T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN BİR SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN FARK ŞEMASININ HATASI

TUĞÇE TOLUÇ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY

OCAK-2020
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN BİR SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN FARK ŞEMASININ HATASI

TUĞÇE TOLUÇ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY

OCAK-2020
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Tuğçe TOLUÇ'un Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY danışmanlığında Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı "Lineer Olmayan bir Schrödinger Denklemi için Fark Şemasının Hatası" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

31/01/2020

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Gabil YAGUB	
Üye	: Prof. Dr. Ercan ÇELİK	
Üye	: Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY	N. Yıldırım

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ... / .. / 20. . gün ve .. . ./. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

TUĞÇE TOLUÇ
OCAK-2020

ÖZET

LİNEER OLMAYAN BİR SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN FARK ŞEMASININ HATASI

Tuğçe TOLUÇ

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY

Bu Yüksek Lisans tezinde Lineer olmayan Schrödinger denklemi için bir başlangıç sınır değer problemine sonlu fark yöntemi uygulanmıştır. I. bölümde bu çalışma ile ilgili literatür çalışmalarına yer verilmiş olup tezde kullanılan temel kavramlar, teoremler ve eşitsizlikler ifade edilmiştir. II. bölümde sonlu farklar yönteminin ne olduğu, nasıl uygulanacağı açıklanmıştır. III. bölümde ise bu çalışmada incelenecek olan probleme sonlu farklar metodu uygulanmış olup yöntemin kararlılığı gösterilmiş ve fark şemasının hatası değerlendirilmiştir. IV. bölümde ise elde edilen sonuçlar ifade edilerek bu çalışmanın literatüründeki çalışmalardan farklılığı vurgulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lineer olmayan Schrödinger denklemi, Sonlu Farklar Metodu, Kararlılık, Fark Şemasının Hatası

2020, 66 Sayfa

ABSTRACT

(Master Thesis)

THE ERROR OF DIFFERENCE SCHEME FOR A NONLINEAR SCHRODINGER EQUATION

Tuğçe TOLUÇ

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY

In this paper, the finite difference method is applied to an initial-boundary value problem for nonlinear Schrödinger equation. In chapter 1 of this paper consist of literature review and expresses basic concepts, theorems and inequalities used. Chapter 2 explains the finite difference method and how it is applied to the problem. Finite difference method was applied the problem, stability of this approach and the emor of difference scheme were evaluated in chapter 3. Final chapter 4. Results were explained and highlighted the difference of the results with literature review.

Key Words: Nonlinear Schrödinger equation, Finite difference method, Stability, the error of Difference scheme.

2020, 66 pages

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum bu çalışmada fikirleriyle bana yol gösteren hiçbir özveriden kaçınmayıp değerli bilgi ve katkılarını benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi öğretim üyelerinden danışmanım Sayın Doç.Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY ve bölüm başkanı Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB'a, en içten şükran ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım esnasında her türlü maddi ve manevi desteğiyle yanımda olan canım aileme, göstermiş oldukları anlayıştan dolayı Çatalca belediye başkanlığı yazı işleri müdürüm Sayın Derya DÜNDAR ve mesai arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Tuğçe TOLUÇ
OCAK, 2020

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\forall$	:	Herhangi
hhh	:	Hemen hemen her yerde
$i=\sqrt{-1}$	:	Sanal birim
$b_0>0$	:	Verilen herhangi bir sayı
$l>0$	:	Verilen sayı
$T>0$	:	Verilen sayı
$\Omega=(I)\times(0,T)$	:	Verilen bölge
$\bar{\Omega}=[0,l]\times[0,T]$	:	Verilen bölge
$\delta_{\bar{t}}\phi_{jn}=\dfrac{\phi_{jn}-\phi_{jn-1}}{\tau}$	:	t ’ye göre geri fark türev formülü
$\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}=\dfrac{\phi_{jn}-\phi_{j-n1}}{h}$	:	x ’e göre geri fark türev formülü
$\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}=\dfrac{\phi_{j+1n}-\phi_{jn}}{h}$	:	x ’e göre ileri fark türev formülü
$\delta_{x\bar{x}}\phi_{jn}=\dfrac{\phi_{j+1n}-2\phi_{jn}+\phi_{j-1n}}{h^2}$	:	x ’e göre ikinci mertebeden merkezi fark türev formülü
$\Vert\cdot\Vert_{L_p(I)}$	:	$1\le p\le\infty$ olmak üzere $L_p(I)$ uzaylarında norm
$\Vert\cdot\Vert_{L_p(\Omega)}$	:	$1\le p\le\infty$ olmak üzere $L_p(\Omega)$ uzaylarında norm
$W_2^2(I)$	:	Sobolev uzayı
$W_2^{0,1}(\Omega)$	:	Sobolev uzayı
(u,v)	:	u ile v fonksiyonunun iç çarpımı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Fen, mühendislik, matematik ve birçok bilim dallarında karşılaşılan problemler sayısal yöntemlerle çözülmektedir. Bu denklemlerin hesaplamaları yüzyıl öncesinde daha ilkel yöntemler kullanılarak yapılmaktaydı. Problemlerin karmaşıklığı, çözümlere doğru ve kısa zamanda ulaşılmak istenmesi teknolojideki ilerlemeyide beraberinde getirmiştir. Bu doğrultuda bilgilsayar teknolojisi ile problemlerin yaklaşık çözümlerini bulabilmek için Sonlu farklar metodu (yöntem)'i kullanılmıştır [1]. Sonlu Farklar Yöntemi, bir diferansiyel denklemin nümerik çözümünde kullanılan yöntemdir. Bu yöntemin sıkça tercih edilmesinin sebebi ise teorik çözümü elde edilemeyen problemlerin çözümlerine ulaşılabilir olmasıdır. Bu noktada kısmi diferansiyel denklemlerde, sonlu farklar yönteminin uygulanması bir problem bölgesi ortaya çıkarır. Bu problem bölgesi eşit şekilde yada farklı boyutlarda ağlara bölünür ve bölünen bu ağlardaki noktalara Düğüm bağlantısı denir. Sonlu farklar yöntemi ile ağ noktaları arasında kalan değerlerin fonksiyon türündeki değeri bulunur. Ağ noktalarındaki değerler Taylor serisi yardımıyla sonlu fark yaklaşımlarını ortaya çıkarır. Sonuç olarak birçok bilim insanı problemlerin çözümünde sonlu farklar yönteminin tanım ve teorilerini kullanmıştır [2-10].

Schrödinger denklemi kuantum fiziğin temel denklemlerinden biri olup bir kuantum mekanik sistemi tanımlamak için kullanılır. Bu denkleme Schrödinger dalga denklemide denir ve zamanla gelişen bir fiziksel sistemin dalga fonksiyonunu tanımlayan bir kısmi diferansiyel denklemdir.

Tek boyutlu x uzayında momentumu p ve kütlesi m olan bir parçacığı göz önüne alalım. Parçacık serbest, yani bir potansiyel içinde değilse, toplam enerjisi

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

olarak sadece kinetik enerjiden ibarettir. Bu parçacığı de Broglie bağıntılarına göre temsil eden dalga paketinin dalga sayısı k ve açısal frekansı w olmak üzere enerji ve momentum sırasıyla

$$E = \hbar w,\ p = \hbar k$$

olmalıdır. Burada $h = 6,63\times10^{-27}$ ergs Plank sabiti olup $\hbar = \frac{h}{2\pi}$; λ dalga boyu olmak üzere $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ dalga sayısıdır.

Bir dalga paketinin düzlem dalgalar cinsinden Fourier açılımı

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)e^{i(kx-wt)}dk$$

biçiminde yazılır. Burada $\phi(k)$ genlik dağılım fonksiyonudur. Bu ifadede enerji ve momentum bağıntıları kullanılırsa

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(p)e^{i(px-Et)/\hbar}dp$$

olup bu bağıntının zamana göre I., konuma göre II. türevlerini aldığımızda

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-i}{2\pi\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty}E\phi(p)e^{i(px-Et)/\hbar}dp$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-1}{2\pi\hbar^3}\int_{-\infty}^{\infty}p^2\phi(p)e^{i(px-Et)/\hbar}dp$$

elde edilir. Bu iki ifadeyi karşılaştırdığımızda ise

$$i\hbar\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

bağıntısı elde edilir. İşte bu denklem Schrödinger serbest parçacık denklemi olarak adlandırılır.

Schrödinger denklemindeki kısmi türevler $E = \frac{p^2}{2m}$ bağıntısını sağlayabilmek için alınmıştı. Enerji ve momentum operatörleri

$$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$
$$\frac{p^2}{2m} \to -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$
$$p \to -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

olarak tanımlanırsa, Schrödinger denklemi $E = \frac{p^2}{2m}$ bağıntısının kuantumsal ifadesinden başka birşey değildir.

Eğer parçacık sabit bir V potansiyeli içinde hareket ediyorsa, bu parçacığın toplam enerjisi

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

olup $E = \hbar w,\ p = \hbar k$ biçimindeki de Broglie bağıntıları kullanılırsa, bu durumda Schrödinger denklemi

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Vu\left(x,t\right)$$

biçiminde olur. Bu denklem, bir kuantum mekanik sistemin zaman içindeki değişimini gösterir [60].

Schrödinger denklemini bir çok bilim insanı farklı metodlar kullanarak incelemişlerdir. Mesela; Adomian ayrıştırma metodu [11-12], Homotopy Perturbasyon metodu [13,14,15], Homotopy Analiz metodu [16,17], Varyasyonel iterasyon metodu [18,19] ve

Galerkin metodu [20-26,59] kullanılarak denklemin farklı biçimindeki çözümleri araştırılmıştır.

Yaptığımız bu çalışmada ise sonlu farklar metodu kullanılmıştır. Bu metod kullanılarak Schrödinger denkleminin çözümü daha önceleri [23, 25, 27-46] çalışmalarında incelenmiştir. [23, 27-33] çalışmalarında momentum operatörü içermeyen lineer Schrödinger denklemi için sınır değer problemi göz önüne alınarak bu problemlerin çözümleri sonlu fark metoduyla incelenmiştir. [25] çalışmasında ise momentum operatörü içeren çok boyutlu lineer bir Schrödinger denkleminin çözümü sonlu farklar metoduyla araştırılmıştır. [23, 34-43, 44-46] çalışmalarında ise momentum operatörünü içermeyen lineer olmayan Schrödinger denkleminin çözümleri sonlu farklar metoduyla incelenmiştir.

Bu tez çalışması 4 bölümden oluşmaktadır.

Kuramsal Temellerin yer aldığı bölümde, temel kavramlar olan L_∞ ve Sobolev uzaylarının tanımlarına, $\varepsilon -$Cauchy, Young ve Ayrık Gronwall eşitsizliklerine yer verilmiştir. Ayrıca Fubini Teoremi verilmiş ve bazı kavramların tanımlarıda yapılmıştır.

Çalışmanın 2. Bölümü, 3 alt başlıktan oluşmaktadır. 2.1 bölümünde sonlu farklar yönteminin tanımı ve türevlere 1. mertebeden ve 2. Mertebeden sonlu fark yaklaşımlarının formülleri verilmiştir. Ayrıca sonlu fark metoduna ait bazı kavramlar açıklanmıştır. 2.2 bölümünde açık ve kapalı sonlu fark yöntemlerinin tanımı araştırılarak yazılmıştır. 2.3 bölümünde ise fark yöntemini uygulayacağımız başlangıç sınır değer problemi ifade edilmiştir.

Çalışmanın 3. Bölümüde 3 alt başlıktan oluşmaktadır. 3.1 kısmında başlangıç sınır değer probleminin diskritleştirilmesi gösterilmiştir. 3.2. kısmında fark şemasının kararlılığı ispatlandı. 3.3 kısmında ise fark şemasının hatası değerlendirilmiştir.

Son olarak bu tez çalışmasının 4. bölümünde, bu çalışmanın literatüründeki çalışmalardan farklılığı ifade edilmiştir.

1.2. Kuramsal Temeller

Bu bölümde tezde kullanılan lemma, tanım ve teoremleri açıklayacağız.

Tanım 1.2.1 Bir özelliğin bir E kümesinde hemen hemen her yerde (kısaca hhh) sağlanması demek, o özelliğin E'de ölçümü sıfır olan bazı alt kümelerinin dışında sağlanması demektir. Örnek verecek olursak "E'de $hhh\, f = 0$" ifadesi; E'nin bazı Z alt kümesi haricindeki her yerde $f(x) = 0$ dır. Yani Z kümesinin ölçümü sıfırdır [47].

Tanım 1.2.2. R^n de bölge
$S(I) = \{u \in I : u, \Omega$ da tanımlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi$\}$ ve $1 \le p < \infty$ olmak üzere

$$\int_I |u(x)|^p \, dx < \infty$$

özelliğine sahip tüm ölçülebilir fonksiyonların sınıfına $L_p(I)$ uzayı adı verilir. Bu $L_P(I)$ uzayı

$$L_p(I) = \left\{ u \in S(I) : \int_I |u(x)|^p \, dx < \infty, 1 \le p < \infty \right\}$$

biçiminde gösterilir [48].

Tanım 1.2.3. I bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|u(x)| \le K$ olacak şekilde bir $K \ge 0$ sabit sayısı varsa u fonksiyonuna hemen hemen sınırlıdır denir. Eşitsizliği sağlayan $K \ge 0$ sabit sayılarının en büyük alt sınırına ise $|u|$ nın I bölgesindeki esas supremumu denir ve bu $ess\sup_{x \in I} |u(x)|$ ile gösterilir. I bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarının oluşturduğu uzay $L_\infty(I)$ ile gösterilir.
$L_\infty(I)$ uzayında norm

$$\|u\|_{L_\infty(I)} = ess\sup_{x\in I}|u(x)| = \inf\{K \ge 0 : hhh\ x \in I \text{ için } |u(x)| \le K\}$$

olarak tanımlanır. Bu normla $L_\infty(I)$ uzayı bir Banach uzayıdır [48].

Tanım 1.2.4. $1 \le p < \infty$ olmak üzere

$$\int_\Omega |u(x,t)|^p\, dxdt < \infty$$

şartını sağlayan tüm ölçülebilir fonksiyonların uzayı $L_p(\Omega)$ ile gösterilir. Bu uzay üzerinde norm

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x,t)|^p\, dxdt\right)^{1/p}, \quad 1 \le \text{p} < \infty$$

olarak tanımlanır. Bu tanımda özel olarak $p = 2$ alındığında elde edilen $L_2(\Omega)$ uzayı bir Hilbert uzayıdır ve iç çarpım

$$\langle u,v\rangle = \int_\Omega u(x,t)\bar{v}(x,t)\,dxdt_{L_2(\Omega)} \Rightarrow \|u\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle u,v\rangle}$$

biçimindedir [48].

Tanım 1.2.5. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarının oluşturduğu uzay $L_\infty(\Omega)$ ile gösterilir. Bu uzay üzerinde norm

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = vrai\sup|u(x,t)| = ess\sup_{(x,t)\in\Omega}|u(x,t)| = \inf\{k \ge 0 : hhh(x,t) \in \Omega \text{ için} |u(x,t)| \le k\}$$

şekilde tanımlanır.

