(T, x(T)) \quad (2.1.3)$$

şeklinde verilir. Görüldüğü üzere amaç fonksiyoneli iki terimden oluşmaktadır. İlk terime integral fonksiyoneli, ikinci terime ise terminal (final) fonksiyoneli denilmektedir. İşletme uygulamalarında genellikle integral fonksiyoneline “anlık fayda oranı”, terminal fonksiyoneline ise “hurda değeri” denilmektedir. Son olarak basit bir optimal kontrol problemi (2.1.3) fonksiyoneli minimize edecek şekilde

$$\min \left\{ J(u) = \int_{t_0}^T f_0(t, x(t), u(t)) dt + \Phi(T, x(T)) \right\} \quad (2.1.4)$$

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \quad (2.1.5)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.1.6)$$

şeklinde ifade edilir. (2.1.4)-(2.1.6) problemine *Bolza formda optimal kontrol problemi* denir. (2.1.4) amaç fonksiyonunda, $\Phi=0$ olduğunda probleme *Lagrange formda*, $f_0=0$ olduğunda ise probleme *Mayer formda optimal kontrol problemi* denir[25]. Verilen bu optimal kontrol probleminin çözümüyle elde edilen u^* kontrolüne “optimal kontrol”, $u^*=u$ optimal kontrol denklemi ile belirlenen x^* fonksiyonuna da “optimal yörünge” veya “optimal patika” adı verilir. Amaç fonksiyonunun optimal değeri ise $J(u^*)$ veya J^* ile gösterilir. Bir optimal kontrol probleminde amaç $(u^*(t), x^*(t))$ ikilisini bulmaktır.

Durum değişkenlerinin sınıflandırılması:

- a) Zamana bağlı lineer olmayan sistemler için durum değişkeni;

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$$

- b) Zamana bağlı olmayan lineer olmayan sistemler için durum değişkeni (otonom sistem);

$$\dot{x} = f(x(t), u(t))$$

- c) Zamana bağlı lineer homojen olmayan sistemler için durum değişkeni, $A(t)_{n \times n}$ ve $B(t)_{n \times m}$ matrisleri t zamanına bağlı elemanların oluşturduğu matrisler olmak üzere,

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

- d) Zamana bağlı olmayan lineer homojen olmayan sistemler için durum değişkeni;

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

şeklinde ifade edilirler[40].

Tanım 2.1: Her $\forall u \in U$ için (2.1.1)-(2.1.2) Cauchy probleminin çözümü denildiğinde $\forall t \in [t_0, T]$ için

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^T f(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau$$

integral özdeşliğini sağlayan $[t_0, T]$ aralığında sürekli olan ve bu aralıkta parçalı sürekli $\dot{x}(t)$ türevine sahip olan

$$x = x(t) \equiv x(t; u)$$

fonksiyonu anlaşılacaktır.

Teorem 2.1: $f(t, x, u)$ fonksiyonu $[t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times U$ bölgesinde tanımlansın ve bütün değişkenlere göre sürekli fonksiyon olsun. Ayrıca $\forall t \in [t_0, T]$ ve $\forall u \in U$ için

$$\|f(t, x(t), u(t)) - f(t, y(t), u(t))\|_{\mathbb{R}^n} \leq M \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

şartını sağlasın. Burada $M > 0$ bir sayıdır. Bu takdirde $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall u \in U$ için (2.1.1)-(2.1.2) Cauchy probleminin Tanım 2.1 anlamında bir tek çözümü vardır.

Tanım 2.2 (Hamilton-Pontryagin Fonksiyonu): (2.1.4)-(2.1.6) Optimal kontrol problemi üzerinde Hamilton-Pontryagin fonksiyonunu tanımlayalım. Burada olası kontroller kümesi $U = \{u = u(t) : u(t) \text{ p.s.f, } u(t) \in D, t_0 \leq t \leq T\}$ olarak tanımlansın. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sistemin başlangıç faz durumu ve $D \subset \mathbb{R}^m$ zamandan bağımsız olan bir alt kümedir. $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ vektör fonksiyon ve $f_j(t, x, u)$, $j = \overline{1, n}$ ve $\Phi(x)$ fonksiyonları tüm değişkenlere göre sürekli fonksiyonlar olsunlar. Bu problem için *Hamilton-Pontryagin fonksiyonu*

$$H(t, x, u, \psi) = -f_0(t, x, u) + \sum_{j=1}^n \psi_j(t) f_j(t, x, u) \quad (2.1.7)$$

olarak tanımlanır. Burada $\psi = \psi_j(t)$, $j = \overline{1, n}$ fonksiyonları $\psi = \psi(t)$ vektör fonksiyonunun bileşenleridir. $\psi(t)$ fonksiyonu ise,

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = f_{0x}(t, x, u) - \sum_{j=1}^n \psi_j(t) f_{jx}(t, x, u), \quad t_0 \leq t \leq T \quad (2.1.8)$$

$$\psi(T) = -\Phi_x(x(T)) \quad (2.1.9)$$

probleminin çözümü olup $f_{jx}(t, x, u) = \frac{\partial f_j(t, x, u)}{\partial x}$, $j = \overline{1, n}$ 'dir. (2.1.8)-(2.1.9)

problemine de (2.1.4)-(2.1.6) optimal kontrol problemine karşılık gelen *eşlenik problem (sistem)* denir.

Tanım 2.3: Hamilton-Pontryagin fonksiyonu kullanılarak (2.1.5)-(2.1.6) ve (2.1.8)-(2.1.9) sistemleri bir simetrik sistem biçiminde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = \frac{\partial H(t, x, u, \psi)}{\partial u}, \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.1.10)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}(t) = \frac{-\partial H(t, x, u, \psi)}{\partial x}, \quad \psi(T) = \Phi_x(x(T)). \quad (2.1.11)$$

Bu (2.1.10)-(2.1.11) biçiminde olan simetrik bir sistemde yer alan denklemlere *Hamilton-Jacobi denklemleri* denir.

2.2. Finansal Akışların Optimal Kontrol Problemi

Bu alt bölümde durum denklemi birinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklem sistemi olan optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Bilindiği üzere finansal kuruluşların finansal akışının optimal kontrol problemleri genelde lineer ve lineer olmayan birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için optimal kontrol problemleri ile açıklanmaktadır. Bu tür problemler ilk önce farklı yazarlarca [8, 18, 19, 33, 41-45] çalışmalarında incelenmiştir. Bu tez çalışmasında olası kontroller kümesi karesel integrallenebilir fonksiyon uzayları olarak seçilmiştir.

2.2.1. Optimal Kontrol Probleminin Konulması

Bu çalışmada incelenecek olan optimal kontrol problemi:

$$J_\alpha(u) = \beta_0 \|x(T;u) - y_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_1 \|x - y_1\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 + \alpha \|u - \omega\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2$$

fonksiyonelinin

$$U = \left\{ u = u(t) : u \in L_2^{(m)}(0,T), \|u\|_{L_2^{(m)}(0,T)} \leq b_0 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$x(t_0) = x_0$$

şartları altında minimumunun bulunması problemidir. Burada $T > 0$ verilen zaman; $\beta_0 + \beta_1 \neq 0$ olmak üzere $\beta_0 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \alpha \geq 0$ ve $b_0 \geq 0$ verilen sabitler; $\omega = \omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_m(t))$, t anında planlanan mevduatların vektörü; $y_0 = y_{0j} = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n})$, $j = \overline{1, n}$ j . müşterinin $t = T$ anında bankadan alabileceği daha önceden planlanan kredi miktarı; $x_0 = x_{0j} = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$, $j = \overline{1, n}$ j . Müşterinin başlangıç kredi durumunu belirten bilinen sayılar; $u(t) = u_i(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$, $i = \overline{1, m}$ herhangi bir t anında i . mevduat kaynağının miktarı; $x(t) = x_j(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $j = \overline{1, n}$ herhangi bir t anında j . müşterinin bankadan alacağı kredi; $y_{1j} = y_{1j}(t)$, $j = \overline{1, n}$ herhangi bir t anında j . müşteri için banka tarafından daha önceden planlanan kredi miktarı; $A(t)$ ve $B(t)$ matrisleri ve $f(t)$ vektörü bankanın iç kanunları ile belirtilen fonksiyonlar olup; $A(t) = \{a_{jk}(t)\}$, $j, k = \overline{1, n}$ ve $B(t) = \{b_{ki}(t)\}$, $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ biçimindedir.

Farz edelim ki $A(t)$ matrisinin elemanları $a_{jk}(t)$, $j, k = \overline{1, n}$ ve $B(t)$ matrisinin elemanları olan $b_{ki}(t)$, $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$ $[0, T]$ aralığında ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar, f

fonksiyonu ise $f \in L_2^{(n)}(0, T)$ olup karesel integrallenebilir fonksiyonlar olsunlar. Farz edelim ki;

$$A_{\max} = \text{vrai max}_{t \in [0, T]} \|A(t)\|$$

$$B_{\max} = \text{vrai max}_{t \in [0, T]} \|B(t)\|$$

olsun. $\forall u \in U$ için

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$x(0) = x_0$$

Cauchy probleminin çözümü dendiğinde $\forall t \in [0, T]$ için

$$x(t) = x_0 + \int_0^t [A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau) + f(\tau)] d\tau$$

integral eşitliği sağlayan $x(t) \equiv x(t; u)$, $t \in [0, T]$ fonksiyonunu anlayacağız.

Teorem 2.5: Farz edelim ki $A(t)$ ve $B(t)$ matrislerinin sırasıyla $\{a_{jk}(t)\}$ ve $\{b_{ki}(t)\}$ elemanları $L_\infty(t_0, T)$ uzayından, $f(t)$ fonksiyonu ise $L_1^{(n)}(t_0, T)$ uzayından olsun. Bu takdirde $u = u(t) \in L_p^{(r)}(t_0, T)$, $1 \leq p < +\infty$ ve $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ için

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t_0 \leq t \leq T$$

$$x(t_0) = x_0$$

Cauchy probleminin

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau) + f(\tau)] d\tau$$

integral özdeşliğini sağlayan bir tek çözümü vardır ve bu çözüm tüm $[t_0, T]$ aralığında tanımlanmıştır. Bunların yanı sıra problemin çözümü $[t_0, T]$ aralığında hemen hemen her

$\dot{x}(t)$ türevine sahiptir. $\dot{x}(t) \in L_1^{(n)}(t_0, T)$ ve bu çözüm verilen integral özdeşliğini hemen hemen her $t \in [t_0, T]$ için sağlar. Dahası $f \in L_p^{(n)}(t_0, T)$ ise bu takdirde $\dot{x}(t) \in L_p^{(n)}(t_0, T)$ 'dir ([42],s.420).

2.3. Optimal Kontrol Probleminin Nümerik Çözümü

Optimizasyon problemlerini çözmek için literatürde birçok nümerik yöntem bulunmaktadır. Dinamik programlama algoritmaları, gradyent algoritmaları, sıralama yöntemleri, çekim yöntemleri gibi yöntemler optimal kontrol problemlerinin çözümünde en çok kullanılan yöntemlerdir. Tarafımızdan yapılan araştırmaya konu olan şartlı optimizasyon problemlerini çözmek için ise gradyentin izdüşümü yöntemi, şartlı gradyent yöntemi ve ceza fonksiyonları yöntemi kullanılabilir[18, 46]. Çalışmanın bu bölümünde finansal akışların optimal kontrolü probleminin çözümü için gradyent izdüşüm yöntemini ele alınmıştır.

Gradyent algoritmaları ilk olarak Kelly, Bryson ve Denhom tarafından önerilmiş şartlı veya şartsız optimizasyon problemlerinin çözümleri için kullanılan nümerik yöntemlerdendir. Bu yöntemlerde amaç, durum yörüngelerini içeren denklem sistemlerinin integralini bularak amaç fonksiyonelinin gradyentini hesaplamaktır. Bulunan bu durum yörüngeleri ψ eşlenik denklemini $[0, T]$ zaman aralığında geriye doğru hesaplamak için kullanılır. Daha sonra bu durum yörüngeleri ve ψ sadece u kontrol değişkenlerine bağlı olan amaç fonksiyonelinin gradyentini hesaplamak için kullanılır. Durum yörüngeleri u kontrol değişkenleri ile hesaplandığından amaç fonksiyonelinin gradyentinin sadece u kontrol değişkenlerine göre hesaplanması mümkündür[46].

2.3.1. Gradyent Yöntemi

\mathbb{R}^n de tanımlı, sonlu değerlere sahip, sürekli türevlenebilen $f(x) \in C_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu verilsin.

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

şartsız optimizasyon problemini ele alalım. Bilindiği üzere sürekli türevlenebilen fonksiyonların değeri gradyent yönünde artarken gradyentin tersi yönünde azalır. Bunu göstermek için f fonksiyonunun $\forall x \in \mathbb{R}^n$ noktasındaki h artışına bakalım. Taylor açılımından

$$f(x+h) - f(x) = \langle f'(x), h \rangle_{\mathbb{R}^n} + o(\|h\|_{\mathbb{R}^n})$$

yazabiliriz. Buradan

$$\lim_{\|h\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow 0} \frac{o(\|h\|_{\mathbb{R}^n})}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

şartını sağlayacak bir h artışı seçilebilirse f fonksiyonunun Frechet anlamında diferansiyellenebilir olduğunu biliyoruz, burada $f'(x)$ 'e f fonksiyonunun gradyenti denir.

Şimdi Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini kullanarak

$$-\|f'(x)\|_{\mathbb{R}^n} \|h\|_{\mathbb{R}^n} \leq \langle f'(x), h \rangle_{\mathbb{R}^n} \leq \|f'(x)\|_{\mathbb{R}^n} \|h\|_{\mathbb{R}^n}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada $h = \gamma f'(x)$, $\gamma > 0$ olarak alıp yukarıdaki eşitsizlik

$$-\|f'(x)\|_{\mathbb{R}^n} \|\gamma f'(x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \langle f'(x), \gamma f'(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} \leq \|f'(x)\|_{\mathbb{R}^n} \|\gamma f'(x)\|_{\mathbb{R}^n}$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu eşitsizliğin sağ tarafı

$$\|f'(x)\|_{\mathbb{R}^n} \|\gamma f'(x)\|_{\mathbb{R}^n} = \gamma \|f'(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2$$

olur ve benzer şekilde eşitsizliğin sol tarafı da

$$-\|f'(x)\|_{\mathbb{R}^n} \|\gamma f'(x)\|_{\mathbb{R}^n} = -\gamma \|f'(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2$$

olur. $h = \gamma f'(x)$, $\gamma > 0$ olduğundan gradyent yönünde gidersek $\langle f'(x), h \rangle_{\mathbb{R}^n}$ ifadesi artarak $\gamma \|f'(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2$ ifadesine yaklaşarak eşit olur. Tersine $h = -\gamma f'(x)$, $\gamma > 0$ alırsak $\langle f'(x), h \rangle_{\mathbb{R}^n}$ ifadesi azalarak $-\gamma \|f'(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2$ ifadesine eşit olur. Bu da sürekli türevlenebilir bir fonksiyonun gradyenti yönünde artarken, gradyentinin tersi yönünde azalıyor olması demektir.

2.3.2. Gradyent İzdüşüm Yöntemi

$X \subset \mathbb{R}^n$ kapalı ve konveks kümesinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu birinci mertebeden sürekli türevlenebilir olsun.

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X$$

problemini ele alalım. $X \equiv \mathbb{R}^n$ olduğunda bu problem yukarıda verdiğimiz gradyent yöntemi ile çözülebilmektedir fakat $X \neq \mathbb{R}^n$ için gradyent yöntemini uyguladığımızda herhangi bir adımda bulduğumuz $x^{k+1} \notin X$ olabilir. Bu durumda gradyent yöntemi işe yaramaz. Bu nedenle $x^{k+1} \notin X$ olduğunda $x^{k+1} = x^k - \gamma_k f'(x^k)$, $\gamma_k > 0$ noktasının X kümesine göre

$$x^{k+1} = P_X(x^k - \alpha_k f'(x^k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

izdüşümünü bulabiliriz. X kümesi kapalı olduğundan izdüşümü vardır ve $P_X(x^k - \gamma_k f'(x^k))$ noktası X kümesinin bir elemanıdır. Gradyent yönteminde olduğu gibi iterasyona bulduğumuz bu x^{k+1} noktası ile devam ederiz. İterasyonu durdurmak için belirlenen şartlar sağlanıncaya kadar $x^{k+1} \notin X$ olduğu her adımda bu noktanın X kümesine izdüşümünü bularak işlemlere devam ederiz. $f'(x^k) = 0$ veya 0'a yeterince yakın olduğunda iterasyon biter. En son adımda bulunan $P_X(x^k - \gamma_k f'(x^k))$ noktasının minimum nokta olup olmadığı araştırılır. Bu yönteme Gradyent İzdüşüm yöntemi adı verilmektedir.

Bu $P_X(x^k - \gamma_k f'(x^k))$ noktasının minimum nokta olması için gerek ve yeter şart $f(x)$ fonksiyonunun bir konveks küme olmasıdır. Gerçekten de $f(x^*) = \inf_{x \in X} f(x)$ şartını sağlayacak şekilde $x^* = P_X(x^k - \gamma_k f'(x^k))$ noktasını seçelim, $\forall y \in X$ için

$$\begin{aligned} \langle x^* - (x^k - \gamma_k f'(x^k)), y - x^* \rangle &\geq 0 \\ \langle \gamma_k f'(x^k), y - x^* \rangle &\geq 0, \quad \gamma_k > 0 \\ \langle f'(x^k), y - x^* \rangle &\geq 0 \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Gradyent yöntemi ve gradyent izdüşüm yönteminde $\gamma_k > 0$ sabitlerini bulmak için aşağıdaki yöntemler kullanılır:

i) $g_k(\gamma) = f(x^k - \gamma f'(x^k)), \quad \gamma \geq 0$

$$g_k(\gamma) \rightarrow \inf, \quad \gamma \geq 0$$

problemine bakacak olursak. γ_k 'yi

$$g_k(\gamma_k) = \inf_{\alpha \geq 0} g_k(\alpha) = g_{k^*}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde seçebiliriz.

ii) $\gamma_k > 0$ değerini her adımda $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçebiliriz.

Bunun için $\gamma_k = \gamma^*$ seçerek

$$x^{k+1} = P_X(x^k - \gamma_k f'(x^k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

formülünde yerine yazalım. γ^* değeri $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ şartını sağlamadığında $q > 1$

sabiti gibi bir sabite bölerek eşitsizliğin sağlanıp sağlanmadığına bakarız. Yani $\gamma_k = \frac{\gamma^*}{q}$

olarak seçeriz. Eşitlik sağlanmadığında γ_k 'yi $q > 1$ sayısına bölmeye devam ederiz. Belli

bir adımda $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ şartı mutlaka sağlanacaktır.

iii) $\gamma_k > 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = +\infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 < +\infty$

şartlarını sağlayan bir γ_k seçilir. Bu şekilde seçilen γ_k değerleri için $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ şartı muhakkak sağlanır [18].



3. BULGULAR

Çalışmanın bu bölümünde, bir önceki bölümde ifade edilen sürekli zamanlı finansal akışların optimal kontrol problemi incelenmiştir. Optimal kontrol probleminin önce iyi konulmuş olduğu gösterilmiştir. Daha sonra, sürekli zamanlı optimal kontrol problemine sonlu farklar yöntemi uygulanarak problem, ayrık zamanlı optimal kontrol problemine dönüştürülmüştür. Ayrık optimal kontrol probleminin Gradyent İzdüşüm yöntemi uygulanarak çözüm algoritması inşa edilmiştir. Son olarak bu çözüm algoritması için Matlab uygulamaları verilmiştir. Çalışmanın bundan sonraki kısımlarında optimal kontrol problemi denilince finansal akışların optimal kontrol problemi anlaşılacaktır.

3.1. Finansal Akışların Optimal Kontrol Problemi

Bir önceki bölümde verilen finansal akışların optimal kontrol problemini ele alalım. Buna göre üzerinde çalışacağımız problem:

$$J_\alpha(u) = \beta_0 \|x(T;u) - y_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_1 \|x - y_1\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 + \alpha \|u - \omega\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 \quad (3.1.1)$$

fonksiyonelinin

$$U = \left\{ u = u(t) : u \in L_2^{(m)}(0,T), \|u\|_{L_2^{(m)}(0,T)} \leq b_0 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.1.2)$$

$$x(0) = x_0 \quad (3.1.3)$$

şartları altında minimumunun bulunması problemidir. Burada $T > 0$ verilen zaman; $\beta_0 + \beta_1 \neq 0$ olmak üzere $\beta_0 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \alpha \geq 0$ ve $b_0 \geq 0$ verilen sabitler; $\omega = \omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_m(t))$, t anında planlanan mevduatların vektörü; $y_0 = y_{0j} = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n})$, $j = \overline{1, n}$ j . müşterinin $t = T$ anında bankadan alabileceği daha önceden planlanan kredi miktarı; $x_0 = x_{0j} = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$, $j = \overline{1, n}$ j . müşterinin

başlangıç kredi durumunu belirten bilinen sayılar; $u(t) = u_i(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$, $i = \overline{1, m}$ herhangi bir t anında i . mevduat kaynağının miktarı; $x(t) = x_j(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $j = \overline{1, n}$ herhangi bir t anında j . müşterinin bankadan alacağı kredi; $y_{1j} = y_{1j}(t)$, $j = \overline{1, n}$ herhangi bir t anında j . müşteri için banka tarafından daha önceden planlanan kredi miktarı; $A(t)$ ve $B(t)$ matrisleri ve $f(t)$ vektörü bankanın iç kanunları ile belirtilen fonksiyonlar olup; $A(t) = \{a_{jk}(t)\}$, $j, k = \overline{1, n}$ ve $B(t) = \{b_{ki}(t)\}$, $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ biçimindedir.

Farz edelim ki $A(t)$ matrisinin elemanları $a_{jk}(t)$, $j, k = \overline{1, n}$ ve $B(t)$ matrisinin elemanları olan $b_{ki}(t)$, $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$ $[0, T]$ aralığında ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar, f fonksiyonu ise $f \in L_2^{(n)}(0, T)$ olup karesel integrallenebilir fonksiyonlar olsunlar. Farz edelim ki;

$$A_{\max} = \text{vrai max}_{t \in [0, T]} \|A(t)\|$$

$$B_{\max} = \text{vrai max}_{t \in [0, T]} \|B(t)\|$$

olsun. $\forall u \in U$ için (3.1.2)-(3.1.3) Cauchy probleminin çözümü dendiğinde $\forall t \in [0, T]$ için

$$x(t) = x_0 + \int_0^t [A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau) + f(\tau)] d\tau \quad (3.1.4)$$

integral eşitliği sağlayan $x(t) \equiv x(t; u)$, $t \in [0, T]$ fonksiyonunu anlayacağız.

Teorem 2.5 'ten yararlanarak $\forall u \in U$ için (3.1.2)-(3.1.3) Cauchy probleminin $[0, T]$ aralığında sürekli olan bir tek çözümünün var olduğuna ve bu çözümün $[0, T]$ aralığında tanımlı $L_2^{(n)}(0, T)$ uzayına ait olan hemen hemen $\dot{x}(t)$ türevine sahip olduğuna hükmedebiliriz. . Buna göre (3.1.4) denklemi için Cauchy-Bunjakovskii'den yararlanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
|x_j(t)| &= \left| x_{0j} + \int_0^t \left[(A(\tau)x(\tau))_j + (B(\tau)u(\tau))_j + f_j(\tau) \right] d\tau \right|, \quad \overline{j=1,n} \\
|x_j(t)| &\leq |x_{0j}| + \int_0^t |(A(\tau)x(\tau))_j| d\tau + \int_0^t |(B(\tau)u(\tau))_j| d\tau + \int_0^t |f_j(\tau)| d\tau \\
|x_j(t)| &\leq \sum_{j=1}^n |x_{0j}| + \int_0^t \sum_{j=1}^n |(A(\tau)x(\tau))_j| d\tau + \int_0^t \sum_{j=1}^n |(B(\tau)u(\tau))_j| d\tau + \int_0^t \sum_{j=1}^n |f_j(\tau)| d\tau = \\
&= \sum_{j=1}^n |x_{0j}| + \int_0^t \sum_{j=1}^n 1 |(A(\tau)x(\tau))_j| d\tau + \int_0^t \sum_{j=1}^n 1 |(B(\tau)u(\tau))_j| d\tau + \int_0^t \sum_{j=1}^n 1 |f_j(\tau)| d\tau \leq \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^n 1^2 \right)^{1/2} \sum_{j=1}^n (|x_{0j}|^2)^{1/2} + \int_0^t \left(\sum_{j=1}^n 1^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n |(A(\tau)x(\tau))_j|^2 \right)^{1/2} d\tau + \\
&+ \int_0^t \left(\sum_{j=1}^n 1^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n |(B(\tau)u(\tau))_j|^2 \right)^{1/2} d\tau + \int_0^t \left(\sum_{j=1}^n 1^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n |f_j(\tau)|^2 \right)^{1/2} d\tau = \\
&= \sqrt{n} \sum_{j=1}^n (|x_{0j}|^2)^{1/2} + \sqrt{n} \int_0^t \left(\sum_{j=1}^n |(A(\tau)x(\tau))_j|^2 \right)^{1/2} d\tau + \\
&+ \sqrt{n} \int_0^t \left(\sum_{j=1}^n |(B(\tau)u(\tau))_j|^2 \right)^{1/2} d\tau + \sqrt{n} \int_0^t \left(\sum_{j=1}^n |f_j(\tau)|^2 \right)^{1/2} d\tau \leq \\
&\leq \sqrt{n} \|x_0\|_{\mathbb{R}^n} + \sqrt{n} \int_0^t \|A(\tau)x(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + \sqrt{n} \int_0^t \|B(\tau)u(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + \sqrt{n} \int_0^t \|f(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau \leq \\
&\leq \sqrt{n} \|x_0\|_{\mathbb{R}^n} + \sqrt{n} \int_0^t \|A(\tau)\| \|x(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + \sqrt{n} \int_0^t \|B(\tau)\| \|u(\tau)\|_{\mathbb{R}^m} d\tau + \sqrt{n} \int_0^t \|f(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau \leq \\
&\leq \sqrt{n} \|x_0\|_{\mathbb{R}^n} + \sqrt{n} \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T} \|A(\tau)\| \int_0^t \|x(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + \sqrt{n} \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T} \|B(\tau)\| \int_0^t \|u(\tau)\|_{\mathbb{R}^m} d\tau + \\
&+ \sqrt{n} \int_0^t \|f(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau = \sqrt{n} \|x_0\|_{\mathbb{R}^n} + \sqrt{n} A_{\max} \int_0^t \|x(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + \sqrt{n} B_{\max} \int_0^t \|u(\tau)\|_{\mathbb{R}^m} d\tau +
\end{aligned}$$

$$+\sqrt{n} \int_0^t \|f(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau.$$

Bu eşitsizlikte $\|A(\tau)\|$ ve $\|B(\tau)\|$ normları sırasıyla $A(t)$ ve $B(t)$ matrislerinin Tanım 1.27-b de tanımlanan normlarıdır. Şimdi her iki tarafın karelerini alıp, $j = \overline{1, n}$ 'e toplayıp, karekök alarak

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j(t)|^2 \right)^{1/2} \leq n \|x_0\|_{\mathbb{R}^n} + nA_{\max} \int_0^t \|x(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + nB_{\max} \int_0^T \|u(\tau)\|_{\mathbb{R}^m} d\tau + n \int_0^T \|f(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan Gronwall Lemmasından (Bkz. Kuramsal Temeller Lemma 1.2) ve Cauchy-Bunjakovskii'den (Bkz. Kuramsal Temeller Lemma 1.4) yararlanarak

$$\begin{aligned} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \tilde{c}_0 \|x_0\|_{\mathbb{R}^n} + \tilde{c}_1 \int_0^T \|u(\tau)\|_{\mathbb{R}^m} d\tau + \tilde{c}_2 \int_0^T \|f(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau \leq \\ &\leq \tilde{c}_0 \|x_0\|_{\mathbb{R}^n} + \tilde{c}_1 \sqrt{T} \left(\int_0^T \|u(\tau)\|_{\mathbb{R}^m}^2 d\tau \right)^{1/2} + \tilde{c}_2 \sqrt{T} \left(\int_0^T \|f(\tau)\|_{\mathbb{R}^n}^2 d\tau \right)^{1/2} \end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $c_0 = \max\{\tilde{c}_0, \tilde{c}_1 \sqrt{T}, \tilde{c}_2 \sqrt{T}\}$ alırsak

$$\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_0 \left[\|x_0\|_{\mathbb{R}^n} + \|u\|_{L_2^m(0,T)} + \|f\|_{L_2^n(0,T)} \right], \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.1.5)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ ve c_0 sabitleri t 'den bağımsız olan sabitlerdir.

