**T.C.**
**KAFKAS ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

# ESNEK İKİLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ TOPOLOJİK UZAYLAR

**Adem YOLCU**

**DOKTORA TEZİ**

**DANIŞMAN**
**Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK**

**HAZİRAN-2020**
**KARS**

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# ESNEK İKİLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ TOPOLOJİK UZAYLAR

Adem YOLCU

DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK

HAZİRAN-2020
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Adem YOLCU'nun Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK danışmanlığında Doktora Tezi olarak hazırladığı "Esnek İkili Genelleştirilmiş Topolojik Uzaylar" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy . . . . . . . . . . .. . ile kabul edilmiştir.

30/06/2020

| | **Adı ve Soyadı** | **İmza** |
|---|---|---|
| **Başkan** | **:** Prof. Dr. Ömür DEVECİ | ................................ |
| **Üye** | **:** Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK | ................................ |
| **Üye** | **:** Dr. Öğr. Üyesi Kübra GÜL | ................................ |
| **Üye** | **:** Dr. Öğr.Üyesi Alkan ÖZKAN | ................................ |
| **Üye** | **:**Dr. Öğr. Üyesi Tuğba Han ŞİMŞEKLER DİZMAN | ................................ |

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 2020 gün ve . . . /. . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ

**Enstitü Müdürü**

## ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

**Adem YOLCU**

**Haziran-2020**

# ÖZET

(Doktora Tezi)

**ESNEK İKİLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ TOPOLOJİK UZAYLAR**

Adem YOLCU

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

**Danışman: Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK**

Esnek (soft) küme teorisi 1999 yılında Molodtsov tarafından belirsizlik problemlerini çözmek için yeni bir yaklaşım olarak tanımlanmıştır. Bulanık esnek küme teorisi, sezgisel bulanık esnek küme teorisi, neutrosophic esnek küme teorisi gibi yapılar farklı küme teorilerinin esnek küme teorisi ile olan bir kombinasyonu sonucu ortaya çıkmıştır. Bu tez çalışmasında ise yeni bir yapı olarak ikili genelleştirilmiş topolojik uzaylar ile esnek topolojik uzaylar yapısının bir kombinasyonu olan esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzaylar yapısı tanımlanmıştır. Esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzaylar üzerinde açık küme, kapalı küme, komşuluk, iç işlemi, kapanış işlemi ve taban gibi temel topolojik kavramlar incelenmiştir. Daha sonra esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzaylar üzerinde esnek genelleştirilmiş süreklilik, esnek genelleştirilmiş açık dönüşüm, esnek genelleştirilmiş kapalı dönüşüm ve esnek genelleştirilmiş homeomorfizma kavramları çalışılmıştır. Son olarak esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzaylar üzerinde esnek çiftsel ayırma aksiyomları sunulmuş, ayrıca esnek kalıtsal özellikleri incelenmiştir. Esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzaylar üzerinde tanımlanan tüm kavramlarla ilgili önemli teoremler verilmiş ve çalışma farklı örneklerle desteklenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Esnek küme, esnek topolojik uzaylar, esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzaylar, esnek genelleştirilmiş süreklilik, esnek genelleştirilmiş açık (kapalı) dönüşüm, esnek genelleştirilmiş homeomorfizm, esnek çiftsel ayırma aksiyomları

**2020, 97 Sayfa**

## ABSTRACT

(Ph.D. Thesis)

**SOFT BIGENERALIZED TOPOLOGICAL SPACES**



Adem YOLCU

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematic

**Supervisor: Assoc. Prof. Taha Yasin ÖZTÜRK**



The soft set theory was defined by Molodtsov in 1999 as a new approach to solve uncertainty problems. Fuzzy soft set theory, intuitionistic fuzzy soft set theory, neutrosophic soft set theory are the result of a combination of different set theories with soft set theory. In this thesis, as a new structure, the structure of soft bigeneralized topological spaces, which is a combination of bigeneralized topological spaces and soft topological spaces, is defined. Basic topological concepts such as open set, closed set, neighborhood, interior, closure and base are examined on soft bigeneralized topological spaces. Then, the concepts of soft generalized continuity, soft generalized open mappings, soft generalized closed mapping and soft generalized homeomorphism are studied on soft bigeneralized topological spaces. Finally, pairwise soft separation axioms are presented on soft bigeneralized topological spaces, as well as their soft hereditary properties. Important theorems about all concepts defined on soft bigeneralized topological spaces are given and the study is supported with different examples.



**Key Words:** Soft sets, soft topological spaces, soft bigeneralized topological spaces, soft generalized continuity, soft generalized open (closed) mapping, soft generalized homeomorphism, pairwise soft separation axioms.

**2020, 97 pages**

## ÖNSÖZ

Bu tez çalışması Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak hazırlanmıştır.

Tez çalışmasında her türlü yardımı ve desteği esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK'e bana katmış olduğu tüm değerler için minnet ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca tez çalışmasındaki değerli katkıları nedeni ile Sayın Prof. Dr. Çiğdem Gündüz ARAS'a teşekkür ederim.

Eğitim hayatım süresince gösterdikleri sonsuz sabır ve özveri ile beni yalnız bırakmayan değerli aileme teşekkür ederim.

**Adem YOLCU**
**KARS-2020**

## İÇİNDEKİLER

**SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ**

| | | |
|---|---|---|
| $A^c$ | : | $A$ kümesinin tümleyeni |
| $\tau$ | : | Topoloji |
| $(X,\tau)$ | : | Topolojik uzay |
| $\tau_I$ | : | Indiskret (ayrık olmayan) topoloji |
| $\tau_D$ | : | Diskret (ayrık) topoloji |
| $cl(A)$ | : | $A$ kümesinin kapanışı |
| $int(A)$ | : | $A$ kümesinin içi |
| $N(x)$ | : | $x$ noktasının komşuluklar ailesi |
| $g$ | : | Genelleştirilmiş topoloji |
| $(X,g)$ | : | Genelleştirilmiş topolojik uzay |
| $cl_g(A)$ | : | $A$ kümesinin genelleştirilmiş kapanışı |
| $int_g(A)$ | : | $A$ kümesinin genelleştirilmiş içi |
| $\tilde{\subseteq}$ | : | Esnek alt küme |
| $\tilde{\cap}$ | : | Esnek kesişim |
| $\tilde{\cup}$ | : | Esnek birleşim |
| $\neg E$ | : | $E$ ’nin değili |
| $SS(X)_E$ | : | E parametresine göre $X$ üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi |
| $\tilde{\tau}$ | : | Esnek topoloji |
| $(X,\tilde{\tau},E)$ | : | Esnek topolojik uzay |
| $(\tilde{\phi},E)$ | : | Boş esnek küme |
| $(\tilde{X},E)$ | : | Mutlak esnek küme |
| $x_e$ | : | Esnek nokta |
| $scl$ | : | Esnek kapanış |
| $sint$ | : | Esnek iç |
| $\tilde{g}$ | : | Esnek genelleştirilmiş topoloji |
| $(X,\tilde{g},E)$ | : | Esnek genelleştirilmiş topolojik uzay |
| $\tilde{g}_Y$ | : | Esnek genelleştirilmiş alt uzay topolojisi |

| | | |
|---|---|---|
| $(Y, \tilde{g}_Y, E)$ | : | Esnek genelleştirilmiş topolojik alt uzay |
| $scl_{\tilde{g}}$ | : | Esnek genelleştirilmiş kapanış |
| $sint_{\tilde{g}}$ | : | Esnek genelleştirilmiş iç |
| $\tilde{N}_{\tilde{g}}(x_e)$ | : | $x_e$ esnek noktasının esnek genelleştirilmiş komşuluklar ailesi |
| $(X, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, E)$ | : | Esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay |
| $scl_{\tilde{g}_{1,2}}$ | : | Esnek ikili genelleştirilmiş kapanış |
| $sint_{\tilde{g}_{1,2}}$ | : | Esnek ikili genelleştirilmiş iç |
| $\tilde{N}_{\tilde{g}_{1,2}}(x_e)$ | : | $x_e$ esnek noktasının esnek ikili genelleştirilmiş komşuluklar ailesi |

# 1. GENEL BİLGİLER

## 1.1 Giriş

2002 yılında Csaszar [1] tarafından tanımlanan genelleştirilmiş topoloji kavramı son yıllarda genel topolojideki en önemli gelişmelerden biridir. Csaszar ayrıca genelleştirilmiş topolojik uzaylar üzerinde komşuluk sistemi, iç, kapanış ve süreklilik kavramlarını da tanımlamıştır. Literatüre bakıldığında genelleştirilmiş açık kümelerin $\alpha-$açık kümeler [2], $\beta-$açık kümeler [3], yarı-açık kümeler [4] gibi birçok farklı çeşidi çalışılmıştır. Genelleştirilmiş kapalı (g-kapalı) küme kavramı Levine [5] tarafından tanımlanmıştır. Bu kavram kapalı kümelerin sadece doğal bir genellemesi değildir. Bu nedenle günümüze kadar bir çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır [6-19]. Kelly [20] ise ikili topolojik uzay kavramını tanımlamıştır. Bu uzaylar iki keyfi topolojik uzayın bir araya gelmesi ile oluşturulmuştur. Daha sonra Fukutake [21] ikili topolojik uzaylar üzerinde genelleştirilmiş kapalı kümeleri incelemiştir. İkili genelleştirilmiş topolojik uzaylar ise Boonpok [22] tarafından 2010 yılında tanımlanmıştır. İkili genelleştirilmiş topolojik uzayların tanımlanmasından sonra matematikçiler bu konuya yoğun ilgi göstermişler dolayısıyla birçok farklı çalışma ortaya çıkmıştır [23-27].

Gerçek dünya, doğrudan anlaşılmak açısından oldukça karmaşık bir yapıya sahiptir. Dünyadaki bazı problemlerin anlaşılmasını kolaylaştırmak için çeşitli klasik matematiksel modeller ortaya çıkmıştır. Malesef bu matematiksel modeller oldukça karmaşıktır ve kesin çözüm üretememektedir. Özellikle mühendislik, fizik, bilgisayar bilimleri, ekonomi, sosyal bilimler, tıp bilimleri ve diğer birçok farklı alandaki problemleri modellerken verilerin belirsizliği klasik matematiksel metodları kullanmayı başarısız kılmaktadır. Bunlar; doğal çevre olaylarının belirsizlikleri, gerçek dünya hakkındaki insan bilgisinin veya nesneleri ölçmek için kullanılan araçların sınırlamalarından kaynaklanabilir. Örneğin, eyaletler arasındaki ya da kentsel ve kırsal alanlar arasındaki belirsizlik, bir ülkenin kırsal alanındaki nüfusun tam büyüme oranı veya veri tabanı bilgilerini kullanarak makine tabanlı bir ortamda karar verme problemlerinde klasik matematiksel yöntemleri malesef yeterli olamayabilmektedir.

Karar verme problemleri için birçok teori öne sürülmüştür. Bunlardan bazıları bulanık (fuzzy) kümeler teorisi, sezgisel bulanık (intuitionistic fuzzy) kümeler teorisi, vague küme teorisi, aralık değerli küme teorisi ve kaba kümeler teorisidir.

1965 yılında Zadeh [28] tarafından tanımlanan fuzzy (bulanık) küme teorisi son zamanlardaki en ünlü teorilerden biridir. Zadeh, gerçek yaşam durumlarının ve fiziksel problemlerin çoğunda, klasik küme teorisinin ve bu tür küme teorisine dayanan olağan matematiksel teorilerinin bize istenen bilgileri ve çıkarımları vermediği önemli miktarda belirsizliğin olduğunu gözlemlemiştir. Fuzzy küme teorisi matematikte büyük bir paradigmatik değişiklik getirmiştir, fakat bu teorinin de kendi doğasında bazı yapısal zorlukları vardır. Fuzzy küme yapısı üyelik fonksiyonu yardımıyla tanımlanmaktadır. Molodtsov'a göre üyelik fonksiyonu oluşturulmasının çok fazla bireysel olmasından dolayı, herbir durum için bir üyelik fonksiyonu oluşturulması zorluğuyla karşılaşılır.

1999 yılında Molodtsov [29] daha işlevsel olduğunu düşündüğü esnek (soft) küme teorisini tanımlamıştır. Bu teori karar verme ve belirsizlik içeren problemlerin çözümü için nispeten yeni bir yaklaşımdır. Esnek küme teorisinin temel özelliği, fuzzy küme, aralık değerli fuzzy küme ve diğer teorilerdeki zorluklardan arınmış olmasıdır. Esnek küme teorisi kısa zamanda araştırmacılar arasında popüler olmuştur ve bu teori ile ilgili her yıl çok sayıda bilimsel çalışma yapılmaktadır [30-42].
Maji ve ark. [43, 40], karar verme problemlerinde optimum seçim nesnelerini korumak için parametrelerin indirgenmesine dayanan esnek kümelerin bir uygulamasını sunmuşlardır. Chen [44] esnek kümelerin parametreye indirgenmesinin yeni bir tanımını ve çeşitli uygulamalarını araştırmıştır. Pei ve Miao [45] esnek kümelerin özel bir bilgi sistemi sınıfı olduğunu göstermişlerdir. Kong ve ark. [46] esnek kümelerin normal parametreye indirgemesini ve algoritmasını tanıtmışlardır. Zou ve Xiao [47] esnek veri analiz yaklaşımını tartışmışlardır. Esnek küme teorisinin cebirsel yapısını ise Aktaş ve Çağman [48] tanımlamıştır.

Esnek kümelerin topolojik yapısı Shabir ve Naz [49] tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca esnek topolojik uzaylar üzerinde esnek açık küme, esnek kapalı küme, esnek iç, esnek kapanış, esnek komşuluk sistemi ve esnek ayırma aksiyomlarını incelemişlerdir. Daha sonra Hussain ve Ahmad [50] bir noktanın esnek kümeye göre konumunu, Nazmul ve Samanta [51] esnek komşuluk sistemlerini, Peyghan ve ark. [52] esnek bağlantılılık, Kharal ve Ahmad [53] esnek dönüşüm sistemlerini, Zorlutuna ve ark. [54] esnek süreklilik ve esnek dizileri, Das ve Samanta [55] esnek çarpım uzaylarını, Şahin ve Küçük [56] esnek süzgeçleri çalışmışlardır. Tüm bu çalışmalar gibi esnek topoloji ile ilgili birçok başarılı çalışma yapılmış ve yapılmaya devam etmektedir.

Jyothis ve Sunil [57] esnek genelleştirilmiş topolojik uzaylar kavramını tanımlamışlardır. Ayrıca esnek genelleştirilmiş topolojik uzaylar üzerinde esnek iç, esnek kapanış, esnek sınır, esnek komşuluk, esnek taban, esnek limit noktası, esnek süreklilik ve esnek fonksiyonlar gibi kavramları incelemişlerdir. Daha sonraki çalışmalarında esnek genelleştirilmiş topolojik uzaylar üzerinde kompaktlık, esnek ayırma aksiyomları kavramları çalışmışlardır [58, 59].

Esnek ikili topolojik uzaylar kavramı 2014 yılında Ittanagi [60] tarafından tanımlanmıştır. Ittanagi aynı çalışmasında esnek ikili topolojik uzaylarda bazı ayırma aksiyomlarını da tanımlamıştır. Daha sonra esnek ikili topolojik uzaylar üzerinde Kandil ve ark. [61] esnek çiftsel açık (kapalı) kümeleri, Öztürk ve Aras [62] esnek çiftsel sürekliliği, Mahmood [63] esnek zayıf ayırma aksiyomlarını çalışmışlardır.

Bu tez çalışmasının amacı melez bir yapı olan esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayları tanımlayarak bu uzayın önemli özelliklerini sunmaktır.

Bu çalışma üç ana bölümden oluşmaktadır. Genel Bilgiler başlığı altında giriş ve kuramsal temeller verilmiştir. Kuramsal temeller bölümünde ihtiyaç duyulan bazı temel topolojik tanımlarla birlikte genelleştirilmiş ve ikili genelleştirilmiş uzaylar kavramı sunulmuştur.

İkinci bölüm olan Materyal ve Yöntem bölümünde esnek küme, esnek topolojik uzaylar, esnek ayırma aksiyomları, esnek genelleştirilmiş topolojik uzaylar kavramlarına yer verilerek temel özellikleri sunulmuştur.

Üçüncü ve son bölüm olan Bulgular bölümü tez çalışmasının asıl kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde ilk olarak esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzaylar tanımlanmıştır. Daha sonra bu uzay üzerinde esnek açık küme, esnek kapalı küme, esnek kapanış, esnek iç, esnek komşuluk, esnek taban gibi temel kavramlar ve özellikleri sunulmuştur. Ayrıca esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzaylar üzerinde esnek genelleştirilmiş süreklilik, esnek genelleştirilmiş açık (kapalı) dönüşüm, esnek genelleştirilmiş homeomorfizma kavramları tanımlanmış ve önemli teoremlere ek olarak çeşitli örneklere yer verilmiştir. Son olarak esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzaylar üzerinde esnek çiftsel ayırma aksiyomları tanımlanmış ve esnek kalıtsal özellikleri sunulmuştur.

## 1.2 Kuramsal Temeller

### 1.2.1 Topolojik Temel Kavramlar

Bu bölümde ihtiyaç duyulan bazı temel topolojik tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.2.1.1 [64] $X$ boş olmayan bir küme ve $\tau$, $X$ kümesinin bazı alt kümelerinin bir ailesi yani $\tau \subset P(X)$ olsun. Eğer $\tau$ ailesi

1. $\varnothing, X \in \tau$,
2. $A_1, A_2, ..., A_n \in \tau$ olduğunda $A = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \in \tau$,
3. Herhangi bir $\Lambda$ kümesi ve her bir $\alpha \in \Lambda$ için $A_\alpha \in \tau$ olmak üzere $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \tau$

koşullarını gerçekliyor ise $\tau$ ailesine $X$ kümesi üzerinde bir *topoloji (topolojik yapı)*, $(X, \tau)$ ikilisine *topolojik uzay*, $X$ kümesinin herbir elemanına bu topolojik uzayın *elemanı (noktası)* ve $\tau$ nun her bir elemanına ise $\tau$ topolojisine göre *açık küme* denir.

Tanım 1.2.1.2 [64] $X$ boş olmayan bir küme olmak üzere,

1. $\tau_I = \{\emptyset, X\}$ ailesi $X$ üzerinde bir topolojik yapıdır. Bu topolojik uzaya indiskret (ayrık olmayan) topolojik uzay, $\tau_I$ topolojisine de *indiskret (ayrık olmayan) topoloji* denir.
2. $\tau_D = P(X)$ ailesi $X$ üzerinde bir topolojik yapıdır. Bu topolojik uzaya diskret (ayrık) topolojik uzay, $\tau_D$ topolojisine de *diskret (ayrık) topoloji* denir.

Tanım 1.2.1.3 [64] $K \subset (X, \tau)$ olsun. Eğer $X \setminus K \in \tau$ ise $K$ kümesine $\tau$ topolojisine göre *kapalı küme* denir.

Teorem 1.2.1.1 [65] $(X, \tau)$ topolojik uzayında $\mathcal{K} = \{K_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ kapalı kümeler ailesi olsun. Bu aile aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $\emptyset, X$ kapalı kümedir,
2. Eğer $K_{\alpha_1}, ..., K_{\alpha_n}$ kapalı kümeler ise $\bigcup_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$ kapalıdır,
3. Her $\Lambda' \subset \Lambda$ indis kümesi ve $\{K_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda'}$ kapalı kümeler ailesi için $\bigcap_{\alpha \in \Lambda'} K_\alpha$ kümesi kapalıdır.

Tanım 1.2.1.4 [64] $(X, \tau)$ bir topolojik uzay ve $\emptyset \neq Y \subset X$ olsun.

$$\tau_Y = \{U \subset Y : \text{belli bir } V \in \tau \text{ için } U = V \cap Y\}$$

biçiminde tanımlanan $\tau_Y$ ailesine *alt uzay topolojisi*, $(Y, \tau_Y)$ topolojik uzayına ise $(X, \tau)$ topolojik uzayının bir *topolojik alt uzayı* denir.

Teorem 1.2.1.2 [65] $(X, \tau)$ bir topolojik uzay $Y \subset X$ bir alt uzay olsun.

1. $M \subset Y$ kümesi $(Y, \tau_Y)$ de kapalıdır $\Leftrightarrow M = Y \cap A$ olacak şekilde kapalı $A \subset X$ vardır.
2. Eğer $cl(M_{\tau_Y})$ kümesi $M$ nin $Y$ alt uzayında kapanışı ise $cl(M_{\tau_Y}) = cl(M) \cap Y$ dir.

Tanım 1.2.1.5 [64] $A \subset (X,\tau)$ olsun.

1. $a \in A$ için $a \in U \subset A$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ var ise $a$ noktasına $A$ kümesinin bir *iç noktası* denir. $A$ kümesinin tüm iç noktaları kümesine *$A$ kümesinin içi* denir ve $int(A)$ veya $A^{\circ}$ ile gösterilir.
2. $A$ kümesini kapsayan kapalı kümelerin en dar olanına *$A$ kümesinin kapanışı* denir ve bu küme $cl(A)$ veya $\overline{A}$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.1.3 [65] $(X,\tau)$ bir topolojik uzay, $A, B \subset X$ iki küme olsun.

1. $intA$ kümesi $A$ ya ait olan en büyük açık kümedir,
2. $A$ açıktır $\Leftrightarrow$ $A = intA$ dır,
3. $intA = X \setminus cl(X \setminus A)$,
4. $intX = X$,
5. $int(intA) = intA$,
6. $int(A \cap B) = intA \cap intB$.

Teorem 1.2.1.4 [65] $(X,\tau)$ bir topolojik uzay, $A, B \subset X$ iki küme olsun.

1. $cl(A)$ kapalı bir kümedir.
2. $cl(A)$ kapalıdır $\Leftrightarrow$ $A = cl(A)$
3. $A \subset cl(A)$
4. $cl(\varnothing) = \varnothing$
5. $cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B)$
6. $cl(cl(A)) = cl(A)$
7. $A \subset B \Rightarrow cl(A) \subset cl(B)$

Tanım 1.2.1.6 [64] $(X,\tau)$ bir topolojik uzay ve $B \subset \tau$ olsun. Eğer her bir $U \in \tau$ kümesi $B$ ailesinin bazı elemanlarının birleşimi ise $B$ ailesine $\tau$ topolojisi için bir *tabandır* denir. $B$ ailesinin elemanlarına *temel açık kümeler* ve bu durumda $\tau$ topolojisine *$B$ ile üretilmiş topoloji* denir.

Teorem 1.2.1.5 [65] $(X,\tau)$ bir topolojik uzay ve $B \subset \tau$ olsun.

1. $B$ ailesi $\tau$ nun tabanıdır $\Leftrightarrow \forall G \in \tau$ ve $\forall x \in G$ için $x \in B_x \subset G$ olacak şekilde $B_x \in B$ bulunabilir.
2. $B = \{B_i\}_{i \in I}$ ailesi $\tau$ nun bir tabanı ise her $B_{i_1}, B_{i_2} \in B$ ve her $x \in B_{i_1} \cap B_{i_2}$ için $x \in B_{i_3} \subset B_{i_1} \cap B_{i_2}$ koşulunu sağlayan $B_{i_3} \in B$ vardır.

Tanım 1.2.1.7 [64] $x \in (X,\tau)$ olsun. Eğer

$$x \in U_x \subset A$$

olacak şekilde bir $U_x \in \tau$ var ise $A$ kümesine $x$ noktasının bir *komşuluğu*, özel olarak, $A$ açık küme ise $A$ kümesine $x$ noktasının *açık bir komşuluğu* denir. $x$ noktasının tüm komşuluklar ailesini $N(x)$ ile gösterelim.

Teorem 1.2.1.6 [65] $(X,\tau)$ bir topolojik uzay, $A \subset X$ bir alt küme olsun.

$A$ açıktır $\Leftrightarrow \forall x \in A$ için $A$ kümesi $x$ noktasının bir komşuluğudur.

Teorem 1.2.1.7 [64] $(X,\tau)$ bir topolojik uzay ve $N(x)$, $x \in X$ noktasının komşuluklar ailesi olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. Her $A \in N(x)$ için $x \in A$,
2. $A \in N(x)$ ve $A \subset B$ ise $B \in N(x)$,
3. $A_1, A_2, ..., A_n \in N(x)$ ise $N = \bigcap_{i=1}^{n} N_i \in N(x)$,
4. Her $A \in N(x)$ için $U \subset A$ ve her $y \in U$ için $A \in N(y)$ olacak şekilde bir $U \in N(x)$ vardır.

Tanım 1.2.1.8 [65] $(X,\tau)$, $(Y,\tau')$ iki topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun.

1. Eğer $y_0 = f(x_0)$ noktasının her $V_{y_0}$ komşuluğu için $f(U_{x_0}) \subset V_{y_0}$ olacak şekilde $x_0$ noktasının en az bir $U_{x_0}$ komşuluğu varsa $f$ fonksiyonuna $x_0$ *noktasında süreklidir* denir.
2. Eğer $f$ fonksiyonu her $x \in X$ noktasında sürekli ise $f$ fonksiyonuna $X$ *de süreklidir* denir.

Teorem 1.2.1.8 [65] $(X,\tau)$, $(Y,\tau')$ iki topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir;

1. $f : X \to Y$ fonksiyonu süreklidir,
2. Her $V \in \tau'$ için $f^{-1}(V) \in \tau$ dur,
3. $Y$ de kapalı her $K$ kümesi için $f^{-1}(K)$ kümesi $X$ de kapalıdır,
4. Her $A \subset X$ için $f(cl(A)) \subset cl(f(A))$
5. Her $B \subset Y$ için $cl(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(cl(B))$
6. Her $B \subset Y$ için $f^{-1}(IntB) \subset Intf^{-1}(B)$ dir.

Tanım 1.2.1.9 [64] $(X,\tau)$, $(Y,\tau')$ iki topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her bir $U \in \tau$ için $f(U) \in \tau'$ ise $f$ fonksiyonuna *açık fonksiyon*, herbir $K \subset X$ kapalı kümesi için $f(K) \subset Y$ kapalı ise $f$ fonksiyonuna *kapalı fonksiyon* denir.

Teorem 1.2.1.9 [65] $(X,\tau)$, $(Y,\tau')$ iki topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

1. $f$ açıktır $\Leftrightarrow$ Her $U \subset X$ için $f(IntU) \subset Intf(U)$,
2. $f$ kapalıdır $\Leftrightarrow$ Her $K \subset X$ için $cl(f(K)) \subset f(cl(B))$.

Tanım 1.2.1.10 [64] $(X,\tau)$, $(Y,\tau')$ iki topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f$ fonksiyonu birebir, örten, $f$ ve $f^{-1}$ fonksiyonları sürekli ise $f$ fonksiyonuna *homeomorfizm ( topolojik eş yapı dönüşümü)* denir. Bu durumda $(X,\tau)$ ve $(Y,\tau')$ topolojik uzaylarına da *homeomorf ( topolojik eş yapılı) uzaylar* denir.

Teorem 1.2.1.10 [65] $(X,\tau), (Y,\tau')$ iki topolojik uzay, $f: X \to Y$ birebir, örten bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

1. $f$ homeomorfizmadır,
2. $f$ sürekli ve kapalıdır,
3. $f$ sürekli ve açıktır.

Tanım 1.2.1.11 [64] $a \neq$ b özelliğindeki her $a,b \in (X,\tau)$ için

$$a \in V,\ b \notin V \text{ veya } a \notin V,\ b \in V$$

olacak biçimde bir $V \in \tau$ varsa $(X,\tau)$ topolojik uzayına $T_0-$*uzayı*, bu durumda $\tau$ topolojisine $T_0-$*topolojisi* denir.

Teorem 1.2.1.11 [64] $(X,\tau)$, $T_0-$uzayıdır $\Leftrightarrow$ Farklı her $x, y \in X$ için $cl\{x\} \neq cl\{y\}$ dir.

Tanım 1.2.1.12 [64] $a \neq$ b özelliğindeki her $a,b \in (X,\tau)$ için

$$a \in V,\ b \notin V \text{ ve } a \notin U,\ b \in U$$

olacak biçimde $V, U \in \tau$ varsa $(X,\tau)$ topolojik uzayına $T_1-$*uzayı*, bu durumda $\tau$ topolojisine de $T_1-$*topolojisi* denir.

Teorem 1.2.1.12 [64] $(X,\tau)$, $T_1-$uzayıdır $\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $\{x\}$ kapalıdır.

Tanım 1.2.1.13 [64] $a \neq$ b özelliğindeki her $a,b \in (X,\tau)$ için

$$a \in V,\ b \in U \text{ ve } V \cap U = \varnothing$$

olacak biçimde $V,U \in \tau$ varsa $(X,\tau)$ uzayına $T_2-$*uzayı (Hausdorff uzayı)*, bu durumda $\tau$ topolojisine de $T_2-$*(Hausdorff) topolojisi* denir.

Tanım 1.2.1.14 [65] $(X,\tau)$ bir $T_1-$uzayı olsun.

1. Eğer her kapalı $A \subset X$ kümesi ve $x \notin A$ noktası için

$$x \in U,\ A \subset V,\ U \cap V = \varnothing$$

sağlanacak şekilde $U, V \in \tau$ varsa $(X, \tau)$ uzayına $T_3-$*uzayı* denir.

2. Eğer her kapalı, ayrık $A, B \subset X$ kümeleri için

$$A \subset U,\ B \subset V \text{ ve } U \cap V = \varnothing$$

sağlanacak şekilde $U, V \in \tau$ varsa $(X, \tau)$ uzayına $T_4-$*uzayı* denir.