Tanım 1.2.6. $D \subset R^n$ bir bölge olmak üzere $\forall\varepsilon > 0$ verildiğinde $|z| < \sigma$ şartını sağlayan tüm z ler için $1 \le p < \infty$ iken $\|f(x+z) - f(x)\|_{L_p(D)} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\sigma > 0$ sayısı varsa, $f(x)$ fonksiyonuna L_p normu anlamında süreklidir denir [49].

Teorem 1.2.1. $1 \le p < \infty$ iken $L_p(D)$den olan her fonksiyon L_p normu anlamında süreklidir [50].

Tanım 1.2.7. $W_2^2(I)$ Hilbert uzayı olup, elemanlarının kendisi ve bu elemanların ikinci dereceye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(I)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Uzaydaki iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\langle u,v\rangle_{W_2^2(I)} = \int_0^l \left(u\overline{v} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x^2} \right) dx$$
$$\|u\|_{W_2^2(I)} = \sqrt{\langle u,v\rangle_{W_2^2(I)}}$$

[49].

Tanım 1.2.8. $W_2^{0,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olmak üzere, elemanlarının kendisi ve onların t değişkenine göre genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzaydaki iç çarpım

$$\langle u,v\rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left(u(x,t)\overline{v}(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \overline{v}(x,t)}{\partial t} \right) dxdt$$

biçiminde yazılıp, normu

$$\|u\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle u,v\rangle_{W_2^{0,1}(I)}}$$

olarak tanımlanır [49].

Tanım 1.2.9. $C^k([0,T],B)$ uzayı $u:[0,T]\to B$ biçiminde k kez sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonların Banach uzayıdır. Bu uzayda norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{C^k([0,T],B)} = \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{d^i u(t)}{dt^i} \right\|_B$$

[51].

Lemma 1.2.1. (Ayrık Gronwall Eşitsizliği) $\{w(n), g(n),\ n=1,2,..N,\ \ N\tau=T\}$ negatif olmayan ağ fonksiyonlarının aşağıdaki eşitsizliği sağladığını düşünelim:

$$w(n)\le g(n)+\tau\sum_{l=1}^{n}B_l w(l).$$

Burada $B_l\,(l=1,2,...,N)$ negatif olmayan sabitlerdir. Öyleyse herhangi $0\le n\le N$ için

$$w(n)\le g(n)\exp\left(n\tau\sum_{l=1}^{n}B_l\right)$$

eşitsizliği vardır [40].

Lemma 1.2.2. ($\varepsilon-$ Cauchy eşitsizliği) : Herhangi a,b sayıları ve $\varepsilon>0$ için

$$|a.b|\le\frac{\varepsilon}{2}|a|^2+\frac{1}{2\varepsilon}|b^2|$$

eşitsizliği geçerlidir [52].

Lemma 1.2.3. (Young Eşitsizliği) $a>0,$ b>0 reel sayılar ve $q>1$ olsun. Bu durumda

$$ab\le\frac{q-1}{q}a^{\frac{q}{q-1}}+\frac{1}{q}b^q$$

dir [51].

Teorem 1.2.2. (Hölder Eşitsizliği ve Cauchy -Schwarz Eşitsizliği)

$1\le p,\ q^{'}<\infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q'}=1$ ise

$$\|fg\|_{L_1(E)}\le\|f\|_{L_p(E)}\|g\|_{L_{q'}(E)}$$

dir. Yani E, R^n 'de ölçülebilir küme olmak üzere

$$\int_E |fg| \le \left(\int_E |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_E |g|^{q'}\right)^{1/q'} \quad (1 < p < \infty);$$

$$\int_E |fg| \le \left(\operatorname*{ess\,sup}_E |f|\right) \int_E |g|$$

Hölder eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte $p = q' = 2$ alınırsa

$$\int_E |fg| \le \left(\int_E |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_E |g|^2\right)^{1/2}$$

elde edilen eşitsizliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir [47].

<u>Teorem 1.2.3.</u> (Fubini Teoremi) (E, A, μ) ve (F, B, v) iki tam ölçüm uzayı $f, E\times F$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyondur. Dolayısıyla

1) $\int_F f(x,y)\,dv(y)$, E üzerinde integrallenebilen bir fonksiyondur.

2) $\int_E f(x,y)\,d\mu(x)$, F üzerinde integrallenebilen bir fonksiyondur.

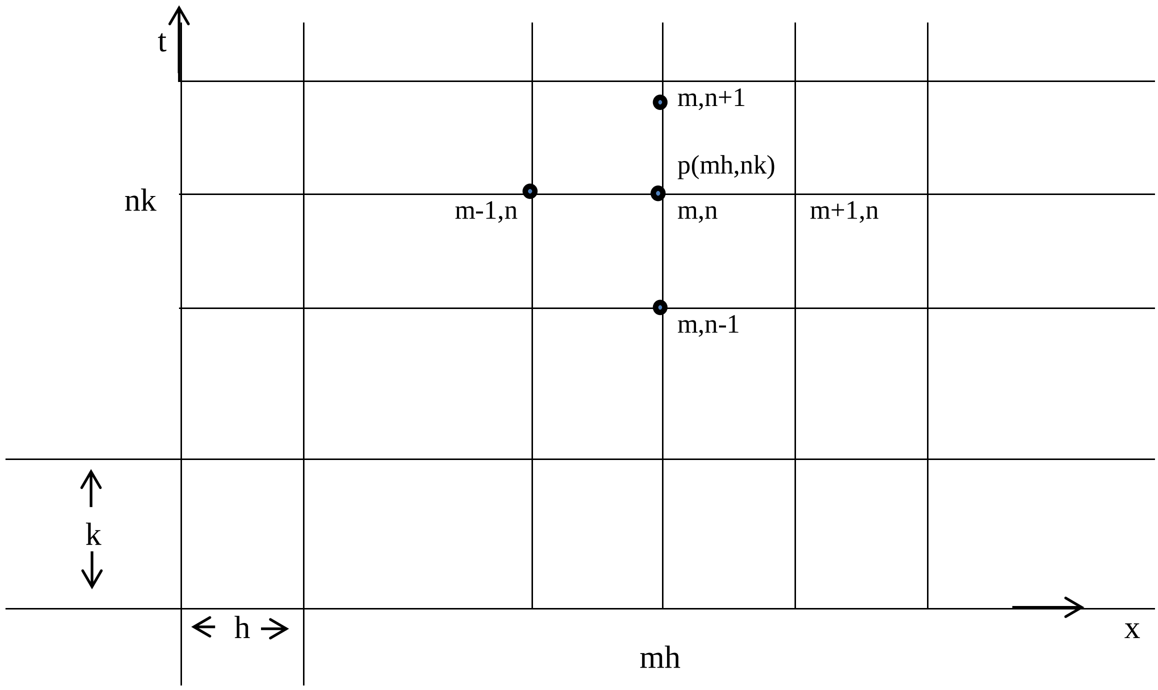
3) $\int_E \left(\int_F f(x,y)\,dv(y)\right) d\mu(x) = \int_{E,F} fd(\mu\times v) = \int_F \left(\int_E f(x,y)\,d\mu(x)\right) dv(y)$ dir [53].

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Sonlu Farklar Yöntemi

Sonlu farklar yöntemi, diferansiyel denklemin nümerik çözümünde kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemin fark yaklaşımını bulabilmek için ilk olarak çözüm bölgesi ayrıklaştırılır, yani kafeslere veya ağlara bölünür. Problemin yaklaşık çözümü dikdörtgensel şekillerin düğüm noktaları üzerinde hesaplama yapılarak bulunur. Uygun sonlu fark yaklaşımını elde edebilmek için denklemdeki türevlerin yerine onlara karşılık gelen sonlu fark türev formülleri yazılır. Böylece diferansiyel denklem, lineer veya lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemine dönüştürülmüş olur. Cebirsel sistemin çözümlerinin yapılması ile de bilinmeyen değerler elde edilmiş olur.

Şekil 2.1: Sürekli problemler ile ayrık problemler arasındaki ilişki



Şekil 2.2: Bölünen ağ noktalarının gösterimi

Çözüm Bölgesi $[0,l]\times[0,T]$ yarı açık bölgesi olsun. $\Delta x = h$ uzunluğunda m eşit parçaya, $\Delta t = k$ uzunluğunda ise eşit parçalara bölelim. Belirlenen çözüm aralığı kafeslere bölünür. Bölünen kafeslerin xt düzleminde Δx ve Δt kenar uzunluklu kafeslerin kesişim yerlerine ağ noktaları (düğüm noktaları) denir. Problemin yaklaşık çözümü ağ noktaları üzerinden hesaplanır.

$$x = x_m = m\Delta x = mh, \quad m = 0,1,2...,M$$

$$t = t_n = n\Delta t = nk, \quad n = 0,1,2...,N$$

ile gösterilir [54,55].

2.1.1. Türevlerin Sonlu Fark Formülleri

2.1.1.1. Birinci Mertebeden Türevlerin Sonlu Fark Formülleri

x 'e göre birinci mertebeden türevler; İleri fark (sağ fark), geri fark (sol fark) ve merkezi fark formülleri ile verilir.

$$u(x+h,t) = u(x,t) + h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x,t)... \tag{2.1}$$

formülünde h^2 'li terim ve sonraki terimler ihmal edilirse,

$$u(x+h,t) = u(x,t) + h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x,t)... \Rightarrow$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \cong \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} + \frac{h}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{U_{m+1}^n - U_m^n}{h} + O(h) \tag{2.2}$$

formülüne ileri fark formülü denir. Ayrıca,

$$u(x-h,t)=u(x,t)-h\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+... \tag{2.3}$$

olduğundan

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cong\frac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h}+\frac{h}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cong\frac{U_m^n-U_{m-1}^n}{h}+O(h) \tag{2.4}$$

elde edilir. Buna da geri fark formülü denir. (2.3) formülünü -1 ile çarpıp (2.1) ile taraf tarafa toplarsak

$$u(x+h,t)-u(x-h,t)=2h\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+... \Rightarrow \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cong\frac{u(x+h,t)-u(x-h,t)}{2h}+\frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{U_{m+1}^n-U_{m-1}^n}{2h}+O(h^2) \tag{2.6}$$

elde edilen bu formüle merkezi fark formülü denir. Benzer şekilde t'ye göre türevleri gösterecek olursak

$$u(x,t+k)=u(x,t)+k\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{k^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \tag{2.7}$$

$$u(x,t-k)=u(x,t)-k\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{k^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+... \tag{2.8}$$

formüllerinden

$$\frac{\partial u}{\partial t}\cong\frac{U_m^{n+1}-U_m^n}{k}+O(k) \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{U_m^n - U_m^{n-1}}{k} + O(k) \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{U_m^{n+1} - U_m^{n-1}}{2k} + O(k^2) \tag{2.11}$$

sırasıyla ileri, geri ve merkezi fark formülleri olarak adlandırılan bağıntılar elde edilir.

2.1.1.2. İkinci Mertebeden Türevlerin Sonlu Fark Formülleri

x' e göre ikinci mertebeden türevleri bulalım. Taylor açılımından

$$u(x+2h,t) = u(x,t) + 2h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(2h)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(2h)^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + ... \tag{2.12}$$

$$u(x-2h,t) = u(x,t) - 2h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(-2h)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(-2h)^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + ... \tag{2.13}$$

$$u(x+h,t) = u(x,t) + h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + ... \tag{2.14}$$

$$u(x-h,t) = u(x,t) - h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + .. \tag{2.15}$$

yazılır. (2.14) denklemini (-2) ile çarpıp (2.12) denklemi ile taraf tarafa toplarsak

$$u(x+2h,t) - 2u(x+h,t) = -u(x,t) + h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + ... \tag{2.16}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{u(x+2h,t) - 2u(x+h,t) + u(x,t)}{h^2} - h\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + ... \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{U_m^n - 2U_{m+1}^n + U_{m+2}^n}{h^2} + O(h) \qquad (2.17)$$

ileri fark formülü elde edilir. Yukarıda verilen (2.15) denklemi (-2) ile çarpıp (2.13) denklemi ile toplarsak

$$u(x-2h,t) - 2u(x-h,t) = -u(x,t) + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \ldots \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{u(x-2h,t) - 2u(x-h,t) + u(x,t)}{h^2} + h \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \qquad (2.18)$$

yazılır. Buradan geri fark formülü olarak adlandırdığımız

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{U_{m-2}^n - 2U_{m-1}^n + U_m^n}{h^2} + O(h) \qquad (2.19)$$

formülünü elde ederiz. Benzer şekilde yukarıdaki (2.14) denklemi ile (2.15) denklemini taraf tarafa toplarsak,

$$u(x+h,t) + u(x-h,t) = 2u(x,t) + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \ldots \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{u(x+h,t) + u(x-h,t) - 2u(x,t)}{h^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} + O(h^2) \qquad (2.20)$$

merkezi formülü elde edilir. Aynı şekilde t'ye göre Taylor serisi yazılırsa II. Mertebeden ileri fark formülü,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cong \frac{U_m^{n+2} - 2U_m^{n+1} + U_m^n}{k^2} + O(k) \qquad (2.21)$$

geri fark formülü,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cong \frac{U_m^{n-2} - 2U_m^{n-1} + U_m^n}{k^2} + O(k) \tag{2.22}$$

merkezi fark formülü,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cong \frac{U_m^{n+1} - 2U_m^{n} + U_m^{n-1}}{k^2} + O(k^2) \tag{2.23}$$

elde edilir.

Diferansiyel denklemleri sonlu fark biçiminde yazabilmek için farklı yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden en önemlileri:
* Açık Sonlu Fark Yöntemi ve
* Kapalı Sonlu Fark Yöntemi
dir.

2.2. Açık Yöntem ve Kapalı Yöntem

2.2.1. Açık Sonlu Fark Yöntemi

Bu yöntem adındanda anlaşıldığı üzere herhangi bir ağ noktasındaki değerlerin daha erken zamanlardaki sonlu fark ile elde edilen çözüm değerlerinden daha açık şekilde hesaplanmasından gelir. Dolayısıyla mevcut sistemin ve sonraki durumlarını içeren denklemi çözerek çözüm elde edilir. Ortaya çıkan bu yöntem zamana bağlı olup merkezi fark yöntemi olarakta bilinmektedir. Yani Açık fark metodu ile ağ noktalarında (Düğüm noktaları) bir bilinmeyenli cebirsel denklem çözümü yapılır. Bu çözüm ile hedeflenen zamana ulaşıncaya kadar tekrarlanır ve türevli denkleme yaklaşımda bulunulur. Lineer olmayan bir denkleme bu yöntem uygulandığında elde edilen sonuç denklem sistemini verir. Ancak kararlılık söz konusu olduğunda bazı kısıtlamalar getirdiğinden yeterli değildir [56].