3.1.1. Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulması

Şimdi (3.1.1)-(3.1.3) optimal kontrol probleminin çözümünün varlık ve tekliğini inceleyelim.

Teorem 3.1.1. Farz edelim ki $A(t)$ ve $B(t)$ matrislerinin elemanları $[0, T]$ aralığında sınırlı ölçülebilir fonksiyonlar ve $f \in L_2^{(n)}(0, T)$ olsun. Bu durumda $\alpha \geq 0$ ve

$\forall \omega \in L_2^{(m)}(0, T)$ için (3.1.1)-(3.1.3) optimal kontrol problemi en az bir çözüme sahiptir ve eğer $\alpha > 0$ ise bu çözüm tektir.

İspat: Önce $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin U kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. Bu amaçla U kümesi üzerinden herhangi bir $u \in U$ alalım ve ona öyle bir $\Delta u \in L_2^{(m)}(0, T)$ artışı verelim ki $u + \Delta u \in U$ olsun. Farz edelim ki $x(t) \equiv x(t; u)$ ve $x_\Delta(t) \equiv x(t; u + \Delta u)$ fonksiyonları (3.1.2)-(3.1.3) Cauchy probleminin sırasıyla $u \in U$, $u + \Delta u \in U$ kontrollerine karşılık gelen çözümü olsunlar. Bu durumda

$$\Delta x(t) \equiv x_\Delta(t) - x(t) \equiv x(t; u + \Delta u) - x(t; u)$$

fonksiyonu aşağıdaki Cauchy probleminin çözümü olacaktır:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.1.6)$$

$$\Delta x(0) = 0 . \quad (3.1.7)$$

Bu Cauchy probleminin çözümünün $\Delta t \in [0, T]$ için aşağıdaki integral özdeşliğini sağladığı açıktır:

$$\Delta x(t) = \int_0^t A(\tau)\Delta x(\tau) d\tau + \int_0^t B(\tau)\Delta u(\tau) d\tau . \quad (3.1.8)$$

Bu integral özdeşlikten ve Cauchy-Bunjakovskii'den yararlanarak aşağıdaki kestirimi elde edebiliriz: $j = \overline{1, n}$

$$\begin{aligned} |\Delta x_j(t)| &= \left| \int_0^t (A(\tau)\Delta x(\tau))_j d\tau + \int_0^t (B(\tau)\Delta u(\tau))_j d\tau \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^t (A(\tau)\Delta x(\tau))_j d\tau \right| + \left| \int_0^t (B(\tau)\Delta u(\tau))_j d\tau \right| \leq \\ &\leq \int_0^t \sum_{j=1}^n |(A(\tau)\Delta x(\tau))_j| d\tau + \int_0^t \sum_{j=1}^n |(B(\tau)\Delta u(\tau))_j| d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \sum_{j=1}^n 1 \left| (A(\tau) \Delta x(\tau))_j \right| d\tau + \int_0^t \sum_{j=1}^n 1 \left| (B(\tau) \Delta u(\tau))_j \right| d\tau \leq \\
&\leq \int_0^t \left(\sum_{j=1}^n 1^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n \left| (A(\tau) \Delta x(\tau))_j \right|^2 \right)^{1/2} d\tau + \int_0^t \left(\sum_{j=1}^n 1^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n \left| (B(\tau) \Delta u(\tau))_j \right|^2 \right)^{1/2} d\tau = \\
&= \sqrt{n} \int_0^t \left(\sum_{j=1}^n \left| (A(\tau) \Delta x(\tau))_j \right|^2 \right)^{1/2} d\tau + \sqrt{n} \int_0^t \left(\sum_{j=1}^n \left| (B(\tau) \Delta u(\tau))_j \right|^2 \right)^{1/2} d\tau \leq \\
&\leq \sqrt{n} \int_0^t \|A(\tau) \Delta x(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + \sqrt{n} \int_0^t \|B(\tau) \Delta u(\tau)\|_{\mathbb{R}^m} d\tau \leq \\
&\leq \sqrt{n} \operatorname{vrai\,max}_{0 \leq t \leq T} \|A(\tau)\| \int_0^t \|\Delta x(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + \sqrt{n} \operatorname{vrai\,max}_{0 \leq t \leq T} \|B(\tau)\| \int_0^t \|\Delta u(\tau)\|_{\mathbb{R}^m} d\tau \leq \\
&\leq \sqrt{n} A_{\max} \int_0^t \|\Delta x(\tau)\|_n d\tau + \sqrt{n} B_{\max} \int_0^T \|\Delta u(\tau)\|_m d\tau .
\end{aligned}$$

Bu eşitsizliğin her iki tarafının karelerini alıp, $j = \overline{1, n}$ e toplayıp, karekök alarak

$$\|\Delta x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq n A_{\max} \int_0^t \|\Delta x(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + n B_{\max} \int_0^T \|\Delta u(\tau)\|_{\mathbb{R}^m} d\tau$$

eşitsizliğini elde ederiz. Gronwall lemmasından ve Cauchy-Bunjakovskii'den yararlanarak

$$\|\Delta x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \tilde{c}_3 \int_0^T \|\Delta u(\tau)\|_{\mathbb{R}^m} d\tau \leq \tilde{c}_3 \sqrt{T} \left(\int_0^T \|\Delta u(\tau)\|_{\mathbb{R}^m}^2 d\tau \right)^{1/2}$$

ve $c_1 = \tilde{c}_3 \sqrt{T}$ alırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\|\Delta x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_1 \|\Delta u(t)\|_{L_2^{(m)}(0, T)}, \quad \forall t \in [0, T] . \quad (3.1.9)$$

Burada $\tilde{c}_3 > 0$ ve $c_1 > 0$ sabitleri t 'den ve Δt 'den bağımsız sabitlerdir.

Şimdi $J_0(u)$ fonksiyonelinin $u \in U$ üzerinde artışını bulalım. (3.1.1) formülünde $\alpha = 0$ yazarak elde edilen formülden yararlanarak $\Delta J_0(u) = J_0(u + \Delta u) - J_0(u)$ artışı için

$$\begin{aligned}
\Delta J_0(u) &= J_0(u + \Delta u) - J_0(u) = \beta_0 \|x(T; u + \Delta u) - y_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_1 \|x(t; u + \Delta u) - y_1\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 - \\
&- \beta_0 \|x(T; u) - y_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \beta_1 \|x(t; u) - y_1\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 = \beta_0 \langle x(T; u + \Delta u) - y_0, x(T; u + \Delta u) - y_0 \rangle_{\mathbb{R}^n} - \\
&- \beta_0 \langle x(T; u) - y_0, x(T; u) - y_0 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \beta_1 \langle x(t; u + \Delta u) - y_1, x(t; u + \Delta u) - y_1 \rangle_{L_2^{(n)}(0,T)} - \\
&- \beta_1 \langle x(t; u) - y_1, x(t; u) - y_1 \rangle_{L_2^{(n)}(0,T)} = \beta_0 \langle x(T; u) + \Delta x(T; u) - y_0, x(T; u) + \Delta x(T; u) - y_0 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \\
&+ \beta_1 \langle x(t; u) + \Delta x(t; u) - y_1, x(t; u) + \Delta x(t; u) - y_1 \rangle_{L_2^{(n)}(0,T)} - \\
&- \beta_0 \langle x(T; u) - y_0, x(T; u) - y_0 \rangle_{\mathbb{R}^n} - \beta_1 \langle x(t; u) - y_1, x(t; u) - y_1 \rangle_{L_2^{(n)}(0,T)} = \\
&= \beta_0 \langle x(T; u) - y_0, \Delta x(T; u) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \beta_0 \langle \Delta x(T; u), x(T; u) - y_0 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \beta_0 \|\Delta x(T; u)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \\
&+ \beta_1 \langle x(t; u) - y_1, \Delta x(t; u) \rangle_{L_2^{(n)}(0,T)} + \beta_1 \langle \Delta x(t; u), x(t; u) - y_1 \rangle_{L_2^{(n)}(0,T)} + \beta_1 \|\Delta x(t; u)\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 = \\
&= 2\beta_0 \langle x(T; u) - y_0, \Delta x(T; u) \rangle_{\mathbb{R}^n} + 2\beta_1 \langle x(t; u) - y_1, \Delta x(t; u) \rangle_{L_2^{(n)}(0,T)} + \beta_0 \|\Delta x(T; u)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \\
&+ \beta_1 \|\Delta x(t; u)\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2
\end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan norma geçerek Cauchy Bunjakovskii eşitsizliği (Bkz. Lemma 1.4) yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz:

$$\begin{aligned}
|\Delta J_0(u)| &= \left| 2\beta_0 \langle x(T; u) - y_0, \Delta x(T; u) \rangle_{\mathbb{R}^n} + 2\beta_1 \langle x(t; u) - y_1, \Delta x(t; u) \rangle_{L_2^{(n)}(0,T)} \right| + \\
&+ \beta_0 \|\Delta x(T; u)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_1 \|\Delta x(t; u)\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 \leq 2\beta_0 \left| \langle x(T; u) - y_0, \Delta x(T; u) \rangle_{\mathbb{R}^n} \right| + \\
&+ 2\beta_1 \left| \langle x(t; u) - y_1, \Delta x(t; u) \rangle_{L_2^{(n)}(0,T)} \right| + \beta_0 \|\Delta x(T; u)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_1 \|\Delta x(t; u)\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 \leq \\
&\leq 2\beta_0 \|x(T; u) - y_0\|_{\mathbb{R}^n} \|\Delta x(T; u)\|_{\mathbb{R}^n} + 2\beta_1 \int_0^T \|x(t; u) - y_1(t)\|_{\mathbb{R}^n} \|\Delta x(t; u)\|_{\mathbb{R}^n} dt + \beta_0 \|\Delta x(T; u)\|_{\mathbb{R}^n}^2 +
\end{aligned}$$

$$+\beta_1 \|\Delta x(t; u)\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2.$$

Bu eşitsizlikte (3.1.9) kestirimlerini dikkate alırsak kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$|\Delta J_0(u)| \leq c_2 \left(\|\Delta u\|_{L_2^{(m)}(0,T)} + \|\Delta u\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 \right). \quad (3.1.10)$$

Burada c_2 sabiti Δu 'dan bağımsızdır. Bu eşitsizlikten $\Delta u \rightarrow 0$ olduğunda $\Delta J_0(u) \rightarrow 0$ olacağından $J_0(u)$ fonksiyonelinin U kümesinin herhangi bir u elamanı üzerinde başka bir deyişle U kümesi üzerinde sürekli olduğunu elde ederiz. Bunun yanı sıra

$$I(u) = \|u - \omega\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 \quad (3.1.11)$$

fonksiyonelinin normun karesinin sürekliliğinden U kümesi üzerinde sürekli olduğu açıktır. Bu nedenle

$$J_\alpha(u) = J_0(u) + \alpha I(u) \quad (3.1.12)$$

fonksiyonelinin U kümesi üzerinde sürekli olduğuna hükmedebiliriz.

Şimdi $J_0(u)$ fonksiyonelinin U kümesi üzerinde konveks olduğunu göstermeye çalışalım. Bu nedenle $\forall u, v \in U$, $\forall \beta \in [0,1]$ alalım ve $u_\beta = \beta u + (1-\beta)v \in U$ kontrolüne bakalım. Farz edelim ki $x_\beta \equiv x(t; u_\beta)$ (3.1.2)-(3.1.3) Cauchy probleminin $u_\beta \in U$, $\beta \in [0,1]$ 'ya karşılık gelen çözümü olsun. Bunun yanı sıra $x(t; u)$ ve $x(t; v)$ fonksiyonları sırasıyla (3.1.2)-(3.1.3) Cauchy probleminin $u \in U$ ve $v \in U$ kontrollerine karşılık gelen çözümü olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} x(t; u_\beta) &\equiv x_0 + \int_0^t \left[A(\tau)x(\tau; u_\beta) + B(\tau)(\beta u(\tau) + (1-\beta)v(\tau)) + f(\tau) \right] d\tau = \\ &= x_0 + \int_0^t \left[A(\tau)x(\tau; u_\beta) + B(\tau)\beta u(\tau) + B(\tau)(1-\beta)v(\tau) + f(\tau) \right] d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_0 + \int_0^t A(\tau)x(\tau; u_\beta)d\tau + \int_0^t B(\tau)\beta u(\tau)d\tau + \int_0^t B(\tau)(1-\beta)v(\tau)d\tau + \int_0^t f(\tau)d\tau \\
&= (\beta+1-\beta)x_0 + \int_0^t A(\tau)x(\tau; \beta u + (1-\beta)v)d\tau + \int_0^t B(\tau)\beta u(\tau)d\tau + \\
&\quad + \int_0^t B(\tau)(1-\beta)v(\tau)d\tau + (\beta+1-\beta) \int_0^t f(\tau)d\tau = \\
&= \beta x_0 + (1-\beta)x_0 + \beta \int_0^t A(\tau)x(\tau; u)d\tau + (1-\beta) \int_0^t A(\tau)x(\tau; v)d\tau + \\
&\quad + \beta \int_0^t B(\tau)u(\tau)d\tau + (1-\beta) \int_0^t B(\tau)v(\tau)d\tau + (1-\beta) \int_0^t f(\tau)d\tau + \\
&\quad + \beta \int_0^t f(\tau)d\tau = \beta \left[x_0 + \int_0^t [A(\tau)x(\tau; u) + B(\tau)u(\tau) + f(\tau)]d\tau \right] + \\
&\quad + (1-\beta) \left[x_0 + \int_0^t [A(\tau)x(\tau; v) + B(\tau)v(\tau) + f(\tau)]d\tau \right]
\end{aligned}$$

olduğundan

$$x(t; u_\beta) \equiv \beta x(t; u) + (1-\beta)x(t; v), \quad \forall \beta \in [0, 1], t \in [0, T] \quad (3.1.13)$$

bağıntısı geçerlidir.

Şimdi $J_0(u_\beta)$ değerine bakalım. $J_0(u)$ fonksiyonelinin biçiminden ve (3.1.13) formülünden yararlanırsak

$$\begin{aligned}
J_0(u_\beta) &= \beta_0 \|x(T; u_\beta) - y_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_1 \|x(t; u_\beta) - y_1\|_{L_2^{(n)}(0, T)}^2 = \\
&= \beta_0 \|\beta x(T; u) + (1-\beta)x(T; v) - y_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_1 \|\beta x(t; u) + (1-\beta)x(t; v) - y_1\|_{L_2^{(n)}(0, T)}^2 = \\
&= \beta_0 \|\beta x(T; u) + (1-\beta)x(T; v) - (\beta + (1-\beta))y_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\beta_1 \left\| \beta x(t; u) + (1-\beta)x(t; v) - (\beta + (1-\beta)) y_1 \right\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 = \\
& = \beta_0 \left\| \beta x(T; u) - \beta y_0 + (1-\beta)x(T; v) - (1-\beta) y_0 \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \\
& +\beta_1 \left\| \beta x(t; u) - \beta y_1 + (1-\beta)x(t; v) - (1-\beta) y_1 \right\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 = \\
& = \beta_0 \beta \left\| x(T; u) - y_0 \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_0 (1-\beta) \left\| x(T; v) - y_0 \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_0 \beta (\beta - 1) \left\| x(T; u) - x(T; v) \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \\
& +\beta_1 \beta \left\| x(t; u) - y_1 \right\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 + \beta_1 (1-\beta) \left\| x(t; v) - y_1 \right\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 + \\
& +\beta_1 \beta (\beta - 1) \left\| x(T; u) - x(T; v) \right\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 = \beta_0 \beta \left\| x(T; u) - y_0 \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_0 (1-\beta) \left\| x(T; v) - y_0 \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \\
& -\beta_0 \beta (1-\beta) \left\| x(T; u) - x(T; v) \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_1 \beta \left\| x(t; u) - y_1 \right\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 + \beta_1 (1-\beta) \left\| x(t; v) - y_1 \right\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 - \\
& -\beta_1 \beta (1-\beta) \left\| x(T; u) - x(T; v) \right\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 = \beta J_0(u) + (1-\beta) J_0(v) - \\
& -\beta (1-\beta) (\beta_0 + \beta_1) \left\| x(T; u) - x(T; v) \right\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 \leq \beta J_0(u) + (1-\beta) J_0(v)
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Sonuç olarak

$$J_0(u_\beta) \leq \beta J_0(u) + (1-\beta) J_0(v), \quad \forall u, v \in U, \quad \forall \beta \in [0,1] \quad (3.1.14)$$

kestirimi geçerlidir. Bu eşitsizlikten $J_0(u)$ fonksiyonelinin U kümesi üzerinde konveks fonksiyonel olduğu görülür. Diğer taraftan $I(u) = \|u - \omega\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2$ fonksiyoneli için

$$\begin{aligned}
I(u_\beta) & = \left\| (\beta u + (1-\beta)v) - \omega \right\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 = \left\| \beta u + (1-\beta)v - (\beta + 1 - \beta)\omega \right\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 = \\
& = \left\| \beta u - \beta \omega + (1-\beta)v - (1-\beta)\omega \right\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 = \left\| \beta(u - \omega) + (1-\beta)(v - \omega) \right\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 = \\
& = \beta \left\| u - \omega \right\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 + (1-\beta) \left\| v - \omega \right\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 + \beta(\beta - 1) \left\| u - v \right\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 = \\
& = \beta \left\| u - \omega \right\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 + (1-\beta) \left\| v - \omega \right\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 - \beta(1-\beta) \left\| u - v \right\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 = \\
& = \beta I(u) + (1-\beta) I(v) - \beta(1-\beta) \left\| u - v \right\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \beta I(u) + (1 - \beta) I(v)$$

$\forall \beta \in [0,1]$ için eşitsizliği sağlandığından U kümesi üzerinde konveks fonksiyoneldir. $\alpha > 0$ için $\alpha I(u) = \alpha \|u - \omega\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2$ fonksiyonelinin kuvvetli konveks fonksiyonel olduğu açıktır. Kuvvetli konveks fonksiyonelin konveks fonksiyon olduğu Teorem 1.4 ten bilinmektedir.. Bu durumda $\alpha \geq 0$ için $J_\alpha(u)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde iki konveks fonksiyonelin toplamı olduğundan bir konveks fonksiyonel olacaktır. $\alpha > 0$ olduğunda ise $J_\alpha(u)$ fonksiyoneli konveks fonksiyonelle kuvvetli konveks fonksiyonelin toplamı olduğundan, bu fonksiyonelin U kümesi üzerinde kuvvetli fonksiyonel olduğu Lemma 1.1 den bilinmektedir. Yukarıda ispatladığımızı göre $J_\alpha(u)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde sürekli konveks fonksiyonel olduğundan ([33],s.52) çalışmasındaki bilinen teoreme göre $J_\alpha(u)$ fonksiyoneli U konveks kümesi üzerinde alttan zayıf yarı sürekli fonksiyonel olacaktır(Bkz. Teorem 1.9). Diğer taraftan U kümesi $L_2^{(m)}(0,T)$ uzayında zayıf kompakt küme olduğundan ([33],s.53) çalışmasındaki genelleştirilmiş Weierstrass (Bkz. Teorem 1.6) teoremine göre $J_\alpha(u)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde en küçük değerine sahip olur. Başka bir deyişle

$$U_* = \left\{ u^* \in U : J_\alpha(u^*) = \inf_{u \in U} J_\alpha(u) = J_{\alpha^*} \right\} \neq \emptyset$$

dir. Böylelikle $\alpha \geq 0$ için ve $\forall \omega \in L_2^{(m)}(0,T)$ için (3.1.1)-(3.1.3) optimal kontrol problemi en az bir çözüme sahip olduğunu göstermiş olduk.

Şimdi $\alpha > 0$ durumuna bakalım. $\alpha > 0$ olduğunda $J_\alpha(u)$ fonksiyoneli yukarıda söylediğimiz gibi U kümesi üzerinde kuvvetli konveks fonksiyoneldir. Kuvvetli konveks fonksiyonelin ciddi konveks fonksiyonel olduğu açıktır. (3.1.1)-(3.1.3) probleminin $\alpha > 0$ olduğunda çözümü var olduğundan $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin ciddi konveks fonksiyonel olmasından bu çözümün tek olduğuna hükmedebiliriz. Teorem 3.1.1 ispatlandı.

3.1.2. Amaç Fonksiyonelinin Diferansiyellenebilirliği ve Çözüm İçin Gerek ve Yeterli Şart

Bu alt bölümde (3.1.1) fonksiyonelinin diferansiyellenebilirliğini inceleyeceğiz ve (3.1.1)-(3.1.3) optimal kontrol probleminin çözümü için gerek ve yeter şartı elde edeceğiz. Bu amaçla aşağıdaki biçimde bir fonksiyon tanımlayalım:

$$H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \langle \psi(t), A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t) \rangle - \beta_1 |x(t) - y_1(t)|_n^2 - \alpha |u(t) - \omega(t)|_m^2. \quad (3.1.15)$$

Burada $x(t)$ fonksiyonu (3.1.2)-(3.1.3) Cauchy probleminin çözümüdür ve $\psi(t)$ fonksiyonu ise aşağıdaki eşlenik sistemin çözümüdür:

$$\dot{\psi}(t) = -A^T(t)\psi(t) + 2\beta_1(x(t) - y_1(t)), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.1.16)$$

$$\psi(T) = -2\beta_0(x(T; u) - y_0). \quad (3.1.17)$$

Burada $A^T(t)$ matrisi $A(t)$ matrisinin transpozesidir. Eşlenik sistemin çözümü dendiğinde $\forall t \in [0, T]$ için

$$\psi(t) = \int_t^T [A^T(\tau)\psi(\tau) - 2\beta_1(x(\tau) - y_1(\tau))] d\tau - 2\beta_0(x(T; u) - y_0) \quad (3.1.18)$$

integral özdeşliğini sağlayan $\psi(t)$ fonksiyonunu anlayacağız. Bu integral özdeşliğinden aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} |\psi_j(t)| &= \left| \int_t^T [A^T(\tau)\psi(\tau) - 2\beta_1(x(\tau) - y_1(\tau))]_j d\tau - 2\beta_0(x(T; u) - y_0)_j \right| \leq \\ &\leq \int_t^T \left[\left| (A^T(\tau)\psi(\tau))_j \right| - \left| 2\beta_1(x(\tau) - y_1(\tau))_j \right| \right] d\tau - \left| 2\beta_0(x(T; u) - y_0)_j \right| \leq \\ &\leq \int_t^T \left| (A^T(\tau)\psi(\tau))_j \right| d\tau + 2\beta_1 \int_t^T \left| (x(\tau) - y_1(\tau))_j \right| d\tau + 2\beta_0 \left| (x(T; u) - y_0)_j \right| \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
|\psi_j(t)| &\leq \int_t^T \sum_{j=1}^n \left| (A^T(\tau)\psi(\tau))_j \right| d\tau + 2\beta_1 \int_t^T \sum_{j=1}^n \left| (x(\tau) - y_1(\tau))_j \right| d\tau + 2\beta_0 \sum_{j=1}^n \left| (x(T;u) - y_0)_j \right| \leq \\
&\leq \int_t^T \sum_{j=1}^n \left| (A^T(\tau)\psi(\tau))_j \right| d\tau + 2\beta_1 \int_t^T \sum_{j=1}^n \left| (x(\tau) - y_1(\tau))_j \right| d\tau + 2\beta_0 \sum_{j=1}^n \left| (x(T;u) - y_0)_j \right| \leq \\
&\leq \int_t^T \left(\sum_{j=1}^n 1^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n \left| (A^T(\tau)\psi(\tau))_j \right|^2 \right)^{1/2} d\tau + 2\beta_1 \int_t^T \left(\sum_{j=1}^n 1^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n \left| (x(\tau) - y_1(\tau))_j \right|^2 \right)^{1/2} d\tau + \\
&\quad + 2\beta_0 \left(\sum_{j=1}^n 1^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n \left| (x(T;u) - y_0)_j \right|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{n} \int_t^T \left(\sum_{j=1}^n \left| (A^T(\tau)\psi(\tau))_j \right|^2 \right)^{1/2} d\tau + \\
&\quad + \sqrt{n} 2\beta_1 \int_t^T \left(\sum_{j=1}^n \left| (x(\tau) - y_1(\tau))_j \right|^2 \right)^{1/2} d\tau + \sqrt{n} 2\beta_0 \left(\sum_{j=1}^n \left| (x(T;u) - y_0)_j \right|^2 \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \sqrt{n} \int_t^T \|A^T(\tau)\psi(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + \sqrt{n} 2\beta_1 \int_t^T \|x(\tau) - y_1(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + \sqrt{n} 2\beta_0 \|x(T;u) - y_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq \\
&\leq \sqrt{n} \text{vrai max}_{0 \leq t \leq T} \|A^T(\tau)\| \int_t^T \|\psi(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + \sqrt{n} 2\beta_1 \int_t^T \|x(\tau) - y_1(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + \sqrt{n} 2\beta_0 \|x(T;u) - y_0\|_{\mathbb{R}^n} = \\
&= \sqrt{n} A_{\max} \int_t^T \|\psi(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + \sqrt{n} 2\beta_1 \int_t^T \|x(\tau) - y_1(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + \sqrt{n} 2\beta_0 \|x(T;u) - y_0\|_{\mathbb{R}^n}
\end{aligned}$$

eşitsizliğin her iki tarafının karelerini alıp, topladıktan sonra kareköklerini alırsak

$$\begin{aligned}
\|\psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} &= n A_{\max} \int_t^T \|\psi(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + n 2\beta_1 \int_t^T \|x(\tau) - y_1(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + n 2\beta_0 \|x(T;u) - y_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq \\
&\leq n A_{\max} \int_t^T \|\psi(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + n 2\beta_1 \int_t^T \|x(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + n 2\beta_1 \int_t^T \|y_1(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + n 2\beta_0 \|x(T;u)\|_{\mathbb{R}^n} + \\
&\quad + n 2\beta_0 \|y_0\|_{\mathbb{R}^n}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Gronwall lemmasından yararlanarak

$$\|\psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \tilde{c}_6 \left(\int_t^T \|x(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + \int_t^T \|y_1(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau \right) + \tilde{c}_7 (\|x(T;u)\|_{\mathbb{R}^n} + \|y_0\|_{\mathbb{R}^n})$$

eşitsizliğini elde ederiz. Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğinden yararlanarak

$$\|\psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \tilde{c}_8 \sqrt{T} \left(\int_0^T \|x(\tau)\|_{\mathbb{R}^n}^2 d\tau \right)^{1/2} + \tilde{c}_8 \sqrt{T} \left(\int_0^T \|y_1(\tau)\|_{\mathbb{R}^n}^2 d\tau \right)^{1/2} + \tilde{c}_9 \|x(T; u)\|_{\mathbb{R}^n} + \tilde{c}_9 \|y_0\|_{\mathbb{R}^n}$$

eşitsizliğini elde ederiz. 3.1.5 eşitsizliğini kullanarak

$$\|\psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_3 \left(\|x_0\|_{\mathbb{R}^n} + \|u\|_{L_2^{(m)}(0,T)} + \|f\|_{L_2^{(n)}(0,T)} + \|y_1\|_{L_2^{(n)}(0,T)} \right) + c_4 \|y_0\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall t \in [0, T]$$

kestirimini yazabiliriz. Burada c_3 ve c_4 pozitif sabitleri t 'den bağımsız sabitlerdir. Son olarak bu eşitsizliği

$$\|\psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_5 \left(\|x_0\|_{\mathbb{R}^n} + \|y_0\|_{\mathbb{R}^n} + \|u\|_{L_2^{(m)}(0,T)} + \|f\|_{L_2^{(n)}(0,T)} + \|y_1\|_{L_2^{(n)}(0,T)} \right) \quad (3.1.19)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $c_5 > 0$ sabiti t, x_0, y_0, u, f, y_1 den bağımsızdır.

