T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BRANNAN VARSAYIMI ÜZERİNE

Hilal ALAN SARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Erhan DENİZ

OCAK-2021
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Hilal ALAN SARI'nın Prof. Dr. Erhan DENİZ'in danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "***Brannan Varsayımı Üzerine*** " adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy …….. ile kabul edilmiştir.

../../2021

Adı ve Soyadı	**İmza**

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Hilal ALAN SARI

Kars-2021

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

Brannan Varsayımı Üzerine

Hilal ALAN SARI

Kafkas Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erhan DENİZ

Bu tez çalışmasında, ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yer işgal eden Brannan varsayımı ile ilgili yapılan tüm çalışmalar kronolojik olarak verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, Ünivalent fonksiyon, Gauss Hipergeometrik fonksiyon, Katsayı sınırı, Subordinasyon,

2021, 66 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

On Brannan Conjucture

Hilal ALAN SARI

Kafkas University

Graduate School of Applied and Natural Sciences

Department of Matehmatics

Supervisor: Prof. Dr. Erhan DENİZ

In this thesis, all studies on Brannan conjecture, which occupies an important place in the theory of univalent functions are given in chronological order.

Key Words: Analytic function, Univalent function, Gauss Hypergeometric function, Coefficient bound, Subordination.

2021, 66 pages

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında hazırlanan bir yüksek lisans tezidir. Tez çalışmasında Brannan Varsayımı Üzerine yapılan çalışmaların incelemesi yapılmıştır. Öncelikle beni öğrencisi olarak kabul edip danışmanlığımı üstlenen, bilgi ve deneyimlerini bana aktaran ve bu tezi en iyi şekilde yazabilmem için yönlendirmelerini yapan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Erhan Deniz'e, akademik anlamda ilerlemem için beni hep harekete geçiren sevgili eşim Öğr. Gör. Zafer Sarı'ya ve eğitimim için beni her koşulda hep destekleyen canım aileme teşekkürü bir borç bilirim.

HİLAL ALAN SARI

Kars-2021

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
U	$\{z : \lvert z\rvert < 1, z \in \mathbb{C}\}$ kümesi
$U(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk
$H(U)$	U da analitik olan fonksiyonların sınıfı
A	$\left\{ f : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, z \in U \right\}$ kümesi
S	$\{ f \in A : \forall z \in U \text{ için } f \text{ ünivalent}\}$ kümesi
P	Caratheodory sınıfı
Ω	Schwarz fonksiyonlar sınıfı
S^*	Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
C	Konveks fonksiyonlar sınıfı
K	Konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı
$S^*(\alpha)$	$\alpha -$ Mertebeden yıldızıl (starlike) fonksiyonlar sınıfı
$C(\alpha)$	$\alpha -$ Mertebeden konveks fonksiyonlar sınıfı
$\tilde{K}(\beta)$	Güçlü konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı
V_k	Sınırlı sınır rotasyonuna sahip fonksiyonların sınıfı
$f \prec g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir
$\arg f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun argümanı
$\operatorname{Re} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun reel kısmı
$\operatorname{Im} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun sanal kısmı

TABLOLAR DİZİNİ

1 GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Geometrik fonksiyonlar teorisi kompleks fonksiyonların analitik ve geometrik özelliklerini inceleyen analiz ve fonksiyonlar teorisinin en önemli dallarından biridir. 1851 yılında Riemann tarafından doktora tezi olarak sunulan Riemann Dönüşüm Teoremi geometrik fonksiyonlar teorisi için bir başlangıç noktası olmuştur. Geometrik fonksiyonlar teorisinin de en önemli dallarından biri şüphesiz ünivalent fonksiyonlar teorisidir. Ünivalent fonksiyonlar üzerine yapılan çalışmalar $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ şartlarını sağlayan analitik ve birebir fonksiyonlarının oluşturduğu S sınıfı üzerine olmuştur. Bu sınıf üzerine ilk çalışma 1914 yılında Gronwall tarafından verilmiş olan Alan teoremidir. Bu teorem birim diskin S sınıfına ait bir fonksiyon altındaki görüntüsünün alanını belirler.

Alan teoremi ilk defa S sınıfına ait bir fonksiyonun ikinci katsayısının kesin üst sınırını belirlemede kullanılmıştır. Böylece ünivalent fonksiyonlar üzerine yapılan çalışmalarda fonksiyonların katsayıları hakkında bilgi edinmek bir temel problem haline gelmiştir. Problem ile ilgili ilk adım 1916 yılında L. Bieberbach [5] tarafından atılmıştır. S sınıfına ait f normalize edilmiş fonksiyonları

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

şeklinde Taylor- Maclaurin serisi olarak ifade edilir. Bieberbach, alan teoremini kullanarak $|a_2| \le 2$ olduğunu ispatlamış ve $n = 2, 3, 4, \ldots$ değerleri için $|a_n| \le n$ katsayı tahminini ortaya koymuştur. Bu tahmin üzerine birçok ünlü matematikçi çalışmış ve önemli sonuçlar elde etmişlerdir (bkz. [42]). Nihayet bu tahmin 1984 yılında L. De Branges [6] tarafından tüm $n = 2, 3, 4, \ldots$ değerleri için ispatlanmıştır. $|a_n| \le n$ için eşitliği sağlayan fonksiyon $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonudur. Bu tahminin tarihsel serüveni

2019 yılında Tokkan [42] tarafından yüksek lisans tez çalışmasında ayrıntılı bir şekilde ifade edilmiştir.

Katsayılar üzerine çalışan bir başka matematikçi de David Alexandra Brannan'dır. Çalışmasının temeli U birim diskini konform olarak sınır rotasyonu en fazla $k\pi$ olan bir bölge üzerine resmeden (1.1) şeklindeki lokal ünivalent fonksiyonların V_k sınıfına dayanır (bkz. Lehto [21]). Bu sınıfın yıldızıl, konveks ve konvekse yakın gibi S sınıfının önemli alt sınıflarıyla yakından bağlantısı vardır. Örneğin; $k=2$ için V_k sınıfı konveks fonksiyonların sınıfına, $2 \le k \le 4$ için de konvekse yakın fonksiyonların sınıfına indirgenir. Ayrıca $V_4 \subset S$ dir.

Diğer taraftan $k \ge 2$ ve $z \in U$ için

$$f_k(z) = \frac{1}{k}\left\{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{k/2} - 1\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n \tag{1.2}$$

fonksiyonu V_k sınıfına aittir. Bu fonksiyon V_k sınıfı için bir ekstremal fonksiyon görevi üstlenir. Bu durumda Bieberbach tahmininden yola çıkarak (1.1) ve (1.2) fonksiyonları göz önünde bulundurulduğunda V_k sınıfı için katsayı varsayımı

$$|a_n| \le A_n \tag{1.3}$$

şeklinde ifade edilmiştir. Dikkat edilirse $k=4$ için bu varsayım Bieberbach tahminine denktir.

Varsayımın doğruluğu 1952 yılında Pick tarafından $n=2$ için, aynı yıl Lehto [21] tarafından $n=3$ için, 1967 yılında Schiffer ve Tammi [37] ve bağımsız olarak 1968 yılında Lonka ve Tammi [22] tarafından ise $n=4$ için yapılmıştır (bkz. [1,10]).

1972 yılında Noonan [26] varsayımı desteklemek için V_k sınıfına ait $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu için $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{A_n}$ değerinin var olduğunu göstermiş ve bu limitin sonucunun bazı reel φ değerleri için $f(z) = e^{-i\varphi} f_k(e^{i\varphi} z)$ olmadığı sürece 1'den küçük olduğunu bulmuştur.

1973 yılında Brannan, Clunie ve Kirwan [10],

$$\left(\frac{1+xz}{1-z}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\alpha, x) z^n$$

fonksiyonunu tanımladı. Onlar aslında (1.3) problemini $\alpha \geq 1$, $|x| = 1$ ve $n \geq 1$ için $|B_n(\alpha, x)| \leq |B_n(\alpha, 1)|$ problemine indirgedi. Aynı çalışmada Herglotz formülünün bir genelleştirilmesini kullanarak (1.1) fonksiyonun reel katsayılara sahip olması durumunda ya da (1.2) de $k \geq 4$ alındığında varsayımın tüm n değerleri için doğru olduğunu ispatlamışlardır. Ayrıca $1 \leq n \leq 13$ için $|B_n(\alpha, x)| \leq |B_n(\alpha, 1)|$ eşitsizliğin doğruluğunu göstererek aslında $2 \leq n \leq 14$ değerleri için (1.3) varsayımın doğru olduğunu göstermişlerdir.

1972 yılında Aharonov ve Friedland [1], yine varsayımla alakalı

$$\frac{(1+xz)^{\alpha}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\alpha, x) z^n$$

fonksiyonunu gözönüne almışlardır. Onlar $\alpha \geq 1, |x| = 1$ ve $n \geq 1$ için $|C_n(\alpha, x)| \leq |C_n(\alpha, 1)|$ olduğunu göstermişlerdir. Dolayısıyla Brannan, Clunie ve Kirwan [10] ve Aharonov ve Friedland [1] tarafından bulunan bu sonuçlar birleştirildiğinde $\alpha \geq 1, |x| = 1$ ve tüm $n \geq 1$ değerleri için $|B_n(\alpha, x)| \leq |B_n(\alpha, 1)|$ doğrudur. Bu da (1.3) varsayımın doğru olduğu anlamına gelir. Daha sonra 1973 yılında Brannan [8] bu varsayımı daha kısa bir şekilde ispatlamıştır.

1973 yılında Brannan [8] çalışmasında $|x| = 1$, $\alpha, \beta > 0$ şartlarıyla

$$\frac{(1+xz)^{\alpha}}{(1-z)^{\beta}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\alpha, \beta, x) z^n$$

fonksiyonunu tanımlamıştır ve (1.3) probleminin daha genel versiyonu olan $\alpha, \beta > 0$ için

$$|A_n(\alpha, \beta, x)| \leq |A_n(\alpha, \beta, 1)| \tag{1.4}$$

tahmini ortaya atmıştır. Bu tahmin yukarıda da bahsedildiği üzere $\alpha, \beta \geq 1$ şartı altında tüm $n \geq 1$ değerleri için ispatlanmıştır. Dolayısıyla (1.4) tahmini $0 < \alpha < 1$ ve $\beta \leq 1$ şartları altında ispatlamak gerekir. Brannan aynı çalışmasında (1.4) eşitsizliğinin n nin çift doğal sayı olması durumunda sağlamadığını göstermiştir. Böylece problemi son olarak şu şekilde güncellemiştir:

Brannan Varsayımı: $0 < \alpha < 1$ ve $\beta \leq 1$ için $\left|A_{2n-1}(\alpha, \beta, x)\right| \leq \left|A_{2n-1}(\alpha, \beta, 1)\right|$ $(n \in \mathbb{N})$ eşitsizliği doğru mudur? [8].

Bu tahmin $\beta = 1$ şartı altında; $n = 3$ için 1973 de Brannan [8] kuadratik trigonometrik polinomlar için bir eşitsizliği kullanarak, $n = 5$ için 1989 da Milcetich [24] pozitif trigonometrik toplamları kullanarak, $n = 7$ için 1997 de Barnard, Pearce ve Wheler [4], Sturn dizilerini ve MAPLE programını kullanarak varsayımın doğruluğunu ispatlamışlardır.

2007 yılında Ruscheweys ve Salinas [36] Gauss hipergeometrik fonksiyonların özelliklerini kullanarak $\alpha = \beta \in (0,1)$ olması durumunda tüm n değerleri için varsayımın doğru olduğunu göstermiştir.

2013 yılında Jayatilake [18] $\beta = 1$ şartı altında Sturn dizilerini ve MATHEMATICA programını kullanarak varsayımı $n \leq 26$ değerleri için ispatlamıştır. Böylece bulunan bu sonuç Ruscheweys ve Salinas'ın sonucuyla birleştirildiğinde $n \leq 26$ değerleri için Brannan varsayımının doğru olduğu açıktır.

2015 yılında Barnard, Jayatilake ve Solynin [3] $A_n(\alpha, \beta, x)$ katsayılarının integral temsilini kullanarak $\beta = 1$ ve kompleks $x = re^{i\theta}$ için $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ve $0 < r \leq 1/2$ olması durumunda tüm n değerleri için varsayımın doğruluğunu göstermiştir. Aynı çalışmada $x = re^{i\theta}$ için $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ve $0 < r \leq 1$ olması durumunda tüm n değerleri için $\operatorname{Re} A_{2n-1}(\alpha, 1, x) \leq A_{2n-1}(\alpha, \beta, r)$ eşitsizliğini elde etmiştir.

2020 yılında Szasz [40] $A_n(\alpha, \beta, x)$ katsayılarının integral temsilini ve bazı reel eşitsizlikler kullanarak $\beta = 1$ kabulüyle; $x = e^{i\theta}$ için $\left|\theta\right| \leq \dfrac{2\pi}{3}$ olması durumunda $n \geq 27$ değerleri için varsayımı ispatlamıştır. Böylece bu sonucu Jayatilake sonucuyla birlikte düşündüğümüzde $\beta = 1$ kabulüyle; $x = e^{i\theta}$ için $|\theta| \leq \frac{2\pi}{3}$ koşulu altında tüm n değerleri için varsayım doğrudur. Ayrıca Szasz aynı çalışmada Jayatilake [18] nın sonucunu da dikkate alarak $\frac{1}{3} \leq \alpha < 1$ ve $\beta = 1$ için varsayımın doğruluğunu göstermiştir.

Aynı yıl varsayım üzerine yapılan ve son çalışma özelliğini de taşıyan Deniz, Çağlar ve Szasz [12] bir önceki çalışmanın eksik kalan bir kısmını tamamlayarak $\beta = 1$ kabulüyle $\theta \in \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ için varsayımı ispatlamıştır. Böylece bu sonuç Szasz'ın [40] sonucuyla birlikte düşünüldüğünde $\beta \in (0,1]$ ve $\alpha \in (0,1)$ şartları altında tüm $n \in \mathbb{N}$ değerleri için varsayımın doğruluğu ispatlamış olur. Sonuç olarak varsayımın doğruluğu 2020 yılında genel olarak ispatlanmış oldu.

Biz bu çalışmada ünivalent fonksiyonlar teorisi için oldukça önemli olan Brannan katsayı varsayımı üzerine yapılan tüm çalışmaları araştırmacılar tarafından bütüncül olarak ulaşılabilecekleri bir kaynak haline getirmeyi hedefledik.