### 1.2.2 Genelleştirilmiş ve İkili Genelleştirilmiş Topolojik Uzaylar

Tanım 1.2.2.1 [1, 66] $X$ evrensel bir küme, $J$ boştan farklı herhangi bir indis kümesi ve $g \subset P(X)$ olsun. Eğer

1. $\varnothing \in g$,
2. $\forall j \in J$ için $G_j \in g$ iken $\bigcup_{j \in J} G_j \in g$

koşulları sağlanırsa $g$ ailesine $X$ kümesi üzerinde bir *genelleştirilmiş topoloji* ve $(X, g)$ ikilisine de bir *genelleştirilmiş topolojik uzay* denir. $g$ topolojisinin her elemanına $g-$*açık küme* denir. Eğer $X \setminus A \in g$ olacak şekilde $A \subset X$ kümesi varsa bu $A$ kümesine $g-$*kapalı küme* denir.

Tanım 1.2.2.2 [1, 66] Eğer $g$ ailesi Tanım 1.2.2.1 deki (1) ve (2) koşullarına ek olarak $X \in g$ koşulunu da sağlıyorsa $g$ ailesine $X$ kümesi üzerinde *kuvvetli genelleştirilmiş topoloji*, $(X, g)$ ikilisine de *kuvvetli genelleştirilmiş topolojik uzay* denir.

Tanım 1.2.2.3 [1, 66] $(X, g)$ bir genelleştirilmiş topolojik uzay ve $A \subset X$ için $A$ kümesinin *genelleştirilmiş iç* $int_g(A)$ *ve kapanış* $cl_g(A)$ işlemleri,

$$int_g(A) = \bigcup \{G \subset X : G \in g \text{ ve } G \subset A\}$$

$$cl_g(A) = \bigcap \{G \subset X : X \setminus G \in g \text{ ve } A \subset G\}$$

ile tanımlanır. Bu tanımdan $A \subset X$ alt kümesinin içerdiği en büyük $g-açık$ kümenin $int_g(A)$ ve $A \subset X$ alt kümesini içeren en küçük $g-$kapalı kümenin $cl_g(A)$ olduğu kolayca elde edilir.

Lemma 1.2.2.1 [66, 67] $(X,g)$ bir genelleştirilmiş topolojik uzay ve $Y \subset X$ alt kümesi için $f:Y \to X$ fonksiyonu her $x \in Y$ için $f(x)=x$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $g_Y=\left\{f^{-1}(A): A \in g\right\}=\left\{A \cap Y : A \in g\right\}$ ailesi $Y$ kümesi üzerinde bir genelleştirilmiş topoloji oluşturur.

Tanım.1.2.2.4 [66, 67] Lemma 1.2.2.1'de verilen $(Y,g_Y)$ genelleştirilmiş topolojik uzayına $(X,g)$ genelleştirilmiş topolojik uzayının *alt uzayı* denir.

Lemma 1.2.2.2 [66, 67] $X$ boştan farklı bir küme, $\beta \subset P(X)$ ailesi için

$$g=\{\varnothing\} \cup \left\{\bigcup \beta' : \beta' \subset \beta\right\}$$

olarak tanımlanan $g \subset P(X)$ ailesi, $X$ kümesi üzerinde bir genelleştirilmiş topolojidir.

Tanım 1.2.2.5 [66, 67] $X$ boştan farklı bir küme olmak üzere $X$ üzerinde bir $g$ genelleştirilmiş topolojisi Lemma 1.2.2.2 deki şekilde bir $\beta \subset P(X)$ ailesi tarafından elde ediliyor ise, $\beta$ ya $g$ genelleştirilmiş topolojisinin bir *tabanı* denir.

Tanım 1.2.2.6 [22] $X$ boştan farklı bir küme, $g_1$ ve $g_2$ $X$ üzerinde iki genelleştirilmiş topoloji olsun. $(X,g_1,g_2)$ üçlüsüne *ikili genelleştirilmiş topolojik uzay* denir.
$(X,g_1,g_2)$ ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A$ kümesinin kapanış ve içi sırasıyla $cl_{g_{1,2}}(A)$ ve $int_{g_{1,2}}(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.2.7 [22] $(X,g_1,g_2)$ ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $cl_{g_{1,2}}\left(cl_{g_{1,2}}(A)\right)=A$ ise $A$ kümesine $g_{1,2}-$*kapalı küme* denir. Eğer $A^c$ kümesi $g_{1,2}-$kapalı küme ise $A$ kümesine $g_{1,2}-$*açık küme* denir.

Örnek 1.2.2.1 [22] $X=\{a,b,c,d\}$ ve $g_1=\{\varnothing,\{a,b\}\}$ ve $g_2=\{\varnothing,\{a,b\}\}$ ise $X$ üzerinde iki genelleştirilmiş topoloji olsun. Bu durumda $\{c,d\}$ kümesi $g_{1,2}-$kapalı bir kümedir.

Önerme 1.2.2.1 [22] $(X,g_1,g_2)$ ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. $A$ kümesi $g_{1,2}-$kapalı bir kümedir ancak ve ancak $A$ kümesi hem $g_1-$kapalı hem de $g_2-$kapalıdır.

Önerme 1.2.2.2 [22] $(X,g_1,g_2)$ ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $A,B\subset X$ olsun. Eğer $A$ ve $B$ kümeleri $g_{1,2}-$kapalı ise $A\cap B$ kümesi de $g_{1,2}-$kapalıdır.

Uyarı 1.2.2.1 İki $g_{1,2}-$kapalı kümenin birleşimi $g_{1,2}-$kapalı bir küme olmayabilir. Bu durum aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek 1.2.2.2 $X=\{a,b,c,d\}$ ve $g_1=\{\varnothing,\{a,c,d\},\{b,c,d\},X\}$ ve $g_2=\{\varnothing,\{a,c,d\},\{b,c,d\},X\}$ ise $X$ üzerinde iki genelleştirilmiş topoloji olsun. Bu durumda $\{a\}$ ve $\{b\}$ kümeleri $g_{1,2}-$kapalı kümelerdir fakat $\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\}$ kümesi $g_{1,2}-$kapalı bir küme değildir.

Önerme 1.2.2.3 [22] $(X,g_1,g_2)$ ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. $A$ kümesi $g_{1,2}-$açık bir kümedir ancak ve ancak $A=ınt_{g_1}(ınt_{g_2}(A))$ dir.

Önerme 1.2.2.4 [22] $(X,g_1,g_2)$ ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $A,B\subset X$ olsun. Eğer $A$ ve $B$ kümeleri $g_{1,2}-$açık kümeler ise $A\cup B$ kümesi de $g_{1,2}-$açık bir kümedir.

Uyarı 1.2.2.2 [22] İki $g_{1,2}-$açık kümenin arakesiti $g_{1,2}-$açık küme olmayabilir. Bu durum aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek 1.2.2.3 $X=\{a,b,c,d\}$ ve $g_1=\{\emptyset,\{a,b\},\{b,c\}\{a,b,c\}\}$ ve $g_2=\{\emptyset,\{a,b\},\{b,c\}\{a,b,c\}\}$ ise $X$ üzerinde iki genelleştirilmiş topoloji olsun. Bu durumda $\{a,b\}$ ve $\{b,c\}$ kümeleri $g_{1,2}-$kapalı kümelerdir fakat $\{a,b\}\cap\{b,c\}=\{b\}$ kümesi $g_{1,2}-$açık küme değildir.

# 2. MATERYAL VE YÖNTEM

## 2.1 Esnek Kümeler

$X$ evrensel bir küme, $E$ parametreler kümesi ve $X$ in kuvvet kümesi $P(X)$ olsun.

Tanım 2.1.1 [29] $F:E\to P(X)$ bir dönüşüm olsun ve $(F,E)=\{(e,F(e)):e\in E,\ F:E\to P(X)\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(F,E)$ ikilisine $X$ üzerinde bir *esnek küme* denir.

E parametresine göre $X$ üzerinde tanımlanan tüm esnek kümelerin ailesi $SS(X)_E$ şeklinde gösterilir.

Molodtsov esnek kümeyi aşağıdaki şekilde örneklendirmiştir [29].

Örnek 2.1.1 $X$ kümesi öğrencilerin kümesi, $E$ kümesi de parametrelerin kümesi olsun. $(F,E)$ esnek kümesi $A$ kişisinin seçeceği öğrencilerin özelliklerini tarif eden bir küme. $X=\{s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6\}$ öğrencilerin kümesi olsun. $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$ kümesinin parametrelerini şu şekilde tanımlayalım; $e_1-$ela gözlü, $e_2-$siyah gözlü, $e_3-$esmer, $e_4-$sarışın, $e_5-$uzun, $e_6-$kısa.

$F(e_i)$ kümesi $e_i$ parametrelerini sağlayan öğrencilerin kümesidir. Burada,

$F(e_1)=\{s_1,s_3\}$, $F(e_2)=\{s_2,s_4,s_5\}$, $F(e_3)=\{s_3,s_4\}$, $F(e)=\{s_5\}$, $F(e_5)=\{s_1,s_5,s_6\}$, $F(e_6)=\{s_2,s_3,s_4\}$ şeklinde tanımlayalım. Dolayısıyla $(F,E)$ esnek kümesi

$$(F,E)=\left\{\begin{array}{l}(\text{ela gözlü},\{s_1,s_3\}),(\text{siyah gözlü},\{s_2,s_4,s_5\}),(\text{esmer},\{s_3,s_4\})\\ (\text{sarışın},\ \{s_5\}),(\text{uzun},\{s_1,s_5,s_6\}),(\text{kısa},\{s_2,s_3,s_4\})\end{array}\right\}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.1.2 [49] $(F,E)$, $(G,E)\in SS(X)_E$ olsun. İki esnek kümenin farkı $\forall e\in E$ için $H(e)=F(e)\setminus G(e)$ şeklinde tanımlanır ve $(H,E)=(F,E)\setminus(G,E)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.3 [40] $(F,A),(G,B)\in SS(X)_E$ ve $A,B\subseteq E$ olsun. Eğer

1. $A\subseteq B$,
2. Her $e\in E$ için, $F(e)\subseteq G(e)$ dir

koşulları sağlanırsa $(F,A)$ esnek kümesi $(G,B)$ esnek kümesinin *esnek alt kümesidir* denir ve $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 [40] $(F,E),(G,E)\in SS(X)_E$ olsun. Eğer $(F,E)$ kümesi $(G,E)$ nin esnek alt kümesi ve $(G,E)$ kümesi de $(F,E)$ nin esnek alt kümesi ise $(F,E)$ esnek kümesi $(G,E)$ esnek kümesine *esnek eşittir* denir.

Örnek 2.1.2 [40] $E_1=\{e_1,e_3,e_5\}\subset E$ ve $E_2=\{e_1,e_2,e_3,e_5\}\subset E$ olsun. $E_1\subset E_2$ olduğu açıktır. $X=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6\}$ evrensel bir küme ve $(F,E_1)$, $(G,E_2)$ bu evrensel küme üzerinde iki esnek küme olsun ve aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$(F,E_1)==\{(e_1,\{h_2,h_4\}),(e_3,\{h_3,h_4,h_5\}),(e_5,\{h_1\})\},$$

$$(G,E_2)==\{(e_1,\{h_2,h_4\}),(e_2,\{h_1,h_3\}),(e_3,\{h_3,h_4,h_5\}),(e_5,\{h_1\})\}.$$

Dolayısıyla $(F,E_1)\tilde{\subseteq}(G,E_2)$ dir.

Tanım 2.1.5 [40] $E=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ parametrelerin kümesi olsun. $E$ nin değili kümesi $\neg E$ ile gösterilir ve $\neg E=\{\neg e_1,\neg e_2,...,\neg e_n\}$ şeklinde tanımlanır. Burada $\neg e_i$, $e_i$ olmayan anlamına gelir.

Örnek 2.1.3 [40] Örnek 2.1.1' i dikkate alalım.
Burada
$\neg E=$ {ela gözlü olmayan, siyah gözlü olmayan, esmer olmayan, sarışın olmayan, uzun olmayan, kısa olmayan}
şeklindedir.

Tanım 2.1.6 [40] $(F,E) \in SS(X)_E$ olsun. $(F,E)$ kümesinin *esnek tümleyeni* $(F,E)^c$ ile gösterilir ve $(F,E)^c = (F^c, E)$ şeklinde tanımlanır. Burada $F^c : E \to P(X)$ dönüşümü $\forall \alpha \in E$ için $F^c(\alpha) = X / F(\alpha)$ ile verilen bir dönüşümdür. $((F,E)^c)^c = (F,E)$ olduğu açıktır.

Tanım 2.1.7 [40] $(F,E) \in SS(X)_E$ bir esnek küme olsun.

1. $\forall e \in E$ için $F(e) = \phi$ ise $(F,E)$ esnek kümesine *boş esnek küme* denir ve $(\tilde{\phi}, E)$ yada kısaca $\tilde{\phi}$ ile gösterilir.
2. $\forall e \in E$ için $F(e) = X$ ise $(F,E)$ esnek kümesine *mutlak esnek küme* denir ve $(\tilde{X}, E)$ yada kısaca $\tilde{X}$ gösterilir.

Açıktır ki, $(\tilde{\phi}, E)^c = (\tilde{X}, E)$ ve $(\tilde{X}, E)^c = (\tilde{\phi}, E)$ dir.

Örnek 2.1.4 [40] Farz edelim ki $X$ evlerin kümesi $E$ ise parametrelerin bir kümesi olsun. $X$ ve $E$ kümelerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$$

$$E = \{\text{tuğla, taş, toprak, çelik}\}$$

$(F,E)$ esnek kümesi "ev inşaatı" nı ifade etmektedir. Dolayısıyla;

$F$(tuğla): Tuğla ile yapılan ev inşaatı,

$F$(taş) : Taş ile yapılan ev inşaatı,

$F$(toprak):Toprak ile yapılan ev inşaatı,

$F$(çelik) :Çelik ile yapılan ev inşaatı

anlamına gelir. $(F,E)$ esnek kümesini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$(F,E) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tuğla ile yapılan ev inşaatı} = \phi, \text{Taş ile yapılan ev inşaatı} = \phi, \\ \text{Toprak ile yapılan ev inşaatı} = \phi,\ \text{Çelik ile yapılan ev inşaatı} = \phi \end{array} \right\}$$

Dolayısıyla $(F,E)$ esnek kümesi boş esnek kümedir.

Örnek 2.1.5 [40] Farz edelim ki $X$ evlerin kümesi $E$ ise parametrelerin bir kümesi olsun. $X$ ve $E$ kümelerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$$

$$E=\{\text{tuğla olmayan, taş olmayan, toprak olmayan, çelik olmayan}\}$$

$(G,E)$ esnek kümesi "ev inşaatı" nı ifade etmektedir. Dolayısıyla;

$G(\text{tuğla olmayan})$: Tuğla ile yapılmayan ev inşaatı,

$G(\text{taş olmayan})$ : Taş ile yapılmayan ev inşaatı,

$G(\text{toprak olmayan})$: Toprak ile yapılmayan ev inşaatı,

$G(\text{çelik olmayan})$ : Çelik ile yapılmayan ev inşaatı

anlamına gelir. $(G,E)$ esnek kümesini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$(G,E)=\left\{\begin{array}{l}\text{Tuğla ile yapılmayan ev inşaatı}=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\},\\ \text{Taş ile yapılmayan ev inşaatı}=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\},\\ \text{Toprak ile yapılmayan ev inşaatı}=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\},\\ \text{Çelik ile yapılmayan ev inşaatı}=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}\end{array}\right\}$$

Dolayısıyla $(G,E)$ esnek kümesi mutlak esnek kümedir.

<u>Tanım 2.1.8</u> [40] $(F,E),(G,E)\in SS(X)_E$ olsun. $(F,E)$ ve $(G,E)$ kümelerinin *esnek birleşim* kümesi olan $(H,E)$ kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır. Her $e\in E$ için

$$H(e)=\begin{cases}F(e) & , \ e\in A-B\\ G(e) & , \ e\in B-A\\ F(e)\cup G(e) & , \ e\in A\cap B\end{cases}$$

şeklindedir ve $(F,E)\tilde{\cup}(G,E)=(H,E)$ ile gösterilir.

<u>Tanım 2.1.9</u> [40] $\forall e\in E$ için $M(e)=F(e)\cap G(e)$ olacak şekilde $(M,E)$ esnek kümesine, $(F,E)$ ve $(G,E)$ esnek kümelerinin *esnek kesişimi* denir ve $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)$ şeklinde gösterilir.

<u>Teorem 2.1.1</u> [40] $(F,E),(G,E)\in SS(X)_E$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. $(F,E)\tilde{\cup}(F,E)=(F,E)$,
2. $(F,E)\tilde{\cap}(F,E)=(F,E)$,
3. $(F,E)\tilde{\cup}(\tilde{\phi},E)=(F,E)$,
4. $(F,E)\tilde{\cap}(\tilde{\phi},E)=(\tilde{\phi},E)$,

5. $(F,E)\tilde{\cup}(\tilde{X},E)=(\tilde{X},E)$,

6. $(F,E)\tilde{\cap}(\tilde{X},E)=(F,E)$.

<u>Teorem 2.1.2</u> [40] $(F,E),(G,E)\in SS(X)_E$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1) $\left[(F,E)\tilde{\cup}(G,E)\right]^c=(F,E)^c\,\tilde{\cap}\,(G,E)^c$.

2) $\left[(F,E)\tilde{\cap}(G,E)\right]^c=(F,E)^c\,\tilde{\cup}\,(G,E)^c$.

<u>Tanım 2.1.10</u> [54] $I$ keyfi bir indis kümesi ve $L=\{(F_i,E):i\in I\}$ ailesi $SS(X)_E$ nin bir alt ailesi olsun.

1) $\forall e\in E$ için $H(e)=\bigcup_{i\in I}F_i(e)$ olmak üzere $\tilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i,E)=(H,E)$.

2) $\forall e\in E$ için $M(e)=\bigcap_{i\in I}F_i(e)$ olmak üzere $\tilde{\bigcap}_{i\in I}(F_i,E)=(M,E)$.

<u>Önerme 2.1.1</u> [39] $I$ keyfi bir indis kümesi ve $\{(F_i,E):i\in I\}\subseteq SS(X)_E$ olsun.

1) $\forall i\in I$ için $(F_i,E)\,\tilde{\subseteq}\,\tilde{\bigcup}\{(F_i,E):\forall i\in I\}$.

2) $\forall i\in I$ için $\tilde{\bigcap}\{(F_i,E):\forall i\in I\}\,\tilde{\subseteq}\,(F_i,E)$.

3) $\left[\tilde{\bigcup}\{(F_i,E):\forall i\in I\}\right]^c=\tilde{\bigcap}\{(F_i,E)^c:\forall i\in I\}$.

4) $\left[\tilde{\bigcap}\{(F_i,E):\forall i\in I\}\right]^c=\tilde{\bigcup}\{(F_i,E)^c:\forall i\in I\}$.

<u>Tanım 2.1.11</u> [35] $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. Eğer $e\in E$ için $F(e)=\{x\}$ ve $e'\in E/\{e\}$ için $F(e')=\phi$ ise $(F,E)$ esnek kümesine *esnek nokta* denir ve $(x_e,E)$ yada kısaca $x_e$ ile gösterilir.

<u>Tanım 2.1.12</u> [35] $(x_e,E)$ ve $(y_{e'},E)$ iki esnek nokta olsun. $x\neq y$ veya $e\neq e'$ koşulu sağlanır ise bu noktalara *farklı esnek noktalar* denir.

Tanım 2.1.13 [68] Eğer $x_e(e) \subseteq G(e)$ yani $\{x\} \subseteq G(e)$ ise $(x_e, E)$ esnek noktası $(G, E)$ esnek kümesinin elemanıdır ve $(x_e, E) \tilde{\in} (G, E)$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.2 [68] $(G, E) \in SS(X)_E$ esnek kümesi kendi esnek noktalarının birleşimidir yani $(G, E) = \tilde{\bigcup}\{(x_e, E) : (x_e, E) \tilde{\in} (G, E)\}$ dir.

Önerme 2.1.3 [68] $(G, E)$, $(H, E) \in SS(X)_E$ olsun.

1) $(x_e, E) \tilde{\in} (G, E) \Leftrightarrow (x_e, E) \tilde{\notin} (G, E)^c$.
2) $(x_e, E) \tilde{\in} (G, E) \tilde{\cup} (H, E) \Leftrightarrow (x_e, E) \tilde{\in} (G, E)$ yada $(x_e, E) \tilde{\in} (H, E)$.
3) $(x_e, E) \tilde{\in} (G, E) \tilde{\cap} (H, E) \Leftrightarrow (x_e, E) \tilde{\in} (G, E)$ ve $(x_e, E) \tilde{\in} (H, E)$.
4) $(G, E) \tilde{\subseteq} (H, E) \Leftrightarrow (x_e, E) \tilde{\in} (G, E) \Rightarrow (x_e, E) \tilde{\in} (H, E)$.

Tanım 2.1.11 [53] $SS(X)_E$, $SS(Y)_{E'}$ esnek küme aileleri verilsin. $u : X \to Y$ ve $v : E \to E'$ dönüşümleri tanımlansın. $(F, E)$, $X$ üzerinde esnek küme ve $(f(F, E), B)$, $B = v(E) \tilde{\subseteq} E'$, $Y$ üzerinde esnek küme olsun. $f : SS(X)_E \to SS(Y)_{E'}$ esnek dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanır:
$(F, E) \in SS(X)_E$, esnek kümesinin görüntüsü $\forall \beta \in E'$ için,

$$f((F, E))(\beta) = \begin{cases} u\left( \bigcup\limits_{\alpha \in v^{-1}(\beta) \cap E} F(\alpha) \right), & v^{-1}(\beta) \cap E \neq \varnothing \\ \varnothing, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

Tanım 2.1.12 [53] $f : SS(X)_E \to SS(Y)_{E'}$ esnek bir dönüşüm ve $(G, E') \in SS(Y)_{E'}$ olsun. $u : X \to Y$ ve $v : E \to E'$ dönüşümleri tanımlansın. Bu durumda $(f^{-1}(G, E'), E)$, $E = v^{-1}(E')$, $X$ üzerinde esnek bir kümedir ve $(G, E')$ nin esnek ters görüntüsü aşağıdaki şekilde tanımlanır.
$\alpha \in E$ için

$$f^{-1}((G, E'))(\alpha) = \begin{cases} u^{-1}(G(v(\alpha))), & v(\alpha) \in E' \\ \varnothing, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

Örnek 2.1.6 [53] $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{x,y,z\}$, $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, $E'=\{e_1^{'},e_2^{'},e_3^{'}\}$ olsun. $u:X\to Y$ ve $v:E\to E'$ dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$u(a)=y,\ u(b)=z,\ u(c)=y$$

$$v(e_1)=e_3^{'},\ v(e_2)=e_3^{'},\ v(e_3)=e_2^{'},\ v(e_4)=e_3^{'}$$

Sırasıyla $X$ ve $Y$ üzerinde iki esnek küme ele alalım.

$$(F,E)=\{(e_1,\phi),(e_3,\{a\}),(e_4,\{a,b,c\})\},$$

$$(G,E')=\{(e_1^{'},\{x,z\}),(e_2^{'},\{y\})\}.$$

$f:SS(X)_E\to SS(Y)_{E'}$ esnek bir dönüşüm olmak üzere $(F,E)\in SS(X)_E$ esnek kümesi için $A=v(E)=\{e_2^{'},e_3^{'}\}\in SS(Y)_{E'}$ için $(f(F,E),A)$ kümesi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$f\big((F,E)\big)(e_2^{'})=u\big(\bigcup F(\{e_3\})\big)=u(\{a\})=\{y\}\ \ (v^{-1}(e_2^{'}\cap E)=\{e_3\}\ \text{olduğu için}),$$

$$\begin{aligned}f\big((F,E)\big)(e_3^{'})&=u\left(\bigcup_{\alpha\in v^{-1}(e_3^{'})\cap A}F(\alpha)\right)=u\big(\{F(e_2)\cup F(e_4)\}\big)\\&=u\big(\phi\cup\{a,b,c\}\big)=u\big(\{a,b,c\}\big)=\{x,y\}\end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$(f(F,E),A)=\{e_2^{'}=\{y\},\ e_3^{'}=\{y,z\}\}$$

olarak elde edilir. Şimdi esnek ters görüntüyü bulalım.

$$f^{-1}\big((G,E')\big)(e_3)=u^{-1}\big(G(v(e_3))\big)=u^{-1}\big(G(e_2^{'})\big)=u^{-1}\big(\{y\}\big)=\{a,c\}$$

Burada $B=v^{-1}(E')=\{e_3\}$.

Böylece, $f^{-1}(G,E'),B)=\{(e_3,\{a,c\})\}$ olarak bulunur.

Tanım 2.1.13 [53] $f:SS(X)_E\to SS(Y)_{E'}$ esnek bir dönüşüm ve $(F,E),(G,E)\in SS(X)_E$ olsun. $\beta\in E'$ için $(F,E)$ ve $(G,E)$ nin esnek görüntülerinin esnek birleşim ve esnek kesişimi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\big(f(F,E)\,\tilde{\cup}\,f(G,E)\big)\beta=f(F,E)\beta\cup f(G,E)\beta$$
$$\big(f(F,E)\,\tilde{\cap}\,f(G,E)\big)\beta=f(F,E)\beta\cap f(G,E)\beta$$

Tanım 2.1.14 [53] $f:SS(X)_E \to SS(Y)_{E'}$ esnek bir dönüşüm ve $(F,E'),(G,E') \in SS(Y)_{E'}$ olsun. $\alpha \in E$ için $(F,E)$ ve $(G,E)$ nin esnek ters görüntülerinin esnek birleşim ve esnek kesişimi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\left(f^{-1}(F,E')\tilde{\cup} f(G,E')\right)\alpha = f^{-1}(F,E')\alpha \cup f^{-1}(G,E')\alpha$$

$$\left(f^{-1}(F,E')\tilde{\cap} f(G,E')\right)\alpha = f^{-1}(F,E')\alpha \cap f^{-1}(G,E')\alpha$$

Teorem 2.1.3 [53] $f:SS(X)_E \to SS(Y)_{E'}$ esnek bir dönüşüm, $u:X \to Y$ ve $v:E \to E'$ birer dönüşüm olsun. $(F,E),(G,E) \in SS(X)_E$ ve $(F_i,E_i) \in SS(X)_E$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. $f((\tilde{\phi},E)) = (\tilde{\phi},E)$,
2. $f((\tilde{X},E)) \tilde{\subseteq} (\tilde{Y},E)$,
3. $f\left((F,E)\tilde{\cup}(G,E)\right) = f\left((F,E)\right)\tilde{\cup} f\left((G,E)\right)$,

   Genelde, $f\left(\tilde{\bigcup_i}(F_i,E_i)\right) = \tilde{\bigcup_i} f(F_i,E_i)$
4. $f\left((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\right) \tilde{\supseteq} f\left((F,E)\right)\tilde{\cap} f\left((G,E)\right)$,

   Genelde, $f\left(\tilde{\bigcap_i}(F_i,E_i)\right) \tilde{\subseteq} \tilde{\bigcap_i} f(F_i,E_i)$
5. Eğer $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ ise $f(F,E)\tilde{\subseteq} f(G,E)$ dir.

Teorem 2.1.4 [53] $f:SS(X)_E \to SS(Y)_{E'}$ esnek bir dönüşüm, $u:X \to Y$ ve $v:E \to E'$ birer dönüşüm olsun. $(F,E'),(G,E') \in SS(Y)_{E'}$ ve $(F_i,E_i^{'}) \in SS(Y)_{E'}$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. $f^{-1}((\tilde{\phi},E)) = (\tilde{\phi},E)$,
2. $f^{-1}((\tilde{Y},E)) = (\tilde{X},E)$,
3. $f^{-1}\left((F,E')\tilde{\cup}(G,E')\right) = f^{-1}\left((F,E')\right)\tilde{\cup} f^{-1}\left((G,E')\right)$,

   Genelde, $f^{-1}\left(\tilde{\bigcup_i}(F_i,E_i^{'})\right) = \tilde{\bigcup_i} f^{-1}(F_i,E_i^{'})$
4. $f^{-1}\left((F,E')\tilde{\cap}(G,E')\right) = f^{-1}\left((F,E')\right)\tilde{\cap} f^{-1}\left((G,E')\right)$,

Genelde, $f^{-1}\left(\tilde{\bigcap_i}(F_i, E_i^{'})\right) = \tilde{\bigcap_i} f^{-1}(F_i, E_i^{'})$

5. Eğer $(F, E') \tilde{\subseteq} (G, E')$ ise $f((F, E')) \tilde{\subseteq} f((G, E'))$ dir.

## 2.2 Esnek Topoloji ve Esnek Topolojik Uzaylar

Tanım 2.2.1 [49] $\tilde{\tau}$, $X$ üzerinde esnek kümelerin ailesi olsun. Eğer $\tilde{\tau}$ ailesi;

1) $(\tilde{X}, E), (\tilde{\phi}, E) \in \tilde{\tau}$,
2) $\tilde{\tau}$ ya ait herhangi sayıdaki esnek kümenin birleşimi $\tilde{\tau}$ ya aittir.
3) $\tilde{\tau}$ ya ait herhangi iki esnek kümenin kesişimi $\tilde{\tau}$ ya aittir.

koşullarını sağlar ise $\tilde{\tau}$ *ya* $X$ *üzerinde esnek topoloji* denir. $(X, \tilde{\tau}, E)$ üçlüsüne *esnek topolojik uzay* denir.

Tanım 2.2.2 [49] $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay olsun.

1. $\tilde{\tau}$ nun elemanlarına *esnek açık küme* denir.
2. $(F, E)^c$ esnek açık küme ise $(F, E)$ esnek kümesine *esnek kapalı küme* denir.

Önerme 2.2.1 [49] $(X, \tilde{\tau}, E)$, bir esnek topolojik uzay olsun.