Teorem 3.1.2. Farz edelim ki Teorem 3.1.1'in şartları sağlansın, bu takdirde $J_\alpha(u)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilir ve onun Gradyenti için aşağıdaki formül geçerlidir.

$$J'_\alpha(u) = -\frac{\partial H}{\partial u} = -B^T(t)\psi(t) + 2\alpha(u(t) - \omega(t)), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.1.20)$$

Burada B^T matrisi $B(t)$ matrisinin transpozesidir.

İspat: U kümesinden herhangi $u = u(t)$ elemanını alalım. Bu elemana öyle bir $\Delta u \in L_2^{(m)}(0, T)$ artışı verelim ki $u + \Delta u \in U$ olsun. Şimdi $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin $u \in U$ üzerinde artışını bulursak (3.1.1) formülünden yararlanarak

$$\begin{aligned} \Delta J_\alpha(u) &= J_\alpha(u + \Delta u) - J_\alpha(u) = \beta_0 \|x(T; u + \Delta u) - y_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \\ &+ \beta_1 \|x(t; u + \Delta u) - y_1\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 + \alpha \|u(t) + \Delta u(t) - \omega(t)\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 - \\ &- \beta_0 \|x(T; u) - y_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \beta_1 \|x(t; u) - y_1\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 - \alpha \|u(t) - \omega(t)\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta_0 \langle x(T; u + \Delta u) - y_0, x(T; u + \Delta u) - y_0 \rangle_{\mathbb{R}^n} - \beta_0 \langle x(T; u) - y_0, x(T; u) - y_0 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \\
&+ \beta_1 \langle x(t; u + \Delta u) - y_1, x(t; u + \Delta u) - y_1 \rangle_{L_2^{(n)}(0, T)} - \beta_1 \langle x(t; u) - y_1, x(t; u) - y_1 \rangle_{L_2^{(n)}(0, T)} + \\
&+ \alpha \langle u(t) + \Delta u(t) - \omega(t), u(t) + \Delta u(t) - \omega(t) \rangle_{L_2^{(m)}(0, T)} - \alpha \langle u(t) - \omega(t), u(t) - \omega(t) \rangle_{L_2^{(m)}(0, T)} = \\
&= \beta_0 \langle x(T; u) + \Delta x(T; u) - y_0, x(T; u) + \Delta x(T; u) - y_0 \rangle_{\mathbb{R}^n} - \beta_0 \langle x(T; u) - y_0, x(T; u) - y_0 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \\
&\quad + \beta_1 \langle x(t; u) + \Delta x(t; u) - y_1, x(t; u) + \Delta x(t; u) - y_1 \rangle_{L_2^{(n)}(0, T)} - \\
&\quad - \beta_1 \langle x(t; u) - y_1, x(t; u) - y_1 \rangle_{L_2^{(n)}(0, T)} + \\
&\quad + \alpha \langle u(t) + \Delta u(t) - \omega(t), u(t) + \Delta u(t) - \omega(t) \rangle_{L_2^{(m)}(0, T)} - \\
&\quad - \alpha \langle u(t) - \omega(t), u(t) - \omega(t) \rangle_{L_2^{(m)}(0, T)} = \\
&= \beta_0 \langle x(T; u) - y_0, \Delta x(T; u) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \beta_0 \langle \Delta x(T; u), x(T; u) - y_0 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \\
&\quad + \beta_0 \langle \Delta x(T; u), \Delta x(T; u) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \beta_1 \langle x(t; u) - y_1, \Delta x(t; u) \rangle_{L_2^{(n)}(0, T)} + \\
&\quad + \beta_1 \langle \Delta x(t; u), x(t; u) - y_1 \rangle_{L_2^{(n)}(0, T)} + \beta_1 \langle \Delta x(t; u), \Delta x(t; u) \rangle_{L_2^{(n)}(0, T)} + \\
&\quad + \alpha \langle u(t) - \omega(t), \Delta u(t) \rangle_{L_2^{(m)}(0, T)} + \alpha \langle \Delta u(t), u(t) - \omega(t) \rangle_{L_2^{(m)}(0, T)} + \\
&\quad + \alpha \langle \Delta u(t), \Delta u(t) \rangle_{L_2^{(m)}(0, T)} = \\
&= 2\beta_0 \langle x(T; u) - y_0, \Delta x(T; u) \rangle_{\mathbb{R}^n} + 2\beta_1 \langle x(t; u) - y_1, \Delta x(t; u) \rangle_{L_2^{(n)}(0, T)} + \\
&\quad + 2\alpha \langle u(t) - \omega(t), \Delta u(t) \rangle_{L_2^{(m)}(0, T)} + \beta_0 \|\Delta x(T; u)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \\
&\quad + \beta_1 \|\Delta x(t; u)\|_{L_2^{(n)}(0, T)}^2 + \alpha \|\Delta u\|_{L_2^{(m)}(0, T)}^2 = \\
&= 2\beta_0 \langle x(T; u) - y_0, \Delta x(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} + 2\beta_1 \int_0^T \langle x(t; u) - y_1(t), \Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt +
\end{aligned}$$

$$+2\alpha \int_0^T \langle u(t) - \omega(t), \Delta u(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt + \beta_0 \|\Delta x(T)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_1 \|\Delta x\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 + \alpha \|\Delta u\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2$$

formülünü yazabiliriz. O halde $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin artışı

$$\begin{aligned} \Delta J_\alpha(u) &= J_\alpha(u + \Delta u) - J_\alpha(u) = 2\beta_0 \langle x(T;u) - y_0, \Delta x(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \\ &+ 2\beta_1 \int_0^T \langle x(t;u) - y_1(t), \Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt + 2\alpha \int_0^T \langle u(t) - \omega(t), \Delta u(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} dt + \\ &+ \beta_0 \|\Delta x(T)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_1 \|\Delta x\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 + \alpha \|\Delta u\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

olur. Burada $\Delta x = \Delta x(t) \equiv x(t;u + \Delta u) - x(t;u)$ fonksiyonu (3.1.6)-(3.1.7) probleminin çözümüdür.

Şimdi bu formülün sağ tarafında yer alan birinci ve ikinci terimleri dönüştürmeye çalışalım. Bu amaçla (3.1.16)-(3.1.17) eşlenik probleminden yararlanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} &2\beta_0 \langle x(T;u) - y_0, \Delta x(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} + 2\beta_1 \int_0^T \langle x(t;u) - y_1(t), \Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = \\ &= -\langle \psi(T), \Delta x(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \int_0^T \langle \dot{\psi}(t) + A^T(t)\psi(T), \Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = \\ &= -\langle \psi(T), \Delta x(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \int_0^T \langle \dot{\psi}(t), \Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt + \int_0^T \langle A^T(t)\psi(T), \Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

(3.1.7) şartından $\Delta x(0) = 0$ olduğundan $\langle \psi(0), \Delta x(0) \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$ olacaktır. Bu bağıntıyı kullanırsak (3.1.21) formülünü aşağıdaki biçimde dönüştürebiliriz:

$$\begin{aligned} &2\beta_0 \langle x(T;u) - y_0, \Delta x(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} + 2\beta_1 \int_0^T \langle x(t;u) - y_1(t), \Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = \\ &= -\langle \psi(T), \Delta x(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \psi(0), \Delta x(0) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \int_0^T \langle \dot{\psi}(t), \Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt + \\ &+ \int_0^T \langle A^T(t)\psi(T), \Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = -\int_0^T d \langle \psi(t), \Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \int_0^T \langle \dot{\psi}(t), \Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T \langle A^T(t)\psi(t), \Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = - \int_0^T \langle \dot{\psi}(t), \Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt - \int_0^T \langle \psi(t), \Delta \dot{x}(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt + \\
& + \int_0^T \langle \dot{\psi}(t), \Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt + \int_0^T \langle A^T(t)\psi(t), \Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = \\
& = - \int_0^T \langle \psi(t), \Delta \dot{x}(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt + \int_0^T \langle A^T(t)\psi(t), \Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt. \tag{3.1.23}
\end{aligned}$$

Şimdi bu formülden ve (3.1.6) denkleminde yararlanarak aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& 2\beta_0 \langle x(T; u) - y_0, \Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} + 2\beta_1 \int_0^T \langle x(t; u) - y_1(t), \Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = \\
& = - \int_0^T \langle \psi(t), A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt + \int_0^T \langle A^T(t)\psi(t), \Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = \\
& = - \int_0^T \langle \psi(t), A(t)\Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt - \int_0^T \langle \psi(t), B(t)\Delta u(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt + \\
& + \int_0^T \langle \psi(t), A(t)\Delta x(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = - \int_0^T \langle \psi(t), B(t)\Delta u(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt. \tag{3.1.24}
\end{aligned}$$

Şimdi bu formülü fonksiyonelin artışı için olan (3.1.21) formülünde dikkate alırsak fonksiyonelin artışı için

$$\begin{aligned}
\Delta J_\alpha(u) & = J_\alpha(u + \Delta u) - J_\alpha(u) = - \int_0^T \langle \psi(t), B(t)\Delta u(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt + \\
& + 2\alpha \int_0^T \langle u(t) - \omega(t), \Delta u(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} dt + \beta_0 \|\Delta x(T)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_1 \|\Delta x\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 + \\
& + \alpha \|\Delta u\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2
\end{aligned} \tag{3.1.25}$$

formülünü yazabiliriz. Bu eşitlikten fonksiyonelin artışını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
\Delta J_\alpha(u) & = - \int_0^T \langle B^T(t)\psi(t), \Delta u(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} dt + 2\alpha \int_0^T \langle u(t) - \omega(t), \Delta u(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} dt + \\
& + R(\Delta u).
\end{aligned} \tag{3.1.26}$$

Burada $R(\Delta u)$

$$R(\Delta u) = \beta_0 \|\Delta x(T)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_1 \|\Delta x\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 + \alpha \|\Delta u\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 \quad (3.1.27)$$

formülü ile tanımlanır. Şimdi ilk önce

$$R(\Delta u) = o\left(\|\Delta u\|_{L_2^{(m)}(0,T)}\right) \quad (3.1.28)$$

olduğunu gösterelim. (3.1.27) formülünden ve (3.1.9) kestiriminden yararlanarak

$$\begin{aligned} |R(\Delta u)| &\leq \beta_0 c_1^2 \|\Delta u\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 + \beta_1 c_1^2 T \|\Delta u\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 + \alpha \|\Delta u\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 = \\ &= c_6 \|\Delta u\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

kestirimini yazabiliriz. Burada $c_6 = \beta_0 c_1^2 + \beta_1 c_1^2 T + \alpha$ 'dır. Sonuncu eşitsizlikten kolaylıkla (3.1.28) bağıntısını elde ederiz. Bu durumda (3.1.26) ve (3.1.28) bağıntılarından yararlanarak fonksiyonelin artışı için aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$\Delta J_\alpha(u) = -\int_0^T \langle B^T(t)\psi(t) - 2\alpha(u(t) - \omega(t)), \Delta u(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt + o\left(\|\Delta u\|_{L_2^{(m)}(0,T)}\right). \quad (3.1.30)$$

$L_2^{(m)}(0,T)$ uzayında tanımlanan fonksiyonelerin Frechet anlamında diferansiyellenebilirliğinin tanımından (Bknz. Kuramsal Temeller Tanım 1.44) yararlanarak fonksiyonelin artışını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\Delta J_\alpha(u) = \int_0^T \langle J'_\alpha(u), \Delta u \rangle_{L_2^{(m)}(0,T)} dt + o\left(\|\Delta u\|_{L_2^{(m)}(0,T)}\right). \quad (3.1.31)$$

Burada

$$J'_\alpha(u) = -B^T(t)\psi(t) + 2\alpha(u(t) - \omega(t)) \quad (3.1.32)$$

olur.

Şimdi Hamilton-Pontryagin formülünden yararlanarak

$$J'_\alpha(u) = -\frac{\partial H}{\partial u} = -B^T(t)\psi(t) + 2\alpha(u(t) - \omega(t)), \quad 0 \leq t \leq T$$

denklemini yazabiliriz. Buradan da teoremin hükmünde yer alan (3.1.20) formülünün geçerli olduğunu elde ederiz. Teorem 3.1.2 ispatlandı.

Şimdi (3.1.1)-(3.1.3) optimal kontrol probleminin çözümü için gerek ve yeter şartı gösterelim.

Teorem 3.1.3. (3.1.1)-(3.1.2) optimal kontrol probleminde $u^* \in U$ kontrolünün optimal kontrol olması için

$$\int_0^T \left\langle B^T(t)\psi^*(t) - 2\alpha(u^*(t) - \omega(t)), u(t) - u^*(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt \leq 0, \quad \forall u \in U \quad (3.1.33)$$

şartının sağlanması gerek ve yeterdir. Burada ψ^* fonksiyonu (3.1.16)-(3.1.17) eşlenik probleminin $u^* \in U$ elemanına karşılık gelen çözümüdür.

İspat (Gerektir): Farz edelim ki U olası kontroller kümesinden aldığımız $u^* = u^*(t)$ elemanı optimal kontrol olsun. Bu takdirde Teorem 3.1.2'den yararlanarak fonksiyonelin $u^* \in U$ için Frechet anlamında diferansiyellenebilir olduğuna hükmedebiliriz. Fonksiyonelin gradyenti için aşağıdaki formül geçerlidir:

$$J'_\alpha(u) = B^T(t)\psi^*(t) + 2\alpha(u^*(t) - \omega(t)). \quad (3.1.34)$$

Burada $\psi^*(t)$ fonksiyonu (3.1.16)-(3.1.17) eşlenik sistemin $u^* \in U$ elemanına karşılık gelen çözümüdür.

Şimdi ilk önce $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin U kümesi üzerinde sürekli diferansiyellenebilir olduğunu gösterelim. Bu amaçla $\forall u = u(t) \in U$ olası kontrolünü alalım ve $J'_\alpha(u + \Delta u) - J'_\alpha(u)$ farkına bakalım. Burada $\Delta u \in L_2^{(m)}(0, T)$ fonksiyonu $u \in U$ 'ya verilen öyle bir artış olsun ki $u + \Delta u \in U$ olsun. Bu takdirde (3.1.20) formülünden yararlanarak

$$J'_\alpha(u + \Delta u) - J'_\alpha(u) = -B^T(t)\Delta\psi(t) + 2\alpha\Delta u(t) \quad (3.1.35)$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada $\Delta\psi(t) = \psi(t; u + \Delta u) - \psi(t; u)$ fonksiyonu aşağıdaki sistemin çözümüdür:

$$\dot{\psi}(t) = 2\beta_1\Delta x(t) - A^T(t)\Delta\psi(t), 0 \leq t \leq T \quad (3.1.36)$$

$$\Delta\psi(T) = -2\beta_0\Delta x(T; u). \quad (3.1.37)$$

Bu sistem için aşağıdaki integral denklemini elde ederiz:

$$\Delta\psi(t) = \int_t^T [A^T(\tau)\Delta\psi(\tau) - 2\beta_1\Delta x(\tau)] d\tau.$$

Bu integral denklemini ve $A(t)$ matrisinin elemanlarının ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar olduğunu dikkate alırsak (3.1.19) kestirimini elde ettiğimiz benzer yolla

$$\|\Delta\psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_7 \int_t^T \|\Delta\psi(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + c_8 \int_t^T \|\Delta x(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} dt, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.1.38)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada (3.1.9) kestiriminden yararlanırsak $\Delta\psi(t)$ için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\|\Delta\psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_7 \int_t^T \|\Delta\psi(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau + c_9 \|\Delta u(t)\|_{L_2^{(m)}(0, T)}. \quad (3.1.39)$$

Burada $c_7, c_9 > 0$ sabitlerdir ve Δu 'dan bağımsızlardır. Bu eşitsizliğe Gronwall lemmasını uygulayarak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\|\Delta\psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_{10} \|\Delta u(t)\|_{L_2^{(m)}(0, T)}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.1.40)$$

c_{10} sabiti Δu 'dan bağımsızdır. Bu kestirimden yararlanarak (3.1.35) formülünden aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\|J'_\alpha(u + \Delta u) - J'_\alpha(u)\|_{L_2^{(m)}(0, T)} \leq c_{11} \|\Delta u\|_{L_2^{(m)}(0, T)}. \quad (3.1.41)$$

$c_{11} > 0$ bir sabittir ve Δu 'dan bağımsızdır. Buradan $J'_\alpha(u)$ gradyentinin $\forall u \in U$ üzerinde sürekli olduğu çıkar. Böylelikle $J'_\alpha(u)$ gradyentinin $u^* = u^*(t)$ optimal kontrolünde

sürekli olduğu açıktır. $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin U kümesi üzerinde sürekli olduğu da açıktır. Gerçekten de $J_\alpha(u)$ fonksiyoneli

$$J_\alpha(u) = J_0(u) + \alpha \|u - \omega\|_{L_2^{(m)}(0,T)} \quad (3.1.42)$$

biçiminde yazabiliriz. $\alpha \|u - \omega\|_{L_2^{(m)}(0,T)}$ fonksiyonelinin sürekli olduğu açıktır. $J_0(u)$ fonksiyonelinin U kümesi üzerinde sürekli olduğu Teorem 3.1.1'de ispatlanmıştır. Bu düşüncelerden yola çıkarak $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin U kümesi üzerinde sürekli olduğu ve (3.1.41) eşitsizliğine göre onun gradyentinin de U kümesi üzerinde sürekli olduğu görülür. Böylelikle $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin U kümesi üzerinde sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonel olduğu ispatlanır. Başka bir ifadeyle $J_\alpha(u) \in C^1(U)$ olur. Diğer taraftan U kümesi yapısına göre $L_2^{(m)}(0,T)$ uzayında konveks küme olur. Buradan ([33],s28) çalışmasında ki bilinen teoremin (Bkz. Kuramsal Temeller Teorem 1.8) hükümlerinin geçerli olduğu elde edilir. Bu teoreme dayanarak eğer $u^* = u^*(t)$ kontrolü optimal kontrol ise yani $u^* = u^*(t)$ elemanı $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin minimum noktası ise aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\langle J'_\alpha(u^*), u - u^* \rangle_{L_2^{(m)}(0,T)} \geq 0, \quad \forall u \in U. \quad (3.1.43)$$

Burada (3.1.20) formülünü dikkate alırsak

$$-\int_0^T \langle B^T(t) \psi^*(t) - 2\alpha (u^*(t) - \omega(t)), u(t) - u^*(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} dt \geq 0, \quad \forall u \in U \quad (3.1.44)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizliği -1 ile çarparsak (3.1.33) eşitsizliğinin geçerli olduğunu elde ederiz. Böylelikle gerek şart ispatlandı.

(Yeterdir): Farz edelim ki $u^* \in U$ kontrolü için (3.1.33) eşitsizliği geçerli olsun. Bu takdirde $u^* = u^*(t)$ 'nin optimal kontrol olduğunu gösterelim. (3.1.33) eşitsizliğinde (3.1.34) formülünü dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$-\langle J'_\alpha(u^*), u - u^* \rangle_{L_2^{(m)}(0,T)} \leq 0, \quad \forall u \in U.$$

Bu eşitsizliği -1 ile çarparsak (3.1.43)'ün $u^* \in U$ için geçerli olduğunu elde ederiz. Bu durumda $u^* \in U$ elemanının $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin U kümesi üzerinde minimum noktası olduğunu gösterelim. Teorem 3.1.1'in ispatında $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin U kümesi üzerinde $\alpha \geq 0$ şartı altında konveks fonksiyonel olduğu gösterilmiştir. Bu durumda ([33],s24-25) çalışmasındaki bilinen Teorem 2'ye göre aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz[Bkz. Kuramsal Temeller Teorem 1.11]:

$$J_\alpha(u) - J_\alpha(u^*) \geq \langle J'_\alpha(u^*), u - u^* \rangle_{L_2^{(m)}(0,T)}, \quad \forall u \in U, \forall u^* \in U$$

Bu eşitsizlikte (3.1.43) eşitsizliğini dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$J_\alpha(u) \geq J_\alpha(u^*), \quad \forall u \in U. \quad (3.1.45)$$

Bu eşitsizlik gösterir ki $u^* \in U$ elemanı $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin minimum noktasıdır. Başka bir deyişle $u^* = u^*(t)$ kontrolü (3.1.1)-(3.1.3) optimal kontrol probleminin çözümüdür; yani optimal kontrolüdür. Böylelikle yeter şart da ispatlandı. Teorem 3.1.3 ispatlandı.

Teorem 3.1.1-3.1.3'ten yararlanarak $\alpha > 0$ olduğunda (3.1.1)-(3.1.3) optimal kontrol probleminin iyi tanımlanmış problem olduğu elde edilir. Gerçekten Teorem 3.1.1'den $\alpha > 0$ için

$$U_* = \left\{ u^* \in U : J_\alpha(u^*) = J_{\alpha^*} = \inf_{u \in U} J_\alpha(u) \right\} \neq \emptyset$$

$$J_{\alpha^*} > -\infty$$

şartı sağlanır ve U_* kümesi bir tek $u^* = u^*(t)$ optimal kontrolünden oluşur. Çünkü $\alpha > 0$ olduğunda $J_\alpha(u)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde kuvvetli konveks fonksiyonel olur. Bilindiği üzere kuvvetli konveks fonksiyonel ciddi konveks fonksiyoneldir. Ciddi konveks fonksiyonelin minimum noktasının tek olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Yani U_*

kümesi tek bir elemandan oluşur. Bunların yanı sıra Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.1.3'ün hükümlerinden yararlanarak $\alpha > 0$ olduğunda aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\alpha \|u - u^*\|^2 \leq J_\alpha(u) - J_\alpha(u^*), \quad \forall u \in U. \quad (3.1.46)$$

İspatımıza göre $J_0(u)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde konveks fonksiyoneldir. Bu durumda ([33],s25) çalışmasındaki bilinen Teorem 2'ye göre (Bkz. Kuramsal Temeller Teorem 1.11)

$$J_0(u) - J_0(u^*) \geq \langle J'_0(u^*), u - u^* \rangle_{L_2^{(m)}(0,T)} \quad (3.1.47)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $I(u) = \|u - \omega\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2$ fonksiyoneli $\theta=1$ sabiti ile U kümesi üzerinde kuvvetli konveks fonksiyoneldir. Yine ([33],s25) çalışmasındaki Teorem 2'ye göre

$$I(u) - I(u^*) \geq \langle I'(u^*), u - u^* \rangle_{L_2^{(m)}(0,T)} + \|u - u^*\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2, \quad \forall u \in U, u^* \in U \quad (3.1.48)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $\alpha > 0$ ile çarpar ve elde edilen eşitsizliği (3.1.47) eşitsizliği ile toplarsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$J_\alpha(u) - J_\alpha(u^*) \geq \langle J'_\alpha(u^*), u - u^* \rangle_{L_2^{(m)}(0,T)} + \alpha \|u - u^*\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2. \quad (3.1.49)$$

$\forall u \in U, u^* \in U.$

$u^* = u^*(t)$ elemanı optimal kontrol olduğundan başka bir deyişle J_α fonksiyonelinin U kümesi üzerinde minimumu olduğundan (3.1.43) eşitsizliği sağlanır. (3.1.43)'ü (3.1.49)'da dikkate alırsak (3.1.46)'nın geçerli olduğunu elde ederiz. Şimdi (3.1.46) eşitsizliğinde $u = u(t)$ 'nin yerine $\forall u_k = u_k(t), k = 1, 2, \dots$ minimalleştirici dizisini alalım, yani:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_\alpha(u_k) = J_{\alpha^*} = J_\alpha(u^*) \quad (3.1.50)$$

şartını sağlayan diziyi alalım. Bu durumda aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\alpha \|u_k - u^*\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 \leq \langle J_\alpha(u_k) - J_\alpha(u^*) \rangle, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.1.51)$$

Bu eşitsizlik $\forall \{u_k\} \subset U$ minimalleştirici dizisinin $\alpha > 0$ olduğunda bir tek olan $u^* \in U$ kontrolüne yakınsadığını gösterir. Böylelikle $\alpha > 0$ için (3.1.1)-(3.1.3) optimal kontrol probleminin iyi tanımlanmış problem olduğu gösterildi.