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört ayrı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde –giriş- çalışmaya giriş yapılmış ve tezde değinilen konular, bu konular üzerine yapılan çalışmalar ve kronolojik sıralaması ile kuramsal temeller verilmiştir.

İkinci bölümde –materyal ve yöntem- Brannan varsayımının ortaya çıkmasında rol oynayan fonksiyon sınıfının temel özellikleri ve bu sınıfa ait katsayı oluşturma teoremlerine yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde bulgular- Brannan teoremi ve üzerine yapılan tüm çalışmalar kronolojik bir sıralama ile ayrıntılı olarak olarak verilmiştir

Dördüncü bölümde ise sonuç ve tartışmalara yer verilmiştir.

1.2 Kuramsal Temeller

Bu bölümde Ponnusamy ve Silverman’ın [32] kitabından yararlanılarak genel tanımlara yer verilmiştir.

Tanım 1.2.1: (Komşuluk) $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ koşuluyla $U(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ kümesi merkezi z_0, yarıçapı r olan bir açık diski temsil eder. Başka bir deyişle z_0 noktasının r komşuluğu anlamına gelir.

$U(z_0, r)$’ın kapanışı $\overline{U}(z_0, r)$, sınırı $\partial U(z_0, r)$ ve (0,0) merkezli r yarıçaplı disk de $U(0, r) = U_r$ ile gösterilecektir.

Özel olarak orijin merkezli açık birim disk $U = \{z : |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.2: (İç nokta) $H \subset \mathbb{C}$ verilsin. $z_0 \in H$ noktası için $U(z_0, r) \subset H$ koşulunu sağlayan $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına H kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 1.2.3: (Açık küme) $H \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktası aynı zamanda bir iç nokta ise H kümesine açık küme denir.

Tanım 1.2.4: (Kapalı küme) $H \subset \mathbb{C}$ kümesinin tümleyeni açık ise H kümesine kapalı küme denir.

Tanım 1.2.5: (Bağlantılı küme) $H \subset H_1 \cup H_2$, $H \cap H_1 \neq \varnothing$, $H \cap H_2 \neq \varnothing$, $H \cap H_1 \cap H_2 = \varnothing$ koşullarını sağlayacak H_1 ve H_2 gibi boş olmayan iki açık ve ayrık küme yoksa $H \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılı küme denir.

Bağlantılı olmayan kümeye bağlantısız küme denir.

Tanım 1.2.6: (Bölge) Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

Tanım 1.2.7: (Süreklilik) $H \subset \mathbb{C}$, $f : H \to \mathbb{C}$ fonksiyonu ve $z_0 \in H$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ iken $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı bulunuyorsa f fonksiyonuna z_0 noktasında sürekli fonksiyon denir.

Tanım 1.2.8: (Eğri) $[x, y] \subset \mathbb{R}$ olsun. $\gamma : [x, y] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ 'de bir eğri (yol) denir.

Eğrinin başlangıç ve bitiş noktaları sırasıyla $\gamma(x)$ ve $\gamma(y)$ noktalarıdır.

Tanım 1.2.9: (Kapalı eğri) $\gamma : [x, y] \to \mathbb{C}$ eğrisi için $\gamma(x) = \gamma(y)$ (başlangıç ve bitiş noktaları aynı) ise γ eğrisine kapalı eğri denir.

Tanım 1.2.10: (Basit eğri) Uç noktalarının kesişmesi hariç kendi kendini kesmeyen eğrilere basit eğri denir.

Bir eğri hem kapalı hem de basit ise basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi olarak adlandırılır. Bu eğri düzlemi iki bölgeye ayırır: Eğrinin iç bölgesi ve eğrinin dış bölgesi. İç bölgeye Jordan bölgesi denir.

γ eğrisi $[x, y]$ aralığında türevlenebilir γ' sürekli ve $\gamma' \neq 0$ ise γ düzgün eğridir denir. x 'ten y 'e artan k için $\gamma(k)$ değerlerinin $\gamma(x)$ ten $\gamma(y)$ e doğru olan sıralanması verilen eğrinin yönünü belirtir. Kapalı bir eğride iki yön vardır: pozitif ve negatif. Eğri kapalı bir eğri ise yönü başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru bir sıralama ile oluşur.

1.2.1 Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde analitik ve ünivalent fonksiyonlar için oldukça önemli olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.2.1.1: (Diferensiyellenebilme) $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

sonlu limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu $z_0 \in A$ noktasında diferansiyellenebilirdir (türevlenebilirdir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır [32].

Tanım 1.2.1.2: (Analitiklik) Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasında ve bu noktanın belli bir $U(z_0, \varepsilon)$ komşuluğundaki bütün noktalarında diferansiyellenebiliyorsa f ye z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer bu f kompleks fonksiyonu bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktasında analitikse f ye S kümesinde analitik denir. Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir [32].

Örneğin; $p(z) = a_n z^n + \cdots a_1 z + a_0 \ (a_n \neq 0)$ kompleks polinomu tam fonksiyondur.

Tanım 1.2.1.3: (Singüler nokta) Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $U(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 bir singüler noktadır denir [32].

Teorem 1.2.1.4: (Cauchy Riemann denklemleri) $z = u + iv$ olmak üzere $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ kompleks fonksiyonu analitik ise u ve v 'nin kısmi türevleri

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

olarak ifade edilen Cauchy Riemann denklemlerini sağlar [32].

Teorem 1.2.1.5: (Cauchy türev formülü) f, pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n = 0,1,2...$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \tag{1.5}$$

dır [32].

Bu teoremden çıkarılabilecek en önemli sonuç şudur: f fonksiyonu herhangi bir bölgede analitik ise bu bölgede her mertebeden türevinin var olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca fonksiyonun türevleri de o bölgede analitiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n! \tag{1.6}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir [32].

Teorem 1.2.1.6: (Laurent Teoremi) f , $r < |z - z_0| < R$ şeklinde verilen H halka bölgesi içinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu H halka bölgesinde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

açılımı ile temsil edilir. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş bir komşuluğundaki Laurent serisi (açılımı) denir [32].

Tanım 1.2.1.7: (Kutup noktası) z_0, $f(z)$ fonksiyonun bir singüler noktası olsun. Laurent açılımındaki b_n katsayılarından sadece sonlu tanesi sıfırdan farklı ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası denir [32].

Teorem 1.2.1.8: (Maksimum Modül Prensibi) Eğer $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir H bölgesinde analitik ise bu durumda $f(z)$ sabit olmadıkça $|f(z)|$ maksimum değerini H bölgesinde alamaz [32].

$f(z)$ fonksiyonu sınırlı bir H bölgesinde analitik ve bu bölgenin kapanışında sürekli ise $|f(z)|$ maksimum değerini H bölgesinin sınırında alır [32].

Maksimum modül prensibinin en önemli sonuçlarından biri Schwarz lemmasıdır.

Lemma 1.2.1.9: (Schwarz lemması) f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve $f(0) = 0$ olsun. Eğer U birim diskinde $|f(z)| \leq 1$ ise bu durumda $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ dır. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu ile sağlanır [32].

Teorem 1.2.1.10: (Minimum Prensibi) $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir H bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in H$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Bu durumda $|f(z)|$, H bölgesinde minimum değer alamaz [32].

H kompleks düzlemde sınırlı bir bölge, $f(z)$ sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in H$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun H bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini H bölgesinin sınırında alır.

Tanım 1.2.1.11: (Ünivalent fonksiyon) f, $H \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in H$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) f fonksiyonuna H bölgesinde ünivalent (yalınkat veya schlicht) fonksiyon denir. Eğer f, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye yerel ünivalent fonksiyon denir [14,32].

Eğer f, H bölgesinde analitik ve ünivalent ise bu durumda bu bölgede $f'(z_0) \neq 0$ olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan

$$f'(z_0) \neq 0 \Leftrightarrow z_0 \text{ komşuluğunda } f \text{ yerel ünivalenttir.}$$

Eğer f bir B bölgesinde ünivalent ise yerel ünivalenttir. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin, $H = \mathbb{C} / \{0\}$ ve $f(z) = z^2$ $(z \in H)$ olsun. Tüm $z_0 \in H$ için $f'(z_0) = 2z_0 \neq 0$ olduğundan $f(z) = z^2$ fonksiyonu H kümesinde yerel ünivalenttir. Ancak tüm $z \in H$ için $f(z) = f(-z)$ olduğundan f, H bölgesinde ünivalent değildir [14].

Tanım 1.2.1.12: (Konform Dönüşüm) Eğer bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer bir f fonksiyonu, bir $H \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise f fonksiyonu H bölgesinde konformdur denir [14,32].

Teorem 1.2.1.13: f fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur [32].

z kompleks değişkeni ve a, b, c, d kompleks sayıları için bir lineer dönüşüm (Möbiüs dönüşümü)

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad ad - bc \neq 0$$

bir konform dönüşümdür.

Teorem 1.2.1.14: (Riemann Dönüşüm Teoremi) Kompleks düzlemin her $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ ($\mathcal{D} \neq \mathbb{C}$) basit bağlantılı bölgesi konform olarak U birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan ve $\mathcal{D}$ 'yi U birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır [14,16,31].

1.2.2 Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde fonksiyonlar teorisinin alt konularından olan ünivalent fonksiyonların detaylı anlatımı verilecektir. Analitik olarak düşünüldüğünde ünivalent fonksiyonun türevi sıfıra eşit değilken, geometrik olarak düşünüldüğünde basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Fonksiyon hem analitik hem de ünivalent olduğunda basit bağlantılı olan bölgeleri yine basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoreminden yararlanılarak keyfi basit bağlantılı bir bölgede tanımlanan ünivalent f fonksiyonu yerine açık birim diskte tanımlı ünivalent f fonksiyonu kullanılabilir. Seçilen f fonksiyonu için $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ normalize şartları dikkate alınarak (1.6) ile verilen seri

$$f(0) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad (z \in U) \tag{1.7}$$

analitik fonksiyonuna dönüşür.

A ile normalize edilmiş analitik fonksiyonların kümesini gösterelim. Böylece

$$A = \left\{ f : \forall z \in U \text{ için } f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right\}$$

yazılır.

Tanım 1.2.2.1: (S Sınıfı) U birim diskinde ünivalent olan $f \in A$ fonksiyonların oluşturduğu sınıfa S sınıfı denir ve kısaca

$$S = \{ f \in A : \forall z \in U \text{ için } f - \text{ünivalent} \}$$

şeklinde gösterilir [14,16,31].

Aşağıda S sınıfına ait fonksiyonlardan bazı örnekler verilmiştir.

i. $w = f(z) = z(1-z)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\mathrm{Re}(w) > -1/2$ sağ yarı düzlemine resmeder.

ii. $f(z) = z(1-z^2)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C} - \{(-\infty, -1/2] \cup (1/2, \infty]\}$ bölgesi üzerine resmeder.

iii. $f(z) = z(1-z)^{-2}$ *Koebe* fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C} - (-\infty, -1/4]$ bölgesi üzerine resmeder.

S sınıfı bir çok özelliği sağladığı gibi bazı özellikleri de sağlamıyor. Örneğin; S sınıfı toplama işlemine göre kapalı değildir. Bunun için $f_1(z) = \dfrac{z}{1-z}$ ve $f_2(z) = \dfrac{z}{1+iz}$ fonksiyonları S sınıfına ait fonksiyonlardır. Bu iki fonksiyonun toplamının da S sınıfına ait olup olmadığını kontrol edelim. Bunun için

$f_1'(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ ve $f_2'(z) = \dfrac{z}{(1+iz)^2}$ türevlerinden $f_1'(z) + f_2'(z) = \dfrac{2-2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$

yazılır ve $z = \dfrac{1+i}{2} \in U$ alınırsa $f_1'(z) + f_2'(z) = 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak S sınıfına ait iki fonksiyonun toplamının S sınıfına ait olmadığı görülür.

Aşağıda S sınıfına ait birçok özelliğin korunduğu dönüşümler verilmiştir.

Teorem 1.2.2.2: $f \in S$ fonksiyonu için aşağıda verilen ifadeler doğrudur.

i. Eşlenik alma: $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a}_2 z^2 + \ldots$ ise $g \in S$ olur.

ii. Rotasyon (Döndürme): $\theta \in \mathbb{R}$ olmak koşuluyla

$$h(z) = e^{-i\theta} f\left(e^{i\theta} z\right) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n \quad \left(z \in U\right)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

iii. Genişleme: $0 < r < 1$ olma koşuluyla

$$k(z) = r^{-1} f\left(rz\right) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n \quad \left(z \in U\right)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

iv. Disk Otomorfizmi (Koebe ve Biebarch Dönüşümü): $z_0 \in U$ olmak koşuluyla

$$l(z) = \frac{f\left(\dfrac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right) - f(z_0)}{\left(1-|z_0|^2\right) f'(z_0)} \quad (z \in U)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

v. Değer bölgesi dönüşümü : $\psi(0) = 0$ ve $\psi'(0) = 1$ şartlarını sağlayan ve $f(U)$ da ünivalent olan bir ψ foksiyonu için $\psi \circ f \in S$ dir.

vi. Çıkarılmış değer dönüşümü: $w \notin f(U)$ olsun. Bu durumda

$$p(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/w} \quad (z \in U)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

v. *n.* kök dönüşümü: Eğer $n = 2,3,...$ ise, bu durumda

$$v(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^2}(2na_3 - (n-1)a_2^2) z^{2n+1} + ...,$$

fonksiyonu S sınıfına aittir [14,16,31].

Tanım 1.2.2.3: (P Sınıfı) U birim diskinde $p(0) = 1$ ve $\mathrm{Re}\, p(z) > 0$ koşullarını sağlayan $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ biçimindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa P sınıfı denir. Bu sınıftaki fonksiyonlar Caratheodory fonksiyonları olarak adlandırılır [14,16,31].

P sınıfına ait bir fonksiyon ünivalent olmak zorunda değildir. Örnek olarak $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu P sınıfına ait bir fonksiyondur fakat $n \in \mathbb{N}_0, n \geq 2$ için ünivalent değildir.

Tanım 1.2.2.4: (Ω Sınıfı) U birim diskinde $\phi(0) = 0$ ve $|\phi(z)| < 1$ koşullarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonların sınıfı denir ve Ω ile gösterilir [14,16,31].