1) $(\tilde{X}, E), (\tilde{\phi}, E)$ esnek kümeleri esnek kapalı kümelerdir.
2) Keyfi sayıdaki esnek kapalı kümelerin kesişimi esnek kapalı kümedir.
3) Herhangi iki esnek kapalı kümenin birleşimi esnek kapalı kümedir.

Tanım 2.2.3 [49] $X$ evrensel bir küme $E$ parametrelerin bir kümesi olsun. $\tilde{\tau} = \left\{(\tilde{X}, E), (\tilde{\phi}, E)\right\}$ ailesine esnek indiskret topoloji, $(X, \tilde{\tau}, E)$ üçlüsüne ise esnek indiskret topolojik uzay denir.

Tanım 2.2.4 [49] $X$ evrensel bir küme $E$ parametrelerin bir kümesi olsun. $\tilde{\tau}$, $X$ üzerinde tanımlananan bütün esnek kümelerin bir ailesi ise bu aileye esnek diskret topoloji, $(X, \tilde{\tau}, E)$ üçlüsüne ise esnek diskret topolojik uzay denir.

Önerme 2.2.2 [49] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir esnek topolojik uzay olsun. $\forall e \in E$ için $\tilde{\tau}_e = \{F(e):(F,E)\in\tilde{\tau}\}$ ailesi $X$ üzerinde bir topolojidir.

Örnek 2.2.1 [49] $X=\{h_1,h_2,h_3\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve

$$\tilde{\tau}=\{(\tilde{\phi},E),(\tilde{X},E),(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E),(F_4,E)\}$$

olsun. Burada $(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E)$ ve $(F_4,E)$ esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(F_1,E)=\{(e_1,\{h_2\}),(e_2,\{h_1\})\},$$

$$(F_2,E)=\{(e_1,\{h_2,h_3\}),(e_2,\{h_1,h_2\})\},$$

$$(F_3,E)=\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,X)\},$$

$$(F_4,E)=\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_1,h_3\})\},$$

$\tilde{\tau}$ ailesinin $X$ üzerinde bir esnek topoloji olduğu açıktır. Böylece $(X,\tilde{\tau},E)$ bir esnek topolojik uzaydır. Dolayısıyla

$$\tilde{\tau}_{e_1}=\{\phi,X,\{h_2\},\{h_2,h_3\},\{h_1,h_2\}\}$$

ve

$$\tilde{\tau}_{e_2}=\{\phi,X,\{h_1\},\{h_1,h_3\},\{h_1,h_2\}\}$$

$X$ üzerinde birer topolojidir.

Şimdi bu durumun tersinin her zaman sağlanmayabileceğine ait bir örnek sunalım.

Örnek 2.2.2 [49] $X=\{h_1,h_2,h_3\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve

$$\tilde{\tau}=\{(\tilde{\phi},E),(\tilde{X},E),(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E),(F_4,E)\}$$

olsun. Burada $(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E)$ ve $(F_4,E)$ esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(F_1,E)=\{(e_1,\{h_2\}),(e_2,\{h_1\}\},$$

$$(F_2,E)=\{(e_1,\{h_2,h_3\}),(e_2,\{h_1,h_2\}\},$$

$$(F_3,E)=\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,\{h_1,h_2\}\},$$

$$(F_4,E)=\{(e_1,\{h_2\}),(e_2,\{h_1,h_3\}\},$$

$\tilde{\tau}$ ailesinin $X$ üzerinde bir esnek topoloji değildir. Çünkü $(F_2,E)\cup(F_3,E)=(G,E)$ ve $(G,E)=\{(e_1,X),e_2,\{h_1,h_2\}\}\notin\tilde{\tau}$. Fakat,

$$\tilde{\tau}_{e_1}=\{\phi,X,\{h_2\},\{h_2,h_3\},\{h_1,h_2\}\}$$

ve

$$\tilde{\tau}_{e_2}=\{\phi,X,\{h_1\},\{h_1,h_3\},\{h_1,h_2\}\}$$

$X$ üzerinde birer topolojidir.

<u>Önerme 2.2.3</u> [49] $(X,\tilde{\tau}_1,E)$ ve $(X,\tilde{\tau}_2,E)$ iki esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda $(X,\tilde{\tau}_1\cap\tilde{\tau}_2,E)$ uzayı da esnek topolojik uzaydır.

<u>Uyarı 2.2.1</u> [49] $X$ üzerinde iki esnek topolojinin birleşimi bir esnek topoloji olmayabilir.

<u>Tanım 2.2.5</u> [35] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer $(x_e,E)\tilde{\in}(G,E)\tilde{\subseteq}(F,E)$ olacak şekilde en az bir $(G,E)$ esnek açık kümesi varsa $(F,E)$ esnek kümesine $(x_e,E)$ esnek noktasının *esnek komşuluğu* denir.

<u>Önerme 2.2.4</u> [49] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir esnek topolojik uzay olsun.

1. Her $x_e\tilde{\in}SS(X)_E$ noktası bir esnek komşuluğa sahiptir,
2. Eğer $(F,E)$ ve $(G,E)$ esnek kümeleri $x_e$ esnek noktasının esnek komşulukları ise $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)$ kümesi de $x_e$ esnek noktasının esnek komşuluğudur,
3. Eğer $(F,E)$ esnek kümesi $x_e$ esnek noktasının bir komşuluğu ve $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ ise $(G,E)$ esnek kümesi de $x_e$ esnek noktasının esnek komşuluğudur.

<u>Tanım 2.2.6</u> [49] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir esnek topolojik uzay ve $Y\subseteq X$ olsun.

$$\tilde{\tau}_Y=\{({}^YF,E):(F,E)\in\tilde{\tau}\}$$

ailesine $Y$ üzerinde esnek bağıl topoloji, $(Y, \tilde{\tau}_Y, E)$ üçlüsüne ise $(X, \tilde{\tau}, E)$ uzayının *esnek alt uzayı* denir.

<u>Örnek 2.2.3</u> [49] Esnek diskret topolojik uzayın herhangi esnek alt uzayı da esnek diskret alt uzaydır.

<u>Örnek 2.2.4</u> [49] Esnek indiskret topolojik uzayın herhangi esnek alt uzayı da esnek indiskret alt uzaydır.

<u>Tanım 2.2.7</u> [49] $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzay ve $(F, E)$, $(G, E) \in SS(X)_E$ olsun. $(F, E)$ esnek kümesini içeren tüm esnek kapalı kümelerin arakesitine $(F, E)$ *esnek kümesinin kapanışı* denir ve $scl(F, E)$ ile gösterilir.
$scl(F, E)$ esnek kümesinin $(F, E)$ yi içeren en küçük esnek kapalı küme olduğu açıktır.

<u>Teorem 2.2.1</u> [49] $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzay ve $(F, E)$, $(G, E) \in SS(X)_E$ olsun. O halde aşağıdaki koşullar sağlanır;

1. $scl(\tilde{\phi}) = \tilde{\phi}$ ve $scl(\tilde{X}) = \tilde{X}$ ;
2. $(F, E) \tilde{\subseteq} scl(F, E)$;
3. $(F, E)$ esnek kapalı kümedir $\Leftrightarrow$ $(F, E) = scl(F, E)$;
4. $scl(scl(F, E)) = scl(F, E)$;
5. $(F, E) \tilde{\subseteq} (G, E) \Rightarrow scl(F, E) \tilde{\subseteq} scl(G, E)$;
6. $scl((F, E) \tilde{\cup} (G, E)) = scl(F, E) \tilde{\cup} scl(G, E)$;
7. $scl((F, E) \tilde{\cap} (G, E)) \tilde{\subseteq} scl(F, E) \tilde{\cap} scl(G, E)$ dir.

<u>Örnek 2.2.4</u> [49] $X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve

$$\tilde{\tau} = \{(\tilde{\phi}, E), (\tilde{X}, E), (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), ..., (F_7, E)\}$$

olsun. Burada $(F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), \ldots, (F_7, E)$ esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(F_1, E) = \{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, \{h_1, h_2\})\},$$

$$(F_2,E)=\{(e_1,\{h_2\}),(e_2,\{h_1,h_3\})\},$$

$$(F_3,E)=\{(e_1,\{h_2,h_3\}),(e_2,\{h_1\})\},$$

$$(F_4,E)=\{(e_1,\{h_2\}),(e_2,\{h_1\})\},$$

$$(F_5,E)=\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,X)\},$$

$$(F_6,E)=\{(e_1,X),(e_2,\{h_1,h_2\})\},$$

$$(F_7,E)=\{(e_1,\{h_2,h_3\}),(e_2,\{h_1,h_3\})\},$$

$\tilde{\tau}$ ailesinin $X$ üzerinde bir esnek topoloji olduğu açıktır. Böylece $(X,\tilde{\tau},E)$ bir esnek topolojik uzaydır. $(F,E)$ ve $(G,E)$ aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$(F,E)=\{(e_1,\{h_1,h_3\}),(e_2,\phi)\},$$

$$(G,E)=\{(e_1,\{h_2,h_3\}),(e_2,\{h_1,h_2\}\},$$

Bu durumda $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)=((F\cap G),E)=\{(e_1,\{h_3\}),(e_2,\phi)\}$ elde edilir. Şimdi $scl((F,E))=(\tilde{X},E)\tilde{\cap}(F_2,E)^c\tilde{\cap}(F_4,E)^c=(F_2,E)^c$ ve $scl((G,E))=(\tilde{X},E)$ olarak bulunur. Dolayısıyla $scl((F,E))\tilde{\cap}scl((G,E))=scl((F,E))$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} scl((F,E)\tilde{\cap}(G,E)) &= \tilde{\cap}\{(\tilde{X},E),(F_1,E)^c,(F_4,E)^c,(F_5,E)^c\} \\ &= (F_5,E)^c \end{aligned}$$

Yani

$$scl((F,E)\tilde{\cap}(G,E))\tilde{\subseteq}scl((F,E))\tilde{\cap}scl((G,E))$$

olur. Fakat

$$scl((F,E)\tilde{\cap}(G,E))\neq scl((F,E))\tilde{\cap}scl((G,E)).$$

<u>Teorem 2.2.2</u> [69] $(X,\tau,E)$ bir esnek topolojik uzay ve $(x_e,E)$ yi içeren esnek açık kümelerin ailesi $\tilde{\tau}_{x_e}$ ile gösterilsin.

$$(x_e,E)\tilde{\in}scl(G,E)\Leftrightarrow(O_{x_e},E)\tilde{\cap}(G,E)\neq(\tilde{\phi},E),\quad\forall(O_{x_e},E)\in\tilde{\tau}_{x_e}.$$

Tanım 2.2.8 [49] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir esnek topolojik uzay, $(F,E)$, $(G,E)\in SS(X)_E$ ve $(x_e,E)\tilde{\in} SS(X)_E$ olsun. Eğer $(x_e,E)\tilde{\in}(G,E)\tilde{\subseteq}(F,E)$ olacak şekilde $(G,E)$ esnek açık kümesi varsa $(x_e,E)$ esnek noktası $(F,E)$ nin *iç noktasıdır* denir.

Tanım 2.2.9 [33] $(X,\tilde{\tau},E)$ ve $(Y,\tilde{\tau}',E)$ iki esnek topolojik uzay, $f:(X,\tilde{\tau},E)\to(Y,\tilde{\tau}',E)$ bir dönüşüm olsun. $(f((x_e,E)),E)$ nin herhangi $(H,E)$ esnek komşuluğu için $f((F,E))\tilde{\subseteq}(H,E)$ olacak şekilde $(x_e,E)$ nin en az bir $(F,E)$ esnek komşuluğu varsa $f$ dönüşümüne *esnek sürekli dönüşüm* denir.

Tanım 2.2.10 [33] $(X,\tilde{\tau},E)$ ve $(Y,\tilde{\tau}',E)$ iki esnek topolojik uzay, $f:(X,\tilde{\tau},E)\to(Y,\tilde{\tau}',E)$ bir dönüşüm olsun. $f$ dönüşümü birebir, örten, $f$ ve $f^{-1}$ esnek sürekli ise $f$ dönüşümüne *esnek homeomorfizma* denir ve $X$ den $Y$ ye esnek homeomorfizma şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.2.8 [70] $\{(\varphi_s,\psi_s):(X,\tilde{\tau},E)\to(Y_s,\tilde{\tau}_s,E_s)\}_{s\in S}$ esnek dönüşümler ailesi ve $\{(Y_s,\tilde{\tau}_s,E_s)\}_{s\in S}$ esnek topolojik uzaylar ailesi olsun. Buradan, $\tilde{\tau}$ esnek topolojisi $\delta=\{(\varphi_s,\psi_s)^{-1}_{s\in S}(F,E):(F,E)\in\tilde{\tau}_s,\ s\in S\}$ alt tabanı tarafından *üretilen esnek topoloji* olarak adlandırılır.

**2.3 Esnek Ayırma Aksiyomları**

Tanım 2.3.1 [35] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir esnek topolojik uzay ve $x_e\neq y_{e'}$ olacak şekilde $x_e,y_{e'}\tilde{\in} SS(X)_E$ olsun. Eğer $x_e\in(F,E)$, $y_e\notin(F,E)$ veya $x_e\notin(G,E)$, $y_{e'}\in(G,E)$ sağlanacak şekilde $(F,E)$ ve $(G,E)$ esnek açık kümeri varsa $(X,\tilde{\tau},E)$ uzayına *esnek $T_0-$uzayı* denir.

Örnek 2.3.1 [71] $X=\{x,y\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve

$$\tilde{\tau}=\{(\tilde{\phi},E),(\tilde{X},E),(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E)\}$$

olsun. Burada $(F_1,E),(F_2,E)$ ve $(F_3,E)$ esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(F_1,E)=\{(e_1,X),(e_2,\{y\}\},$$

$$(F_2,E)=\{(e_1,\{x\}),(e_2,X)\},$$

$$(F_3,E)=\{(e_1,\{x\}),(e_2,\{y\}\}.$$

$\tilde{\tau}$ ailesinin $X$ üzerinde bir esnek topoloji olduğu açıktır. $(X,\tilde{\tau},E)$ uzayı bir esnek $T_0-$ uzayıdır. Çünkü $x_{e_1}\tilde{\in}(F_2,E)$, $y_{e_1}\tilde{\notin}(F_2,E)$ ve $x_{e_2}\tilde{\notin}(F_1,E)$, $y_{e_2}\tilde{\in}(F_1,E)$ olacak şekilde $(F_1,E)$, $(F_2,E)\in\tilde{\tau}$ vardır.

<u>Tanım 2.3.2</u> [35] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir esnek topolojik uzay ve $x_e\neq y_{e'}$ olacak şekilde $x_e,y_{e'}\tilde{\in}SS(X)_E$ olsun. Eğer $x_e\in(F,E)$, $y_{e'}\notin(F,E)$ ve $x_e\notin(G,E)$, $y_{e'}\in(G,E)$ sağlanacak şekilde $(F,E)$ ve $(G,E)$ esnek açık kümeleri varsa $(X,\tilde{\tau},E)$ uzayına *esnek* $T_1-$*uzayı* denir.

<u>Teorem 2.3.1</u> [49] $(X,\tau,E)$ bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer her $x_e\tilde{\in}SS(X)_E$ için $\tau$ da $(x,E)$ esnek kapalı kümesi varsa $(X,\tilde{\tau},E)$ uzayı esnek $T_1-$uzayıdır.

<u>Örnek 2.3.2</u> [71] $X=\{x,y\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve

$$\tilde{\tau}=\{(\tilde{\phi},E),(\tilde{X},E),(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E),(F_4,E)\}$$

olsun. Burada $(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E)$ ve $(F_4,E)$ esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(F_1,E)=\{(e_1,\{x\}),(e_2,\phi)\},$$

$$(F_2,E)=\{(e_1,\{x\}),(e_2,\{y\})\},$$

$$(F_3,E)=\{(e_1,\{y\}),(e_2,\{x\})\},$$

$$(F_4,E)=\{(e_1,X),(e_2,\{x\})\}.$$

$\tilde{\tau}$ ailesinin $X$ üzerinde bir esnek topoloji olduğu açıktır. $x_{e_1}, y_{e_1}$ esnek noktaları için $x_{e_1} \tilde{\in} (F_2, E),\ y_{e_1} \tilde{\notin} (F_2, E)$ ve $y_{e_1} \tilde{\in} (F_3, E),\ x_{e_1} \tilde{\notin} (F_3, E)$ olacak şekilde $(F_2, E),\ (F_3, E) \in \tilde{\tau}$ vardır. $x_{e_2}, y_{e_2}$ esnek noktaları için $x_{e_2} \tilde{\in} (F_3, E),\ y_{e_2} \tilde{\notin} (F_3, E)$ ve $y_{e_2} \tilde{\in} (F_2, E),\ x_{e_1} \tilde{\notin} (F_2, E)$ olacak şekilde $(F_2, E),\ (F_3, E) \in \tilde{\tau}$ vardır. Dolayısıyla $(X, \tilde{\tau}, E)$ uzayı bir esnek $T_1-$uzayıdır. Fakat $x_{e_1}$ bir esnek kapalı küme değildir.

Önerme 2.3.1 [49] $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Eğer $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek $T_0-$uzayı ise $(Y, \tilde{\tau}_Y, E)$ uzayı da esnek $T_0-$uzayıdır.

Önerme 2.3.2 [49] $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Eğer $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek $T_1$-uzayı ise $(Y, \tilde{\tau}_Y, E)$ uzayı da esnek $T_1$-uzayıdır.

Tanım 2.3.3 [35] $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay ve $x_e \neq y_{e'}$ olacak şekilde $x_e, y_{e'} \tilde{\in} SS(X)_E$ olsun Eğer $x_e \in (F, E),\ y_{e'} \in (G, E)$ ve $(F, E) \cap (G, E) = \varnothing$ sağlanacak şekilde $(F, E)$ ve $(G, E)$ esnek açık kümeleri varsa $(X, \tilde{\tau}, E)$ uzayına *esnek $T_2-$uzayı* denir.

Örnek 2.3.3 [71] $X = \{x, y\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve

$$\tilde{\tau} = \{(\tilde{\phi}, E), (\tilde{X}, E), (F_1, E), (F_2, E)\}$$

olsun. Burada $(F_1, E)$ ve $(F_2, E)$ esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(F_1, E) = \{(e_1, \{x\}), (e_2, \{y\})\},$$

$$(F_2, E) = \{(e_1, \{y\}), (e_2, \{x\})\},$$

$\tilde{\tau}$ ailesinin $X$ üzerinde bir esnek topoloji olduğu açıktır. $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek $T_2-$uzayıdır.

Önerme 2.3.3 [49] $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Eğer $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek $T_2-$uzayı ise $(Y, \tilde{\tau}_Y, E)$ uzayı da esnek $T_2-$uzayıdır.

Önerme 2.3.4 [49] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer $(X,\tau,E)$ uzayı esnek $T_2-$uzayı ise her $e\in E$ için $(X,\tau_e)$ uzayı $T_2-$uzayıdır.

Sonuç 2.3.1 [49]

1. Her esnek $T_1-$uzayı bir esnek $T_0-$uzayıdır.
2. Her esnek $T_2-$uzayı bir esnek $T_1-$ uzayıdır.

Tanım 2.3.3 [35] $(X,\tau,E)$ bir esnek $T_1-$uzayı, $(G,E)$, $X$ üzerinde esnek kapalı bir küme ve $x_e \notin (G,E)$ olacak şekilde $x_e \tilde{\in} SS(X)_E$ olsun. Eğer $x_e \in (F_1,E), (G,E) \tilde{\subseteq} (F_2,E)$ ve $(F_1,E)\tilde{\cap}(F_2,E)=\varnothing$ olacak şekilde $(F_1,E)$ ve $(F_2,E)$ esnek açık kümeleri varsa $(X,\tau,E)$ uzayına *esnek* $T_3-$*uzayı* denir.

Sonuç 2.3.2 [49]

1. Her esnek $T_3-$uzayı bir esnek $T_2-$uzayı olmayabilir.
2. Eğer $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek $T_3-$uzayı ise her $e\in E$ için $(X,\tau_e)$, $T_3-$uzayı olmayabilir.

Önerme 2.3.5 [49] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir esnek topolojik uzay ve $Y\subseteq X$ olsun. Eğer $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek $T_3-$uzayı ise $(Y,\tilde{\tau}_Y,E)$ uzayı da esnek $T_3-$uzayıdır.

Tanım 2.3.4 [35] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir esnek $T_1-$uzayı, $(F,E)$ ve $(G,E)$, $X$ üzerinde esnek kapalı küme ve $(F,E)\cap(G,E)=\varnothing$ olsun. Eğer $(F,E)\tilde{\subseteq}(F_1,E), (G,E)\tilde{\subseteq}(F_2,E)$ ve $(F_1,E)\tilde{\cap}(F_2,E)=\varnothing$ olacak şekilde $(F_1,E)$ ve $(F_2,E)$ esnek açık kümeleri varsa $(X,\tau,E)$ uzayına *esnek* $T_4-$*uzayı* denir.

Sonuç 2.3.3 [49]

1. Her esnek $T_4-$uzayı bir esnek $T_3-$uzayı olmayabilir.
2. Eğer $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek $T_4-$uzayı ise her $e\in E$ için $(X,\tau_e)$, $T_4-$uzayı olmayabilir.

3. Eğer $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek $T_4-$uzayı ve $Y\subseteq X$ ise $(Y,\tilde{\tau}_Y,E)$ uzayı esnek $T_4-$uzayı olmayabilir.

### 2.4 Esnek Genelleştirilmiş Topolojik Uzaylar

Tanım 2.4.1 [57] $\tilde{g}$, $X$ üzerindeki esnek kümelerin bir ailesi olsun. Eğer

1. $(\tilde{\phi},E)\in\tilde{g}$,
2. $\tilde{g}$ ye ait olan herhangi sayıdaki kümelerin birleşimi $\tilde{g}$ ye aittir

koşulları sağlanırsa $\tilde{g}$ ye $X$ üzerinde bir *esnek genelleştirilmiş topoloji,* $(X,\tilde{g},E)$ üçlüsüne ise esnek *genelleştirilmiş topolojik uzay* denir. $\tilde{g}$ nin her elemanına *esnek genelleştirilmiş açık küme* denir.

Tanım 2.4.2 [57] $\tilde{g}$, $X$ üzerinde bir esnek genelleştirilmiş topoloji olsun. Eğer $(\tilde{X},E)\in\tilde{g}$ ise $\tilde{g}$ ye *esnek genelleştirilmiş kuvvetli topoloji* denir.

Uyarı 2.4.1 Açıktır ki her topolojik uzay aynı zamanda bir genelleştirilmiş topolojik uzaydır fakat tersi her zaman sağlanmayabilir.

Tanım 2.4.3 [57] $(X,\tilde{g}_1,E)$ ve $(X,\tilde{g}_2,E)$ iki esnek genelleştirilmiş topolojik uzay olsun.

1. Eğer $\tilde{g}_1\subseteq\tilde{g}_2$ ise $\tilde{g}_2$ ye $\tilde{g}_1$ den daha incedir denir.
2. Eğer $\tilde{g}_1\subseteq\tilde{g}_2$ ve $\tilde{g}_2\subseteq\tilde{g}_1$ ise $\tilde{g}_1$ ve $\tilde{g}_2$ karşılaştırılabilirdir denir.

Tanım 2.4.4 [57] $(X,\tilde{g},E)$ esnek genelleştirilmiş topolojik uzay ve $B$ ailesi $\tilde{g}$ nin bir alt ailesi olsun. Eğer $\tilde{g}$ nin her elemanı $B$ nin bazı elemanlarının birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa $B$ ye $\tilde{g}$ nin *esnek $\tilde{g}-$tabanı* denir.

Teorem 2.4.1 [57] $(X,\tilde{g}_1,E)$ ve $(X,\tilde{g}_2,E)$ iki esnek genelleştirilmiş topolojik uzay ve $B_1$, $B_2$ sırasıyla $\tilde{g}_1$ ve $\tilde{g}_2$ için bir esnek taban olsun. $\tilde{g}_2$, $\tilde{g}_1$ den daha incedir ancak ve ancak $B_1$ in her elemanı $B_2$ nin bazı elemanlarının esnek birleşimi olarak yazılabilir.

Teorem 2.4.2 [57] $(F,E)$ bir esnek küme ve $B$ ailesi $(F,E)$ nin esnek altkümelerinin bir ailesi olsun. Bu durumda $B$ esnek tabanı ile $(F,E)$ üzerinde bir esnek genelleştirilmiş topoloji vardır.

Tanım 2.4.5 [57] $(X,\tilde{g},E)$ bir esnek genelleştirilmiş topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. $\tilde{g}_Y = \{(Y,E)\tilde{\cap}(G,E):(G,E)\in\tilde{g}\}$ ailesine $Y$ üzerinde *esnek genelleştilmiş alt uzay topolojisi* $(Y,\tilde{g}_Y,E)$ üçlüsüne ise *esnek genelleştirilmiş topolojik alt uzay* denir.

Teorem 2.4.3 [57] $(X,\tilde{g},E)$ bir esnek genelleştirilmiş topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Bu durumda $Y$ üzerinde ki esnek genelleştirilmiş alt uzay topolojisi de bir esnek genelleştirilmiş topolojidir.

Tanım 2.4.6 [57] $(X,\tilde{g},E)$ uzayı bir esnek genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E)$, $X$ üzerinde bir esnek küme olsun. $(F,E)$ kümesinin *esnek* $\tilde{g}-$*içi* $sint_{\tilde{g}}(F,E)$ ile gösterilir ve $sint_{\tilde{g}}(F,E)=\tilde{\bigcup}\{(U,E)\in\tilde{g}:(U,E)\tilde{\subseteq}(F,E)\}$ şeklinde tanımlanır. $sint_{\tilde{g}}(F,E)$ kümesi $(F,E)$ kümesinin içerdiği en büyük esnek $\tilde{g}-$açık kümedir.

Teorem 2.4.4 [57] $(X,\tilde{g},E)$ uzayı bir esnek genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E)$, $X$ üzerinde bir esnek küme olsun. $(F,E)$ esnek $\tilde{g}-$açıktır ancak ve ancak $(F,E)=sint_{\tilde{g}}(F,E)$.

Teorem 2.4.5 [57] $(X,\tilde{g},E)$ bir esnek genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E),(G,E)\in SS(X)_E$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. $sint_{\tilde{g}}(F,E)\tilde{\subseteq}(F,E)$,

2. Eğer $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ ise $sint_{\tilde{g}}(F,E)\tilde{\subseteq} sint_{\tilde{g}}(G,E)$ dir,

3. $sint_{\tilde{g}}[(F,E)\tilde{\cap}(G,E)]\tilde{\subseteq} sint_{\tilde{g}}(F,E)\tilde{\cap} sint_{\tilde{g}}(G,E)$ ve
$sint_{\tilde{g}}(F,E)\tilde{\cup} sint_{\tilde{g}}(G,E)\tilde{\subseteq} sint_{\tilde{g}}[(F,E)\tilde{\cup}(G,E)]$

4. $sint_{\tilde{g}}\left[sint_{\tilde{g}}(F,E)\right]=sint_{\tilde{g}}(F,E)$

<u>Tanım 2.4.7</u> [57] $(X,\tilde{g},E)$ bir esnek genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. Eğer $(F,E)^c\in\tilde{g}$ ise $(F,E)$ esnek kümesine esnek $\tilde{g}-$*kapalı küme* denir.

<u>Teorem 2.4.6</u> [57] $(X,\tilde{g},E)$ bir esnek genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. $(X,E)$ esnek $\tilde{g}-$kapalı kümedir.
2. Esnek $\tilde{g}-$kapalı kümelerin keyfi esnek arakesitleri de esnek $\tilde{g}-$kapalı kümedir.

<u>Tanım 2.4.8</u> [57] $(X,\tilde{g},E)$ bir esnek genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. $(F,E)$ kümesini içeren tüm esnek $\tilde{g}-$kapalı kümelerin arakesitine $(F,E)$ kümeninin esnek $\tilde{g}-$kapanışı denir ve $scl_{\tilde{g}}(F,E)$ ile gösterilir. $scl_{\tilde{g}}(F,E)$ kümesi $(F,E)$ kümesini içeren en küçük esnek $\tilde{g}-$kapalı kümedir.

<u>Teorem 2.4.7</u> [57] $(X,\tilde{g},E)$ bir esnek genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. $(F,E)$ esnek $\tilde{g}-$kapalı kümedir ancak ve ancak $scl_{\tilde{g}}(F,E)=(F,E)$ dir.

<u>Teorem 2.4.8</u> [57] $(X,\tilde{g},E)$ bir esnek genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. Bu durumda $sınt_{\tilde{g}}(F,E)\subseteq(F,E)\subseteq scl_{\tilde{g}}(F,E)$ şeklindedir.

