T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENİŞLEMEYEN FONKSİYONLAR SINIFINDAN DAHA GENEL BAZI FONKSİYON SINIFLARI İÇİN SABİT NOKTA TEORİSİ VE BANACH UZAYIN YANSIMALI OLMASI BAĞLANTISI

Mehmet Mensur YİTİZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

OCAK-2020
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENİŞLEMEYEN FONKSİYONLAR SINIFINDAN DAHA GENEL BAZI FONKSİYON SINIFLARI İÇİN SABİT NOKTA TEORİSİ VE BANACH UZAYIN YANSIMALI OLMASI BAĞLANTISI

Mehmet Mensur YİTİZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

OCAK-2020
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Mehmet Mensur Yitiz'in Dr. Öğr. Üyesi Veysel Nezir danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "..Genişlemey...Fonksiyon-lar sınıfından daha genel bazı fonksiyon sınıfları için sabit nokta teorisi ve Banach uzayın yansımalı olması bağlantısı......" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

28 / 01 / 2020

	Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA	
Üye	: Doç. Dr. Furkan YILDIRIM	
Uye	: Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mehmet Mensur YİTİZ
28.01.2020

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

GENİŞLEMEYEN FONKSİYONLAR SINIFINDAN DAHA GENEL BAZI FONKSİYON SINIFLARI İÇİN SABİT NOKTA TEORİSİ VE BANACH UZAYIN YANSIMALI OLMASI BAĞLANTISI

Mehmet Mensur YİTİZ

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

2009’da Yansımalı Banach uzaylarının genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayacak şekilde yeniden normlanabildiği Dominguez Benavides tarafından gösterilmiştir. Bunun tersinin doğru olmadığı ise 2008’de yansımayan Banach uzay ℓ^1’in sabit nokta teorisine sahip olacak şekilde yeniden normlanabileceği Lin tarafından ispatlanmıştı. Sonrasında ise birçok önemli sabit nokta teorisyeni tarafından denklik durumunun sağlanabildiği genişlemeyen fonksiyonları içeren daha geniş bir sınıfın var olup olmadığı sorulmuştur fakat bu halen çözülemeyen büyük açık bir sorudur. Yani genişlemeyen fonksiyonları içeren daha geniş bir sınıf için sabit nokta teorisini sağlayacak şekilde yeniden normlanabilen Banach uzaylarının yansımalı olup olmadığı halen sorgulanan bir sorudur. Lennard ile Nezir’in bir ortak çalışması ile bir Banach uzayı bir Banach latisiyse veya koşulsuz baza sahipse, veya sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayı üzerinde tanımlı operatörlerin bir simetrik normlu idealiyse bu uzayın yansımalı olması için gerek ve yeter koşul kademeli genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan bir eş norma sahip olması gösterilmiştir. Bu çalışmalarından önce Nezir’in doktora tezinde ve tezden yararlanılarak yazılan bir çalışmalarında genişlemeyen fonksiyonlardan daha genel bir sınıf olan yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için Banach latislerde sabit nokta teorisine sahip olmanın uzayın yansımalı olmasına denkliği gösterilmiştir. Bu tez çalışması ile adı geçen fonksiyon sınıfları ve daha genel sınıflar ele alınmış ve bahsi geçen çalışmalar derinlemesine incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: genişlemeyen fonksiyon, sabit nokta teorisi, kapalı sınırlı konveks küme, yansımalı Banach uzay, Banach latis, kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyon, yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyon, kademeli genişlemeyen fonksiyon

2020, 38 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

FIXED POINT PROPERTY FOR SOME LARGER CLASSES CONTAINING NON-EXPANSIVE MAPPINGS AND RELATION TO REFLEXIVE BANACH SPACES

Mehmet Mensur YİTİZ

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof Dr. Veysel NEZİR

In 2009, Dominguez Benavides showed every reflexive Banach space can be renormed to have the fixed point property (fpp) for nonexpansive mappings. But the converse is not true by Lin's result: ℓ^1 can be renormed to have fpp for nonexpansive mappings. Later, it has remained to be open question as to whether or not Banach spaces that can be renormed to have fpp for a wider class of mappings are reflexive. However, by a published joint work of Nezir and Lennard which leads to the investigation of this problem, it was shown that if a Banach space is a Banach lattice, then it is reflexive if and only if it has an equivalent norm that has fpp for cascading nonexpansive mappings. But an equivalance principle has not yet been established without any necessity of any condition. Before their study, in Ph.D. thesis of Nezir and in a recent study using ingredients of his thesis, Lennard and Nezir showed that in Banach lattices, a Banach space has fixed point property for semi-strongly asymptotically nonexpansive mappings, which is a more general class of functions than nonexpansive mappings, if and only if the space is reflexive. In this thesis study all mentioned function classes with some more general functions in terms of fixed point theory are taken into consideration and aforementioned works are investigated deeply.

Key Words: nonexpansive mapping, fixed point property, closed bounded convex subset, reflexive Banach space, Banach lattice, strongly asymptotically nonexpansive mapping, semi-strongly asymptotically nonexpansive mapping, cascading nonexpansive mapping

2020, 38 pages

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince desteklerini hiç esirgemeyen ve şahsıma kıymetli vakitlerini ayırarak bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR'e sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan annem, babam ve ailem'e teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım boyunca her zaman sabırla beni destekleyen ve hiçbir zaman beni yalnız bırakmayan sevgili eşim Kader YİTİZ'e ve sevgili kızım Asel Eşfa YİTİZ'e teşekkürler.

Mehmet Mensur YİTİZ

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SNT(g.f.)	:	Genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisi
a.i.	:	Asimtotik izometrik
ℓ^1	:	Mutlak toplanabilir dizilerin Banach uzayı
c_0	:	Sıfıra yakınsak dizilerin Banach uzayı
c_{00}	:	Sıfırdan farklı sonlu adette terime sahip dizilerin Banach uzayı
co E	:	E ‘nin konveks kabuğu
$\overline{\mathrm{co}}$ E	:	E ‘nin kapalı konveks kabuğu
$\cong$	:	Izometrik olarak izomorfik
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	:	Sayma sayıları kümesi
$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$	:	n. terimi 1, diğerleri 0 olan ℓ^1 ve c_0’ın kanonik bazı

1. GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Hilbert uzaylarından alınan boş olmayan keyfi kapalı, sınırlı ve konveks C alt kümesi üzerinde tanımlanacak herhangi $T: C \to C$ genişlemeyen fonksiyonunun C kümesinde bir sabit noktaya sahip olduğu 1965'de Browder [3] tarafından gösterilmiştir. Browder [4] ve Göhde [17] bağımsız çalışmaları ile bu teorem düzgün konveks Banach uzaylarına genelleştirilmiştir.

Daha sonrasında yine 1965 yılında Kirk [19] çalışması ile Browder'ın teoremini daha da genelleştirerek aynı sonucu normal yapıya sahip yansımalı Banach uzayları için vermiştir. Not edilmelidir ki normal yapıya sahip Banach uzayları bu uzaydan alınan her kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinin çapı Chebyshyew yarı çapından daha küçüktür.

Browder'ın Hilbert uzaylarında verdiği sonucu bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayı sağlayabiliyorsa o Banach uzayı genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip (yada sabit nokta teorisini sağlayan) Banach uzayı adı verilmiştir. Kirk'ün sonucu gereğince ek koşul kullanılması sebebinden yansımalı Banach uzaylarının tamamının sabit nokta teorisini sağlayıp sağlamadığı halen çözülememiş soru olmuştur.

Bu açık soru hakkında daha derin bilgiye sahip olabilmek için ve metrik sabit nokta teorisini daha detaylı anlayabilmek için Goebel ve Kirk [15], Goebel ve Reich [16], Reich [34,35], Sims [37], Kirk ve Sims [20], Goebel [13], Maurey [30], ile Aksoy ve Khamsi [1] çalışmaları incelenebilir.

Yansımalılık ve karakterizasyonu ile yaklaşık sabit nokta prensibi arasında çok yakın ilişki bulunmaktadır ve bu ilişki ise Reich [35], Shafrir [36], Matoušková ve Reich [29], ve Domínguez Benavides [6] çalışmalarında görülebilir.

Yakın zamanda, keyfi yansımalı Banach uzayı $(X, \|\cdot\|)$ üzerinde öyle bir $\|\cdot\|_{\sim}$ eş değer norm bulunabilir öyle ki $(X, \|\cdot\|_{\sim})$ bu durumda genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olacaktır sonucunu Dominguez Benavides [5] çalışması ile verilmiştir. Görülmektedir ki bu çalışma ile Kirk'ün ek koşullu olarak yansımalı Banach uzayları için verdiği sonuçdan sonra ortaya çıkan uzun süredir açık olan ve halen açık kalmış soruya farklı bir bakış açısı getirilmiştir. Bu çalışma büyük takdir kazanmış olup ayrıca ayrılabilir yansımalı Banach uzayları için verilmiş olan van Dulst [12] çalışmasındaki bir teoremi daha da genelleştirmektedir.

Dominguez Benavides'in sonucunun tersi düşünüldüğünde ise genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip Banach uzaylarının yansımalı olmasının beklenmesinin doğru olmayacağı Lin [25] çalışması ile gösterilmiştir. Sabit nokta teorisyenlerinin ve alanla ilgili araştırmacıların bildiği üzere yansımayan Banach uzaylarından $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozmaktadır. Lin [25] çalışması ise yansımayan Banach uzaylarının sabit nokta teorisine sahip olacak şekilde yeniden normlanabileceğine dair ilk örneği literatüre kazandırarak tanınan çok değerli bir sonuç ortaya koymuştur. Lin'in bu sonucu mutlak toplanabilir diziler uzayı $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ üzerinde bir eşdeğer norm tanımlanarak verilmiştir.

$(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ sıfıra yakınsak diziler uzayı, genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozan iyi bilinen ikinci bir yansımayan Banach uzayıdır. $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ üzerinde bir $\|\cdot\|_\sim$ eşdeğer norm bulunup bulunamayacağı öyleki bu eşdeğer norma göre $(c_0, \|\cdot\|_\sim)$ ın genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olup olmayacağı açık kalmış çok iyi tanınan ve araştırılan bir sorudur. Bu soru tez danışmanının TÜBİTAK projesinin bir ürünü olarak afinlik koşulu altında Nezir ve Mustafa ortak çalışması [33] ile çözülmüştür. Fakat, koşula gerek kalmadan çözülemeyen soru ele alınırsa, fonksiyon sınıfı daha da zayıflatılarak asimtotik genişlemeyen olarak düşünülürse bu soruya cevap "hayır" olurdu. Gerçekten de 2000'de Dowling, Lennard ve Turett'in [9] çalışması ile görülmüştür ki $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ Banach uzayı asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olacak şekilde yeniden normlanamaz. Bir başka deyişle, eğer $|||.|||$ normu $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ üzerinde tanımlı keyfi bir eşdeğer norm ise enaz bir kapalı, sınırlı, konveks C kümesi ve bu küme üzerinde tanımlı sabit noktasız enaz bir $T: C \to C$ asimtotik genişlemeyen fonksiyonu tanımlanabilir.