3.2. Finansal Akışların Optimal Kontrol Problemi İçin Sonlu Farklar Yöntemi

Bu alt başlıkta 3.1. de verilen sürekli zamanlı optimal kontrol probleminin sonlu farklar yöntemi ile ayrık aynısı oluşturulmuştur. Daha sonra ayrık optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı incelenmiştir. Ardından sonlu fark şemasının hatası değerlendirilmiş olup, son olarak sonlu fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı incelenmiştir.

3.2.1. Optimal Kontrol Probleminin Sonlu Farklar Yöntemi ile Aynısının Oluşturulması

Bu alt bölümde finansal akışların optimal kontrolü probleminin nümerik çözümüne sonlu farklar yöntemini uygulayacağız. Literatürde adi diferansiyel denklemler için sonlu farklar yöntemi [42, 47-53] çalışmalarında optimal kontrol problemine uygulanmıştır ve bu çalışmalarda sonlu farklar yönteminin yakınsaklığına ait sonuçlar elde edilmiştir.

Şimdi (3.1.1)-(3.1.3) optimal kontrol problemini göz önüne alarak bu alt bölümde inceleyeceğimiz optimal kontrol problemi:

$$J(u) = \beta_0 \|x(T; u) - y_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_1 \|x - y_1\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 \quad (3.2.1)$$

fonksiyonelinin

$$U = \left\{ u = u(t) : u \in L_2^{(m)}(0,T), \|u\|_{L_2^{(m)}(0,T)} \leq b_0 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.2.2)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (3.2.3)$$

şartları altında minimumunun bulunması problemi olsun. Burada $T > 0$ verilen zaman; $\beta_0 + \beta_1 \neq 0$ olmak üzere $\beta_0 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \alpha \geq 0$ ve $b_0 \geq 0$ verilen sabitler; $y_0 = y_{0j} = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n})$, j . müşterinin $t = T$ anında bankadan alabileceği daha önceden planlanan kredi miktarı; $x_0 = x_{0j} = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$, $j = \overline{1, n}$ j . müşterinin başlangıç kredi durumunu belirten bilinen sayılar; $u(t) = u_i(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$, $i = \overline{1, m}$ herhangi bir t anında i . mevduat kaynağının miktarı; $x(t) = x_j(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $j = \overline{1, n}$ herhangi bir t anında j . müşterinin bankadan alacağı kredi; $y_1 = y_{1j}(t)$, $j = \overline{1, n}$ herhangi bir t anında j . müşteri için banka tarafından daha önceden planlanan kredi; $A(t)$ ve $B(t)$ matrisleri ve $f(t)$ vektörü bankanın iç kanunları ile belirtilen fonksiyonlar olup; $A(t) = \{a_{jk}(t)\}$, $j, k = \overline{1, n}$ ve $B(t) = \{b_{ki}(t)\}$, $k = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ biçimindedir. $A(t)$ matrisinin elemanları $a_{jk}(t)$, $j, k = \overline{1, n}$ ve $B(t)$ matrisinin elemanları olan $b_{ki}(t)$, $k = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}$ $[0, T]$ aralığında ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar, f fonksiyonu ise $f \in L_2^{(n)}(0, T)$ olup karesel integrallenebilir fonksiyonlardır.

Burada (3.2.1)-(3.2.3) optimal kontrol problemi [44] çalışmasındaki optimal kontrol probleminin özel bir durumudur. İlgili çalışmanın sonuçlarından ve Teorem 3.1.1'den yararlanarak (3.2.1)-(3.2.3) optimal kontrol probleminin en az bir çözüme sahip olduğuna veya başka bir deyişle

$$U_* = \left\{ u^* \in U; J(u^*) = J_* = \inf_{u \in U} J(u) \right\} \neq \emptyset$$

olduğuna hükmedebiliriz.

Şimdi (3.2.1)-(3.2.3) optimal kontrol probleminin sonlu farklı aynısını inşa etmeye çalışalım. Bu amaçla $[0, T]$ aralığını $\{t_k, k = \overline{0, N}\}: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$ noktalarının yardımıyla N alt kısma bölelim ve $t_k, k = \overline{0, N}$ noktalarını düğüm noktaları olarak kabul edelim. (3.2.2) denklemini Euler şemasının yardımıyla cebirsel denklemler sistemine dönüştürelim. (3.2.1) fonksiyoneli ona karşılık gelen fonksiyonla değiştirerek sonuçta aşağıdaki ayrık optimal kontrol problemini elde edebiliriz:

$$I_N([u_N]) = \beta_0 \|x^N - y_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_1 \sum_{k=1}^N \|x^k - y_1^k\|_{\mathbb{R}^n}^2 \Delta t_k \quad (3.2.4)$$

fonksiyonunun

$$U_N = \left\{ u_N = [u]_N = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) : u_N \in \mathbb{R}^m, [u]_N = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \|u_k\|_{\mathbb{R}^m}^2 \Delta t_k \right)^{1/2} \leq b_0 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$x^{k+1} = x^k + \Delta t_k (A_k x^k + B_k u_k + f_k), k = \overline{0, N-1} \quad (3.2.5)$$

$$x^0 = x_0 \quad (3.2.6)$$

minimumunun bulunması problemi.

Burada

$$\begin{aligned} \Delta t_k &= t_{k+1} - t_k, A_k = \{a_{ij}^k\}; a_{ij}^k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} a_{ij}(t) dt, i, j = \overline{1, n}, B_k = \{b_{ir}^k\}; \\ b_{ir}^k &= \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_{ir}(t) dt, i = \overline{1, n}, r = \overline{1, m}, f_k = (f_{1k}, f_{2k}, \dots, f_{nk}), \\ f_{ik} &= \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_i(t) dt, i = \overline{1, n}, k = \overline{1, N-1}, y_0 = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}), \\ y_1^k &= (y_{11}^k, y_{12}^k, \dots, y_{1n}^k), y_{1i}^k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} y_{1i}(t) dt, i = \overline{1, n}, k = \overline{0, N-1} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

dir. Burada $x^k = x^k([u]_N)$, $k = \overline{1, N}$ değerleri (3.2.4)-(3.2.6) fark şemasının $[u]_N \in U_N$ elemanına karşılık gelen çözümleridir. Ayrık kontroller için $L_{2N}^{(m)}$ uzayını tanımlayalım. Herhangi $[u]_N = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$, $[v]_N = (v_0, v_1, \dots, v_{N-1})$ için aşağıdaki gibi bir iç çarpım tanımlayalım:

$$\langle [u]_N, [v]_N \rangle_{L_{2N}^{(m)}} = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k \langle u_k, v_k \rangle_{\mathbb{R}^m}.$$

Bu iç çarpımdan yararlanarak aşağıdaki normu tanımlayalım:

$$\|[u]_N\|_{L_{2N}^{(m)}} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k |u_k|_m^2 \right)^{1/2}.$$

Burada $L_{2N}^{(m)}$ uzayı $L_2^{(m)}(0, T)$ Hilbert (Lebesgue) uzayının sonlu farklı aynısı olup, $(0, T)$ aralığının $t_k, k = \overline{0, N}$ bölüntüsüne karşılık gelen uzayıdır.

Böylelikle $L_2^{(m)}(0, T)$ uzayında ele alınan (3.2.1)-(3.2.3) optimal kontrol problemine karşılık gelen her bir $N \geq 1$ ve $\{t_k, k = \overline{0, N}\}$ için $L_{2N}^{(m)}$ uzayında tanımlanan (3.2.4)-(3.2.6) ayrık optimal kontrol problemini elde edildi.

Her bir $[u]_N$ için (3.2.4)-(3.2.6) fark şemasını ele alalım.

Teorem 3.2.1: Farz edelim ki $A(t)$, $B(t)$ matrislerinin elemanları $[0, T]$ aralığında tanımlı ölçülebilir, sınırlı fonksiyonlar olsun ve $f \in L_2^{(n)}(0, T)$ olsun. Bunun yanı sıra farz edelim ki

$$d_N = \max_{0 \leq k \leq N-1} \Delta t_k \leq \frac{T}{N} M, \quad M = sbt > 0$$

olsun. Bu takdirde $\forall [u]_N \in U_N$ için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\max_{0 \leq k \leq N-1} \|x^k([u]_N)\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_{12}. \quad (3.2.8)$$

Burada c_{12} sabiti k ve N 'den bağımsızdır.

İspat: (3.2.5) eşitliğinden yararlanarak aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$x^{k+1} = x_0 + \sum_{j=0}^{N-1} \Delta t_j (A_j x^j + B_j u_j + f_j), \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (3.2.9)$$

Bu eşitliğe dayanarak bir önceki alt bölümde Cauchy problemi için uyguladığımız yöntemi uygulayarak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\begin{aligned} \|x^{k+1}\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \sqrt{n} A_{\max} d_N \sum_{j=0}^k \|x^j\|_{\mathbb{R}^n} + \sqrt{n} B_{\max} \sum_{j=0}^k \|u_j\|_{\mathbb{R}^m} \Delta t_j + \\ &+ \sum_{j=0}^k \|f_j\|_{\mathbb{R}^n} \Delta t_j + \|x_0\|_{\mathbb{R}^n}, \quad k = \overline{0, N-1}. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Burada $A_{\max} = \operatorname{vrai} \max_{t \in [0, T]} \|A(t)\|$, $B_{\max} = \operatorname{vrai} \max_{t \in [0, T]} \|B(t)\|$ 'dir. Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğinden yararlanarak, sonuncu eşitsizlikten aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \|x^{k+1}\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \sqrt{nT} A_{\max} d_N \sum_{j=0}^k \|x^j\|_{\mathbb{R}^n} + \sqrt{nT} B_{\max} \sum_{j=0}^k \| [u]_N \|_{L_{2N}^{(m)}} + \\ &+ \sqrt{nT} \| [f]_N \|_{L_{2N}^{(n)}} + \|x_0\|_{\mathbb{R}^n}, \quad k = \overline{0, N-1} \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Burada $[f]_N = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ 'dir. Bu eşitsizliğe [42] çalışmasındaki Gronwall lemmasının ayrık durumunu uygularsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\|x^{k+1}\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_{13} \left(\|x_0\|_{\mathbb{R}^n} + \| [u]_N \|_{L_{2N}^{(m)}} + \| [f]_N \|_{L_{2N}^{(n)}} \right), \quad k = \overline{0, N}. \quad (3.2.12)$$

Burada $c_{13} > 0$, k ve N 'den bağımsız bir sabittir. Buradan teoremin hükmünün geçerli olduğu elde edilir.

3.2.2. Ayrık Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı

Şimdi (3.2.4)-(3.2.6) ayrık optimal kontrol probleminin çözümünün varlığını inceleyelim.

Teorem 3.2.2: Farz edelim ki Teorem 3.2.1'in şartları sağlansın. Bunların yanı sıra A_k, B_k matrislerinin ve f_k, y_1^k vektörlerinin elemanlarının (3.2.7) formülleri ile tanımlandığını farz edelim. Bu takdirde (3.2.4)-(3.2.6) ayrık optimal kontrol problemi en az bir çözüme sahiptir.

İspat: İlk önce (3.2.4) fonksiyonelinin U_N kümesi üzerinde sürekli olduğunu ispatlayalım. Bu amaçla $\forall [u]_N \in U_N$ alalım ve ona öyle bir $[h]_N \in L_{2N}^{(m)}$ artışı verelim ki $[u]_N + [h]_N \in U_N$ olsun. Farz edelim ki $[x]_N = [x([u]_N)]_N$ ayrık fonksiyonu (3.2.4)-(3.2.6) sisteminin $[u]_N \in U_N$ 'e karşılık gelen çözümü, $[x]_{N\Delta} = [x([u]_N + [h]_N)]_N$ ayrık fonksiyonu ise $[u]_N + [h]_N \in U_N$ 'e karşılık gelen çözümü olsun. Bu takdirde $[\Delta x]_N = [x([u]_N + [h]_N)]_N - [x([u]_N)]_N$ için (3.2.5) eşitliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
 & x^{k+1}([u]_N + [h]_N) - x^{k+1}([u]_N) = x^k([u]_N + [h]_N) + \\
 & + \Delta t_k (A_k x^k([u]_N + [h]_N) + B_k([u]_N + [h]_N) + f_k) - \\
 & - x^k([u]_N) + \Delta t_k (A_k x^k([u]_N) + B_k[u]_N + f_k) = \\
 & = x^k([u]_N + [h]_N) - x^k([u]_N) + \\
 & + \Delta t_k (A_k (x^k([u]_N + [h]_N) - x^k([u]_N)) + B_k(([u]_N + [h]_N) - [u]_N) + f_k - f_k) = \\
 & = \Delta x^k + \Delta t_k (A_k \Delta x^k + B_k [h]_N), \quad k = \overline{0, N-1}
 \end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu durumda $[\Delta x]_N = [x([u]_N + [h]_N)]_N - [x([u]_N)]_N$ ayrık fonksiyonu aşağıdaki sistemin çözümü olacaktır:

$$\Delta x^{k+1} = \Delta x^k + \Delta t_k (A_k \Delta x^k + B_k h_k), \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (3.2.13)$$

$$\Delta x_0 = 0. \quad (3.2.14)$$

Bu sistemi $j = \overline{0, k}$ için kolaylıkla aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\Delta x^{k+1} = \sum_{j=0}^k \Delta t_j (A_j \Delta x^j + B_j h_j), \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (3.2.15)$$

Bu eşitliği kullanarak ve Cauchy-Bunjakovskii'den yararlanarak $i = \overline{1, n}$ için

$$\|\Delta x^{k+1}\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{n} A_{\max} d_N \sum_{j=0}^k \|\Delta x^j\|_{\mathbb{R}^n} + \sqrt{n} B_{\max} \sum_{j=0}^k \|h_j\|_{\mathbb{R}^m} \Delta t_j, \quad k = \overline{0, N-1} \quad (3.2.16)$$

eşitsizliğini kolaylıkla elde edebiliriz. Bu eşitsizliklere Gronwall lemmasının ayrık durumunu (Bkz. Kuramsal Temeller Lemma 1.3) uygularsak kolaylıkla aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\|\Delta x^k\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_{14} \|[h]_N\|_{L_{2N}^{(m)}}, \quad k = \overline{0, N}. \quad (3.2.17)$$

Burada $c_{14} > 0$ sabiti, k ve $[h]_N$ den bağımsız bir sabittir.

Şimdi (3.2.4) fonksiyonunun $[u]_N \in U_N$ elemanı üzerindeki artışına bakalım. (3.2.4)

fonksiyonundan yararlanarak aşağıdaki formülü yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \Delta I_N([u]_N) &= I_N([u]_N + [h]_N) - I_N([u]_N) = 2\beta_0 \langle x^N - y_0, \Delta x_N \rangle_{\mathbb{R}^n} + \\ &+ 2\beta_1 \sum_{k=0}^{N-1} \langle x^k - y_1^k, \Delta x^k \rangle_{\mathbb{R}^n} \Delta t_k + \beta_0 \|\Delta x^N\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_1 \sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k \|\Delta x^k\|_{\mathbb{R}^n}^2. \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Burada x^k , $k = \overline{0, N}$ ayrık fonksiyonu (3.2.4)-(3.2.6) sisteminin $[u]_N \in U_N$ 'e karşılık gelen çözümü, Δx^k , $k = \overline{0, N}$ ise (3.2.13)-(3.2.14) sisteminin çözümüdür.

(3.2.8)-(3.2.17) kestirimlerinden yararlanarak kolaylıkla kabullendiğimiz şartlar altında aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz:

$$|\Delta I_N([u]_N)| \leq c_{15} \left(\|[h]_N\|_{L_{2N}^{(m)}} + \|[h]_N\|_{L_{2N}^{(m)}}^2 \right). \quad (3.2.19)$$

Burada $c_{15} > 0$ sabiti $[h]_N$ 'den bağımsızdır.

Bu eşitsizlikten $I_N([u]_N)$ fonksiyonunun $\forall [u]_N \in U_N$ elemanı üzerinde sürekli olduğu çıkar. Başka bir ifadeyle

$$\|[h]_N\|_{L_{2N}^{(m)}} \rightarrow 0 \text{ için } I_N([h]_N) \rightarrow 0 \quad (3.2.20)$$

bağıntısı geçerlidir. Gerçekten $[u]_N \in U_N$ 'nin herhangi bir elemanı olduğundan ve (3.2.20) bağıntısından $I_N([u]_N)$ fonksiyonunun U_N kümesi üzerinde sürekli olduğu açıktır. U_N kümesinin yapısına göre, bu küme sonlu boyutlu $L_{2N}^{(m)}$ uzayında kapalı, sınırlı ve konveks kümedir. Bilindiği üzere bu küme Bolzano-Weierstrass Teoremine (Bkz. Kuramsal Temeller Teorem 1.12) göre kompakt kümedir. İspata göre $I_N([u]_N)$ fonksiyonu U_N kümesi üzerinde süreklidir ve bu küme üzerinde $\forall I_N([u]_N)$ için $I_N([u]_N) \geq 0$ şartını sağlar. Yani bu küme alttan sınırlıdır. Böylelikle [18] çalışmasından bildiğimiz Weierstrass (Bkz. Kuramsal Temeller Teorem 1.6) Teoreminin tüm şartları sağlandığından, bu teoreme dayanarak, $I_N([u]_N)$ fonksiyonunun U_N kümesi üzerinde en küçük değere sahip olduğuna hükmedebiliriz. Başka bir deyişle (3.2.4)-(3.2.6) optimal kontrol problemi en az bir çözüme sahiptir. Teorem ispatlandı.

3.2.3. Sonlu Fark Şemasının Hatasının Değerlendirilmesi

Bu alt bölümde (3.2.4)-(3.2.6) fark şemasının $\forall [u]_N \in U_N$ için hatasını değerlendirmeye çalışacağız.

Bu amaçla aşağıdaki gibi bir operatör tanımlayalım:

$$Q_N : L_2^{(m)}(0, T) \rightarrow L_{2N}^{(m)} .$$

Burada

$$Q_N(u) = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N-1}) = [\omega]_N \quad (3.2.21)$$

ve

$$\omega_k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(t) dt, k = \overline{0, N-1}$$

dır.

Teorem 3.2.3: Farz edelim ki Teorem 3.2.1'in şartları sağlansın ve $y^k = x(t_k)$ için $z^k = x^k - y^k$, $k = \overline{0, N}$ olsun. Bu takdirde $\forall u \in U$, $\forall [u]_N \in U_N$ için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|z^k\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_{16} \left(d_N + \delta_N + \|[u]_N - Q_N(u)\|_{L_{2N}^{(m)}} \right), k = \overline{0, N}. \quad (3.2.22)$$

Burada $\delta_N > 0$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N = 0$, $d_N = \max_{0 \leq k \leq N-1} \Delta t_k$ ve $Q_N(u)$ ise (3.2.21) formülü ile tanımlanır. $c_{16} > 0$ sabiti d_N , δ_N , $[u]_N$ ve $Q_N(u)$ ifadelerinden bağımsızdır.

İspat: Farz edelim ki $y^k = x(t_k)$, $k = \overline{0, N}$ değerleri (3.2.2)-(3.2.3) Cauchy probleminin $(0, T)$ aralığına karşılık gelen $\{t_k, k = \overline{0, N}\}$ bölüntüsünün düğüm noktalarındaki değerleri ve

$$z^k = x^k - y^k, k = \overline{0, N} \quad (3.2.23)$$

olsun. Burada x^k , $k = \overline{0, N}$ (3.2.4)-(3.2.6) fark şemasının çözümüdür. Kolaylıkla görebiliriz ki z^k , $k = \overline{0, N}$ ağ fonksiyonları aşağıdaki sistemin çözümüdür:

$$z^{k+1} = z^k + \Delta t_k A_k z^k + \Delta t_k F_k, k = \overline{0, N-1}, \quad (3.2.24)$$

$$z^0 = 0. \quad (3.2.25)$$

Burada

$$F_k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\frac{dx(t)}{dt} - A(t)x(t) - B(t)u(t) - f(t) \right] dt - (y^{k+1} - y^k) / \Delta t_k + A_k y^k + B_k u_k + f_k, \quad k = \overline{0, N-1} \quad (3.2.26)$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi (3.2.24)-(3.2.25) sisteminin çözümünü F_k ağ fonksiyonlarına göre değerlendirmeye çalışalım. (3.2.24)-(3.2.25) sisteminden yararlanarak kolaylıkla aşağıdaki bağıntıları elde ederiz:

$$z^{k+1} = \sum_{j=0}^k \Delta t_j A_j z^j + \sum_{j=0}^k \Delta t_j F_j, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (3.2.27)$$

Bu eşitlikten Cauchy-Bunjakovskii yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği kolaylıkla elde edebiliriz:

$$\|z^{k+1}\|_n \leq \sqrt{n} A_{\max} d_N \sum_{j=0}^k \|z^j\|_n + \sqrt{n} \sum_{j=0}^k \Delta t_j \|F_j\|_n, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (3.2.28)$$

Gronwall Lemmasının ayırık aynısını uygulayarak bu eşitsizlikten aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\|z^k\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_{17} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta t_j \|F_j\|_{\mathbb{R}^n}, \quad k = \overline{0, N}. \quad (3.2.29)$$

Burada $c_{17} > 0$ sabiti k ve Δt_k 'dan bağımsızdır. Şimdi F_k ağ fonksiyonunu değerlendirmeye çalışalım. Bu amaçla F_k ağ fonksiyonunu (3.2.26) formülünden yararlanarak aşağıdaki gibi dönüştürelim:

$$F_k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dx_0(t)}{dt} dt - (y^{k+1} - y^k) / \Delta t_k + \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [A_k y^k - A(t)x(t)] dt + \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [B_k u_k - B(t)u(t)] dt - \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) dt + f_k =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Delta t_k} \left[(x(t_{k+1}) - x(t_k)) - (y^{k+1} - y^k) \right] + \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [A_k y^k - A(t)x(t)] dt + \\
&+ \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [B_k u_k - B(t)u(t)] dt - f_k + f_k, \quad k = \overline{0, N-1}.
\end{aligned} \tag{3.2.30}$$

Burada $y^k = x(t_k)$ formülünü dikkate alırsak F_k 'yi aşağıdaki yazabiliriz:

$$F_k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [A_k x(t_k) - A(t)x(t)] dt + \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [B_k u_k - B(t)u(t)] dt, \quad k = \overline{0, N-1} \tag{3.2.31}$$

Şimdi F_k ağ fonksiyonunu aşağıdaki gibi gösterelim:

$$F_k = F_k^1 + F_k^2, \quad k = \overline{0, N-1}. \tag{3.2.32}$$

Burada

$$F_k^1 = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [A_k x(t_k) - A(t)x(t)] dt, \quad k = \overline{0, N-1} \tag{3.2.33}$$

ve

$$F_k^2 = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [B_k u_k - B(t)u(t)] dt, \quad k = \overline{0, N-1} \tag{3.2.34}$$

şeklindedir.

İlk önce F_k^1 ağ fonksiyonunu değerlendirelim. (3.2.33) formülünden yararlanırsak, F_k^1 'i aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
F_k^1 &= \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [A_k x(t_k) - A(t)x(t)] dt = \\
&= \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [A_k x(t_k) - A(t)x(t_k) + A(t)x(t_k) - A(t)x(t)] dt \\
&= \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (A_k - A(t)) x(t_k) dt + \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} A(t) (x(t_k) - x(t)) dt = \\
&= F_k^{11} + F_k^{12}, \quad k = \overline{0, N-1}.
\end{aligned} \tag{3.2.35}$$

F_k^{11} 'in formülüne göre aşağıdakileri yazabiliriz:

$$\begin{aligned} (F_k^{11})_i &= \left(\frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (A_k - A(t)) x(t_k) dt \right) = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{j=1}^n (a_{ij}^k - a_{ij}) x_j(t_k) dt = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(a_{ij}^k - \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} a_{ij}(t) dt \right) x_j(t_k), \quad i = \overline{0, n}, \quad k = \overline{0, N-1}. \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

(3.2.7) formülündeki a_{ij}^k ağ fonksiyonlarının

$$a_{ij}^k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} a_{ij}(t) dt, \quad i, j = \overline{1, n}$$

tanımından yararlanarak

$$\begin{aligned} (F_k^{11})_i &= \sum_{j=1}^n \left(a_{ij}^k - \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} a_{ij}(t) dt \right) x_j(t_k) = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} a_{ij}(t) dt - \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} a_{ij}(t) dt \right) x_j(t_k) = \\ &= 0, \quad i = \overline{0, n}, \quad k = \overline{0, N-1}. \end{aligned}$$

olduğunu söyleyebiliriz. Bu F_k^{11} , $k = \overline{0, N-1}$ vektörlerinin bileşenlerinin 0 olması demektir. Başka bir ifadeyle F_k^{11} , $k = \overline{0, N-1}$ vektörü bir sıfır vektördür:

$$F_k^{11} = 0, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (3.2.37)$$

Şimdi F_k^{12} , $k = \overline{0, N-1}$ ağ fonksiyonunu değerlendirelim. F_k^{12} formülünden ve (3.2.16) eşitsizliğinden yararlanarak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \|F_k^{12}\|_{\mathbb{R}^n} &= \left\| \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} A(t) (x(t_k) - x(t)) dt \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{n}}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|A(t)\| \|x(t_k) - x(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\sqrt{n}A_{\max}}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| \int_{t_k}^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} dt \leq \frac{\sqrt{n}A_{\max}}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^t \|x'(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} d\tau dt \leq \\
&\leq \sqrt{n}A_{\max} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|x'(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt, \quad k = \overline{0, N-1}.
\end{aligned} \tag{3.2.38}$$

Bu ifadeden ve (3.2.37) eşitliğinden yararlanarak F_k^1 'i aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\|F_k^1\|_{\mathbb{R}^n} \leq \sqrt{n}A_{\max} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| \frac{dx(t)}{dt} \right\|_{\mathbb{R}^n} dt, \quad k = \overline{0, N-1}. \tag{3.2.39}$$

Şimdi F_k^2 'yi değerlendirelim. (3.2.34) formülüne göre aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
F_k^2 &= \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [B_k u_k - B(t)u(t)] dt = \\
&= \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [B_k u(t) - B_k u(t) + B_k u_k + B(t)u(t)] dt \\
&= \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (B_k - B(t))u(t) dt + \\
&\quad + \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} B_k (u_k - u(t)) dt = \\
&= F_k^{21} + F_k^{22}, \quad k = \overline{0, N-1}.
\end{aligned} \tag{3.2.40}$$

Şimdi F_k^{21} formülünü dikkate alırsak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
\|F_k^{21}\|_{\mathbb{R}^n} &= \left\| \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (B_k - B(t))u(t) dt \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{\sqrt{n}}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|(B_k - B(t))u(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt \leq \\
&\leq \frac{\sqrt{n}}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|B_k - B(t)\|_{\mathbb{R}^n} \|u(t)\|_{\mathbb{R}^m} dt \leq \\
&\leq \sqrt{n} \left(\frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|B_k - B(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|u(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \right)^{1/2}, \quad k = \overline{0, N-1}.
\end{aligned} \tag{3.2.41}$$

ω_k 'nin tanımından yararlanarak F_k^{22} formülüne göre aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
(F_k^{22})_i &= \left(\frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} B_k(u_k - u(t)) dt \right)_i = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{r=1}^m b_{ir}^k (u_{rk} - u_r(t)) dt = \\
&= \sum_{r=1}^m \left[b_{ir}^k \left(u_{rk} - \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} u_r(t) dt \right) \right] = \sum_{r=1}^m b_{ir}^k (u_{rk} - \omega_{rk}), \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{0, N-1}.
\end{aligned} \tag{3.2.42}$$

Bu formülden yararlanarak kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
\|F_k^{22}\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \left\| \sum_{r=1}^m b_{ir}^k (u_{rk} - \omega_{rk}) \right\| \leq \\
&\leq \|B_k\| \|u_k - \omega_k\|_{\mathbb{R}^m} \leq B_{\max} \|u_k - \omega_k\|_{\mathbb{R}^m}, \quad k = \overline{0, N-1}.
\end{aligned} \tag{3.2.43}$$

Böylelikle (3.2.41)-(3.2.42) formülünden yararlanarak (3.2.40) formülü ile tanımlanan F_k^2 'yi aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$\begin{aligned}
\|F_k^2\|_{\mathbb{R}^n} &\leq B_{\max} \|u_k - \omega_k\|_{\mathbb{R}^m} + \\
&+ \frac{\sqrt{n}}{\Delta t_k} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|B_k - B(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|u(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \right)^{1/2}, \quad k = \overline{0, N-1}.
\end{aligned} \tag{3.2.44}$$

(3.2.39), (3.2.44) eşitsizliklerinden ve (3.2.32) eşitliğinden yararlanarak (3.2.29) kestiriminden aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
\|z^k\|_{\mathbb{R}^n} &\leq c_{17} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta t_j \|F_j\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_{17} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta t_j (\|F_j^1\|_{\mathbb{R}^n} + \|F_j^2\|_{\mathbb{R}^n}) \leq \\
&\leq c_{17} \sum_{j=0}^{N-1} \sqrt{n} A_{\max} \Delta t_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left\| \frac{dx(t)}{dt} \right\|_{\mathbb{R}^n} dt + c_{17} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta t_j B_{\max} \|u_j - w_j\|_{\mathbb{R}^m} + \\
&+ c_{17} \sum_{j=0}^{N-1} \sqrt{n} \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|B_j - B(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|u(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \right)^{1/2}, \quad k = \overline{0, N}.
\end{aligned} \tag{3.2.45}$$

(3.2.2)-(3.2.3) Cauchy probleminin çözümü için daha önceki bölümlerde gösterilen aşağıdaki kestirimi yazabiliriz:

$$\|\dot{x}\|_{L_2^{(n)}(0, T)} \leq c_{18} \left[\|x_0\|_{\mathbb{R}^n} + \|u\|_{L_2^{(m)}(0, T)} + \|f\|_{L_2^{(n)}(0, T)} \right]. \tag{3.2.46}$$

Burada $c_{18} > 0$ sabiti x_0, u ve f 'ten bağımsız bir sabittir. Bu kestirimin yardımıyla Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğinden yararlanırsak (3.2.45)'ten aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\|z^k\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_{19}d_N + c_{20} \|[u]_N - Q_N(u)\|_{L_{2N}^{(m)}} + c_{21} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|B_j - B(t)\|^2 dt \right)^{1/2}, \quad k = \overline{0, N}. \quad (3.2.47)$$

Burada $c_{19}, c_{20}, c_{21} > 0$ sabitleri k 'dan bağımsızdırlar.