Ayrıca P sınıfı ile Ω sınıfı arasındaki önemli bağ aşağıda verilmiştir:

$$p(z) \in P \Leftrightarrow p(z) = \frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)} \quad (\phi(z) \in \Omega).$$

Tanım 1.2.2.5: (S^* Sınıfı) $H \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. H kümesindeki y_0 sabit noktasını $\forall y \in H$ noktası ile birleştiren doğru parçasının tümü bu kümede kalıyorsa H kümesine y_0 noktasına göre yıldızıl kümedir denir. y_0 noktası özel olarak orjin seçilirse kümeye kısaca yıldızıl küme de denilir. y_0 noktasına göre U birim diskini yıldızıl bir kümeye dönüştüren f fonksiyonuna y_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel olarak U birim diskini yıldızıl bir kümeye dönüştüren f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. $f \in A$ yıldızıl fonksiyonlarının sınıfı S^* ile gösterilir [14,16,31].

<u>Teorem 1.2.2.6 :</u> $f \in S$ verilsin. Bu durumda $f \in S^*$ olması için yeter ve gerek şart

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

olmasıdır. Ayrıca $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S^* \Rightarrow |a_n| \leq n$ dir [14,16,31].

Yıldızıl fonksiyonlar kümesi

$$S^* = \left\{ f \in S : \forall z \in U \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \right\}$$

şeklinde yazılır. Örneğin $f(z) = z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonu yıldızıldır. Çünkü Teorem 1.2.2.6 da $z = re^{i\theta}$ ve $\left(0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\right)$ alınırsa

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) \\ &= \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} \geq \frac{1+r}{1-r} > 0\end{aligned}$$

elde edilir.

<u>Tanım 1.2.2.7:</u> (C Sınıfı) $H \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. $\forall y_1, y_2 \in C$ için y_1 noktasını y_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen H içinde kalıyorsa H 'ye konveks küme denir. U birim diskini konveks kümeye dönüştüren f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. $f \in A$ konveks fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir [14,16,31].

<u>Teorem 1.2.2.8:</u> $f \in S$ verilsin. Bu durumda $f \in C$ olması için yeter ve gerek şart

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0$$

olmasıdır. Ayrıca $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in C \Rightarrow |a_n| \leq 1$ dir [14,16,31].

Teorem 1.2.2.9: (Alexander Teoremi) $f(z) \in C$ olması için yeter ve gerek şart $zf'(z) \in S^*$ olmasıdır [14,16,31].

Tanım 1.2.2.10: (Hadamard Çarpımı) $f, g \in A$ fonksiyonları verilsin.

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ ve } g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$$

şeklindeki fonksiyonların Hadamard çarpımı $(*)$

$$(f * g)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n$$

şeklinde tanımlanır [14,16,31].

Tanım 1.2.2.11: (Subordinasyon) f ve g fonksiyonları U birim diskinde tanımlı iki analitik fonksiyon olsun. U birim diskinde $f(z) = g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega \in \Omega$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu U da g fonksiyonuna subordinedir denir ve $f \prec g$ ile gösterilir [14,16,31].

Örneğin; $1+z \prec 1+2z$ dir. Eğer g ünivalent ise $f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subseteq g(U)$ gerektirmesi doğrudur.

Teorem 1.2.2.12: (Lindelöf prensibi) f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve ünivalent, g fonksiyonu da U birim diskinde analitik bir fonksiyon olsun. Eğer $g(0) = f(0)$ ve $g(U) \subset f(U)$ ise, bu durumda U_r diskinde her $r < 1$ için $|g'(0)| \leq |f'(0)|$ ve $g(U_r) \subset f(U_r)$ dir [14,16,31].

Subordinasyonun katsayılar üzerinde önemli bir katkısı vardır. Şöyle ki; $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ve $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n$ fonksiyonlarının birim diskte analitik olduğunu kabul edelim. Bu durumda eğer $g(z) \prec G(z)$ ise $|b_n| \leq |B_n|$ dir (bkz [35]).

Tanım 1.2.2.13: ($S^*(\alpha)$ Sınıfı) $f(z) \in A$ ve $0 \leq \alpha < 1$ verilsin. Bu durumda

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna $\alpha-$mertebeden yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da $\alpha-$mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı denir ve bu sınıf $S^*(\alpha)$ ile gösterilir [16].

<u>Tanım 1.2.2.14:</u> ($C(\alpha)$ Sınıfı) $f(z)\in A$ ve $0\le\alpha<1$ verilsin. Bu durumda

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna $\alpha-$mertebeden konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da $\alpha-$mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı denir ve $C(\alpha)$ ile gösterilir [16].

Subordinasyon özelliği kullanılarak $C(\alpha)$ ve $S^*(\alpha)$ sınıflarını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$S^*(\alpha)=\left\{ f\in A: \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}, 0\le\alpha<1\right\}$$

$$C(\alpha)=\left\{ f\in A: 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}, 0\le\alpha<1\right\}.$$

Ayrıca $S^*(0)=S^*$ ve $C(0)=C$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $S^*(\alpha)\subset S^*$ ve $C(\alpha)\subset C$ dır.

<u>Tanım 1.2.2.15</u> ($K(\alpha)$ Sınıfı): $f(z)\in A$ ve $0\le\alpha<1$ verilsin. Bu durumda

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right) > \alpha$$

şartını sağlayan $g\in S^*$ fonksiyonu varsa f fonksiyonuna $\alpha-$mertebeden konvekse yakın fonksiyon, bu fonksiyonların sınıfına da $\alpha-$mertebeden konvekse yakın fonksiyonların sınıfı denir ve $K(\alpha)$ ile gösterilir [14,15,16,19,30,31].

Ayrıca konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı $K(0)=K$ ile gösterilir ve bu sınıfa ait olan fonksiyonlar konvekse yakın fonksiyon olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.2.16: ($\tilde{K}(\alpha)$ Sınıfı) $f \in A$ ve $\alpha\ (\alpha > 0)$ olsun. Bu durumda

$$\left|\arg \frac{zf'(z)}{g(z)}\right| < \alpha \frac{\pi}{2}$$

şartını sağlayan $g \in S^*$ fonksiyonu varsa f fonksiyonuna $\alpha-$mertebeden güçlü konvekse yakın fonksiyon, bu fonksiyonların sınıfına da $\alpha-$mertebeden güçlü konvekse yakın fonksiyonların sınıfı denir ve $\tilde{K}(\alpha)$ ile gösterilir [30].

Son olarak bahsi geçen sınıflar arasında aşağıda verilen bağıntı vardır:

$$C \subset S^* \subset K \subset S \subset A.$$

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde V_k fonksiyon sınıfının tanımı, temel özellikleri ve katsayı formülünün nasıl oluşturulduğu geniş olarak ele alınmıştır.

2.1 V_k Sınıfı ve Temel Özellikleri

U birim diskini konform olarak sınır rotasyonu en fazla $k\pi$ olan bir bölge üzerine resmeden

$$f(z) = z + a_2 z^2 + ... = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

şeklindeki lokal ünivalent fonksiyonların kümesine V_k sınıfı denir (bkz. [9, 21]). Buradan anlaşılacağı üzere bir fonksiyonun V_k sınıfına ait olabilmesi için gerek ve yeter şart; f fonksiyonun birim disk içinde analitik olması ve $z \in U$ koşuluyla $f'(z) \neq 0$, $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ şartlarını sağlamasıdır (bkz. [24]). Sonrasında bu şart Paatero [27] tarafından da şu şekilde verilmiştir: $\mu(t)$, $\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 2$ ve $\int_0^{2\pi} |d\mu(t)| \leq k$ şartlarını sağlayan reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $f \in V_k$ olması için gerek ve yeter şartın

$$f'(z) = \exp\left\{-2\pi \int_0^{\pi} \log(1 - ze^{-it}) d\mu(t)\right\}$$

olmasıdır. Buradan $f \in V_k$ olabilme şartı $k \geq 2$ değeri için

$$\int_0^{2\pi} \left| \operatorname{Re} \frac{(zf'(z))'}{f'(z)} \right| d\theta \leq k\pi \quad \left(z = re^{i\theta}\right)$$

şartına denktir. Bu eşitsizlikten $k_1 < k_2$ ise $V_{k_1} \subset V_{k_2}$ olduğu anlaşılır ve böylece V_k 'nın k 'ya göre genişlediği çıkarımı yapılır (bkz [28]). $k = 2$ için V_k sınıfı konveks fonksiyonların sınıfına indirgenir. Ayrıca Paatero [27], $V_4 \subset S$ olduğunu göstermiştir. Pinchuk [29] $2 \leq k \leq 4$ şartıyla V_k daki fonksiyonların konvekse yakın dolayısıyla ünivalent olduğunu ispatlamıştır.

Brannan [7] çalışmasında V_k sınıfı ile $\alpha-$mertebeden konvekse yakın fonksiyonlar arsındaki ilişkiyi aşağıdaki teoremle vermiştir.

Teorem 2.1.1: $2 \le k \le 4$ aralığında $f(z)$ fonksiyonun V_k sınıfına ait olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu $K\left(\frac{k}{2}-1\right)$ sınıfına aittir [7].

Teorem 2.1.2: $f(z)$ fonksiyonunun V_k sınıfına ait olduğunu ve $f(U)$ 'da bazı değerlerin p defa alındığını kabul edelim. Bu durumda $k=2$ ise $p=1$ ve $k>2$ ise $p<\frac{1}{2}k$ olur [7].

Teorem 2.1.3: Kabul edelim ki $f \in V_k$ ve $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$ olsun. Bu durumda

$$|f'(z)| \le 2k(1-r^2)^{-1}\left(1+M(r)\right) \quad \left(|z|=r\right)$$

eşitsizliği sağlanır [7].

Teorem 2.1.4: $k>2$ aralığında $f(z)$ fonksiyonu V_k sınıfına ait olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu $\tilde{K}\left(\frac{k}{2}-1\right)$ sınıfına aittir [10].

Kirwan [20] $k>4$ için V_k fonksiyon sınıfının ünivalentlik yarıçapının $\tan\left(\frac{\pi}{k}\right)$ olduğunu göstermiştir. Paatero [27] V_k sınıfına ait fonksiyonlar için $(0,1)$ aralığındaki her r ve $|z|=r<1$ için distorsiyon sınırını

$$\frac{(1-r)^{\frac{k}{2}-1}}{(1+r)^{\frac{k}{2}+1}} \le |f'(z)| \le \frac{(1+r)^{\frac{k}{2}-1}}{(1-r)^{\frac{k}{2}+1}}$$

olarak elde etmiştir. Bu eşitsizlikteki sınırlar $(0,1)$ aralığındaki her r için

$$f_k(z)=\frac{1}{k}\left\{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{k/2}-1\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n z^n \quad (A_1=1) \tag{0.1}$$

fonksiyonuyla kesindir.

Özellikle $f_4(z)$ Koebe fonksiyonu, $f_2(z)$ de konveks fonksiyonların sınıfı için extremal fonksiyondur. Dolayısıyla V_k fonksiyon sınıfına ait katsayı tahmini

$$|a_n| \le A_n \tag{0.2}$$

şeklinde ifade edilir (bkz. [1,10,21])

2.2 V_k Sınıfı İçin Katsayı Problemi

V_k fonksiyon sınıfı ve özellikleri tanımlandıktan sonra $A_n = A_n(k) = \max_{f \in V_k} |a_n|$ sınırını bulmak matematikçiler için bir problem haline gelmiştir. Bu sınır problemi (1.1) ile verilen şekliyle $(k = 2)$, $|a_2| = 1$ için Loewner [23] tarafından ispatlanmıştr. $k \le 4$ olması durumu $|a_n| \le n$ varsayımı üzerine Renyi [33] çalışmış ve buradan $k \le 3$ olması durumunda $|a_n| \le n^{k-2}$ eşitsizliğinin doğruluğunu ispatlamıştır. Ardından $|a_2| \le k/2$ Pick (bkz. [21]) ve $|a_3| \le (k^2+2)/3$ Lehto [21] tarafından ve $|a_4| \le (1/24)(k^3+8k)$ Schiffer ve Tammi [37] tarafından ispatlanmıştır.

(2.2) ile verilen katsayı tahmini için Lehto [21]

$$\max_{V_k} |a_n(f)| \sim \frac{k^{n-1}}{n!} \quad (k \to \infty)$$

sonucunu elde etmiştir. Kirwan [20] bu varsayım için $f \in V_k$ ve $c(k) = e2^{\frac{k}{2}-2}$ olması durumunda $c(k) \to \infty$ ve $n \to \infty$ için

$$|a_n| \le c(k) n^{\frac{1}{2}k-1} \ (n = 2, 3, \ldots)$$

eşitsizliğini bulmuştur. Sonuç V_k sınıfı için katsayısı tahmini $n \to \infty$ iken

$$\max_{V_k} |a_n(f)| = o\left(n^{\frac{1}{2}k-1}\right)$$

olarak verilmiştir (bkz. [34]). Robertson [34], $f \in V_k$ ve $k \geq 2$ için

$$|a_n| < (k^2 + k)\left(\frac{2n}{3}\right)^{\frac{1}{2}k-1} \quad (n = 2,3,\ldots)$$

ve

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n^{\frac{1}{2}k-1}} \leq \frac{k^2+k}{16}\left(\frac{4e}{k+4}\right)^{\frac{k+4}{2}}$$

sonuçlarını elde etmiştir.

Brannan [7], Kirwan'ın [20] sonucu üzerine çalışmış ve n sıralı değerleri için varsayımı genellemeye çalışmıştır. Brannan, Gama fonksiyonunun özelliklerinden yararlanarak bu varsayımın daha büyük indeksler için doğruluğunu ispatlamıştır.

Brannan'ın çalışmasında temel aldığı araç aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 2.2.1: $f(z)$ fonksiyonun V_k sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$f'(z) = \frac{(s_1/z)^{\frac{1}{4}k+\frac{1}{2}}}{(s_2/z)^{\frac{1}{4}k-\frac{1}{2}}}$$

olacak şekilde $s_1(z), s_2(z) \in S^*$ fonksiyonlarının var olmasıdır [7].