Bunun tersine 1972'de, Goebel ve Kirk [14] herhangi düzgün konveks Banach uzayı $(X, \|\cdot\|)$ (örneğin bir Hilbert uzayı) den alınan keyfi kapalı, sınırlı ve konveks $C \subseteq X$ ve bu küme üzerinde tanımlı her $T: C \to C$ total asimtotik genişlemeyen fonksiyonunun (en az bir $\nu \in \mathbb{N}$ ve $[1, \infty)$ aralığında $k_n \underset{n}{\to} 1$ koşulunu sağlayan en az bir $(k_n)_{n \geq \nu}$ dizisi bulunabilir öyleki her $n \geq \nu$ ve her $x, y \in C$ için $\| T^n x - T^n y \| \leq k_n \| x - y \|$ koşulunu sağlayan fonksiyonun) C kümesinde bir sabit noktası vardır.

Lennard ve Nezir [22] çalışmasında, yukarıda bahsedilen Dominguez Benavides teoremi ve güçlendirilmiş James' Distortion Teoremleri kullanılarak bir Banach uzayı bir Banach latisi ise, veya koşulsuz baza sahipse, veya sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayı üzerinde tanımlı operatörlerin bir simetrik normlu ideali ise ozaman bu uzayın yansımalı olması için gerek ve yeter koşul kademeli genişlemeyen fonksiyonlar (bkz Tanım 1.3) için sabit nokta teorisini sağlayan bir eş norma sahip olması gösterilmiştir. Bu sınıf fonksiyonlar genişlemeyen fonksiyonları içermektedir ve asimtotik genişlemeyen fonksiyonların bir analoğudur fakat bu iki tür birbirini içermez.

Bu konuda yapılan ilk çalışmalardan birisi Mil'man ve Mil'man [31] çalışması olup Mil'man ve Mil'man [31] çalışmasının ikinci teoremine göre bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayının yansımalı olması için gerek ve yeter koşul uzaydan alınan herhangi kapalı, sınırlı ve konveks C altkümesi üzerinde tanımlı her sürekli afin $T: C \to C$ fonksiyonun C kümesinde bir sabit noktası vardır. Bu teoreme analog olan başka teoremler ise Maurey [30] ile Dowling ve Lennard [8] çalışmalarında yer almaktadır öyleki bu çalışmalarda $(L^1[0,1], \|\cdot\|_1)$ Lebesgue uzayının bir Y altuzayının yansımalı olması için gerek ve yeter koşul Y nin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olmasıdır. Bu çalışmalar sabit nokta teorisi vasıtasıyla belirli Banach uzaylarda kümelerin zayıf kompak olması ile kapalı sınırlı ve konveks (veya sadece kapalı ve konveks) olması arasındaki bağlantıyı karakterize etmektedirler. Bu amaçla yapılmış çalışmalardan bazıları ise [7], [11] ve [6] olarak belirtilebilir.

Tez çalışmasında ise genel olarak Lennard ve Nezir'in [23] çalışması incelenecektir. Not edilmelidir ki [23] çalışması tez danışmanı Nezir'in [32] doktora tezinden yararlanılarak elde edilmiştir. [23] çalışmasında yazarların yarı kuvvetli asimtotik genişlemeyen ve kuvvetli asimtotik genişlemeyen diye adlandırdıkları genişlemeyen fonksiyonların alt sınıfı olan bir sınıf tanımlanmış ve bu sınıf fonksiyonlar için yansımayan uzaylardan ℓ^1 ve c_0 'ın sırasıyla bu fonksiyonlara göre sabit nokta teorisine sahip olabilecek şekilde yeniden normlanamayacağını gösterilmiştir. Hatta önemli bir sonuç olarak Banach Latisler için Yansımalı uzay olma kavramının yarı kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonların sabit noktaya uzayda sahip olma kavramına denk olduğu gösterilmiştir.

1.2 Kuramsal temeller

Bu bölümde tez çalışması ile ilgili gerekli tanım, teorem ve lemmalar [15] çalışmasından elde edilen bilgiler doğrultusunda verilecektir. Öncelikle not edilmelidir ki vektör uzayımızın skaler cismi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olacaktır. Ayrıca eğer E kümesi bir $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ Banach uzayının altkümesi ise E 'nin konveks kabuğu $\mathrm{co(E)}$ ve E 'nin kapalı konveks kabuğu $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{E})$ ile sembolize edilecetir. Bilindiği üzere her $x = (x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \in c_0$ için $\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ ve $x = (x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \in \ell^1$ için $\|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ dir.

Tanım 1.1 $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı, E kümesi ise bu Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks altkümesi olsun. $\mathrm{T: E \to E}$ bir fonksiyon olsun.

(1) Her $\lambda \in [0,1]$ ve her $\mathrm{x, y \in E}$ için $\mathrm{T((1-\lambda)\,x + \lambda\, y) = (1-\lambda)\,T(x) + \lambda\, T(y)}$ koşulu sağlanırsa T fonsiyonuna afin fonksiyon denir.

(2) Her $\mathrm{x, y \in E}$ için $\| \mathrm{Tx - Ty} \| \leq \| \mathrm{x - y} \|$ koşulu sağlanırsa T fonsiyonuna genişlemeyen fonksiyon denir.

(3) Her $\mathrm{x, y \in E}$ öyle ki $\mathrm{x \neq y}$ için $\| \mathrm{Tx - Ty} \| < \| \mathrm{x - y} \|$ koşulu sağlanırsa T fonsiyonuna daralan fonksiyon denir.

(4) Her $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ ve her $\mathrm{x, y} \in E$ için $\| \mathrm{T}^n\mathrm{x} - \mathrm{T}^n\mathrm{y} \| \leq \lambda_\mathrm{n} \| \mathrm{x - y} \|$ olacak şekilde 1'e azalarak yakınsayan $[1, \infty)$ aralığında en az bir $(\lambda_\mathrm{n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}_0}$ dizisi bulunabilirsa T fonsiyonuna asimtotik genişlemeyen fonksiyon denir.

(5) $\forall x, y \in E$ ve $\forall\, n \geq m$ için $\| T^n x - T^n y \| \leq \beta_{n,m} \| T^m x - T^m y \|$ olacak şekilde $n \geq m \to \infty$ iken $\beta_{n,m} \to 1$ ve $n \to \infty$, m keyfi iken $\beta_{n,m} \to 1$ koşullarını

sağlayan $\exists\{\beta_{n,m} : n,m \in \mathbb{N},\ n \geq m \geq 0\} \subseteq [1,\infty)$ dizisi bulunabiliyorsa T fonsiyonuna kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyon denir.

(6) $\forall x,y \in E$ ve $\forall\, n \geq m$ için $\| T^n x - T^n y \| \leq \lambda_{n,m} \| T^m x - T^m y \|$ olacak şekilde $n \geq m \to \infty$ iken $\lambda_{n,m} \to 1$ koşulunu sağlayan $\exists\{\lambda_{n,m} : n,m \in \mathbb{N},\ n \geq m \geq 0\} \subseteq [1,\infty)$ dizisi bulunabiliyorsa T fonsiyonuna yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyon denir.

Not edilmelidir ki yukarıdaki koşullardan (5) ve (6) da $\beta_{m,m} = \lambda_{m,m} = 1$ olduğu kabul edilebilir. Ayrıca (5) koşulundan (4) ve (5) koşulundan (6) koşulu elde edilir. Genel olarak (6) koşulu (4) koşulunu ima etmez (ve dolayısıyla (6) koşulu (5) koşulunu ima etmez).

Tanım 1.2 Eğer $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ Banach uzayının boştan farklı kapalı, sınırlı ve konveks her altkümesi E üzerinde tanımlı herhangi genişlemeyen $\mathrm{T}: \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ fonksiyonunun E'de en az bir sabit noktası var ise (en az bir $\mathrm{x} \in \mathrm{E}$ için $\mathrm{Tx} = \mathrm{x}$ ise) bu durumda $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ Banach uzayına genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip ya da sabit nokta teorisini korur denir.

Şimdi Lennard ve Nezir [22] çalışmasında yer alan kademeli genişlemeyen fonksiyon tanımının verilmesi için öncelikle aşağıdaki ön bilgi göz önüne alınır.

E kümesi bir $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks altkümesi olsun. $\mathrm{T}: \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ bir fonksiyon olsun. $\mathrm{E}_0 := \mathrm{E}$ alınsın. Şimdi ise $\mathrm{E}_1 := \overline{\mathrm{co}}\big(\mathrm{T}(\mathrm{E})\big) \subseteq \mathrm{E}$ olarak tanımlansın.

Açık bir şekilde görülmektedir ki E_1 kümesi E içinde kapalı, sınırlı ve konveks bir kümedir. Buradan keyfi $\mathrm{x} \in \mathrm{E}_1$ alınırsa $\mathrm{Tx} \in \mathrm{T}(\mathrm{E}_1) \subseteq \mathrm{T}(\mathrm{E}) \subseteq \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{T}(\mathrm{E})) = \mathrm{E}_1$ dir. Dolayısıyla T fonksiyonu E_1 den E_1'e tanımlıdır. Bu şekilde her $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{E}_\mathrm{n} := \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{T}(\mathrm{E}_{\mathrm{n}-1}))$ olarak tanımlanır.

Yine açıkça görülür ki her $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ için E_n kümesi E içinde kapalı, sınırlı ve konveks bir küme olup T fonksiyonu E_n den E_n'e tanımlıdır ve $\mathrm{E}_\mathrm{n} \subseteq \mathrm{E}_{\mathrm{n}-1}$ dir.

Tanım 1.3 $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı ve E kümesi de X'in kapalı, sınırlı ve konveks bir altkümesi olsun. $T: E \to E$ bir fonksiyon verilsin ve $(E_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ küme dizisi yukarıdaki gibi tanımlansın. Eğer her $n \in \mathbb{N}_0$ ve her $x, y \in E_n$ için $\| Tx - Ty \| \leq \lambda_n \| x - y \|$ olacak şekilde 1'e yakınsayan $[1, \infty)$ aralığında en az bir $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dizisi bulunabilirsa T fonksiyonuna kademeli genişlemeyen fonksiyon denir.

Bu sınıf sayesinde [22] çalışması ile aşağıdaki önemli teorem elde edilmiştir.

Teorem 1.4 $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach latis veya şartsız baza sahip bir Banach uzayı veya simetrik normlu ideal olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(1) X yansımalıdır.

(2) X üzerinde tanımlanabilen bir $\|\cdot\|^{\sim}$ eşdeğer norm vardır öyleki her $E \subseteq X$ kapalı, sınırlı ve konveks altkümesi üzerinde tanımlı her $\|\cdot\|^{\sim}$-kademeli genişlemeyen $T: E \to E$ fonksiyonun E kümesi içinde bir sabit noktası vardır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Tez çalışmasında gerekli olacak diğer tanım ve teoremler ise aşağıda verilmektedir.