Kabul ettiğimiz şartlar altında $B(t)$ matrisinin elemanları $(0, T)$ aralığında ölçülebilir sınırlı fonksiyonlardır. $B_j, j = \overline{0, N-1}$ ise $B(t)$ matrisinin $[t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{0, N-1}$ aralıkları üzerinden Steklov ortalamalarıdır. Bu nedenle ([35],s.118) çalışmasındaki teoremi kullanarak aşağıdaki bağıntıyı gösterebiliriz(Bknz. Kuramsal Temeller Teorem 1.10):

$$\left(\sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|B_j - B(t)\|^2 dt \right) \leq \delta_N. \quad (3.2.48)$$

Burada $\delta_N > 0$ ve $\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N = 0$ 'dır.

Bu eşitsizliği dikkate alarak (3.2.47) eşitsizliğinden aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\|z^k\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_{22} \left(d_N + \delta_N + \|[u]_N - Q_N(u)\|_{L_{2N}^{(m)}} \right), \quad k = \overline{0, N}. \quad (3.2.49)$$

Burada $c_{22} > 0$ sabiti k ve N 'den bağımsız bir sabittir. Böylelikle teorem ispatlanmış olur.

3.2.4. Sonlu Fark Yaklaşımlarının Fonksiyonele Göre Yakınsaklığı

Bu alt bölümde (3.2.1)-(3.2.3) optimal kontrol probleminde sonlu farklı yaklaşımların fonksiyonele göre yakınsaklığını elde edeceğiz. Bu amaçla ilk önce (3.2.1) fonksiyoneli ile (3.2.4) fonksiyonunun farkını değerlendirmeye çalışacağız.

Teorem 3.2.4: Farz edelim ki Teorem 3.2.3'ün şartları sağlansın. Bu takdirde $\forall u \in U$ ve $\forall [u]_N \in U_N$ için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$|J(u) - I_N([u]_N)| \leq c_{23} \left(d_N + \delta_N + \|[u]_N - Q_N(u)\|_{L_2^{(m)}} \right). \quad (3.2.50)$$

Burada $c_{23} > 0$ sabiti N 'den bağımsızdır.

İspat: (3.2.1) ve (3.2.4) formüllerinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} J(u) - I_N([u]_N) &\leq \beta_0 \|x(T;u) - y_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_1 \|x(t) - y_1(t)\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 - \\ &- \beta_0 \|x^N - y_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \beta_1 \sum_{k=0}^{N-1} \|x^k - y_1^k\|_{\mathbb{R}^n}^2 \Delta t_k \\ &= \beta_0 \left[\|x(T;u) - y_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \|x^N - y_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 \right] + \\ &+ \beta_1 \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\|x(t) - y_1(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \|x^k - y_1^k\|_{\mathbb{R}^n}^2 \right] dt. \end{aligned} \quad (3.2.51)$$

Şimdi Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} |J(u) - I_N([u]_N)| &\leq \beta_0 \left| \|x(T;u) - y_0\|_{\mathbb{R}^n} - \|x^N - y_0\|_{\mathbb{R}^n} \right| \\ &\left(\|x(T;u) - y_0\|_{\mathbb{R}^n} - \|x^N - y_0\|_{\mathbb{R}^n} \right) + \beta_1 \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \|x(t) - y_1(t)\|_{\mathbb{R}^n} - \|x^k - y_1^k\|_{\mathbb{R}^n} \right| \\ &\left(\|x(t) - y_1(t)\|_{\mathbb{R}^n} - \|x^k - y_1^k\|_{\mathbb{R}^n} \right) dt \leq \\ &\leq \beta_0 \left(\|x(T;u) - x^N\|_{\mathbb{R}^n} \right) \left(\|x(T;u)\|_{\mathbb{R}^n} + \|x^N\|_{\mathbb{R}^n} + 2\|y_0\|_{\mathbb{R}^n} \right) + \\ &+ \beta_1 \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \|x(t) - x^k\|_{\mathbb{R}^n} - \|y_1(t) - y_1^k\|_{\mathbb{R}^n} \right|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \|x^k\|_{\mathbb{R}^n} + \|y_1(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \|y_1^k\|_{\mathbb{R}^n} \right)^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.2.52)$$

Bu eşitsizlikten $x(t)$ ve x_k 'lar için kestirimleri ve $y_1(t)$ fonksiyonu için olan varsayımdan yararlanırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
|J(u) - I_N([u_N])| &\leq c_{24} \left[\left\| x(T; u) - x^N \right\|_{\mathbb{R}^n} + \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| x(t) - x^k \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt \right)^{1/2} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| y_1(t) - y_1^k \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt \right)^{1/2} \right] \\
&= c_{24} [J_0 + J_1].
\end{aligned} \tag{3.2.53}$$

Burada $c_{24} > 0$, N 'den bağımsız bir sabittir ve

$$J_0 = \left\| x(T; u) - x^N \right\|_{\mathbb{R}^n}, \tag{3.2.54}$$

$$J_1 = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| x(t) - x^k \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| y_1(t) - y_1^k \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt \right)^{1/2} \tag{3.2.55}$$

dir.

Şimdi (3.2.54) formülünden ve Teorem 3.2.3'deki z^k formülünden yararlanırsak

$$(J_0)^2 = \left\| x(T; u) - x^N \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \left\| x(t_N) - x^N \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \left\| z^N \right\|_{\mathbb{R}^n}^2$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikten ve (3.2.49) kestiriminden yararlanırsak

$$J_0 = \left\| z^N \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_{22} \left(d_N + \delta_N + \left\| [u]_N - \mathcal{Q}_N(u) \right\|_{L_{2N}^m} \right) \tag{3.2.56}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi (3.2.55) formülünden yararlanarak

$$\begin{aligned}
(J_1)^2 &\leq 2 \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| x(t) - x^k \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt + 2 \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| y_1(t) - y_1^k \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt = \\
&= 2 \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| x(t) - x(t_k) + x(t_k) - x^k \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt + 2 \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| y_1(t) - y_1^k \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4 \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|x(t) - x(t_k)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt + 4 \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|x(t_k) - x^k\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt + \\
&+ 2 \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|y_1(t) - y_1^k\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt = 4J_1^1 + 4J_1^2 + 2J_1^3
\end{aligned} \tag{3.2.57}$$

kestirimini elde ederiz. Burada

$$J_1^1 = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|x(t) - x(t_k)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt, \tag{3.2.58}$$

$$J_1^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k \|x(t_k) - x^k\|_{\mathbb{R}^n}^2, \tag{3.2.59}$$

$$J_1^3 = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|y_1(t) - y_1^k\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt \tag{3.2.60}$$

dir.

Şimdi J_1^2 formülünden yararlanarak Teorem 3.2.3'ten bildiğimiz z^k tanımını kullanarak (3.2.49) eşitsiliğinden aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$J_1^2 \leq \sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k \|z^k\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq \sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k \left(c_{22} \left(d_N + \delta_N + \|[u]_N - Q_N(u)\|_{L_{2N}^{(m)}} \right) \right)^2.$$

Buradan kolaylıkla

$$J_1^2 \leq c_{25} \left(d_N + \delta_N + \|[u]_N - Q_N(u)\|_{L_{2N}^{(m)}} \right)^2 \tag{3.2.61}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikte $c_{25} > 0$ sabiti N 'den bağımsız bir sabittir.

Şimdi J_1^1 formülünden yararlanarak:

$$\begin{aligned}
J_1^1 &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|x(t) - x(t_k)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| \int_{t_k}^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt \leq \\
&\leq n \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\int_{t_k}^t \left\| \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right\|_{\mathbb{R}^n} d\tau \right)^2 dt \leq n \sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right\|_{\mathbb{R}^n} d\tau \right)^2
\end{aligned} \tag{3.2.62}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizlikten, Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğinden ve (3.2.46) kestiriminden yararlanırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$J_1^1 \leq c_{26} (d_N)^2. \tag{3.2.63}$$

Burada $c_{26} > 0$ sabiti N 'den bağımsız bir sabittir.

Şimdi J_1^3 formülünü değerlendirelim. $y_1(t)$ fonksiyonunun kendisinin ve türevinin $L_2^{(n)}(0, T)$ uzayından olduğunu dikkate alırsak;

$$\begin{aligned}
J_1^3 &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|y_1(t) - y_1^k\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt \leq \sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| \frac{dy_1(\tau)}{d\tau} \right\|_{\mathbb{R}^n} d\tau \right)^2 \leq \\
&\leq \left\| \frac{dy_1}{dt} \right\|_{L_2^{(n)}(0, T)}^2 d_N^2.
\end{aligned}$$

Buradan da

$$J_1^3 \leq c_{27} d_N^2 \tag{3.2.64}$$

kestirimini elde ederiz. $c_{27} > 0$ sabiti N 'den bağımsızdır.

Şimdi (3.2.61), (3.2.63) ve (3.2.64) kestirimlerinden yararlanarak (3.2.57) eşitsizliğinden

$$(J_1)^2 \leq c_{28} \left(d_N + \delta_N + \|Q_N(u) - [u]_N\|_{L_{2N}^{(m)}} \right)^2 \tag{3.2.65}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $c_{28} > 0$ sabiti N 'den bağımsızdır.

Şimdi (3.2.56) ve (3.2.65)'i kullanırsak (3.2.53) kestiriminden

$$\begin{aligned}
|J(u) - I_N([u]_N)| &\leq c_{24} [J_0 + J_1] \leq \|z^N\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_{25} \left(d_N + \delta_N + \|[u]_N - Q_N(u)\|_{L_{2N}^{(m)}} \right) + \\
&+ c_{28} \left(d_N + \delta_N + \|Q_N(u) - [u]_N\|_{L_{2N}^{(m)}} \right) \leq \\
&\leq c_{29} \left(d_N + \delta_N + \|Q_N(u) - [u]_N\|_{L_{2N}^{(m)}} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikte $c_{29} = c_{23}$ aldığımızda teoremin hükmünün geçerli olduğunu göstermiş oluruz. Teorem 3.2.4 ispatlandı.

Şimdi sonlu farklı yaklaşımların fonksiyonele göre yakınsaklığını göstermek için iki tane yardımcı lemmayı ispatları ile birlikte verelim.

Lemma 3.2.1: Farz edelim ki Teorem 3.2.4'ün şartları sağlansın ve Q_N operatörü $\forall u \in U$ için (3.2.21) formülü ile tanımlansın. Bu takdirde $Q_N(u) \in U_N$ 'dir ve aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$|J(u) - I_N(Q_N(u))| \leq c_{30} (d_N + \delta_N). \quad (3.2.66)$$

İspat: $\forall u \in U$ alalım. $Q_N(u)$ operatörünün tanımına göre aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
Q_N(u) &= [\omega]_N = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{N-1}), \\
\omega_k &= \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(t) dt, \quad \forall u \in U.
\end{aligned} \quad (3.2.67)$$

Bu formülden yararlanarak ve $u \in U$ olduğunu dikkate alarak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k \|\omega_k\|_m^2 \right)^{1/2} &= \|\omega\|_{L_{2N}^m} = \left[\sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k \left\| \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(t) dt \right\|_m^2 \right]^{1/2} = \\
&= \left[\sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k \left(\sum_{i=1}^m \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} u_i(t) dt \right]^2 \right) \left(\frac{1}{\Delta t_k} \right)^2 \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\Delta t_k} \left(\sum_{i=1}^m \int_{t_k}^{t_{k+1}} u_i^2(t) dt \right) \Delta t_k \right]^{1/2} = \\
&= \left[\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|u(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \right]^{1/2} = \|u(t)\|_{L_2^{(m)}(0,T)} \leq b_0.
\end{aligned}$$

Buradan $Q_N(u) \in U_N$ olduğu çıkar. Bu takdirde $[u]_N \in U_N$ 'nin yerine $[\omega]_N = Q_N(u) \in U_N$ alıp Teorem 3.2.4'ün ispatını tekrarlırsak

$$|J(u) - I_N([u]_N)| \leq c_{23} (d_N + \delta_N) \quad (3.2.68)$$

olur. Burada c_{30} 'u c_{23} olarak seçersek lemmanın hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz.

Lemma 3.2.2: Farz edelim ki Teorem 3.2.4'ün şartları sağlansın ve $P_N([u]_N)$ aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\tilde{u}(t) = P_N([u]_N) = u_k, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (3.2.69)$$

Bu takdirde $P_N([u]_N) \in U$ 'dur ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$|J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N)| \leq c_{31} (d_N + \delta_N). \quad (3.2.70)$$

İspat: $\forall [u]_N \in U_N$ alalım ve $P_N([u]_N)$ operatörünü lemmada verilen tanımından yararlanarak $\tilde{u}(t) = P_N([u]_N) = u_k, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad k = \overline{0, N-1}$ olacak şekilde yazabiliriz. Şimdi $\tilde{u}(t)$ 'nin normunu bulalım:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}(t)\|_{L_{2N}^{(m)}(0,T)} &= \left(\int_0^T \|\tilde{u}(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\tilde{u}(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|u_k(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \right)^{1/2} = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k \|u_k(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 \right)^{1/2} = \|[u]_N\|_{L_{2N}^{(m)}} \leq b_0. \end{aligned}$$

Buradan da U kümesinin yapısı dikkate alındığında $\forall [u]_N \in U_N$ için $\tilde{u}(t) = P_N([u]_N) \in U$ olduğu ortaya çıkar. Bu nedenle Teorem 3.2.4'ten $u \in U$ kontrolünün yerine $\tilde{u}(t) = P_N([u]_N) \in U$ alıp ispatı gerçekleştirirsek aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} |J(P_N([u]_N)) - I_N([u]_N)| &\leq c_{23}(d_N + \delta_N) + \left(\sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k \|u_k - u_k\|_{\mathbb{R}^m}^2 \right)^{1/2} = \\ &= c_{23}(d_N + \delta_N). \end{aligned} \quad (3.2.71)$$

Şimdi c_{31} 'yi c_{23} olarak alırsak teoremin hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Lemma 3.2.2 ispatlandı.

Nihayet ispatlarını verdiğimiz Lemma 3.2.1 ve Lemma 3.2.2'den yararlanarak sonlu farklı yaklaşımların fonksiyonele göre yakınsaklığını gösteren aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 3.2.5: Farz edelim ki Lemma 3.2.1 ve Lemma 3.2.2'nin şartları sağlansın. Bunların yanı sıra J_* , (3.2.1) fonksiyonelinin (3.2.2)-(3.2.3) şartları altında U kümesi üzerinde en büyük alt sınırı, I_{N^*} ise (3.2.4) fonksiyonunun (3.2.5)-(3.2.6) şartları altında U_N kümesi üzerinde en büyük alt sınırı olsun. Bu takdirde

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_{N^*} = J_* \quad (3.2.72)$$

limit bağıntısı ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$|I_{N^*} - J_*| \leq c_{32}(d_N + \delta_N), \quad N = 1, 2, \dots \quad (3.2.73)$$

Burada $c_{32} > 0$ sabiti N 'den bağımsızdır.

İspat: Birinci alt bölümde (3.2.1)-(3.2.2) optimal kontrol probleminin en az bir çözüme sahip olduğu, yani (3.2.1) fonksiyonelinin minimum noktalar kümesi olan $U_* \neq \emptyset$ olduğu verilmişti. Bu nedenle $U^* \subset U$ kümesinden herhangi bir u^* optimal kontrolünü ele alalım. Lemma 3.2.1'e göre $Q_N(u^*) \in U_N$ 'dir. Bu takdirde (3.2.66) kestiriminde $u = u^* \in U_* \subset U$ için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$I_{N^*} \leq I_N(Q_N(u^*)) \leq J(u^*) + c_{30}(d_N + \delta_N) = J_* + c_{30}(d_N + \delta_N), \quad N=1,2,\dots \quad (3.2.74)$$

Teorem 3.2.2'ye göre (3.2.4)-(3.2.6) ayrık optimal kontrol probleminin en az bir çözüme sahip olduğuna hükmedebiliriz. Başka bir ifadeyle

$$U_{N^*} \equiv \left\{ [u]_N^* \in U_N : I_N([u]_N^*) = I_{N^*} = \inf_{[u]_N \in U_N} I_N([u]_N) \right\} \neq \emptyset$$

olur. Şimdi $\forall [u]_N^* \in U_{N^*} \subset U_N$ alıp Lemma 3.2.2'den yararlanırsak $P_N([u]_N^*) \in U$ olduğunu elde ederiz. Bu takdirde (3.2.70) kestiriminden yararlanırsak $[u]_N \in U_N$ 'nin yerine $[u]_N^* \in U_{N^*} \subset U_N$ alıp aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$J_* \leq J(P_N([u]_N^*)) \leq I_N([u]_N^*) + c_{31}(d_N + \delta_N) = I_{N^*} + c_{31}(d_N + \delta_N) \quad (3.2.75)$$

$N = 1, 2, \dots$

$c_{32} = \max\{c_{30}, c_{31}\}$ olarak seçersek (3.2.74) ve (3.2.75)'ten teoremdeki

$$|I_{N^*} - J_*| \leq c_{32}(d_N + \delta_N)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu elde ederiz. Bu eşitsizlikte $N \rightarrow \infty$ için $d_N \rightarrow 0$ olduğunu ve (3.2.48) eşitsizliğinde $N \rightarrow \infty$ için $\delta_N \rightarrow 0$ olduğunu dikkate alıp limite geçerse (3.2.72)'nin geçerli olduğunu elde ederiz. Teorem ispatlandı.

3.3. Optimal Kontrol Probleminin Nümerik Çözümü

Çalışmanın bu bölümünde finansal akışların optimal kontrolü probleminin nümerik çözümü için gradyent izdüşüm yöntemini ele alınmıştır.

3.3.1. Finansal Akışların Optimal Kontrol Probleminin Gradyent İzdüşüm Yöntemi ile Çözümü

Bölümün başında verdiğimiz (3.1.1)-(3.1.3) optimal kontrol problemini yeniden ele alalım. Buna göre problemimiz

$$J_\alpha(u) = \beta_0 \|x(T) - y_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_1 \|x - y_1\|_{L_2^{(n)}(0,T)}^2 + \alpha \|u - \omega\|_{L_2^{(m)}(0,T)}^2 \quad (3.3.1)$$

fonksiyonelinin

$$U = \left\{ u = u(t) : u \in L_2^{(m)}(0,T), \|u\|_{L_2^{(m)}(0,T)} \leq b_0 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.3.2)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (3.3.3)$$

şartları altında minimumunun bulunması problemidir. Burada $T > 0$ verilen zaman; $\beta_0 + \beta_1 \neq 0$ olmak üzere $\beta_0 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \alpha \geq 0$ ve $b_0 \geq 0$ verilen sabitler; $\omega = \omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_m(t))$, t anında planlanan mevduatların vektörü; $y_0 = y_{0j} = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n})$, $j = \overline{1, n}$ j . müşterinin $t = T$ anında bankadan alabileceği daha önceden planlanan kredi miktarı; $x_0 = x_{0j} = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$, $j = \overline{1, n}$ j . müşterinin başlangıç kredi durumunu belirten bilinen sayılar; $u(t) = u_i(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$, $i = \overline{1, m}$ herhangi bir t anında i . mevduat kaynağının miktarı; $x(t) = x_j(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $j = \overline{1, n}$ herhangi bir t anında j . müşterinin bankadan alacağı kredi; $y_1 = (y_{11}(t), y_{12}(t), \dots, y_{1n}(t))$, $y_{1j} = y_{1j}(t) \in W_2^1(0, T)$, $j = \overline{1, n}$

herhangi, bir t anında j . müşteri için banka tarafından daha önceden planlanan kredi; $A(t)$ ve $B(t)$ matrisleri ve $f(t)$ vektörü bankanın iç kanunları ile belirtilen fonksiyonlar olup; $A(t) = \{a_{jk}(t)\}$, $j, k = \overline{1, n}$ ve $B(t) = \{b_{ki}(t)\}$, $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ biçimindedir. $A(t)$ matrisinin elemanları $a_{jk}(t)$, $j, k = \overline{1, n}$ ve $B(t)$ matrisinin elemanları olan $b_{ki}(t)$, $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$ $[0, T]$ aralığında ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar, f fonksiyonu ise $f \in L_2^{(n)}(0, T)$ olup karesi integrallenebilir fonksiyonlardır.

(3.3.1)-(3.3.3) probleminin çözümünde 2. bölümde ifade ettiğimiz gradyent izdüşüm yönetiminin şemasını verelim.

Farz edelim ki $u^0 = u^0(t) \in U$ elemanı başlangıç yaklaşımı olsun. Bu takdirde gradyent izdüşüm yönteminin şemasına göre aşağıdaki yineleme formülünü yazabiliriz:

$$u^{s+1}(t) = P_U(u^s(t) - \gamma_s J'_\alpha(u^s)) \quad s=0,1,2,\dots, \quad t \in (0, T). \quad (3.3.4)$$

Burada $P_U(z)$ miktarı $z = z(t)$ noktasının U kümesine izdüşümüdür ve aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$u^{s+1}(t) = \begin{cases} u^s(t) - \gamma_s J'_\alpha(u^s) & , \quad (u^s(t) - \gamma_s J'_\alpha(u^s)) \in U \\ b_0 \frac{u^s(t) - \gamma_s J'_\alpha(u^s)}{\|u^s - \gamma_s J'_\alpha(u^s)\|_{L_2^{(m)}(0, T)}} & , \quad (u^s(t) - \gamma_s J'_\alpha(u^s)) \notin U \end{cases} \quad s=0,1,2,\dots, \quad t \in (0, T). \quad (3.3.5)$$

$J'_\alpha(u^s)$ (3.3.1) fonksiyonelinin gradyentinin $u^s = u^s(t) \in U$ noktasındaki değeridir ve aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$J'_\alpha(u^s) = -B^T \psi_s(t) + 2\alpha(u^s(t) - w(t)). \quad (3.3.6)$$

$\psi_s(t) \equiv \psi(t; u)$ fonksiyonu $u = u^s(t)$ için aşağıdaki eşlenik problemin çözümüdür:

$$\dot{\psi}(t) = -A^T \psi(t) + 2\beta_1 (x(t) - y_1(t)) \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.3.7)$$

$$\psi(T) = -2\beta_0 (x(T; u) - y_0). \quad (3.3.8)$$

Burada A^T ve B^T matrisleri sırasıyla $A(t)$ ve $B(t)$ matrislerinin transpozeleridir.

(3.3.4) formülünde yer alan $\gamma_s > 0$ parametresini belirlemek için

$$J_\alpha(u^{s+1}) < J_\alpha(u^s) \quad (3.3.9)$$

şartını kullanacağız. İterasyonu durdurmak için yani (3.3.4) yaklaşımlarının bulunmasını durdurmak için ise

$$\|u^{s+1} - u^s\|_{L_2^{(m)}(0,T)} < \varepsilon \quad (3.3.10)$$

şartından yararlanacağız. Burada ε önceden verilen pozitif bir sayıdır.

$\forall \alpha > 0$ için gradyent izdüşüm yöntemi ile inşa edilen $\{u^k\} \subset U$ dizisi bir minimalleştirici dizi olur ve $\alpha > 0$ için $J_\alpha(u)$ fonksiyoneli kuvvetli konveks fonksiyon olduğundan minimum noktasına yakınsamış olacaktır. Bu nedenle $\alpha > 0$ parametresini özel bir yöntemle seçmeye gerek yoktur. Sadece $\alpha > 0$ olarak 0'a yakın bir sayı olarak seçmemiz yeterlidir.