2.2.2. Kapalı Sonlu Fark Yöntemi

Bu yöntem, açık yöntemde belirtildiği gibi bir önceki zaman değeri açık şekilde hesaplanamamaktadır. Sonlu farklar denkleminde birçok bilinmeyen bulunmaktadır. Böylece ayrıklaştırılan noktalarda hesaplama yapabilmek için doğrusal denklem takımı oluşturulur. Oluşturulan denklem takımı çözülerek hesaplama yapılır ve hedeflenen zamanki çözüm değerine ulaşıncaya kadar tekrarlanır. Özetleyecek olursak hesaplama noktalarındaki artış ile denklem sayısı doğru orantılıdır. Lineer olmayan bir denkleme uygulandığında yine lineer olmayan denklem sistemini verir. Açık yönteme göre karmaşık ve zor görülse de duyarlılık ve tutarlılık kavramlarından dolayı tercih edilen bir yöntemdir [56].

Yakınsaklık

Bir kısmi diferansiyel denklemde $U = U(h,k)$ tam çözümü, U_m^n ise fark denklemlerinden elde edilen tam çözümü olsun.

$$h,k \to 0 \text{ iken } U_m^n \to U(h,k)$$

oluyorsa sonlu fark denklemi yakınsaktır denilir [57].

Kararlık

Kısmi türevli denklemin sonlu fark yöntemi ile çözümü hesaplanırken hatalar meydana gelir. Bu hataların hesaplamaları ilerledikçe, sınırsız olarak büyümeyip, yakınsak kalıyorsa bu ifadeye kararlıdır denmektedir [57].

Tutarlılık

Bir kısmi diferansiyel denklemde yaklaşımda bulunurken sonlu fark uygulaması kararlı olmasına rağmen elde edilen sonuç ağ (örgü) uzunlukları sıfıra giderken bir başka diferansiyel denklemin çözümüne yakınsak olabilir. Dolayısıyla fark uygulaması bağlı olduğu diferansiyel denklem ile tutarsızdır veya uyumsuzdur denilmektedir. Ancak tutarlılığı şöyle tanımlayabiliriz;

Kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü $U(x,t)$ ve bu denklem $P(U)=0$ ile gösterilsin. Ayrıca diferansiyel denklem için yaklaşımda kullanılan sonlu fark denkleminin tam çözümü u ve denklemi de $F(u)$ ile gösterelim. Bağımsız değişkenlerin sürekli bir fonksiyonu $v(x,t)$olup, $(ih,\ jk)$ noktasında $P(v)$yi değerlendirecek kadar sürekli türevlere sahip olsun. Buradan $(ih,\ jk)$ noktasındaki $T_{i,j}(v)$ kesim hatası

$$T_{i,j}(v)=F(v_{i,j})-P(v_{i,j}) \tag{2.24}$$

şeklinde tanımlanabilir. Eğer

$$h\to 0,\ \ k=0 \text{ iken } T_{i,j}(v)\to 0$$

ise fark denklemi ile ilgili kısmi diferansiyel denklem tutarlıdır denir. $P(U)=0$ olduğunda $v=U$ olarak alınır. Böylece (2.24) denklemi

$$T_{i,j}(U)=F(U_{i,j})$$

şekline dönüşür. Burada

$$h\to 0,\ k\to 0 \text{ iken } F(U_{i,j})\to 0$$

olursa fark denklemi tutarlıdır denir [57].

2.3. Başlangıç Sınır Değer Problemi

Bu bölümde sonlu fark yöntemini uygulayacağımız başlagıç sınır değer problemini açıklayacağız. Bu problem aşağıdaki gibidir:

$$i\frac{\partial u}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+ia_1\frac{\partial u}{\partial x}-a(x)u+v(t)u+ia_2|u|^2u=g(x,t),(x,t)\in\Omega \quad (2.25)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in I \quad (2.26)$$

$$u(l,t)=u(0,t)=0 \quad t\in(0,T)\cdot \quad (2.27)$$

Burada $u=u(x,t)$ dalga fonksiyonu, $a_0,a_1,a_2>0$ verilen reel sayılar; $a(x)$ ve $\mathrm{v}(t)$ ise sırasıyla

$$hhh\ x\in I \text{ için } \quad 0\le a(x)\le\mu_0 \quad \mu_0=sbt>0 \quad (2.28)$$

$$hhh\ t\in(0,T) \text{ için } \ |v(t)|\le b_0,\ \left|\frac{dv(t)}{dt}\right|\le b_1 \quad (2.29)$$

şartlarını sağlasın. Burada $b_0,b_1>0$ verilen sayılar olup, φ ve g fonksiyonları;

$$\varphi\in\overset{0}{W}{}_2^2(I) \text{ ve } \mathrm{g}\in W_2^{0,1}(\Omega)$$

uzaylarındandır. Şimdi (2.25) – (2.27) probleminin çözümünü açıklayalım.

Tanım 2.3.1. (2.25)-(2.27) ile verilen problemin çözümü $B_0=C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(I)\right)\cap C^1([0,T],L_2(I))$ uzayından olan ve $hhh\ x\in I$ ve herhangi $t\in[0,T]$ için (2.25) denklemini, $hhh\ x\in I$ için (2.26) şartını ve $hhh\ t\in(0,T)$ için (2.27) şartını sağlayan bir $u=u(x,t)$ fonksiyonudur.

(2.25)-(2.27) başlangıç sınır değer probleminin çözümü için [58] çalışmasını kullanarak aşağıdaki teoremi yazabiliriz:

Teorem 2.3.1. $a(x)$ ve $v(t)$ fonksiyonları sırasıyla (2.28), (2.29) şartlarını sağlasın ve $\varphi\in\overset{0}{W}{}_2^2(I)$, $\mathrm{g}\in W_2^{0,1}(\Omega)$ biçiminde verilen fonksiyonlar olsun. Bu durumda (2.25)-(2.27) probleminin B_0 uzayına ait olan tek çözümü vardır ve bu çözüm için $\forall t \in [0,T]$ için aşağıdaki değerlendirme yazılır:

$$\left\| u(.,t) \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(I)} + \left\| \frac{\partial u(.,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(I)} \le c_0 \left(\left\| \varphi \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(I)} + \left\| g \right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \left\| \varphi \right\|^3_{\overset{0}{W}{}_2^1(I)} \right) \tag{2.30}$$

Burada $c_0 > 0$, φ, g ve t ’ye bağımlı olmayan bir sabittir.

3. BULGULAR

3.1. Başlangıç Sınır Değer Probleminin Diskiritleştirilmesi

Bu bölümde (2.25) - (2.27) problemi ayrıklaştırılır. Bunun için ilk olarak çözüm bölgesi yani $\overline{\Omega} = I \times [0,T]$ kafeslere bölünerek aşağıdaki gibi yazılır:

$$x_j = jh - \frac{h}{2}, \quad j = \overline{1, M-1}, \;\; x_1 - \frac{h}{2} = 0, \quad x_{M-1} + \frac{h}{2} = l,$$

$$t_n = n\tau, \quad n = \overline{0, N}, \quad h = \frac{l}{M-1}, \quad \tau = \frac{T}{N},$$

$$M \equiv M_k, \quad N \equiv N_k, \quad h \equiv h_k, \quad \tau \equiv \tau_k, \quad k \geq 1.$$

Buradaki h ve τ sırasıyla konum ve zaman adım uzunluğunu ifade eder. $V_h = \left\{ v : v = \left(v_0, v_1, v_2..v_M\right), v_0 = v_M = 0 \right\}$ olmak üzere, herhangi $u, v \in V_h$ için iç çarpım

$$\left(u, v\right) = h \sum_{j=1}^{M-1} u_j \bar{v}_j$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca v' nin ayrık normları,

$$\|v\|_{L_p} = \sqrt[p]{h \sum_{j=1}^{M-1} |v_n|^p}$$

$$\|v\|_{L_\infty} = \max_{1 \leq n \leq M-1} |v_n|$$

$$\|\delta_x v\|_{L_2} = \sqrt{h \sum_{j=1}^{M-1} |\delta_x v_n|^2}$$

olarak tanımlansın. Böylece (2.25) ve (2.27) probleminin fark şeması

$$i\delta_{\bar{t}}\phi_{jn} + a_0 \delta_{x\bar{x}}\phi_{jn} + ia_1 \delta_{\bar{x}}\phi_{jn} - a_j \phi_{jn} + v_n \phi_{jn} + ia_2 \left|\phi_{jn}\right|^2 \phi_{jn} = f_{jn}, \; j = \overline{1, M-1}, \;\; n = \overline{1, N} \quad (3.1)$$

$$\phi_{j0} = \varphi_j, \quad j = \overline{0, M} \quad (3.2)$$

$$\phi_{Mn} = \phi_{0n} = 0, \quad n = \overline{1, N} \quad (3.3)$$

şeklinde yazılır. Burada $a_j, \varphi_{j,} f_{jn,} v_n$ ağ fonksiyonları

$$a_j = \frac{1}{h}\int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + h/2} a(x)\,dx, \quad j = \overline{1, M-1}$$

$$\varphi_j = \frac{1}{h}\int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \varphi(x)\,dx, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad \varphi_0 = \varphi_M = 0$$

$$g_{jn} = \frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} g(x,t)\,dxdt, \quad j=\overline{1, M-1}, \quad n = \overline{1, N}$$

$$v_n = \frac{1}{\tau}\int_{t_n}^{t_{n+1}} v(t)dt, \quad n = \overline{0, N-1}$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Ayrıca (2.28) ve (2.29) şartlarından

$$0 \le a_j \le \mu_0, \quad j=\overline{1, M-1}, \tag{3.4}$$

$$|v_n| \le b_0, \quad n = \overline{0, N}, \quad |\delta_{\bar{t}} v_n| \le b_1, \; n = \overline{1, N} \tag{3.5}$$

eşitsizlikleri yazılır.

3.2. Fark Şemasının Kararlılığı

Teorem 3.2.1 $a(x)$ ve $v(t)$ fonksiyonları sırasıyla (2.28)-(2.29) şartlarını sağlasın. Ayrıca $\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^2(I)$, $\mathrm{g} \in \mathrm{W}_2^{0,1}(\Omega)$ olsun. Buradan (3.1)-(3.3) fark şemasının çözümü olan ϕ_{jn} fonksiyonu $\forall m \in \{1, 2, ...N\}$ için,

$$\begin{aligned}
& h\sum_{j=1}^{M-1}|\phi_{jm}|^2 + a_0 h\sum_{j=1}^{M-1}|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}|^2 + a_0 h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}|\delta_{\bar{x}}\phi_{jn} - \delta_{\bar{x}}\phi_{jn-1}|^2 + 2h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}|\phi_{jn} - \phi_{jn-1}|^2 + \\
& 2a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}|\phi_{jn} - \phi_{j-1n}|^2 + 4a_2 h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}|\phi_{jn}|^4 \le \frac{a_2 h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}|\varphi_j|^4 + a_0 h\sum_{j=1}^{M-1}|\delta_{\bar{x}}\varphi_j|^2 + \\
& c_1\left(h\sum_{j=1}^{M-1}|\varphi_j|^2 + \tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}|g_{jn}|^2 + \tau h\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}|\delta_{\bar{t}} g_{jn}|^2\right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

değerlendirmesini sağlar. (3.6) daki $c_1 > 0$ sabiti h,τ ve m 'den bağımsızlardır.

İspat : Her bir $t = t_n$ için (3.1) - (3.3) şeması

$$\begin{aligned} &ih\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{t}}\phi_{jn}\bar{\eta}_{jn} + ha_0\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{x\bar{x}}\phi_{jn}\bar{\eta}_{jn} + iha_1\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}\bar{\eta}_{jn} - h\sum_{j=1}^{M-1}a_j\phi_{jn}\bar{\eta}_{jn} + \\ &h\sum_{j=1}^{M-1}v_n\phi_{jn}\bar{\eta}_{jn} + iha_2\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^2\phi_{jn}\bar{\eta}_{jn} = h\sum_{j=1}^{M-1}g_{jn}\bar{\eta}_{jn},\ n=\overline{1,N} \end{aligned} \tag{3.7}$$

toplam özdeşliğine denktir. Yukarıdaki $\left\{\left(x_j,t_n\right)_k\right\}$ ağlar dizisinde tanımlı olan $\bar{\eta}_{jn}$ fonksiyonu, $n=\overline{1,N}$ için $\eta_{0n}=\eta_{Mn}=0$ şartlarını sağlayan herhangi η_{jn} ağ fonksiyonunun kompleks eşleniğidir. (3.7)'de ifade edilen toplam özdeşlikte $\bar{\eta}_{jn}$ fonksiyonunun yerine $\tau\bar{\phi}_{jn}$ ağ fonksiyonunu yazarsak,

$$\begin{aligned} &ih\tau\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{t}}\phi_{jn}\bar{\phi}_{jn} + a_0h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{x\bar{x}}\phi_{jn}\bar{\phi}_{jn} + ia_1h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}\bar{\phi}_{jn} - h\tau\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left|\phi_{jn}\right|^2 + \\ &h\tau\sum_{j=1}^{M-1}v_n\left|\phi_{jn}\right|^2 + ia_2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^4 = h\tau\sum_{j=1}^{M-1}g_{jn}\bar{\phi}_{jn},\quad n=\overline{1,N} \end{aligned} \tag{3.8}$$

olur. Eşitliğin sol tarafında yazmış olduğumuz ikinci terime kısmi toplam formülünü uygulayalım. Bunun için öncelikle aşağıdaki Lemmayı ifade edelim:

Lemma 3.2.1 Herhangi iki $u,v \in V_h = \left\{v : v = \left(v_0, v_1, ..v_M\right),\ v_0 = v_M = 0\right\}$ ağ fonksiyonları için

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_{x\bar{x}}u_j\right)\bar{v}_j = -h\sum_{j=1}^{M}\left(\delta_{\bar{x}}u_j\right)\left(\delta_{\bar{x}}\bar{v}_j\right)$$

dır.