Teorem 2.1 [18] Bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayınna aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda ℓ^1'in bir izomorfik kopyasını içerir denir: X'de en az bir $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dizisi varsa ki her $\varepsilon > 0$ ve her $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \in \ell^1$ için

$$(1-\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

Teorem 2.2 [18] Bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayınna aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda c_0 'ın bir izomorfik kopyasını içerir denir: X'de en az bir $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dizisi varsa ki her $\varepsilon > 0$ ve her $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \in c_0$ için

$$(1-\varepsilon)\sup_n|a_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\| \leq \sup_n|a_n| \text{ dir.}$$

Tanım 2.3 [8] Bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayınna aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda ℓ^1'in bir asimtotik izometrik (a.i.) kopyasını içerir denir: X'de en az bir $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dizisi ve $(0,1)$ aralığında sıfıra azalarak yakınsayan en az bir $(\varepsilon_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dizisi varsa ki her $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \in \ell^1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n)|a_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

Tanım 2.4 [10] Bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayınna aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda c_0 'ın bir asimtotik izometrik (a.i.) kopyasını içerir denir: X'de en az bir $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dizisi ve $(0,1)$ aralığında sıfıra azalarak yakınsayan en az bir $(\varepsilon_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dizisi varsa ki her $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \in c_0$ için

$$\sup_n(1-\varepsilon_n)|a_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\| \leq \sup_n|a_n|.$$

Teorem 2.5 Eğer bir $(X,\|\cdot\|)$ Banach uzayı ℓ^1'in veya c_0'ın bir a.i. kopyasını içerirse, bu durumda X genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini [SNT(g.f.)] bozar [8,10].

Teorem 2.6 [31] $(X,\|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(1) X yansımalıdır.

(2) X sürekli ve afin fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

Şimdi Lennard ve Nezir [21] çalışmasında yer alan bir Banach uzayı içinde a.i. c_0-toplam baz dizisi tanımı aşağıda görülebilir.

Tanım 2.7 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir Banach uzayı $(X,\|\cdot\|)$'de bir dizi olsun. Bu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine şu durumda $(X,\|\cdot\|)$'in bir a.i. c_0-toplam baz dizisi denir: $[0,\infty)$ aralığında sıfıra azalarak yaklaşan en az bir $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi varsa ki her $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ için

$$\sup_{n\geq 1}\left(\frac{1}{1+\varepsilon_n}\right)\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| \leq \left\|\sum_{j=1}^{\infty} t_j\, x_j\right\| \leq \sup_{n\geq 1}(1+\varepsilon_n)\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right|$$

dir.

2011'de, Lennard ve Nezir tarafından gösterilmiştir ki [21] eğer bir Banach bir a.i. c_0-toplam baz dizisi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ içerirse bu durumda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$'in kapalı konveks kabuğu olan $E := \overline{co}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ kümesi afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar. Hatta gösterilmiştir ki sabit noktası olmayan en az bir $U: E \to E$ fonksiyonu vardır.

Şimdi tez çalışmasının araştırma bulgularında temel oluşturacak tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.8 c_0-toplam alt sınır:

$(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir Banach uzayı $(X,\|\cdot\|)$'de bir dizi olsun. Kabul edilsin ki $\exists\, K \in (0,\infty)$ vardır öyle ki $\forall\gamma = (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ için

$$K\sup_{n\geq 1}\left|\sum_{j=n}^{\infty}\gamma_j\right| \leq \left\|\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j\,\eta_j\right\| \quad \text{dir.}$$

Bu durumda $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine c_0-toplam alt sınır koşulunu sağlar denir.

Lennard'ın danışmanlığı altında hazırlananan Nezir'in doktora tezinde [23] aşağıdakiler gösterilmiştir.

<u>Theorem 2.9</u> $\vec{d} = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(1,\infty)$ aralığında azalan bir dizi olsun (yani, her $n \in \mathbb{N}$ için $d_n \geq d_{n+1}$) ve $d_n \downarrow_n 1$ olsun. $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi de

$$\sigma := \sum_{n=2}^{\infty} |\delta_n - \delta_{n-1}| < \infty$$

koşulunu sağlayan ve 1'e azalarak yaklaşan (yani, her $n \in \mathbb{N}$ için $\delta_n \geq \delta_{n+1}$ ve $\delta_n \downarrow_n 1$ olacak şekilde) $(1,\infty)$ aralığında bir başka dizi olsun. Bu durumda aşağıdaki şekilde bir $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlanırsa

$$\begin{aligned}
&\eta_1 := \delta_1 d_1 e_1\\
&\eta_2 := \delta_2(d_1e_1 + d_2e_2)\\
&\eta_3 := \delta_3(d_1e_1 + d_2e_2 + d_3e_3)\\
&\eta_4 := \delta_4(d_1e_1 + d_2e_2 + d_3e_3 + d_4e_4)\\
&\vdots\\
&\eta_n := \delta_n(d_1e_1 + d_2e_2 + d_3e_3 + d_4e_4 + \dots + d_ne_n)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

bu $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir c_0-toplam baz dizisidir. Ayrıca, $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu $E := \overline{co}(\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\})$ kümesi ele alınırsa en az bir sabit noktasız $T: E \to E$ $\|\cdot\|_\infty$-asimtotik genişlemeyen fonksiyonu vardır. Görülebilir ki, kullanılabilecek bu T fonksiyonu çok iyi bilinen sağa kaydırma fonksiyonudur.

Daha genel sonuç aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

<u>Theorem 2.10</u> $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi aşağıdaki koşulları sağlayan bir dizi olsun.

En az bir $\Gamma > 0$ varsa ki $\Gamma \leq \delta_N, \forall N \in \mathbb{N}$; ve $\sigma := \sum_{n=2}^{\infty} |\delta_n - \delta_{n-1}| < \infty$ dir.

Ayrıca, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında bir $M \in (0,\infty)$ noktasına yakınsayan bir dizi olsun. $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $\eta_n := \delta_n(d_1e_1 + d_2e_2 + d_3e_3 + \ldots + d_ne_n)$ ile tanımlansın öyle ki $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir c_0-toplam alt sınır koşulunu sağlasın.

Bu durumda, $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir L-ölçekli ai c_0-toplam baz dizisidir. Ayrıca, $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu $E := \overline{co}(\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\})$ kümesi ele alınırsa en az bir sabit noktasız $T: E \to E$ afin $\|\cdot\|_\infty$-genişlemeyen fonksiyonu vardır.

c_0 uzayından farklı olarak, tez çalışmasında aşağıdaki şekilde tanımlanan Banach uzayı ele alınmıştır.

Ağırlık dizisi ismini alan ve şu şekilde tanımlanan keyfi $a \in (c_0 \backslash \ell^1)^+$ dizisi göz önüne alınsın. Burada $a_1 = 1$ olmak üzere $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir azalan dizidir yani $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ öyle ki $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots, \forall n \in \mathbb{N}$ ve $n \to \infty$ iken $a_n \to 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$. Örneğin, $a_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Tanım 2.11:</u> $\ell_{a,\infty}$ uzayı:

$$\ell_{a,\infty} := \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \;\middle|\; \begin{array}{c} x^* := (x_n{}^*)_{n\in\mathbb{N}} \text{ dizisi x in azalan sıralaması öyle ki} \\ \|x\|_{a,\infty} := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\sum_{j=1}^{n} x_j{}^*}{\sum_{j=1}^{n} a_j} < \infty \end{array} \right\}$$

Bu uzay ℓ_∞ uzayının (sınırlı diziler uzayının) bir analoğudur. Gerçekten de $(\ell_{a,\infty}, \|.\|_{a,\infty})$ ayrılabilir olmayan bir Banach uzayıdır.

Burada not edilmelidir ki x^* öyle bir dizidir ki bu dizi $|x| = \left(|x_j|\right)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisinin sıfırdan farklı terimlerini içeren ve bu terimlerin azalacak şekilde aynı terimler varsa tekrar edilmesi ile sıralandığı ve son terimleri ($|x|$ dizisi sonlu sayıda sıfırdan farklı terim içeriyorsa) sonsuz sayıda sıfır olarak takip eden dizidir.

Tanım 2.12: $\ell^0_{\mathrm{a},\infty}$ uzayı:

$$\ell^0_{\mathrm{a},\infty} := \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \;\middle|\; \begin{array}{c} x^* := (x_n{}^*)_{n\in\mathbb{N}} \text{ dizisi x in azalan sıralaması öyle ki} \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{\mathrm{j}=1}^{n} x_{\mathrm{j}}{}^*}{\sum_{\mathrm{j}=1}^{n} \mathrm{a_j}} = 0 \end{array} \right\}$$

Bu uzay c_0 uzayının bir analoğudur ve $(\ell^0_{\mathrm{a},\infty}, \|.\|_{\mathrm{w},\infty})$ uzayı $\ell_{\mathrm{a},\infty}$'ın ayrılabilir Banach uzayıdır.

Tanım 2.13: $\ell_{\mathrm{a},1}$ uzayı:

$$\ell_{\mathrm{a},1} := \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \;\middle|\; \begin{array}{c} x^* := (x_n{}^*)_{n\in\mathbb{N}} \text{ dizisi x in azalan sıralaması öyle ki} \\ \|x\|_{\mathrm{a},1} := \sum_{\mathrm{j}=1}^{n} \mathrm{a_j} x_{\mathrm{j}}{}^* < \infty \end{array} \right\}$$

Bu uzay ℓ^1 uzayının bir analoğudur. $(\ell_{\mathrm{a},1}, \|.\|_{\mathrm{a},1}$ ayrılabilir bir Banach uzayıdır.

Lorentz uzayı tanım ve özellikleri için Lorentz [28] ve Lindenstrauss ve Tzafriri [26,27] çalışmaları incelenebilir. Nezir'in doktora tezinde [23] bu uzayla ilgili aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır.

Theorem 2.14 $\ell^0_{\mathrm{a},\infty}$ uzayı zayıf sabit nokta teorisine sabittir.

Theorem 2.15 $\ell^0_{\mathrm{a},\infty}$ uzayı sabit nokta teorisini bozar; görülebilir ki $\mathrm{C} := \{\mathrm{x} = (\mathrm{t_1\, a_1}, \mathrm{t_2\, a_2}, \mathrm{t_3\, a_3}, \ldots) \mid \mathrm{t} \in \mathrm{c_0}\ \ , 1 = \mathrm{t_1} \geq \mathrm{t_2} \geq \cdots \geq 0\}$ kümesi ele alındığında $\mathrm{C} \subseteq \ell^0_{\mathrm{a},\infty}$ bir kapalı, sınırlı ve konveks küme olup $\exists\ \mathrm{T}: \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ vardır öyle ki T fonksiyonu sabit noktasız afin $\|\cdot\|_{\mathrm{a},\infty}$-genişlemeyen fonksiyondur.

Theorem 2.16 $\ell^0_{\mathrm{a},\infty}$ uzayı bir a.i. $\mathrm{c_0}$ kopya içerdiğinden sabit nokta teorisini bozar; gerçekten de $\forall \mathrm{a} \in \mathrm{c_0} \backslash \ell^1$ için en az bir $\mathrm{Y} \subseteq \ell^0_{\mathrm{a},\infty}$ öyle ki Y bir a.i. $\mathrm{c_0}$ kopya olup $\ell^0_{\mathrm{a},\infty}$ uzayı afin $\|\cdot\|_{\mathrm{a},\infty}$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar.

Tez çalışmasının araştırma bulgularında yer alan en önemli sonucunun verilmesi için [15,26] çalışmalarında görülecek Banach Latis tanımı aşağıdaki şekilde verilmektedir.