Şimdi (3.3.1)-(3.3.3) probleminin nümerik çözüm algoritmasını açıklayalım. Bunun için bir önceki alt bölümdeki sonlu farklar yöntemi uygulanmıştır. Bu yöntem kullanılarak (3.3.1)-(3.3.3) probleminin ayrık aynısı olan aşağıdaki optimal kontrol problemi elde edilmiştir. Farz edelim ki optimal kontrol problemi

$$I_N([u_N]) = \beta_0 \|x^N - y_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_1 \sum_{k=1}^N \|x^k - y_1^k\|_{\mathbb{R}^n}^2 \Delta t_k + \alpha \sum_{k=0}^{N-1} \|u_k - \omega_k\|_{\mathbb{R}^m}^2 \Delta t_k \quad (3.3.11)$$

fonksiyonunun

$$U_N = \left\{ [u_N] : [u]_N = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}), u_k \in \mathbb{R}^m, k = \overline{0, N-1}, \left(\sum_{k=0}^{N-1} \|u_k\|_{\mathbb{R}^m}^2 \Delta t_k \right)^{1/2} \leq b_0 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$x^{k+1} = x^k + \Delta t_k (A_k x^k + B_k u_k + f_k) \quad k = \overline{0, N-1} \quad (3.3.12)$$

$$x^0 = x_0 \quad (3.3.13)$$

şartları altında minimumunun bulunması problemidir.

Burada fonksiyonlar

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k, A_k = \{a_{ij}^k\}; a_{ij}^k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} a_{ij}(t) dt, i, j = \overline{1, n}, k = \overline{0, N-1},$$

$$B_k = \{b_{ir}^k\}; b_{ir}^k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_{ir}(t) dt, i = \overline{1, n}, r = \overline{1, m}, k = \overline{0, N-1},$$

$$f_k = (f_{1k}, f_{2k}, \dots, f_{nk}), f_{ik} = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_i(t) dt, i = \overline{1, n}, k = \overline{0, N-1},$$

$$y_0 = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}),$$

$$y_1^k = (y_{11}^k, y_{12}^k, \dots, y_{1n}^k), y_{1i}^k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} y_{1i}(t) dt, i = \overline{1, n}, k = \overline{1, N},$$

$$\omega_k = (\omega_{1k}, \omega_{2k}, \dots, \omega_{mk}), \omega_{rk} = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \omega_{rk}(t) dt, r = \overline{1, m}, k = \overline{0, N-1}$$

şeklinde tanımlanır.

(3.3.11)-(3.3.13) probleminin nümerik çözümünü gerçekleştirmek için gradyent indüşüm yönteminin ayırık aynısını uygulayacağız. Bu amaçla $[u]_N^{(0)} \in U_N$ başlangıç yaklaşımını seçelim ve aşağıdaki yineleme formülünü inşa edelim:

$$[u]_N^{(s+1)} = P_{U_N} \left([u]_N^{(s)} - \gamma_s I'_\alpha \left([u]_N^{(s)} \right) \right), \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3.14)$$

Buradan

$$[u]_N^{(s+1)} = b_0 \frac{[u]_N^{(s)} - \gamma_s I'_\alpha([u]_N^{(s)})}{\left(\sum_{k=0}^{N-1} \|u_k^{(s)} - \gamma_s I'_{\alpha k}([u]_N^{(s)})\|_{\mathbb{R}^m}^2 \Delta t_k \right)^{1/2}}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3.15)$$

dir.

İterasyonda $[u]_N^{(s+1)}$ kontrolü $k = \overline{0, N-1}$ için

$$[u]_N^{(s+1)} = \begin{cases} [u]_N^{(s)} - \gamma_s I'_\alpha([u]_N^{(s)}) & , \quad ([u]_N^{(s)} - \gamma_s I'_\alpha([u]_N^{(s)})) \in U \text{ ise} \\ b_0 \frac{[u]_N^{(s)} - \gamma_s I'_\alpha([u]_N^{(s)})}{\left(\sum_{k=0}^{N-1} \|u_k^{(s)} - \gamma_s I'_{\alpha k}([u]_N^{(s)})\|_{\mathbb{R}^m}^2 \Delta t_k \right)^{1/2}} & , \quad ([u]_N^{(s)} - \gamma_s I'_\alpha([u]_N^{(s)})) \notin U \text{ ise} \end{cases}$$

şartına göre seçilir.

$I'_\alpha([u]_N^{(s)})$ miktarı $I_\alpha([u]_N)$ fonksiyonelinin gradyentinin $[u]_N^{(s)} \in U_N$ noktasındaki değeridir ve aşağıdaki formüllerle tanımlanır:

$$I'_\alpha([u]_N^{(s)}) = \left(I'_{\alpha 0}([u]_N^{(s)}), \dots, I'_{\alpha N-1}([u]_N^{(s)}) \right), \quad (3.3.16)$$

$$I'_{\alpha k}([u]_N^{(s)}) = -B_k^T \psi_s^k + 2\alpha (u_k^{(s)} - w_k), \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (3.3.17)$$

Burada

$$\psi_s^k = \psi^k([u]_N^{(s)})$$

ağ fonksiyonu aşağıdaki eşlenik sistemin $[u]_N = [u]_N^{(s)} \in U_N$ noktasına karşılık gelen çözümdür:

$$\psi^k = \psi^{k+1} + \left(A_k^T \psi^{k+1} - 2\beta_1 (x^{k+1} - y_1^{k+1}) \right) \Delta t_k, \quad k = \overline{N-1, 0} \quad (3.3.18)$$

$$\psi^N = -2\beta_0 (x^N(T) - y_0). \quad (3.3.19)$$

(3.3.14)'te yer alan γ_s parametresini seçmek için

$$I_\alpha \left([u]_N^{(s+1)} \right) < I_\alpha \left([u]_N^{(s)} \right) \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3.20)$$

şartını kullanacağız. Ardışık yaklaşımların bulunmasının durdurulması için aşağıdaki kriterden yararlanacağız:

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1} \left\| u_k^{(s+1)} - u_k^{(s)} \right\|_{\mathbb{R}^m}^2 \right)^{1/2} < \varepsilon . \quad (3.3.21)$$

$\alpha > 0$ parametresini ise 0'a yeterince yakın olan pozitif bir sayı olarak seçeceğiz. Böylelikle (3.3.1)-(3.3.3) optimal kontrol problemini çözmek için her bir k adımda fonksiyonelin gradyentini bulmak için (3.3.2)-(3.3.3) Cauchy problemini çözmemiz gerekmektedir. Böylelikle gradyentten yararlanarak gradyent izdüşüm yönteminin (3.3.1)-(3.3.3) optimal kontrol problemine uygulanması açıklandı.

3.4. Matlab Uygulamaları

Bu alt bölümde 3.1 alt başlığında verilen optimal kontrol problemi için örnek uygulamalar ele alınmıştır. 3.2 alt başlıkta elde edilen ayrık optimal kontrol probleminin sayısal örnekleri, 3.3 alt başlığında uygulanan Gradyent izdüşüm metodu ile Matlab R2016a programında, [54, 55] kaynaklarından yararlanarak inşa ettiğimiz çözüm algoritması ile çözülmüştür. Matlab çözüm algoritmaları Ekler başlığında verilmiştir.

3.4.1. Örnek Uygulama 1

Aşağıdaki optimal kontrol problemini ele alalım:

$$J_\alpha(u) = \left\| \begin{pmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 501 \\ 501 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}^2 + \left\| \begin{pmatrix} x_1(t, u) \\ x_2(t, u) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 500 + t^2 \\ 500 + t \end{pmatrix} \right\|_{L_2^{(2)}(0,1)}^2 + \\ + 0,01 \left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 + t \\ 50 + t \end{pmatrix} \right\|_{L_2^{(2)}(0,1)}^2 \quad (3.4.1)$$

fonksiyonelinin

$$U = \left\{ u = u(t) : u \in L_2^{(2)}(0,1), \|u\|_{L_2^{(2)}(0,1)} \leq b_0 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 & t-1 \\ t-1 & t+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t^3 - 2t^2 - 997t - 100 \\ -t^3 - 1001t - 99 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.4.2)$$

$$x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix} \quad (3.4.3)$$

şartları altında minimumunu bulalım. (3.3.1)-(3.3.3) ve (3.4.1)-(3.4.3) optimal kontrol problemleri karşılaştırıldığında $t \in [0,1]$ olup $T=1$ 'dir. $n, m=2$ olup

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

dir.

$$y_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 501 \\ 501 \end{pmatrix}$$

ve

$$y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 + t^2 \\ 500 + t \end{pmatrix}$$

olup

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 + t \\ 50 + t \end{pmatrix}$$

dir. $\beta_0 = \beta_1 = 1$ ve $\alpha = 0.01$ dir. Olası kontroller kümesi $\|u\|_{L_2^{(2)}(0,T)} \leq b_0$ ile sınırlandırılmış olup gerçek çözüme uygun b_0 'ın farklı değerleri ile ilgilenilecektir. Cauchy problemine baktığımızda

$$A(t) = \begin{pmatrix} t+1 & t-1 \\ t-1 & t+1 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } f(t) = \begin{pmatrix} -t^3 - 2t^2 - 997t - 100 \\ -t^3 - 1001t - 99 \end{pmatrix}$$

olup, başlangıç çözümlümüz ise

$$x(t_0) = x(0) = \begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix}$$

olur.

Şimdi (3.4.1)-(3.4.3) optimal kontrol probleminin ayrık aynısını yazalım. Bunun için (3.3.11)-(3.3.13) ayrık optimal kontrol problemindeki değişken ve sabit değerlerin yerlerine (3.4.1)-(3.4.3) optimal kontrol probleminde olan değerleri yazabiliriz. Buradan (3.4.1)-(3.4.3) optimal kontrol probleminin ayrık aynısı:

$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ olmak üzere

$$I_N([u_N]) = \left\| \begin{pmatrix} x_1^N \\ x_2^N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 501 \\ 501 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{11}^k \\ y_{12}^k \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}^2 \Delta t_k + 0,01 \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega_{1k} \\ \omega_{2k} \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}^2 \Delta t_k \quad (3.4.4)$$

fonksiyonelinin

$$U_N = \left\{ [u_N] : [u]_N = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}), u_k \in \mathbb{R}^2, k = \overline{0, N-1}, \left(\sum_{k=0}^{N-1} \|u_k\|_{\mathbb{R}^2}^2 \Delta t_k \right)^{1/2} \leq b_0 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} + \Delta t_k \left(\begin{pmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}^k & b_{12}^k \\ b_{21}^k & b_{22}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \end{pmatrix} \right), \quad (3.4.5)$$

$$k = \overline{0, N-1}$$

$$x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix}. \quad (3.4.6)$$

şartları altında minimumunun bulunması problemidir. (3.4.5)-(3.4.6) Cauchy probleminde

$$a_{11}^k = a_{22}^k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t+1) dt, \quad a_{21}^k = a_{12}^k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t-1) dt, \quad b_{11}^k = b_{22}^k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt,$$

$$b_{21}^k = b_{12}^k = 0, \quad f_{1k} = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (-t^3 - 2t^2 - 997t - 100) dt, \quad f_{2k} = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (-t^3 - 1001t - 99) dt,$$

$k = \overline{0, N-1}$ 'dir.

(3.4.4) fonksiyoneliinde ise

$$y_{11}^k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (500 + t^2) dt, \quad y_{12}^k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (500 + t) dt, \quad k = \overline{1, N}, \quad \omega_1^k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (50 + t) dt \quad \text{ve}$$

$$\omega_2^k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (50 + t) dt, \quad k = \overline{0, N-1} \quad \text{'dir.}$$

Şimdi (3.4.4)-(3.4.6) ayrık optimal kontrol problemini N , b_0 ve u^0 'ın farklı değerleri için çözebiliriz..

Örnek 1. $N=10$, $b_0 = 200$ ve $u_i^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $i = \overline{1, N}$ başlangıç kontrolü için (3.3.4)-(3.3.6)

optimal kontrol problemini çözelim. (3.3.15) gradyent izdüşüm formülünde yer alan $\gamma_0 = 1$ ve ardışık yaklaşımların durdurulması şartını sağlayan (3.3.21) formülünde yer alan $\varepsilon = 0.001$ seçelim. Bu veriler doğrultusunda Matlab R2016a programında 5346. iterasyonda aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

$$u^* = \begin{pmatrix} 100.38 & 100.63 & 100.67 & 100.64 & 100.6 & 100.54 & 100.35 & 99.657 & 97.577 & 92.203 \\ 100.28 & 100.7 & 100.81 & 100.78 & 100.72 & 100.63 & 100.39 & 99.639 & 97.478 & 91.984 \end{pmatrix}$$

optimal kontrolü elde edilmiştir. Bilinen gerçek çözümle bulunan bu değerlerin bağlı hatası yüzde olarak aşağıdaki gibidir:

$$B.hata = \begin{pmatrix} 0.0038 & 0.0063 & 0.0067 & 0.0064 & 0.006 & 0.0054 & 0.0035 & 0.00343 & 0.02423 & 0.07797 \\ 0.0028 & 0.007 & 0.0081 & 0.0078 & 0.0072 & 0.0063 & 0.0039 & 0.00361 & 0.02522 & 0.08016 \end{pmatrix}$$

Elde edilen sonuç kabul edilebilir hataya sahiptir. Bu optimal kontrole karşılık Cauchy probleminin çözümü

$$x^* = \begin{pmatrix} 500 & 500.05 & 500.15 & 500.28 & 500.42 & 500.59 & 500.79 & 501 & 501.18 & 501.19 & 500.65 \\ 500 & 500.12 & 500.29 & 500.47 & 500.65 & 500.84 & 501.03 & 501.22 & 501.36 & 501.29 & 500.65 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilmiştir. İşlem sonucunda

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1} \|u_k^{(s+1)} - u_k^{(s)}\|_{\mathbb{R}^m}^2 \right)^{1/2} = 0.00099999 < 0.001$$

olup, ε değerinden küçüktür ve (3.3.21) şartı sağlanarak iterasyon durmuştur.

(3.3.20) eşitsizliğini sağlamak için bu şartın sağlanmadığı her durumda $\gamma_{s+1} = \frac{\gamma_s}{10}$

alınmıştır ve işlemler sonucunda $\gamma_s = 0.01$ değerine ulaşmıştır. Bulduğumuz u^* optimal kontrolünün normu

$$\left(\sum_{k=0}^9 \|u^{k*}\|_{\mathbb{R}^2}^2 \Delta t_k \right)^{1/2} = 140.52$$

olup, sınırı $b_0 = 200$ olan olası kontrol kümemizin içindedir. Sonuç olarak da (3.3.11) eşitliğindeki $I_N^*([u_N])$ fonksiyonumuzun değeri $I_N^*([u_N]) = 48.396$ 'dır. Örnek 1 için tüm işlemler toplam 9717.600 saniye sürmüştür.

Şimdi bu sonuçları bilinen gerçek sonuçlar ile karşılaştıralım.

Bilinen $u^* = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ optimal kontrolüne karşılık gelen Cauchy probleminin çözümü

$x^* = \begin{pmatrix} 500 + t^2 \\ 500 + t \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$ ve optimal kontrolümüzün normu $\|u^*\|_{L_2^2(0,T)} \cong 141.421$ 'dir.

(3.3.1) fonksiyonumuzun bilinen minimum değeri

$$J^*(u) = \left\| \begin{pmatrix} 501 \\ 501 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 501 \\ 501 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}^2 + \left\| \begin{pmatrix} 500 + t^2 \\ 500 + t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 500 + t^2 \\ 500 + t \end{pmatrix} \right\|_{L_2^2(0,1)}^2 + 0.01 \left\| \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 + t \\ 50 + t \end{pmatrix} \right\|_{L_2^2(0,1)}^2 = 49.007$$

dir. Bulduğumuz $I_N^*([u_N]) = 48.396$ değeri $J^*(u)$ fonksiyonelin gerçek çözümüne oldukça yakındır ve fark $|J^*(u) - I_N^*([u_N])| = 0.611$ 'dir.

Örnek 2: Aşağıdaki tabloda Örnek 1’de verilen problem için yeni değişken ve sabitlerin değerleri yer almaktadır.

$[0, T]$	N	β_0	β_1	α	γ	b_0	ε	y_0	$y_1(t)$	$\omega(t)$
$[0, 1]$	10	1	1	0.01	1	200	0.001	$\begin{pmatrix} 501 \\ 501 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t^2 + 500 \\ t + 500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50 + t \\ 50 + t \end{pmatrix}$
$A(t)$		$B(t)$			$f(t)$				x_0	
$\begin{pmatrix} t+1 & t-1 \\ t-1 & t+1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} -t^3 - 2*t^2 - 997*t - 100 \\ -t^3 - 1001*t - 99 \end{pmatrix}$				$\begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix}$	
u^0										
$\begin{pmatrix} 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 \\ 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 \end{pmatrix}$										

Bu değerleri çözüm algoritmamızda yerine koyduğumuzda 8064.773 sn’de 4005. iterasyonda optimal çözüme ulaşmaktayız. Sonuç değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

γ	$\min I_N$	$\left(\sum_{k=0}^9 \ [u]_N^* \ _{\mathbb{R}^2}^2 \Delta t_k \right)^{1/2}$	ε
0.01	48.412	140.63	0.00099963
$[u]_N^*$			
$\begin{pmatrix} 100.6 & 100.73 & 100.76 & 100.69 & 100.5 & 100.14 & 99.552 & 98.637 & 97.274 & 95.317 \\ 100.51 & 100.79 & 100.88 & 100.83 & 100.62 & 100.23 & 99.591 & 98.616 & 97.176 & 95.112 \end{pmatrix}$			
x^{k*}			
$\begin{pmatrix} 500 & 500.07 & 500.18 & 500.32 & 500.47 & 500.64 & 500.8 & 500.93 & 501 & 500.94 & 500.67 \\ 500 & 500.15 & 500.32 & 500.51 & 500.7 & 500.88 & 501.04 & 501.15 & 501.18 & 501.05 & 500.68 \end{pmatrix}$			

Bu tabloya göre bulduğumuz optimal kontrol değeri bilinen gerçek optimal kontrol değerine kabul edilebilir ölçüde yakındır.

Bağıl hata = $100 * u^* - [u]_N^* / u^*$
$\begin{pmatrix} 0.0060 & 0.0073 & 0.0076 & 0.0069 & 0.005 & 0.0014 & 0.0045 & 0.0136 & 0.0273 & 0.0468 \\ 0.0051 & 0.0079 & 0.0088 & 0.0083 & 0.0062 & 0.0023 & 0.0041 & 0.0138 & 0.0282 & 0.0489 \end{pmatrix}$

Bulunan bu optimal kontrol değerine karşılık elde edilen Cauchy probleminin çözümü de gerçek durum değerlerine göre kabul edilebilir ölçüdedir.

$ x^* - x_k^* $
$\begin{pmatrix} 0 & 0.67 & 0.16 & 0.26 & 0.35 & 0.44 & 0.5 & 0.51 & 0.44 & 0.22 & 0.23 \\ 0 & 0.1 & 0.17 & 0.26 & 0.35 & 0.43 & 0.49 & 0.5 & 0.43 & 0.2 & 0.27 \end{pmatrix}$

Gerçek minimum değeri bilinen $J^*(u)$ fonksiyoneli ile bu optimal kontrol ve Cauchy probleminin çözümüne göre elde ettiğimiz $I_N^*([u_N])$ fonksiyonelimizin farkı $|J^*(u) - I_N^*([u_N])| = |49.007 - 48.412| = 0.595$ 'dir. Bulduğumuz bu minimum değer gerçek değer in yaklaşık %1.21 altında olup kabul edilebilirdir.

Örnek 3: Aşağıdaki tabloda Örnek 2'de verilen problem için $b_0 = 150$ alınmış ve yeni başlangıç kontrolü u^0 değerleri yer almaktadır.

$[0, T]$	N	β_0	β_1	α	γ	b_0	ε	y_0	$y_1(t)$	$\omega(t)$
$[0, 1]$	10	1	1	0.01	1	150	0.001	$\begin{pmatrix} 501 \\ 501 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t^2 + 500 \\ t + 500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50 + t \\ 50 + t \end{pmatrix}$
$A(t)$		$B(t)$			$f(t)$				x_0	
$\begin{pmatrix} t + 1 & t - 1 \\ t - 1 & t + 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} -t^3 - 2*t^2 - 997*t - 100 \\ -t^3 - 1001*t - 99 \end{pmatrix}$				$\begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix}$	
u^0										
$\begin{pmatrix} 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 \end{pmatrix}$										

Bu değerleri özüm algoritmamızda yerine koyduğumuzda 9509.496 sn'de 5095. iterasyonda optimal özümüne ulaşmaktayız. Sonuç değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

γ	$\min I_N$	$\left(\sum_{k=0}^9 \ [u]_N^*\ _{\mathbb{R}^2}^2 \Delta t_k \right)^{1/2}$	ε
0.01	48.396	140.52	0.00099991
$[u]_N^*$			
$\begin{pmatrix} 100.37 & 100.62 & 100.67 & 100.66 & 100.62 & 100.56 & 100.35 & 99.622 & 97.517 & 92.249 \\ 100.27 & 100.69 & 100.8 & 100.8 & 100.74 & 100.65 & 100.39 & 99.604 & 97.418 & 92.033 \end{pmatrix}$			
x^{k*}			
$\begin{pmatrix} 500 & 500.05 & 500.15 & 500.27 & 500.42 & 500.59 & 500.79 & 500.01 & 501.18 & 501.18 & 500.65 \\ 500 & 500.12 & 500.28 & 500.46 & 500.65 & 500.84 & 501.04 & 501.23 & 501.36 & 501.29 & 500.65 \end{pmatrix}$			

Bu tabloya göre bulduğumuz optimal kontrol değeri bilinen gerçek optimal kontrol değerine kabul edilebilir ölçüde yakındır.

Bağıl hata = $100 * u^* - [u]_N^* / u^*$
$\begin{pmatrix} 0.0037 & 0.0062 & 0.0067 & 0.0066 & 0.0062 & 0.0056 & 0.0035 & 0.0138 & 0.0248 & 0.0775 \\ 0.0027 & 0.0069 & 0.008 & 0.008 & 0.0074 & 0.0065 & 0.0039 & 0.014 & 0.0258 & 0.0797 \end{pmatrix}$

Bulunan bu optimal kontrol değerine karşılık elde edilen Cauchy probleminin çözümü de gerçek durum değerlerine göre kabul edilebilir ölçüdedir.

$ x^* - x_k^* $
$\begin{pmatrix} 0 & 0.05 & 0.13 & 0.21 & 0.3 & 0.39 & 0.49 & 0.59 & 0.62 & 0.46 & 0.25 \\ 0 & 0.07 & 0.13 & 0.21 & 0.3 & 0.39 & 0.49 & 0.58 & 0.61 & 0.44 & 0.3 \end{pmatrix}$

Gerçek minimum değeri bilinen $J^*(u)$ fonksiyoneli ile bu optimal kontrol ve Cauchy probleminin çözümüne göre elde ettiğimiz $I_N^*([u_N])$ fonksiyonelimizin farkı

$|J^*(u) - I_N^*([u_N])| = |49.007 - 48.396| = 0.611$ 'dir. Bulduğumuz bu minimum değer gerçek değerın yaklaşık %1.25 altında olup kabul edilebilirdir.

Örnek 4: Şimdi Örnek 1'de verilen problem için bölüntü sayısını $N = 20$, olası kontroller kümesi sınırını $b_0 = 200$ ve yeni başlangıç kontrolü u^0 'ı aşağıdaki tabloda olduğu gibi alalım.

$[0, T]$	N	β_0	β_1	α	γ	b_0	ε	y_0	$y_1(t)$	$\omega(t)$
$[0, 1]$	20	1	1	0.01	1	150	0.001	$\begin{pmatrix} 501 \\ 501 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t^2 + 500 \\ t + 500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50 + t \\ 50 + t \end{pmatrix}$
$A(t)$		$B(t)$			$f(t)$				x_0	
$\begin{pmatrix} t + 1 & t - 1 \\ t - 1 & t + 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} -t^3 - 2*t^2 - 997*t - 100 \\ -t^3 - 1001*t - 99 \end{pmatrix}$				$\begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix}$	
$u_{(2*20)}^0$										
$\begin{pmatrix} 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 & 120 \\ 120 & 120 \end{pmatrix}$										

Bu değerleri çözüm algoritmamızda yerine koyduğumuzda 5151. iterasyonda optimal çözüme ulaşmaktayız. Sonuç değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

γ	$\min I_N$	$\left(\sum_{k=0}^9 \ [u]_N^* \ _{\mathbb{R}^2}^2 \Delta t_k \right)^{1/2}$	ε
0.01	48.326	140.51	0.00099982
$[u]_N^*$			
$\begin{pmatrix} 100.69 & 100.75 & 100.79 & 100.81 & 100.82 & 100.8 & 100.76 & 100.7 & 100.61 & 100.49 \\ 100.61 & 100.74 & 100.82 & 100.87 & 100.88 & 100.87 & 100.83 & 100.77 & 100.68 & 100.55 \\ \\ 100.33 & 100.12 & 99.829 & 99.453 & 98.962 & 98.323 & 97.499 & 96.439 & 95.086 & 93.366 \\ 100.38 & 100.15 & 99.852 & 99.463 & 98.957 & 98.301 & 97.456 & 96.372 & 94.987 & 93.228 \end{pmatrix}$			
x^{k*}			

500	500.04	500.08	500.14	500.2	500.27	500.34	500.42	500.5	500.59	500.68
500	500.08	500.17	500.26	500.35	500.44	500.54	500.64	500.74	500.83	500.93
500.77	500.86	500.94	501.02	501.07	501.1	501.09	501.03	500.89	500.65	
501.02	501.1	501.17	501.23	501.27	501.27	501.23	501.13	500.95	500.66	

Bu tabloya göre bulduğumuz optimal kontrol değeri bilinen gerçek optimal kontrol değerine kabul edilebilir ölçüde yakındır.

Bağıl hata = $100 * u^* - [u]_N^* / u^*$										
0.0069	0.0075	0.0079	0.0081	0.0082	0.0080	0.0076	0.0070	0.0061	0.0049	
0.0061	0.0074	0.0082	0.0087	0.0088	0.0087	0.0083	0.0077	0.0068	0.0055	
0.0033	0.0012	0.0017	0.0055	0.0104	0.0168	0.025	0.0356	0.0491	0.0663	
0.0038	0.0015	0.00149	0.0054	0.0104	0.017	0.0254	0.0363	0.0501	0.0677	

Bulunan bu optimal kontrol değerine karşılık elde edilen Cauchy probleminin çözümü de gerçek durum değerlerine göre kabul edilebilir ölçüdedir.