Teorem 2.2.2: $f \in V_k$ olsun. Ayrıca $0 < r < 1$ ve $\left(\frac{1}{2}k+1\right)\lambda > 1$ olmak üzere

$$I_\lambda(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f'(re^{i\theta})\right|^\lambda d\theta$$

verilsin. Bu durumda

$$A(k,\lambda) = \frac{2^{\left(\frac{1}{2}k-1\right)\lambda}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}k\lambda+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}k\lambda+\frac{1}{2}\lambda-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}k\lambda+\frac{1}{2}\lambda\right)}$$

olmak üzere

$$\limsup_{r\to 1}(1-r)^{\left(\frac{1}{2}k-1\right)\lambda-1} I_\lambda(r) \le A(k,\lambda)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $A(k,\lambda)$ en iyi sınırdır ve Γ Euler Gama fonksiyonudur [7].

Hayman [17] tarafından verilen $|a_n| < \frac{e}{n} I_1\left(1-\frac{1}{n}\right)$ eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\limsup_{n\to\infty}\left(n^{1-\frac{1}{2}k}|a_n|\right) \le \frac{e2^{\frac{1}{2}k}\Gamma(k/4+1)}{\pi^{1/2}(k-1)\Gamma(k/4+1/2)}.$$

Buradan $k\to\infty$ için

$$\frac{\Gamma(k/4+1)}{(k-1)\Gamma(k/4+1/2)} \sim k^{-1/2}$$

dır (bkz [7]).

Bu sonucu kullanarak Brannan aşağıdaki sonucu vermiştir.

<u>Teorem 2.2.3:</u> $f(z)$ fonksiyonu (1.1) şeklinde verilsin. Bu durumda

$$a_n \sim \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k\Gamma\left(\frac{1}{2}k\right)} n^{\frac{1}{2}k-1}$$

doğrudur [7].

<u>Teorem 2.2.4:</u> $f\in V_k$, $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$ ve

$$L(r)=\int_0^{2\pi} r\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta$$

$f\left(|z|=r\right)$ nin uzunluğu olsun. Bu durumda

$$2M(r) < L(r) < 2^{3/2}(2k+1)M(r)$$

eşitsizliği sağlanır [7].

Buradan yola çıkarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 2.2.5: $f \in V_k$ olsun. Bu durumda eğer $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ ise

$$|a_n| < \frac{e}{n\pi} 2^{\frac{1}{2}}(2k+1)M(1-\frac{1}{n}) \quad (n > 1)$$

eşitsizliği sağlanır [7].

Bundan sonraki teoremlerde $L(r) = rI_1(r)$ kabulü kullanılacaktır. Paatero [27], $f(z) \in V_k$ fonksiyonunun katsayılarının modüllerinin (2.1) fonksiyonun katsayılarını aşmadığı varsayımını ortaya atmıştır.

Bu bilgiler ışığında aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 2.2.6: $f \in V_k$ ve $f'(z) = \dfrac{(s_1/z)^{\frac{1}{4}k+\frac{1}{2}}}{(s_2/z)^{\frac{1}{4}k-\frac{1}{2}}}$ olsun. Bazı $|t| = 1$ için $s_1(z) = z(1-tz)^{-2}$ olmadıkça $n \to \infty$

$$a_n = o\left(n^{\frac{1}{2}k-1}\right)$$

doğrudur [7].

Ayrıca eğer $\dfrac{1}{s_2(z)}$, $z = \dfrac{1}{t}$ noktasına yakın bir noktada sürekli ise katsayı varsayımının yeterince büyük indeksler için kesinlikle doğru olduğu gözlemlenir.

Böylece V_k sınıfına ait bir fonksiyon için yapılan katsayısı tahmininin nasıl oluşturulduğu ve fonksiyonların katsayıları ile arasındaki ilişkinin ne olduğu görülmüştür. Tez çalışmamız için esas olan Brannan varsayımının temelini oluşturan (2.1) ile verilen $f_k(z)$

fonksiyonunun genelleştirilmiş versiyonu bu varsayımın ispatında oldukça önemli bir rol oynar. Aşağıdaki alt bölümde bu genelleştirilme açık olarak verilmiştir.

2.3 V_k Sınıfı İçin Genel Katsayı Problemi

1973 yılında Brannan, Clunie ve Kirwan [10] bir önceki bölümde verilen katsayı tahminini farklı bir açıdan incelemeye almışlar ve temel olarak V_k sınıfını güçlü konvekse yakın fonksiyonların sınıfı $\tilde{K}(\alpha)$ ile ilişkilendirerek (2.1) ile tanımlanan fonksiyonu Herglotz formülü ile genelleştirmişlerdir. Bu genelleme sonucunda (2.2) ile verilen tahminin yeni bir versiyonunu elde etmişlerdir. Onlar $\alpha \geq 1$ şartıyla

$$\left[\frac{1+xz}{1-z}\right]^{\alpha} \prec \left[\frac{1+z}{1-z}\right]^{\alpha} \quad (|x|=1) \tag{0.3}$$

subordinasyonunu ele almışlardır. Burada

$$\left(\frac{1+xz}{1-z}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\alpha, x) z^n$$

şeklindedir. Dolayısıyla (2.2) ile verilen katsayı eşitsizliğini $n \geq 1$ için $|B_n(\alpha, x)| \leq B_n(\alpha, 1)$ problemine indirgemişlerdir.

Bu genellemenin ortaya çıkış aşamalarına geçilmeden önce aşağıdaki teoremin bir sonucu olan klasik Herglotz formülü verilmiştir.

<u>Teorem 2.3.1:</u> $f \in H(U)$ olsun. Birim diskte $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ olması için gerek ve yeter şart $[0, 2\pi]$ aralığında $\mu(2\pi) - \mu(0) = \operatorname{Re} f(0)$ ve $z \in U$ için azalan olmayan μ fonksiyonu için

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}} d\mu(t) + i \operatorname{Im} f(0) \tag{0.4}$$

olmasıdır (bkz. [11]).

Sonuç 2.3.2: (Herglotz formülü) $p(0)=1$ şartıyla $p \in H(U)$ olsun. $p \in P$ olması için gerek ve yeter şart $[0,2\pi]$ aralığında $\mu(2\pi)-\mu(0)=1$ koşuluyla azalan olmayan μ fonksiyonu için

$$p(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}d\mu(t)$$

olmasıdır (bkz. [11]).

Şimdi genellemenin ortaya çıkış aşamalarını inceleyelim.

Öncelikle kolayca görülebilir ki; $f \in \tilde{K}(\beta)$ olması için gerek ve yeter şartın

$$zf'(z)=[p(z)]^{\beta} g(z) \tag{0.5}$$

olacak şekilde $p \in P$ olmasıdır.

Teorem 2.1.4'den, eğer $f \in V_k$ ise bu durumda

$$zf'(z)=[p(z)]^{\frac{k}{2}-1} g(z)$$

olacak şekilde $p \in P$ ve $g \in S^*$ fonksiyonları vardır. Bu eşitlikten $f \in V_k$ nın katsayı sınırını bulmak için $[p(z)]^{\frac{k}{2}-1}$ ve $g(z)$ fonksiyonlarının katsayı sınırlarını bilmek yeterlidir. Teorem 1.2.2.6 dan $g \in S^*$ nin katsayıları bellidir. Geriye $[p(z)]^{\frac{k}{2}-1}$ nın sınırını bulmak kalmıştır.

Bunun için $[p(z)]^{\alpha}$ ifadesini gözönüne alalım.

Bir sonraki teoreme geçmeden önce teoremin ispatında kullanılacak olan lineer topolojik uzaylarla ilgili bazı bilgiler verelim.

E 'nin ekstremum noktalarının kümesi $extE$, konveks kabuğunu (E kümesini kapsayan en küçük konveks küme) coE ve kapalı konveks kabuğunu da $\overline{coE}$ ile gösterelim. Krein-Milmam [13] Teoremi diyor ki; Eğer E yerel konveks bir lineer uzayın bir kompakt konveks alt kümesi ise bu durumunda $E=\overline{coE}$ dır.

Teorem 2.3.3: $|x| \leq 1$ ve E kümesi de

$$T(z) = \frac{1+xz}{1-z}$$

fonksiyonuna subordine olan fonksiyonların kümesi olsun. Eğer $\alpha \geq 1$ ve $h(z) \in E$ ise bu durumda

$$[h(z)]^{\alpha} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1+xe^{it}z}{1-e^{it}z} \right]^{\alpha} d\mu(t)$$

olacak şekilde $[0, 2\pi]$ aralığında $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$ koşulunu sağlayan $\mu(t)$ artan fonksiyonu vardır [10].

İspat: Sonuç 2.3.2 de Herglotz formülünden $h(z) \in E$ olduğu için

$$h(z) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1+xe^{it}z}{1-e^{it}z} \right] d\mu(t)$$

olacak şekilde $[0, 2\pi]$ aralığında $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$ koşulunu sağlayan $\mu(t)$ artan fonksiyonu vardır. Böylece $extE$

$$\frac{1+xe^{i\varphi}z}{1-e^{i\varphi}z} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

fonksiyonlarından oluşur.

$E_{\alpha} = \left\{ [h(z)]^{\alpha} : h(z) \in E \right\}$ olsun. Montel teoreminden, U 'da analitik olan fonksiyonlar uzayında E_{α} ve $\overline{co}E_{\alpha}$ kompaktır. Dolayısıyla bu fonksiyon uzayı yerel konvekstir. Böylece, Krein- Milmam [13] teoreminden eğer $g(z) \in ext[\overline{co}E_{\alpha}]$ ise $g(z) \in E_{\alpha}$ dir. Buradan $g(z) = [h(z)]^{\alpha} \in E_{\alpha}$ ve $h(z) \notin extE$ olur. Dolayısıyla, E 'de

$$\begin{aligned} g(z) &= [h(z)]^{\alpha-1} h(z) \\ &= [h(z)]^{\alpha-1} \{ t h_1(z) + (1-t) h_2(z) \} \\ &= t [h(z)]^{\alpha-1} h_1(z) + (1-t) [h(z)]^{\alpha-1} h_2(z) \end{aligned}$$

olacak şekilde iki farklı $h_1(z)$ ve $h_2(z)$ fonksiyonları ve $0 < t < 1$ aralığında t vardır. $[h(z)]^{\alpha-1} h_1(z)$ ve $[h(z)]^{\alpha-1} h_2(z)$ fonksiyonları E_α 'de iki farklı fonksiyonlar olduğundan $g(z)$, E_α 'nın bir ekstremum noktası değildir. Böylece, E_α 'nın bir ekstremum noktası

$$\left[\frac{1+xe^{i\varphi}z}{1-e^{i\varphi}z}\right]^{\alpha} \quad \left(0 \le \varphi \le 2\pi\right) \tag{0.6}$$

şeklinde olmalıdır. Krein-Milman Teoreminden $\overline{co}E_\alpha$, (2.6) ‘da verilen fonksiyonların kapalı konveks kabuğudur. Buradan eğer $h(z) \in \overline{co}E_\alpha$ ise bu durumda

$$h_n(z) = \sum_{j=1}^{\sigma(n)} t_{j,n} \left[\frac{1+xe^{i\varphi_j}z}{1-e^{i\varphi_j}z}\right]^{\alpha}$$

şeklinde $\left(h_n(z)\right)$ dizisi vardır. Burada $t_{j,n} > 0$, $\sum_{j=1}^{\sigma(n)} t_{j,n} = 1$ ve $|z| < 1$'de $\lim_{n\to\infty} h_n(z) = h(z)$ yerel düzgün yakınsamadır. $t_{j,n}$ ler φ_t 'ye sıçrarken $[0, 2\pi]$ aralığında $\mu_n(t)$, bir artan fonksiyon olup

$$h_n(z) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1+xe^{it}z}{1-e^{it}z}\right]^{\alpha} d\mu_n(t)$$

şeklinde ifade edilir.

Böylece Helly Selection teoreminden, $(\mu_n(t))$ nin bir alt dizisinin $[0, 2\pi]$ aralığında noktasal yakınsadığı ve bu aralıkta artan bir $\mu(t)$ fonksiyonu vardır. Sonuç olarak

$$h(z) = \lim_{n\to\infty} h_n(z) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1+xe^{it}jz}{1-e^{it}jz}\right]^{\alpha} d\mu(t)$$

yazılır. Özellikle $h(z) \in E_\alpha$ olduğundan son eşitlik doğrudur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 2.3.4: U diskinde

$$h(z) \prec \frac{1+xz}{1-z}$$

olsun. Bu durumda $\alpha \geq 1$ olmak üzere

$$\left[h(z)\right]^{\alpha} \prec \left[\frac{1+xz}{1-z}\right]^{\alpha}$$

sağlanır [10].

Brannan, Clunie ve Kirwan [10] çalışmalarında $\tilde{K}(\beta)$ sınıfının Herglotz formülü ile ilişkisini aşağıdaki lemmada vermiştir.

Lemma 2.3.5: $f(z) \in \tilde{K}(\beta)$ $(\beta > 0)$ ve

$$zf'(z) = \left[p(z)\right]^{\beta} g(z) \qquad (p(0) = b) \tag{0.7}$$

olsun. Bu durumda $\left[0, 2\pi\right]$ aralığında $\mu\left(2\pi\right) - \mu\left(0\right) = 1$ şartını sağlayan artan bir $\mu(t)$ için

$$f'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \int_{0}^{2\pi} \frac{1+e^{it}z}{1-e^{it}z} [p(z)]^{\beta} e^{2ijt} d\mu(t) \right\} z^{2j}$$

doğrudur [10] .

İspat: $c(z) = z + a_2 z^2 + ... \in C$ olsun. Bu durumda Strochhacker'in [39] sonucuna göre $\operatorname{Re} c(z) > \dfrac{1}{2}$ ve $\left[0, 2\pi\right]$ aralığında $\mu\left(2\pi\right) - \mu\left(0\right) = 1$ koşuluyla artan $\mu(t)$ için Herglotz formülünden

$$c(z) = \int_{0}^{2\pi} \frac{z}{1-e^{it}z} d\mu\left(t\right)$$

yazılır. Teorem 1.2.2.9 a göre $g(z) = zc'(z) \in S^*$ olup, buradan

$$g(z) = \int_{0}^{2\pi} \frac{z}{(1-e^{it}z)^2} d\mu\left(t\right)$$

elde edilir. $f(z) \in \tilde{K}(\beta)$ olduğundan (2.7) den

$$f'(z) = [p(z)]^{\beta} \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{it}z}{1-e^{it}z} \frac{1}{1-e^{2it}z^2} d\mu(t)$$

bulunur. Sonuç olarak $(1-e^{2it}z^2)^{-1}$ ifadesi z^2 nin kuvvetine göre açılırsa istenilen sonuç elde edilmiş olur.