<u>Teorem 2.4.9</u> [57] $(X,\tilde{g},E)$ bir esnek genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E),(G,E)\in SS(X)_E$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. Eğer $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ ise $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\tilde{\subseteq} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(G,E)$ dir.
2. $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\tilde{\bigcup} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(G,E)\tilde{\subseteq} scl_{\tilde{g}_{1,2}}[(F,E)\tilde{\bigcup}(G,E)]$ ve

   $scl_{\tilde{g}_{1,2}}[(F,E)\tilde{\bigcap}(G,E)]\tilde{\subseteq} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\tilde{\bigcap} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(G,E)$
3. $scl_{\tilde{g}_{1,2}}\left[scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\right]=scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)$

Teorem 2.4.10 [57] $(X,\tilde{g},E)$ bir esnek genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E),(G,E)\in SS(X)_E$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. $scl_{\tilde{g}}((F,E)^c)=scl_{\tilde{g}}(sint(F,E))^c$
2. $sint_{\tilde{g}}((F,E)^c)=(scl_{\tilde{g}}(F,E))^c$
3. $sint_{\tilde{g}}(F,E)=\left(scl_{\tilde{g}}((F,E)^c)\right)^c$
4. $scl_{\tilde{g}}(F,E)=\left(sint_{\tilde{g}}((F,E)^c)\right)^c$
5. $sint_{\tilde{g}}\left((F,E)\setminus(G,E)\right)\subseteq sint_{\tilde{g}}(F,E)\setminus sint_{\tilde{g}}(G,E)$

Tanım 2.4.9 [57] $(X,\tilde{g},E)$ bir esnek genelleştirilmiş topolojik uzay, $(F,E)\in SS(X)_E$ ve $x_e$ noktası $X$ üzerinde bir esnek nokta olsun. Eğer $x_e\tilde{\in}(G,E)\tilde{\subseteq}(F,E)$ olacak şekilde bir $(G,E)$ esnek $\tilde{g}-$açık kümesi varsa $(F,E)$ ye $x_e$ esnek noktasının bir *esnek $\tilde{g}-$komşuluğu* denir. $x_e$ nin tüm esnek $\tilde{g}-$komşuluklarının kümesine $x_e$ nin *esnek $\tilde{g}-$komşuluklar ailesi* denir ve $\tilde{N}_{\tilde{g}}(x_e)$ ile gösterilir.

Teorem 2.4.11 [57] $(X,\tilde{g},E)$ bir esnek genelleştirilmiş topolojik uzay, $(F,E)$ ve $(G,E)$ $X$ üzerinde iki esnek küme ve $x_e\tilde{\in} SS(X)_E$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. Eğer $(F,E)\in\tilde{N}_{\tilde{g}}(x_e)$ ise $x_e\tilde{\in}(F,E)$ dir.
2. Eğer $(F,E)\in\tilde{N}_{\tilde{g}}(x_e)$ ve $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ ise $(G,E)\in\tilde{N}_{\tilde{g}}(x_e)$ dir.
3. $(F,E)$ bir esnek çiftsel $\tilde{g}-$açık kümedir$\Leftrightarrow$ $(F,E)$ her esnek noktasının bir esnek çiftsel $\tilde{g}-$komşuluğudur.

Tanım 2.4.10 [57] $(X,\tilde{g}_1,E)$ ve $(Y,\tilde{g}_2,E)$ iki esnek genelleştirilmiş topolojik uzay ve $f:(X,\tilde{g}_1,E)\to(Y,\tilde{g}_2,E)$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer $(G,E)\in\tilde{g}_2$ kümesi için $f^{-1}((G,E))$ kümesi $(X,\tilde{g}_1,E)$ uzayında esnek $\tilde{g}_1-$açık küme ise $f$ fonksiyonuna *esnek* $\tilde{g}-$*sürekli* denir.

Teorem 2.4.12 [57] $(X,\tilde{g}_1,E)$, $(Y,\tilde{g}_2,E)$ uzayları iki esnek genelleştirilmiş topolojik uzay ve $f:(X,\tilde{g}_1,E)\to(Y,\tilde{g}_2,E)$ bir esnek fonksiyon olsun. $f$ fonksiyonu $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek genelleştirilmiş topolojik uzayında bir esnek $\tilde{g}-$sürekli dönüşümdür ancak ve ancak $Y$ üzerinde her esnek $\tilde{g}_2$-kapalı $(G,E)$ kümesi için $f^{-1}((G,E))$, $X$ üzerinde esnek $\tilde{g}_1-$kapalı bir kümedir.

Teorem 2.4.13 [57] $(X,\tilde{g}_1,E)$, $(Y,\tilde{g}_2,E)$ uzayları iki esnek genelleştirilmiş topolojik uzay ve $f:(X,\tilde{g}_1,E)\to(Y,\tilde{g}_2,E)$ bir esnek fonksiyon olsun. $f$ fonksiyonu $(X,\tilde{g}_1,E)$ esnek genelleştirilmiş topolojik uzayında esnek $\tilde{g}_1-$sürekli bir dönüşümdür ancak ve ancak $f(scl_{\tilde{g}_1}(F,E))\tilde{\subseteq} scl_{\tilde{g}_2}(f((F,E)))$.

## 2.5 Esnek İkili Topolojik Uzaylar

Tanım 2.5.1 [34] $(X,\tilde{\eta}_1,E)$, $(X,\tilde{\eta}_2,E)$ $X$ üzerinde herhangi iki farklı esnek topolojik uzay olsun. $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ dörtlüsüne *esnek ikili topolojik uzay* denir.

Tanım 2.5.2 [35] $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ esnek ikili topolojik uzay olsun. $(H,E)=(H_1,E)\tilde{\cup}(H_2,E)$ olacak şekilde $(H_1,E)\in\tilde{\eta}_1$, $(H_2,E)\in\tilde{\eta}_2$ ise $(H,E)\in SS(X)_E$ esnek kümesine *esnek çiftsel açık küme* denir.

Tanım 2.5.3 [35] $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ esnek ikili topolojik uzay olsun. $(H,E)$ esnek kümesinin tümleyeni esnek çiftsel açık küme ise $(H,E)\in SS(X)_E$ kümesine *esnek çiftsel kapalı küme* denir.

$(G,E)=(G_1,E)\tilde{\bigcap}(G_2,E)$ olacak şekilde $(G_1,E)\in\tilde{\eta}_1{}^c$ ve $(G_2,E)\in\tilde{\eta}_2{}^c$ varsa $(G,E)$ esnek kümesi $X$ üzerinde esnek çiftsel kapalı kümedir. Burada,

$$\tilde{\eta}_i^c=\left\{(H,E)^c\in SS(X)_E:(H,E)\in\tilde{\eta}_i\right\},\ i=1,2$$

$(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ üzerindeki esnek çiftsel açık (çiftsel kapalı) kümelerin ailesi sırasıyla $POS(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2)_E$ $(PCS(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2)_E)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.5.1 [35] $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ ve $E=\{e_1,e_2\}$ olsun. Aşağıdaki esnek kümeleri dikkate alalım.

$$(F_1,E)=\{(e_1,\{x_1\}),(e_2,\{x_1,x_3\})\},$$

$$(F_2,E)=\{(e_1,\{x_1,x_2\}),(e_2,X)\},$$

$$(F_3,E)=\{(e_1,\{x_2\}),(e_2,\{x_2\})\},$$

$$(G_1,E)=\{(e_1,\{x_2,x_3\}),(e_2,\{x_1\})\},$$

$$(G_2,E)=\{(e_1,\phi),(e_2,\{x_2\})\},$$

$$(G_3,E)=\{(e_1,\{x_2,x_2\}),(e_2,\{x_1,x_2\})\}.$$

Bu durumda,

$$\tilde{\eta}_1=\{(\tilde{X},E),(\tilde{\phi},E),(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E)\},$$

$$\tilde{\eta}_2=\{(\tilde{X},E),(\tilde{\phi},E),(G_1,E),(G_2,E),(G_3,E)\}$$

aileleri $X$ üzerinde iki esnek topolojik uzay oluşturur. O halde $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ esnek ikili topolojik uzaydır. Burada,

$$\tilde{\eta}_{1,2}=\tilde{\eta}_1\tilde{\cup}\tilde{\eta}_2\tilde{\cup}\{(F_1,E)\tilde{\cup}(G_1,E),(F_1,E)\tilde{\cup}(G_2,E)\}$$

olur.

Çünkü;

$$(F_1,E)\tilde{\cup}(G_3,E)=(\tilde{X},E),$$

$$(F_2,E)\tilde{\cup}(G_1,E)=(F_2,E)\tilde{\cup}(G_3,E)=(\tilde{X},E),$$

$$(F_2,E)\tilde{\cup}(G_2,E)=(G_2,E),$$
$$(F_3,E)\tilde{\cup}(G_1,E)=(G_3,E),$$
$$(F_3,E)\tilde{\cup}(G_2,E)=(F_3,E),$$
$$(F_3,E)\tilde{\cup}(G_3,E)=(G_3,E).$$

$(F_1,E)\tilde{\cup}(G_1,E)=\{(e_1,X),(e_2,\{x_1,x_3\})\}$ esnek kümesi $\tilde{\eta}_1$ yada $\tilde{\eta}_2$ ye ait değildir. Ayrıca $(F_1,E)\tilde{\cup}(G_2,E)=\{(e_1,\{x\}),(e_2,X)\}$ esnek kümeside $\tilde{\eta}_1$ yada $\tilde{\eta}_2$ ye ait değildir. Buradan esnek çiftsel kapalı kümeler ailesi de kolaylıkla elde edilebilir.

<u>Teorem 2.5.1</u> [35] $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ esnek ikili topolojik uzay olsun.

1. $(\tilde{X},E)$, $(\tilde{\phi},E)$ esnek kümeleri hem esnek çiftsel açık hemde esnek çiftsel kapalı kümelerdir.
2. Keyfi sayıda esnek çiftsel açık kümenin birleşimi yine esnek çiftsel açık kümedir.
3. Keyfi sayıdaki esnek çiftsel kapalı kümenin arakesiti yine esnek çiftsel kapalı kümedir.
4. Eğer $(F,E)\in\tilde{\eta}_1\cap\tilde{\eta}_2$ ve $(G,E)\in POS(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E$ ise $(G,E)\tilde{\cap}(F,E)\in POS(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E$ dir.

<u>Teorem 2.5.2</u> [35] $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ esnek ikili topolojik uzay olsun.

1. Her $\tilde{\eta}_i$ açık esnek kümesi esnek çiftsel açık kümedir, $i=1,2$ yani $\tilde{\eta}_1\tilde{\cup}\tilde{\eta}_2\subseteq\tilde{\tau}_{1,2}$ dir.
2. Her $\tilde{\eta}_i$ esnek kapalı kümesi esnek çiftsel kapalı kümedir $i=1,2$ yani $\tilde{\eta}_1^{\,c}\tilde{\cup}\tilde{\eta}_2^{\,c}\subseteq\tilde{\eta}_{12}^{\,c}(=PCS(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2)_E)$ dir.
3. Eğer $\tilde{\eta}_1\subseteq\tilde{\eta}_2$ ise $\tilde{\eta}_{1,2}=\tilde{\eta}_2$ ve $\tilde{\eta}_{1,2}^{\,c}=\tilde{\eta}_2^{\,c}$ dir.

<u>Lemma 2.5.1</u> [35] $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ esnek ikili topolojik uzay olsun. $(F,E)\in SS(X)_E$ esnek kümesi esnek çiftsel açık kümedir $\Leftrightarrow$ $\forall(x_e,E)\tilde{\in}(F,E)$ için $(S^1_{x_e},E)\tilde{\subseteq}(F,E)$ olacak şekilde $(S^1_{x_e},E)\in\tilde{\eta}_1$ vardır veya $(S^2_{x_e},E)\tilde{\subseteq}(F,E)$ olacak şekilde $(S^2_{x_e},E)\in\tilde{\eta}_2$

vardır. Buradan $(x_e, E)$ yi içeren $\tilde{\eta}_i -$esnek açık kümeler $(S^i_{x_e}, E)$ ile gösterilir, $(i = 1, 2)$.

Tanım 2.5.4 [35] $(X, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, E)$ esnek ikili topolojik uzay ve $(F, E) \in SS(X)_E$ olsun. $(F, E)$ esnek kümesinin *esnek çiftsel kapanışı* $scl_p(F, E)$ ile gösterilir ve $scl_p(F, E) = \tilde{\bigcap}\left\{(H, E) \in \tilde{\eta}^c_{1,2} : (F, E) \tilde{\subseteq} (H, E)\right\}$ şeklinde tanımlanır.

$scl_p(F, E)$ esnek kümesinin $(F, E)$ esnek kümesini içeren en küçük esnek çiftsel kapalı küme olduğu açıktır.

Örnek 2.5.2 [35] $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve

$$\tilde{\eta}_1 = \left\{(\tilde{X}, E), (\tilde{\phi}, E), (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E)\right\},$$

$$\tilde{\eta}_2 = \left\{(\tilde{X}, E), (\tilde{\phi}, E), (H_1, E), (H_2, E)\right\}$$

olsun. Burada

$$(G_1, E) = \left\{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_2\})\right\},$$

$$(G_2, E) = \left\{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_3\})\right\},$$

$$(G_3, E) = \left\{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\right\},$$

$$(H_1, E) = \left\{(e_1, \{x_1, x_3\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\right\},$$

$$(H_2, E) = \left\{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_3\})\right\}.$$

Dolayısıyla $(X, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, E)$ esnek ikili topolojik uzaydır ve

$$\tilde{\eta}_{1,2} = \left\{(\tilde{X}, E), (\tilde{\phi}, E), (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E), (H_1, E), (H_2, E), (N_1, E), (N_2, E), (N_3, E)\right\}$$

olduğu açıktır. Burada,

$$(N_1, E) = (G_1, E) \,\tilde{\bigcup}\, (H_2, E) = \left\{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\right\},$$

$$(N_2, E) = (G_2, E) \,\tilde{\bigcup}\, (H_1, E) = \left\{(e_1, X), (e_2, \{x_2, x_3\})\right\},$$

$$(N_3, E) = (G_2, E) \,\tilde{\bigcup}\, (H_2, E) = \left\{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_3\})\right\}$$

Sonuç olarak,

$$\tilde{\eta}_{1,2}{}^{c}=\left\{(\tilde{X},E)^{c},(\tilde{\phi},E)^{c},(G_1,E)^{c},(G_2,E)^{c},(G_3,E)^{c},(H_1,E)^{c},(H_2,E)^{c},(N_1,E)^{c},(N_2,E)^{c},(N_3,E)^{c}\right\},$$

$$(G_1,E)^{c}=\left\{(e_1,\left\{x_2,x_3\right\}),(e_2,\left\{x_1,x_3\right\})\right\},$$

$$(G_2,E)^{c}=\left\{(e_1,\left\{x_1,x_3\right\}),(e_2,\left\{x_1,x_2\right\})\right\},$$

$$(G_3,E)^{c}=\left\{(e_1,\left\{x_3\right\}),(e_2,\left\{x_1\right\})\right\},$$

$$(H_1,E)^{c}=\left\{(e_1,\left\{x_2\right\}),(e_2,\left\{x_1\right\})\right\},$$

$$(H_2,E)^{c}=\left\{(e_1,\left\{x_1,x_3\right\}),(e_2,\left\{x_1,x_2\right\})\right\},$$

$$(N_1,E)^{c}=\left\{(e_1,\left\{x_2,x_3\right\}),(e_2,\left\{x_1\right\})\right\},$$

$$(N_2,E)^{c}=\left\{(e_1,\left\{\phi\right\}),(e_2,\left\{x_1\right\})\right\},$$

$$(N_3,E)^{c}=\left\{(e_1,\left\{x_3\right\}),(e_2,\left\{x_1,x_2\right\})\right\}.$$

$(M,E)=\left\{(e_1,\left\{x_3\right\}),(e_2,\left\{x_1,x_3\right\})\right\}$ ve $(F,E)=\left\{(e_1,\left\{x_2,x_3\right\}),(e_2,\left\{x_1\right\})\right\}$ kümeleri verilsin. $(M,E)$ esnek kümesini içeren esnek çiftsel kapalı kümeler $(G_1,E)^{c},(\tilde{X},E)$ dir. $scl_p(M,E)=(G_1,E)^{c}\tilde{\cap}(\tilde{X},E)$ dir. Bu nedenle $scl_p(M,E)=\left\{(e_1,\left\{x_2,x_3\right\}),(e_2,\left\{x_1,x_3\right\})\right\}$ olur. Ayrıca $(F,E)$ esnek kümesini içeren esnek çiftsel kapalı kümeler $(G_1,E)^{c}$, $(H_2,E)^{c},(N_1,E)^{c}$ ve $(\tilde{X},E)$ dir. Bu durumda, $scl_p(F,E)=(G_1,E)^{c}\tilde{\bigcap}(\tilde{X},E)\tilde{\bigcap}(H_2,E)^{c}\tilde{\bigcap}(N_1,E)^{c}$.

Sonuç olarak,

$scl_p(F,E)=\left\{(e_1,\left\{x_2,x_3\right\}),(e_2,\left\{x_1\right\})\right\}=(F,E)$ bulunur.

<u>Teorem 2.5.3</u> [35] $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ esnek ikili topolojik uzay ve $(F,E)$, $(G,E)\in SS(X)_E$ olsun.

1. $scl_p(\tilde{\phi},E)=(\tilde{\phi},E)$ ve $scl_p(\tilde{X},E)=(\tilde{X},E)$.
2. $(F,E)\tilde{\subseteq}scl_p(F,E)$.
3. $(F,E)$ esnek çiftsel kapalı küme $\Leftrightarrow scl_p(F,E)=(F,E)$.
4. $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)\Rightarrow scl_p(F,E)\tilde{\subseteq}scl_p(G,E)$.
5. $scl_p(F,E)\tilde{\cup}scl_p(G,E)\tilde{\subseteq}scl_p\left[(F,E)\tilde{\cup}(G,E)\right]$.
6. $scl_p\left[scl_p(F,E)\right]=scl_p(F,E)$ yani $scl_p(F,E)$ esnek çiftsel kapalı kümedir.

Teorem 2.5.4 [35] $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ esnek ikili topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. $(x_e,E)\tilde{\in} scl_p(F,E)\Leftrightarrow (S_{x_e},E)\tilde{\bigcap}(F,E)\neq(\tilde{\phi},E),\ \forall(S_{x_e},E)\in\tilde{\eta}_{1,2}(x_e),$ buradan $(S_{x_e},E)$ esnek kümesi $(x_e,E)$ yi içeren herhangi esnek çiftsel açık küme ve $\tilde{\eta}_{1,2}((x_e,E))$ ailesi $(x_e,E)$ yi içeren esnek çiftsel açık kümeler ailesidir.

Örnek 2.5.3 [35] $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ esnek ikili topolojik uzayı Örnek 2.5.2' de olduğu gibi tanımlansın.

$(M,E)=\{(e_1,\{x_2,x_3\}),(e_2,\{x_1,x_3\})\}$ kümesi verilsin ve $scl_p(M,E)$ esnek kümesini Teorem 2.5.4 kullanarak bulalım. $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ uzayı üzerindeki esnek noktalar aşağıdaki şekildedir.

$$\{x^1_{e_1},x^1_{e_2},x^2_{e_1},x^2_{e_2},x^3_{e_1},x^3_{e_2}\}.$$

Açıktır ki,

$\tilde{\eta}_{1,2}(x^1_{e_1})=\{(\tilde{X},E),(G_1,E),(G_3,E),(H_1,E),(H_2,E),(N_1,E),(N_2,E),(N_3,E)\},$

$\tilde{\eta}_{1,2}(x^1_{e_2})=\{(\tilde{X},E)\},$

$\tilde{\eta}_{1,2}(x^2_{e_1})=\{(\tilde{X},E),(G_2,E),(G_3,E),(N_2,E),(N_3,E)\},$

$\tilde{\eta}_{1,2}(x^2_{e_2})=\{(\tilde{X},E),(G_1,E),(G_3,E),(H_1,E),(N_1,E),(N_2,E)\},$

$\tilde{\eta}_{1,2}(x^3_{e_1})=\{(\tilde{X},E),(F_1,E),(N_2,E)\},$

$\tilde{\eta}_{1,2}(x^3_{e_2})=\{(\tilde{X},E),(G_2,E),(G_3,E),(H_1,E),(H_2,E),(N_1,E),(N_2,E),(N_3,E)\}$ dir.

Dolayısıyla, $x^1_{e_1}\tilde{\notin} scl_p(M,E)$ dir. $(G_1,E)\in\tilde{\eta}_{1,2}(x^1_{e_1})$ için $(G_1,E)\tilde{\bigcap}(M,E)=$ $\{(e_1,\{x_1\}),(e_2,\{x_2\})\}\tilde{\cap}\{(e_1,\{x_3\}),(e_2,\{x_1,x_3\})\}=(\tilde{\phi},E)$ dir. Fakat $x^1_{e_2}\tilde{\in} scl_p(M,E)$ dir. Çünkü $x^1_{e_2}$ yı içeren $(X,E)$ tek esnek çiftsel açık kümedir ve $(X,E)\tilde{\bigcap}(M,E)\neq(\tilde{\phi},E)$. Ayrıca $x^2_{e_1}\tilde{\in} scl_p(M,E)$ dir. Çünkü $\forall(S_{x_{e_1}},E)\in\tilde{\eta}_{1,2}(x^2_{e_1})$ için $(S_{x^2_{e_1}},E)\tilde{\bigcap}(M,E)\neq(\tilde{\phi},E)$ dir. $x^2_{e_2}\tilde{\notin} scl_p(M,E)$ dir. Çünkü $(G_1,E)\in\tilde{\eta}_{1,2}(x^2_{e_2})$ için $(G_1,E)\tilde{\bigcap}(M,E)=(\tilde{\phi},E)$ dir. Benzer şekilde $x^3_{e_1}\tilde{\in} scl_p(M,E)$ dir. Çünkü $\forall(S_{x^3_{e_1}},E)\in\tilde{\eta}_{1,2}(x^3_{e_1})$ için

$(S_{x_{e_1}^3}, E)\tilde{\bigcap}(M,E) \neq (\tilde{\phi}, E)$ dir ve $x_{e_2}^3 \tilde{\in} scl_p(M,E)$ dir. Çünkü $\forall (S_{x_{e_2}^3}, E) \in \tilde{\eta}_{1,2}(x_{e_2}^3)$ için $(S_{x_{e_2}^3}, E)\tilde{\bigcap}(M,E) \neq (\tilde{\phi}, E)$ dir.

Sonuç olarak,

$scl_p(M,E) = \tilde{\bigcup}\left\{x_{e_2}^1, x_{e_1}^2, x_{e_1}^3, x_{e_2}^3\right\}$

$=\left\{(e_1,\tilde{\phi}),(e_2,\{x_1\})\right\} \tilde{\cup} \left\{(e_1,\{x_2\}),(e_2,\tilde{\phi})\right\} \tilde{\cup} \left\{(e_1,\{x_3\}),(e_2,\tilde{\phi})\right\} \tilde{\cup}\left\{(e_1,\tilde{\phi}),(e_2,\{x_3\})\right\}$

$=\left\{(e_1,\{x_2,x_3\}),(e_2,\{x_1,x_3\})\right\}$.

Dolayısıyla $scl_p(M,E)=\left\{(e_1,\{x_2,x_3\}),(e_2,\{x_1,x_3\})\right\}$ olur.

Teorem 2.5.5 [35] $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ esnek ikili topolojik uzay olsun. $(G,E)$, $X$ üzerinde esnek çiftsel kapalı kümedir $\Leftrightarrow$ $(G,E) = scl_{\tilde{\eta}_1}(G,E) \tilde{\cap} scl_{\tilde{\eta}_2}(G,E)$.

Sonuç 2.5.1 [35] $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ esnek ikili topolojik uzay olsun. Buradan,

$$scl_p(F,E) = scl_{\tilde{\eta}_1}(F,E) \tilde{\cap} scl_{\tilde{\eta}_2}(F,E),\ \forall (F,E) \in SS(X)_E.$$

Tanım 2.5.5 [35] $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ esnek ikili topolojik uzay ve $(F,E) \in SS(X)_E$ olsun. $(F,E)$ *esnek çiftsel kümesinin içi* $sint_p(F,E) = \tilde{\bigcup}\left\{(G,E) \in \tilde{\eta}_{1,2} : (G,E) \tilde{\subseteq} (F,E)\right\}$ şeklinde tanımlanır ve $sint_p(F,E)$ ile gösterilir.

$sint_p(F,E)$ esnek çiftsel açık kümesinin $(F,E)$ kümesine ait en geniş açık küme olduğu açıktır.

Örnek 2.5.4 [35] $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ esnek ikili topolojik uzayı Örnek 2.5.2 de olduğu gibi tanımlansın. $(M,E) = \left\{(e_1,\{x_3\}),(e_2,\{x_1,x_3\})\right\}$, $(F,E) = \left\{(e_1,\{x_2,x_3\}),(e_2,\{x_1\})\right\}$ kümeleri verilsin. $(M,E)$ esnek kümesinin kapsadığı açık kümeler $(\tilde{\phi},E)$, $(G_2,E)$ dir. Bu nedenle $sint_p(M,E) = (G_2,E) = \left\{(e_1,\{x_2\}),(e_2,\{x_3\})\right\}$ olur. Ayrıca $(F,E)$ esnek kümesinin kapsadığı açık küme $(\tilde{\phi},E)$ dir ve dolayısıyla $sint_p(F,E) = (\tilde{\phi},E)$ olur.

Teorem 2.5.6 [35] $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ esnek ikili topolojik uzay ve $(F,E),\ (G,E)\in SS(X)_E$ olsun. Bu durumda;

1) $sint_p(\tilde{\phi},E)=(\tilde{\phi},E)$ ve $sint_p(\tilde{X},E)=(\tilde{X},E)$.

2) $sint_p(F,E)\tilde{\subseteq}(F,E)$.

3) $(F,E)$ esnek çiftsel açık küme $\Leftrightarrow$ $sint_p(F,E)=(F,E)$.

4) $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)\Rightarrow sint_p(F,E)\tilde{\subseteq}sint_p(G,E)$.

5) $sint_p\left[(F,E)\tilde{\cap}(G,E)\right]\tilde{\subseteq}sint_p(F,E)\tilde{\cap}sint_p(G,E)$.

6) $sint_p\left[sint_p(F,E)\right]=sint_p(F,E)$ yani $sint_p(F,E)$ esnek çiftsel açık kümedir.

Teorem 2.5.7 [35] $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ esnek ikili topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$.
$(x_e,E)\tilde{\in}sint_p(F,E)$ $\Leftrightarrow$ $\exists(S_{x_e},E)\in\tilde{\eta}_{1,2}((x_e,E))$ için $(O_{x_e},E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ dir.

Teorem 2.5.8 [35] $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ esnek ikili topolojik uzay olsun. $(F,E)\in SS(X)_E$ esnek çiftsel açık kümedir $\Leftrightarrow$ $(F,E)=sint_{\tilde{\eta}_1}(F,E)\tilde{\bigcup}sint_{\tilde{\eta}_2}(F,E)$.

Sonuç 2.5.2 [35] $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ esnek ikili topolojik uzay olsun. Bu durumda,

$$sint_p(F,E)=sint_{\tilde{\eta}_1}(F,E)\tilde{\bigcup}sint_{\tilde{\eta}_2}(F,E)$$

olur.

Not 2.5.1 [35] $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ esnek ikili topolojik uzay ve $(F,E),(G,E)\in SS(X)_E$ olsun.

1) $scl_p\left[(F,E)\tilde{\cup}(G,E)\right]\neq scl_p(F,E)\tilde{\cup}scl_p(G,E)$.

2) $scl_p(F,E)=(F,E)\not\Rightarrow(F,E)\in\tilde{\eta}_1^c\bigcup\tilde{\eta}_2^c$.

3) $sint_p\left[(F,E)\tilde{\bigcap}(G,E)\right]\neq sint_p(F,E)\tilde{\bigcap}sint_p(G,E)$.

Örnek 2.5.5 [35] $(X,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,E)$ esnek ikili topolojik uzayı Örnek 2.5.2 de olduğu gibi tanımlansın.

1. $(G,E)=\{(e_1,\{x_3\}),(e_2,\{x_1,x_3\})\}$ olsun. Bu durumda, $scl_p(G,E)=\{(e_1,\{x_2,x_3\}),(e_2,\{x_1,x_3\})\}$ olur ve $(H,E)=\{(e_1,\{x_3\}),(e_2,\{x_2\})\}$ alalım. Burada $scl_p(H,E)=\{(e_1,\{x_3\}),(e_2,\{x_1,x_2\})\}$ olur. Böylece, $scl_p(G,E)\tilde{\cup}scl_p(H,E)=\{(e_1,\{x_2,x_3\}),(e_2,X)\}$ bulunur. Böylece, $(G\ ,E)\tilde{\cup}(H\ ,E)=\{(e_1,\{x_3\}),(e_2,X)\}$ dir. Fakat $scl_p\left[(G,E)\tilde{\cup}(H,E)\right]=(\tilde{X},E)$ olur. Dolayısıyla $scl_p\left[(G,E)\tilde{\cup}(H,E)\right]\neq scl_p(G,E)\tilde{\cup}scl_p(H,E)$ elde edilir.
2. $(F,E)=\{(e_1,\{x_2,x_3\}),(e_2,\{x_1\})\}$ olsun. Bu durumda, $scl_p(F,E)=(F,E)$ dir. Fakat $(F,E)$ esnek kümesi $\tilde{\eta}_1^c$ veya $\tilde{\eta}_2^c$ ait değildir ve $\tilde{\eta}_1^c\bigcup\tilde{\eta}_2^c\neq\tilde{\eta}_{1,2}^c$ dir.
3. $(G,E)=\{(e_1,\{x_2\}),(e_2,\{x_3\})\}$ olsun. Bu durumda $sint_p(G,E)=(G,E)$ olur. Şimdi, $(H,E)=\{(e_1,\{x_1\}),(e_2,\{x_2,x_3\})\}$ olsun. Bu durumda, $sint_p(H,E)=(H,E)$ dir. Dolayısıyla, $sint_p(G,E)\tilde{\bigcap}sint_p(H,E)$ $=\{(\alpha,\phi),(e_2,\{x_3\})\}$ elde edilir.

   Diğer taraftan, $(G,E)\tilde{\cap}(H,E)=\{(e_1,\phi),(e_2,\{x_3\})\}$ olduğundan $sint_p\left[(G,E)\tilde{\cap}(H,E)\right]=(\phi,E)$ elde edilir. Çünkü $(\tilde{\phi},E)$ esnek kümesi $(G,E)\tilde{\cap}(H,E)$ üzerinde esnek çiftsel açık kümedir.