Lemma 3.2.1.'i (3.8) eşitliğinde yerine yazarsak $n=\overline{1,N}$ için

$$ih\tau\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{t}}\phi_{jn}\bar{\phi}_{jn}-a_0h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}\right|^2+ia_1h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}\bar{\phi}_{jn}-$$
$$h\tau\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left|\phi_{jn}\right|^2+h\tau\sum_{j=1}^{M-1}v_n\left|\phi_{jn}\right|^2+ia_2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^4=h\tau\sum_{j=1}^{M-1}g_{jn}\bar{\phi}_{jn} \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.9) eşitliğinden eşleniğini çıkarırsak

$$ih\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_{\bar{t}}\phi_{jn}\bar{\phi}_{jn}+\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn}\phi_{jn}\right)+ia_1h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}\bar{\phi}_{jn}+\delta_{\bar{x}}\bar{\phi}_{jn}\phi_{jn}\right)+$$
$$2ia_2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^4=2ih\tau\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(g_{jn}\bar{\phi}_{jn}\right) \tag{3.10}$$

olur. Böylece (3.10) dan

$$h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_{\bar{t}}\phi_{jn}\bar{\phi}_{n}+\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn}\phi_{jn}\right)+a_1h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}\bar{\phi}_{jn}+\delta_{\bar{x}}\bar{\phi}_{jn}\phi_{jn}\right)+$$
$$2a_2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^4=2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(g_{jn}\bar{\phi}_{jn}\right),\ n=\overline{1,N} \tag{3.11}$$

yazılır. (3.11)'de

$$\tau\left(\delta_{\bar{t}}\phi_{jn}\bar{\phi}_{jn}+\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn}\phi_{jn}\right)=\left|\phi_{jn}\right|^2-\left|\phi_{jn-1}\right|^2+\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2 \tag{3.12}$$

$$h\left(\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}\bar{\phi}_{jn}+\delta_{\bar{x}}\bar{\phi}_{jn}\phi_{jn}\right)=\left|\phi_{jn}\right|^2-\left|\phi_{j-1n}\right|^2+\left|\phi_{jn}-\phi_{j-1n}\right|^2 \tag{3.13}$$

bağıntıları kullanılırsa

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jn}\right|^2-\left|\phi_{jn-1}\right|^2+\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2\right)+a_1\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jn}\right|^2-\left|\phi_{j-1n}\right|^2+\left|\phi_{jn}-\phi_{j-1n}\right|^2\right)$$
$$2a_2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^4=2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(g_{jn}\bar{\phi}_{jn}\right),\ n=\overline{1,N} \tag{3.14}$$

elde edilir. Yukarıdaki bütün eşitlikleri n üzerinden 1'den $m\le N$'ye kadar toplarsak

$$h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jn}\right|^2-\left|\phi_{jn-1}\right|^2\right)+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2+a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jn}\right|^2-\left|\phi_{j-1n}\right|^2\right)+$$
$$a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}-\phi_{j-1n}\right|^2+2a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^4=2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(g_{jn}\bar{\phi}_{jn}\right) \tag{3.15}$$

eşitliği yazılır. Ayrıca

$$\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jn}\right|^2-\left|\phi_{jn-1}\right|^2\right)=\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{j1}\right|^2-\left|\phi_{j0}\right|^2+\left|\phi_{j2}\right|^2-\left|\phi_{j1}\right|^2+\left|\phi_{j3}\right|^2-\left|\phi_{j2}\right|^2+\right.$$
$$\left.+\ldots+\left|\phi_{jm}\right|^2-\left|\phi_{jm-1}\right|^2\right)=\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jm}\right|^2-\left|\phi_{j0}\right|^2\right)$$

olup burada (3.2) şartını kullanarak

$$\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jn}\right|^2-\left|\phi_{jn-1}\right|^2\right)=\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2-\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_{j}\right|^2 \tag{3.16}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jn}\right|^2-\left|\phi_{j-1n}\right|^2\right)=\sum_{n=1}^{m}\left(\left|\phi_{1n}\right|^2-\left|\phi_{0n}\right|^2+\left|\phi_{2n}\right|^2-\left|\phi_{1n}\right|^2+\left|\phi_{3n}\right|^2-\left|\phi_{2n}\right|^2+\right.$$
$$\left.\ldots+\left|\phi_{M-1n}\right|^2-\left|\phi_{M-2n}\right|^2\right)=\sum_{n=1}^{m}\left(\left|\phi_{M-1n}\right|^2-\left|\phi_{0n}\right|^2\right)$$

olup burada (3.3) şartını kullanarak

$$\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jn}\right|^2-\left|\phi_{j-1n}\right|^2\right)=\sum_{n=1}^{m}\left|\phi_{M-1n}\right|^2 \tag{3.17}$$

yazılır. (3.16) ve (3.17)'yi (3.15) de yerine yazıp, mutlak değerini alırsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2+a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\left|\phi_{M-1n}\right|^2+a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}-\phi_{j-1n}\right|^2+$$
$$2a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^4\leq h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_{j}\right|^2+2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|\left|\phi_{jn}\right| \tag{3.18}$$

elde edilir.Yukarıdaki eşitsizliğin sağ kısmında bulunan ikinci toplamın m. terimini ayırarak, bu terime ε-Cauchy eşitsizliğini uygulayalım. Böylece aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} &h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 + h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2 + a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\left|\phi_{M-1n}\right|^2 + a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}-\phi_{j-1n}\right|^2 + \\ &2a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^4 \le h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + 2h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|\left|\phi_{jn}\right| + \varepsilon h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jm}\right|^2 + \frac{h\tau}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 \end{aligned} \tag{3.19}$$

(3.19)'da $\varepsilon = 2\tau$ olarak alınıp Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} &\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 + h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2 + a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\left|\phi_{M-1n}\right|^2 + \\ &a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}-\phi_{j-1n}\right|^2 + 2a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^4 \le h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|^2 + \\ &h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^2 + 2T\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jm}\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 \end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilir. (3.20) eşitsizliğinin her tarafını 2 ile çarparsak

$$\begin{aligned} &h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 + 2h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2 + 2a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\left|\phi_{M-1n}\right|^2 + 2a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}-\phi_{j-1n}\right|^2 + \\ &+4a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^4 \le 2h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|^2 + 4T\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jm}\right|^2 + 2h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^2 + 2h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 \end{aligned} \tag{3.21}$$

elde edilir. (3.21) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk iki terimi birleştirip sonra $m \le N$ ye büyültürsek;

$$\begin{aligned} &h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 + 2h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2 + 2a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\left|\phi_{M-1n}\right|^2 + \\ &2a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}-\phi_{j-1n}\right|^2 + 4a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^4 \le 4Th\tau\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|^2 + \\ &2h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^2 + 2h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2, \forall m \in \{1,2,...,N\} \end{aligned} \tag{3.22}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.22)'nin sol taraftaki bütün terimler pozitif olduğundan,

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 \le 4Th\tau\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|^2 + 2h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^2 + 2h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2, \ \forall m \in \{1,2,...,N\} \tag{3.23}$$

yazılır. (3.23) eşitsizliğinde Gronwall lemmasının diskrit aynısını [40] kullanırsak;

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 \le c_2\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + \tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|^2\right), \quad \forall m \in \{1,2,...,N\} \tag{3.24}$$

olur. (3.22)'nin sol tarafındaki bütün terimler pozitif olduğundan (3.24)'ü (3.22)'de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} &h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 + 2h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2 + 2a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}-\phi_{j-1n}\right|^2 + \\ &4a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^4 \le c_3\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + \tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|^2\right), \ \forall m \in \{1,2,...,N\} \end{aligned} \tag{3.25}$$

değerlendirmesini elde ederiz. (3.25) deki $c_3 > 0$, h, τ ve m den bağımsız bir sabittir.

Şimdi $\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}$ fonksiyonunu değerlendirelim. Bunun için (3.7) toplam özdeşliğinin sol tarafındaki ikinci terime kısmi toplam formülünü uygulayıp $\bar{\eta}_{jn}$ fonksiyonunun yerine $\tau\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn}$ yazalım. Bu durumda aşağıdaki özdeşlik elde edilir:

$$\begin{aligned} &ih\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{t}}\phi_{jn}\right|^2 - a_0h\tau\sum_{j=1}^{M}\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}\delta_{\bar{x}}\left(\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn}\right) + ia_1h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn} - h\tau\sum_{j=1}^{M-1}a_j\phi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn} + \\ &h\tau\sum_{j=1}^{M-1}v_n\phi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn} + ia_2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^2\phi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn} = h\tau\sum_{j=1}^{M-1}g_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn}, \ n = \overline{1,N}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

(3.26) eşitliği ile eşleniğini toplarsak

$$\begin{aligned} &-a_0h\sum_{j=1}^{M}\tau\left(\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}\delta_{\bar{x}}\left(\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn}\right) + \delta_{\bar{x}}\bar{\phi}_{jn}\delta_{\bar{x}}\left(\delta_{\bar{t}}\phi_{jn}\right)\right) + ia_1h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn} - \delta_{\bar{x}}\bar{\phi}_{jn}\delta_{\bar{t}}\phi_{jn}\right) - \\ &h\tau\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left(\phi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn} + \bar{\phi}_{jn}\delta_{\bar{t}}\phi_{jn}\right) + h\tau\sum_{j=1}^{M-1}v_n\left(\phi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn} + \bar{\phi}_{jn}\delta_{\bar{t}}\phi_{jn}\right) + \\ &ia_2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^2\left(\phi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn} - \bar{\phi}_{jn}\delta_{\bar{t}}\phi_{jn}\right) = h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(g_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn} + \bar{g}_{jn}\delta_{\bar{t}}\phi_{jn}\right) \end{aligned} \tag{3.27}$$

olur. (3.27)'de

$$\tau\left(\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}\delta_{\bar{x}}\left(\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn}\right)+\delta_{\bar{x}}\bar{\phi}_{jn}\delta_{\bar{x}}\left(\delta_{\bar{t}}\phi_{jn}\right)\right)=\tau\left(\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}\delta_{\bar{t}}\left(\delta_{\bar{x}}\bar{\phi}_{jn}\right)+\delta_{\bar{x}}\bar{\phi}_{jn}\delta_{\bar{t}}\left(\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}\right)\right)$$
$$=\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}\right|^2-\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jn-1}\right|^2+\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}-\delta_{\bar{x}}\phi_{jn-1}\right|^2,$$

$$h\tau\left(\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn}-\delta_{\bar{x}}\bar{\phi}_{jn}\delta_{\bar{t}}\phi_{jn}\right)=\left(2iIm\left(\bar{\phi}_{jn}\phi_{jn-1}\right)+2iIm\left(\bar{\phi}_{j-1n}\left(\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right)\right)\right),$$

$$\left|\phi_{jn}\right|^2\left(\phi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn}-\bar{\phi}_{jn}\delta_{\bar{t}}\phi_{jn}\right)=\frac{\left|\phi_{jn}\right|^2}{\tau}2iIm\left(\phi_{jn}\bar{\phi}_{jn-1}\right)$$

ve (3.12) eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
&-a_0h\sum_{j=1}^{M}\left[\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}\right|^2-\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jn-1}\right|^2+\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}-\delta_{\bar{x}}\phi_{jn-1}\right|^2\right]-\\
&2a_1\sum_{j=1}^{M-1}\left(Im\left(\bar{\phi}_{jn}\phi_{jn-1}\right)+Im\left(\bar{\phi}_{j-1n}\left(\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right)\right)\right)-\\
&h\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left[\left|\phi_{jn}\right|^2-\left|\phi_{jn-1}\right|^2+\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2\right]+\\
&h\sum_{j=1}^{M-1}v_n\left[\left|\phi_{jn}\right|^2-\left|\phi_{jn-1}\right|^2+\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2\right]-\\
&2a_2h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^2Im\left(\phi_{jn}\bar{\phi}_{jn-1}\right)=2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Re}\left(g_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn}\right),\ n=\overline{1,N}
\end{aligned}\tag{3.28}$$

elde edilir. (3.28)'deki bütün eşitlikleri n üzerinden 1'den $m\le N$'ye kadar toplarsak

$$\begin{aligned}
&a_0h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left[\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}\right|^2-\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jn-1}\right|^2\right]+a_0h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}-\delta_{\bar{x}}\phi_{jn-1}\right|^2+\\
&2a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(\bar{\phi}_{jn}\phi_{jn-1}\right)+2a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(\bar{\phi}_{j-1n}\left(\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right)\right)+\\
&h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left[\left|\phi_{jn}\right|^2-\left|\phi_{jn-1}\right|^2\right]+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2-\\
&h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}v_n\left[\left|\phi_{jn}\right|^2-\left|\phi_{jn-1}\right|^2+\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2\right]\\
&+2a_2h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^2Im\left(\phi_{jn}\bar{\phi}_{jn-1}\right)=-2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Re}\left(g_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn}\right)
\end{aligned}\tag{3.29}$$

elde edilir. (3.29)'da

$$h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1} v_n\left[\left|\phi_{jn}\right|^2-\left|\phi_{jn-1}\right|^2+\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2\right]=h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left[v_n\left|\phi_{jn}\right|^2-v_{n-1}\left|\phi_{jn-1}\right|^2\right]+$$
$$h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1} v_n\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2-\tau h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{t}}v_n\left|\phi_{jn-1}\right|^2=h\left(-v_0\right)\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{j0}\right|^2+hv_m\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+$$
$$h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1} v_n\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2-\tau h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{t}}v_n\left|\phi_{jn-1}\right|^2$$

olduğunu dikkate alarak gerekli işlemler yapılır ve (3.2) şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&a_0h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}\right|^2+a_0h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}-\delta_{\bar{x}}\phi_{jn-1}\right|^2+2a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(\bar{\phi}_{jn}\phi_{jn-1}\right)+\\
&+2a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(\bar{\phi}_{j-1n}\left(\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right)\right)+h\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left|\phi_{jm}\right|^2+\\
&+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2+2a_2h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^2Im\left(\phi_{jn}\bar{\phi}_{jn-1}\right)\\
&=-2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Re}\left(g_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jn}\right)+a_0h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\varphi_j\right|^2+h\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left|\varphi_j\right|^2-\\
&hv_m\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+hv_0\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2-h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}v_n\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2+\tau h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{t}}v_n\left|\phi_{jn-1}\right|^2
\end{aligned} \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.30) eşitliğinin sağ tarafında bulunan ilk toplama kısmi integrasyon formülünü uygularsak

$$\begin{aligned}
&a_0h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}\right|^2+a_0h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}-\delta_{\bar{x}}\phi_{jn-1}\right|^2=-2a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(\bar{\phi}_{jn}\phi_{jn-1}\right)-\\
&2a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(\bar{\phi}_{j-1n}\left(\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right)\right)-h\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left|\phi_{jm}\right|^2-h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2\\
&-2a_2h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^2Im\left(\phi_{jn}\bar{\phi}_{jn-1}\right)+2h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Re}\left(\delta_{\bar{t}}g_{jn}\bar{\phi}_{jn}\right)-\\
&2h\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Re}\left(g_{jm}\bar{\phi}_{jm}\right)+2h\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Re}\left(g_{j1}\bar{\phi}_{j0}\right)+a_0h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\varphi_j\right|^2+h\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left|\varphi_j\right|^2-\\
&hv_m\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+hv_0\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2-h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}v_n\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2+\tau h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{t}}v_n\left|\phi_{jn-1}\right|^2
\end{aligned} \tag{3.31}$$

eşitliği elde edilir. (3.31)'de eşitliğin sol tarafındaki terimlerin pozitif olduğunu dikkate alarak her iki tarafın mutlak değerini alıp, (3.4) ve (3.5) şartlarını kullanarak Young eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$
\begin{aligned}
&a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}\right|^2 + a_0 h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}-\delta_{\bar{x}}\phi_{jn-1}\right|^2 \le a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jn}\right|^2+\left|\phi_{jn-1}\right|^2\right)+\\
&a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{j-1n}\right|^2+\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2\right)+h\mu_0\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+h\mu_0\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2+\\
&\left|a_2\right|h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^4+\left|a_2\right|h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^2\left|\phi_{jn-1}\right|^2+a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\varphi_j\right|^2+h\mu_0\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2+\\
&h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_{jn}\right|^2+h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^2+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jm}\right|^2+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{j1}\right|^2+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2+\\
&hb_0\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+hb_0\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 h+b_0\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2+\tau hb_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn-1}\right|^2
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