$\tilde{K}(\beta)$ sınıfı için katsayı sonucu aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.3.6: $\beta = \dfrac{k}{2} - 1 > 0$ koşuluyla $f(z) \in \tilde{K}(\beta)$ ve $p(0) = 1$ için

$$zf'(z) = [p(z)]^{\beta}\, g(z)$$

olsun. Bu durumda, (1.2)'de tanımlanan $f_k(z)$ için $f(z) \prec f_k(z)$ doğrudur [10].

3 BULGULAR

Bu bölümde Brannan varsayımının oluşma aşamaları ve üzerine yapılan farklı çalışmalar kronolojik olarak incelenmiştir. İlk olarak varsayımı ifade edelim.

Giriş bölümünde de ifade edildiği üzere V_k sınıfına ait (1.1) şeklindeki

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

fonksiyonu ile yine bu sınıfına ait $k \geq 2$ ve $|z| < 1$ için

$$f_k(z) = \frac{1}{k}\left\{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{k/2} - 1\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n$$

fonksiyonun katsayıları arasında

$$|a_n| \leq A_n$$

eşitsizliğin doğru olup olmadığı VARSAYIMI ortaya atılmıştır (bkz Lehto [21]).

Varsayımın doğruluğu $n = 2$ için Pick tarafından , $n = 3$ için Lehto tarafından, $n = 4$ için de 1967 yılında Schiffer ve Tammi [37] ve bağımsız olarak 1968 yılında Lonka ve Tammi [22] tarafından yapılmıştır (bkz. [1,10]).

1972 yılında Noonan [26] bu varsayıma farklı bir açıdan yaklaşarak $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{A_n} < 1$ olduğunu göstermiştir. Yalnız bu eşitsizlik reel bazı φ değeri için $f(z) = e^{-i\varphi} f_k(e^{i\varphi} z)$ fonksiyonu için sağlamaz.

1973 yılında Brannan, Clunie ve Kirwan [10], bu varsayımı daha farklı bir yol izleyerek ele almıştır. Bunun için öncelikle şunların bilinmesinde ve hatırlanmasında fayda vardır: Eğer $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ve $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n$ fonksiyonları U birim diskinde analitik ve $g(z) \prec G(z)$ ise bu durumda $|b_n| \leq |B_n|$ eşitsizliği sağlanır (bkz [35]). Diğer taraftan

$\beta = \frac{k}{2} - 1 > 0$ için $V_k \subset \tilde{K}(\beta)$ sağlanır. Dolayısıyla varsayımı $f(z) \in \tilde{K}(\beta)$ için $f(z) \prec f_k(z)$ problemine indirgemiş oldular. Şayet bu subordinasyonun doğruluğu ispatlanırsa bu paragraftaki bilgiler doğrultusunda varsayım doğrulanmış olur.

Onlar çalışmasında öncelikle $\alpha \geq 1$, $|x| = 1$ ve $n \geq 1$ değerleri için

$$\left(\frac{1+xz}{1-z}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\alpha, x) z^n \tag{3.1}$$

genel fonksiyonunu göz önüne almışlardır. Burada binom açılımından $n \geq 1$ için her $b_v(n) > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} B_n(\alpha, x) &= \sum_{v=0}^{n} \frac{x(x+1)...(x+n-v-1)}{(n-v)!} \binom{\alpha}{v} x^v \\ &= b_0(n) + b_1(n)x + b_2(n)x^2 + \sum_{v=3}^{n} (-1)^v b_v(n) x^v \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\alpha, 1) z^n$$

dır. Dolayısıyla varsayım $|B_n(\alpha, x)| \leq |B_n(\alpha, 1)|$ eşitsizliğine indirgenmiş olur. Bunun ispatını iki parça şeklinde yapmışlardır. Öncelikle α nın pozitif tamsayı olması durumunda

$$\left(\frac{1+xz}{1-z}\right)^{\alpha} \prec \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} \tag{3.2}$$

olduğunu ispatlamışlardır. Böylece α nın pozitif tamsayı değerleri için $|B_n(\alpha, x)| \leq |B_n(\alpha, 1)|$ doğrudur. Diğer taraftan $1 < \alpha < 2$ için $1 \leq n \leq 13$ olması durumunda

$$|B_n(\alpha, x)|^2 + |B_n(\alpha, -\overline{x})|^2 \leq |B_n(\alpha, 1)|^2 + |B_n(\alpha, -1)|^2 = |B_n(\alpha, 1)|^2 \tag{3.3}$$

eşitsizliğini ispatlayarak $1 < \alpha < 2$ için $|B_n(\alpha, x)| \leq |B_n(\alpha, 1)|$ olduğunu ispatlamışlardır. Bunu benzer şekilde $m < \alpha < m+1$ $(m = 2, 3, ...)$ durumuna genişletmişlerdir. Sonuç olarak Brannan, Clunie ve Kirwan [10] $1 \le n \le 13$ için $|B_n(\alpha, x)| \le |B_n(\alpha, 1)|$ eşitsizliğin doğruluğunu göstererek aslında $2 \le n \le 14$ değerleri için (1.3) varsayımın doğru olduğunu göstermişlerdir.

1972 yılında Aharanov ve Friedland [1] $\alpha \ge 1$, $|x| = 1$ ve $n \ge 1$ değerleri için

$$\frac{(1+xz)^{\alpha}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\alpha, x) z^n \tag{3.4}$$

fonksiyonu üzerinde çalışmışlardır. Burada $C_n(\alpha, x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$ dır. Onlar, Brannan, Clunie ve Kirwan'ın çalışmasındaki yönteme benzer olarak $\alpha \ge 1$, $|x| = 1$ ve $n \ge 1$ değerleri için

$$\frac{(1+xz)^{\alpha}}{1-z} \prec \frac{(1+z)^{\alpha}}{1-z} \tag{3.5}$$

subordinasyonun doğruluğunu araştırmışlardır. Çünkü bu subordinasyon aynı zamanda tüm $n \ge 1$ değerleri için (3.2) nin doğruluğunu garanti eder. Diğer taraftan (3.5) problemi aynı zamanda

$$|C_n(\alpha, x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k \right| \le \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} = C_n(\alpha, 1)$$

eşitsizliğine denktir. Bu eşitsizliği $x = e^{i\theta}$ olmak üzere θ yı $0 \le \theta \le \frac{\pi}{n}$ ve $\frac{\pi}{n} \le \theta \le \pi$ aralıklarına bölerek ispatlamıştır. İspatlarda genellikle trigonometrik fonksiyonlar ve eşitsizlikleri, Gama ve Beta fonksiyonu ve Binom katsayılarının integral temsili kullanılmıştır. Böylece $\alpha \ge 1$, $|x| = 1$ ve $n \ge 1$ değerleri için (3.5) ispatlanmış oldu. Nihayetinde Aharanov ve Friedland'ın bu sonucu Brannan, Clunie ve Kirwan'ın sonucuyla birleştirildiğinde $|B_n(\alpha, x)| \le |B_n(\alpha, 1)|$ varsayımın doğruluğu $\alpha \ge 1$, $|x| = 1$ ve tüm $n \ge 1$ değerleri için ispatlanmıştır. Aynı değerler için Brannan [8] çalışmasında (3.5) in kısa bir ispatını vermiştir.

Yalnız $0 < \alpha < 1$, $|x| = 1$ ve $n \ge 1$ değerleri için varsayım ispatlanamamıştır.

Tüm bu çalışmaları bir arada değerlendiren Brannan [8] literatürde kendi adıyla anılan bir varsayımı ortaya koymuştur.

1973 yılında Brannan [8] çalışmasında (3.1) ve (3.4) fonksiyonlarının daha genel bir versiyonu olan $|x|=1$ ve $\alpha,\beta>0$ için

$$\frac{(1+xz)^{\alpha}}{(1-z)^{\beta}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\alpha,\beta,x)z^n \tag{3.6}$$

fonksiyonunu gözönüne almıştır. (3.6) fonksiyonu $\alpha=\beta$ için (3.1)'e ve $\beta=1$ için de (3.4) fonksiyonuna indirgenir. Şimdi $A_n(\alpha,\beta,x)$ katsayının karşılığına ve bazı özelliklerine bakalım.

Binom açılımından

$$(1+xz)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)_n(-x)^n}{n!}z^n$$

ve

$$(1-z)^{-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta)_n}{n!}z^n$$

olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla seriler için Cauchy çarpımından

$$\begin{aligned}\frac{(1+xz)^{\alpha}}{(1-z)^{\beta}}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-\alpha)_k(\beta)_{n-k}}{k!(n-k)!}(-x)^k\right)z^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\alpha,\beta,x)z^n\end{aligned} \tag{3.7}$$

yazılır. Burada $n\geq 0$ için

$$\begin{aligned}A_n(\alpha,\beta,x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-\alpha)_k(\beta)_{n-k}}{k!(n-k)!}(-x)^k\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{-\beta}{n-k}\binom{\alpha}{k}x^k\end{aligned}\qquad \left(A_0(\alpha,\beta,x)=1\right) \tag{3.8}$$

dır.

Matematikte çok sıkça kullanılan Pochammer sembolü $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$$

şeklinde tanımlanır.

Dolayısıyla $(n-k)! = (1)_{n-k}$ ve $(a)_{n-k} = \dfrac{(a)_n (-1)^k}{(1-a-n)_k}$ eşitlikleri kullanılarak

$$A_n(\alpha,\beta,x) = \frac{(\beta)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(\alpha)_k}{(1-\beta-n)_k\, k!}(-x)^k$$

elde edilir. Pochammer sembolünün özelliklerinden $A_n(\alpha,\beta,x)$ katsayıları için rekürans bağıntısı

$$A_n(\alpha,\beta,x) + xA_{n-1}(\alpha,\beta,x) = A_{n+1}(\alpha+1,\beta,x)$$

şeklindedir.

Bunların yanısıra $A_n(\alpha,\beta,x)$ katsayısı Gauss hipergeometrik fonksiyonlar ve Jacobi polinomları cinsinden de yazılabilir. Bilindiği üzere Gauss hipergeometrik fonksiyon

$${}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k\, k!}x^k$$

ve Jacobi polinomları

$$P_n(\alpha,\beta;x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece

$$A_n(\alpha,\beta,x) = \frac{(\beta)_n}{n!}\,{}_2F_1(-n,-\alpha;1-\beta-n;x)$$

$$A_n(\alpha,\beta,x) = (-1)^n P_n(-\beta-n, \beta-\alpha-1; 2z+1)$$

$$A_n(\alpha,\beta,x) = x^n P_n\left(\alpha-n, \beta-\alpha-1; 1+\frac{2}{x}\right)$$

elde edilir. Gauss hipergeometrik fonksiyonlar için Pfaff's dönüşümü

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = (1-x)^{-a}\ {}_2F_1\left(a, c-b, c; \frac{x}{x-1}\right) \qquad (c \neq 0, -1, -2\ldots) $$

kullanılarak

$$ A_n(\alpha, \beta, x) = \frac{(\beta)_n}{n!}(1+z)^{\alpha}\ {}_2F_1\left(-\alpha, 1-\beta; 1-\beta-n; \frac{x}{x+1}\right) $$

yazılır.

Özel durumda $\beta = 1$ alınırsa

$$ A_n(\alpha, 1, x) = (1+x)^{\alpha}\left(1 + \frac{(-1)^n(-\alpha)_{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{n+1}\right) {}_2F_1\left(n+1, n+1-\alpha; n+2; \frac{x}{x+1}\right) $$

bulunur [25].

Diğer taraftan Brannan [8] ilk etapta $A_n(\alpha, \beta, x)$ katsayı varsayımını (tahminini) genel olarak $|x| = 1$ ve $\alpha, \beta > 0$ için

$$ |A_n(\alpha, \beta, x)| \leq A_n(\alpha, \beta, 1) \quad (n \geq 1) $$

şeklinde vermiştir.

Bu tahmin yukarıda da bahsedildiği üzere $\alpha, \beta \geq 1$ şartı altında tüm $n \geq 1$ değerleri için Brannan, Clunie ve Kirwan [10] ve Aharanov ve Friedland [1] tarafından ispatlanmıştır. Dolayısıyla $|A_n(\alpha, \beta, x)| \leq A_n(\alpha, \beta, 1)$ varsayımını $0 < \alpha < 1$ ve $\beta \leq 1$ şartları altında ispatlamak gerekir.

Brannan, bu varsayım ile ilgili ilk çalışmayı kendisi yapmıştır.

Brannan ilk olarak standart majör minör yönteminden yararlanılarak $\alpha > 0,\ \beta > 0$ $|x| = 1$ olduğunda sabit x $(x \neq 1)$ ve $n > n_0$ için $|A_n(\alpha, \beta, x)| \leq A_n(\alpha, \beta, 1)$ olacak şekilde $n_0 = n_0(x, \alpha, \beta)$ sayısının varlığına dikkat çekmiştir. Yukarıda da belirtildiği üzere Brannan, Clunie ve Kirwan [10] ve Aharanov ve Friedland [1] ın çalışmalarından varsayımın $\alpha+\beta \geq 2$ için doğru olduğu açıktır. Dolayısıyla $\alpha+\beta<2$ için doğruluğunu araştırmak gerekir. Genel olarak incelendiğinde ise varsayım yanlış fakat özel durumlar için doğruluğunu korumaktadır.

Örneğin; $|x|=1$ ve $\alpha+\beta<2$ için

$$|A_1(\alpha,\beta,x)| = |ax+\beta| \leq A_1(\alpha,\beta,1)$$

yazılır. Brannan [8] ikinci katsayı olan $A_2(\alpha,\beta,x)$ 'nin doğruluğunu araştırmış ve sonuç için aşağıdaki lemmayı kullanmıştır.

Lemma 3.1: $a>0$, $b>0$, $|x|=1$ ve $p(x)=a+x-bx^2$ olsun. Bu durumda $|p(x)| \leq |p(1)|$ (eşitlik için $x=1$) olması için gerek ve yeter şart $4ab \leq a-b$ olmasıdır [8].