Tanım 2.17 Reel sayılar üzerinde tanımlı kısmi sıralı bir X Banach uzayına aşağıdaki koşullar sağlandığında Banach latis denir.

(1) Her $x, y, z \in X$ için $x \leq y$ ise $x + z \leq y + z$ dir.

(2) X'de her $x \geq 0$ noktası ve her $a \geq 0$ reel sayısı için $ax \geq 0$ dır.

(3) Her $x, y \in X$ için en az bir $x \vee y$ sembolü ile gösterilen bir en küçük üst sınır ve $x \wedge y$ ile gösterilen bir en büyük alt sınır vardır.

(4) $x \in X$ için $|x| = x \vee (-x)$ olmak üzere $|x| \leq |y|$ olduğunda $\| x \| \leq \| y \|$ dir.

2.1 c_0-toplam baz dizilerinin geniş bir sınıfı ve yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar

$(c_0, \|\cdot\|_\infty)$'da aşağıdaki formda verilen c_0-toplam baz dizileri ele alınsın. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\eta_n := \delta_n(d_1e_1 + d_2e_2 + d_3e_3 + d_4e_4 + \ldots + d_ne_n)$. Gösterilecektirki $0 < d_n$ pozitif terimli ve 1'e yakınsayan dizi ile yine 1'e yakınsayan başka bir $0 < \delta_n$ dizisi ele alındığında öyle ki $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi aşağıdaki teoremde verildiği şekliyle "sert salınımlı olmamak şartıyla" verildiğinde $E = \overline{co}(\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\})$ kümesi bir ai c_0-toplam baz dizisi içermektedir ve dolayısıyla sabit noktasız bir afin daralan $U: E \to E$ fonsiyonu vardır.

Teorem 2.18 $\vec{d} = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri $d_n \underset{n}{\to} 1$ ve $\delta_n \underset{n}{\to} 1$ olacak şekilde iki dizi olmak üzere

$$\sigma := \sum_{n=2}^{\infty} |\delta_n - \delta_{n-1}| < \infty$$

koşulu sağlansın. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\eta_n := \delta_n(d_1e_1 + d_2e_2 + d_3e_3 + d_4e_4 + \ldots + d_ne_n)$ ile tanımlanmak üzere $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir c_0-toplam alt sınır koşulunu sağlasın. Bu durumda, $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu $E := \overline{co}(\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\})$ kümesi ele alınırsa en az bir sabit noktasız $T: E \to E$ $\|\cdot\|_\infty$-yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonu vardır. Görülebilir ki kullanılabilecek bu T fonksiyonu çok iyi bilinen sağa kaydırma fonksiyonudur.

İspat: Not edilmelidir ki

$$\vec{d} = (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \text{ dizisi için } 0 < m := \inf_{n\in\mathbb{N}} d_n \text{ ve } M := \sup_{n\in\mathbb{N}} d_n < \infty \text{ dir}.$$

Durum 1: $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri 1'e azalarak yaklaşsın. Yani, $d_n \downarrow_n 1$ ve $\delta_n \downarrow_n 1$. Şimdi, $T: E \to E$ sağa kaydırma fonksiyonu ele alınsın ve

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \, \eta_n \in E$$

ile

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \, \eta_n \in E \ ;$$

olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n, s_n \geq 0$ olup

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n = 1 \text{ olsun} .$$

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\gamma_n := t_n - s_n$ denilsin. Bu durumda, her $Q \in \mathbb{N}$ için $(d_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ve $(\delta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ azalan diziler olduklarından,

$$\begin{aligned} \| T^Q(x) - T^Q(y) \|_\infty &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \eta_{j+Q} \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=Q}^{\infty} \gamma_{k-Q} \eta_k \right\| \\ &\leq d_{Q+1}(\delta_{Q+1} + \sigma_{Q+2}) \sup_{s\geq Q+1} \left| \sum_{k=s}^{\infty} \gamma_{k-Q} \right| \\ &= d_{Q+1}(\delta_{Q+1} + \sigma_{Q+2}) \sup_{s\geq 1} \left| \sum_{k=s}^{\infty} \gamma_k \right| \text{ dir} . \end{aligned}$$

Bu sebeple, her $Q \in \mathbb{N}$ için

$$\| T^Q(x) - T^Q(y) \|_\infty \leq d_{Q+1}(\delta_{Q+1} + \sigma_{Q+2}) \sup_{s\geq 1} \left| \sum_{k=s}^{\infty} \gamma_k \right| \text{ dir } \ (2.18.1).$$

Ayrıca, not edilmelidir ki en az bir $\nu_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki

$$\tau := \sup_{s\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=s}^{\infty} \gamma_k \right| = \left| \sum_{k=\nu_0}^{\infty} \gamma_k \right| \quad \text{ve } \tau_\nu := \sup_{\mu\geq\nu} \left| \sum_{k=\mu}^{\infty} \gamma_k \right| , \forall \, \nu \in \mathbb{N} \text{ dir.}$$

Şimdi, keyfi $m \in \mathbb{N}$ alınsın. Bu durumda,

$$\| T^m(x) - T^m(y) \|_\infty := \left\| \sum_{j=m+1}^{\infty} \gamma_{j-m}\, \eta_j \right\|_\infty$$

$$= \sup_{\nu \geq m+1} d_\nu \left| \delta_\nu \left(\sum_{k=\nu}^{\infty} \gamma_{k-m} \right) + \sum_{r=\nu+1}^{\infty} (\delta_r - \delta_{r-1}) \sum_{k=r}^{\infty} \gamma_{k-m} \right|$$

dir. O halde, her $n > m$ için

$$\| T^m(x) - T^m(y) \|_\infty \geq d_n\, \delta_n \left| \sum_{k=n}^{\infty} \gamma_{k-m} \right| - d_n \sum_{r=n+1}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}| \sup_{\mu \geq n+1} \left| \sum_{k=\mu}^{\infty} \gamma_{k-m} \right|$$

dir. Bu durumda; örneğin, eğer $n = m + 1$ ise

$$\| T^m(x) - T^m(y) \|_\infty \geq d_{m+1}\, \delta_{m+1} \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \gamma_{k-m} \right|$$

$$-d_{m+1} \sum_{r=m+2}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}| \sup_{\mu \geq m+2} \left| \sum_{k=\mu}^{\infty} \gamma_{k-m} \right|$$

$$= d_{m+1}\, \delta_{m+1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \right| - d_{m+1} \sum_{r=m+2}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}| \sup_{\mu \geq 2} \left| \sum_{k=\mu}^{\infty} \gamma_k \right|$$

$$\geq d_{m+1}\, \delta_{m+1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \right| - d_{m+1} \sum_{r=m+2}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}|\, \tau$$

dir. Şimdi, her $s \in \mathbb{N}$ için

$$\rho_s := \left| \sum_{k=s}^{\infty} \gamma_k \right| \quad \text{olarak tanımlansın.}$$

Buradan,

$$\| T^m(x) - T^m(y) \|_\infty \geq d_{m+1}\, \delta_{m+1} \rho_1 - d_{m+1} \sum_{r=m+2}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}| \tau \text{ elde edilir.}$$

Eğer $n = m + 2$ ise

$$\| T^m(x) - T^m(y) \|_\infty \geq d_{m+2}\, \delta_{m+2} \left| \sum_{k=m+2}^{\infty} \gamma_{k-m} \right|$$

$$-d_{m+2} \sum_{r=m+3}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}| \sup_{\mu \geq m+3} \left| \sum_{k=\mu}^{\infty} \gamma_{k-m} \right|$$

$$= d_{m+2}\,\delta_{m+2}\left|\sum_{k=2}^{\infty}\gamma_k\right| - d_{m+2}\sum_{r=m+3}^{\infty}|\delta_r-\delta_{r-1}|\sup_{\mu\geq 3}\left|\sum_{k=\mu}^{\infty}\gamma_k\right|$$

$$\geq d_{m+2}\,\delta_{m+2}\left|\sum_{k=2}^{\infty}\gamma_k\right| - d_{m+2}\sum_{r=m+3}^{\infty}|\delta_r-\delta_{r-1}|\,\tau$$

$$= d_{m+2}\,\delta_{m+2}\rho_2 - d_{m+2}\sum_{r=m+3}^{\infty}|\delta_r-\delta_{r-1}|\,\tau$$

elde edilir. O halde, sırasıyla, tümevarım metoduyla, her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\| T^m(x)-T^m(y)\|_\infty \geq d_{m+j}\,\delta_{m+j}\left|\sum_{k=m+j}^{\infty}\gamma_{k-m}\right|$$

$$-d_{m+j}\sum_{r=m+j+1}^{\infty}|\delta_r-\delta_{r-1}|\sup_{\mu\geq m+j+1}\left|\sum_{k=\mu}^{\infty}\gamma_{k-m}\right|$$

$$= d_{m+j}\,\delta_{m+j}\left|\sum_{k=j}^{\infty}\gamma_k\right| - d_{m+j}\sum_{r=m+j+1}^{\infty}|\delta_r-\delta_{r-1}|\sup_{\mu\geq j+1}\left|\sum_{k=\mu}^{\infty}\gamma_k\right|$$

$$\geq d_{m+j}\,\delta_{m+j}\left|\sum_{k=j}^{\infty}\gamma_k\right| - d_{m+j}\sum_{r=m+j+1}^{\infty}|\delta_r-\delta_{r-1}|\,\tau$$

$$= d_{m+j}\,\delta_{m+j}\rho_j - d_{m+j}\sum_{r=m+j+1}^{\infty}|\delta_r-\delta_{r-1}|\,\tau \text{ dir}.$$

Dolayısıyla,

$$\| T^m(x)-T^m(y)\|_\infty \geq d_{m+\nu_0}\,\delta_{m+\nu_0}\,\rho_{\nu_0} - d_{m+\nu_0}\sum_{r=m+\nu_0+1}^{\infty}|\delta_r-\delta_{r-1}|\,\tau$$

$$= d_{m+\nu_0}\,\delta_{m+\nu_0}\,\tau - d_{m+\nu_0}\sum_{r=m+\nu_0+1}^{\infty}|\delta_r-\delta_{r-1}|\,\tau$$

$$= d_{m+\nu_0}\,\tau, \quad (\delta_n \downarrow_n 1 \text{ olduğundan})$$

$$\geq \tau, \ (d_n \text{ dizisi } 1'\text{e azalarak yakınsadığından})$$

Ohalde, bu eşitsizlik ile 2.18.1 eşitsizliği birleştirilerek, her $Q > m$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\| T^Q x - T^{\cdot Q} y\|_\infty \leq d_{Q+1}(\delta_{Q+1}+\sigma_{Q+2})\,\| T^m x - T^m y\|_\infty \ .$$

Öyleyse $\beta_{Q,m} := d_{Q+1}(\delta_{Q+1} + \sigma_{Q+2})$ alındığından görülür ki Tanım 1.1 (5) gerçeklenir ve T kuvvetli asimtotik genişlemeyen (dolayısıyla yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen) fonksiyondur.