(3.32) de

$$
\begin{aligned}
\left|a_2\right|h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^4+\left|a_2\right|h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^2\left|\phi_{jn-1}\right|^2 &\le \frac{3}{2}a_2 h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^4+\\
&\frac{a_2 h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{m-1}\left|\phi_{jn}\right|^4+\frac{a_2 h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^4,
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{m}\left|\phi_{jn-1}\right|^2=\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{n=0}^{m-1}\left|\phi_{jn}\right|^2=\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{m-1}\left|\phi_{jn}\right|^2+\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{j0}\right|^2=\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{m-1}\left|\phi_{jn}\right|^2+\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2
$$

ve

$$
\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{j-1n}\right|^2=\sum_{n=1}^{m}\left(\left|\phi_{0n}\right|^2+\left|\phi_{1n}\right|^2+\left|\phi_{2n}\right|^2+\ldots+\left|\phi_{M-1n}\right|^2\right)=\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=0}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^2=\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^2
$$

olduğunu dikkate alırsak

$$a_0h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}\right|^2+a_0h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}-\delta_{\bar{x}}\phi_{jn-1}\right|^2+\leq\left(a_1+h\mu_0+hb_0+h\right)\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2+$$
$$\left(h\mu_0+hb_0+h+2a_1\right)\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+\left(a_1+h\mu_0+hb_0\right)\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2+$$
$$3a_1\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^2+\frac{3}{2}a_2h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^4+\frac{a_2h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{m-1}\left|\phi_{jn}\right|^4+\frac{a_2h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^4+ \tag{3.33}$$
$$a_0h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\varphi_j\right|^2+\tau hb_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn-1}\right|^2+h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_{jn}\right|^2+h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^2+$$
$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jm}\right|^2+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{j1}\right|^2$$

eşitsizliği yazılır. (3.33)'de

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jm}\right|^2\leq\left(2+\frac{1}{T}\right)\left(\tau h\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_{jn}\right|^2+\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|^2\right),\ \forall m\in\{1,2,\ldots,N\}$$

olduğunu dikkate alarak (3.25) değerlendirmesini kullanırsak

$$a_0h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}\right|^2+a_0h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}-\delta_{\bar{x}}\phi_{jn-1}\right|^2\leq c_4\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2+$$
$$c_5\left(\tau h\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_{jn}\right|^2+\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{N}\left|g_{jn}\right|^2\right)+\frac{a_2h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^4+a_0h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{x}}\varphi_j\right|^2 \tag{3.34}$$

değerlendirmesini elde ederiz. (3.34) ve (3.25) değerlendirmelerini birleştirirsek,

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+a_0h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}\right|^2+a_0h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jn}-\delta_{\bar{x}}\phi_{jn-1}\right|^2+2h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}-\phi_{jn-1}\right|^2+$$
$$2a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}-\phi_{j-1n}\right|^2+4a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jn}\right|^4\leq\frac{a_2h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^4+a_0h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{x}}\varphi_j\right|^2+ \tag{3.35}$$
$$c_6\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2+\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|^2+\tau h\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_{jn}\right|^2\right),\ \forall m\in\{1,2,\ldots,N\}$$

elde edilir. Buradaki $c_6>0$ sabiti, h,τ ve m'den bağımsızdırlar.

Böylece Teorem 3.2.1 ispat edildi.

Bu teorem kullanılarak sağ tarafa ve başlangıç şartlarına göre şemanın kararlı olduğunu kolaylıkla gösterebiliriz.

3.3. Fark Şemasının Hatası için Değerlendirme

Bu bölümde fark şemasının hatasını değerlendireceğiz. Burada öncelikle u_{jn} fonksiyonunu, (x_j, t_n) noktasında $u(x,t)$ fonksiyonunun tam çözümü olmak üzere

$$u_{jn} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+h/2} u(x,t)\,dxdt, \quad j=\overline{1,M-1} \quad n=\overline{1,N} \tag{3.36}$$

$$u_{j0} = \varphi_j, \quad j=\overline{0,M}, \quad \mathrm{u}_{0n} = u_{Mn} = 0, \quad n=\overline{1,N} \tag{3.37}$$

olarak tanımlayalım. Ayrıca

$$[e] = \{e_{jn}\} = \{\phi_{jn} - u_{jn}\}$$

ile fark şemasının hatasını gösterirsek, e_{jn} aşağıdaki sistemi sağlar:

$$\begin{gathered} i\delta_{\bar{t}} e_{jn} + a_0 \delta_{x\bar{x}} e_{jn} + i a_1 \delta_{\bar{x}} e_{jn} - a_j e_{jn} + v_n e_{jn} + i a_2 \left(\left|\phi_{jn}\right|^2 \phi_{jn} - \left|u_{jn}\right|^2 u_{jn} \right) = I_{jn} \\ j = \overline{1, M-1}, \quad n=\overline{1,N} \end{gathered} \tag{3.38}$$

$$e_{j0} = 0, \quad j=\overline{0,M} \tag{3.39}$$

$$e_{0n} = e_{Mn} = 0, \quad n=\overline{1,N}. \tag{3.40}$$

Burada

$$I_{jn}=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(i\frac{u}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+ia_1\frac{\partial u}{\partial x}-a(x)u+v(t)u+ia_1|u|^2u\right)dxdt$$

$$-\ i\delta_{\bar{t}}u_{jn}-a_0\delta_{x\bar{x}}u_{jn}-ia_1\delta_{\bar{x}}u_{jn}+a_ju_{jn}-v_nu_{jn}-ia_2\left(\left|u_{jn}\right|^2u_{jn}\right), \tag{3.41}$$

$$j=\overline{1,M-1},\quad n=\overline{1,N}$$

dır.

Şimdi fark şemasının hatasını değerlendirmeye çalışalım. Bunun için (3.38)-(3.40) sisteminin $\eta_{0n}=\eta_{Mn}=0,\ n=\overline{1,N}$ şartlarını sağlayan η_{jn} ağ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}&h\sum_{j=1}^{M-1}i\delta_{\bar{t}}e_{jn}\bar{\eta}_{jn}+a_0h\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{x\bar{x}}e_{jn}\bar{\eta}_{jn}+ia_1h\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{x}}e_{jn}\bar{\eta}_{jn}-h\sum_{j=1}^{M-1}a_je_{jn}\bar{\eta}_{jn}+\\&h\sum_{j=1}^{M-1}v_ne_{jn}\bar{\eta}_{jn}+ia_2h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jn}\right|^2\phi_{jn}-\left|u_{jn}\right|^2u_{jn}\right)\bar{\eta}_{jn}=h\sum_{j=1}^{M-1}I_{jn}\bar{\eta}_{jn},\ n=\overline{1,N}\end{aligned} \tag{3.42}$$

toplam özdeşliğine denk olduğunu gözönüne alalım. (3.42) nin sol tarafındaki ikinci terime kısmi toplam formülünü uygulayarak özdeşlikteki $\bar{\eta}_{jn}$ fonksiyonunun yerine $\tau\bar{e}_{jn}$ fonksiyonunu alırsak

$$\begin{aligned}&h\tau\sum_{j=1}^{M-1}i\left(\delta_{\bar{t}}e_{jn}\right)\bar{e}_{jn}-a_0h\tau\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}e_{jn}\right|^2+ia_1h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_{\bar{x}}e_{jn}\right)\bar{e}_{jn}-h\tau\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left|e_{jn}\right|^2+\\&h\tau\sum_{j=1}^{M-1}v_n\left|e_{jn}\right|^2+ia_2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jn}\right|^2\phi_{jn}-\left|u_{jn}\right|^2u_{jn}\right)\bar{e}_{jn}=h\tau\sum_{j=1}^{M-1}I_{jn}\bar{e}_{jn},\ n=\overline{1,N}\end{aligned} \tag{3.43}$$

yazılır. (3.43) eşitliğinden kompleks eşleniğini çıkarırsak $n=\overline{1,N}$ için

$$\begin{aligned}&ih\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left(\delta_{\bar{t}}e_{jn}\right)\bar{e}_{jn}+\left(\delta_{\bar{t}}\bar{e}_{jn}\right)e_{jn}\right)+ia_1h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left(\delta_{\bar{x}}e_{jn}\right)\bar{e}_{jn}+\left(\delta_{\bar{x}}\bar{e}_{jn}\right)e_{jn}\right)+\\&+ia_2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left[\left(\left|\phi_{jn}\right|^2\phi_{jn}\bar{e}_{jn}+\left|\phi_{jk}\right|^2\bar{\phi}_{jn}e_{jn}\right)-\left(\left|u_{jn}\right|^2u_{jn}\bar{e}_{jn}+\left|u_{jn}\right|^2\bar{u}_{jn}e_{jn}\right)\right]\\&=2ih\tau\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(I_{jn}\bar{e}_{jn}\right),\end{aligned}$$

olduğundan

$$h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left(\delta_{\bar{t}}e_{jn}\right)\bar{e}_{jn}+\left(\delta_{\bar{t}}\bar{e}_{jn}\right)e_{jn}\right)+a_1h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left(\delta_{\bar{x}}e_{jn}\right)\bar{e}_{jn}+\left(\delta_{\bar{x}}\bar{e}_{jn}\right)e_{jn}\right)+$$
$$a_2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left[\left(\left|\phi_{jn}\right|^2\phi_{jn}\bar{e}_{jn}+\left|\phi_{jn}\right|^2\bar{\phi}_{jn}e_{jn}\right)-\left(\left|u_{jn}\right|^2u_{jn}\bar{e}_{jn}+\left|u_{jn}\right|^2\bar{u}_{jn}e_{jn}\right)\right] \quad (3.44)$$
$$=2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(I_{jn}\bar{e}_{jn}\right)$$

yazılır.

$$\left(\left|\phi_{jn}\right|^2\phi_{jn}-\left|u_{jn}\right|^2u_{jn}\right)\bar{e}_{jn}=\left(\left|\phi_{jn}\right|^2+\left|u_{jn}\right|^2\right)\left|e_{jn}\right|^2+u_{jn}\phi_{jn}\left(\bar{e}_{jn}\right)^2$$

olduğundan

$$\left[\left(\left|\phi_{jn}\right|^2\phi_{jn}-\left|u_{jn}\right|^2u_{jn}\right)\bar{e}_{jn}+\left(\left|\phi_{jn}\right|^2\bar{\phi}_{jn}-\left|u_{jn}\right|^2\bar{u}_{jn}\right)e_{jn}\right]$$
$$=2\left(\left|\phi_{jn}\right|^2+\left|u_{jn}\right|^2\right)\left|e_{jn}\right|^2+u_{jn}\phi_{jn}\left(\bar{e}_{jn}\right)^2+\bar{u}_{jn}\bar{\phi}_{jn}\left(e_{jn}\right)^2 \quad (3.45)$$

olur. (3.12) - (3.13) ve (3.45) eşitliklerini (3.44)'de yerine yazarsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left[\left|e_{jn}\right|^2-\left|e_{jn-1}\right|^2+\left|e_{jn}-e_{jn-1}\right|^2\right]+a_1\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left[\left|e_{jn}\right|^2-\left|e_{j-1n}\right|^2+\left|e_{jn}-e_{j-1n}\right|^2\right]$$
$$+a_2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left[2\left(\left|\phi_{jn}\right|^2+\left|u_{jn}\right|^2\right)\left|e_{jn}\right|^2+u_{jn}\phi_{jn}\left(\bar{e}_{jn}\right)^2+\bar{u}_{jn}\bar{\phi}_{jn}\left(e_{jn}\right)^2\right] \quad (3.46)$$
$$=2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(I_{jn}\bar{e}_{jn}\right),\ n=\overline{1,N}$$

elde edilir. (3.46) daki tüm eşitlikleri n üzerinden 1'den $m\le N$'ye toplayalım. Bu durumda

$$h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left[\left|e_{jn}\right|^{2}-\left|e_{jn-1}\right|^{2}\right]+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{jn-1}\right|^{2}+a_{1}\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left[\left|e_{jn}\right|^{2}-\left|e_{j-1n}\right|^{2}\right]$$
$$+a_{1}\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{j-1n}\right|^{2}+2a_{2}h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jn}\right|^{2}+\left|u_{jn}\right|^{2}\right)\left|e_{jn}\right|^{2} \qquad (3.47)$$
$$=-a_{2}h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}u_{jn}\phi_{jn}\left(\overline{e}_{jn}\right)^{2}-a_{2}h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\overline{u}_{jn}\overline{\phi}_{jn}\left(e_{jn}\right)^{2}+2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(I_{jn}\overline{e}_{jn}\right)$$

eşitliği elde edilir. (3.47)’de

$$\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|e_{jn}\right|^{2}-\left|e_{jn-1}\right|^{2}\right)=\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|e_{jm}\right|^{2}-\left|e_{j0}\right|^{2}\right)$$

ve

$$\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|e_{jn}\right|^{2}-\left|e_{j-1n}\right|^{2}\right)=\sum_{n=1}^{m}\left(\left|e_{M-1n}\right|^{2}-\left|e_{0n}\right|^{2}\right)$$

olduğunu dikkate alarak (3.39)- (3.40) şartlarını kullanırsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jm}\right|^{2}+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{jn-1}\right|^{2}+a_{1}\tau\sum_{n=1}^{m}\left|e_{M-1n}\right|^{2}+a_{1}\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{j-1n}\right|^{2}+$$
$$2a_{2}h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jn}\right|^{2}+\left|u_{jn}\right|^{2}\right)\left|e_{jn}\right|^{2}=-a_{2}h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}u_{jn}\phi_{jn}\left(\overline{e}_{jn}\right)^{2}-$$
$$a_{2}h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\overline{u}_{jn}\overline{\phi}_{jn}\left(e_{jn}\right)^{2}+2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(I_{jn}\overline{e}_{jn}\right)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jm}\right|^{2}+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{jn-1}\right|^{2}+a_{1}\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{j-1n}\right|^{2}+$$
$$2a_{2}h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jn}\right|^{2}+\left|u_{jn}\right|^{2}\right)\left|e_{jn}\right|^{2}\leq 2a_{2}h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|u_{jn}\right|\left|\phi_{jn}\right|\left|e_{jn}\right|^{2}+ \qquad (3.48)$$
$$2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}\right|\left|e_{jn}\right|$$

eşitsizliği yazılır. (3.48)’in sağ tarafındaki ilk terime Young eşitsizliği uygulanırsa

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jm}\right|^2+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{jn-1}\right|^2+a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{j-1n}\right|^2+$$
$$+a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jn}\right|^2+\left|u_{jn}\right|^2\right)\left|u_{jn}\right|^2\leq 2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}\right|\left|e_{jn}\right| \tag{3.49}$$

elde edilir. (3.49) un sağ tarafındaki toplamın m. terimin ayıralım ve sonra ayırdığımız terime $\varepsilon-$Cauchy eşitsizliğini, kalan toplama da Young eşitsizliğini uygulayalım. Böylece aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jm}\right|^2+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{jn-1}\right|^2+a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{j-1n}\right|^2+$$
$$a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jn}\right|^2+\left|u_{jn}\right|^2\right)\left|e_{jn}\right|^2\leq 2h\tau\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jm}\right|^2+2h\tau\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jm}\right|^2+ \tag{3.50}$$
$$h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}\right|^2+h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}\right|^2$$

(3.50) nin sol tarafındaki tüm terimlerin pozitif olduğunu gözönüne alıp $\varepsilon=2\tau$ olarak seçilirse

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jm}\right|^2\leq 4T2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jm}\right|^2+2h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}\right|^2+2h\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}\right|^2$$

olup, buradan

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jm}\right|^2\leq\left(4T+2\right)h\tau\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}\right|^2+2h\tau\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}\right|^2 \tag{3.51}$$

eşitsizliği yazılır. (3.51) de $\forall m\in\{1,2,3..N\}$ için ayrık Gronwall lemmasını kullanacak olursak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jm}\right|^2\leq c_7h\tau\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}\right|^2 \tag{3.52}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi I_{jn} yı değerlendirmek için işlem kolaylığı açısından

$$I_{jn}=I_{jn}^1+I_{jn}^2+I_{jn}^3+I_{jn}^4+I_{jn}^5+I_{jn}^6$$

olarak gösterelim ve burada $j=\overline{1,M-1},\ n=\overline{1,N}$ için

$$. I^1_{jn} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+h/2} i\frac{\partial u}{\partial t}dxdt - i\delta_{\bar{t}}u_{jn} \tag{3.53}$$

$$I^2_{jn} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+h/2} a_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdt - a_0\delta_{x\bar{x}}u_{jn} \tag{3.54}$$

$$I^3_{jn} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j-h/2} ia_1\frac{\partial u}{\partial x}dxdt - ia_1\delta_{\bar{x}}u_{jn} \tag{3.55}$$

$$I^4_{jn} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j-h/2} -a(x)udxdt + a_j u_{jn} \tag{3.56}$$

$$I^5_{jn} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j-h/2} v(t)udxdt - v_n u_{jn} \tag{3.57}$$

ve

$$I^6_{jn} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+h/2} ia_2\left|u^2\right|udxdt - ia_2\left|u_{jn}\right|^2 u_{jn} \tag{3.58}$$

olsun.