Lemma 3.1 yardımıyla aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

Teorem 3.2: $0<\alpha<1$ olsun. Bu durumda;

i. Eğer $\beta=1$ ise $\max\limits_{|x|=1} |A_2(\alpha,\beta,x)| = A_2(\alpha,\beta,1)$ olması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{2}\left(\sqrt{17}-3\right) \leq \alpha < 1$ olmasıdır,

ii. Eğer $\beta=\alpha+1$ ise $\max\limits_{|x|=1} |A_2(\alpha,\beta,x)| = A_2(\alpha,\beta,1)$ olması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) \leq \alpha < 1$ olmasıdır,

iii. Eğer $\beta=\alpha$ ise $\max\limits_{|x|=1} |A_2(\alpha,\beta,x)| \leq A_2(\alpha,\beta,1)$ olması için gerek ve yeter şart $1/\sqrt{2} \leq \alpha < 1$ olmasıdır [8].

Brannan aynı çalışmada kuadratik polinomlar için verilen eşitsizlik yardımıyla $\beta=1$ olma durumu için aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

Teorem 3.3: $0<\alpha<1$ ve $|x|=1$ olsun. Bu durumda;

i. $|A_3(\alpha,1,x)| \leq A_3(\alpha,1,1)$ dir. Eşitlik $x=1$ için sağlanır,

ii. $n>n_\alpha$ için

$$\max_{|x|=1} \operatorname{Re} A_{2n}(\alpha,1,x) > A_{2n}(\alpha,1,1)$$

olacak şekilde bir n_α sayısı vardır,

iii. Verilen bir α ve bir $n>1$ için $\theta=0$ 'ın öyle bir N komşuluğu vardır ki

$$\max_{\theta\in N} \operatorname{Re} A_{2n+1}(\alpha,1,e^{i\theta}) = A_{2n+1}(\alpha,1,1)$$

dır,

iv. $n>n_0$ (n_0 sabit) olmak üzere $\alpha_n<\alpha<1$ aralığındaki tüm α için

$$\max_{\theta\in N(n)} \left|A_n(\alpha,1,e^{i\theta})\right| \le A_n(\alpha,1,1)$$

olacak şekilde bir α_n ve $\theta=0$ 'ın bir $N(n)$ komşuluğu vardır [8].

Sonuç olarak Teorem 3.3 ün i şıkkından Brannan, varsayımı $n=3$ için doğrulamıştır.

Teorem 3.3 ün ii şıkkından (1.4) eşitsizliğinin n nin çift doğal sayı olması durumunda sağlamadığı açıktır. Böylece problemi son olarak şu şekilde güncellemiştir:

Brannan Varsayımı: $0<\alpha<1$ ve $\beta\le 1$ için $\left|A_{2n-1}(\alpha,\beta,x)\right| \le \left|A_{2n-1}(\alpha,\beta,1)\right|$ $(n\in\mathbb{N})$ eşitsizliği doğru mudur? [8].

Bu varsayım literatürde bundan sonra Brannan Varsayımı olarak yerini almaktadır. Brannan $2n-1=3$ yani $n=2$ için bu varsayımı ispatlamıştır. Bundan sonra *"varsayım"* denildiğinde *"Brannan varsayımı"* anlaşılacaktır. Bu varsayım üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Çünkü ispatlamak öyle kolay değildir. Birçok farklı teknik ve yöntem gerekir. Ancak konuyla alakadar olan çalışmacılar α,β ve n nin özel durumlarına göre varsayımı ispatlamışlardır. Nihayi noktayı 2020 yılında Deniz, Çağlar ve Szasz [12] koymuştur. Bundan sonraki yazılanlar tamamiyle Brannan varsayımının ispatının tarihsel serüveni üzerine olacaktır.

1989 yılında yayımlanan makalesinde Milcetich [24] $n=3$ alarak $A_5(\alpha,\beta,x)$ için varsayımı ispatlamıştır. O teknik olarak trigonometrik toplamların pozitifliğinden faydalanmıştır. Şöyle ki;

$x=e^{i\theta}$ için $h(\theta)=\dfrac{A_n^2(\alpha,\beta,1)-\left|A_n(\alpha,\beta,x)\right|^2}{2}$ fonksiyonunu göz önüne almıştır. Buradan bazı hesaplamalarla

$$c_j = \sum_{m=0}^{n-j} \binom{\alpha}{m} \binom{\alpha}{m+j}$$

olmak üzere

$$h(\theta) = 2\sum_{j=1}^{n} c_j \sin^2\left(j\theta/2 \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} c_j - \sum_{j=1}^{n} c_j \cos j\theta$$

yazılır. Milcetich $n=5$ alarak θ $(\theta \neq 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z})$ için $h(\theta)$'nın kesin pozitifliğini göstermiştir. Böylece aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

Teorem 3.4: $0 < \alpha < 1$ ve $|x| = 1$ olsun. Bu durumda $|A_5(\alpha,1,x)| \leq A_5(\alpha,1,1)$ dir. Eşitlik $x=1$ için sağlanır [24].

1997 yılında Barnard, Pearce ve Wheeler [4], Milcetich'in çalışmasını bir üst adıma taşıyarak varsayımı $\beta = 1$ koşuluyla $n=4$ için ($A_7(\alpha,\beta,x)$ katsayısı) ispatlamıştır. Onlar $A_n(\alpha,\beta,x)$ katsayılarını farklı bir şekilde yazarak varsayımı Sturm dizileri üzerinden MAPLE programını kullanarak ispatlamıştır. Şöyle ki;

(3.7) de $\beta = 1$ alınır ve $(n-k)! = (1)_{n-k}$ özelliği kullanılırsa

$$\frac{(1+xz)^{\alpha}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\alpha)_k (-1)^k x^k}{k!} \right) z^n$$

yazılır. Aslında Brannan varsayımı bir anlamda

$$A_{2n-1}^2(\alpha,\beta,1) - \left| A_{2n-1}(\alpha,\beta,x) \right|^2 \geq 0$$

eşitsizliğine denktir. Burada $\beta = 1$ için

$$F_{2n-1}(\alpha,1,x) = A_{2n-1}^2(\alpha,1,1) - \left| A_{2n-1}(\alpha,1,x) \right|^2$$

olsun. Dolayısıyla $F_{2n-1}(\alpha,1,x) \geq 0$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$2n-1=3$ ve $2n-1=5$ olma durumu için $F_3(\alpha,1,x)$ ve $F_5(\alpha,1,x)$ fonksiyonlarının negatif olmama durumu yukarıda da bahsedildiği üzere sırasıyla Brannan ve Milcetich tarafından verilmişti. Barnard, Pearce ve Wheeler ise $2n-1=7$ alarak $0<\alpha<1$ aralığında $F_7(\alpha,1,x)\geq 0$ olduğunu ispatlamıştır. Onlar $0<\alpha<1$ aralığını $0<\alpha<2/5$ ve $2/5\leq\alpha<1$ aralıklarına parçalayarak ispatı vermişlerdir. Böylece verilen ispat Milcetich'in verdiği ispattan daha kolay olmuştur.

İspatta teknik olarak kısaca şöyle bir yol izlemişlerdir;

$$\delta_j=\begin{cases}1 & (0\leq j\leq N),\\ 0 & (N+1\leq j)\end{cases}$$

olmak koşuluyla $F_N(\alpha,x)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned}F_N(\alpha,x)&=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-\alpha)_k(-1)^k}{k!}\sum_{k=0}^{N}\frac{(-\alpha)_k(-1)^k}{k!}-\sum_{k=0}^{N}\frac{(-\alpha)_k(-1)^k x^k}{k!}\sum_{k=0}^{N}\frac{(-\alpha)_k(-1)^k \overline{x}^k}{k!}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-\alpha)_j(-\alpha)_{k-j}(-1)^k\delta_j\delta_{k-j}}{k!(k-j)!}\\&-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-\alpha)_j(-\alpha)_{k-j}(-1)^k\delta_j\delta_{k-j}\cos((2j-k)\theta)}{k!(k-j)!}\end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Bu fonksiyonun *m*. kısmi toplamı

$$\begin{aligned}F_N^m(\alpha,x)&=\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-\alpha)_j(-\alpha)_{k-j}(-1)^k\delta_j\delta_{k-j}}{k!(k-j)!}\\&-\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-\alpha)_j(-\alpha)_{k-j}(-1)^k\delta_j\delta_{k-j}\cos((2j-k)\theta)}{k!(k-j)!}\end{aligned}$$

olur. Bu kısmi toplam Wheeler [43] tarafından tanımlandı. O, bu kısmi toplamın birçok özelliğini verdi. Özel olarak $0<\alpha<1$ aralığında $m>m_\alpha$ için

$$\max_{|x|=1}F_N^{2m}(\alpha,x)<0$$

şartının sağlandığı bir m_α nın varlığını ispatladı. Ek olarak $m=1,2,3$ *ve* 5 için bilgisayar programlarını kullanarak $0<\alpha<1$ için

$$F_N^m(\alpha, x) \geq 0$$

olduğunu göstermiştir.

Buradan $N = 2n-1$ alınırsa $F_N(\alpha, x) = F_{2n-1}(\alpha, 1, x)$ olur. Barnard, Pearce ve Wheeler yaptıkları bu çalışmada $N = 2n-1 = 7$ ve $m = 13$ alarak ve bilgisayar hesaplama programını (MAPLE) ve Sturm dizilerin özelliklerini kullanarak $0 < \alpha < 1$ için $F_7(\alpha, 1, x) \geq 0$ olduğunu ve dolayısıyla $\left|A_7(\alpha, 1, x)\right| \leq A_7(\alpha, 1, 1)$ ın sağlandığını göstermiş oldular.

2006 yılında Ruscheweyh ve Salinas [36] $\alpha = \beta$ kabulüyle varsayımı tüm n tek doğal sayı değerleri için ispatlamış ve ayrıca varsayımın farklı bir versiyonu üzerine de bir sonuç vermiştir. İspatlarda Gauss hipergeometrik fonksiyonların özellikleri çok önemli bir araç olmuştur. Hatta çalışmada bununla alakalı aşağıdaki sonucu da ispatlamışlardır.

<u>Lemma 3.5:</u> $a, b > 0$ ve $a + b \leq 2$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda,

$$q(x)^{\frac{a+b}{2}} \left|{}_2F_1(-2n, a; a+b; 1+x)\right| \leq {}_2F_1(-2n, a; a+b; 2) \quad (|x| = 1)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $q(x) = \left|\dfrac{1+x}{2}\right|$ dır [36].

Ruscheweyh ve Salinas çalışmasında

$$\left(\frac{1+xz}{1-z}\right)^{\lambda} = \left(1 + \frac{(1+x)z}{1-z}\right)^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\lambda}{k} (1+x)^k \left(\frac{z}{1-z}\right)^k$$

seri açılımını kullanarak

$$A_n(\lambda, \lambda, x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \binom{\lambda}{k} (1+x)^k \quad (n \geq 1)$$

elde etmiştir. Todorov'un [41] çalışmasından da

$$A_n(\lambda, \lambda, x) = \lambda(1+x)\, {}_2F_1(1-n, 1-\lambda; 2; 1+x)$$

yazılır. Dolayısıyla Lemma 3.5 de $\alpha = 1-\lambda, \beta = 1+\lambda$ ve n yerine $n-1$ yazılırsa aşağıdaki sonuç bulunur.

Teorem 3.6: Brannan varsayımı $\alpha = \beta =: \lambda \in (0,1)$ için de geçerlidir. Yani $|x| = 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|A_{2n-1}(\lambda, \lambda, x)\right| \leq \left|A_{2n-1}(\lambda, \lambda, 1)\right|$$

eşitsizliği sağlanır [36].

Onlar çalışmasında yine Lemma 3.5 i kullanarak Brannan varsayımına benzer bir sonuç da vermiştir.

Teorem 3.7: $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta \leq 2$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$q(x)^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \left|A_{2n}(-\alpha, \beta, x)\right| \leq \left|A_{2n}(-\alpha, \beta, 1)\right| \qquad (|x| = 1)$$

eşitsizliği sağlanır [36].

Diğer taraftan $A_n'(\alpha, \beta, x) := \dfrac{\partial}{\partial x} A_n(\alpha, \beta, x)$ olmak üzere

$$(1-\alpha) A_n(-\alpha, \beta, x) := A_n'(1-\alpha, \beta, x)$$

yazılır. Bu eşitlik ve Teorem 3.7 den yola çıkarak onlar Brannan varsayımının farklı bir versiyonu daha vermiştir.

Sonuç 3.8: $-1 < \alpha < 1$ ve $0 < \beta \leq 1 + \alpha$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$q(x)^{\frac{1-\alpha+\beta}{2}} \left|A_{2n-1}'(\alpha, \beta, x)\right| \leq \left|A_{2n-1}'(\alpha, \beta, 1)\right| \qquad (|x| = 1)$$

eşitsizliği sağlanır [36].

Brannan varsayımıyla bağlantılı olan bir başka problemi Silverman ve Silvia [38] şu şekilde vermiştir:

$\alpha = \beta =: \lambda$ ve $n \in \mathbb{N}$ çift sayıları için

$$\left|A_n(\lambda, \lambda, x)\right| \leq A_n(\lambda, \lambda, 1) \quad (|x| = 1)$$

olacak şekilde bir tek $\lambda_n \in (0,1)$ vardır. Bu eşitsizlik $\lambda_n \le \lambda \le 1$ için doğru fakat $0 < \lambda < \lambda_n$ için doğru değildir.

Bu problem ilk olarak Silverman ve Silvia [38] tarafından $n = 2$ $\left(\lambda_2 = 1/\sqrt{2}\right)$ için sonra Todorov [41] tarafından $n = 4$ $(\lambda_4 = 0.74)$ için doğrulanmıştır. Ruschewey ve Salinas [36] ise bu probleme daha genel bir bakış açısıyla yanıt vermiştir.

<u>Teorem 3.9:</u> Her $n \in \mathbb{N}$ çift sayıları ve $\lambda \ge \lambda_n^*$ için

$$\left|A_n(\lambda,\lambda,x)\right| \le A_n(\lambda,\lambda,1) \quad (|x| = 1)$$

ve $0 < \lambda < \lambda_n^*$ için

$$\max_{|x|=1} \left|A_n(\lambda,\lambda,x)\right| > A_n(\lambda,\lambda,1)$$

olacak şekilde $0 < \lambda_n^* \le \lambda_n^{**} < 1$ sayıları vardır [36].

Problem $\lambda_n^* = \lambda_n^{**}$ için henüz ispatlanamamıştır.

Teorem 3.6 ve 3.9 dan aşağıdaki sonuç verilir.