Durum 2: $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi 1'e artarak ve $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi 1'e azalarak yaklaşsın. Yani, $d_n \uparrow_n 1$ ve $\delta_n \downarrow_n 1$. Şimdi, $T: E \to E$ sağa kaydırma fonksiyonu ele alınsın ve

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \eta_n \in E$$

ile

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \eta_n \in E \ ;$$

olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n, s_n \geq 0$ olup

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n = 1 \text{ olsun}.$$

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\gamma_n := t_n - s_n$ denilsin. Sağa kaydırma fonksiyonunun $T\left(\sum_{j=1}^{\infty} t_j \eta_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j \eta_{j+1}$ kuralı kullanılarak her $n \in \mathbb{N}$ için $T^n\left(\sum_{j=1}^{\infty} t_j \eta_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j \eta_{j+n}$ elde edilip $(d_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisi 1'e artarak yakınsadığından ve $(\delta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisi 1'e azalarak yakınsadığından aşağıdaki eşitsizlikler elde edilecektir.

$$\| T^n(x) - T^n(y) \|_\infty = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \eta_{j+n} \right\|_\infty \qquad (2.18.2)$$

$$= \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_{k-n} \eta_k \right\|_\infty \qquad (2.18.3)$$

$$\leq (\delta_{n+1} + \sigma_{n+2}) \sup_{s\geq n+1} \left| \sum_{k=s}^{\infty} \gamma_{k-n} \right| \qquad (2.18.4)$$

$$= (\delta_{n+1} + \sigma_{n+2}) \sup_{s\geq 1} \left| \sum_{k=s}^{\infty} \gamma_k \right|. \qquad (2.18.5)$$

Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\Lambda_n := \left\| \sum_{j=n}^{\infty} \gamma_j \, \eta_j \right\|_\infty$$

$$= \sup_{\nu \geq n} d_\nu \left| \delta_\nu \left(\sum_{k=\nu}^{\infty} \gamma_k \right) + \sum_{r=\nu+1}^{\infty} (\delta_r - \delta_{r-1}) \sum_{k=r}^{\infty} \gamma_k \right| \text{ dir .}$$

Not edilmelidir ki en az bir $\nu_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$\tau := \sup_{s \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=s}^{\infty} \gamma_k \right| = \left| \sum_{k=\nu_0}^{\infty} \gamma_k \right| \quad \text{ve } \; \tau_\nu := \sup_{\mu \geq \nu} \left| \sum_{k=\mu}^{\infty} \gamma_k \right| , \forall \, \nu \in \mathbb{N} \text{ dir.}$$

Şimdi, $m \in \mathbb{N}$ keyfi olsun. Bu durumda

$$\| T^m(x) - T^m(y) \|_\infty := \left\| \sum_{j=m+1}^{\infty} \gamma_{j-m} \, \eta_j \right\|_\infty$$

$$= \sup_{\nu \geq m+1} d_\nu \left| \delta_\nu \left(\sum_{k=\nu}^{\infty} \gamma_{k-m} \right) + \sum_{r=\nu+1}^{\infty} (\delta_r - \delta_{r-1}) \sum_{k=r}^{\infty} \gamma_{k-m} \right|$$

dir.

Bu durumda her $n > m$ için,

$$\| T^m(x) - T^m(y) \|_\infty \geq d_n \, \delta_n \left| \sum_{k=n}^{\infty} \gamma_{k-m} \right| - d_n \sum_{r=n+1}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}| \sup_{\mu \geq n+1} \left| \sum_{k=\mu}^{\infty} \gamma_{k-m} \right|$$

olacaktır.

Ohalde; örneğin, eğer $n = m + 1$ ise

$$\| T^m(x) - T^m(y) \|_\infty \geq d_{m+1} \, \delta_{m+1} \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \gamma_{k-m} \right|$$

$$- d_{m+1} \sum_{r=m+2}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}| \sup_{\mu \geq m+2} \left| \sum_{k=\mu}^{\infty} \gamma_{k-m} \right|$$

$$= d_{m+1} \, \delta_{m+1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \right| - d_{m+1} \sum_{r=m+2}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}| \sup_{\mu \geq 2} \left| \sum_{k=\mu}^{\infty} \gamma_k \right|$$

$$\geq d_{m+1}\, \delta_{m+1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \right| - d_{m+1} \sum_{r=m+2}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}|\, \tau\ .$$

Şimdi her s ∈ ℕ için

$$\rho_s := \left| \sum_{k=s}^{\infty} \gamma_k \right| \text{ olarak tanımlansın.}$$

Böylece,

$$\| T^m(x) - T^m(y) \|_\infty \geq d_{m+1}\, \delta_{m+1} \rho_1 - d_{m+1} \sum_{r=m+2}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}|\, \tau \text{ dir.}$$

Eğer $n = m + 2$ ise

$$\| T^m(x) - T^m(y) \|_\infty \geq d_{m+2}\, \delta_{m+2} \left| \sum_{k=m+2}^{\infty} \gamma_{k-m} \right|$$

$$-d_{m+2} \sum_{r=m+3}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}| \sup_{\mu \geq m+3} \left| \sum_{k=\mu}^{\infty} \gamma_{k-m} \right|$$

$$= d_{m+2}\, \delta_{m+2} \left| \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k \right| - d_{m+2} \sum_{r=m+3}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}| \sup_{\mu \geq 3} \left| \sum_{k=\mu}^{\infty} \gamma_k \right|$$

$$\geq d_{m+2}\, \delta_{m+2} \left| \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k \right| - d_{m+2} \sum_{r=m+3}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}| \tau$$

$$= d_{m+2}\, \delta_{m+2} \rho_2 - d_{m+2} \sum_{r=m+3}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}| \tau \text{ dir.}$$

Ohalde, tümevarım metoduyla her j ∈ ℕ için

$$\| T^m(x) - T^m(y) \|_\infty \geq d_{m+j}\, \delta_{m+j} \left| \sum_{k=m+j}^{\infty} \gamma_{k-m} \right|$$

$$-d_{m+j} \sum_{r=m+j+1}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}| \sup_{\mu \geq m+j+1} \left| \sum_{k=\mu}^{\infty} \gamma_{k-m} \right|$$

$$= d_{m+j}\, \delta_{m+j} \left| \sum_{k=j}^{\infty} \gamma_k \right| - d_{m+j} \sum_{r=m+j+1}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}| \sup_{\mu \geq j+1} \left| \sum_{k=\mu}^{\infty} \gamma_k \right|$$

$$\geq d_{m+j}\,\delta_{m+j}\left|\sum_{k=j}^{\infty}\gamma_k\right| - d_{m+j}\sum_{r=m+j+1}^{\infty}|\delta_r-\delta_{r-1}|\tau$$

$$= d_{m+j}\,\delta_{m+j}\rho_j - d_{m+j}\sum_{r=m+j+1}^{\infty}|\delta_r-\delta_{r-1}|\tau \text{ elde edilir.}$$

Bu sebeple,

$$\|T^m(x)-T^m(y)\|_\infty \geq d_{m+\nu_0}\,\delta_{m+\nu_0}\,\rho_{\nu_0} - d_{m+\nu_0}\sum_{r=m+\nu_0+1}^{\infty}|\delta_r-\delta_{r-1}|\,\tau$$

$$= d_{m+\nu_0}\,\delta_{m+\nu_0}\,\tau - d_{m+\nu_0}\sum_{r=m+\nu_0+1}^{\infty}|\delta_r-\delta_{r-1}|\,\tau$$

$$= d_{m+\nu_0}\,\tau \quad (\delta_n \downarrow_n 1 \text{ olduğundan})$$

$$\geq d_m\,\tau \quad (d_n'\text{ler artan olduğundan) bulunacaktır.}$$

Ohalde, her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\|T^m(x)-T^m(y)\|_\infty \geq d_m\,\tau \text{ dir.}$$

Böylece,

$$\left(\frac{1}{d_m}\right)\|T^m(x)-T^m(y)\|_\infty \geq \tau \text{ bulunur.}$$

Ohalde bu son sonuç 2.18.5 eşitsizliği ile birleştirilerek her $n \geq m$ ve her $x, y \in E$ için

$$\|T^n(x)-T^n(y)\|_\infty \leq \frac{(\delta_{n+1}+\sigma_{n+2})}{d_m}\|T^m(x)-T^m(y)\|_\infty \text{ elde edilir.}$$

Not edilmelidir ki $n \geq m \to \infty$ iken $\lambda_{n,m} := \frac{\delta_{n+1}+\sigma_{n+2}}{d_m} \to \frac{1+0}{1} = 1$ olacaktır.

Durum 3: $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi 1'e azalarak ve $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi 1'e artarak yaklaşsın. Yani, $d_n \downarrow_n 1$ ve $\delta_n \uparrow_n 1$. Bir önceki durumda yapılanlara benzer olarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|T^n(x)-T^n(y)\|_\infty = \left\|\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j\,\eta_{j+n}\right\|_\infty \qquad (2.18.6)$$

$$= \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_{k-n}\, \eta_k \right\|_{\infty} \qquad (2.18.7)$$

$$\leq d_{n+1}\,(\delta_{n+1} + \sigma_{n+2}) \sup_{s \geq n+1} \left| \sum_{k=s}^{\infty} \gamma_{k-n} \right| \qquad (2.18.8)$$

$$= d_{n+1} \sup_{s \geq 1} \left| \sum_{k=s}^{\infty} \gamma_k \right| \qquad (2.18.9)$$

$$= d_{n+1}\tau \qquad (2.18.10)$$

Keyfi $m \in \mathbb{N}$ sayısı alınsın. Durum 2'ye benzer şekilde görülecektir ki

$$\| T^m(x) - T^m(y) \|_{\infty} = \left\| \sum_{j=m+1}^{\infty} \gamma_{j-m}\, \eta_j \right\|_{\infty}$$

$$\geq d_{m+\nu_0}\delta_{m+\nu_0}\tau - d_{m+\nu_0} \sum_{r=m+\nu_0+1}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}|\tau$$

$$= d_{m+\nu_0}(2\delta_{m+\nu_0} - 1)\tau \qquad (\delta_n \uparrow_n 1 \text{ olduğundan})$$

$$\geq (2\delta_m - 1) \quad \text{dir} \quad (d_n \downarrow_n 1 \text{ ve } \delta_n \uparrow_n 1 \text{ olduğundan}) .$$

Bu durumda $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi c_0-toplam alt sınır koşulunu sağladığından ve $d_n \underset{n}{\to} 1$ ile $\delta_m \underset{m}{\to} 1$ olduklarından, $[1,\infty)$ aralığında en az bir $(\lambda_{n,m})_{n\geq m\geq 1}$ dizisi vardır öyle ki yeterince büyük her m sayısı için $\lambda_{n,m} := \frac{d_{n+1}}{2\delta_m - 1}$ olup her $x, y \in E$ için

$$\| T^n(x) - T^n(y) \|_{\infty} \leq \lambda_{n,m} \| T^m x - T^m y \|_{\infty}$$

dir. Burada not edilebilir ki $n \geq m \to \infty$ iken $\lambda_{n,m} \to 1$ dir dolayısıyla sabit noktasız olduğu kolayca görülebilecek olan T fonksiyonu afin, yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen bir fonksiyondur.