Önce $j=\overline{1,N},\ n=\overline{2,N}$ için I^1_{jn} ağ fonksiyonunu değerlendirelim. (3.53) ve (3.36) formülünü kullanırsak aşağıdaki eşitliği yazarız:

$$I_{jn}^{1}=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial u}{\partial t}dxdt-i\delta_{\bar{t}}u_{jn}$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial u}{\partial t}dxdt-i\frac{1}{\tau}\left[\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}u(x,t)dxdt-\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}u(x,t)dxdt\right]$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial u}{\partial t}dxdt-i\frac{1}{h\tau^2}\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(u(x,t)-u(x,t-\tau)\right)dxdt\right]$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dxdt-\frac{1}{h\tau^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{t-\tau}^{t} i\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial \theta}d\theta dxdt$$

$$=\frac{i}{h\tau^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{-\tau}^{0}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t+\theta)}{\partial t}\right)d\theta dxdt$$

$$=\frac{i}{h\tau^2}\int_{t_{n-2}}^{t_n}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{-\tau}^{0}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t+\theta)}{\partial \theta}\right)d\theta dxdt.$$

Buradan $j=\overline{1,M-1},\ n=\overline{2,N}$ için

$$\left|I_{jn}^{1}\right|^2\le\frac{1}{h\tau^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{-\tau}^{0}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t+\theta)}{\partial t}\right|d\theta dxdt \tag{3.59}$$

yazılır. (3.59) eşitsizliği, Fubini teoremi ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$\left|I_{jn}^{1}\right|\le\frac{1}{h\tau^2}\int_{-\tau}^{0}\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{u(x,t+\theta)}{\partial t}\right|dxdt\right]d\theta$$

$$\le\frac{\sqrt{h}}{h\tau}\left(\int_{-\tau}^{0}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t+\theta)}{\partial t}\right|^2dxdtd\theta\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow$$

$$h\tau\sum_{n=2}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}^{1}\right|^2\le\frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left[\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t+\theta)}{\partial t}\right|^2dxdt\right]d\theta \tag{3.60}$$

eşitsizliği elde edilir. Kuramsal Temeller Teorem 1.2.1'i ele alarak $L_2(\Omega)$ normu anlamında $\frac{\partial u}{\partial t}$ fonksiyonu L_2 normu anlamında sürekli olduğundan; $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $|\theta| \le \tau < \sigma$ iken

$$\left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u(x,t+\theta)}{\partial t} \right|^2 dxdt \right)^{1/2} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\sigma > 0$ sayısı vardır. Böylece $\tau < \sigma$ ve $\tau \to 0$ için $\theta \to 0$ olacağından

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u(x,t+\theta)}{\partial t} \right|^2 dxdt \to 0$$

dır. Buradan

$$h\tau \sum_{n=2}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left| I_{jn}^1 \right|^2 \le w_\tau^0 \qquad (3.61)$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla w_τ^0, τ 'ya bağlı olup $\tau \to 0$ için $w_\tau^0 \to 0$'dır.

Şimdi $j = \overline{1, M-1}$ için I_{j1}^1 fonksiyonunu değerlendirelim. (3.53) formülünü ve (3.36) formülünü kullanarak

$$I_{j1}^{1}=\frac{1}{h\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} i\frac{\partial u}{\partial t}dxdt-i\delta_{\bar{\tau}}u_{j1}$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} i\frac{\partial u}{\partial t}dxdt-\frac{i}{\tau}\left[\frac{1}{h\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} u(x,t)dxdt-u_{j0}\right]$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} i\frac{\partial u}{\partial t}dxdt-\frac{i}{\tau}\left[\frac{1}{h\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} u(x,t)dxdt-\frac{1}{\tau}\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} u(x,t_0)\,dxdt\right]$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} i\frac{\partial u}{\partial t}dxdt+\frac{i}{h\tau^2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial\theta}d\theta dxdt\Rightarrow$$

$$\left|I_{j1}^{1}\right|\le\frac{1}{h\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|dxdt+\frac{1}{h\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial\theta}\right|dxd\theta=\frac{2}{h\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|dxdt$$

eşitsizliğini elde etmiş oluruz. Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|I_{j1}^{1}\right|\le\frac{2\sqrt{\tau h}}{h\tau}\left(\int_{0}^{\tau}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}$$

olup, buradan

$$\left|I_{j1}^{1}\right|^2\le\frac{4}{h\tau}\int_{0}^{\tau}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 dxdt\quad\Rightarrow$$

$$h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{j1}^{1}\right|^2\le 4\int_{0}^{\tau}\left(\int_{0}^{\ell}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2\right)dxdt=4\int_{0}^{\tau}\left\|\frac{\partial u(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(I)}^2 dt$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte (2.30) değerlendirmesi kullanırsak

$$h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{j1}^{1}\right|^2\le c_8\tau,\ j=\overline{1,M-1}\tag{3.62}$$

yazılır. (3.61)-(3.62) taraf tarafa toplanırsa

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}^{1}\right|^{2} \le w_{\tau}^{0} + c_{9}\tau \tag{3.63}$$

elde edilir.

Şimdi I_{jn}^{2} yi değerlendirerek, $j=\overline{2,M-2},\ n=\overline{1,N}$ için (3.54) ve (3.36) formüllerini kullanırsak

$$\begin{aligned}
I_{jn}^{2} &= \frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} a_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dxdt - a_0\delta_{x\bar{x}}u_{jn}\\
&= \frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} a_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dxdt - a_0\left[\frac{u_{j+1n}-2u_{jn}+u_{j-1n}}{h^2}\right]\\
&= \frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} a_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dxdt\\
&\quad -a_0\left[\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_{j+1}-\frac{h}{2}}^{x_{j+1}+\frac{h}{2}}\frac{u(x,t)}{h^2}dxdt - \frac{1}{h\tau}2\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\frac{u(x,t)}{h^2}dxdt + \frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_{j-1}-\frac{h}{2}}^{x_{j-1}+\frac{h}{2}}\frac{u(x,t)}{h^2}dxdt\right]\\
&= \frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} a_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dxdt - \frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_{j+1}-\frac{h}{2}}^{x_{j+1}+\frac{h}{2}}u(x,t)dxdt + \frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}u(x,t)dxdt\\
&\quad + \frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}u(x,t)dxdt - \frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_{j-1}-\frac{h}{2}}^{x_{j-1}+\frac{h}{2}}u(x,t)dxdt\\
&= \frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} a_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dxdt - \frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\big(u(x+h,t)-u(x,t)\big)dxdt\\
&\quad - \frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\big(u(x,t)-u(x-h,t)\big)dxdt
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} a_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dxdt-$$

$$\frac{a_0}{h^3\tau}\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\frac{\partial u(\varsigma,t)}{\partial\varsigma}d\varsigma dxdt-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x-h}^{x}\frac{\partial u(\varsigma,t)}{\partial\varsigma}d\varsigma dxdt\right]$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} a_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dxdt-$$

$$\frac{a_0}{h^3\tau}\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\frac{\partial u(\varsigma,t)}{\partial\varsigma}d\varsigma dxdt-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\frac{\partial u(\varsigma-h,t)}{\partial\varsigma}d\varsigma dxdt\right]$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} a_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dxdt-\frac{a_0}{h^3\tau}\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\int_{\varsigma-h}^{\varsigma}\frac{\partial^2 u(\eta,t)}{\partial\eta^2}d\eta d\varsigma dxdt\right]$$

$$=\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\int_{\varsigma-h}^{\varsigma}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}d\eta d\varsigma dxdt-\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\int_{\varsigma-h}^{\varsigma}\frac{\partial^2 u(\eta,t)}{\partial\eta^2}d\eta d\varsigma dxdt$$

$$=\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\int_{\varsigma-h}^{\varsigma}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(\eta,t)}{\partial\eta^2}\right)d\eta d\varsigma dxdt$$

$$=\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{0}^{h}\int_{-h}^{0}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial\eta^2}\right)d\eta d\varsigma dxdt$$

$$=\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{0}^{h}\int_{-h}^{0}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2}\right)d\eta d\varsigma dxdt$$

olup,

$$\left|I_{jn}^2\right|\le\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{0}^{h}\int_{-h}^{0}\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2}\right|d\eta d\varsigma dxdt \qquad (3.64)$$

yazılır. (3.64) de Fubini Teoremi ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak

$$\left|I_{jn}^2\right| \le \frac{a_0\sqrt{\tau h}}{\tau h^2}\left(\int_0^h\int_{-h}^0\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2}\right|^2 d\eta d\varsigma dxdt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\left|I_{jn}^2\right|^2 \le \frac{a_0^{\,2}}{h^3\tau}\int_0^h\int_{-h}^0\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)d\eta d\varsigma$$

$$= \frac{a_0^{\,2}}{h^3\tau}\int_0^h\int_{-h}^0\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x+\varsigma,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x+\varsigma,t)}{\partial x^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\partial^2 u(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)d\eta d\varsigma$$

$$\le \frac{2a_0^{\,2}}{h^3\tau}\int_0^h\int_{-h}^0\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x+\varsigma,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)d\eta d\varsigma +$$

$$\frac{2a_0^{\,2}}{h^3\tau}\int_0^h\int_{-h}^0\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2 u(x+\varsigma,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)d\eta d\varsigma$$

$$\Rightarrow$$

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=2}^{M-2}\left|I_{jn}^2\right|^2 \le \frac{2a_0^{\,2}}{h^2}\int_0^h\int_{-h}^0\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=2}^{M-2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x+\varsigma,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)d\eta d\varsigma +$$

$$\frac{2a_0^{\,2}}{h^2}\int_0^h\int_{-h}^0\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=2}^{M-2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2 u(x+\varsigma,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)d\eta d\varsigma$$

olup

$$\begin{aligned}\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=2}^{M-2}\left|I_{jn}^2\right|^2 \le{}& \frac{2a_0^{\,2}}{h^2}\int_0^h\int_{-h}^0\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x+\varsigma,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)d\eta d\varsigma + \\ & \frac{2a_0^{\,2}}{h^2}\int_0^h\int_{-h}^0\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial^2 u(x+\varsigma,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)d\eta d\varsigma\end{aligned} \tag{3.65}$$

eşitsizliği yazılır. Kuramsal Temeller Teorem 1.2.1.'i dikkate alarak $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ fonksiyonu $L_2(\Omega)$ normu anlamında sürekli olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $|\varsigma| \le h < \sigma$ iken

$$\left(\int_\Omega \left| \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x+\varsigma,t)}{\partial x^2} \right|^2 dxdt \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve $|\eta| \le h < \sigma$ iken

$$\left(\int_\Omega \left| \frac{\partial^2 u(x+\varsigma,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2} \right|^2 dxdt \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $\sigma > 0$ sayısı vardır. Böylece $h < \sigma$ ve $h \to 0$ için $\varsigma \to 0$ ve $\eta \to 0$ olacağından

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial^2 u(x+t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x+\varsigma,t)}{\partial x^2} \right|^2 dxdt \to 0$$

ve

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial^2 u(x+\varsigma,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2} \right|^2 dxdt \to 0$$

olur. Böylece

$$h\tau \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=2}^{M-2} \left| I_{jn}^2 \right|^2 \le w_h^0 \tag{3.66}$$

olarak yazarız. Burada w_h^0, h 'a bağlı olup $h \to 0$ için $w_h^0 \to 0$'dır.