$ x^* - x_k^* $										
0	0.0392	0.0742	0.1242	0.1692	0.2192	0.2642	0.3142	0.3592	0.4092	0.4542
0	0.0550	0.0950	0.1350	0.1750	0.215	0.265	0.315	0.365	0.4050	0.4550
0.4942	0.5292	0.5492	0.5642	0.5442	0.4992	0.4092	0.2642	0.0342	0.3008	
0.4950	0.5250	0.5450	0.5550	0.5450	0.4950	0.4050	0.2550	0.0250	0.3150	

Gerçek minimum değeri bilinen $J^*(u)$ fonksiyoneli ile bu optimal kontrol ve Cauchy probleminin çözümüne göre elde ettiğimiz $I_N^*([u_N])$ fonksiyonelimizin farkı $|J^*(u) - I_N^*([u_N])| = |49.007 - 48.326| = 0.681$ 'dir. Bulduğumuz bu minimum değer gerçek değer in yaklaşık %1.39 altında olup kabul edilebilirdir.

Örnek 5: Aşağıdaki tabloda Örnek 'de verilen problem için $[0, T]$ zaman aralığını $[0, 2]$, olası kontroller kümesi sınırını $b_0 = 200$ ve yeni başlangıç kontrolü u^0 'ı aşağıdaki tabloda olduğu gibi alalım.

$[0, T]$	N	β_0	β_1	α	γ	b_0	ε	y_0	$y_1(t)$	$\omega(t)$
$[0, 2]$	10	1	1	0.01	1	230	0.001	$\begin{pmatrix} 501 \\ 501 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t^2 + 500 \\ t + 500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50 + t \\ 50 + t \end{pmatrix}$
$A(t)$		$B(t)$			$f(t)$				x_0	
$\begin{pmatrix} t+1 & t-1 \\ t-1 & t+1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} -t^3 - 2*t^2 - 997*t - 100 \\ -t^3 - 1001*t - 99 \end{pmatrix}$				$\begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix}$	
u^0										
$\begin{pmatrix} 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 \end{pmatrix}$										

Bu değerleri çözüm algoritmamızda yerine koyduğumuzda 83496.668 sn'de 24329. iterasyonda optimal çözüme ulaşmaktayız. Sonuç değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

γ	$\min I_N$	$\left(\sum_{k=0}^9 \ [u]_N^*\ _{\mathbb{R}^2}^2 \Delta t_k \right)^{1/2}$	ε
0.001	93.729	194.5	0.00099993
$[u]_N^*$			
$\begin{pmatrix} 99.866 & 100.58 & 100.66 & 100.68 & 100.77 & 100.75 & 100.18 & 98.016 & 91.888 & 76.208 \\ 99.846 & 100.81 & 100.87 & 100.77 & 100.70 & 100.55 & 99.921 & 97.974 & 92.789 & 79.836 \end{pmatrix}$			
x^{k*}			
$\begin{pmatrix} 500 & 500.03 & 500.27 & 500.60 & 501.05 & 501.64 & 502.42 & 503.36 & 504.26 & 504.32 & 501.03 \\ 500 & 500.15 & 500.48 & 500.85 & 501.24 & 501.7 & 502.27 & 502.95 & 503.58 & 503.54 & 500.78 \end{pmatrix}$			

Bulduğumuz optimal $[u]_N^*$ kontrolüne karşılık elde ettiğimiz optimal durum

$$x^{k*} = \begin{pmatrix} 500 & 500.013 & 500.093 & 500.253 & 500.493 & 500.813 & 501.213 & 501.693 & 502.253 & 502.893 & 503.613 \\ 500 & 500.100 & 500.300 & 500.500 & 500.700 & 500.900 & 501.100 & 501.300 & 501.500 & 501.700 & 501.900 \end{pmatrix}$$

dır ve olası kontrol kümesinin bilinen sınırı $b_0 = 200$ 'dür.

Bu tabloya göre bulduğumuz optimal kontrol değeri bilinen gerçek optimal kontrol değerine kabul edilebilir ölçüde yakındır.

Bağıl hata = $100 * u^* - [u]_N^* / u^*$									
$\begin{pmatrix} 0.0013 & 0.0058 & 0.0066 & 0.0068 & 0.0077 & 0.0075 & 0.0018 & 0.0198 & 0.0811 & 0.02379 \\ 0.0015 & 0.0081 & 0.0087 & 0.0077 & 0.0070 & 0.0055 & 0.0008 & 0.0203 & 0.0721 & 0.02016 \end{pmatrix}$									

Bulunan bu optimal kontrol değerine karşılık elde edilen Cauchy probleminin çözümü de gerçek durum değerlerine göre kabul edilebilir ölçüdedir.

$ x^* - x_k^* $										
$\begin{pmatrix} 0 & 0.017 & 0.177 & 0.347 & 0.557 & 0.827 & 1.207 & 1.667 & 2.007 & 1.427 & 2.583 \\ 0 & 0.050 & 0.180 & 0.350 & 0.540 & 0.800 & 1.170 & 1.650 & 2.080 & 1.840 & 1.120 \end{pmatrix}$										

Gerçek minimum değeri $J^*(u) = 96.0533$ olan fonksiyonel ile bu optimal kontrol ve Cauchy probleminin çözümüne göre elde ettiğimiz $I_N^*([u_N])$ fonksiyonelimizin farkı $|J^*(u) - I_N^*([u_N])| = |96.0533 - 93.729| = 2.3243$ 'tür. Bulduğumuz bu minimum değer gerçek değer in yaklaşık %2.42 altında olup kabul edilebilirdir.

Örnek 6: Aşağıdaki tabloda (3.3.11)-(3.3.13) optimal kontrol problemi için değişken ve sabitlerin değerleri yer almaktadır.

$[0, T]$	N	β_0	β_1	α	γ	b_0	ε	y_0	$y_1(t)$	$\omega(t)$
$[0, 1]$	5	1	1	0.01	1	200	0.001	$\begin{pmatrix} 501 \\ 501 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t^2 + 500 \\ t + 500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50 + t \\ 50 + t \end{pmatrix}$
$A(t)$		$B(t)$			$f(t)$				x_0	

$\begin{pmatrix} t+1 & t-1 \\ t-1 & t+1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -t^3 - 2*t^2 - 997*t - 100 \\ -t^3 - 1001*t - 99 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix}$
u^0			
$\begin{pmatrix} 120 & 120 & 120 & 120 & 120 \\ 120 & 120 & 120 & 120 & 120 \end{pmatrix}$			

Bu değerleri çözüm algoritmamızda yerine koyduğumuzda 1345.532 sn'de 1776. iterasyonda optimal çözüme ulaşmaktayız. Sonuç değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

γ	$\min I_N$	$\left(\sum_{k=0}^9 \ [u]_N^* \ _{\mathbb{R}^2}^2 \Delta t_k \right)^{1/2}$	ε
0.01	48.623	140.89	0.00099958
$[u]_N^*$			
$\begin{pmatrix} 100.47 & 100.56 & 100.17 & 99.185 & 97.566 \\ 100.43 & 100.79 & 100.38 & 99.233 & 97.356 \end{pmatrix}$			
x^{k*}			
$\begin{pmatrix} 500 & 500.15 & 500.4 & 500.66 & 500.82 & 500.7 \\ 500 & 500.27 & 500.61 & 500.9 & 501 & 500.71 \end{pmatrix}$			

Bu tabloya göre bulduğumuz optimal kontrol değeri bilinen gerçek optimal kontrol değerine kabul edilebilir ölçüde yakındır.

Bağıl hata = $100 * u^* - [u]_N^* / u^*$
$\begin{pmatrix} 0.0047 & 0.0056 & 0.0017 & 0.00815 & 0.02434 \\ 0.0043 & 0.0079 & 0.0038 & 0.00767 & 0.02644 \end{pmatrix}$

Bulunan bu optimal kontrol değerine karşılık elde edilen Cauchy probleminin çözümü de gerçek durum değerlerine göre kabul edilebilir ölçüdedir.

$ x^* - x_k^* $

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.14 & 0.31 & 0.41 & 0.33 & 0.11 \\ 0 & 0.16 & 0.31 & 0.4 & 0.3 & 0.19 \end{pmatrix}$$

Gerçek minimum değeri bilinen $J^*(u)$ fonksiyoneli ile bu optimal kontrol ve Cauchy probleminin çözümüne göre elde ettiğimiz $I_N^*([u_N])$ fonksiyonelimizin farkı $|J^*(u) - I_N^*([u_N])| = |49.007 - 48.623| = 0.384$ 'tür. Bulduğumuz bu minimum değer gerçek değerlerin yaklaşık %0.78 altında olup kabul edilebilirdir.

Örnek 7: Örnek 6'da verilen problemimizde $b_0 = 200$ olası kontroller kümemizin sınırını $b_0 = 150$ olarak değiştirelim ve u_0 başlangıç kontrolümüzü tablodaki gibi değiştirelim. Bu değişiklikler ile birlikte (3.3.11)-(3.3.13) optimal kontrol problemi için değişken ve sabitlerin değerleri aşağıdaki tabloda yer almaktadır:

$[0, T]$	N	β_0	β_1	α	γ	b_0	ε	y_0	$y_1(t)$	$\omega(t)$
$[0, 1]$	5	1	1	0.01	1	150	0.001	$\begin{pmatrix} 501 \\ 501 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t^2 + 500 \\ t + 500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50 + t \\ 50 + t \end{pmatrix}$
$A(t)$		$B(t)$			$f(t)$				x_0	
$\begin{pmatrix} t+1 & t-1 \\ t-1 & t+1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} -t^3 - 2*t^2 - 997*t - 100 \\ -t^3 - 1001*t - 99 \end{pmatrix}$				$\begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix}$	
u^0										
$\begin{pmatrix} 50 & 50 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & 50 & 50 & 50 \end{pmatrix}$										

Bu değerleri çözüm algoritmamızda yerine koyduğumuzda 2550.142 sn'de 3034. iterasyonda optimal çözüme ulaşmaktayız. Sonuç değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

γ	$\min I_N$	$\left(\sum_{k=0}^9 \ [u]_N^*\ _{\mathbb{R}^2}^2 \Delta t_k \right)^{1/2}$	ε
0.01	48.387	140.73	0.00099961

$[u]_N^*$
$\begin{pmatrix} 100.11 & 100.66 & 100.83 & 100.26 & 95.466 \\ 100.05 & 100.91 & 101.05 & 99.31 & 95.231 \end{pmatrix}$
x^{k*}
$\begin{pmatrix} 500 & 500.08 & 500.34 & 500.72 & 501.11 & 500.67 \\ 500 & 500.19 & 500.55 & 500.96 & 501.29 & 500.68 \end{pmatrix}$

Bu tabloya göre bulduğumuz optimal kontrol değeri bilinen gerçek optimal kontrol değerine kabul edilebilir ölçüde yakındır.

Bağıl hata = $100 * u^* - [u]_N^* / u^*$
$\begin{pmatrix} 0.0011 & 0.0066 & 0.0083 & 0.0026 & 0.04534 \\ 0.0005 & 0.0091 & 0.0105 & 0.0069 & 0.04769 \end{pmatrix}$

Bulunan bu optimal kontrol değerine karşılık elde edilen Cauchy probleminin çözümü de gerçek durum değerlerine göre kabul edilebilir ölçüdedir.

$ x^* - x_k^* $
$\begin{pmatrix} 0 & 0.0667 & 0.2467 & 0.4667 & 0.6167 & 0.1433 \\ 0 & 0.0900 & 0.2500 & 0.4600 & 0.5900 & 0.2200 \end{pmatrix}$

Gerçek minimum değeri bilinen $J^*(u)$ fonksiyoneli ile bu optimal kontrol ve Cauchy probleminin çözümüne göre elde ettiğimiz $I_N^*([u_N])$ fonksiyonelimizin farkı $|J^*(u) - I_N^*([u_N])| = |49.007 - 48.387| = 0.62$ 'dir. Bulduğumuz bu minimum değer gerçek değer yaklaşık %1.27 altında olup kabul edilebilirdir.

Örnek 8: Örnek 6'da verilen problemimizde $b_0 = 200$ olası kontroller kümemizin sınırını aynen alalım ve u_0 başlangıç kontrolümüzü tablodaki gibi değiştirelim. Bu değişiklikler

ile birlikte (3.3.11)-(3.3.13) optimal kontrol problemi için değişken ve sabitlerin değerleri aşağıdaki tabloda yer almaktadır:

$[0, T]$	N	β_0	β_1	α	γ	b_0	ε	y_0	$y_1(t)$	$\omega(t)$
$[0, 1]$	5	1	1	0.01	1	200	0.001	$\begin{pmatrix} 501 \\ 501 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t^2 + 500 \\ t + 500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50 + t \\ 50 + t \end{pmatrix}$
$A(t)$		$B(t)$			$f(t)$				x_0	
$\begin{pmatrix} t+1 & t-1 \\ t-1 & t+1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} -t^3 - 2*t^2 - 997*t - 100 \\ -t^3 - 1001*t - 99 \end{pmatrix}$				$\begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix}$	
u^0										
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$										

Bu değerleri çözüm algoritmamızda yerine koyduğumuzda 3237.844 sn'de 3040. iterasyonda optimal çözüme ulaşmaktayız. Sonuç değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

γ	$\min I_N$	$\left(\sum_{k=0}^9 \ [u]_N^* \ _{\mathbb{R}^2}^2 \Delta t_k \right)^{1/2}$	ε
0.01	48.389	140.73	0.0009995
$[u]_N^*$			
$\begin{pmatrix} 100.11 & 100.64 & 100.81 & 100.3 & 95.458 \\ 100.05 & 100.9 & 101.03 & 100.35 & 95.22 \end{pmatrix}$			
x^{k*}			
$\begin{pmatrix} 500 & 500.08 & 500.33 & 500.72 & 501.11 & 500.67 \\ 500 & 500.19 & 500.54 & 500.95 & 501.3 & 500.68 \end{pmatrix}$			

Bu tabloya göre bulduğumuz optimal kontrol değeri Örnek 3 te bulduğumuz değerlerle neredeyse aynıdır ve problemin bilinen gerçek optimal kontrol değerine kabul edilebilir ölçüde yakındır.

Bağıl hata = $100 * u^* - [u]_N^* / u^*$
$\begin{pmatrix} 0.0011 & 0.0066 & 0.0083 & 0.0026 & 0.04534 \\ 0.0005 & 0.0091 & 0.0105 & 0.0069 & 0.04769 \end{pmatrix}$

Bulunan bu optimal kontrol değerine karşılık elde edilen Cauchy probleminin çözümü de gerçek durum değerlerine göre kabul edilebilir ölçüdedir.

$ x^* - x_k^* $
$\begin{pmatrix} 0 & 0.0667 & 0.2467 & 0.4667 & 0.6167 & 0.1433 \\ 0 & 0.0900 & 0.2500 & 0.4600 & 0.5900 & 0.2200 \end{pmatrix}$

Gerçek minimum değeri bilinen $J^*(u)$ fonksiyoneli ile bu optimal kontrol ve Cauchy probleminin çözümüne göre elde ettiğimiz $I_N^*([u_N])$ fonksiyonelimizin farkı $|J^*(u) - I_N^*([u_N])| = |49.007 - 48.389| = 0.618$ 'dir. Bulduğumuz bu minimum değer gerçek değerlerin yaklaşık %1.26 altında olup kabul edilebilirdir.

Örnek 9: Örnek 6'da verilen problemimizde $b_0 = 200$ olası kontroller kümemizin sınırını $b_0 = 200$ olarak değiştirelim ve u_0 başlangıç kontrolümüzü tablodaki gibi değiştirelim. Bu değişiklikler ile birlikte (3.3.11)-(3.3.13) optimal kontrol problemi için değişken ve sabitlerin değerleri aşağıdaki tabloda yer almaktadır:

$[0, T]$	N	β_0	β_1	α	γ	b_0	ε	y_0	$y_1(t)$	$\omega(t)$
$[0, 1]$	5	1	1	0.01	1	200	0.001	$\begin{pmatrix} 501 \\ 501 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t^2 + 500 \\ t + 500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50 + t \\ 50 + t \end{pmatrix}$
$A(t)$		$B(t)$			$f(t)$				x_0	
$\begin{pmatrix} t + 1 & t - 1 \\ t - 1 & t + 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} -t^3 - 2*t^2 - 997*t - 100 \\ -t^3 - 1001*t - 99 \end{pmatrix}$				$\begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix}$	

u^0
$\begin{pmatrix} 50 & 50 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & 50 & 50 & 50 \end{pmatrix}$

Bu değerleri özüm algoritmamızda yerine koyduğumuzda 3234.872 s'de 3020. iterasyonda optimal özümüne ulaşmaktayız. Sonuç değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

γ	$\min I_N$	$\left(\sum_{k=0}^9 \ [u]_N^*\ _{\mathbb{R}^2}^2 \Delta t_k \right)^{1/2}$	ε
0.01	48.386	140.73	0.00099957
$[u]_N^*$			
$\begin{pmatrix} 100.11 & 100.66 & 100.83 & 100.24 & 95.47 \\ 100.05 & 100.92 & 101.05 & 100.3 & 95.236 \end{pmatrix}$			
x^{A^*}			
$\begin{pmatrix} 500 & 500.08 & 500.34 & 500.72 & 501.11 & 500.67 \\ 500 & 500.19 & 500.55 & 500.96 & 501.29 & 500.68 \end{pmatrix}$			

Bu tabloya göre bulduğumuz optimal kontrol değeri Örnek 3'te bulduğumuz değerlerle neredeyse aynıdır ve problemin bilinen gerçek optimal kontrol değerine kabul edilebilir ölçüde yakındır.

Bağıl hata = $100 * u^* - [u]_N^* / u^*$
$\begin{pmatrix} 0.0011 & 0.0066 & 0.0083 & 0.0024 & 0.0453 \\ 0.0005 & 0.0092 & 0.0105 & 0.003 & 0.0476 \end{pmatrix}$

Bulunan bu optimal kontrol değerine karşılık elde edilen Cauchy probleminin çözümü de gerçek durum değerlerine göre kabul edilebilir ölçüdedir.

$ x^* - x_k^* $

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.0667 & 0.2467 & 0.4667 & 0.6167 & 0.1433 \\ 0 & 0.0900 & 0.2500 & 0.4600 & 0.5900 & 0.2200 \end{pmatrix}$$

Gerçek minimum değeri bilinen $J^*(u)$ fonksiyoneli ile bu optimal kontrol ve Cauchy probleminin çözümüne göre elde ettiğimiz $I_N^*([u_N])$ fonksiyonelimizin farkı $|J^*(u) - I_N^*([u_N])| = |49.007 - 48.386| = 0.621$ 'dir. Bulduğumuz bu minimum değer gerçek değerın yaklaşık %1.27 altında olup kabul edilebilirdir.

3.4.2. Örnek Uygulama 2

Aşağıdaki optimal kontrol problemini ele alalım:

$$J_\alpha(u) = \left\| \begin{pmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \\ x_3(T) \\ x_4(T) \\ x_5(T) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20001 \\ 15001 \\ 10001 \\ 25002 \\ 8001 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}^2 + \left\| \begin{pmatrix} x_1(t,u) \\ x_2(t,u) \\ x_3(t,u) \\ x_4(t,u) \\ x_5(t,u) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t^2 + 20000 \\ t + 15000 \\ 2t + 10000 \\ 2t^2 + 25000 \\ t + 8000 \end{pmatrix} \right\|_{L_2^{(2)}(0,1)}^2 +$$

$$+ 0,01 \left\| \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t + 5000 \\ t + 6500 \\ t + 5000 \\ t + 5000 \\ t + 5000 \end{pmatrix} \right\|_{L_2^{(2)}(0,1)}^2 \quad (3.4.7)$$

fonksiyonelinin

$$U = \left\{ u = u(t) : u \in L_2^{(5)}(0,1), \|u\|_{L_2^{(5)}(0,1)} \leq 60000 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 & t-1 & t-1 & t-1 & t-1 \\ t-1 & t+1 & t-1 & t-1 & t-1 \\ t-1 & t-1 & t+1 & t-1 & t-1 \\ t-1 & t-1 & t-1 & t+1 & t-1 \\ t-1 & t-1 & t-1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t;u) \\ x_2(t;u) \\ x_3(t;u) \\ x_4(t;u) \\ x_5(t;u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t^3 - 3t^2 - 77994t + 28000 \\ -3t^3 - t^2 - 77998t + 28001 \\ -3t^3 - t^2 - 78000t + 43002 \\ -3t^3 - 5t^2 - 77992t + 2000 \\ -3t^3 - t^2 - 77998t + 32001 \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1 \quad (3.4.8)$$

$$x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 20000 \\ 15000 \\ 10000 \\ 25000 \\ 8000 \end{pmatrix} \quad (3.4.9)$$

şartları altında minimumunu bulalım. (3.3.1)-(3.3.3) ve (3.4.7)-(3.4.9) optimal kontrol problemleri karşılaştırıldığında $t \in [0,1]$ olup $T = 1$ 'dir. $m, n = 5$ olup

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{pmatrix}$$

dir.

$$y_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ y_{03} \\ y_{04} \\ y_{05} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20001 \\ 15001 \\ 10001 \\ 25002 \\ 8001 \end{pmatrix}$$

ve

$$y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + 20000 \\ t + 15000 \\ 2t + 10000 \\ 2t^2 + 25000 \\ t + 8000 \end{pmatrix}$$

olup,

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + 5000 \\ t + 6500 \\ t + 5000 \\ t + 5000 \\ t + 5000 \end{pmatrix}$$

dir. $\beta_0 = \beta_1 = 1$ ve $\alpha = 0.01$ 'dir. Olası kontroller kümesi $\|u\|_{L^2(0,T)} \leq b_0 = 60000$ ile sınırlandırılmıştır. Cauchy problemine baktığımızda

$$A(t) = \begin{pmatrix} t+1 & t-1 & t-1 & t-1 & t-1 \\ t-1 & t+1 & t-1 & t-1 & t-1 \\ t-1 & t-1 & t+1 & t-1 & t-1 \\ t-1 & t-1 & t-1 & t+1 & t-1 \\ t-1 & t-1 & t-1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve}$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} -3t^3 - 3t^2 - 77994t + 28000 \\ -3t^3 - t^2 - 77998t + 28001 \\ -3t^3 - t^2 - 78000t + 43002 \\ -3t^3 - 5t^2 - 77992t + 2000 \\ -3t^3 - t^2 - 77998t + 32001 \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1$$

olup, başlangıç çözümümüz ise aşağıdaki gibidir:

$$x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 20000 \\ 15000 \\ 10000 \\ 25000 \\ 8000 \end{pmatrix}.$$

Bu optimal kontrol probleminin ayrık aynısı $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ olmak üzere

$$I_N([u_N]) = \left\| \begin{pmatrix} x_1^N \\ x_2^N \\ x_3^N \\ x_4^N \\ x_5^N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20001 \\ 15001 \\ 10001 \\ 25002 \\ 8001 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \\ x_5^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{11}^k \\ y_{12}^k \\ y_{13}^k \\ y_{14}^k \\ y_{15}^k \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}^2 \Delta t_k +$$

$$+ 0,01 \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ u_{3k} \\ u_{4k} \\ u_{5k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega_{1k} \\ \omega_{2k} \\ \omega_{3k} \\ \omega_{4k} \\ \omega_{5k} \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}^2 \Delta t_k \quad (3.4.10)$$

fonksiyonelinin

$$U_N = \left\{ [u_N] : [u]_N = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4), u_k \in \mathbb{R}^5, k = \overline{0,4}, \left(\sum_{k=0}^4 \|u_k\|_{\mathbb{R}^5}^2 \Delta t_k \right)^{1/2} \leq 60000 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ x_4^{k+1} \\ x_5^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \\ x_5^k \end{pmatrix} + \Delta t_k \begin{pmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k & a_{13}^k & a_{14}^k & a_{15}^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k & a_{23}^k & a_{24}^k & a_{25}^k \\ a_{31}^k & a_{32}^k & a_{33}^k & a_{34}^k & a_{35}^k \\ a_{41}^k & a_{42}^k & a_{43}^k & a_{44}^k & a_{45}^k \\ a_{51}^k & a_{52}^k & a_{53}^k & a_{54}^k & a_{55}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \\ x_5^k \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} b_{11}^k & b_{12}^k & b_{13}^k & b_{14}^k & b_{15}^k \\ b_{21}^k & b_{22}^k & b_{23}^k & b_{24}^k & b_{25}^k \\ b_{31}^k & b_{32}^k & b_{33}^k & b_{34}^k & b_{35}^k \\ b_{41}^k & b_{42}^k & b_{43}^k & b_{44}^k & b_{45}^k \\ b_{51}^k & b_{52}^k & b_{53}^k & b_{54}^k & b_{55}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ u_{3k} \\ u_{4k} \\ u_{5k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \\ f_{3k} \\ f_{4k} \\ f_{5k} \end{pmatrix}, k = \overline{0,4} \quad (3.4.11)$$

$$x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 20000 \\ 15000 \\ 10000 \\ 25000 \\ 8000 \end{pmatrix} \quad (3.4.12)$$

şartları altında minimumunun bulunması problemidir. (3.4.11)-(3.4.12) Cauchy probleminde

$$a_{11}^k = a_{22}^k = a_{33}^k = a_{44}^k = a_{55}^k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t+1) dt ,$$

$$a_{ij}^k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t-1) dt , i \neq j ,$$

$$b_{11}^k = b_{22}^k = b_{33}^k = b_{44}^k = b_{55}^k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt ,$$

$$b_{ij}^k = 0, i \neq j ,$$

$$\begin{pmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \\ f_{3k} \\ f_{4k} \\ f_{5k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (-3t^3 - 3t^2 - 77994t + 28000) dt \\ \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (-3t^3 - t^2 - 77998t + 28001) dt \\ \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (-3t^3 - t^2 - 78000t + 43002) dt \\ \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (-3t^3 - 5*t^2 - 77992t + 2000) dt \\ \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (-3t^3 - t^2 - 77998t + 32001) dt \end{pmatrix} , k = \overline{0, N-1}$$

dir.

(3.4.10) fonksiyonelinde ise

$$\begin{pmatrix} y_{11}^k \\ y_{12}^k \\ y_{13}^k \\ y_{14}^k \\ y_{15}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t^2 + 20000)dt \\ \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t + 15000)dt \\ \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (2t + 10000)dt \\ \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (2t^2 + 25000)dt \\ \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t + 8000)dt \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{pmatrix} \omega_1^k \\ \omega_2^k \\ \omega_3^k \\ \omega_4^k \\ \omega_5^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t + 5000)dt \\ \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t + 6500)dt \\ \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t + 5000)dt \\ \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t + 5000)dt \\ \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t + 5000)dt \end{pmatrix}, \quad k = \overline{0, N-1} \text{ dir.}$$

Şimdi (3.4.10)-(3.4.12) ayrık optimal kontrol problemini çözebiliriz.