<u>Teorem 3.10:</u> $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,

i. $f(0) = 1,\ \lim\limits_{r\to 1} f(r) = 0,$

ii. $\left|\arg\left(e^{i\gamma} f(z)\right)\right| < \frac{1}{2}\lambda\pi$ $(z \in U)$ olacak şekilde $0 < \lambda \le 2$ aralığında $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ var,

iii. $f(U)$ yıldızıl,

koşullarını sağlayan U diskinde ünivalent bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left|a_{2n-1}\right| \le A_{2n-1}(\lambda,\lambda,1) \quad (n \in \mathbb{N})$$

dır. Ayrıca eğer $\lambda \ge \lambda_n^{**}$ ise

$$\left|a_{2n}\right| \le A_{2n}(\lambda,\lambda,1)$$

eşitsizliği sağlanır. Bütün eşitsizlikler $f(z)=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\lambda}$ fonksiyonu için kesindir [36].

2013 yılında Jayatilake [18] $\beta=1$ kabulüyle varsayımı $n\leq 26$ için ispatlamıştır. İspatı $A_n(\alpha,1,x)$'den daha küçük dereceden polinomların pozitifliğini (Sturm dizilerini kullanarak) ve sonrasında Mathematica programından faydalanarak yapmıştır.

Öncelikle Jayatilake, Milcetich [24] in yukarıda bahsedildiği çalışmasından yola çıkarak

$$F_{2n-1}(\alpha,1,x)=A_{2n-1}^{2}(\alpha,1,1)-\left|A_{2n-1}(\alpha,1,x)\right|^{2}$$

fonksiyonunu gözönüne almıştır. Burada ispatlamak istediği $n\leq 26$ için $F_{2n-1}(\alpha,1,x)\geq 0$ eşitsizliğinin sağlanmasıydı. Bunun için (3.7) ve (3.8) de $\beta=1$ alınırsa

$$A_n(\alpha,1,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-\alpha)_k(-1)^k}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n}p_k(\alpha)x^k$$

yazılır. Burada

$$p_k(\alpha)=\frac{(-\alpha)_k(-1)^k}{k!}$$

şeklindedir. Dolayısıyla, $A_n(\alpha,1,x)>0$ olduğu kolayca görülür. Ayrıca, k tek olduğunda $p_k(\alpha)>0,\ p_0(\alpha)=1>0$ ve k çift olduğunda $p_k(\alpha)<0$ dır. Böylece k tek doğal sayılar için

$$p_k(\alpha)+p_{k+1}(\alpha)=p_k(\alpha)-p_k(\alpha)\left(\frac{-\alpha+k}{k+1}\right)=p_k(\alpha)\left(\frac{\alpha+1}{k+1}\right)>0$$

elde edilir. Buradan

$$A_n(\alpha,1,1)=1+\sum_{\substack{k=1\\ k\ tek}}^{n-2}\left(p_k(\alpha)+p_{k+1}(\alpha)\right)+p_n(\alpha)>0$$

bulunur. Diğer taraftan $x=e^{i\theta}\quad(0\leq\theta\leq 2\pi)$ için

$$
\begin{aligned}
\left|A_n(x,\alpha)\right|^2 &= \left(\sum_{k=0}^{n} p_k(\alpha)x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} p_l(\alpha)\overline{x}^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(p_k(\alpha)\right)^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{r=0}^{n-j} p_r(\alpha)p_{r+j}(\alpha)\right)\left(x^j+\overline{x}^j\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} p_k(\alpha)\,p_{k+0}(\alpha) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{r=0}^{n-j} p_r(\alpha)p_{r+j}(\alpha)\right)\left(e^{ij\theta}+e^{-ij\theta}\right)
\end{aligned}
$$

olur. Son ifadeyi daha kısaltarak $B_{j,n}(\alpha)=\sum_{r=0}^{n-j} p_r(\alpha)p_{r+j}(\alpha) \quad (j\geq 0)$ bir polinom olmak üzere

$$
\left|A_n(x,\alpha)\right|^2 = B_{0,n}(\alpha) + 2\sum_{j=1}^{n} B_{j,n}(\alpha)\cos(j\theta)
$$

yazılır. Böylece

$$
\begin{aligned}
F_N(\alpha,1,x) &= A_N^2(\alpha,1,1) - \left|A_N(\alpha,1,x)\right|^2 \\
&= 2\sum_{j=1}^{N} B_{j,N}(\alpha)(1-\cos(j\theta))
\end{aligned}
$$

bulunur. Jayatilake, son eşitlikte birinci çeşit Chebyshev polinomlarını ve akabinde Mathematica programını kullanarak aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

<u>Teorem 3.11:</u> $0<\alpha<1$ ve $|x|=1$ olsun. Bu durumda $n\leq 26$ için

$$
\left|A_{2n-1}(\alpha,1,x)\right| \leq \left|A_{2n-1}(\alpha,1,1)\right|
$$

eşitsizliği sağlanır [18].

2015 yılında Barnard, Jayatilake ve Solynin [3] $A_{2n-1}(\alpha,1,z)$ katsayılarında $z=re^{i\theta}$ alarak Brannan varsayımının daha genel bir formunu aşağıdaki şekilde vermiştir:

$\alpha>0$, $\beta>0$ ve n pozitif tam sayı olmak şartıyla $z=re^{i\theta}$, $r\leq r_n(\alpha,\beta)$ için

$$
\left|A_n(\alpha,\beta,z)\right| \leq A_n(\alpha,\beta,r) \tag{3.9}
$$

olacak şekilde en büyük $r_n=r_n(\alpha,\beta)$ bulunabilir mi?

Bu problem aslında n tek ve $r_n(\alpha,\beta)\geq 1$ olması durumunda Brannan varsayımı demektir. Buradan hareketle onlar n tek sayıları için $r_n(\alpha,1)$ ın infimumu üzerine çalışmışlardır. İspat $A_n(\alpha,1,z)$ katsayılarının integral versiyonundan yola çıkılarak yapılmıştır. Onlar öncelikle aşağıdaki sonucu ispatlamışlardır.

<u>Lemma 3.12:</u> $0<\alpha<1$ ve $x\in\mathbb{C}$ olsun. Bu durumda $A_n(\alpha,1,x)$ katsayıları

$$C_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$$

olmak üzere

$$A_n(\alpha,1,x)=1+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)}\int_0^1 C_n(-tx)\,t^{-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt \tag{3.10}$$

şeklindedir. Ayrıca $A_n(\alpha,1,x)=A_n(\alpha,1,-|x|)+\left(A_n(\alpha,1,x)-A_n(\alpha,1,-|x|)\right)$ olduğundan $A_n(\alpha,1,x)$ katsayıları

$$D_n(x)=C_n(x)-C_n(|x|)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k-|x|^k}{k}$$

olmak üzere

$$A_n(\alpha,1,x)=A_n(\alpha,1,-|x|)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)}\int_0^1 D_n(-tx)\,t^{-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt$$

şeklinde de yazılır [3].

Bu lemmadan yola çıkarak onlar öncelikle aşağıdaki sonuçları ispatlamışlardır.

<u>Lemma 3.13:</u> n pozitif tam sayı, $0<\alpha<1$ ve $0<p\leq 1$ olsun. Eğer tüm $0<r<p$ ve $0\leq\theta<\pi$ olacak şekilde $z=re^{i\theta}$ için $D_n(z)$ katsayısı $|D_n(z)|<|D_n(-|z|)|$ eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda $0<r\leq p$ ve $0\leq\theta<\pi$ şeklindeki $z=re^{i\theta}$ için

$$|A_n(\alpha,1,x)|<A_n(\alpha,1,|x|)$$

eşitsizliği sağlanır [3].

Katsayı eşitsizliğinin sağlanması için $\left|D_n(z)\right| < \left|D_n(-|z|)\right|$ eşitsizliğinin sağlanması gerekir. Dolayısıyla onlar bu eşitsizlik üzerine durarak aşağıdaki sonucu ispatlamışlardır.

Lemma 3.14: $0 < r \le 1/2$ ve $0 \le \theta < \pi$ olacak şekilde $z = re^{i\theta}$ ve $n \ge 1$ tek tamsayıları için

$$\left|D_n(z)\right| < \left|D_n(-|z|)\right|$$

eşitsizliği sağlanır [3].

Lemma 3.13 ve Lemma 3.14 den aşağıdaki eşitsizlik elde edilmiştir.

Teorem 3.15: $0 < \alpha < 1$ olsun. Bu durumda $0 < \theta < 2\pi$ ve $0 < r \le 1/2$ olacak şekilde $z = re^{i\theta}$ ve tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|A_{2n-1}(\alpha, 1, x)\right| \le \left|A_{2n-1}(\alpha, 1, r)\right|$$

eşitsizliği sağlanır [3].

Diğer taraftan onlar $\beta = 1$ ve tüm z ($|z| \le 1$) değerleri için (3.9) eşitsizliğinden daha zayıf bir eşitsizlik de elde etmişlerdir. Bu eşitsizlik

$$\operatorname{Re} A_n(\alpha, 1, z) \le A_n(\alpha, 1, r)$$

şeklindedir.

Onlar, bunun ispatını vermeden önce aşağıdaki eşitsizlikleri ispatlamışlardır.

Lemma 3.16: Herhangi $n \ge 1$ tek tamsayıları ve $|z| \le 1$ olacak şekilde kompleks z için

$$\operatorname{Re} C_n(-|z|) \le \operatorname{Re} C_n(z)$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik ancak ve ancak $z = -|z|$ koşuluyla sağlanır [3].

Böylece Lemma 3.16 dan

$$\int_0^1 \operatorname{Re} C_n(-tx) t^{-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt > \int_0^1 \operatorname{Re} C_n(-t|x|) t^{-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt \qquad (3.11)$$

eşitsizliği doğrudur.

Sonuç olarak $0<\alpha<1$ için $\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)<0$, (3.10) ve (3.11) eşitsizliklerinden aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.17: $0<\alpha<1$ olsun. Eğer $0<\theta<2\pi$ ve $0<r\le 1$ olmak üzere $z=re^{i\theta}$ ve tüm $n\in\mathbb{N}$ için

$$\operatorname{Re} A_{2n-1}(\alpha,1,x)<A_{2n-1}(\alpha,1,r)$$

eşitsizliği sağlanır [3].

2020 yılında Szasz [40] çalışmasında Jayatilake [18] ve Barnard, Jayatilake ve Solynin'nın [3] çalışmalarından esinlenerek Brannan varsayımını $x=e^{i\theta}$ ve $\alpha\in(0,1)$ olmak üzere θ nın ve α nın özel durumlarına göre ele almıştır.

Szasz ana sonuçları vermeden önce aşağıdaki değerlendirmeleri elde etmiştir.

Lemma 3.18: $\alpha\in(0,1)$ için

$$\begin{aligned}\Phi(\theta)&=-\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)A_{2n-1}\left(\alpha,1,e^{i\theta}\right)\\&=\int_0^1 F(t)\left[\frac{1}{\alpha}+\sum_{k=1}^{2n-1}(-t)^{k-1}e^{ki\theta}\right]dt=\int_0^1 F(t)\left[\frac{1}{\alpha}+B(t,\theta)+iC(t,\theta)\right]dt\end{aligned}$$

doğrudur. Burada $F(1)=0$, $F'(t)=-t^{-1-\alpha}(1-t)^{\alpha-1}$ ve

$$B(t,\theta)=\frac{\cos\theta+t+t^{2n-1}\cos 2n\theta+t^{2n}\cos(2n-1)\theta}{1+t^2+2t\cos\theta}$$
$$C(t,\theta)=\frac{\sin\theta+t^{2n-1}\sin 2n\theta+t^{2n}\cos(2n-1)\theta}{1+t^2+2t\cos\theta}$$

şeklindedir [40].

Lemma 3.19: Eğer $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ve $n\ge 27$ ise bu durumda

(a)
$$\begin{aligned}&\int_0^1 F(t)\left(B(t,0)-B(t,\theta)\right)dt\\&\ge\int_0^1 F(t)\frac{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)+t^{2n-1}(1-\cos 2n\theta)+t^{2n}(1-\cos(2n-1)\theta)}{(1+t)\left(1+t^2+2t\cos\theta\right)}dt\end{aligned}$$

(b)
$$\int_0^1 F(t)\big(1+B(t,\theta)\big)dt \geq \int_0^1 F(t)\frac{(1+t)\big(1+\cos\theta\big)+t^{2n-1}\big(1-\cos 2n\theta\big)+t^{2n}\big(1-\cos(2n-1)\theta\big)}{1+t^2+2t\cos\theta}dt$$

eşitsizlikleri sağlanır [40].

Lemma 3.20: Eğer $\theta \in \left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$ ise, bu durumda her $t\in[0,1]$ için

$$\frac{5}{2}+\frac{t+\cos\theta}{1+t^2+2t\cos\theta} \geq \frac{50}{23}\frac{(1+t)(1+\cos\theta)}{1+t^2+2t\cos\theta}$$

eşitsizliği sağlanır [40].

Lemma 3.21: Eğer $\theta \in \left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$ ve $n \geq 27$ ise bu durumda

$$\int_0^1 F(t)\big(B(t,0)-B(t,\theta)\big)dt \geq \int_0^1 F(t)\frac{\frac{27}{50}\big(1-\cos\theta\big)+t^{2n-1}\big(1-\cos 2n\theta\big)+t^{2n}\big(1-\cos(2n-1)\theta\big)}{\big(1+t\big)\big(1+t^2+2t\cos\theta\big)}dt$$

ve

$$\int_0^1 F(t)\big(2+B(t,0)+B(t,\theta)\big)dt \geq \int_0^1 F(t)\frac{\frac{27}{50}(1+t)\big(1+\cos\theta\big)+2t^{2n-1}\big(1+\cos 2n\theta\big)+2t^{2n}\big(1+\cos(2n-1)\theta\big)}{1+t^2+2t\cos\theta}dt$$

eşitsizlikleri sağlanır [40].

Lemma 3.22:

$$6\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3.2}\right)\left(1-\frac{1}{3.3}\right)....\left(1-\frac{1}{3.53}\right)<\frac{4}{3}$$

eşitsizliği sağlanır [40].

Brannan varsayımı $\left|\Phi(0)\right|^2 \geq \left|\Phi(\theta)\right|^2$ eşitsizliğine denk olduğundan dolayı Lemma 3.18 ve Lemma 3.19 birlikte ele alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.23: Eğer n bir doğal sayı olmak üzere $n \geq 27$ ve $\alpha \in (0,1)$ ise bu durumda $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ için

$$\left|A_{2n-1}\left(\alpha,1,e^{i\theta}\right)\right| \leq \left|A_{2n-1}(\alpha,1,1)\right|$$

eşitsizliği sağlanır [40].