   $sint_p\left[(G,E)\tilde{\cap}(H,E)\right]\neq sint_p(G,E)\tilde{\cap}sint_p(H,E)$ olduğu açıktır.
4. $(G,E)=\{(e_1,\{x_2\}),(e_2,\{x_3\})\}$ olsun. Bu durumda, $sint_p(G,E)=(G,E)$ dir. Fakat $(G,E)$ esnek kümesi $\tilde{\eta}_1$ veya $\tilde{\eta}_2$ ait değildir ve $\tilde{\eta}_1\tilde{\cup}\tilde{\eta}_2\neq\tilde{\eta}_{1,2}$ dir.

## 3. BULGULAR

### 3.1 Esnek İkili Genelleştirilmiş Topolojik Uzaylar

Bu bölüm de esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve bu uzay üzerinde bazı temel kavramlar tanımlanmıştır. Ayrıca bazı önemli teoremler verilerek bu teoremlerin ispatı sunulmuştur [72].

Tanım 3.1.1 $\tilde{g}_1$ ve $\tilde{g}_2$, $X$ üzerinde iki esnek genelleştirilmiş topoloji ve $E$ kümesi parametrelerin bir kümesi olsun. $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ dörtlü sistemine *esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay* denir.

Önerme 3.1.1 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. $\forall e \in E$ için $\tilde{g}_{1_e}$ ve $\tilde{g}_{2_e}$ aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\tilde{g}_{1_e} = \{F(e) : (F,E) \in \tilde{g}_1\}$$

$$\tilde{g}_{2_e} = \{G(e) : (G,E) \in \tilde{g}_2\}$$

Bu durumda $(X,\tilde{g}_{1_e},\tilde{g}_{2_e})$ uzayı ikili genelleştirilmiş topolojik uzaydır.

Tanım 3.1.2 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Eğer $(F_1,E) \in \tilde{g}_1$ ve $(F_2,E) \in \tilde{g}_2$ için $(F,E) = (F_1,E) \tilde{\cup} (F_2,E)$ ise $(F,E) \tilde{\subseteq} X$ kümesine esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}$ *– açık küme* denir. Eğer esnek $\tilde{g}_{1,2}$ kümesinin tümleyeni açık ise bu kümeye esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}$ *– kapalı küme* denir.

$(G_1,E) \in \tilde{g}_1^c$ ve $(G_2,E) \in \tilde{g}_2^c$ için $(G,E) = (G_1,E) \tilde{\cap} (G_2,E)$ ise $(G,E)$ kümesinim $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayında esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}$ – kapalı küme olduğu açıktır. Burada $\tilde{g}_i^c$ aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\tilde{g}_i^c = \{(G,E)^c \in SS(X)_E : (G,E) \in \tilde{g}_i\},\ i = 1,2$$

Önerme 3.1.2 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. $(F,E)$ esnek kümesinin esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık küme olması için gerek ve yeter koşul her $x_e \tilde{\in} (F,E)$ için $x_e \tilde{\in} (F_1,E) \tilde{\subseteq} (F,E)$ olacak şekilde bir $(F_1,E)$ esnek $\tilde{g}_1-$açık kümesi veya $x_e \tilde{\in} (F_2,E) \tilde{\subseteq} (F,E)$ olacak şekilde bir $(F_2,E)$ esnek $\tilde{g}_2-$açık kümesi bulunmasıdır.

İspat: $(F,E)$ kümesi $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayında esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık bir küme ve $x_e \tilde{\in} (F,E)$ bir esnek nokta olsun. Bu durumda $(F,E)=(F_1,E)\tilde{\cup}(F_2,E)$ olacak şekilde $(F_1,E)\in\tilde{g}_1$ ve $(F_2,E)\in\tilde{g}_2$ vardır. $x_e \tilde{\in} (F_1,E)\tilde{\cup}(F_2,E)$ ise $x_e \tilde{\in} (F_1,E)$ veya $x_e \tilde{\in} (F_2,E)$ dir. Buradan $x_e \tilde{\in} (F_1,E) \tilde{\subseteq} (F,E)$ veya $x_e \tilde{\in} (F_2,E) \tilde{\subseteq} (F,E)$ olduğu elde edilir.
Tersi benzer şekilde kolayca elde edilir.

Teorem 3.1.1 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. $(\tilde{\phi},E)$ bir esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık bir kümedir.
2. Esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık kümelerin keyfi birleşimi esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık bir kümedir.
3. Esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı kümelerin keyfi arakesiti esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı bir kümedir.

İspat: 1) $(\tilde{\phi},E)\in\tilde{g}_1$ ve $(\tilde{\phi},E)\in\tilde{g}_2$ olduğundan $(\tilde{\phi},E)=(\tilde{\phi},E)\tilde{\cup}(\tilde{\phi},E)$ dir. Dolayısıyla $(\tilde{\phi},E)$ bir esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık bir kümedir.

2) $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayında $\{(F_i,E)\}_{i\in I}$, esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda her $i\in I$ için $(F_i,E)=(F_i^1,E)\tilde{\cup}(F_i^2,E)$ olacak şekilde $(F_i^1,E)\in\tilde{g}_1$ ve $(F_i^2,E)\in\tilde{g}_2$ vardır. Dolayısıyla

$$\tilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i,E)=\tilde{\bigcup_{i\in I}}\left[(F_i^1,E)\tilde{\cup}(F_i^2,E)\right]=\left[\tilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i^1,E)\right]\tilde{\cup}\left[\tilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i^2,E)\right]$$

elde edilir.

3) İspatı 2) nin ispatına benzer şekilde yapılarak kolayca görülür.

Uyarı 3.1.1 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Tüm esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık kümeler ailesi $X$ üzerinde bir esnek ikili genelleştirilmiş topolojidir. Bu esnek ikili genelleştirilmiş topoloji $\tilde{g}_{1,2}$ ile gösterilir.

$$\tilde{g}_{1,2}=\left\{(F,E)=(F_1,E)\tilde{\cup}(F_2,E):(F_i,E)\in\tilde{g}_i,\ i=1,2\right\}$$

Örnek 3.1.1 $X=\left\{a,b,c,d\right\}$, $E=\left\{e_1,e_2\right\}$ ve $\tilde{g}_1=\left\{(\tilde{\phi},E),(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E)\right\}$, $\tilde{g}_2=\left\{(\tilde{\phi},E),(G_1,E),(G_2,E),(G_3,E)\right\}$ olsun. Burada;

$$(F_1,E)=\left\{\left(e_1,\{a,c\}\right),(e_2,\{d\}\right\},$$

$$(F_2,E)=\left\{\left(e_1,\{a,c\}\right),\left(e_2,\{c,d\}\right)\right\},$$

$$(F_3,E)=\left\{\left(e_1,\{a,b,c\}\right),\left(e_2,\{c,d\}\right)\right\},$$

$$(G_1,E)=\left\{\left(e_1,\{b,c\}\right),\left(e_2,\{a\}\right)\right\},$$

$$(G_2,E)=\left\{\left(e_1,\{a,d\}\right),\left(e_2,\{b,c\}\right)\right\},$$

$$(G_3,E)=\left\{\left(e_1,X\right),\left(e_2,\{a,b,c\}\right)\right\}.$$

Bu durumda $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayı bir esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzaydır. Ayrıca,

$$\tilde{g}_{1,2}=\begin{Bmatrix}(\tilde{\phi},E),(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E),(G_1,E),(G_2,E),(G_3,E),\\ (H_1,E),(H_2,E),(H_3,E),(H_4,E),(H_5,E),(H_6,E)\end{Bmatrix}$$

olur. Burada;

$$(H_1,E)=(F_1,E)\tilde{\cup}(G_1,E)=\left\{\left(e_1,\{a,b,c\}\right),\left(e_2,\{a,d\}\right)\right\}$$

$$(H_2,E)=(F_1,E)\tilde{\cup}(G_2,E)=\left\{\left(e_1,\{a,c,d\}\right),\left(e_2,\{b,c,d\}\right)\right\}$$

$$(H_3,E)=(F_1,E)\tilde{\cup}(G_3,E)=\left\{\left(e_1,X\right),\left(e_2,X\right)\right\}=\left(\tilde{X},E\right)$$

$$(H_4,E)=(F_2,E)\tilde{\cup}(G_1,E)=\left\{\left(e_1,\{a,b,c\}\right),\left(e_2,\{a,c,d\}\right)\right\}$$

$$(H_5,E)=(F_2,E)\tilde{\cup}(G_2,E)=\left\{\left(e_1,\{a,b,d\}\right),\left(e_2,\{b,c,d\}\right)\right\}$$

$$(H_6,E)=(F_3,E)\tilde{\cup}(G_2,E)=\{(e_1,X),(e_2,\{b,c,d\})\}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda,

$$\tilde{g}_{1,2}^{c}=\begin{Bmatrix}(\tilde{X},E),(F_1,E)^c,(F_2,E)^c,(F_3,E)^c,(G_1,E)^c,(G_2,E)^c,(G_3,E)^c,\\(H_1,E)^c,(H_2,E)^c,(H_3,E)^c,(H_4,E)^c,(H_5,E)^c,(H_6,E)^c\end{Bmatrix}$$

olur. Burada;

$$(F_1,E)^c=\{(e_1,\{b,d\}),(e_2,\{a,b,c\})\}$$

$$(F_2,E)^c=\{(e_1,\{c,d\}),(e_2,\{a,b\})\}$$

$$(F_3,E)^c=\{(e_1,\{d\}),(e_2,\{a,b\})\}$$

$$(G_1,E)^c=\{(e_1,\{a,d\}),(e_2,\{b,c,d\})\}$$

$$(G_2,E)^c=\{(e_1,\{b,c\}),(e_2,\{a,d\})\}$$

$$(G_3,E)^c=\{(e_1,\phi),(e_2,\{d\})\}$$

$$(H_1,E)^c=\{(e_1,\{b\}),(e_2,\{b,c\})\}$$

$$(H_2,E)^c=\{(e_1,\{b\}),(e_2,\{a\})\}$$

$$(H_3,E)^c=\{(e_1,\phi),(e_2,\phi)\}=(\tilde{\phi},E)$$

$$(H_4,E)^c=\{(e_1,\{d\}),(e_2,\{b\})\}$$

$$(H_5,E)^c=\{(e_1,\{c\}),(e_2,\{a\})\}$$

$$(H_6,E)^c=\{(e_1,\phi),(e_2,\{a\})\}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.1.2 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. Her esnek $\tilde{g}_i-$açık küme bir esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık kümedir, $i=1,2$
2. Her esnek $\tilde{g}_i-$kapalı küme bir esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı kümedir, $i=1,2$
3. Eğer $\tilde{g}_1\subseteq\tilde{g}_2$ ise $\tilde{g}_{1,2}=\tilde{g}_2$ ve $\tilde{g}_{1,2}^{c}=\tilde{g}_2^{c}$ dir.

İspat: Esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık(kapalı) küme tanımından kolayca elde edilmektedir.

Uyarı 3.1.2 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayında verilen esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık küme, esnek $\tilde{g}_1-$açık küme ve esnek $\tilde{g}_2-$açık küme olmayabilir.

Örnek 3.1.2 Örnek 3.1.1' e göre $(H_i,E)_{i=\overline{1,6}}$ bir esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık kümedir fakat esnek $\tilde{g}_1-$açık küme ve esnek $\tilde{g}_2-$açık küme değildir.

Tanım 3.1.3 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayı bir esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. $(F,E)$ kümesinin esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$kapanışı $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)$ ile gösterilir ve $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)=\tilde{\bigcap}\left\{(G,E)\in\tilde{g}_{1,2}^c:(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)\right\}$ şeklinde tanımlanır. $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)$ kümesi $(F,E)$ kümesini içeren en küçük esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı kümedir.

Örnek 3.1.3 Örnek 3.1.1' e göre $(K,E)=\left\{\left(e_1,\{b\}\right),\left(e_2,\{a,b\}\right)\right\}$ olsun. Bu durumda $(K,E)$ kümesini içeren esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı kümeler $(F_1,E)^c$ ve $(\tilde{X},E)$ dir. Bu nedenle $(K,E)$ kümesinin esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$kapanışı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$scl_{\tilde{g}_{1,2}}(K,E)=(F_1,E)^c\,\tilde{\bigcap}\,(\tilde{X},E)=\left\{\left(e_1,\{b,d\}\right),\left(e_2,\{a,b,c\}\right)\right\}$$

Teorem 3.1.3 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ bir esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E),(G,E)\in SS(X)_E$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

4. $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(\tilde{X},E)=(\tilde{X},E)$
5. $(F,E)\tilde{\subseteq}scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)$
6. $(F,E)$ bir esnek $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı kümedir $\Leftrightarrow scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)=(F,E)$
7. Eğer $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ ise $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\tilde{\subseteq}scl_{\tilde{g}_{1,2}}(G,E)$ dir.
8. $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\tilde{\cup}scl_{\tilde{g}_{1,2}}(G,E)\tilde{\subseteq}scl_{\tilde{g}_{1,2}}[(F,E)\tilde{\cup}(G,E)]$ ve

   $scl_{\tilde{g}_{1,2}}[(F,E)\tilde{\cap}(G,E)]\tilde{\subseteq}scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\tilde{\cap}scl_{\tilde{g}_{1,2}}(G,E)$

9. $scl_{\tilde{g}_{1,2}}\left[scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\right]=scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)$ ise $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı bir kümedir.

İspat: Esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$kapanış işlemi tanımından kolayca elde edilmektedir.

Uyarı 3.1.3 Teorem 3.1.3'ün (5). maddesi için "$\tilde{\supseteq}$" sağlanmayabilir. Bu duruma ait örnek aşağıda sunulmuştur.

Örnek 3.1.4 Örnek 3.1.1'e göre, $(K,E)=\{(e_1,\{b\}),(e_2,\{a,b\})\}$ ve $(S,E)=\{(e_1,\{b,c\}),(e_2,\{a,d\})\}$ olsun. Bu durumda,

$scl_{\tilde{g}_{1,2}}(K,E)\tilde{\cup}scl_{\tilde{g}_{1,2}}(S,E)=\{(e_1,\{b,c,d\}),(e_2,X)\}$

$scl_{\tilde{g}_{1,2}}\left[(K,E)\tilde{\cup}(S,E)\right]=(\tilde{X},E)$.

Dolayısıyla $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(K,E)\tilde{\cup}scl_{\tilde{g}_{1,2}}(S,E)\tilde{\not\supseteq}scl_{\tilde{g}_{1,2}}\left[(K,E)\tilde{\cup}(S,E)\right]$ olur. Benzer şekilde $(K,E)=\{(e_1,\{b\}),(e_2,\{a,b\})\}$ ve $(C,E)=\{(e_1,\{b,d\}),(e_2,\{a,c\})\}$ olsun. Bu durumda,

$scl_{\tilde{g}_{1,2}}(K,E)\tilde{\cap}scl_{\tilde{g}_{1,2}}(C,E)=\{(e_1,\{b,d\}),(e_2,\{a,b,c\})\}$,

$scl_{\tilde{g}_{1,2}}\left[(K,E)\tilde{\cap}(S,E)\right]=\{(e_1,\{b\}),(e_2,\{a\})\}$.

Dolayısıyla, $scl_{\tilde{g}_{1,2}}\left[(K,E)\tilde{\cap}(C,E)\right]\tilde{\not\supseteq}scl_{\tilde{g}_{1,2}}(K,E)\tilde{\cap}scl_{\tilde{g}_{1,2}}(S,E)$ olur.

Teorem 3.1.4 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ bir esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun.

$x_e\tilde{\in}scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\Leftrightarrow(U_{x_e},E)\tilde{\cap}(F,E)\neq(\tilde{\phi},E),\ \forall(U_{x_e},E)\in\tilde{g}_{1,2}(x_e)$

Burada $(U_{x_e},E)$ kümesi, $x_e$ esnek noktasını içeren herhangi esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık kümedir ve $\tilde{g}_{1,2}(x_e)$, $x_e$ esnek noktasını içeren tüm esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık kümelerin bir ailesidir.

İspat : $\Rightarrow$: $x_e \tilde{\in} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)$ ve $(U_{x_e},E) \in \tilde{g}_{1,2}(x_e)$ olsun. Varsayalım ki $(U_{x_e},E) \tilde{\cap} (F,E) = (\tilde{\phi},E)$ olsun. Bu durumda $(F,E) \tilde{\subseteq} (U_{x_e},E)^c$ ve ayrıca $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E) \tilde{\subseteq} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(U_{x_e},E)^c = (U_{x_e},E)^c$ olur. Dolayısıyla $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E) \tilde{\cap} (U_{x_e},E) = (\tilde{\phi},E)$ bulunur. Bu ise varsayımla çelişki oluşturur.

$\Leftarrow$: Varsayalım ki $x_e \tilde{\notin} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)$ olsun. Bu durumda $x_e \tilde{\in} \left[ scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E) \right]^c$ olur. Böylece $\left[ scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E) \right]^c \in \tilde{g}_{1,2}(x_e)$ ve hipotezden $\left[ scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E) \right]^c \tilde{\cap} (F,E) = (\tilde{\phi},E)$ bulunur. Bu ise çelişki oluşturur

Teorem 3.1.5 $(X, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, E)$ bir esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E) \in SS(X)_E$ olsun. Bu durumda $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E) = scl_{\tilde{g}_1}(F,E) \tilde{\cap} scl_{\tilde{g}_2}(F,E)$ dir.

İspat:

$$
\begin{aligned}
scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E) &= \tilde{\bigcap}\{(G,E) : \text{esnek } \tilde{g}_{1,2} - kapalı\ (G,E) \text{ kümesi için } (F,E) \tilde{\subseteq} (G,E)\} \\
&= \tilde{\bigcap}\left\{ \begin{array}{l} (G,E) : \text{esnek } \tilde{g}_i - kapalı\ (G_i,E) \text{ kümesi için, } i = 1,2 \\ (F,E) \tilde{\subseteq} (G,E), (G,E) = (G_1,E) \tilde{\cap} (G_2,E) \end{array} \right\} \\
&= \tilde{\bigcap}\left\{ \begin{array}{l} (G_1,E) \tilde{\cap} (G_2,E) : \text{esnek } \tilde{g}_i - kapalı\ (G_i,E) \text{ kümesi için, } i = 1,2 \\ (F,E) \tilde{\subseteq} (G_1,E) \tilde{\cap} (G_2,E) \end{array} \right\} \\
&= \left[ \tilde{\bigcap}\{(G_1,E) : \text{esnek } \tilde{g}_1 - kapalı\ (G_1,E) \text{ kümesi için } (F,E) \tilde{\subseteq} (G_1,E)\} \right] \tilde{\cap} \\
&\quad \left[ \tilde{\bigcap}\{(G_2,E) : \text{esnek } \tilde{g}_2 - kapalı\ (G_2,E) \text{ kümesi için } (F,E) \tilde{\subseteq} (G_2,E)\} \right] \\
&= scl_{\tilde{g}_1}(F,E) \tilde{\cap} scl_{\tilde{g}_2}(F,E)
\end{aligned}
$$

Tanım 3.1.4 $(X, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, E)$ uzayı bir esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E) \in SS(X)_E$ olsun. $(F,E)$ kümesinin esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}$ − içi $sint_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)$ ile gösterilir ve $sint_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E) = \tilde{\bigcup}\{(U,E) \in \tilde{g}_{1,2} : (U,E) \tilde{\subseteq} (F,E)\}$ şeklinde tanımlanır.

$sint_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)$ kümesi $(F,E)$ kümesinin içerdiği en büyük esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}$ − açık kümedir.

Örnek 3.1.5 Örnek 3.1.1'e göre $(K,E)=\{(e_1,\{a,b,c\}),(e_2,\{a,c,d\})\}$ olsun. Bu durumda $(K,E)$ kümesinin içerdiği esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık kümeler $(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E),(G_1,E),(H_1,E),(H_4,E)$ ve $(\tilde{\phi},E)$ dir. Bu nedenle $(K,E)$ kümesinin esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$içi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$sint_{\tilde{g}_{1,2}}(K,E)=\{(e_1,\{a,b,c\}),(e_2,\{a,c,d\})\}.$$

Teorem 3.1.6 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ bir esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E),(G,E)\in SS(X)_E$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. $sint_{\tilde{g}_{1,2}}(\tilde{\phi},E)=(\tilde{\phi},E)$,
2. $sint_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\tilde{\subseteq}(F,E)$,
3. $(F,E)$ bir esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık kümedir $\Leftrightarrow sint_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)=(F,E)$,
4. Eğer $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ ise $sint_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\tilde{\subseteq} sint_{\tilde{g}_{1,2}}(G,E)$ dir,
5. $sint_{\tilde{g}_{1,2}}[(F,E)\tilde{\cap}(G,E)]\tilde{\subseteq} sint_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\tilde{\cap} sint_{\tilde{g}_{1,2}}(G,E)$ ve
   $sint_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\tilde{\cup} sint_{\tilde{g}_{1,2}}(G,E)\tilde{\subseteq} sint_{\tilde{g}_{1,2}}[(F,E)\tilde{\cup}(G,E)]$,
6. $sint_{\tilde{g}_{1,2}}\left[sint_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\right]=sint_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)$ ise $sint_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık bir kümedir.

İspat: Esnek $\tilde{g}_{1,2}-$iç işlemi tanımından kolayca elde edilmektedir.

Teorem 3.1.7 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ bir esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. Bu durumda;

$x_e\,\tilde{\in}\, sint_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\Leftrightarrow (U_{x_e},E)\tilde{\subseteq}(F,E)$ olacak şekilde $\exists(U_{x_e},E)\in\tilde{g}_{1,2}(x_e)$ vardır.

İspat: Açıktır.

Teorem 3.1.8 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ bir esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. Bu durumda;

$$sint_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)=sint_{\tilde{g}_1}(F,E)\tilde{\cup} sint_{\tilde{g}_2}(F,E).$$

İspat:

$$sint_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)=\tilde{\bigcup}\{(G,E):\text{esnek } \tilde{g}_{1,2}-açık\ (G,E) \text{ kümesi için } (G,E)\tilde{\subseteq}(F,E)\}$$

$$=\tilde{\bigcup}\left\{\begin{array}{l}(G,E):\text{esnek } \tilde{g}_i-açık\ (G_i,E) \text{ kümesi için, } i=1,2\\ (G,E)\tilde{\subseteq}(F,E),(G,E)=(G_1,E)\tilde{\cup}(G_2,E)\end{array}\right\}$$

$$=\tilde{\bigcup}\left\{\begin{array}{l}(G_1,E)\tilde{\cup}(G_2,E):\text{esnek } \tilde{g}_i-açık\ (G_i,E) \text{ kümesi için, } i=1,2\\ (G_1,E)\tilde{\cup}(G_2,E)\tilde{\subseteq}(F,E)\end{array}\right\}$$

$$=\left[\tilde{\bigcup}\{(G_1,E):\text{esnek } \tilde{g}_1-açık\ (G_1,E) \text{ kümesi için } (G_1,E)\tilde{\subseteq}(F,E)\}\right]\tilde{\cup}$$
$$\left[\tilde{\bigcup}\{(G_2,E):\text{esnek } \tilde{g}_2-açık\ (G_2,E) \text{ kümesi için } (G_2,E)\tilde{\subseteq}(F,E)\}\right]$$
$$=sint_{\tilde{g}_1}(F,E)\tilde{\cup}sint_{\tilde{g}_2}(F,E)$$

Teorem 3.1.9 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ bir esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. Bu durumda;

1. $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)=\left[sint_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)^c\right]^c$,
2. $sint_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)=\left[scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)^c\right]^c$.

İspat:

1) $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)=scl_{\tilde{g}_1}(F,E)\tilde{\bigcap}scl_{\tilde{g}_2}(F,E)$
$$=\left((\tilde{X},E)\setminus sint_{\tilde{g}_1}\left((\tilde{X},E)\setminus(F,E)\right)\right)\tilde{\cap}\left((\tilde{X},E)\setminus sint_{\tilde{g}_2}\left((\tilde{X},E)\setminus(F,E)\right)\right)$$
$$=(\tilde{X},E)\setminus\left[sint_{\tilde{g}_1}\left((\tilde{X},E)\setminus(F,E)\right)\tilde{\cup}sint_{\tilde{g}_2}\left((\tilde{X},E)\setminus(F,E)\right)\right]$$
$$=(\tilde{X},E)\setminus sint_{\tilde{g}_{1,2}}\left((\tilde{X},E)\setminus(F,E)\right)$$
$$=\left[sint_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)^c\right]^c.$$

2) 1)' in ispatına benzer şekilde kolayca görülür.

Tanım 3.1.5 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ bir esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $\tilde{B}_{\tilde{g}_{1,2}}\subseteq\tilde{g}_{1,2}$ olsun. Eğer $\tilde{g}_{1,2}$ nin her elemanı $\tilde{B}_{\tilde{g}_{1,2}}$ nin elemanlarının birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa $\tilde{B}_{\tilde{g}_{1,2}}$ ye $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ için *esnek* $\tilde{g}_{1,2}-taban$ denir.

Örnek 3.1.6 Örnek 3.1.1' e göre

$$\tilde{B}_{\tilde{g}_{1,2}}=\{(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E),(G_1,E),(G_2,E),(G_3,E)\},$$

$(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayı için bir esnek $\tilde{g}_{1,2}-$tabandır.

Teorem 3.1.10 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ bir esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $\tilde{B}_{\tilde{g}_{1,2}}$ bu uzay için bir esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$taban olsun. Bu durumda $\tilde{g}_{1,2}$, $\tilde{B}_{\tilde{g}_{1,2}}$ ' in elemanların tüm esnek birleşimleri ailesine eşittir.

İspat: Tanım 3.1.5 den kolayca elde edilmektedir.

Önerme 3.1.3 $\tilde{B}_{\tilde{g}_{1,2}}$ ailesi $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayı için bir esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$tabandır$\Leftrightarrow$Her $(U,E)$ bir esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık küme ve $x_e \tilde{\in} (U,E)$ ise $x_e \tilde{\in} (\beta_{x_e},E) \tilde{\subseteq} (U,E)$ olacak şekilde $(\beta_{x_e},E) \in \tilde{B}_{\tilde{g}_{1,2}}$ vardır.

İspat: $\Rightarrow$: $\tilde{B}_{\tilde{g}_{1,2}}$ ailesi $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayı için bir esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$taban ve $x_e \tilde{\in} (U,E) \in \tilde{g}_{1,2}$ olsun. Bu durumda $(U,E) = \tilde{\bigcup}_{(\beta,E)\in B'_{\tilde{g}_{1,2}} \tilde{\subseteq} \tilde{B}_{\tilde{g}_{1,2}}} (\beta,E)$ olur. Bu nedenle $x_e \tilde{\in} (\beta_{x_e},E) \tilde{\subseteq} (U,E)$ olacak şekilde $(\beta_{x_w},E) \in B'$ vardır.

$\Leftarrow$: Varsayalım ki $x_e \tilde{\in} (\beta_{x_e},E) \tilde{\subseteq} (U,E)$, her $x_e \tilde{\in} (U,E)$ ve her $(U,E) \in \tilde{g}_{1,2}$ için sağlansın. Bu durumda,

$(U,E) = \tilde{\bigcup}_{x_e \in (U,E)} \{x_e\} \tilde{\subseteq} \tilde{\bigcup}_{x_e \in (U,E)} (\beta_{x_e},E) \tilde{\subseteq} (U,E) \Rightarrow (U,E) = \tilde{\bigcup}_{x_e \in (U,E)} (\beta_{x_e},E)$ olur. Yani $\tilde{B}_{\tilde{g}_{1,2}}$ ailesi $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayı için bir esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$tabandır.

Teorem 3.1.11 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ bir esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $\tilde{B}_{\tilde{g}_{1,2}}$ bu uzay için bir esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$taban olsun. Bu durumda, $\tilde{B}_{\tilde{g}_{1,2}} = \tilde{B}_{\tilde{g}_1} \tilde{\cup} \tilde{B}_{\tilde{g}_2}$ dir.

İspat: Varsayalım ki $\tilde{B}_{\tilde{g}_{1,2}}$ ailesi $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayı için bir esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$taban ve $(U,E) \in \tilde{g}_{1,2}$ olsun. Bu durumda, $(U_1,E) \in \tilde{g}_1$ ve $(U_2,E) \in \tilde{g}_2$ için $\tilde{\bigcup}_{(\beta,E)\in B'_{\tilde{g}_{1,2}} \tilde{\subseteq} \tilde{B}_{\tilde{g}_{1,2}}} (\beta,E) = (U,E) = (U_1,E) \tilde{\cup} (U_2,E)$

olur. Bu nedenle $(U_1,E)=\tilde{\bigcup}_{(\beta_1,E)\in B'_{\tilde{g}1}\tilde{\subseteq}\tilde{B}_{\tilde{g}1}}(\beta_1,E)$ ve $(U_2,E)=\tilde{\bigcup}_{(\beta_2,E)\in B'_{\tilde{g}2}\tilde{\subseteq}\tilde{B}_{\tilde{g}2}}(\beta_2,E)$ bulunur. Böylece $\tilde{\bigcup}_{(\beta,E)\in B'_{\tilde{g}1,2}\tilde{\subseteq}\tilde{B}_{\tilde{g}1,2}}(\beta,E)=\tilde{\bigcup}_{(\beta_1,E)\in B'_{\tilde{g}1}\tilde{\subseteq}\tilde{B}_{\tilde{g}1}}(\beta_1,E)\,\tilde{\cup}\,\tilde{\bigcup}_{(\beta_2,E)\in B'_{\tilde{g}2}\tilde{\subseteq}\tilde{B}_{\tilde{g}2}}(\beta_2,E)$ olur. Yani $\tilde{B}_{\tilde{g}_{1,2}}=\tilde{B}_{\tilde{g}_1}\,\tilde{\cup}\,\tilde{B}_{\tilde{g}_2}$ olduğu elde edilir.