Şimdi $j = 1$, $j = \overline{M-1}$ ve $n = \overline{1,N}$ için $\left| I_{1n}^2 \right|$ ve $\left| I_{M-1n}^2 \right|$ terimini değerlendirelim. (3.54) ve (3.36) formüllerini kullanılırsak

$$I_{1n}^2=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dxdt-a_0\delta_{x\bar{x}}u_{1n}$$

$$=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dxdt-a_0\frac{(u_{2n}-2u_{1n}+u_{0n})}{h^2}$$

$$=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dxdt-\frac{a_0}{h^2}\left[\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_2-\frac{h}{2}}^{x_2+\frac{h}{2}}u(x,t)dxdt-2\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}u(x,t)dxdt+u_{0n}\right]$$

$$=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dxdt-\frac{a_0}{\tau h^3}\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_2-\frac{h}{2}}^{x_2+\frac{h}{2}}u(x,t)dxdt-2\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}u(x,t)dxdt\right]$$

$$=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\frac{\partial u(x_1+h/2,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x_1-h/2,t)}{\partial x}\right)dt-$$

$$\frac{a_0}{\tau h^3}\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\big(u(x+h,t)-u(x,t)\big)dxdt-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\big(u(x,t)-u(x_1-h/2,t)\big)dxdt\right]$$

$$I_{1n}^2=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{\partial u(x_1+h/2,t)}{\partial x}dt-\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\frac{\partial u(\varsigma,t)}{\partial \varsigma}d\varsigma dxdt+$$

$$\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x}\frac{\partial u(\varsigma,t)}{\partial \varsigma}d\varsigma dxdt-\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{\partial u(x_1-h/2,t)}{\partial x}dt$$

$$I_{1n}^2=\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\left[\frac{\partial u(x_1+h/2)}{\partial x}-\frac{\partial u(\varsigma,t)}{\partial \varsigma}\right]d\varsigma dxdt+$$

$$\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x}\left[\frac{\partial u(\varsigma,t)}{\partial \varsigma}-\frac{\partial u(x_1-h/2,t)}{\partial x}\right]d\varsigma dxd$$

$$=\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\int_{\varsigma}^{x_1+\frac{h}{2}}\frac{\partial^2 u(\eta,t)}{\partial \eta^2}d\eta d\varsigma dxdt+\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{\varsigma}\frac{\partial^2 u(\eta,t)}{\partial \eta^2}d\eta d\varsigma dxdt$$

$$\Rightarrow$$

$$\left|I_{1n}^2\right| \le \frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\int_{\varsigma}^{x_1+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2 u(\eta,t)}{\partial\eta^2}\right| d\eta d\varsigma dx dt + \frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{\varsigma}\left|\frac{\partial^2 u(\eta,t)}{\partial\eta^2}\right| d\eta d\varsigma dx dt$$

elde edilir. Buradan

$$\left|I_{1n}^2\right| \le \frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}+h}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2 u(\eta,t)}{\partial\eta^2}\right|^2 d\eta d\varsigma dx dt + \frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2 u(\eta,t)}{\partial\eta^2}\right| d\eta d\varsigma dx dt$$

$$= \frac{2a_0}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2 u(\eta,t)}{\partial\eta^2}\right| d\eta dt + \frac{a_0}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2 u(\eta,t)}{\partial\eta^2}\right| d\eta dt$$

$$= \frac{3a_0}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2 u(\eta,t)}{\partial\eta^2}\right| d\eta dt$$

olup

$$\left|I_{1n}^2\right| \le \frac{3a_0}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right| dx dt,\ \ n=\overline{1,N} \tag{3.67}$$

eşitsizliği yazılır. Benzer şekilde

$$\left|I_{M-1n}^2\right| \le \frac{3a_0}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_{M-1}-\frac{h}{2}}^{x_{M-1}+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right| dx dt,\ \ n=\overline{1,N} \tag{3.68}$$

yazılır. (3.67) - (3.68) den Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin yardımıyla

$$\left|I_{1n}^2\right| \le \frac{3a_0\sqrt{\tau h}}{h\tau}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|^2 dx dt\right)^{\frac{1}{2}},\ \ n=\overline{1,N},$$

$$\left|I_{M-1n}^{2}\right| \le \frac{3a_0\sqrt{\tau h}}{h\tau}\left(\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\int\limits_{x_{M-1}-\frac{h}{2}}^{x_{M-1}+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}, \quad n=\overline{1,N}$$

bulunur. Buradan

$$h\tau\sum_{n=1}^{N}\left|I_{1n}^{2}\right|^2 \le 9a_0{}^2\int\limits_0^h\left\|\frac{\partial^2 u(x,.)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,T)}^2 dx$$

$$h\tau\sum_{n=1}^{N}\left|I_{M-1n}^{2}\right|^2 \le 9a_0{}^2\int\limits_{l-h}^{l}\left\|\frac{\partial^2 u(x,.)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,T)}^2 dx$$

olup

$$h\tau\sum_{n=1}^{N}\left|I_{1n}^{2}\right|^2 + h\tau\sum_{n=1}^{N}\left|I_{M-1n}^{2}\right|^2 \le 9a_0{}^2\left(\int\limits_0^h\left\|\frac{\partial^2 u(x,.)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,T)}^2 dx + \int\limits_{l-h}^{l}\left\|\frac{\partial^2 u(x,.)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,T)}^2 dx\right) \quad (3.69)$$

yazılır. Bu eşitsizlikte $h \to 0$ olduğunda

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\left|I_{1n}^{2}\right|^2 + \tau h\sum_{n=1}^{N}\left|I_{M-1n}^{2}\right|^2 \to 0$$

olur. Bu bilgileri dikkate alarak (3.69) ve (3.66) birleştirirsek

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{n=1}^{M-1}\left|I_{jn}^{2}\right|^2 \le w_h^0 \quad (3.70)$$

yazabiliriz.

Şimdi $j=\overline{2,M-1}$, $n=\overline{1,N}$ için I_{jn}^{3} terimini inceleyelim. (3.55) ve (3.36) formüllerini kullanılırsak

$$I_{jn}^{3}=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} ia_1\frac{\partial u}{\partial x}dxdt-ia_1\delta_{\bar{x}}u_{jn}$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} ia_1\frac{\partial u}{\partial x}dxdt-ia_1\frac{\left(u_{jn}-u_{j-1n}\right)}{h}$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} ia_1\frac{\partial u}{\partial x}dxdt-\frac{ia_1}{h}\left[\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} u\left(x,t\right)dxdt-\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_{j-1}-\frac{h}{2}}^{x_{j-1}+\frac{h}{2}} u\left(x,t\right)dxdt\right]$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} ia_1\frac{\partial u}{\partial x}dxdt-\frac{ia_1}{h^2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} u\left(x,t\right)dxdt+\frac{ia_1}{h^2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_{j-1}-\frac{h}{2}}^{x_{j-1}+\frac{h}{2}} u\left(x,t\right)dxdt$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} ia_1\frac{\partial u}{\partial x}dxdt-\frac{ia_1}{h^2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} u\left(x,t\right)dxdt+\frac{ia_1}{h^2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} u\left(x-h,t\right)dxdt$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} ia_1\frac{\partial u}{\partial x}dxdt-\frac{ia_1}{h^2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left(u\left(x,t\right)-u\left(x-h,t\right)\right)dxdt$$

$$=\frac{ia_1}{h^2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{-h}^{0}\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}d\varsigma dxdt-\frac{ia_1}{h^2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x-h}^{x}\frac{\partial u\left(\varsigma,t\right)}{\partial\varsigma}d\varsigma dxdt$$

$$=\frac{ia_1}{\tau h^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{-h}^{0}\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}d\varsigma dxdt-\frac{ia_1}{\tau h^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{-h}^{0}\frac{\partial u}{\partial\varsigma}\left(x+\varsigma,t\right)d\varsigma dxdt$$

$$=\frac{ia_1}{\tau h^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{-h}^{0}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u\left(x+\varsigma,t\right)}{\partial x}\right]d\varsigma dxdt\Rightarrow$$

$$\left|I_{jn}^{3}\right|\leq\frac{a_1}{\tau h^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{-h}^{0}\left|\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}-\frac{\partial u\left(x+\varsigma,t\right)}{\partial x}\right|d\varsigma dxdt, \tag{3.71}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan (3.71)'de Fubini Teoremi ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak

$$\left|I_{jn}^3\right| \le \frac{a_1 h\sqrt{\tau}}{h^2\tau}\left(\int_{-h}^{0}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x+\varsigma,t)}{\partial x}\right|^2 dxdtd\varsigma\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\left|I_{jn}^3\right|^2 \le \frac{a_1^2}{\tau h^2}\int_{-h}^{0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x+\varsigma,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt\right)d\varsigma \Rightarrow$$

$$h\tau\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=2}^{M-2}\left|I_{jn}^3\right|^2 \le \frac{a_1^2}{h}\int_{-h}^{0}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x+\varsigma,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt\right)d\varsigma \qquad (3.72)$$

olur. Kuramsal Temeller Teoremi 1.2.1'i dikkate alarak $\frac{\partial u}{\partial x}$ fonksiyonu $L_2(\Omega)$ normu anlamında sürekli olduğundan $\forall\varepsilon>0$ verildiğinde $|\varsigma|\le h<\sigma$ iken

$$\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x+\varsigma,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt\right)^{1/2} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\sigma>0$ vardır. Dolayısıyla $h<\sigma$ ve $h\to 0$ için $\varsigma\to 0$ olduğundan

$$\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x+\varsigma,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt \to 0$$

olur. Böylece

$$h\tau\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=2}^{M-2}\left|I_{jn}^3\right|^2 \le w_h^1 \qquad (3.73)$$

yazalır. Burada w_h^1, h'a bağlı olup $h\to 0$ için $w_h^1\to 0$'dır.

Şimdi $j=1,\ j=\overline{M-1}$ ve $n=\overline{1,N}$ için $\left|I_{1n}^3\right|$ ve $\left|I_{M-1n}^3\right|$ terimlerine bakalım. Buradan (3.55) ve (3.36) formüllerini kullanırsak

$$I_{1n}^{3}=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}} ia_1\frac{\partial u}{\partial x}dxdt-ia_1\delta_{\bar{x}}u_{1n}$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}} ia_1\frac{\partial u}{\partial x}dxdt-ia_1\left(\frac{u_{1n}-u_{0n}}{h}\right)$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}} ia_1\frac{\partial u}{\partial x}dxdt-\frac{ia_1}{h}\left[\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}u(x,t)dxdt-u\left(x_1-\frac{h}{2},t\right)\right]$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}} ia_1\frac{\partial u}{\partial x}dxdt-\frac{ia_1}{h}\left[\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\left(u(x,t)-u\left(x_1-\frac{h}{2},t\right)\right)dxdt\right]$$

$$=\frac{ia_1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{0}^{h}\frac{\partial u}{\partial x}dxdt-\frac{ia_1}{h^2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x}\frac{\partial u}{\partial \varsigma}(\varsigma,t)d\varsigma dxdt\Rightarrow$$

$$I_{1n}^{3}\le\frac{ia_1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{0}^{h}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}dxdt-\frac{ia_1}{h^2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\frac{\partial u}{\partial \varsigma}(\varsigma,t)d\varsigma dxdt\Rightarrow$$

$$\left|I_{1n}^{3}\right|\le\frac{a_1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{0}^{h}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|dxdt+\frac{a_1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{0}^{h}\left|\frac{\partial u}{\partial \varsigma}(\varsigma,t)\right|d\varsigma dt$$

$$=\frac{a_1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{0}^{h}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|dxdt+\frac{a_1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{0}^{h}\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|dxdt$$

$$=\frac{2a_1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{0}^{h}\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|dxdt$$

olup

$$\left|I_{1n}^{3}\right|\le\frac{2a_1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{0}^{h}\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|dxdt,\quad n=\overline{1,N} \tag{3.74}$$

ve benzer şekilde

$$\left|I_{M-1n}^{3}\right|\le\frac{2a_1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{l-h}^{l}\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|dxdt,\ n=\overline{1,N} \tag{3.75}$$

eşitsizliği yazılır. (3.74) ve (3.75) de Fubini Teoremini ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak

$$\left|I_{1n}^3\right| \le \frac{2a_1\sqrt{\tau h}}{\tau h}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_0^h \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}},\ n=\overline{1,N}$$

$$\left|I_{M-1n}^3\right| \le \frac{2a_1\sqrt{\tau h}}{\tau h}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{l-h}^{l} \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}},\ n=\overline{1,N}$$

yazılır. Buradan

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\left|I_{1n}^3\right|^2 \le 4a_1^2\int_0^h\left(\int_0^T\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dt\right)dx = 4a_1^2\int_0^h\left\|\frac{\partial u(x,.)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,T)}^2 dx,$$

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\left|I_{M-1n}^3\right|^2 \le 4a_1^2\int_{l-h}^{l}\left(\int_0^T\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dt\right)dx = 4a_1^2\int_{l-h}^{l}\left\|\frac{\partial u(x,.)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,T)}^2 dx$$

olup

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\left|I_{1n}^3\right|^2 + \tau h\sum_{n=1}^{N}\left|I_{M-1n}^3\right|^2 \le 4a_1^2\left(\int_0^h\left\|\frac{\partial u(x,.)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,T)}^2 dx + \int_{l-h}^{l}\left\|\frac{\partial u(x,.)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,T)}^2 dx\right) \qquad (3.76)$$

eşitsizliği yazılır. (3.76) da $h \to 0$ olduğunda

$$h\tau\sum_{n=1}^{N}\left|I_{1n}^3\right|^2 + h\tau\sum_{n=1}^{N}\left|I_{M-1n}^3\right|^2 \to 0$$

olacaktır. Dolayısıyla (3.76) ve (3.73) birleştirilirse

$$h\tau\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}^3\right|^2 \le w_h^1 \qquad (3.77)$$

yazabiliriz.

Şimdi $j=\overline{1,M-1},\ n=\overline{1,N}$ için I_{jn}^4 'e bakalım. (3.56) ve (3.36) formüllerini kullanırsak

$$I_{jn}^4=-\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a(x)u(x,t)\,dxdt+a_ju_{jn}=\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\big(a_ju_{jn}-a(x)u(x,t)\big)dxdt$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\big(a_ju_{jn}-a(x)u_{jn}+a(x)u_{jn}-a(x)u(x,t)\big)dxdt$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\big(a_j-a(x)\big)u_{jn}dxdt+\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a(x)\big(u_{jn}-u(x,t)\big)dxdt$$

$$=\frac{1}{\tau h}u_{jn}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\big(a_j-a(x)\big)dxdt+\frac{1}{h\tau}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a(x)\big(u_{jn}-u(x,t)\big)dxdt$$

$$=u_{jn}\frac{1}{h}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\big(a_j-a(x)\big)dx+\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a(x)\big(u_{jn}-u(x,t)\big)dxdt$$

$$=u_{jn}.0+\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a(x)\big(u_{jk}-u(x,t)\big)dxdt$$

eşitliğini elde etmiş oluruz. (2.28) şartını kullanırsak

$$\left|I_{jn}^4\right|\le\frac{\mu_0}{h\tau}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|u_{jn}-u(x,t)\right|dxdt,\ j=\overline{1,M-1},\ n=\overline{1,N} \tag{3.78}$$

yazılır. Burada

$$u_{jn}-u(x,t)=\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}u(\varsigma,\theta)\,d\varsigma d\theta-u(x,t)$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\big(u(\varsigma,\theta)-u(x,t)\big)d\varsigma d\theta$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\big(u(\varsigma,\theta)-u(\varsigma,t)+u(\varsigma,t)-u(x,t)\big)d\varsigma d\theta$$

olduğundan

$$u_{jn}-u(x,t)=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t}^{\theta}\frac{\partial u(\varsigma,\eta)}{\partial\eta}d\eta d\varsigma d\theta+\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{\varsigma}\frac{\partial u(\gamma,t)}{\partial\gamma}d\gamma d\varsigma d\theta \qquad (3.79)$$

yazılır. Böylece (3.79)'u (3.78) de dikkate alırsak

$$\left|I_{jn}^4\right|\le\frac{\mu_0}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left[\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t}^{\theta}\left|\frac{\partial u(\varsigma,\eta)}{\partial\eta}\right|d\eta d\varsigma d\theta+\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{\varsigma}\left|\frac{\partial u(\gamma,t)}{\partial\gamma}\right|d\gamma d\varsigma d\theta\right]dxdt$$

$$\le\frac{\mu_0}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left[\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left|\frac{\partial u(\varsigma,\eta)}{\partial\eta}\right|d\eta d\varsigma d\theta+\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(\gamma,t)}{\partial\gamma}\right|d\gamma d\varsigma d\theta\right]dxdt$$

$$=\frac{\mu_0}{(\tau h)^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left|\frac{\partial u(\varsigma,\eta)}{\partial\eta}\right|d\eta d\varsigma d\theta dxdt+$$

$$\frac{\mu_0}{(\tau h)^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(\gamma,t)}{\partial\gamma}\right|d\gamma d\varsigma d\theta dxdt$$

$$=\frac{\mu_0}{h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(\varsigma,\eta)}{\partial\eta}\right|d\varsigma d\eta+\frac{\mu_0}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(\gamma,t)}{\partial\gamma}\right|d\gamma dt$$

olup

$$\left|I_{jn}^4\right|\le\frac{\mu_0}{h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|dxdt+\frac{\mu_0}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|dxdt \qquad (3.80)$$

eşitsizliği yazılır. (3.80) de ilk olarak Cauchy-Schwarz Teoremini, daha sonra Young eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|I_{jn}^4\right|^2\le\frac{2\mu_0{}^2\tau}{h}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2dxdt\right)+\frac{2\mu_0{}^2h}{\tau}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2dxdt\right)$$

olup buradan

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}^{4}\right|^{2} \le 2\mu_0{}^2\tau^2\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 dxdt\right)+2\mu_0{}^2h^2\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt\right)$$

$$=2\mu_0{}^2\tau^2\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}^2+2\mu_0{}^2h^2\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega)}^2$$

eşitsizliği yazılır. (2.30) değerlendirilmesi kullanılırsa

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}^{4}\right|^{2}\le c_{10}\left(\tau^2+h^2\right) \tag{3.81}$$

yazılır. (3.81) deki $c_{10}>0$, h ve τ dan bağımsız bir sabittir.