Durum 4: $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi 1'e artarak ve $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi de 1'e artarak yaklaşsın. Yani, $d_n \uparrow_n 1$ ve $\delta_n \uparrow_n 1$. Durum 2'de yapılanlara benzer olarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\| T^n(x) - T^n(y) \|_{\infty} := \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \gamma_{j-n}\, \eta_j \right\|_{\infty}$$

$$= \sup_{\nu \geq n+1} d_\nu \left| \delta_\nu \left(\sum_{k=\nu}^{\infty} \gamma_{k-n} \right) + \sum_{r=\nu+1}^{\infty} (\delta_r - \delta_{r-1}) \sum_{k=r}^{\infty} \gamma_{k-n} \right|$$

$$\leq (\delta_{n+1} + \sigma_{n+2}) \sup_{s \geq n+1} \left| \sum_{k=s}^{\infty} \gamma_{k-n} \right|$$

$$= (\delta_{n+1} + \sigma_{n+2}) \sup_{s \geq 1} \left| \sum_{k=s}^{\infty} \gamma_k \right|$$

$$= \sup_{s \geq 1} \left| \sum_{k=s}^{\infty} \gamma_k \right| \text{ dir .}$$

Not edilebilir ki en az bir $\nu_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$\tau := \sup_{s \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=s}^{\infty} \gamma_k \right| = \left| \sum_{k=\nu_0}^{\infty} \gamma_k \right| \text{ dir .}$$

Şimdi $m \in \mathbb{N}$ keyfi bir sayı olsun.

$$\| T^m(x) - T^m(y) \|_\infty \geq d_{m+\nu_0}\, \delta_{m+\nu_0}\, \rho_{\nu_0} - d_{m+\nu_0} \sum_{r=m+\nu_0+1}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}|\, \tau$$

$$= d_{m+\nu_0}\, \delta_{m+\nu_0}\, \tau - d_{m+\nu_0} \sum_{r=m+\nu_0+1}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}|\, \tau$$

$$= d_{m+\nu_0} (2\delta_{m+\nu_0} - 1)\tau$$

$$\geq d_m\, (2\delta_m - 1)\tau\ .$$

Bu durumda,

$$\| T^m(x) - T^m(y) \|_\infty \geq d_m\, (2\delta_m - 1)\tau \text{ olacaktır .}$$

Ohalde, sonuçları birleştirerek m yeterince büyük olmak üzere her $n \geq m$ ve $\forall\, x, y \in E$ için

$$\| T^n(x) - T^n(y) \|_\infty \leq \frac{1}{d_m\, (2\delta_m - 1)} \| T^m(x) - T^m(y) \|_\infty \quad \text{dir.}$$

Ohalde, Durum 3’de olduğu gibi bu durumda da istenilen elde edilir.

Durum 5 (En genel durum): $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri 1'e yakınsak sklaer diziler olsun. Yani, $d_n \to 1$ ve $\delta_n \to 1$. $(0,\infty)$ aralığında öyle bir sıfıra yakınsak $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi seçilebilir ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{1+\varepsilon_n} < d_n < 1 + \varepsilon_n$ olarak kabul edilebilir hatta $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi aşağıdaki dizi ile değiştirilip azalan kabul edilebilir.

$$\text{Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } \mu_n := \max_{j\geq n} \varepsilon_j \; .$$

Bu sebeple $(0,\infty)$ aralığında sıfıra yakınsak öyle iki dizi $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bulunabilir ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{1+\varepsilon_n} < d_n < 1 + \varepsilon_n$ ve $\frac{1}{1+\zeta_n} < \gamma_n < 1 + \zeta_n$ dir. Şimdi, görülebilir ki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\| T^n(x) - T^n(y) \|_\infty &:= \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \gamma_{j-n}\, \eta_j \right\|_\infty \\
&= \sup_{\nu\geq n+1} d_\nu \left| \delta_\nu \left(\sum_{k=\nu}^{\infty} \gamma_{k-n} \right) + \sum_{r=\nu+1}^{\infty} (\delta_r - \delta_{r-1}) \sum_{k=r}^{\infty} \gamma_{k-n} \right| \\
&\leq \sup_{\nu\geq n+1} (1+\varepsilon_\nu) \left(\delta_\nu \left| \sum_{k=\nu}^{\infty} \gamma_{k-n} \right| + \sum_{r=\nu+1}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}| \left| \sum_{k=r}^{\infty} \gamma_{k-n} \right| \right) \\
&\leq \sup_{\nu\geq n+1} (1+\varepsilon_\nu) \left((1+\zeta_\nu) \left| \sum_{k=\nu}^{\infty} \gamma_{k-n} \right| + \sum_{r=\nu+1}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}| \left| \sum_{k=r}^{\infty} \gamma_{k-n} \right| \right) \\
&\leq (1+\varepsilon_{n+1})(1+\zeta_{n+1}+\sigma_{n+2}) \sup_{s\geq n+1} \left| \sum_{k=s}^{\infty} \gamma_{k-n} \right| \\
&= (1+\varepsilon_{n+1})(1+\zeta_{n+1}+\sigma_{n+2}) \sup_{s\geq 1} \left| \sum_{k=s}^{\infty} \gamma_k \right| \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Ayrıca, en az bir $\nu_0 \in \mathbb{N}$ bulunabilir öyle ki

$$\tau := \sup_{s\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=s}^{\infty} \gamma_k \right| = \left| \sum_{k=\nu_0}^{\infty} \gamma_k \right| \text{ dir}.$$

Şimdi keyfi $m \in \mathbb{N}$ sayısı alınsın. Bu durumda,

$$\| T^m(x) - T^m(y) \|_\infty \geq d_{m+\nu_0}\, \delta_{m+\nu_0}\, \rho_{\nu_0} - d_{m+\nu_0} \sum_{r=m+\nu_0+1}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}|\, \tau$$

$$= d_{m+\nu_0}\, \delta_{m+\nu_0}\, \tau \; - d_{m+\nu_0} \sum_{r=m+\nu_0+1}^{\infty} |\delta_r - \delta_{r-1}|\, \tau$$

$$\geq \frac{1}{1+\varepsilon_{m+\nu_0}} \left[\frac{1}{1+\zeta_{m+\nu_0}} - \sigma_{m+\nu_0+1} \right] \tau$$

$$\geq \frac{1}{1+\varepsilon_m} \left[\frac{1}{1+\zeta_m} - \sigma_m \right] \tau \ \text{ olacaktır.}$$

Öyleyse,

$$\| T^m(x) - T^m(y) \|_\infty \geq \frac{1}{1+\varepsilon_m} \left[\frac{1}{1+\zeta_m} - \sigma_m \right] \tau \ \text{ dir.}$$

Ohalde, sonuçları birleştirerek m yeterince büyük olmak üzere her $n \geq m$ ve $\forall\, x, y \in E$ için

$$\| T^n(x) - T^n(y) \|_\infty \leq \frac{(1+\varepsilon_m)(1+\varepsilon_{n+1})(1+\zeta_{n+1}+\sigma_{n+2})}{\left(\frac{1}{1+\zeta_m} - \sigma_m\right)} \ \| T^m(x) - T^m(y) \|_\infty$$

elde edilir. Dolayısıyla, T fonksiyonu, sabit noktasız, afin ve yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyondur.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Çalışmanın bu bölümünde tez danışmanı Nezir'in doktora tezinde [32] ve Nezir'in doktora tez danışmanı olan Chris Lennard ile olan makalesinde [23] yer alan yarı-kuvvetli ve kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonların sabit nokta teorisine etkisini, bu tarz fonksiyonlar için Banach uzayın sabit nokta teorisine sahip olması ile Banach uzayın yansımalı olması arasındaki bağlantılarını ele alan sonuçlar sunulacaktır. Bölüm içerisinde bulguların elde edilmesinde önemi büyük olan literatürdeki teorem ve önermeler ilgili bulgular öncesinde ispatsız olarak yer almaktadır.

Materyal ve Yöntem bölümünde yer alan Teorem 2.1 ve Teorem 2.2 literatürde James Distorsiyon teoremleri [18] ismi ile anılmaktadır. Bu teoremler vasıtasıyla sabit nokta teorisi ve uzayın yansımalı olması gibi konularda önemli sonuçlar elde edilmiştir. Dowling, Lennard ve Turett ise James'in bu teoremlerinin aslında daha farklı bir ifade ile daha kullanışlı olacak şekilde kuvvetlendirilmiş James Distorsiyon teoremleri [10] adı altında daha genel versiyonlarını ispatlamışlardır. Öncelikle bu teoremler sunulacaktır.

Teorem 3.1 [10] Bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayına aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda ℓ^1'in bir izomorfik kopyasını içerir: $(0,1)$ aralığından alınan sıfıra yakınsak her $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için X'de en az bir $(x_n)_n$ dizisi bulunabilir öyle ki her $k \in \mathbb{N}$ ve her $(\sigma_n)_n \in \ell^1$ için

$$(1-\varepsilon_k)\sum_{n=1}^{\infty}|\sigma_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n x_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|\sigma_n|$$

dir.

Teorem 3.2 [10] Bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayına aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda c_0'ın bir izomorfik kopyasını içerir: $(0,1)$ aralığından alınan sıfıra yakınsak her $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için X'de en az bir $(x_n)_n$ dizisi bulunabilir öyle ki her $k \in \mathbb{N}$ ve her $(\sigma_n)_n \in c_0$ için

$$(1-\varepsilon_k)\sup_n|\sigma_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n x_n\right\| \leq (1+\varepsilon_k)\sup_n|\sigma_n| \text{ dir.}$$

Banach uzayının yansımalılığı ile bu kopyaların bağlantısını gösteren önemli bir teorem ise aşağıdaki şekildedir.

Teorem 3.3 [26] X Banach latis olan bir Banach uzay olsun. Aşağıdakiler denktir.

(1) X yansımalıdır.

(2) X Banach uzayı ℓ^1 veya c_0'ın bir izomorfik kopyasını içermez.

Bu durumda [32,23] çalışmalarında tez çalışmasının bulguları olarak sunulacak olan teoremler ispatlanmıştır.

Teorem 3.4 [23,32] Eğer bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayı ℓ^1'in bir izomorfik kopyasını içerirse, X yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar; yani, ℓ^1 yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olacak şekilde yeniden normlanamaz.

İspat. X Banach uzayı ℓ^1'in bir izomorfik kopyasını içersin ve (ε_n) dizisi $(0,1)$ aralığında sıfıra yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda kuvvetlendirilmiş James Distorsiyon teoremleri gereğince X'de en az bir $(x_n)_n$ dizisi bulunabilir öyleki her $k \in \mathbb{N}$ ve her $(\sigma_n)_n \in \ell^1$ için

$$(1-\varepsilon_k)\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n x_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n|$$

Buradan x_n dizisinin kapalı konveks kabuğunun, yani $E := \overline{co}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$, kümesinin $\|\cdot\|$-yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olmadığı gösterilecektir. Hatta görülebilir ki en az bir afin yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen $T: E \to E$ fonksiyonu bulunabilir öyle ki bu fonksiyonun sabit noktası yoktur. Bu fonksiyon, alanda çokça kullanılan T sağa kaydırma fonksiyonudur.

Not edilebilir ki

$$E=\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x_n : 0 \le a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1\right\}$$

olup keyfi $x, y \in E$ noktası her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n, b_n \ge 0$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1$ koşullarını sağlayan bazı skalerler vasıtasıyla

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x_n \in E$$

ve

$$y=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, x_n \in E\ ;$$

formunda yazılabilir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma_n := a_n - b_n$ olarak tanımlansın. Sağa kaydırma fonksiyonu $T: E \to E$ ise

$$T\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j\, x_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty} a_j\, x_{j+1}$$

kuralı ile yazılır.

Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için $T^n: E \to E$ fonksiyonunun kuralı

$$T^n\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j\, x_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty} a_j\, x_{j+n}$$

şeklinde olacaktır. Bu durumda

$$\begin{aligned}\| T^n(x)-T^n(y) \| &= \left\|\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j\, x_{j+n}\right\| \\ &= \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} \sigma_{k-n}\, x_k\right\| \\ &\le \sum_{k=n+1}^{\infty} |\sigma_{k-n}|\end{aligned}$$

olacaktır.

Şimdi $m \in \mathbb{N}$ keyfi bir sayı olsun. Ohalde,

$$\| T^m(x) - T^m(y) \| = \left\| \sum_{j=m+1}^{\infty} \sigma_{j-m} x_j \right\| \geq (1 - \varepsilon_{m+1}) \sum_{k=m+1}^{\infty} |\sigma_{k-m}|$$

dir.

Bu durumda her $n > m$ için

$$\| T^n(x) - T^n(y) \| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\sigma_{k-n}| = \sum_{k=m+1}^{\infty} |\sigma_{k-m}|$$

$$\leq \frac{1}{(1 - \varepsilon_{m+1})} \| T^m(x) - T^m(y) \|$$

dir.

Not edilebilir ki $\forall\, n \geq m \geq 1$ için $\lambda_{n,m} = \frac{1}{1-\varepsilon_{m+1}}$ olup $n \geq m \to \infty$ iken $\lambda_{n,m} \to 1$ olacak şekilde bir skaler dizi bulunabilir öyle ki her $x, y \in E$ için $\| T^n(x) - T^n(y) \| \leq \lambda_{n,m} \| T^m(x) - T^m(y) \|$ dir. Bu sebeple, T bir $\|\cdot\|$-yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyondur ve çalışmada yer alan önceki bölümlerde sunulan teoremlerin ispatında olduğu gibi kolayca gösterilebilir ki T'nin sabit noktası yoktur.

<u>Teorem 3.5</u> [23,32] Eğer bir X Banach uzayı c_0'ın bir izomorfik kopyasını içerirse o zaman X Banach uzayı afin kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar; yani, c_0 kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olacak şekilde yeniden normlanamaz.

İspat. X Banach uzayı ℓ^1'in bir izomorfik kopyasını içersin ve (ε_n) dizisi $(0,1)$ aralığında sıfıra yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda kuvvetlendirilmiş James Distorsiyon teoremleri gereğince X'de en az bir $(x_n)_n$ dizisi bulunabilir öyleki her $k \in \mathbb{N}$ ve her $(\sigma_n)_n \in c_0$ için

$$\sup_{n \geq k} |\sigma_n| \leq \left\| \sum_{n=k}^{\infty} \sigma_n x_n \right\| \leq (1 + \varepsilon_k) \sup_{n \geq k} |\sigma_n|$$

Buradan x_n dizisinin kısmi toplamlar dizisinin kapalı konveks kabuğunun, yani $E := \overline{co}(\{\sum_{1=k}^{n} x_k : n \in \mathbb{N}\})$, kümesinin $\|\cdot\|$-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olmadığı gösterilecektir. Hatta görülebilir ki en az bir afin yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen $T: E \to E$ fonksiyonu bulunabilir öyle ki bu fonksiyonun sabit noktası yoktur. Bu fonksiyon, alanda çokça kullanılan T sağa kaydırma fonksiyonudur. Not edilebilir ki

$$E = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x_n : 0 \le a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \right\}$$

olup keyfi $x, y \in E$ noktası her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n, b_n \ge 0$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1$ koşullarını sağlayan bazı skalerler vasıtasıyla

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x_n \in E$$

ve

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, x_n \in E \ ;$$

formunda yazılabilir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma_n := a_n - b_n$ olarak tanımlansın. Sağa kaydırma fonksiyonu $T: E \to E$ ise

$$T\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j\, x_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\, x_{j+1}$$

kuralı ile yazılır.

Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için $T^n: E \to E$ fonksiyonunun kuralı

$$T^n\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j\, x_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\, x_{j+n}$$

şeklinde olacaktır. Bu durumda

$$\| T^n(x) - T^n(y) \| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j\, x_{j+n} \right\|$$

$$= \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \sigma_{k-n}\, x_k \right\|$$
$$\leq (1+\varepsilon_{n+1}) \sup_{k\geq n+1} |\sigma_{k-n}|$$
$$= (1+\varepsilon_{n+1}) \sup_{k\geq 1} |\sigma_k|$$

olacaktır.

Şimdi $m \in \mathbb{N}$ keyfi bir sayı olsun. Ohalde,

$$\| T^m(x) - T^m(y) \| = \left\| \sum_{j=m+1}^{\infty} \sigma_{j-m}\, x_j \right\| \geq \sup_{k\geq m+1} |\sigma_{k-m}| = \sup_{k\geq 1} |\sigma_k|$$

dir.

Bu durumda her $n > m$ için

$$\| T^n(x) - T^n(y) \| \leq (1+\varepsilon_{n+1}) \sup_{k\geq 1} |\sigma_k| \leq (1+\varepsilon_{n+1}) \| T^m(x) - T^m(y) \|$$

dir.

Not edilebilir ki $\forall\, n \geq m \geq 1$ için $\beta_{n,m} = (1+\varepsilon_{n+1})$ olup $n \to \infty$ iken $\forall\, m \in \mathbb{N}$ için $\beta_{n,m} \to 1$ olacak şekilde bir skaler dizi bulunabilir öyle ki her $x, y \in E$ için $\| T^n(x) - T^n(y) \| \leq \beta_{n,m} \| T^m(x) - T^m(y) \|$ dir. Bu sebeple, T bir $\|\cdot\|$-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyondur (hatta afindir) ve çalışmada yer alan önceki bölümlerde sunulan teoremlerin ispatında olduğu gibi kolayca gösterilebilir ki T'nin sabit noktası yoktur.

Aşağıdaki sonuç Teorem 3.3, Teorem 3.4 ve Teorem 3.5'in direkt sonucudur.

Sonuç 3.6 $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayı yansımalı olmayan bir Banach latis olsun. Bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayı $\|\cdot\|$-yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olamaz.

Takip eden bölümde Tanım 2.12 ile tanıtılmış olan Lorentz-Marcinkiewicz uzayı $\ell^0_{a,\infty}$ üzerinde yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonların bir uygulaması anlatılmaktadır.

3.1 $\boldsymbol{\ell^0_{a,\infty}}$ Banach uzayının kapalı yansımalı olmayan alt uzayı

Bu bölümde öncelikle Banach uzayının dualliği konusunda Beauzamy [2] çalışmasında yer alan önerme ve sonuçlar ele alınacaktır. Sonra ise tez danışmanının doktora tezinde [32] yer alan sonuç olarak $\ell^0_{a,\infty}$ Banach uzayının her kapalı yansımalı olmayan alt uzayı c_0'ın bir izomorfik kopyasını içerdiği gösterilecektir.

Önerme 3.7 E bir normlu uzay, F ise E'nin normu ile tanımlı bir alt uzay olsun. Bu durumda

(a) F'nin duali F^* uzayı isometrik olarak bölüm uzayı $E^*/F^\perp$'ye izomorfdur öyle ki duallik fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$x \in F$, $\dot{\xi} \in E^*/F^\perp$ olmak üzere $\dot{\xi}(x) = \xi(x)$ ile tanımlanır öyle ki ξ noktası E^*'deki $\dot{\xi}$ denklik sınıfının bir elemanıdır.

(b) $\sigma(F, E^*/F^\perp)$ zayıf topolojisi $\sigma(E, E^*)$ topolojisi tarafından üretilen F üzerinde tanımlı topolojidir.

Önerme 3.8 E bir normlu uzay, F ise E'nin normu ile tanımlı bir alt uzay olsun. Bu durumda

(a) E/F uzayının duali $F^\perp$'ye izometrik olarak izomorftur öyle ki duallik fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$\dot{x} \in E/F$ olmak üzere $< \dot{x}, \xi >= \xi(x)$ ile tanımlanır öyle ki $x \in E$ noktası $\xi \in F^\perp$ için $\dot{x}$ denklik sınıfının bir elemanıdır.

(b) $\sigma(E/F, F^\perp)$ topolojisi F tarafından üretilen $\sigma(E, E^*)$ 'nin bölüm topolojisine izometrik olarak izomorftur.

Önerme 3.9 E yansımalıdır gerek ve yeter şart E'nin kapalı birim yuvarı $\mathcal{B}_E$ kümesi $\sigma(E, E^*)$ topolojisine göre kompaktır.

Sonuç 3.10 Eğer E yansımalı ise tüm kapalı alt uzayları yansımalıdır.

Teorem 3.11 [32] $(X, \|\cdot\|)$ bir ayrılabilir Banach uzayı olsun. Z ise X'in kapalı alt vektör uzayı olsun. Bu durumda $(X/Z, \|\cdot\|_{X/Z})$ ayrılabilir Banach uzaydır.

Teorem 3.12 [26] Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(a) ℓ^1 veya c_0'ın bir izomorfik kopyasını içermeyen ve şartsız baza sahip Banach uzayları yansımalıdır. Ayrıca, eğer X Banach uzayı şartsız baza sahip ise ve X^{**} ayrılabilir ise X yansımalıdır.

(b) Eğer X Banach uzayı şartsız baza sahip ve X^* ayrılabilir ise X^* şartsız baza sahiptir.

Teorem 3.13 [32,23] Y uzayı $\ell^0_{a,\infty}$'nin kapalı ve yansımalı olmayan bir alt vektör uzayı olsun. Bu durumda, Y uzayı c_0'ın bir izomorfik kopyasını içerir; dolayısıyla $(Y, \|\cdot\|_{a,\infty})$ kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olamaz.

İspat. Teorem 3.3 gereğince eğer Y yansımalı değil ise Y içinde en az bir ℓ^1 veya c_0'ın bir izomorfik kopyası vardır. Fakat görülebilir ki Y alt uzayı ℓ^1'in bir izomorfik kopyasını içermez, dolayısıyla c_0'ın bir izomorfik kopyasını içerir. Şimdi bu gerçek ispatlanacaktır.

Olmayana ergi metodu ile kabul edilsin ki Y alt uzayı ℓ^1'in bir izomorfik kopyasını içersin. Bu durumda önceki önermeler dolayısıyla, $(\ell^0_{a,\infty})^*$ dual uzayının en az bir alt uzayı Z vardır yani, $Z \leq (\ell^0_{a,\infty})^*$ dir öyle ki $(\ell^1)^*$ izometrik olarak $(\ell^0_{a,\infty})^*/Z$ 'e izomorftur. Yani $(\ell^1)^* \cong (\ell^0_{a,\infty})^*/Z$ dir. Fakat bilinmektedir ki $(\ell^1)^* \cong l^\infty$ ve $(\ell^0_{a,\infty})^*/Z \cong (\ell_{a,1}/Z)$ dir. Ayrıca bilinmektedir ki $\ell_{a,1}$'nin ayrılabilir olması sebebiyle bölüm uzayı $\ell_{a,1}/Z$'de ayrılabilirdir. Fakat, ℓ^∞ ayrılabilir değildir ve bu $(\ell^1)^* \cong (\ell^0_{a,\infty})^*/Z$ sonucunun bir çelişki olduğunu söyler. Bu sebeple, Y alt uzayı ℓ^1'in bir izomorfik kopyasını içeremez.