Teorem 3.1.12 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ ve $(X,\tilde{g}_1',\tilde{g}_2',E)$ iki esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve sırasıyla $\tilde{B}_{\tilde{g}_{1,2}}$ ve $\tilde{B}'_{\tilde{g}'_{1,2}}$ bu uzaylar için iki esnek taban olsun. Eğer $\tilde{B}'_{\tilde{g}'_{1,2}}\tilde{\subseteq}\tilde{B}_{\tilde{g}_{1,2}}$ ise $\tilde{g}_{1,2}\tilde{\subseteq}\tilde{g}'_{1,2}$ dir.

İspat: Açıktır.

Tanım 3.1.6 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ bir esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay, $(F,E)$ $X$ üzerinde bir esnek küme ve $x_e\,\tilde{\in}\,SS(X)_E$ olsun. Eğer $x_e\,\tilde{\in}\,(G,E)\,\tilde{\subseteq}\,(F,E)$ olacak şekilde bir $(G,E)$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık kümesi varsa $(F,E)$ ye $x_e$ esnek noktasının bir *esnek* $\tilde{g}_{1,2}-$*komşuluğu* denir. $x_e$ nin tüm esnek $\tilde{g}_{1,2}-$komşuluklarının kümesine $x_e$ nin *esnek* $\tilde{g}_{1,2}-$*komşuluklar ailesi* denir ve $\tilde{N}_{\tilde{g}_{1,2}}(x_e)$ ile gösterilir.

Önerme 3.1.4 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ bir esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay, $(F,E)$ ve $(G,E)$ $X$ üzerinde iki esnek küme ve $x_e\,\tilde{\in}\,SS(X)_E$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. Eğer $(F,E)\in\tilde{N}_{\tilde{g}_{1,2}}(x_e)$ ise $x_e\,\tilde{\in}\,(F,E)$ dir.
2. Eğer $(F,E)\in\tilde{N}_{\tilde{g}_{1,2}}(x_e)$ ve $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,(G,E)$ ise $(G,E)\in\tilde{N}_{\tilde{g}_{1,2}}(x_e)$ dir.
3. $(F,E)$ bir esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık kümedir $\Leftrightarrow$ $(F,E)$ her esnek noktasının bir esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$komşuluğudur.
4. Eğer $(F,E)\in\tilde{N}_{\tilde{g}_{1,2}}(x_e)$ ise her $y_{e'}\,\tilde{\in}\,(U,E)$ için $(U,E)\,\tilde{\subseteq}\,(F,E)$ ve $(U,E)\in\tilde{N}_{\tilde{g}_{1,2}}(y_{e'})$ olacak şekilde bir $(U,E)$ esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık kümesi vardır.

İspat: 1) $(F,E) \in \tilde{N}_{\tilde{g}_{1,2}}(x_e)$ olsun. Bu durumda $(U,E) \in \tilde{g}_{1,2}$ için $x_e \tilde{\in} (U,E) \tilde{\subseteq} (F,E)$ dir. Buradan $x_e \tilde{\in} (F,E)$ olduğu elde edilir.

2) Varsayalım ki $(F,E) \in \tilde{N}_{\tilde{g}_{1,2}}(x_e)$ ve $(F,E) \tilde{\subseteq} (G,E)$ olsun. Bu durumda $(U,E) \in \tilde{g}_{1,2}$ için $x_e \tilde{\in} (U,E) \tilde{\subseteq} (F,E) \tilde{\subseteq} (G,E)$ olur. Dolayısıyla $(G,E) \in \tilde{N}_{\tilde{g}_{1,2}}(x_e)$ olduğu elde edilmiş olur.

3) Varsayalım ki $(F,E)$ bir esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık küme olsun. Bu durumda her $x_e \tilde{\in} (F,E)$ için $x_e \tilde{\in} (F,E) \tilde{\subseteq} (F,E)$ olur. Bu nedenle $(F,E)$ esnek kümesi her esnek noktasının bir esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$komşuluğudur.

Tersine $(F,E)$ esnek kümesi her esnek noktasının bir esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$komşuluğu olsun. Bu durumda $x_e \tilde{\in} (U,E) \tilde{\subseteq} (F,E)$ olacak şekilde esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık $(U,E)$ kümesi vardır. Buradan $(F,E) = \tilde{\bigcup}_{x_e \tilde{\in}(F,E)} \{x_e\} \tilde{\subseteq} \tilde{\bigcup}_{x_e \tilde{\in}(F,E)} (U,E) \tilde{\subseteq} \tilde{\bigcup}_{x_e \tilde{\in}(F,E)} (F,E)$ olur. Böylece $(F,E)$ nin esnek çiftsel $\tilde{g}_{1,2}-$açık kümelerin bir birleşimi olduğu elde edilmiş olur. Dolayısıyla $(F,E)$ bir esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık kümedir.

4) $(F,E) \in \tilde{N}_{\tilde{g}_{1,2}}(x_e)$ olsun. Bu durumda $x_e \tilde{\in} (U,E) \tilde{\subseteq} (F,E)$ olacak şekilde $(U,E) \in \tilde{g}_{1,2}$ vardır. 3). ifadeden her $y_{e'} \tilde{\in} (U,E)$ için $(U,E) \in \tilde{N}_{\tilde{g}_{1,2}}(y_{e'})$ olduğu elde edilir.

Önerme 3.1.5 $(X, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, E)$ bir esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Bu durumda her $x_e \tilde{\in} SS(X)_E$ için $\tilde{N}_{\tilde{g}_{1,2}}(x_e) = \tilde{N}_{\tilde{g}_1}(x_e) \tilde{\bigcup} \tilde{N}_{\tilde{g}_2}(x_e)$ dir.

İspat: $x_e \tilde{\in} SS(X)_E$ ve $(F,E) \in \tilde{N}_{\tilde{g}_{1,2}}(x_e)$ kümesi $x_e$ esnek noktasının herhangi esnek $\tilde{g}_{1,2}-$komşuluğu olsun. Bu durumda $x_e \tilde{\in} (G,E) \tilde{\subseteq} (F,E)$ olacak şekilde bir esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık $(G,E)$ kümesi vardır. Eğer $(G,E) \in \tilde{g}_{1,2}$ ise $(G,E) = (G_1,E) \tilde{\cup} (G_2,E)$ olacak şekilde $(G_1,E) \in \tilde{g}_1$ ve $(G_2,E) \in \tilde{g}_2$ vardır. $x_e \tilde{\in} (G,E) = (G_1,E) \tilde{\cup} (G_2,E)$ olduğu için $x_e \tilde{\in} (G_1,E)$ veya $x_e \tilde{\in} (G_2,E)$ dir. Ayrıca $x_e \tilde{\in} (G_1,E) \tilde{\subseteq} (G,E) \tilde{\subseteq} (F,E)$

veya $x_e \tilde{\in} (G_2,E) \tilde{\subseteq} (G,E) \tilde{\subseteq} (F,E)$ dir. Dolayısıyla $(F,E) \in \tilde{N}_{\tilde{g}_1}(x_e)$ veya $(F,E) \in \tilde{N}_{\tilde{g}_e}(x_e)$ dir. Yani $(F,E) \in \tilde{N}_{\tilde{g}_1}(x_e) \tilde{\cup} \tilde{N}_{\tilde{g}_2}(x_e)$ olur.

Tersine, varsayalım ki $(F,E) \in \tilde{N}_{\tilde{g}_1}(x_e) \tilde{\cup} \tilde{N}_{\tilde{g}_2}(x_e)$ olsun. Bu durumda $(F,E) \in \tilde{N}_{\tilde{g}_1}(x_e)$ veya $(F,E) \in \tilde{N}_{\tilde{g}_2}(x_e)$ dir. Dolayısıyla $x_e \tilde{\in} (G_1,E) \tilde{\subseteq} (F,E)$ ve $x_e \tilde{\in} (G_2,E) \tilde{\subseteq} (F,E)$ olacak şekilde $x_e \tilde{\in} (G_1,E) \in \tilde{g}_1$ veya $x_e \tilde{\in} (G_2,E) \in \tilde{g}_2$ vardır. Sonuç olarak $(G,E) \in \tilde{g}_{1,2}$ için $x_e \tilde{\in} (G_1,E) \tilde{\cup} (G_2,E) = (G,E) \tilde{\subseteq} (F,E)$ dir. Böylece $(F,E) \in \tilde{N}_{\tilde{g}_{1,2}}(x_e)$ olur.

## 3.2 Esnek İkili Genelleştirilmiş Süreklilik

Bu bölümde esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzaylar üzerinde esnek genelleştirilmiş süreklilik, esnek genelleştirilmiş açık (kapalı) dönüşümler ve esnek genelleştirilmiş homeomorfizm kavramları üzerinde çalışılarak bu kavramlar arasındaki bazı ilişkiler kurulmuştur [73].

Tanım 3.2.1 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$, $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ uzayları iki esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $f:(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E) \to (Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ bir esnek dönüşüm olsun. $f(x_e)$ nin her $(G,E)$ esnek $\tilde{k}_{1,2}-$komşuluğu için eğer $f((F,E)) \tilde{\subseteq} (G,E)$ olacak şekilde $x_e \tilde{\in} SS(X)_E$ esnek noktasının bir $(F,E)$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$komşuluğu var ise $f$ dönüşümüne $x_e$ esnek noktasında esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli dönüşüm denir.

Teorem 3.2.1 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$, $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ uzayları iki esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $f:(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E) \to (Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ bir esnek dönüşüm olsun. $f$ dönüşümü $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayında bir esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli dönüşümdür ancak ve ancak her $(G,E)$ esnek $\tilde{k}_{1,2}-$açık kümesi için $f^{-1}((G,E))$ bir esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık kümedir.

İspat: Varsayalım ki $f$ dönüşümü $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayı üzerinde bir esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli dönüşüm ve $(G,E)\in\tilde{k}_{1,2}$ olsun. $f^{-1}((G,E))\in\tilde{g}_{1,2}$ olduğunu gösterelim. $f(x_e)\in(G,E)$ ve $f$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli dönüşüm olduğundan her $x_e\in f^{-1}((G,E))$ esnek noktası için $f((F,E))\tilde{\subseteq}(G,E)$ olacak şekilde $x_e$ esnek noktasının bir $(F,E)$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$komşuluğu vardır. Buradan $x_e\tilde{\in}(F,E)\tilde{\subseteq}f^{-1}((G,E))$ bulunur. Yani $f^{-1}((G,E))$ bir esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık kümedir.

Diğer taraftan, $x_e$ esnek noktası $X$ üzerinde bir esnek nokta ve $f(x_e)\tilde{\in}(G,E)$, $Y$ üzerinde bir esnek $\tilde{k}_{1,2}-$ açık küme olsun. Bu durumda $x_e\in f^{-1}((G,E))$ ve $f(f^{-1}((G,E)))\tilde{\subseteq}(G,E)$ olur. Dolayısıyla $f$ dönüşümü $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayında esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli bir dönüşümdür.

Teorem 3.2.2 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$, $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ uzayları iki esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $f:(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)\to(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ bir esnek dönüşüm olsun. $f$ dönüşümü $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayında bir esnek $\tilde{g}_{1,2}-$ sürekli dönüşümdür ancak ve ancak $Y$ üzerinde her esnek $\tilde{k}_{1,2}$-kapalı küme için $f^{-1}((G,E))$, $X$ üzerinde esnek $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı bir kümedir.

İspat: $f:(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)\to(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ esnek dönüşümü $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayında esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli bir dönüşüm ve $(G,E)$ esnek kümesi $Y$ de esnek $\tilde{k}_{1,2}-$kapalı bir küme olsun. Bu durumda $(G,E)=(G_1,E)\tilde{\cap}(G_2,E)$, $(G_i,E)\in\tilde{k}_i^c$, $i=1,2$ olur. $(G,E)^c=(G_1,E)^c\tilde{\cup}(G_2,E)^c$ esnek $\tilde{k}_{1,2}-$kapalı bir küme ve $f$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli bir dönüşüm olduğundan

$$\begin{aligned} f^{-1}((G,E)^c) &= f^{-1}((G_1,E)^c\tilde{\cup}(G_2,E)^c)=f^{-1}((G_1,E)^c)\tilde{\cup}f^{-1}((G_2,E)^c)\\ &=\left(f^{-1}(G_1,E)\right)^c\tilde{\cup}\left(f^{-1}(G_2,E)\right)^c=\left(f^{-1}(G,E)\right)^c \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\left(f^{-1}(G,E)\right)^c$, $X$ üzerimde esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık bir kümedir. Yani $f^{-1}((G,E))$, $X$ üzerinde esnek $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı bir kümedir.

Diğer taraftan, varsayalım ki $f^{-1}((G,E))$, $X$ üzerinde esnek $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı bir küme ve $(G,E)$ esnek kümesi $Y$ üzerinde esnek $\tilde{k}_{1,2}-$kapalı bir küme olsun. $Y$ üzerinde herhangi bir $(H,E)$ esnek $\tilde{k}_{1,2}-$açık kümesi için, $(H,E)^c$ esnek $\tilde{k}_{1,2}-$kapalı bir kümedir. Hipotezden $f^{-1}((H,E)^c)$, $X$ üzerinde esnek $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı bir kümedir. $f^{-1}((H,E)^c)=\left(f^{-1}((H,E))\right)^c$ ve $\left(f^{-1}((H,E))\right)^c$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı bir küme olduğundan $f^{-1}((H,E))$, $X$ üzerinde esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık bir kümedir. Bu nedenle $f$ dönüşümü $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayında bir esnek $\tilde{g}_{1,2}-$ sürekli dönüşümdür.

Örnek 3.2.1 $X=\left\{x^1,x^2,x^3\right\}$, $Y=\left\{y^1,y^2,y^3\right\}$ ve $E=\left\{e_1,e_2\right\}$ olsun. $\tilde{g}_1=\left\{(\tilde{\phi},E),(F_1,E),(F_2,E)\right\}$, $\tilde{g}_2=\left\{(\tilde{\phi},E),(G_1,E),(G_2,E)(G_3,E)\right\}$ $X$ üzerinde iki esnek genelleştirilmiş topoloji ve ayrıca $\tilde{k}_1=\left\{(\tilde{\phi},E),(H_1,E),(H_2,E)\right\}$, $\tilde{k}_2=\left\{(\tilde{\phi},E),(S_1,E)\right\}$ $Y$ üzerinde iki esnek genelleştirilmiş topolojidir. $X$ ve $Y$ üzerindeki esnek kümeler aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$(F_1,E)=\left\{(e_1,\{x^2,x^3\}),(e_2,\{x^1,x^2\})\right\},$$

$$(F_2,E)=\left\{(e_1,\{x^3\}),(e_2,\{x^1\})\right\},$$

$$(G_1,E)=\left\{(e_1,\{x^1\}),(e_2,\{x^3\})\right\},$$

$$(G_2,E)=\left\{(e_1,\{x^2\}),(e_2,\{x^1,x^2\})\right\},$$

$$(G_3,E)=\left\{(e_1,\{x^1,x^2\}),(e_2,X)\right\},$$

ve

$$(H_1,E)=\left\{(e_1,\{y^1,y^2\}),(e_2,\{y^2,y^3\})\right\},$$

$$(H_2,E)=\left\{(e_1,\{y^2\}),(e_2,\{y^2\})\right\},$$

$$(S_1,E)=\left\{(e_1,\{y^1,y^2\}),(e_2,\{y^2,y^3\})\right\}.$$

Bu durumda;

$$\tilde{g}_{1,2} = \left\{(\tilde{\phi},E),(F_1,E),(F_2,E),(G_1,E),(G_2,E),(G_3,E),(X,E),(U_1,E)\right\}$$
$$(U_1,E) = (F_2,E)\tilde{\cup}(G_1,E) = \left\{(e_1,\{x^1,x^3\}),(e_2,\{x^1,x^3\}\right\}$$

ve

$$\tilde{k}_{1,2} = \left\{(\tilde{\phi},E),(H_1,E),(H_2,E),(S_1,E)\right\}$$

olur. Dolayısıyla $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ ve $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ uzayları iki esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzaydır. $f : X \to Y$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\begin{array}{cc} e_1 & e_2 \\ f(x^1) = y^2 & f(x^1) = y^3 \\ f(x^2) = y^1 & f(x^2) = y^2 \\ f(x^3) = y^1 & f(x^3) = y^2 \end{array}$$

Bu durumda $f$ dönüşümü $x^1_{e_1}$ esnek noktasında esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli bir dönüşümdür. Fakat $f$ dönüşümü $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayında esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli bir dönüşüm değildir. Çünkü $f^{-1}((H_2,E)) \notin \tilde{g}_{1,2}$.

<u>Teorem 3.2.3</u> $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$, $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ uzayları iki esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $f:(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E) \to (Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ bir esnek dönüşüm olsun. $f$ dönüşümü $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayında esnek $\tilde{g}_{1,2}-$ sürekli bir dönüşümdür ancak ve ancak $f(scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)) \tilde{\subseteq} scl_{\tilde{k}_{1,2}}(f((F,E)))$.

<u>İspat:</u> $f$, $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayında esnek $\tilde{g}_{1,2}-$ sürekli bir dönüşüm ve $(F,E) \in SS(X)_E$ olsun. $scl_{\tilde{k}_{1,2}}(f((F,E)))$, $Y$ üzerinde esnek $\tilde{k}_{1,2}-$kapalı bir küme olduğundan $f^{-1}\left(scl_{\tilde{k}_{1,2}}(f((F,E)))\right)$, $X$ üzerinde esnek $\tilde{g}_{1,2}-$ kapalı bir kümedir. Dolayısıyla

$$scl_{\tilde{g}_{1,2}}\left(f^{-1}\left(scl_{\tilde{k}_{1,2}}(f((F,E)))\right)\right) = f^{-1}\left(scl_{\tilde{k}_{1,2}}(f((F,E)))\right) \quad (0.1)$$

ve

$$f((F,E)) \tilde{\subseteq} scl_{\tilde{k}_{1,2}}(f((F,E)))$$

bulunur. Böylece

$$(F,E)\tilde{\subseteq} f^{-1}(f((F,E)))\tilde{\subseteq} f^{-1}scl_{\tilde{k}_{1,2}}(f((F,E)))$$

elde edilir. (4.1) den

$$scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\tilde{\subseteq} scl_{\tilde{g}_{1,2}}\left(f^{-1}\left(scl_{\tilde{k}_{1,2}}(f((F,E)))\right)\right)=f^{-1}\left(scl_{\tilde{k}_{1,2}}(f((F,E)))\right).$$

Buradan

$$f\left(scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\right)\tilde{\subseteq} scl_{\tilde{k}_{1,2}}(f((F,E)))$$

bulunur.

Diğer taraftan, varsayalım ki her $(F,E)\in SS(X)_E$ için $f\left(scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\right)\tilde{\subseteq} scl_{\tilde{k}_{1,2}}(f((F,E)))$ ve $(G,E)$, $Y$ üzerinde esnek $\tilde{k}_{1,2}-$kapalı bir küme olsun. $scl_{\tilde{k}_{1,2}}(G,E)=(G,E)$ dir. Hipotezden,

$$f(scl_{\tilde{g}_{1,2}}(f^{-1}((G,E))))\tilde{\subseteq} scl_{\tilde{k}_{1,2}}\left(f\left(f^{-1}((G,E))\right)\right)\tilde{\subseteq} scl_{\tilde{k}_{1,2}}(G,E)=(G,E)$$

elde edilir. Böylece,

$$scl_{\tilde{g}_{1,2}}\left(f^{-1}\left((G,E)\right)\right)\tilde{\subseteq} f^{-1}\left((G,E)\right)$$

ve

$$f^{-1}\left((G,E)\right)\tilde{\subseteq} scl_{\tilde{g}_{1,2}}\left(f^{-1}\left((G,E)\right)\right)$$

bulunur. Yani,

$$scl_{\tilde{g}_{1,2}}\left(f^{-1}\left((G,E)\right)\right)=f^{-1}\left((G,E)\right)$$

olur. $f^{-1}\left((G,E)\right)$, $X$ de esnek $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı bir kümedir. Dolayısıyla $f$ dönüşümü $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayında esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli bir dönüşümdür.

<u>Teorem 3.2.4</u> $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ ve $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ uzayları esnek ikili genelleştirilmiş iki topolojik uzay, $f:(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)\to(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ bir esnek dönüşüm ve $(G,E)$, $Y$ üzerinde keyfi bir esnek küme olsun. $f$ dönüşümü $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayında esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli bir dönüşümdür ancak ve ancak $f^{-1}\left(\left(sint_{\tilde{k}_{1,2}}(G,E)\right)\right)\tilde{\subseteq} sint_{\tilde{g}_{1,2}}\left(f^{-1}\left((G,E)\right)\right)$.

İspat: $f$ , $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayında esnek $\tilde{g}_{1,2}-$ sürekli bir dönüşüm ve $(G,E)\in SS(Y)_E$ olsun. $sint_{\tilde{k}_{1,2}}((G,E))$, $Y$ üzerinde esnek $\tilde{k}_{1,2}-$ açık bir küme olduğundan $f^{-1}\left(sint_{\tilde{k}_{1,2}}((G,E))\right)$, $X$ üzerinde esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık bir kümedir. Dolayısıyla

$$sint_{\tilde{g}_{1,2}}\left(f^{-1}\left(sint_{\tilde{k}_{1,2}}((G,E))\right)\right)=f^{-1}\left(sint_{\tilde{k}_{1,2}}((G,E))\right) \tag{0.2}$$

ve

$$sint_{\tilde{k}_{1,2}}((G,E))\tilde{\subseteq}(G,E)$$

bulunur.

$$f^{-1}\left(sint_{\tilde{k}_{1,2}}((G,E))\right)\tilde{\subseteq}f^{-1}(G,E)$$

olduğundan

$$sint_{\tilde{g}_{1,2}}\left(f^{-1}\left(sint_{\tilde{k}_{1,2}}((G,E))\right)\right)=sint_{\tilde{g}_{1,2}}\left(f^{-1}((G,E))\right).$$

elde edilir. (4.2) den

$$f^{-1}\left(sint_{\tilde{k}_{1,2}}(G,E)\right)\tilde{\subseteq}sint_{\tilde{g}_{1,2}}\left(f^{-1}((G,E))\right)$$

sağlanır.

Diğer taraftam, $(G,E)$ kümesi $Y$ üzerinde esnek açık bir küme olsun. Bu durumda

$$sint_{\tilde{g}_{1,2}}\left(f^{-1}\left((G,E)\right)\right)\tilde{\subseteq}f^{-1}\left((G,E)\right)=f^{-1}\left(sint_{\tilde{k}_{1,2}}(G,E)\right)\tilde{\subseteq}sint_{\tilde{g}_{1,2}}\left(f^{-1}\left((G,E)\right)\right)$$

sağlanır. Böylece

$$sint_{\tilde{g}_{1,2}}\left(f^{-1}\left((G,E)\right)\right)=f^{-1}\left((G,E)\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla $f$ dönüşümü $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayında esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli bir dönüşümdür.

Teorem 3.2.5 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ ve $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ uzayları esnek ikili genelleştirilmiş iki topolojik uzay olsun. $f:(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)\to(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli bir dönüşüm ise her $e\in E$ için, $f_e:(X,\tilde{g}_{1_e},\tilde{g}_{2_e})\to(Y,\tilde{k}_{1_e},\tilde{k}_{2_e})$ ikili genelleştirilmiş sürekli bir dönüşümdür.

İspat: Açıktır.

Teorem 3.2.6 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ ve $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ uzayları esnek ikili genelleştirilmiş iki topolojik uzay, $f:(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)\rightarrow(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ bir esnek dönüşüm olsun. $f$ dönüşümü $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayında esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli bir dönüşümdür ancak ve ancak $f:(X,\tilde{g}_1,E)\rightarrow(Y,\tilde{k}_1,E)$ ve $f:(X,\tilde{g}_2,E)\rightarrow(Y,\tilde{k}_2,E)$ dönüşümleri esnek $g-$sürekli dönüşümlerdir.

İspat: $f$ dönüşümü $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayında esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli bir dönüşüm ve $(G,E)$, $Y$ üzerinde esnek $\tilde{k}_{1,2}-$açık küme olsun. $(G_1,E)\tilde{\bigcup}(G_2,E)=(G,E)$ olacak şekilde $(G_1,E)\in\tilde{k}_1$ ve $(G_2,E)\in\tilde{k}_2$ vardır. $f$ dönüşümü $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli bir dönüşüm olduğu için,

$$f^{-1}\left((G,E)\right)=f^{-1}\left((G_1,E)\tilde{\cup}(G_2,E)\right)=f^{-1}\left((G_1,E)\right)\tilde{\cup}f^{-1}\left((G_2,E)\right)$$

esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık bir kümedir. Bu durumda $f^{-1}\left((G_1,E)\right)\in\tilde{g}_1$ ve $f^{-1}\left((G_2,E)\right)\in\tilde{g}_2$ olur. Yani $f:(X,\tilde{g}_1,E)\rightarrow(Y,\tilde{k}_1,E)$ ve $f:(X,\tilde{g}_2,E)\rightarrow(Y,\tilde{k}_2,E)$ dönüşümleri esnek $g-$sürekli dönüşümlerdir.

Diğer taraftan, varsayalım ki $f:(X,\tilde{g}_1,E)\rightarrow(Y,\tilde{k}_1,E)$ ve $f:(X,\tilde{g}_2,E)\rightarrow(Y,\tilde{k}_2,E)$ dönüşümleri esnek $g-$sürekli dönüşümler ve $(G_1,E)\in\tilde{k}_1$, $(G_2,E)\in\tilde{k}_2$ olsun. Bu durumda $(G,E)=(G_1,E)\tilde{\cup}(G_2,E)$ olacak şekilde $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ uzayında $(G,E)$ esnek $\tilde{k}_{1,2}-$açık kümesi vardır. $f:(X,\tilde{g}_1,E)\rightarrow(Y,\tilde{k}_1,E)$ ve $f:(X,\tilde{g}_2,E)\rightarrow(Y,\tilde{k}_2,E)$ dönüşümleri esnek $g-$sürekli dönüşümler olduğu için $f^{-1}\left((G_1,E)\right)\in\tilde{g}_1$ ve $f^{-1}\left((G_2,E)\right)\in\tilde{g}_2$ şeklindedir. Bu nedenle

$$f^{-1}\left((G_1,E)\right)\tilde{\cup}f^{-1}\left((G_2,E)\right)=f^{-1}\left((G_1,E)\tilde{\cup}(G_2,E)\right)=f^{-1}(G,E)$$

elde edilir. Yani $f$ dönüşümü $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayında esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli bir dönüşümdür.

Teorem 3.2.7 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$, $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ ve $(Z,\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzaylar olsun. Eğer $f:(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)\to(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ ve $g:(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)\to(Z,\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2,E)$ dönüşümleri esnek ikili genelleştirilmiş sürekli dönüşümler ise $g\circ f:(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)\to(Z,\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2,E)$ dönüşümü de esnek ikili genelleştirilmiş sürekli bir dönüşümdür.
İspat: Açıktır.

Tanım 3.2.2 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ ve $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ uzayları esnek ikili genelleştirilmiş iki topolojik uzay, $f:(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)\to(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ bir esnek dönüşüm olsun.

a) Eğer $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayında ki her $(F,E)$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık kümesi için $f\left((F,E)\right)$, $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ uzayında esnek $\tilde{k}_{1,2}-$açık küme ise $f$ dönüşümüne *esnek* $\tilde{g}_{1,2}-$*açık dönüşüm* denir.
b) Eğer $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayında ki her $(K,E)$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı kümesi için $f\left((F,E)\right)$, $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ uzayında esnek $\tilde{k}_{1,2}-$kapalı küme ise $f$ dönüşümüne *esnek* $\tilde{g}_{1,2}-$*kapalı dönüşüm* denir.

Uyarı 3.2.1 Esnek ikili genelleştirilmiş sürekli dönüşüm, esnek ikili genelleştirilmiş açıklık ve esnek ikili genelleştirilmiş kapalılık kavramları tamamen birbirlerinden bağımsız kavramlardır. Bu durum aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek 3.2.2 $X=\left\{x^1,x^2\right\}$, $Y=\left\{y^1,y^2\right\}$ ve $E=\left\{e_1,e_2\right\}$ olsun. $\tilde{g}_1=\left\{(\tilde{\phi},E),(F_1,E)\right\}$, $\tilde{g}_2=\left\{(\tilde{\phi},E),(G_1,E)\right\}$ $X$ üzerinde esnek genelleştirilmiş topolojiler ve $\tilde{k}_1=\left\{(\tilde{\phi},E),(H_1,E)\right\}$, $\tilde{k}_2=\left\{(\tilde{\phi},E),(\tilde{Y},E),(S_1,E),(S_2,E)\right\}$ ise $Y$ üzerinde esnek genelleştilmiş topolojilerdir. $X$ ve $Y$ üzerindeki esnek kümeler aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$(F_1,E)=\left\{\left(e_1,\{x^1\}\right),\left(e_2,\{x^2\}\right)\right\},$$

$$(G_1,E)=\left\{\left(e_1,\{x^1\}\right),\left(e_2,\{x^1,x^2\}\right)\right\},$$

$$(H_1,E)=\left\{\left(e_1,\{y^2\}\right),\left(e_2,\{y^1\}\right)\right\},$$

$$(S_1,E)=\left\{\left(e_1,\{y^2\}\right),\left(e_2,\{y^1,y^2\}\right)\right\},$$

$$(S_2,E)=\left\{\left(e_1,\{y^1\}\right),\left(e_2,\{y^1\}\right)\right\}.$$

Bu durumda,

$$\tilde{g}_{1,2}=\left\{(\tilde{\phi},E),(F_1,E),(G_1,E)\right\}$$

ve

$$\tilde{k}_{1,2}=\left\{(\tilde{\phi},E),(\tilde{Y},E),(H_1,E),(S_1,E),(S_2,E),(U_1,E)\right\}$$

olur. Burada

$$(U_1,E)=(H_1,E)\tilde{\bigcup}(S_2,E)=\left\{\left(e_1,\{y^1,y^2\}\right),\left(e_2,\{y^1\}\right)\right\}$$

şeklindedir. Bu durumda $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ ve $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ uzayları birer esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzaydır. Eğer $f$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanır ise $f$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık ve esnek $\tilde{g}_{1,2}$-kapalı dönüşümdür.

| $e_1$ | $e_2$ |
|---|---|
| $f(x^1)=y^2$ | $f(x^1)=y^2$ |
| $f(x^2)=y^1$ | $f(x^2)=y^1$ |

Fakat $f$ dönüşümü $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzayında esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli dönüşüm değildir.