Problemimizin bilinen gerçek çözümleri aşağıdaki gibidir:

$$u^* = \begin{pmatrix} 10000 \\ 20000 \\ 15000 \\ 26000 \\ 30000 \end{pmatrix},$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 20000 & 20000 & 20001 & 20002 & 20004 & 20006 \\ 15000 & 15001 & 15001 & 15002 & 15002 & 15003 \\ 10000 & 10001 & 10002 & 10003 & 10004 & 10005 \\ 25000 & 25000 & 25002 & 25004 & 25008 & 25013 \\ 08000 & 08001 & 08001 & 08002 & 08002 & 08003 \end{pmatrix}$$

$$U_N^* = \left\{ [u_N^*] : \left(\sum_{k=0}^4 \|u_k^*\|_{\mathbb{R}^5}^2 \Delta t_k \right)^{1/2} \cong 47696 \right\}$$

ve

$$J^*(u) = 13732000.$$

Bu verilen problemimizde u_0 başlangıç kontrolümüzü aşağıdaki gibi alalım:

$$u_0 = \begin{pmatrix} 5000 & 5000 & 5000 & 5000 & 5000 \\ 5000 & 5000 & 5000 & 5000 & 5000 \\ 5000 & 5000 & 5000 & 5000 & 5000 \\ 5000 & 5000 & 5000 & 5000 & 5000 \\ 5000 & 5000 & 5000 & 5000 & 5000 \end{pmatrix}$$

Bu başlangıç yaklaşımına göre, $\gamma = 1$ ve $\alpha = 0.01$ değerleri için problemimizi Matlab R2016a programında daha önceden inşa ettiğimiz çözüm algoritması ile çözersek 3102. iterasyonda sonuç değerleri aşağıdaki gibi olur:

γ	$\min I_N$	$\left(\sum_{k=0}^9 \ [u]_N^* \ _{\mathbb{R}^2}^2 \Delta t_k \right)^{1/2}$	ε
0.0625	13521000	47395	0.0009992
$[u]_N^*$			
$[u]_N^* = \begin{pmatrix} 7761.1 & 10165 & 10903 & 11064 & 10657 \\ 18405 & 20035 & 20586 & 20591 & 19591 \\ 13140 & 15089 & 15717 & 15786 & 15030 \\ 24973 & 25921 & 26307 & 26174 & 24651 \\ 29276 & 29860 & 30158 & 29951 & 28149 \end{pmatrix}$			

x^{k*}
$\begin{pmatrix} 20000 & 19552 & 19615 & 19744 & 19878 & 19960 \\ 15000 & 14681 & 14769 & 14897 & 14998 & 14913 \\ 10000 & 9628 & 9706 & 9834 & 9950 & 9933 \\ 25000 & 24795 & 24905 & 25032 & 25103 & 24873 \\ 8000 & 7855 & 7978 & 8103 & 8159 & 7850 \end{pmatrix}$

Bu tabloya göre bulduğumuz optimal kontrolü bilinen gerçek optimal kontrole kabul edilebilir oranda yakındır. Bağlı hata aşağıdaki gibidir:

Bağlı hata = $100 * u^* - [u]_N^* / u^*$
$\begin{pmatrix} 22.39 & 1.650 & 9.030 & 10.64 & 6.570 \\ 7.975 & 0.175 & 2.930 & 2.955 & 2.045 \\ 12.40 & 0.593 & 4.780 & 5.240 & 0.200 \\ 3.950 & 0.304 & 1.181 & 0.669 & 5.189 \\ 2.413 & 0.467 & 0.527 & 0.163 & 6.170 \end{pmatrix}$

Bulunan bu optimal kontrol değerine karşılık elde edilen Cauchy probleminin çözümü de gerçek durum değerlerine göre kabul edilebilir ölçüde yakındır.

$ x^* - x_k^* $
$\begin{pmatrix} 0 & 448 & 386 & 258 & 126 & 46 \\ 0 & 320 & 232 & 105 & 4 & 90 \\ 0 & 373 & 296 & 168 & 54 & 72 \\ 0 & 205 & 97 & 28 & 95 & 140 \\ 0 & 146 & 23 & 102 & 157 & 153 \end{pmatrix}$

Gerçek minimum değeri bilinen $J^*(u)$ fonksiyoneli ile bu optimal kontrol ve Cauchy probleminin çözümüne göre elde ettiğimiz $I_N^*([u_N])$ fonksiyonelimizin farkı $|J^*(u) - I_N^*([u_N])| = |13732000 - 13521000| = 211000$ 'dir. Bulduğumuz bu minimum değer gerçek değerlerin yaklaşık %1.5348 altında olup kabul edilebilirdir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bilindiği üzere finansal kuruluşların finansal akışlarının optimal kontrol problemleri genelde lineer ve lineer olmayan I. mertebeden adi diferansiyel denklemler için optimal kontrol problemleri ile açıklanmaktadır. Bu tür problemler daha önce V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Foamin, P. Chen, S. M. N. Islam, F.P. Vasilyev, A. R. Gorbunov, A. D. İskenderov, Q. Y. Yagubov, E. V. Skoblva, R. Q. Tagiyev gibi farklı yazarlarca [8, 18, 19, 33, 41-45] çalışmalarında incelenmiştir. Bu çalışmalarda yer alan kontroller ya yeteri kadar düzgün ya da ölçülebilir sınırlı fonksiyonlardır. Olası kontroller kümesi karesel integrallenebilir fonksiyonlar olduğunda söz konusu optimal kontrol problemleri yeterince incelenmemiştir. Bu çalışmada incelenen lineer I. mertebeden adi diferansiyel denklemler için optimal kontrol problemi gerek amaç fonksiyoneli gerekse de veriler açısından farklı olduğundan, problem hem teorik hem de pratik açıdan önem arz etmektedir.

Gelişen bilgisayar teknolojisi ile birlikte optimal kontrol problemlerinin nümerik çözümlerinin kolaylıkla elde edilebiliyor olması, birçok bilim alanının ilgisini bu problemler üzerine çekmektedir. İşletme ve finans alanında son yıllarda optimal kontrol problemlerine olan ilgi giderek artmaktadır. Özellikle optimal portföy seçimi, optimal kurumsal finans, finans mühendisliği, risk yönetimi, nakit yönetimi, stokastik finans, optimal tüketim ve yatırım gibi alanlarda optimal kontrol problemlerinden yararlanılmaktadır[8, 19, 22, 44, 56-58]. Bu anlamda lineer adi diferansiyel denklemlerle ifade edilen optimal kontrol problemlerini incelemek matematiksel olarak yeni olmamasına rağmen, şirketler veya kurumlar için finansal akışların optimal kontrol problemleri üzerine yeterince çalışma mevcut değildir. Bunun için finansal akışların optimal kontrol problemlerinin çalışılması, işletme ve finans alanlarında uygulama açısından önemli bir yer tutmaktadır.

Bu çalışmada, teorik ifade ve ispatların yanı sıra örnek uygulamalar verilerek optimal kontrol problemi için elde edilen sonuçların gerçekliği test edilmiştir. Matlab R2016a

programında verilen örnekler için gradyent izdüşüm yöntemine göre çözüm algoritması inşa edilmiş ve yine aynı program kullanılarak örnekler, bölüntü sayıları, zaman aralıkları ve başlangıç yaklaşımlarının farklı değerleri için çözülmüştür. Elde edilen çözümler, kabul edilebilir (%10 bağıl hata) hata oranında gerçek çözümlere oldukça yakın olarak elde edilmiştir.



5. KAYNAKLAR

- [1] Yıldırım Aksoy, N., (2009). Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Sınırsız Katsayısıyla Optimal Kontrol Problemleri Ve Onların Sonlu Fark Yaklaşımı, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi
- [2] Sargent, R. W. H.,(2000). Optimal Control, Journal Of Computational and Applied Mathematics, 124 361-371.
- [3] Sussman, H. J. and Willems, J. C.,(1997). 300 Years of Optimal Control: From the Brachistochron to the Maximum Principle, IEEE Control Systems, 17 (3), 32-44.
- [4] Arthur, E. and Bryson, J. R.,(1996). Optimal Control 1950 to 1985, IEEE Control Systems, 16 (3), 26-33.
- [5] Pontryagin, L. S., Boltyanski, V. G., Gamkrelidze, R. V. ve Mishchenko, E. F., (1969). Optimal Süreçlerin Matematik Teorisi. Nauka: Moskova, 384. (Rusça)
- [6] Can, N., (2008). Optimal Kontrol Ve Optimizasyon, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı., Balıkesir Üniversitesi
- [7] Fleming, W. H. and Rishel, R. W., (1975). Deterministic and Stochastic Optimal Control. Springer-Verlag: New York.
- [8] Chen, P. and Islam, S. M. N, (2005). Optimal Control Models in Finance. Springer U.S.
- [9] Campbell, J. Y., Lo, A. W. and MacKinlay, A. C., (1997). The Econometrics of Financial Markets. Princeton University Press: New Jersey.
- [10] Chakravarty, S., (1969). Capital and Economic Development Planning. MIT Press: Cambridge.
- [11] Clarke, C. W., (1976). Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources. John Wiley: New York.
- [12] Craven, B. D., (1978). Mathematical Programming and Control Theory. Chapman and Hall,: London.
- [13] Craven, B. D., (1995). Control and Optimization. Chapman and Hall Mathematics: London.
- [14] Craven, B. D., Computing Optimal Control on Matlab, presented at the Optimization Day, University of Ballarat, Melbourne, Australia, 1999.

- [15] Craven, B. D.,(1999). Optimal Control for an Obstruction Problem. , Journal of Optimization Theory and Applications, 100.
- [16] Craven, B. D. and Islam, S. M. N., Computing Optimal Control on Matlab - the Scm Package and Economic Growth Models, in Optimization and Related Topics, Amsterdam.: Kluwer Academic Publishers, 2001, pp. 61-70.
- [17] Davis, B. E. and Elzinga, D. J.,(1970). The Solution of an Optimal Control Problem in Financial Modeling, Operations Research, 19 15.
- [18] İskenderov, A. D., Tagiev, R. G. ve Yagubov, G. Y., (2002). Optimallaşdırma Üsulları. Çəşioğlu: Bakü, 400.
- [19] İskenderov, A. D. ve Yagubov, V. G.,(2014). On a Model of Control Financial Flows of Company, Lenkaran Devlet Üniversitesi Bilim Haberleri Riyaziyyat ve Tabiat Bilimleri Dizisi (Matematik Ve Doğa Bilimleri Serisi), 13-25.(Rusça)
- [20] Kendrick, D. A. and Taylor, L., (1971). Numerical Methods and Nonlinear Optimizing Models for Economic Planning (Studies in Development Planning). Mass: Cambridge.
- [21] Leonard, D. and Long, N.V., (1992). Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics. Cambridge University Press: Melbourne.
- [22] Sengupta, J. K. and Fanchon, P., (1997). Control Theory Methods in Economics. Kluwer Academic Publishers: Boston.
- [23] Sethi, S. P.,(1978). Optimal Equity Financing Model of Krouse and Lee: Corrections and Extensions, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 13 19.
- [24] Sethi, S. P. and Thompson, G. L.,(1970). Applications of Mathematical Control Theory to Finance: Modeling Simple Dynamic Cash Balance Problems, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 5 (4-5), 381-394.
- [25] Sethi, S. P. and Thompson, G. L., (2000). Optimal Control Theory; Applications to Management Science and Economics. Kluwer Academic Publishers: Amsterdam.
- [26] Tan, K. C.,(1979). Optimal Control of Linear Econometric Systems with Linear Equality Constraints on the Control Variables, International Economic Review, 253-258.

- [27] Tapiero, C. S., (1998). Applied Stochastic Models and Control for Insurance and Finance. Kluwer Academic Publishers: London.
- [28] Wang, G., Wu, Z. and Xiong, J.,(2015). A Linear-Quadratic Optimal Control Problem of Forward-Backward Stochastic Differential Equations with Partial Information, IEEE Transactions on Automatic Control, 60 (11), 2904-2916.
- [29] Zheng, J., Chen, W., Shi, L. and Qiu, L., Linear Quadratic Optimal Control for Discrete-Time Lti Systems with Random Input Gains, in Proceedings of the 31st Chinese control conference, 2012, pp. 5803-5808: IEEE.
- [30] Ziemba, W. T. and Vickson, R. G., (1975). Stochastic Optimization Models in Finance. Academic Press: New York.
- [31] Azimli, A., (2011). Matematiksel Optimizasyon. Papatya Yayıncılık: İstanbul.
- [32] Ocak, R., (1998). Reel Analiz. Atatürk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Yayınları: Erzurum.
- [33] Vasilyev, F. P., (1981). Ekstremal Problemlerin Çözüm Yöntemleri. Nauka: Moskova, 400. (Rusça)
- [34] Goebel, M.,(1979). On Existence of Optimal Control, Math. Nachr., 93 67-93.
- [35] Mikhailov, V. P., (1976). Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler. Nauka: Moskova. (Rusça)
- [36] Çoşkun, E., (2002). Analiz I. Alp yayınevi: Ankara, 346.
- [37] Hsieh, P. F. and Sibuya, Y., (1999). Basic Theory of Ordinary Differential Equations. Springer Verlag: New York, 468.
- [38] Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V. A. ve Ural'ceva, N. N., (1967). Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Nauka: Moskova, 736. (Rusça)
- [39] Pontryagin, L. S., Boltyanski, V. G., Gamkrelidze, R. V. and Mishchenko, E. F., (1962). The Mathematical Theory of Optimal Process. John Wiley: New York.
- [40] Kirk, D., (1970). Optimal Control Theory an Introduction. Prentice-Hall: New York.
- [41] Alekseev, V. M., Tikhomirov, V. M. and Foamin, S. V., (1987). Optimal Kontrol. Springer Science Business Media Llc, 309.
- [42] Vasilyev, F. P., (1980). Ekstremal Problemlerin Nümerik Çözüm Yöntemleri. Nauka: Moskova, 518. (Rusça)

- [43] Gorbunov, A.R., (2004). Finansal Akımların Kontrolü. Globus: Moskova, 224. (Rusça)
- [44] İskenderov, A. D., Yıldırım Aksoy, N. , Yaqubov, V. ve Atalay, Ö.,(2017). Şirketlerin Finansal Akışlarının Bir Optimal Kontrol Probleminde Optimallik İçin Bir Gerekli Şart, Lankaran Devlet Üniversitesi Doğa Bilimleri Bilimsel Araştırmaları, 2 31-43.(Rusça)
- [45] Skoblva, E.V,(2007). Holdingin Finansal Akışları: Kontrol Objesi, Orunberg Üniversitesi Haberleri, 9 112-119.(Rusça)
- [46] Pytlak, R., (1999). Numerical Methods for Optimal Control Problems with State Constarints (Lecture Notes in Mathematics, no. 1707). Springer: Germany, 215.
- [47] Budak, B. M., Berkovich, E. M. ve Solov'eva, E. N,(1969). Optimal Kontrol Problemleri İçin Fark Yaklaşımlarının Yakınsaklığı Üzerine Nümerik Analiz Ve Matematiksel Fizik Dergisi, 9 (3), 522-547.(Rusça)
- [48] Budak, B.M. ve E.M., Berkovich,(1971). Ekstremal Problemlerin Yaklaşımları Üzerine 1, Nümerik Analiz Ve Matematiksel Fizik Dergisi, 11 (3), 580-596.(Rusça)
- [49] Budak, B.M. ve E.M., Berkovich,(1971). Ekstremal Problemlerin Yaklaşımları Üzerine 2, Nümerik Analiz Ve Matematiksel Fizik Dergisi, 11 (4), 870-884.(Rusça)
- [50] Fedorenko, R. P., (1978). Optimal Kontrol Problemlerinin Yaklaşık Çözümü Nauka: Moskova,. (Rusça)
- [51] Ermolev, J.M., Gulenko, V.P. ve Sarenko, T.I., (1978). Optimal Kontrol Probleminde Sonlu Fark Yöntemleri. Naukova Dumka: Kiev. (Rusça)
- [52] Mordukhovich, B. S. ,(1978). Optimal Kontrolün Fark Yaklaşımları Üzerine, Uygulamalı Matematik Ve Mekanik Dergisi, 42 (3), 431-440.(Rusça)
- [53] Propoy, A. I., (1973). Optimum Ayrık Zamanlı Süreçler Teorisinin Elemanları. Nauka: Moskova. (Rusça)
- [54] Göksel, T., (2017). Ekonomi, Finans Ve İşletme İçin Matlab Uygulamaları Ve Etki Analizleri. Seçkin Yayıncılık: Ankara.
- [55] The MathWorks, Inc. (1994-2019). <https://www.Mathworks.Com/>.

- [56] Islam, S. M. N. and Craven, B. D., (2002). Dynamic Optimization Model in Finance: Some Extension to Framework, Models, and Computation. Research Monograph, CSES, Victoria University: Malbourne.
- [57] Tapiero, C.S, (1998). Applied Stochastic Model and Control for Insurance and Finance. Kluwer Academic Publishers: London.
- [58] Sethi, S. P. and Thompson, G. T., (2006). Optimal Control Theory; Applications to Management Science and Economics, 2. ed. Springer: New York.



6. EKLER

Cauchy probleminin çözümü:

$$x^{k+1} = x^k + \Delta t_k (A_k x^k + B_k u_k + f_k) \quad k = \overline{0, N-1}$$

$$x^0 = x_0$$

```
function y=cauchy(t,N,A,B,f,ui,x0,deltat)
for i=1:N;
    dt=1/deltat;
    ti=(i-1)*deltat;
    tj=i*deltat;
    y(:,1)=x0;

y(:,i+1)=y(:,i)+deltat*(int(dt*A,t,ti,tj)*(y(:,i))+int(dt*B,t,ti,tj)*u
i(:,i)+int(dt*f,t,ti,tj));
end
end
```

$\psi(t)$ denklem sisteminin çözümü:

$$\psi^k = \psi^{k+1} + (A_k^T \psi^{k+1} - 2\beta_1 (x^{k+1} - y_1^{k+1})) \Delta t_k, \quad k = \overline{N-1, 0}$$

$$\psi^N = -2\beta_0 (x^N(T) - y_0).$$

```
function y=eslenik(t,N,deltat,A,y1,y0,D1,beta1)
for j=N:-1:1;
    dt=1/deltat;
    t0=(j-1)*deltat;
    t1=j*deltat;
    y(:,N+1)=-2*(D1(:,N+1)-y0);
    y(:,j)=y(:,j+1)+deltat*((int(dt*(A'),t,t0,t1))*y(:,j+1)-
2*beta1*(D1(:,j+1)-(int(dt*y1,t,t0,t1))));
end
end
```

J' Gradyentinin bulunması:

$$I'_{\alpha k} \left([u]_N^{(s)} \right) = -B_k^T \psi_s^k + 2\alpha (u_k^{(s)} - w_k), \quad k = \overline{0, N-1}$$

```
function y=gradyan(t,N,B,ksi,alfa,ui,w,deltat)
for g=1:N;
    dt=1/deltat;
```

```

    tc=(g-1)*deltat;
    td=g*deltat;
    y(:,g)=- (int (dt*(B'),t,tc,td)) *ksi(:,g)+2*alfa*(ui(:,g)-
(int (dt*w,t,tc,td)));
end
    y=double(y);
end

```

$[u]_N^{s+1}$ değerinin hesaplanması:

$$[u]_N^{(s+1)} = \begin{cases} [u]_N^{(s)} - \gamma_s I'_\alpha \left([u]_N^{(s)} \right) & , \quad k = \overline{0, N-1}, \left([u]_N^{(s)} - \gamma_s I'_\alpha \left([u]_N^{(s)} \right) \right) \in U \quad \text{ise} \\ b_0 \frac{[u]_N^{(s)} - \gamma_s I'_\alpha \left([u]_N^{(s)} \right)}{\left(\sum_{k=0}^{N-1} \left\| u_k^{(s)} - \gamma_s I'_{\alpha k} \left([u]_N^{(s)} \right) \right\|_{\mathbb{R}^m}^2 \Delta t_k \right)^{1/2}} & , \quad k = \overline{0, N-1}, \left([u]_N^{(s)} - \gamma_s I'_\alpha \left([u]_N^{(s)} \right) \right) \notin U \quad \text{ise} \end{cases}$$

```

function y=yeniu(ui,gamas,gradi,deltat,b0)
    fark=ui-gamas*gradi;
    normf=norm(fark)*sqrt(deltat);
if normf>b0;
    y=b0*(fark/normf);
else
    y=fark;
end
end

```

$I_N([u]_N^{s+1})$ fonksiyonelinin $[u]_N^{s+1}$ noktasına göre hesaplanması:

$$I_N([u]_N) = \beta_0 \|x^N - y_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \beta_1 \sum_{k=1}^N \|x^k - y_1^k\|_{\mathbb{R}^n}^2 \Delta t_k + \alpha \sum_{k=0}^{N-1} \|u_k - \omega_k\|_{\mathbb{R}^m}^2 \Delta t_k$$

```

function y=minf(t,N,beta0,y0,D1,beta1,deltat,y1,alfa,ui,w)
for ii=1:N;
    dt=1/deltat;
    tii=(ii-1)*deltat;
    tjj=ii*deltat;
    farkx(:,ii)=D1(:,ii+1)-int(dt*y1,t,tii,tjj);
    farku(:,ii)=ui(:,ii)-int(dt*w,t,tii,tjj);
end
    y=beta0*(norm(D1(:,N+1)-
y0))^2+beta1*deltat*(norm(farkx))^2+alfa*deltat*(norm(farku)^2);
    y=double(y);
end

```

Matlab R2016a ile optimal kontrol probleminin çözümü:

Örnek Uygulama 1

```
clc
clear
clear all
format short g
t=sym('t');
tilk=0
tson=2
N=10
beta0=1
beta1=1
alfa=0.01
b0=230
deltat=(tson-tilk)/N
dt=1/deltat
gamas=1
A=[t+1 t-1;t-1 t+1]
B=[ 1 0;0 1]
f=[-t^3-2*t^2-997*t-100;-t^3-1001*t-99]
y0=[501;501]
y1=[500+t^2;500+t]
w=[50+t;50+t]
x0=[500;500]
sayac=0;
say=0;
sayy=0;
for i=1:N;
    ui(:,i)=[50;50];
end
ui=double(ui)
nomu=norm(ui)*sqrt(deltat)
D1=cauchy(t,N,A,B,f,ui,x0,deltat)
I1=minf(t,N,beta0,y0,D1,beta1,deltat,y1,alfa,ui,w)
```

```

kosul1=true;
kosul2=false;
while (kosul1||kosul2)
    kosul1=false;
ksi=eslenik(t,N,deltat,A,y1,y0,D1,beta1)
gradi=gradyan(t,N,B,ksi,alfa,ui,w,deltat)
uN=yeniu(ui,gamas,gradi,deltat,b0)
D2=cauchy(t,N,A,B,f,uN,x0,deltat)
I2=minf(t,N,beta0,y0,D2,beta1,deltat,y1,alfa,uN,w)
nom=double(norm(uN-ui))
ukntr2=norm(uN)*sqrt(deltat)
if I1<I2
    kosul2=true;
    gamas=gamas/10;
    sayy=sayy+1
    gamas
elseif nom>0.001
    kosul2=true;
    ui=uN;
    D1=D2;
    say=say+1
else
    kosul2=false;
end
sayac=sayac+1;
end
minfonk=double(I2)
Optimal_Kontrol=uN
Optimal_Cozum=D2
normu=ukntr2
gama_iterasyon=sayy
u_iterasyon=say
norm=nom
Gama=gamas
fprintf('iterasyon sayısı s= %d',sayac)

```

Örnek Uygulama 2

```
clc
clear
clear all
format short g
t=sym('t');
tilk=0
tson=1
N=5
beta0=1
beta1=1
alfa=0.01
b0=6*10^4
deltat=(tson-tilk)/N
dt=1/deltat
gamas=1
A =[t+1,t-1,t-1,t-1,t-1;
t-1,t+1,t-1,t-1,t-1;
t-1,t-1,t+1,t-1,t-1;
t-1,t-1,t-1,t+1,t-1;
t-1,t-1,t-1,t-1,t+1]
B=[1 0 0 0 0;
0 1 0 0 0;
0 0 1 0 0;
0 0 0 1 0;
0 0 0 0 1]
f =[-3*t^3-3*t^2-77994*t+28000
-3*t^3-t^2-77998*t+28001
-3*t^3-t^2-78000*t+43002
-3*t^3-5*t^2-77992*t+2000
-3*t^3-t^2-77998*t+32001]
y0=[20001;
15001;
10002;
25002;
8001]
y1=[t^2+20000;
```

```

        t+15000;
        2*t+10000;
        2*t^2+25000;
        t+8000]
w=[5000+t;6500+t;5000+t;5000+t;5000+t]
x0=[20000;
    15000;
    10000;
    25000;
    8000]
sayac=0;
say=0;
sayy=0;
u=5*10^3*ones(5,1)
for i=1:N;
    dt=1/deltat;
    ti=(i-1)*deltat;
    tj=i*deltat;
    ui(:,i)=int(dt*u,t,ti,tj)
end
ui
nomu=double(norm(ui)*sqrt(deltat))
D1=cauchy(t,N,A,B,f,ui,x0,deltat)
I1=minf(t,N,beta0,y0,D1,beta1,deltat,y1,alfa,ui,w)
kosul1=true;
kosul2=false;
while (kosul1||kosul2)
    kosul1=false;
    ksi=eslenik(t,N,deltat,A,y1,y0,D1,beta1);
    gradi=gradyan(t,N,B,ksi,alfa,ui,w,deltat);
    uN=yeniu(ui,gamas,gradi,deltat,b0);
    D2=cauchy(t,N,A,B,f,uN,x0,deltat);
    I2=minf(t,N,beta0,y0,D2,beta1,deltat,y1,alfa,uN,w);
    nom=double(norm(uN-ui))
    ukntr2=double(norm(uN)*sqrt(deltat))
    if I1<I2
        kosul2=true;
        gamas=gamas/2;
        sayy=sayy+1

```



```
gamas
elseif nom>0.001
    kosul2=true;
    ui=uN;
    D1=D2;
    say=say+1
else
    kosul2=false;
end
sayac=sayac+1;
end
minfonk=double(I2)
Optimal_Kontrol=uN
Optimal_Cozum=D2
normu=ukntr2
gama_iterasyon=sayy
u_iterasyon=say
norm=nom
Gama=gamas
fprintf('iterasyon sayýsý s= %d',sayac)
```

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ömer ATALAY

Doğum Yeri ve Tarihi : Kütahya 23.03.1986

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (e-posta) : omeratalay36@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Kars Anadolu Lisesi (2004)

Lisans : Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Matematik Bölümü (2012)

Lisans : Anadolu Üniversitesi AÖF İktisat Bölümü (2017)

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü Matematik
ABD (2015)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Kars Defterdarlığı Vergi Dairesi Müdürlüğü
(2012-2013)

: Kafkas Üniversitesi İİBF İşletme Bölümü Sayısal
Yöntemler ABD Araştırma Görevlisi (2013-devam
ediyor)