Şimi, tez çalışmasının en önemli sonucu olan ve tez danışmanı Nezir'in doktora tezi [32] ile Nezir'in doktora danışmanı Lennard ile olan çalışmaları [23]'de yer alan yansımalılık ve yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar arasındaki bağıntıyı gösteren sonucun sunulduğu bölüm aşağıda verilmektedir.

3.2 Yansımalılık ve yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar arasındaki bağlantı.

Teorem 3.14 [32,23] $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzay ve C'de X'in zayıf kompakt konveks bir alt kümesi olsun. $U: C \to C$ fonksiyonu afin sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda U'nun C'de bir sabit noktası vardır.

İspat. İspat literatürde bulunan iyi bilinen sonuçlar gereğince açıktır. Gerçekten de öncelikle Mazur'un sonucu gereğince zayıf konveks kapalı kümeler norm kapalıdır [15]. Ayrıca Milman ve Milman [54] (Section 4) sonucu kullanılarak, C'nin her kapalı, konveks sınırlı alt kümesinin üzerinde tanımlı ve görüntüleri aynı kümede olan sürekli afin fonksiyonların bir sabit noktası vardır.

Teorem 3.15 $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach latis olan Banach uzay olsun. Aşağıdakiler denktir.

(1) X yansımalıdır.

(2) X'in her kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi C ve bu küme üzerinde tanımlı her $U: C \to C$ afin, yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonunun C'de bir sabit noktası vardır.

İspat. (2)'nin (1) için yeter koşul olduğunu göstermek için aşağıdaki denk ifadeyi ispatlamak yeterli olacaktır.

Eğer X bir yansımalı olmayan Banach latis ise, bu durumda X'de en az bir kapalı, sınırlı ve konveks alt küme K ve en az bir $T: K \to K$ afin, yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyon bulunabilir öyle ki T 'nin sabit noktası yoktur.

Gerçektende bu sonuç afin olan sağa kaydırma fonksiyonu ile 3. bölümün başında bulunan Sonuç 3.6 kullanılarak ve aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

Eğer $(X, \|\cdot\|)$ bir yansımalı olmayan bir Banach latis ise Teorem 3.3 gereğince ℓ^1 veya c_0'ın en az bir izomorfik kopyasını içerir. Fakat Teorem 3.1 gereğince eğer ℓ^1'in bir izomorfik kopyasını içerir ise bu durumda en az bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bulunabilir öyle ki $K := \overline{co}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ kümesi $\|\cdot\|$-yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olamaz. Hatta Teorem 3.1'de sabit noktasız bir $T: K \to K$ afin yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonu bulunmuştur ve bu T fonksiyonu sağa kaydırma fonksiyonudur.

Ayrıca, Teorem 3.2 gereğince, eğer c_0'ın bir izomorfik kopyasını içerir ise bu durumda en az bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bulunabilir öyle ki x_n dizisinin kısmi toplamlar dizisinin kapalı konveks kabuğu, yani $K := \overline{co}(\{\sum_{1=k}^{n} x_k : n \in \mathbb{N}\})$, kümesi $\|\cdot\|$-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olamaz. Hatta Teorem 3.2'de sabit noktasız bir $T: K \to K$ afin kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonu bulunmuştur ve bu T fonksiyonu sağa kaydırma fonksiyonudur. Ayrıca her kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyon yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen olduğundan sabit noktasız bir $T: K \to K$ afin yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonnun varlığından söz edilebilir.

Şimdi (1) ifadesinin (2) için gerek koşul olduğu gösterilebilir.

Önerme 3.9 gereğince eğer X yansımalı ise kapalı birim yuvar B_X zayıf kompaktır. Dolayısıyla X'in her kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi C'de zayıf kompaktır. Ohalde Teorem 3.14 gereğince ispat tamamdır çünkü her yarı-kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyon süreklidir.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında tez danışmanı Nezir'in doktora tezinde [32] ve Nezir'in doktora danışmanı Chris Lennard ile olan ortak çalışmalarında [23] yer alan yarı-kuvvetli ve kuvvetli asimtotik genişlemeyen fonksiyonların Banach uzayın yansımalılığı ve sabit nokta teorisine sahip olması ile bağlantılı sonuçlar sunulmuştur. Bahsi geçen çalışmalarda [32,23] yarı kuvvetli asimtotik genişlemeyen ve kuvvetli asimtotik genişlemeyen diye adlandırdıkları genişlemeyen fonksiyonların alt sınıfı olan bir sınıf tanımlanmış ve bu sınıf fonksiyonlar için yansımayan uzaylardan ℓ^1 ve c_0 'ın sırasıyla bu fonksiyonlara göre sabit nokta teorisine sahip olabilecek şekilde yeniden normlanamayacağını gösterilmiştir. Araştırmacılar ele alınan fonksiyon sınıflarından daha genel sınıfları ele alarak veya Banach latislik şartını kaldırmaya çalışarak daha genel sonuçlar elde etmeye çalışabilirler.

KAYNAKLAR

[1] Aksoy, A. G., & Khamsi, M. A. (2012). Nonstandard methods in fixed point theory. Springer Science & Business Media.

[2] Beauzamy, B. (2011). Introduction to Banach spaces and their geometry (Vol. 68). Elsevier.

[3] Browder, F. E. (1965). Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 53(6), 1272.

[4] Browder, F. E. (1965). Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 54(4), 1041.

[5] Dominguez-Benavides, T. 2009. “A renorming of some nonseparable Banach spaces with the Fixed Point Property”, J. Math. Anal. Appl., 350(2), 525-530.

[6] Benavides, T. D. (2009). A renorming of some nonseparable Banach spaces with the fixed point property. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 350(2), 525-530.

[7] Benavides, T. D., Pineda, M. J., & Prus, S. (2004). Weak compactness and fixed point property for affine mappings. Journal of Functional Analysis, 209(1), 1-15.

[8] Dowling, P., & Lennard, C. (1997). Every nonreflexive subspace of L_1 [0, 1] fails the fixed point property. Proceedings of the American Mathematical Society, 125(2), 443-446.

[9] Dowling, P. N., Lennard, C. J., & Turett, B. (2000). Some fixed point results in l1 and c0. Nonlinear Analysis-Series A Theory and Methods and Series B Real World Applications, 39(7), 929.

[10] Dowling, P. N., Lennard, C. J., & Turett, B. (2001). Renormings of ℓ 1 and C 0 and Fixed Point Properties. In Handbook of metric fixed point theory (pp. 269-297). Springer, Dordrecht.

[11] Dowling, P. N., Lennard, C. J., & Turett, B. (2004). Weak compactness is equivalent to the fixed point property in c0. Proceedings of the American Mathematical Society, 1659-1666.

[12] Van Dulst, D. (1982). Equivalent norms and the fixed point property for nonexpansive mappings. Journal of the London Mathematical Society, 2(1), 139-144.

[13] Goebel, K. (2002). Concise course on fixed point theorems. Yokohama Pub..

[14] Goebel, K., & Kirk, W. A. (1972). A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings. Proceedings of the American Mathematical Society, 35(1), 171-174.

[15] Goebel, K., & Kirk, W. A. (1990). Topics in metric fixed point theory (Vol. 28). Cambridge University Press.

[16] Goebel, K., & Simeon, R. (1984). Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings. Dekker.

[17] Göhde, D. (1965). Zum prinzip der kontraktiven abbildung. Mathematische Nachrichten, 30(3-4), 251-258.

[18] James, R. C. (1964). Uniformly non-square Banach spaces. Annals of Mathematics, 542-550.

[19] Kirk, W. A. (1965). A fixed point theorem for mappings which do not increase distances. The American mathematical monthly, 72(9), 1004-1006.

[20] Kirk, W. A. (1965). A fixed point theorem for mappings which do not increase distances. The American mathematical monthly, 72(9), 1004-1006.

[21] Lennard, C., & Nezir, V. (2011). The closed, convex hull of every ai c0-summing basic sequence fails the FPP for affine nonexpansive mappings. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 381(2), 678-688.

[22] Lennard, C., & Nezir, V. (2014). Reflexivity is equivalent to the perturbed fixed point property for cascading nonexpansive maps in Banach lattices. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 95, 414-420.

[23] Lennard, C., & Nezir, V. (2017). Semi-strongly asymptotically non-expansive mappings and their applications on fi xed point theory. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 46(4), 613-620.

[24] Lin, P. K. (1985). Unconditional bases and fixed points of nonexpansive mappings. Pacific Journal of Mathematics, 116(1), 69-76.

[25] Lin, P. K. (2008). There is an equivalent norm on $\ell 1$ that has the fixed point property. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 68(8), 2303-2308.

[26] Lindenstrauss, J., & Tzafriri, L. (1977). Classical Banach Spaces I: sequence spaces, (Vol. 92). Springer Science & Business Media.

[27] Lindenstrauss, J., & Tzafriri, L. (1979). Classical Banach spaces II: function spaces (Vol. 97). Springer Science & Business Media.

[28] Lorentz, G. G. (1950). Some new functional spaces. Annals of Mathematics, 37-55.

[29] Matoušková, E., & Reich, S. (2003). Reflexivity and approximate fixed points. Studia Mathematica, 159, 403-415.

[30] Maurey, B. (1981). Points fixes des contractions de certains faiblement compacts de $ L^ 1$. Séminaire Analyse fonctionnelle (dit" Maurey-Schwartz"), 1-18.

[31] Mil'man, D. P., & Milman, V. D. (1964). Some properties of non-reflexive Banach spaces. Matematicheskii Sbornik, 107(4), 486-497.

[32] Nezir, V. (2012). Fixed Point Properties for c_0-like Spaces (Doctoral dissertation, University of Pittsburgh).

[33] Nezir, V. and Mustafa, N. (2018). c_0 can be renormed to have the fixed point property for affine nonexpansive mappings, Filomat, 32(16), 5645-5663.

[34] Reich, S. (1980). The fixed point property for non-expansive mappings, II. The American Mathematical Monthly, 87(4), 292-294.

[35] Reich, S. (1983). The almost fixed point property for nonexpansive mappings. Proceedings of the American Mathematical Society, 88(1), 44-46.

[36] Shafrir, I. (1990). The approximate fixed point property in Banach and hyperbolic spaces. Israel Journal of Mathematics, 71(2), 211-223.

[37] Sims, B. (1986). The existence question for fixed points of nonexpansive maps. Lecture Notes, Kent State Univ.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehmet Mensur YİTİZ

Doğum Yeri ve Tarihi : Van, 01.01.1988

Yabancı Dili : Orta derece İngilizce

İletişim (e-posta) : murselat.ytz@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Şehit Koray Akoğuz Lisesi

Lisans : Atatürk Üniversitesi-2015

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi-2020

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : MEB DYK 2015-2017, Van Final Koleji 2018-2019, Van Birinci Sınıf Eğitim Kurumları 2019-