Teorem 3.2.8 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ ve $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ uzayları esnek ikili genelleştirilmiş iki topolojik uzay, $f:(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)\rightarrow(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ bir esnek dönüşüm olsun.

a) $f$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık bir dönüşümdür ancak ve ancak $X$ üzerindeki her $(F,E)$ esnek kümesi için $f(sınt_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E))\tilde{\subseteq} sınt_{\tilde{k}_{1,2}}(f((F,E)))$ dir.

b) $f$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı bir dönüşümdür ancak ve ancak $X$ üzerindeki her $(F,E)$ esnek kümesi için $scl_{\tilde{k}_{1,2}}\left(f\left((F,E)\right)\right)\tilde{\subseteq} f\left(scl_{\tilde{g}_{1,2}}(G,E)\right)$ dir.

İspat: a) $f$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık bir dönüşüm ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. $sınt_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık küme ve $sınt_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\tilde{\subseteq}(F,E)$ dir. $f$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık bir dönüşüm olduğu için $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ uzayında $f(sınt_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E))$ esnek $\tilde{k}_{1,2}-$açık küme ve $f\left(sınt_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\right)\tilde{\subseteq} f\left((F,E)\right)$ dir. Böylece $f(sınt_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E))\tilde{\subseteq} sınt_{\tilde{k}_{1,2}}(f((F,E)))$ elde edilir.

Diğer taraftan varsayalım ki $(F,E)$, $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayında herhangi esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık küme olsun. Bu durumda $(F,E)=sınt_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)$ dir. Teoremden $f(sınt_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E))\tilde{\subseteq} sınt_{\tilde{k}_{1,2}}(f((F,E)))$ vardır. Dolayısıyla $f\left((F,E)\right)=f\left(sınt_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\right)\tilde{\subseteq} sınt_{\tilde{k}_{1,2}}\left(f\left((F,E)\right)\right)\tilde{\subseteq} f\left((F,E)\right)$ elde edilir. $f\left((F,E)\right)=sınt_{\tilde{k}_{1,2}}\left(f\left((F,E)\right)\right)$. Yani $f$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık kümedir.

b) $f$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı dönüşüm ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. $f$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı dönüşüm olduğu için $f\left(scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\right)$, $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ uzayında esnek $\tilde{k}_{1,2}-$kapalı bir küme ve $f\left((F,E)\right)\tilde{\subseteq} f\left(scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\right)$ dir. Böylece $scl_{\tilde{k}_{1,2}}\left(f\left((F,E)\right)\right)\tilde{\subseteq} f\left(scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\right)$ elde edilir.

Diğer taraftan, varsayalım ki $(F,E)$, $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayında herhangi esnek $\tilde{g}_{1,2}-$ kapalı küme olsun. Bu durumda $(F,E)=scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)$ dir. Teoremden $scl_{\tilde{k}_{1,2}}\left(f\left((F,E)\right)\right)\tilde{\subseteq} f\left(scl_{\tilde{g}_{1,2}}(F,E)\right)=f\left((F,E)\right)\tilde{\subseteq} scl_{\tilde{k}_{1,2}}\left(f(F,E)\right)$ vardır. Buradan $scl_{\tilde{k}_{1,2}}\left(f(F,E)\right)=f\left((F,E)\right)$ olur. Yani $f$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı bir dönüşümdür.

Önerme 3.2.1 Eğer her $e\in E$ için $f:(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)\to(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$açık dönüşüm (esnek $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı dönüşüm) ise

$$f_e:\left(X,\tilde{g}_{1_e},\tilde{g}_{2_e}\right)\to\left(Y,\tilde{k}_{1_e},\tilde{k}_{2_e}\right)$$

ikili genelleştirilmiş açık (kapalı) dönüşümdür.

İspat: Açıktır.

Tanım 3.2.3 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ ve $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ uzayları esnek ikili genelleştirilmiş iki topolojik uzay, $f:(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)\to(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ bir esnek dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa $f$ dönüşümüne *esnek* $\tilde{g}_{1,2}-$*homemorfizm* denir.

a) $f$ birebir ve örtendir,

b) $f$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$ süreklidir,

c) $f^{-1}$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$ sürekli dönüşümdür.

Teorem 3.2.9 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ ve $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ uzayları esnek ikili genelleştirilmiş iki topolojik uzay, $f:(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)\to(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ bir esnek dönüşüm olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

a) $f$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$homeomorfizmdir,

b) $f$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli ve esnek $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı dönüşümdür,

c) $f$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli ve esne $\tilde{g}_{1,2}-$açık dönüşümdür.

İspat: Esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzaylar üzerinde süreklilik, açık ve kapalı dönüşüm ile ilgili daha önce verilen teoremlerden kolayca elde edilmektedir.

### 3.3 Esnek Çiftsel İkili Genelleştirilmiş Ayırma Aksiyomları

Bu bölüm de esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzaylar üzerinde esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_i-$uzayları tanımlanmıştır [74].

Tanım 3.3.1 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ bir esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Eğer her $x_\alpha, y_\beta \in SS(X)_E$ ve $x_\alpha \neq y_\beta$ için $x_\alpha \tilde{\in} (F,E), y_\beta \tilde{\notin} (F,E)$ veya $x_\alpha \tilde{\notin} (F,E), y_\beta \tilde{\in} (F,E)$ olacak şekilde $(F,E)\in\tilde{g}_{1,2}$ esnek çiftsel açık kümesi bulunabiliyorsa $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayına esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_0-$uzayı denir.

Örnek 3.3.1 $X=\{a,b\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve

$$\tilde{g}_1=\{(\tilde{\phi},E),(F_1,E),(F_2,E)\}$$

$$\tilde{g}_2=\{(\tilde{\phi},E),(G_1,E),(G_2,E)\}$$

olsun. Burada,

$$(F_1,E)=\{(e_1,\{a\}),(e_2,\phi)\}$$

$$(F_2,E)=\{(e_1,X),(e_2,\{a\})\}$$

$$(F_1,E)=\{(e_1,\{b\}),(e_2,\phi)\}$$

$$(F_1,E)=\{(e_1,X),(e_2,\{b\})\}$$

şeklindedir. $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayı üzerindeki esnek çiftsel açık kümeler ailesi aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\tilde{g}_{1,2}=\{(\tilde{\phi},E),(F_1,E),(F_2,E),(G_1,E),(G_2,E),(H_1,E),(H_2,E)\}$$

Dolayısıyla $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayı bir esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş topolojik uzaydır. Burada,

$$(H_1,E)=\{(e_1,X),(e_2,\phi)\}$$

$$(H_2,E)=\{(e_1,X),(e_2,X)\}$$

olur. $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayının esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_0-$uzayı olduğu açıktır.

Teorem 3.3.1 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayı bir esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_0-$uzayıdır ancak ve ancak her $x_\alpha,y_\beta \tilde{\in} SS(X)_E$ ve $x_\alpha \neq y_\beta$ için $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(x_\alpha,E)\neq scl_{\tilde{g}_{1,2}}(y_\beta,E)$ dir.

İspat: $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ bir esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_0-$uzayı, $x_\alpha,y_\beta \tilde{\in} SS(X)_E$ ve $x_\alpha \neq y_\beta$ olsun. $x_\alpha \tilde{\in}(G,E)$, $y_\beta \tilde{\notin}(G,E)$ olacak şekilde $(G,E)\in\tilde{g}_{1,2}$ vardır. Dolayısıyla $(G,E)^c$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı bir küme ve $y_\beta \tilde{\in}(G,E), x_\alpha \tilde{\notin}(G,E)$ dir. Tanım 3.1.3 den $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(y_\beta,E)$, $(y_\beta,E)$ yi içeren en küçük esnek $\tilde{g}_{1,2}-$kapalı kümedir. Bu nedenle $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(y_\beta,E)\tilde{\subseteq}(G,E)^c$ dir. Ayrıca $x_\alpha \tilde{\notin}(G,E)^c$ olduğundan $x_\alpha \tilde{\notin} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(y_\beta,E)$

olur. Böylece $x_\alpha \tilde{\in} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(x_\alpha, E)$ fakat $x_\alpha \tilde{\notin} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(y_\beta, E)$ elde edilir. Dolayısıyla $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(x_\alpha, E) \neq scl_{\tilde{g}_{1,2}}(y_\beta, E)$ şeklindedir.

Diğer taraftan, varsayalım ki $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(X)_E$, $x_\alpha \neq y_\beta$ ve $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(x_\alpha, E) \neq scl_{\tilde{g}_{1,2}}(y_\beta, E)$ olsun. Dolayısıyla burada $z_e \tilde{\in} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(x_\alpha, E)$ fakat $z_e \tilde{\notin} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(y_\beta, E)$ olacak şekilde en az bir $z_e \tilde{\in} SS(X)_E$ esnek noktası vardır. $x_\alpha \tilde{\notin} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(y_\beta, E)$ olduğunu gösterelim. Farz edelim ki $x_\alpha \tilde{\in} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(y_\beta, E)$ olsun. Bu durumda $\{x_\alpha\} \tilde{\subseteq} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(y_\beta, E)$ olduğundan $scl_{\tilde{g}_{1,2}}(x_\alpha, E) \tilde{\subseteq} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(y_\beta, E)$ olur. Böylece $z_e \tilde{\in} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(x_\alpha, E)$ olduğundan $z_e \tilde{\in} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(y_\beta, E)$ elde edilir. Fakat bu durum varsayımımız ile çelişki oluşturur. Bu nedenle $x_\alpha \tilde{\notin} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(y_\beta, E)$ dir. Ayrıca $x_\alpha \tilde{\in} \left[scl_{\tilde{g}_{1,2}}(y_\beta, E)\right]^c$ şeklindedir. $\left[scl_{\tilde{g}_{1,2}}(y_\beta, E)\right]^c$ kümesi $x_\alpha$ yi içeren $y_\beta$ yı içermeyen esnek $\tilde{g}_{1,2}$-açık kümedir. Yani, $(X, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, E)$ uzayı esnek çiftsel $T_0-$uzayıdır.

<u>Önerme 3.3.1</u> $(X, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş topolojik uzay, $(X, \tilde{g}_1, E)$ ve $(X, \tilde{g}_2, E)$ iki esnek genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Eğer $(X, \tilde{g}_1, E)$ veya $(X, \tilde{g}_2, E)$ esnek $T_0-$uzayı ise $(X, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_0-$uzayıdır.

<u>İspat:</u> Farz edelim ki $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(X)_E$, $x_\alpha \neq y_\beta$ ve $(X, \tilde{g}_1, E)$ esnek $T_0-$uzayı olsun. Bu durumda $x_\alpha \tilde{\in} (F, E)$, $y_\beta \tilde{\notin} (F, E)$ veya $x_\alpha \tilde{\notin} (F, E)$, $y_\beta \tilde{\in} (F, E)$ olacak şekilde $(F, E) \tilde{\in} \tilde{g}_1$ vardır. $(F, E) \tilde{\in} \tilde{g}_1 \tilde{\subseteq} \tilde{g}_{1,2}$ olduğundan önermenin gerekliliği elde edilir. Benzer şekilde bu koşullar $(X, \tilde{g}_2, E)$ uzayı içinde sağlanır. Dolayısıyla $(X, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_0-$uzayıdır.

<u>Uyarı 3.3.1</u> Önerme 3.3.1' in tersi her zaman doğru olmayabilir. Bu durum aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek 3.3.2 Örnek 3.3.1' e göre, $(X,\tilde{g}_1,E)$ esnek $T_0-$uzayıdır. $b_{e_1} \neq a_{e_2}$ için $\tilde{g}_1$ üzerinde bu esnek noktalardan birini içerip diğerini içermeyen herhangi bir esnek açık küme yoktur. Dolayısıyla $(X,\tilde{g}_1,E)$ uzayı esnek $T_0-$uzayı değildir. Benzer şekilde $(X,\tilde{g}_2,E)$ uzayı da esnek $T_0-$uzayı değildir. Çünkü $a_{e_1} \neq b_{e_2}$ için, $\tilde{g}_2$ üzerinde bu esnek noktalardan birini içerip diğerini içermeyen herhangi bir esnek açık küme yoktur. Bu nedenle $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_0-$uzayıdır fakat $(X,\tilde{g}_1,E)$ veya $(X,\tilde{g}_2,E)$ uzayları esnek $T_0-$uzayı değildir.

Tanım 3.3.2 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ bir esnek ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(X)_E$, $x_\alpha \neq y_\beta$ olsun. Eğer $x_\alpha \tilde{\in} (F,E), y_\beta \tilde{\notin} (F,E)$ ve $x_\alpha \tilde{\notin} (F,E), y_\beta \tilde{\in} (F,E)$ olacak şekilde $(F,E),(G,E) \in \tilde{g}_{1,2}$ esnek çiftsel açık kümeleri varsa $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayına esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_1-$uzayı denir.

Örnek 3.3.3 $X=\{a,b\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ olsun ve $\tilde{g}_1,\tilde{g}_2$ esnek genelleştirilmiş topolojileri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\tilde{g}_1=\left\{(\tilde{\phi},E),(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E)\right\}$$

$$\tilde{g}_2=\left\{(\tilde{\phi},E),(G_1,E),(G_2,E),(G_3,E)\right\}$$

Burada,

$$(F_1,E)=\left\{(e_1,X),(e_2,\phi)\right\}$$

$$(F_2,E)=\left\{(e_1,\{a\}),(e_2,\{b\})\right\}$$

$$(F_3,E)=\left\{(e_1,X),(e_2,\{b\})\right\}$$

$$(G_1,E)=\left\{(e_1,\phi),(e_2,X)\right\}$$

$$(G_2,E)=\left\{(e_1,\{b\}),(e_2,\{a\})\right\}$$

$$(G_3,E)=\left\{(e_1,\{b\}),(e_2,X)\right\}$$

$(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayı üzerindeki esnek çiftsel açık kümeler ailesi aşağıdaki şekildedir.

$$\tilde{g}_{1,2}=\left\{(\tilde{\phi},E),(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E),(G_1,E),(G_2,E),(G_3,E),(H_1,E),(H_2,E),(H_3,E)\right\}$$

ve

$$(H_1,E)=\{(e_1,X),(e_2,X\}\},$$
$$(H_2,E)=\{(e_1,X),(e_2,\{a\}\},$$
$$(H_1,E)=\{(e_1,\{a\}),(e_2,X\}\}.$$

Bu durumda $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili geneleştirilmiş topolojik uzaydır. Bu uzayın esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_1-$uzayı olduğu açıktır.

Teorem 3.3.2 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili geneleştirilmiş topolojik uzay olsun. $X$ üzerinde ki her tek nokta kümesi esnek çiftsel kapalı kümedir ancak ve ancak $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_1-$uzayıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: Farz edelim ki $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_1-$uzayı ve her $x_\alpha \tilde{\in} SS(X)_E$, $y_\beta \tilde{\in} (x_\alpha,E)^c$ olsun. Bu durumda $y_\beta \tilde{\in} (G,E)$ ve $x_\alpha \tilde{\notin} (G,E)$ olacak şekilde $(G,E)\in \tilde{g}_{1,2}$ vardır. Böylece $y_\beta \tilde{\in} (G,E) \tilde{\subseteq} (x_\alpha,E)^c$ elde edilir. Dolayısıyla $(x_\alpha,E)^c$ esnek çiftsel açık bir kümedir ve buradan $(x_\alpha,E)$ esnek çiftsel kapalıdır.
$(\Leftarrow)$: Farz edelim ki $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(X)_E$, $x_\alpha \neq y_\beta$ ve $(x_\alpha,E)$ esnek çiftsel kapalı bir küme olsun. Bu durumda $(x_\alpha,E)^c$ esnek çiftsel açık bir kümedir. Dolayısıyla $x_\alpha \tilde{\notin} (x_\alpha,E)^c$ ve $y_\beta \tilde{\in} (x_\alpha,E)$ olacak şekilde $(x_\alpha,E)^c$ esnek çiftsel açık kümesi vardır. Benzer şekilde $x_\alpha \tilde{\in} (y_\beta,E)^c$ ve $y_\beta \tilde{\notin} (y_\beta,E)^c$ olacak şekilde $(y_\beta,E)^c$ esnek çiftsel açık kümesi vardır. Dolayısıyla $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_1-$uzayıdır.

Önerme 3.3.2 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili geneleştirilmiş topolojik uzay ve $(X,\tilde{g}_1,E)$, $(X,\tilde{g}_2,E)$ iki esnek genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Eğer $(X,\tilde{g}_1,E)$ veya $(X,\tilde{g}_2,E)$ esnek $T_1-$uzayı ise $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_1-$uzayıdır.

İspat: Farz edelim ki $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş topolojik uzay, $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(X)_E$, $x_\alpha \neq y_\beta$ ve $(X,\tilde{g}_1,E)$ esnek $T_1-$ uzayı olsun. Bu durumda $x_\alpha \tilde{\in} (F_1,E)$, $y_\beta \tilde{\notin} (F_1,E)$ ve $x_\alpha \tilde{\notin} (F_2,E)$, $y_\beta \tilde{\in} (F_2,E)$ olacak şekilde $(F_1,E),(F_2,E) \in \tilde{g}_1$ vardır. $(F_1,E),(F_2,E) \in \tilde{g}_1 \tilde{\subseteq} \tilde{g}_{1,2}$ olduğundan önermenin gerekliliği elde edilmiş olur. Benzer şekilde bu şartlar $(X,\tilde{g}_2,E)$ uzayı içinde sağlanır. Dolayısıyla $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_1-$uzayıdır.

Uyarı 3.3.2 Önerme 3.3.2' nin tersi her zaman sağlanmayabilir. Bu durum aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek 3.3.4: Örnek 3.3.3' e göre, $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_1-$ uzayıdır. Fakat $(X,\tilde{g}_1,E)$ ve $(X,\tilde{g}_2,E)$ esnek $T_1-$uzayı değildir. $(X,\tilde{g}_1,E)$ uzayını dikkate alalım. $a_{e_1} \neq b_{e_2}$ için $\tilde{g}_1$ üzerinde $b_{e_2}$ esnek noktasını içeren $a_{e_1}$ esnek noktasını içermeyen herhangi bir esnek açık küme yoktur. Dolayısıyla $(X,\tilde{g}_1,E)$ uzayı esnek $T_1-$uzayı değildir. Benzer şekilde $(X,\tilde{g}_2,E)$ uzayını dikkate alalım. $b_{e_1} \neq a_{e_2}$ için $\tilde{g}_1$ üzerinde $b_{e_1}$ esnek noktasını içeren $a_{e_2}$ esnek noktasını içermeyen herhangi bir esnek açık küme yoktur. Dolayısıyla $(X,\tilde{g}_2,E)$ uzayı esnek $T_1-$uzayı değildir. Dolayısıyla $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_1-$uzayıdır fakat $(X,\tilde{g}_1,E)$ veya $(X,\tilde{g}_2,E)$ uzayları esnek $T_1-$uzayı değildir.

Teorem 3.3.3 Her esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_1-$uzayı bir esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_0-$uzayıdır.

İspat: Farz edelim ki $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_1-$uzayı olsun. Her $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(X)_E$, $x_\alpha \neq y_\beta$ için $x_\alpha \tilde{\in} (F,E), y_\beta \tilde{\notin} (F,E)$ ve $y_\beta \tilde{\in} (G,E), x_\alpha \tilde{\notin} (G,E)$ olacak şekilde $(F,E),(G,E) \tilde{\in} \tilde{g}_{1,2}$ vardır. Dolayısıyla esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş

$T_0-$uzayı için gerekli koşullar elde edilmiş olur. Böylece $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_0-$uzayıdır.

Uyarı 3.3.3 Teorem 3.3.3'ün tersi her zaman sağlanmayabilir. Bu durum aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek 3.3.5 Örnek 3.3.1' e göre $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_0-$uzayıdır. $a_{e_2}\neq b_{e_1}$ için, $\tilde{g}_{1,2}$ esnek çiftsel topolojisinde $a_{e_2}$ yi içeren $b_{e_1}$ i içermeyen esnek açık bir küme yoktur. Dolayısıyla $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_1-$uzayı değildir.

Tanım 3.3.3 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Eğer her $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(X)_E$, $x_\alpha\neq y_\beta$ için $x_\alpha \tilde{\in}(U,E)$, $y_\beta\tilde{\in}(V,E)$ ve $(U,E)\tilde{\cap}(V,E)=(\tilde{\phi},E)$ sağlanacak şekilde $(U,E)$, $(V,E)\in\tilde{g}_{1,2}$ bulunabiliyorsa $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayına esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_2-$uzayı denir.

Örnek 3.3.6 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayı üzerindeki esnek diskret topolojiyi dikkate alalım. $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(X)_E$, $x_\alpha\neq y_\beta$ olsun. $\{x_\alpha\}$ ve $\{y_\beta\}$ kümeseleri esnek açık kümelerdir ve $\{x_\alpha\}\cap\{y_\beta\}=(\tilde{\phi},E)$ dir. Dolayısıyla $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayı esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_2-$uzayıdır.

Teorem 3.3.4 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_2-$uzayıdır ancak ve ancak her $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(X)_E$, $x_\alpha\neq y_\beta$ için $y_\beta \tilde{\notin} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(U,E)$ olacak şekilde $x_\alpha$ esnek noktasını içeren $y_\beta$ esnek noktasını içermeyen bir $(U,E)$ esnek açık kümesi vardır.

İspat: $(\Rightarrow)$: $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_2-$uzayı ve her $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(X)_E$, $x_\alpha \neq y_\beta$ ve $x_\alpha \tilde{\in} (U,E)$ olsun. Dolayısıyla $y_\beta \tilde{\in} (U,E)^c$ elde edilir. Böylece $y_\beta \tilde{\notin} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(U,E)$ olur.

$(\Leftarrow)$: $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(X)_E$, $x_\alpha \neq y_\beta$ için $y_\beta \tilde{\notin} scl_{\tilde{g}_{1,2}}(U,E)$ olacak şekilde $x_\alpha$ esnek noktasını içeren $y_\beta$ esnek noktasını içermeyen $(U,E)$, bir esnek açık küme olsun. Bu durumda $y_\beta \tilde{\in} \left[scl_{\tilde{g}_{1,2}}(U,E)\right]^c$ olur. Dolayısıyla $(U,E)$ ve $\left[scl_{\tilde{g}_{1,2}}(U,E)\right]^c$ kümeleri birbirinden farklı sırasıyla $x_\alpha$ ve $y_\beta$ esnek noktalarını içeren esnek açık kümelerdir. Böylece $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_2-$uzayıdır.

Önerme 3.3.3 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş topolojik uzay, $(X,\tilde{g}_1,E)$ ve $(X,\tilde{g}_2,E)$ iki esnek genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Eğer $(X,\tilde{g}_1,E)$ veya $(X,\tilde{g}_2,E)$ esnek $T_2-$uzayı ise $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_2-$uzayıdır.

İspat: $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(X)_E$, $x_\alpha \neq y_\beta$ ve $(X,\tilde{g}_1,E)$ esnek $T_2-$uzayı olsun. Bu durumda $x_\alpha \tilde{\in} (F_1,E)$, $y_\beta \tilde{\in} (F_2,E)$ ve $(F_1,E)\tilde{\cap}(F_2,E)=(\tilde{\phi},E)$ olacak şekilde $(F_1,E), (F_2,E) \tilde{\in} \tilde{g}_1$ vardır. $(F_1,E), (F_2,E) \tilde{\in} \tilde{g}_1 \tilde{\subseteq} \tilde{g}_{1,2}$ olduğundan önermenin gerekliliği sağlanmış olur. Benzer şekilde aynı koşullar $(X,\tilde{g}_2,E)$ uzayı için de sağlanır. Dolayısıyla $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_2-$uzayıdır.

Teorem 3.3.5 Her esnek çiftsel $T_2-$uzayı esnek çiftsel $T_1-$uzayıdır.

İspat: $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(X)_E$, $x_\alpha \neq y_\beta$ olsun. Eğer $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel $T_2-$uzayı ise $(X,\tilde{g}_1,E)$ veya $(X,\tilde{g}_2,E)$ esnek $T_2-$uzayıdır. Eğer $(X,\tilde{g}_1,E)$ uzayı esnek $T_2-$uzayı ise $x_\alpha \tilde{\in} (F,E)$, $y_\beta \tilde{\in} (G,E)$ ve $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)=(\tilde{\phi},E)$ olacak şekilde $(F,E) \in \tilde{g}_1$ ve

$(G,E) \in \tilde{g}_1$ vardır. $x_\alpha \tilde{\in} (F,E),\ y_\beta \tilde{\notin} (F,E)$ ve $x_\alpha \tilde{\notin} (G,E),\ y_\beta \tilde{\in} (G,E)$ olduğu açıktır. Bu nedenle $(X,\tilde{g}_1,E)$ esnek $T_1-$uzayıdır. Dolayısıyla Önerme 3.3.2' ye göre $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel $T_1-$uzayıdır.

Uyarı 3.3.4 Teorem 3.3.5'in tersi her zaman doğru olmayabilir. Bu durum aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek 3.3.7 Örnek 3.3.3' ü dikkate alırsak $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayı esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_1-$uzayıdır. Fakat $a_{e_2} \neq b_{e_1}$ için $a_{e_2} \tilde{\in} (U,E),\ b_{e_1} \tilde{\in} (V,E)$ ve $(U,E) \tilde{\cap} (V,E) = (\tilde{\phi},E)$ olacak şekilde $\tilde{g}_{1,2}$ üzerinde esnek açık küme yoktur. Dolayısıyla $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayı esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_2-$uzayı değildir.

Teorem 3.3.6 Esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_i-$uzayı ($i=0,1,2$) olma özelliği esnek ikili genelleştirilmiş $\tilde{g}_{1,2}-$homeomorfizm dönüşümü altında korunur.

İspat: Teoremin ispatı yalnızca $i=2$ için verilecektir. Diğerleri benzer şekilde kolayca görülmektedir. $f:(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E) \to (Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ bir esnek dönüşüm olsun ve aşağıdaki şartlar sağlansın.

1-) $f$ dönüşümü birebir, örten ve esnek açık dönüşümdür.

2-) $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayı esnek çiftsek ikili genelleştirilmiş $T_2-$uzayıdır.

$(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ uzayının esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_2-$uzayı olduğunu gösterelim. $x_\alpha \neq y_\beta$ için $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(Y)_E$ olsun. $f$ dönüşümü birebir ve örten olduğundan $x'_\alpha \neq y'_\beta$ için $f(x'_\alpha)=x_\alpha,\ f(y'_\beta)=y_\beta$ olacak şekilde $X$ üzerinde $x'_\alpha, y'_\beta$ esnek noktaları vardır. $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayı esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_2-$uzayı olduğundan $x'_\alpha \tilde{\in} (G,E),\ y'_\beta \tilde{\in} (H,E)$ ve $(G,E) \tilde{\cap} (H,E) = (\tilde{\phi},E)$ olacak şekilde $(G,E),(H,E) \in \tilde{g}_{1,2}$ vardır. Dolayısıyla $f(x'_\alpha)=x_\alpha \tilde{\in} f((G,E)),\ f(y'_\beta)=y_\beta \tilde{\in} f((H,E))$ ve $f((G,E) \tilde{\cap} (H,E)) = f((G,E)) \tilde{\cap} f((H,E)) = f((\tilde{\phi},E)) = (\tilde{\phi},E)$ olur.

$(G,E),(H,E)\in \tilde{g}_{1,2}$ ve $f$ esnek açık dönüşüm olduğu için $f((G,E)),f((H,E))\in \tilde{k}_{1,2}$ bulunur. Bu durumda $x_\alpha \tilde{\in} f((G,E)),\ y_\beta \tilde{\in} f((H,E))$ ve $f((G,E))\tilde{\cap} f((H,E))=(\tilde{\phi},E)$ olacak şekilde $f((G,E)),f((H,E))\in \tilde{k}_{1,2}$ vardır. Dolayısıyla $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_2-$uzayıdır.

<u>Tanım 3.3.4</u> $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_1-$uzayı olsun.

a) Eğer $X$ üzerinde ki her esnek kapalı $(F,E)$ kümesi ve $x_\alpha \tilde{\notin} (F,E)$, $x_\alpha \tilde{\in} SS(X)_E$ için

$$x_\alpha \tilde{\in} (G_1,E),\ (F,E)\tilde{\subseteq}(G_2,E),\ (G_1,E)\tilde{\cap}(G_2,E)=(\tilde{\phi},E)$$

sağlanacak şekilde $(G_1,E),\ (G_2,E)\in \tilde{g}_{1,2}$ varsa $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayına *esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş* $T_3-$*uzayı* denir.

b) Eğer $X$ üzerinde ki her esnek kapalı $(F,E)$ ve $(G,E)$, $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)=(\tilde{\phi},E)$ kümeleri için

$$(F,E)\tilde{\subseteq}(F_1,E),(F,E)\tilde{\subseteq}(F_2,E)\ \ (F_1,E)\tilde{\cap}(F_2,E)=(\tilde{\phi},E)$$

sağlanacak şekilde $(F_1,E),(F_2,E)\in \tilde{g}_{1,2}$ bulunabiliyorsa $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayına *esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş* $T_4-$*uzayı* denir.