Lemma 3.18 ve Lemma 3.21 den Brannan varsayımı ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.24: Eğer n bir doğal sayı olmak üzere $n \geq 27$ ve $\alpha \in (0,1)$ ise bu durumda $\theta \in \left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ için

$$\left|A_{2n-1}\left(\alpha,1,e^{i\theta}\right)\right| \leq \left|A_{2n-1}(\alpha,1,1)\right|$$

eşitsizliği sağlanır [40].

Ayrıca (3.8) serisi için Lemma 3.22 uygulandığında aşağıdaki özel sonuç elde edilir.

Teorem 3.25: Eğer n bir doğal sayı olmak üzere $n \geq 27$ ve $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, 1\right)$ ise bu durumda $\theta \in \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ için

$$\left|A_{2n-1}\left(\alpha,1,e^{i\theta}\right)\right| \leq \left|A_{2n-1}(\alpha,1,1)\right|$$

eşitsizliği sağlanır [40].

Teorem 3.23 ve Teorem 3.24 deki sonuçlar Jayatilake'nin Teorem 3.11 deki sonucu ile birleştirildiğinde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.26: Eğer $x \in \mathbb{C}$ sayısı $|\arg x| \leq \frac{2\pi}{3}$ ve $|x| = 1$ şartlarını sağlıyorsa, bu durumda $\alpha \in (0,1)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\left|A_{2n-1}(\alpha,1,x)\right| \leq \left|A_{2n-1}(\alpha,1,1)\right|$ eşitsizliği sağlanır [40].

Bir diğer sonuç da Teorem 3.23, Teorem 3.24 ve Teorem 3.25'in Jayatilake'nin Teorem 3.11'i ile birleştirildiğinde elde edilen sonuçtur.

Sonuç 3.27: Eğer $x \in \mathbb{C}$, $|x| = 1$ ise, bu durumda $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, 1\right)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|A_{2n-1}(\alpha, 1, x)\right| \le \left|A_{2n-1}(\alpha, 1, 1)\right|$$

eşitsizliği sağlanır [40].

Yukarıdaki iki sonuçlardan da anlaşıldığı üzere; Brannan varsayımı Sonuç 3.26 dan $\theta \in \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ için Sonuç 3.27 den de $\alpha \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ için çözümsüzlüğünü korumaktadır.

2020 yılında Brannan varsayımı üzerine son noktayı Deniz, Çağlar ve Szasz [12] koymuştur. Onlar, bir önceki paragrafta da belirtildiği üzere Szasz'ın çalışmasının eksik kalan kısmını tamamlamıştır. Çalışmalarında öncelikle $\alpha \in (0,1)$, $y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_0^1 \left(\frac{1-t}{\sqrt{1+t^2-2yt}}\right)^{2n-1} \left(\sqrt{1+t^2-2yt}\right)^{\alpha-1} dt \le \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{|2-2y|^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$$

eşitsizliğini ispatlamışlardır. Bu eşitsizlik ana sonucun ispatında anahtar rol oynamıştır. Dolayısıyla bu eşitsizliği kullanarak aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 3.28: Eğer n bir doğal sayı olmak üzere $n \ge 27$ ve $\alpha \in (0,1)$ ise bu durumda $|x| = 1$ ve $\theta \in \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ için

$$\left|A_{2n-1}(\alpha, 1, e^{i\theta})\right| \le \left|A_{2n-1}(\alpha, 1, 1)\right|$$

eşitsizliği sağlanır [12].

Teorem 3.28 ve Sonuç 3.26 birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki sonuç elde edilir.

<u>Sonuç 3.29:</u> Eğer $x \in \mathbb{C}$, $|x| = 1$ ise, bu durumda $\alpha \in (0,1)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|A_{2n-1}(\alpha,1,x)\right| \leq \left|A_{2n-1}(\alpha,1,1)\right|$$

eşitsizliği sağlanır [12].

Bu sonuçla $x \in \mathbb{C}$, $|x| = 1$, $\alpha, \beta > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için Brannan varsayımı $\left|A_{2n-1}(\alpha,1,x)\right| \leq \left|A_{2n-1}(\alpha,1,1)\right|$ tamamiyle ispatlanmış oldu.

Barnard ve Richards [2], 2021 yılında yayımlanan çalışmasında Gama, Beta ve Gauss hipergeometrik fonksiyonlarını kullanarak Sonuç 3.26 ve Teorem 3.28'in farklı ispatlarını vermiştir.

Aşağıda verilen tablo tüm verileri özetler niteliktedir.

Kişiler	Yıl	Brannan Varsayımı Üzerine Sonuçlar
D. A. Brannan	1973	$\lvert A_3(\alpha,1,x)\rvert \le A_3(\alpha,1,1)$
J. G. Milcetich	1989	$\lvert A_5(\alpha,1,x)\rvert \le A_5(\alpha,1,1)$
R.W.Barnard, K. Pearce, W. Wheeler	1997	$\lvert A_7(\alpha,1,x)\rvert \le A_7(\alpha,1,1)$
S. Rusceweyh, L. Salinas	2007	$\lvert A_{2n-1}(\lambda,\lambda,x)\rvert \le A_{2n-1}(\lambda,\lambda,1)$ $\lambda \in (0,1)$
U. C. Jayatilake	2013	$n \le 26$ için $\lvert A_{2n-1}(\alpha,1,x)\rvert \le A_{2n-1}(\alpha,1,1)$
R. W. Barnard, U. C. Jayatilake, A. Y. Solynin	2015	$x = re^{i\theta}$, $0<\theta<2\pi$ ve $0<r\le 1/2$ $\lvert A_{2n-1}(\alpha,1,z)\rvert \le A_{2n-1}(\alpha,1,r)$
R. Szasz	2020	$x = e^{i\theta}$, $\lvert \arg x\rvert \le \frac{2\pi}{3}$ $\lvert A_{2n-1}(\alpha,1,x)\rvert \le \lvert A_{2n-1}(\alpha,1,1)\rvert$
E. Deniz, M. Çağlar, R. Szasz	2020	$\lvert A_{2n-1}(\alpha,1,x)\rvert \le \lvert A_{2n-1}(\alpha,1,1)\rvert$

Tablo 1.

4 TARTIŞMA VE SONUÇ

Çalışmamıza kompleks analizin en önemli dallarından biri olan geometrik fonksiyonlar teorisi kısaca özetlenerek başlanmıştır. Ardından bu teorinin en önemli konularından biri olan ünivalent fonksiyonların tanımlarına ve özelliklerine yer verilmiş ve buradan yararlanarak V_k fonksiyon sınıfının tanımlanması, özellikleri ve bu sınıfa ait katsayı sınırlarının belirlenmesi ile ilgili yapılan çalışmalar incelenmiştir. Bu katsayı sınırları arasında en zor ve en önemlisi olan Brannan tarafından ortaya atılan bir varsayımdır. Bu tez çalışmasında Brannan varsayımı üzerine yapılan çalışmalar kronolojik bir şekilde detaylı olarak ele alınmıştır.

Çalışmamız, ünivalent fonksiyonlar teorisinde çalışan ve çalışacak lisansüstü araştırmacılar için bir arşiv niteliğindedir.

5 KAYNAKÇA

[1] Aharonov, D. and Friedland, S. (1972). On an inequality connected with the coefficient conjecture for functions of bounded boundary rotation. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I Math., 524, 1-14.

[2] Barnard, R. W. and Richards, K. C. (2021). A direct proof of Brannan's conjecture for $\beta = 1$. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 493(2), 1-12.

[3] Barnard, R. W., Jayatilake, U. C. and Solynin, A. Yu. (2015). Brannan’s conjecture and trigonometric sums. Proceedings of the American Mathematical Society, 143(5), 2117-2128.

[4] Barnard, R. W., Pearce, K. and Wheeler, W. (1997). On a coefficient conjecture of Brannan. Complex Variables Theory Applications, 33(1–4), 51–61.

[5] Bieberbach, L. (1916). Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. S. B. Preuss Akad. Wiss., 940-955.

[6] Branges, L. De, (1985). A proof of the Bieberbach conjecture. Acta Math., 154, 137-152.

[7] Brannan, D. A. (1969). On functions of bounded boundary rotation I. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 16(4), 339-347.

[8] Brannan, D. A. (1973). On coefficient problems for certain power series. In (Clunie, J. G. and Hayman, W. K., eds.) Proceedings of the Symposium on Complex Analysis, Univ. Kent, Canterbury. In (1974) London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, London, 12, 17–27.

[9] Brannan, D. A. and Kirwan, W. E. (1969). On some classes of bounded univalent functions. Journal of the London Mathematical Society, 2(1), 431-443.

[10] Brannan, D. A., Clunie, J. G. and Kirwan, W. E. (1973). On the coefficient problem for functions of bounded boundary rotation. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 523, 1-18.

[11] Çetinkaya, A. (2015). Sınırlı sınır rotasyonlarına sahip analitik fonksiyonlar. Yüksek lisans tez, İstanbul Ticaret Üniversitesi, İstanbul.

[12] Deniz, E., Cağlar, M. and Szász, R. (2020). The final step in a proof of Brannan's conjecture for $\beta = 1$. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 487(2), 124001.

[13] Dunford, N. and Schwartz, J. T. (1958). Linear operators, part I: General Theory. Wiley-Interscience, New York.

[14] Duren, P. L. (1983). Univalent functions. Springer-Verlag, New York.

[15] Goodman, A. W. (1971). Close to convex functions of higher order. In Notices of the American Mathematical Society, 18(5), 770.

[16] Goodman, A. W. (1983). Univalent functions I-II. Mariner Publishing Company, Tampa, Florida.

[17] Hayman, W. K. (1958). Multivalent functions. Cambridge University Press.

[18] Jayatilake, U. C. (2013). Brannan's conjecture for initial coefficients. Complex Variables and Elliptic Equations: An International Journal, 58(5), 685–694.

[19] Kaplan, W. (1952). Close-to-convex schlicht functions. The Michigan Mathematical Journal, 1(2), 169-185.

[20] Kirwan, W. E. (1968). On the coefficients of functions with bounded boundary rotation. The Michigan Mathematical Journal, 15(3), 277-282.

[21] Lehto, O. (1952). On the distortion of conformal mappings with bounded boundary rotation. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I, 124.

[22] Lonka, H. and Tammi, O. (1968). On the case of step-functions in extremal problems of the class with bounded boundary rotations. Ann. Acad. Sci. Fenn. A I, 418.

[23] Löwner, K. (1917). Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z| < 1$, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, 69, 89-106.

[24] Milcetich, J. G. (1989). On a coefficient conjecture of Brannan. Journal of Mathematical Analysis Applications, 139(2), 515–522.

[25] Moak, D. S. (1984). An application of hypergeometric functions to a problem in function theory. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 7.

[26] Noonan, J. W. (1972). Asymptotic, behavior of functions with bounded boundary rotation. Transactions of the American Mathematical Society, 164, 397-410.

[27] Paatero V. (1931). Über die konforme Abbildüngen von Gebieten deren Rander von beschrankter Drehung sind. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A, 33(9).

[28] Pinchuk, B. (1969). A variational method for functions of bounded boundary rotation. Transactions of the American Mathematical Society, 138, 107-113.

[29] Pinchuk, B. (1971). Functions of bounded boundary rotation. Israel Journal of Mathematics, 10(1), 6-16.

[30] Pommerenke, C. (1962). On the coefficients of close-to-convex functions. The Michigan Mathematical Journal, 9(3), 259-269.

[31] Pommerenke, C. (1975). Univalent Functions. Vandenhoeck and Ruprecht Company, Göttingen, Berlin.

[32] Ponnusamy, S. and Silverman, H. (2006). Complex variables with applications. Birkhauser, Boston.

[33] Rényi, A. (1949). On the coefficient of Schlicht functions. Debreceni Tudományegyetem Matematikai Intézet.

[34] Robertson, M. S. (1969). Coefficients of functions with bounded boundary rotation. Canadian Journal of Mathematics, 21, 1477-1482.

[35] Rogosinski, W. (1945). On the coefficients of subordinate functions. Proceedings of the London Mathematical Society, 2(1), 48-82.

[36] Ruscheweyh, S. and Salinas, L. (2007). On Brannan's coefficient conjecture and applications. Glasgow Mathematical Journal, 49(1), 45–52.

[37] Schiffer, M. and Tammi, O. (1967). On the fourth coefficient of univalent functions with boundedv boundary rotation. Ann. Acad. Sci. Fenn. A I, 396.

[38] Silverman, H. and Silvia, E. M. (1990). Subclasses of univalent functions starlike with respect to a boundary point. Houston Journal of Math., 16(2), 289-299.

[39] Strohhäcker, E. (1933). Beiträge zur theorie der schlichten funktionen. Mathematische Zeitschrift, 37(1), 356-380.

[40] Szász, R. (2020). On Brannan's conjecture. Mediterranean Journal of Mathematics, 17(1), 38.

[41] Todorov, P. G. (1995). Three explicit formulas for the Taylor coefficients of $\left(\frac{1-z}{1-xz}\right)^{\lambda}$. Abh. Math. Seminar Univ. Hamb. 65(1), 147–153.

[42] Tokkan, Y. (2019). 20. Yüzyılın bir matematik problemi: Bieberbach varsayımı, Yüksek lisans tezi, Kafkas Üniversitesi, Kars.

[43] Wheeler, W. A. (1995). Properties of partial sums of certain special functions in complex variables. Doctoral dissertation, Texas Tech University, Texas.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hilal ALAN SARI

Doğum Yeri/Tarihi : Acıpayam/ 12.04.1992

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim : hal_an@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum/Yıl)

Lise : Burdur/Bucak Mehmet Cadıl AÖL (2006-2010)

Lisans : Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü (2010-2014)

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı (2018-2021)

Çalıştığı Kurumlar : Kars – Şehit Albay İ. Karaoğlanoğlu YBO (2014-2018)

: Kars- Merkez İHO (2018-2019)

:Ankara- Keçiören Ayvalı Şehit S. Maraş İHO (2019-)

Bildiriler

1. Alan Sarı, H., Deniz, E. and Çağlar, M. (2019). Some criteria for univalence related to Hadamard product. MAS International Conference on Mathematics-Engineering- Natural Medical Sciences-V, Erzurum.