<u>Teorem 3.3.7</u> Esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_i-$uzayı ($i=3,4$) olma özelliği esnek ikili genelleştirilmiş $\tilde{g}_{1,2}-$homeomorfizm dönüşümü altında korunur.

<u>İspat:</u> Teoremin ispatı yalnızca $i=3$ için yapılacaktır. Diğeri benzer şekilde kolayca görülmektedir. $f:(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)\to(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ esnek bir dönüşüm ve aşağıdaki şartlar sağlansın.

1) $f:(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)\to(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ esnek homeomorfizmdir ($f$ esnek birebir ve örten, $f,f^{-1}$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli).

2) $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayı esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_3-$uzayıdır.

$(F,E)$ esnek kümesi $Y$ üzerinde esnek $\tilde{k}_{1,2}$-kapalı altküme ve $y_\beta \tilde{\notin} (F,E)$ sağlanacak şekilde $y_\beta \tilde{\in} SS(Y)_E$ olsun. $f$ esnek örten dönüşüm olduğundan $f(x_\alpha)=y_\beta$ olacak şekilde $x_\alpha \tilde{\in} SS(X)_E$ vardır. $f$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli bir dönüşüm, $(F,E)$ esnek kümesi de $Y$ üzerinde esnek $\tilde{k}_{1,2}-$kapalı olduğundan $f^{-1}((F,E))$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$kapalıdır. $y_\beta = f(x_\alpha) \tilde{\notin} (F,E)$, $x_\alpha \tilde{\notin} f^{-1}((F,E))$ elde edilir. $x_\alpha \tilde{\notin} f^{-1}((F,E))$ olacak şekilde $x_\alpha \tilde{\in} SS(X)_E$ vardır. Ayrıca, $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_3-$uzayı olduğundan $x_\alpha \tilde{\in} (G,E)$, $f^{-1}((F,E)) \tilde{\subseteq} (H,E)$, $(G,E)\tilde{\cap}(H,E)=(\tilde{\phi},E)$ olacak şekilde $(G,E),(H,E)\in \tilde{g}_{1,2}$ esnek kümeleri vardır. Dolayısıyla $f(x_\alpha)=y_\beta \tilde{\in} f((G,E))$, $f(f^{-1}((F,E)))=(F,E)\tilde{\subseteq} F((H,E))$ ($f$ esnek birebir) ve $f((G,E)\tilde{\cap}(H,E))= f((G,E))\tilde{\cap} f((H,E)) = f((\tilde{\phi},E))=(\tilde{\phi},E)$ elde edilir.

$f^{-1}$ esnek $\tilde{g}_{1,2}-$sürekli bir dönüşüm olduğundan $f$ esnek açık bir dönüşümdür. Eğer $(G,E),(H,E)\tilde{\in}\tilde{g}_{1,2}$ ve $f$ esnek açık bir dönüşüm ise $f((G,E)), f((H,E)) \tilde{\in} \tilde{k}_{1,2}$ dir. Bu nedenle

$$y_\beta \tilde{\in} f((G,E)),\ (F,E)\tilde{\subseteq} f((H,E)),\ \ f((G,E))\tilde{\cap} f((H,E)) = f((G,E))\tilde{\cap} f((H,E)) = (\tilde{\phi},E)$$

sağlanacak şekilde $f((G,E)), f((H,E)) \in \tilde{k}_{1,2}$ vardır. Dolayısıyla $(Y,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_3-$uzayıdır.

### 3.4 Esnek İkili Genelleştirilmiş Topolojik Uzaylarda Kalıtsal Özellikler

Tanım 3.4.1: $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $Y \tilde{\subseteq} X$ olsun. $\tilde{g}_{1Y}=\{({}^Y F,E):(F,E)\in\tilde{g}_1\}$ ve $\tilde{g}_{2Y}=\{({}^Y G,E):(G,E)\in\tilde{g}_2\}$ aileleri $Y$ üzerinde birer esnek topolojidir. $(Y,\tilde{g}_{1Y},\tilde{g}_{2Y},E)$ uzayına $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayının *esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş alt uzayı* denir.

Teorem 3.4.1: $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $Y \tilde{\subseteq} X$ olsun. Bu durumda $(Y,\tilde{g}_{1Y},\tilde{g}_{2Y},E)$ uzayı da esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $\tilde{g}_{1Y,2Y} = \tilde{g}_{1,2Y}$ dir. Burada $\tilde{g}_{1,2Y} = \{(Y,E) \tilde{\cap} (G,E) : (G,E) \in \tilde{g}_{1,2}\}$ ve $\tilde{g}_{1Y,2Y} = \{(H,E) = (H_1,E) \tilde{\cup} (H_2,E), (H_i,E) \in \tilde{g}_{iY}, i = 1,2\}$ dir.

İspat: $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş topolojik uzay, $(X,\tilde{g}_1,E)$ ve $(X,\tilde{g}_2,E)$ esnek genelleştirilmiş topolojik uzaylar olsun. $Y \tilde{\subseteq} X$ olduğundan $(X,\tilde{g}_{1Y},E)$ ve $(X,\tilde{g}_{2Y},E)$ uzayları $Y$ üzerinde iki esnek genelleştirilmiş topolojik uzaydır. Dolayısıyla $(Y,\tilde{g}_{1Y},\tilde{g}_{2Y},E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş topolojik uzaydır. Diğer taraftan $(G,E) \in \tilde{g}_{1,2Y}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}(G,E) &= (Y,E) \tilde{\cap} (H,E) \\ &= (Y,E) \tilde{\cap} [(H_1,E) \tilde{\cup} (H_2,E)] \\ &= [(Y,E) \tilde{\cap} (H_1,E)] \tilde{\cup} [(Y,E) \tilde{\cap} (H_2,E)]\end{aligned}$$

$(H_1,E) \in \tilde{g}_1, (H_2,E) \in \tilde{g}_2$ olacak şekilde $(H,E) \in \tilde{g}_{1,2}$ vardır. $(Y,E) \tilde{\cap} (H_1,E) \in \tilde{g}_{1Y}$ ve $(Y,E) \tilde{\cap} (H_2,E) \in \tilde{g}_{2Y}$ olduğundan $[(Y,E) \tilde{\cap} (H_1,E)] \tilde{\cup} [(Y,E) \tilde{\cap} (H_2,E)] \in \tilde{g}_{1Y,2Y}$ olur. Böylece $(G,E) \in \tilde{g}_{1Y,2Y}$ elde edilir. Yani $\tilde{g}_{1Y,2Y} = \tilde{g}_{1,2Y}$ şeklindedir.

Önerme 3.4.1 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $Y \tilde{\subseteq} X$ olsun. Eğer $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_0 -$uzayı ise $(Y,\tilde{g}_{1Y},\tilde{g}_{2Y},E)$ uzayı da esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_0 -$uzayıdır.

İspat: $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_0 -$uzayı ve $(Y,\tilde{g}_{1Y},\tilde{g}_{2Y},E)$, $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayının esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş altuzayı olsun. $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(Y)_E$, $x_\alpha \neq y_\beta$. $Y \tilde{\subseteq} X$ olduğundan $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(X)_E$ dir. Eğer $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_0 -$uzayı olduğundan $x_\alpha \tilde{\in} (F,E)$, $y_\beta \tilde{\notin} (F,E)$ ya da $x_\alpha \tilde{\notin} (F,E)$, $y_\beta \tilde{\in} (F,E)$ olacak şekilde $(F,E) \in SS(X)_E$ vardır. Bu durumda $x_\alpha \tilde{\in} (Y,E) \tilde{\cap} (F,E) = ({}^Y F,E)$, $y_\beta \tilde{\notin} (Y,E) \tilde{\cap} (F,E) = ({}^Y F,E)$ ya da

$x_\alpha \tilde{\notin} (Y,E) \tilde{\cap} (F,E) = ({}^Y F,E)$, $y_\beta \tilde{\in} (Y,E) \tilde{\cap} (F,E) = ({}^Y F,E)$ olur. $({}^Y F,E) \in \tilde{g}_{1,2Y}$ olduğundan $(Y,\tilde{g}_{1Y},\tilde{g}_{2Y},E)$ uzayı esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_0-$uzayıdır.

Önerme 3.4.2 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $Y \tilde{\subseteq} X$ olsun. Eğer $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_1-$uzayı ise $(Y,\tilde{g}_{1Y},\tilde{g}_{2Y},E)$ uzayı da esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_1-$uzayıdır.

İspat: $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_1-$uzayı ve $(Y,\tilde{g}_{1Y},\tilde{g}_{2Y},E)$, $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayının esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş alt uzayı olsun. $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(Y)_E$, $x_\alpha \neq y_\beta$. $Y \tilde{\subseteq} X$ olduğundan $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(X)_E$ dir. $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_1-$uzayı olduğundan $x_\alpha \tilde{\in} (F,E)$, $y_\beta \tilde{\notin} (F,E)$ ve $x_\alpha \tilde{\notin} (G,E)$, $y_\beta \tilde{\in} (G,E)$ olacak şekilde $(F,E),(G,E) \in SS(X)_E$ vardır. Bu durumda $x_\alpha \tilde{\in} (Y,E) \tilde{\cap} (F,E) = ({}^Y F,E)$, $y_\beta \tilde{\notin} (Y,E) \tilde{\cap} (F,E) = ({}^Y F,E)$ ve $x_\alpha \tilde{\notin} (Y,E) \tilde{\cap} (G,E) = ({}^Y G,E)$, $y_\beta \tilde{\in} (Y,E) \tilde{\cap} (G,E) = ({}^Y G,E)$ bulunur. $({}^Y F,E),({}^Y G,E) \in \tilde{g}_{1,2Y}$ olduğundan $(Y,\tilde{g}_{1Y},\tilde{g}_{2Y},E)$ uzayı esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_1-$uzayıdır.

Önerme 3.4.3 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $Y \tilde{\subseteq} X$ olsun. Eğer $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_2-$uzayı ise $(Y,\tilde{g}_{1Y},\tilde{g}_{2Y},E)$ uzayı da esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_2-$uzayıdır.

İspat: $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_2-$uzayı ve $(Y,\tilde{g}_{1Y},\tilde{g}_{2Y},E)$, $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayının esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş alt uzayı olsun. $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(Y)_E$, $x_\alpha \neq y_\beta$. $Y \tilde{\subseteq} X$ olduğundan $x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} SS(X)_E$ dir. $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_2-$uzayı olduğundan $x_\alpha \tilde{\in} (F,E)$, $y_\beta \tilde{\in} (G,E)$ ve $(F,E) \tilde{\cap} (G,E) = (\tilde{\phi},E)$ olacak şekilde $(F,E),(G,E) \in \tilde{g}_{1,2}$ vardır. Bu durumda $x_\alpha \tilde{\in} (Y,E) \tilde{\cap} (F,E) = ({}^Y F,E)$, $y_\beta \tilde{\in} (Y,E) \tilde{\cap} (G,E) = ({}^Y G,E)$ ve

$[(Y,E)\tilde{\cap}(F,E)]\tilde{\cap}[(Y,E)\tilde{\cap}(G,E)]=(Y,E)\tilde{\cap}[(F,E)\tilde{\cap}(G,E)]=(Y,E)\tilde{\cap}(\tilde{\phi},E)=(\tilde{\phi},E)$ bulunur. $({}^{Y}F,E),({}^{Y}G,E)\in\tilde{g}_{1,2Y}$ olduğundan $(Y,\tilde{g}_{1Y},\tilde{g}_{2Y},E)$ uzayı esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_2-$uzayıdır.

Önerme 3.4.4 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $Y\tilde{\subseteq}X$ olsun. Eğer $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_3-$uzayı ise $(Y,\tilde{g}_{1Y},\tilde{g}_{2Y},E)$ uzayı da esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_3-$uzayıdır.

İspat: $y_\beta\tilde{\in}SS(Y,E)$ ve $y_\beta\tilde{\notin}(F,E)$ sağlanacak şekilde $(F,E)$, $Y$ üzerinde esnek kapalı bir küme olsun. Bu durumda $y_\beta\tilde{\notin}(F,E)=((Y,E)\tilde{\cap}(G,E))$ elde edilir. Fakat $y_\beta\tilde{\in}(Y,E)$, $y_\beta\tilde{\notin}(G,E)$ dir. $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_3-$uzayı olduğundan $y_\beta\tilde{\in}(G_1,E)$, $(G_1,E)\tilde{\subseteq}(G_2,E)$ ve $(G_1,E)\tilde{\cap}(G_2,E)=(\tilde{\phi},E)$ olacak şekilde $(G_1,E),(G_2,E)\tilde{\in}\tilde{g}_{1,2}$ vardır. Eğer $(F_1,E)=(Y,E)\tilde{\cap}(G,E)$ ve $(F_2,E)=(Y,E)\tilde{\cap}(G_2,E)$ olarak alınırsa $y_\beta\tilde{\in}(F_1,E)$, $(F_1,E)\tilde{\subseteq}(Y,E)\tilde{\cap}(F_2,E)$ ve $(F_1,E)\tilde{\cap}(F_2,E)\tilde{\subseteq}(G_1,E)\tilde{\cap}(G_2,E)=(\tilde{\phi},E)$ sağlanacak şekilde $(F_1,E),(F_2,E)\tilde{\in}\tilde{g}_{1,2Y}$ vardır. Dolayısıyla $(Y,\tilde{g}_{1Y},\tilde{g}_{2Y},E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_3-$uzayıdır.

Önerme 3.4.5 $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş topolojik uzay ve $Y\tilde{\subseteq}X$ olsun. Eğer $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_4-$uzayı ise her esnek kapalı $(Y,\tilde{g}_{1Y},\tilde{g}_{2Y},E)$ uzayı da esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_4-$uzayıdır.

İspat: $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_4-$uzayı ve $(Y,\tilde{g}_{1Y},\tilde{g}_{2Y},E)$ uzayı $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ uzayının esnek kapalı alt uzayı olsun. Ayrıca $(K_1,E)$, $(K_2,E)$ kümeleri $Y$ nin esnek kapalı birbirinden farklı alt kümeleri olsun. $(K_1,E)$, $(K_2,E)\in\tilde{g}^{c}_{1,2Y}$ olduğundan $(K_1,E)=(Y,E)\tilde{\cap}(F_1,E)$ ve $(K_2,E)=(Y,E)\tilde{\cap}(F_2,E)$ sağlanacak şekilde $(F_1,E),(F_2,E)\in\tilde{g}^{c}_{1,2}$ vardır. Dolayısıyla,

$(Y,E)\in\tilde{g}^{c}_{1,2}$ ve $(F_1,E),(F_2,E)\in\tilde{g}^{c}_{1,2}$ olduğundan $(Y,E)\tilde{\cap}(F_1,E)$, $(Y,E)\tilde{\cap}(F_2,E)\in\tilde{g}^{c}_{1,2}$ elde edilir.

$(K_1,E)$, $(K_2,E)$ $X$ üzerinde birbirinden farklı esnek kapalı küme ve $(X,\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,E)$ esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_4-$uzayıdır. Ayrıca $(K_1,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$, $(K_2,E)\tilde{\subseteq}(H,E)$ ve $(G,E)\tilde{\cap}(H,E)=(\tilde{\phi},E)$ olacak şekilde $(G,E),(H,E)\in\tilde{g}_{1,2}$ vardır. Dolayısıyla

$(K_1,E)\tilde{\subseteq}(Y,E)\tilde{\cap}(G,E)$, $(K_2,E)\tilde{\subseteq}(Y,E)\tilde{\cap}(H,E)$ ve

$$((Y,E)\tilde{\cap}(G,E))\tilde{\cap}((Y,E)\tilde{\cap}(H,E))=(Y,E)\tilde{\cap}[(G,E)\tilde{\cap}(H,E)]=(Y,E)\tilde{\cap}(\tilde{\phi},E)=(\tilde{\phi},E)$$

sağlanacak şekilde $\exists(Y,E)\tilde{\cap}(G,E),(Y,E)\tilde{\cap}(H,E)\in\tilde{g}_{1,2Y}$ vardır. Dolayısıyla $(Y,\tilde{g}_{1Y},\tilde{g}_{2Y},E)$ uzayı da esnek çiftsel ikili genelleştirilmiş $T_4-$uzayıdır.

# KAYNAKÇA


[1] Császár, Á. (2002). Generalized topology, generized continuity. Acta Mathematica Hungarica 96(4), 351-357.

[2] Njåstad, O. (1965). On some classes of nearly open sets. Pacific journal of mathematics 15(3), 961-970.

[3] Abd El-Monsef, M. (1983). β-open sets and β-continuous mappings. J Bull. Fac. Sci. Assiut Univ. 1277-90.

[4] Levine, N. (1963). Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 70(1), 36-41.

[5] Levine, N. (1970). Generalized closed sets in topology. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 19(1), 89-96.

[6] Abd El-Monsef, M. E., El-Deeb, S. N. and Mahmoud, R. A. (1983). β-open sets and β-continuous mappings. Bull. Fac. Sci. Assiut Univ. 1277-90.

[7] Akdag, M. and Ozkan, A. (2014). On Soft Preopen Sets and Soft Pre Separation Axioms. Gazi University Journal of Science 27(4).

[8] Akdag, M. and Ozkan, A. (2012). Some properties of Contra gb-continuous functions. Journal of New results in Science 1(1), 40-49.

[9] Akdag, M. and Ozkan, A. (2014). On soft [alpha]-separation axioms. Journal of Advanced Studies in Topology 5(4), 16-25.

[10] Akdag, M. and Ozkan, A. (2014). Soft b-open sets and soft b-continuous functions. Mathematical Sciences 8(2), 124.

[11] Akdag, M. and Ozkan, A. (2014). On soft β-open sets and soft β-continuous functions. The scientific world journal 2014.

[12] Ozkan, A. (2011). Genelleştirilmiş Kümeler ve Genelleştirilmiş Sürekli Fonksiyonlar Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sivas.

[13] Balachandran, K., Sundaram, P. and Maki, H. (1996). Generalized locally closed sets and GLC-continuous functions. Indian Journal of Pure Applied Mathematics 27235-244.

[14] Ganster, M. and Reilly, I. (1989). Locally closed sets and LC-continuous functions. International Journal of Mathematics Mathematical Sciences 12.

[15] Gnanambal, Y. (1997). On generalized preregular closed sets in topological spaces. Indian Journal of Pure Applied Mathematics 28351-360.

[16] Levine, N. (1963). Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces. The American mathematical monthly 70(1), 36-41.

[17] Mashhour, A., Hasanein, I. and El-Deeb, S. (1983). α-continuous and α-open mappings. Acta Mathematica Hungarica 41(3-4), 213-218.

[18] Palaniappan, N. and Rao, K. C. (1993). Regular generalized closed sets. Kyungpook Mathematical Journal 33(2), 211-219.

[19] Sundaram, P., Maki, H. and Balachandran, K. (1991). Semi Generalized Continuous maps and Semi T-Spaces. Bull. Fukuoka./ruiv. Ed. Purt III 4033-40.

[20] Kelly, J. (1963). Bitopological spaces. Proceedings of the London Mathematical Society 3(1), 71-89.

[21] Fukutake, T. (1985). On generalized closed sets in bitopological spaces. Bull. Fukuoka Univ. Nat. Sci., 3519-28.

[22] Boonpok, C. (2010). Weakly open functions on bigeneralized topological spaces. Int. Journal of Math. Analysis 4(18), 891-897.

[23] Duangphui, T., Boonpok, C. and Viriyapong, C. (2011). Continuous functions on bigeneralized topological spaces. J Int. J. Math. Anal 5(24), 1175-1184.

[24] Sompong, S. and Muangchan, S.-a. (2013). Exterior Set on Bigeneralized Topological Spaces. Int. Journal of Math. Analysis 7(15), 719-723.

[25] Sompong, S. (2013). Dense Sets on Bigeneralized Topological Spaces. J Int. J. Math. Anal 7(21), 999-1003.

[26] Torton, P., Viriyapong, C. and Boonpok, C. (2012). Some separation axioms in bigeneralized topological spaces. Internat. J. Math. Anal 6(56), 2789-2796.

[27] Zakari, A. (2013). Almost homeomorphisms on bigeneralized topological spaces. In Int. Math. Forum, pp 1853-1861.

[28] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. Information and control 8(3), 338-353.

[29] Molodtsov, D. (1999). Soft set theory—first results. Computers & Mathematics with Applications 37(4-5), 19-31.

[30] Akdag, M. and Ozkan, A. (2014). Soft-open sets and soft-continuous functions. In Abstract and Applied Analysis, Hindawi.

[31] Ozkan, A. (2014). Esnek Topolojik Uzaylarda Genelleştirilmiş Açık Kümeler, Doktora Tezi, Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sivas.

[32] Alkhazaleh, S. and Salleh, A. R. (2011). Soft Expert Sets. Advances in Decision Sciences 20111-12.

[33] Aras, C. G., Sonmez, A. and Cakalli, H. (2017). An approach to soft functions. Journal of Mathematical Analysis 8(2).

[34] Babitha, K. V. and Sunil, J. J. (2010). Soft set relations and functions. Computers & Mathematics with Applications 60(7), 1840-1849.

[35] Bayramov, S. and Gunduz, C. (2013). Soft locally compact spaces and soft paracompact spaces. Journal of Mathematics and System Science 3(3), 122.

[36] Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010). Soft set theory and uni–int decision making. European Journal of Operational Research 207(2), 848-855.

[37] Çağman, N., Karataş, S. and Enginoglu, S. (2011). Soft topology. Computers & Mathematics with Applications 62(1), 351-358.

[38] Das, S. and Samanta, S. (2012). Soft real sets, soft real numbers and their properties. J. Fuzzy Math 20(3), 551-576.

[39] Georgiou, D. N. and Megaritis, A. (2014). Soft set theory and topology. Applied General Topology 15(1), 93-109.

[40] Maji, P. K., Biswas, R. and Roy, A. (2003). Soft set theory. Computers & Mathematics with Applications 45(4-5), 555-562.

[41] Ozturk, T. Y. and Bayramov, S. (2014). Soft mappings space. ScientificWorldJournal 2014307292.

[42] Ozturk, T. Y. and Yolcu, A. (2016). On Soft Uniform Spaces. Eastern Anatolian Journal of Science 2(1), 7-13.

[43] Maji, P., Roy, A. R. and Biswas, R. (2002). An application of soft sets in a decision making problem. Computers & Mathematics with Applications 44(8-9), 1077-1083.

[44] Chen, D., Tsang, E., Yeung, D. S. and Wang, X. (2005). The parameterization reduction of soft sets and its applications. Computers & Mathematics with Applications 49(5-6), 757-763.

[45] Pei, D. and Miao, D. (2005). From soft sets to information systems. In 2005 IEEE international conference on granular computing, pp 617-621, IEEE.

[46] Kong, Z., Gao, L., Wang, L. and Li, S. (2008). The normal parameter reduction of soft sets and its algorithm. Computers & Mathematics with Applications 56(12), 3029-3037.

[47] Zou, Y. and Xiao, Z. (2008). Data analysis approaches of soft sets under incomplete information. Knowledge-Based Systems 21(8), 941-945.

[48] Aktaş, H. and Çağman, N. (2007). Soft sets and soft groups. Information sciences 177(13), 2726-2735.

[49] Shabir, M. and Naz, M. (2011). On soft topological spaces. Computers & Mathematics with Applications 61(7), 1786-1799.

[50] Hussain, S. and Ahmad, B. (2011). Some properties of soft topological spaces. Computers & Mathematics with Applications 62(11), 4058-4067.

[51] Nazmul, S. and Samanta, S. (2014). Some properties of soft topologies and group soft topologies. Ann. Fuzzy Math. Inform 8(4), 645-661.

[52] Peyghan, E., Samadi, B. and Tayebi, A. (2012). On soft connectedness. arXiv preprint:1202.1668.

[53] Kharal, A. and Ahmad, B. (2011). Mappings on soft classes. New Mathematics and Natural Computation 7(03), 471-481.

[54] Zorlutuna, I., Akdag, M., Min, W. and Atmaca, S. (2012). Remarks on soft topological spaces. Annals of fuzzy Mathematics and Informatics 3(2), 171-185.

[55] Das, S. and Samanta, S. (2013). On soft inner product spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform 6(1), 151-170.

[56] Sahin, R. and Kuçuk, A. (2013). Soft filters and their convergence properties. Ann. Fuzzy Math. Inform 6(3), 529-543.

[57] Thomas, J. and Johna, S. J. (2014). On soft generalized topological spaces. Journal of New Results in Science 3(4), 1-15.

[58] Jacob John, S. and Thomas, J. (2014). On Soft $\mu$-Compact Soft Generalized Topological Spaces. Journal of Uncertainty in Mathematics Science 20141-9.

[59] Thomas, J. and John, S. J. (2015). Soft generalized separation axioms in soft generalized topological spaces. International Journal of Scientific Engineering Research 6(3), 969-974.

[60] Ittanagi, B. M. (2014). Soft bitopological spaces. International Journal of Computer Applications 107(7), 1-4.

[61] Kandil, A., Tantawy, O., El-Sheikh, S. and Hazza, S. A. (2016). Pairwise open (closed) soft sets in a soft bitopological spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform 11(4), 571-588.

[62] Ozturk, T. Y. and Aras, C. G. (2017). Soft Pair-Wise Continuity in Soft Bitopological Spaces. Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi 13(2), 413-422.

[63] Mahmood, S. I. and Abdul-Hady, A. A. (2018). Soft (1, 2)*-Omega Separation Axioms and Weak Soft (1, 2)*-Omega Separation Axioms in Soft Bitopological Spaces. Ibn AL-Haitham Journal For Pure Applied Science 31(2), 137-150.

[64] Bizim, O. (2013). Genel Topoloji. Vol. 1, Dora Basın-Yayın Dağıtım Ltd. Şti., Bursa.

[65] Bayramov, S. and Gunduz (Aras), C. (2004). Genel Topoloji, Caglayan Basımevi, İstanbul.

[66] Çalişkan, E. (2012). Generalized Topology and Generalized Neighbourhood Systems, Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

[67] Császár, Á. (2007). Normal generalized topologies. Acta Mathematica Hungarica 115(4), 309-313.

[68] Das, S. and Samanta, S. (2013). On soft metric spaces. J. Fuzzy Math 21(3), 707-734.

[69] Rong, W. (2012). The countabilities of soft topological spaces. International Journal of Computational and Mathematical Sciences 6159-162.

[70] Aygünoğlu, A. and Aygün, H. (2012). Some notes on soft topological spaces. Neural computing and Applications 21(1), 113-119.

[71] Tantawy, O., El-Sheikh, S. and Hamde, S. (2016). Separation axioms on soft topological spaces. Annals of Fuzzy Mathematics Informatics 11(4), 511-525.

[72] Ozturk, T., Aras, C. and Yolcu, A. (2018). Soft bigeneralized topological spaces. Filomat 32(16), 5679-5690.

[73] Aras, C. G., Yolcu, A. and Ozturk, T. Y. (2018). A study on soft generalized continuity in soft bigeneralized topological spaces. Journal of Mathematical Analysis 9(5), 106-118.

[74] Yolcu, A. and Ozturk, T. Y. (2019). Pairwise soft separation axioms in soft bigeneralized topological spaces. New Trends in Mathematical Science 4(7), 484-494.

# ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Adem Yolcu

Doğum Yeri ve Tarihi : Kars/Sarıkamış - 02.07.1992

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (e-posta) : yolcu.adem@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Sarıkamış Ş.B.B.K Anadolu Lisesi (2005-2010)

Lisans : Kafkas Üniversitesi-Matematik (2010-2014)

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi-Matematik-Topoloji (2014-2016)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :

2016-2017 Kars/Sarıkamış Gazipaşa Ortaokulu - Matematik Öğretmeni

Yayınları (SCI ve diğer) :

Yayınlar

[1] Öztürk T. Y., **Yolcu A.**, “On Soft Uniform Spaces”, Eastern Anatolian Journal of Science, Vol.II, 1, (2016), 7-13

[2] Ozturk T. Y., Gündüz (Aras) C., **Yolcu A**. “Soft Bigeneralized Topological Spaces”, Filomat, 32:16 (2018),

[3] Gündüz Aras C., **Yolcu A.**, Öztürk T. Y., “A Study On Soft Generalızed Continuity in Soft Bigeneralized Topological Spaces”, Journal of Mathematical Analysis, 9 (5), (2018), 106-118

[4] **Yolcu A.**, Ozturk T. Y., “Pairwise Soft Separation Axioms in Soft bigeneralized Topological Spaces”, New Trends in Mathematical Sciences, 7(4), 484-494, (2019)

Bildiriler

[1] Ozturk T. Y., Gündüz (Aras) C., **Yolcu A**. “Soft Bigeneralized Topological Spaces”, Presented At The II. Internatıonal Conference On Advances In Natural And Applied Scıences: Icanas 2017, Antalya, 2017 (Özet Bildiri)

[2] Gündüz (Aras) C., Ozturk T. Y, **Yolcu A.** “A Study on Soft Generalized Continuity in Soft Bigeneralized Topological Spaces” , Presented At The II. Internatıonal Conference On Advances In Natural And Applied Scıences: Icanas 2017, Antalya, 2017 (Özet Bildiri)

[3] **Yolcu A**., Öztürk T. Y., Compactness in Soft Bigeneralized Topological Spaces, IX International Conference of the Georgian Mathematical Union, Batumi – Tbilisi, September 3 – 8, 2018 (Özet Bildiri)