Şimdi $j=\overline{1,M-1}$, $n=\overline{1,N}$ için I_{jn}^{5}'i değerlendirelim. (3.57) ve (3.36) formüllerini kullanarak

$$I_{jn}^{5}=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} v(t)u-v_n u_{jn}$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(v(t)u-v_n u_{jn}+v(t)u_{jn}-v(t)u_{jn}\right)dxdt$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(v(t)-v_n\right)u_{jn}dxdt+\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}v(t)\left(u(x,t)-u_{jn}\right)dxdt$$

$$=\frac{1}{\tau}u_{jn}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(v(t)-v_n\right)dt+\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}v(t)\left(u(x,t)-u_{jn}\right)dxdt$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}v(t)\left(u(x,t)-u_{jn}\right)dxdt$$

yazılır. Buradan (3.79) eşitliğini ve (2.29) şartını kullanırsak

$$\left|I_{jn}^5\right| \le \frac{1}{\tau h} b_0 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left|u(x,t)-u_{jn}\right| dxdt$$

$$= \frac{b_0}{\tau h} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{1}{\tau h} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \int_{t}^{\theta} \frac{\partial u(\varsigma,\eta)}{\partial \eta} d\eta d\varsigma d\theta + \frac{1}{\tau h} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \int_{x}^{\varsigma} \frac{\partial u(\gamma,t)}{\partial \gamma} d\gamma d\varsigma d\theta \right| dxdt$$

$$\le \frac{b_0}{(\tau h)^2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \int_{t}^{\theta} \left| \frac{\partial u(\varsigma,\eta)}{\partial \eta} \right| d\eta d\varsigma d\theta dxdt +$$

$$\frac{b_0}{(\tau h)^2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \int_{x}^{\varsigma} \left| \frac{\partial u(\gamma,t)}{\partial \gamma} \right| d\gamma d\varsigma d\theta dxdt$$

$$\le \frac{b_0}{h} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial u(\varsigma,\eta)}{\partial \eta} \right| d\varsigma d\eta + \frac{b_0}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial u(\gamma,t)}{\partial \gamma} \right| d\gamma dt$$

$$= \frac{b_0}{h} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right| dxdt + \frac{b_0}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right| dxdt$$

eşitsizliği yazılır. Yukarıdaki eşitsizliğe ilk olarak Cauchy-Schwarz eşitsizliğini sonra ise Young eşitsizliğini kullanırsak

$$\left|I_{jn}^5\right| \le \frac{b_0\sqrt{\tau h}}{h} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|^2 dxdt \right)^{1/2} + \frac{b_0\sqrt{\tau h}}{\tau} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|^2 dxdt \right)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\left|I_{jn}^5\right|^2 \le \frac{2b_0{}^2\tau}{h} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|^2 dxdt + \frac{2b_0{}^2 h}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|^2 dxdt \Rightarrow$$

olup

$$\tau h \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left|I_{jn}^5\right|^2 \le 2b_0{}^2\tau^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} + 2b_0{}^2 h^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}$$

eşitsizliği yazılır. (2.30) değerlendirilmesini kullanırsak

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}^{5}\right|^{2}\le c_{11}\left(\tau^{2}+h^{2}\right) \tag{3.82}$$

yazılır. (3.82) deki $c_{11}>0$, h ve τ dan bağımsızdır.

Şimdi ise I_{jn}^{6} 'ya bakalım. $j=\overline{1,M-1}$ ve $n=\overline{1,N}$ için (3.58) ve (3.36) formüllerini kullanırsak

$$I_{jn}^{6}=\frac{ia_2}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}|u|^2 u\,dxdt-ia_2\left|u_{jn}\right|^2 u_{jn}=\frac{ia_2}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(-\left|u_{jn}\right|^2 u_{jn}+|u|^2 u\right)dxdt$$

$$=\frac{ia_2}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(-\left(\left|u_{jn}\right|^2+|u|^2\right)\left(u_{jn}-u\right)-u_{jn}u\left(\bar{u}_{jn}-\bar{u}\right)\right)dxdt\Rightarrow$$

$$\left|I_{jn}^{6}\right|\le\frac{|a_2|}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\left(\left|u_{jn}\right|^2+|u|^2\right)\left(u_{jn}-u\right)\right|dxdt+\frac{|a_2|}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|u_{jn}u\left(\bar{u}_{jn}-\bar{u}\right)\right|dxdt$$

$$\le\frac{a_2}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(\left|u_{jn}\right|^2+|u|^2\right)\left|u_{jn}-u\right|dxdt+\frac{1}{2}\frac{a_2}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(\left|u_{jn}\right|^2+|u|^2\right)\left|u_{jn}-u\right|dxdt$$

$$=\frac{3}{2}\frac{a_2}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(\left|u_{jn}\right|^2+|u|^2\right)\left|u_{jn}-u\right|dxdt$$

$$\le\frac{3}{2}\frac{a_2}{\tau h}\left(\left(\max_{\substack{1\le j\le M-1\\1\le n\le N}}\left|u_{jn}\right|\right)^2+\left(vrai\max_{(x,t)\in\Omega}|u|\right)^2\right)\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|u_{jn}-u\right|dxdt$$

olduğundan

$$\left|I_{jn}^{6}\right|\le\frac{3}{2}\frac{a_2}{\tau h}\left(\|u\|_{L_\infty(\Omega)}^2+\max_{\substack{1\le j\le M-1\\1\le n\le N}}\left|u_{jn}\right|^2\right)\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|u-u_{jn}\right|dxdt \tag{3.83}$$

yazılır. (2.30) değerlendirmesini kullanırsak

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)}\le c_{12}\|u\|_{C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(I)\right)}\le c_{13}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada (2.30) değerlendirmesinin sağ tarafı ile $c_{13} > 0$ sabiti gösterilir. Dolayısıyla

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_{13} \tag{3.84}$$

olur.

Şimdi (3.36) formülünü göz önüne alırak $j = \overline{1, M-1}$ ve $n = \overline{1, N}$ için $|u_{jn}|$'ları değerlendirelim.

$$|u_{jn}| \le \frac{1}{\tau h} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} |u|\, dxdt \le \frac{1}{\tau h} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\underset{x \in I}{vrai \max} |u| \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} dx \right) dt$$

$$= \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\underset{x \in I}{vrai \max} |u| \right) dt$$

$$\le \frac{1}{\tau} \underset{x \in I \times (0,T)}{vrai \max} |u| \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt = \|u\|_{L_\infty(\Omega)}$$

yazılır. Burada (3.84) ü kullanırsak

$$j = \overline{1, M-1},\ n = \overline{1, N} \text{ için } |u_{jn}| \le \mathrm{c}_{13} \tag{3.85}$$

olur. Buradan (3.84) ve (3.85) i (3.83)'de göz önüne alırsak aşağıdaki eşitsizliği elde etmiş oluruz:

$$|I_{jn}^6| \le c_{14} \frac{a_2}{\tau h} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} |u - u_{jn}|\, dxdt$$

$$\le c_{14} \frac{a_2}{\tau h} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \left[\frac{1}{\tau h} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \int_t^{\theta} \left| \frac{\partial u(\varsigma, \eta)}{\partial \eta} \right| d\eta d\varsigma d\theta + \frac{1}{\tau h} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \int_x^{\varsigma} \left| \frac{\partial u(\gamma, t)}{\partial \gamma} \right| d\gamma d\varsigma d\theta \right] dxdt$$

$$\le c_{14} \frac{a_2}{h} \left(\int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left| \frac{\partial u(\varsigma, \eta)}{\partial \eta} \right| d\eta d\varsigma \right) + c_{14} \frac{a_2}{\tau} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \left| \frac{\partial u(\gamma, t)}{\partial \gamma} \right| d\gamma dt \right).$$

Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak

$$\left|I_{jn}^{6}\right| \le c_{14}\frac{a_2\sqrt{\tau h}}{h}\left(\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left|\frac{\partial u(\varsigma,\eta)}{\partial \eta}\right|^2 d\eta d\varsigma\right)^{1/2}+c_{14}\frac{a_2\sqrt{\tau h}}{\tau}\left(\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(\gamma,t)}{\partial \gamma}\right|^2 d\gamma dt\right)^{1/2}$$

$$=c_{14}a_2\left[\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{h}}\left(\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left|\frac{\partial u(\varsigma,\eta)}{\partial \eta}\right|^2 d\eta d\varsigma\right)^{1/2}+\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\tau}}\left(\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(\gamma,t)}{\partial \gamma}\right|^2 d\gamma dt\right)^{1/2}\right]$$

olup buradan

$$\left|I_{jn}^{6}\right| \le c_{14}a_2\left[\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{h}}\left(\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 dxdt\right)^{1/2}+\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\tau}}\left(\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt\right)^{1/2}\right]$$

yazılır. Böylece

$$\left|I_{jn}^{6}\right|^2 \le 2c_{14}^2a_2^2\frac{\tau}{h}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 dxdt+2c_{14}^2a_2^2\frac{h}{\tau}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt \Rightarrow$$

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}^{6}\right|^2 \le 2c_{14}^2a_2^2\tau^2\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}^2+2c_{14}^2a_2^2h^2\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega)}^2$$

yazılır. (2.30) değerlendirmesini kullanırsak

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}^{6}\right|^2 \le c_{15}\left(\tau^2+h^2\right) \tag{3.86}$$

elde edilir.

$$I_{jn}=I_{jn}^{1}+I_{jn}^{2}+I_{jn}^{3}+I_{jn}^{4}+I_{jn}^{5}+I_{jn}^{6}$$

olduğundan

$$\left|I_{jn}\right|^2 \le 6\left|I_{jn}^{1}\right|^2+6\left|I_{jn}^{2}\right|^2+6\left|I_{jn}^{3}\right|^2+6\left|I_{jn}^{4}\right|^2+6\left|I_{jn}^{5}\right|^2+6\left|I_{jn}^{6}\right|^2$$

eşitsizliğinde (3.63), (3.70), (3.77), (3.81), (3.82) ve (3.86) değerlendirmelerini dikkate alırsak

$$\tau h \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left| I_{jn} \right|^2 \le w_\tau^0 + w_h^0 + w_h^1 + c_{16} \left(\tau^2 + h^2 \right) \tag{3.87}$$

yazılır. Bu ifade $\forall m \in \{1, 2, ..., N\}$ için (3.52)de dikkate alırsak

$$h \sum_{j=1}^{M-1} \left| e_{jm} \right|^2 \le c_{17} \left(w_\tau^0 + w_h^0 + w_h^1 + \tau^2 + h^2 \right) \tag{3.88}$$

olur. Böylece aşağıda ifade edilen teoremi ispatlanmış olduk.

Teorem 3.3.1 Farz edelim ki Teorem 3.2.1. sağlansın. Bu durumda (3.1)-(3.3) fark şemasının hatası için

$$h \sum_{j=1}^{M-1} \left| e_{jm} \right|^2 \le c_{18} \left(w_\tau^0 + w_h^0 + w_h^1 + \tau^2 + h^2 \right), \quad \forall m \in \{1, 2, ..., N\}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $c_{18} > 0$ sayısı τ ve h’dan bağımsız bir sabit olup $\tau \to 0$ ve $h \to 0$ için $w_\tau^0 \to 0,\ w_h^0 \to 0,\ w_h^1 \to 0$’dır.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada lineer olmayan bir Schrödinger denkleminin çözümü sonlu fark metoduyla incelenmiştir. Bunun için ilk olarak uygun ayrıklaştırma yapılarak tanım bölgesi kafeslere bölünmüştür. Gözönüne alınan Schrödinger denkleminin, başlangıç ve sınır şartlarının sonlu farklı aynısı yazılmıştır ve böylece fark şeması oluşturulmuştur. Daha sonra fark şemasının kararlılığı ispat edilerek yöntemin yakınsaklığı gösterilmiştir. Bu alanda, momentum operatörü içermeyen lineer olmayan Schrödinger denkleminin sonlu farklar metoduyla çözümleri [23, 34-43, 44-46] çalışmalarında araştırılmıştır. Bu çalışmada ise göz önüne aldığımız denklem momentum operatörü içerir ve potansiyel zamana bağımlı bir fonksiyondur. Yani, bu çalışmada göz önüne alınan denklem bu alanda literatürdeki çalışmalarda dikkate alınan denklemlerden daha geneldir.

5.KAYNAKLAR

[1] Demir, H., (2015). The stability properties of some rheological flows. Ph. D. Thesis The University of Glamorgan, School of Accounting and Mathematics, Division of Maths and Computing, Glamorgan, 264.

[2] Courant, R., Friedrichs, K.O. and Lewy, H., (1998). Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, Mart. Ann.,100, 32.

[3] Smith, G.D., (1985). Numerical Solution of Partial Differential Equations Finite Difference Methods, Oxford University Press, Oxford.

[4] Strikwerda, J.C., (1989). Finite Difference Schemes and Partial Differantial Equations, Wadsworth & Brooks/ Cole Advanced Books & Software California, 1986.

[5] Rıchtmyer, R.D., Morton, K.W, (1967). Difference Methods for Initial-Value Problems, Interscience Publishers, New York, 405.

[6] Thomos, J.W., (1995). Numerical Partial Differential Equations Finite Difference Methods. Springer- Verlag, New York, 436.

[7] Du Fort, E.C., Frankel, S. P., (1953). Stability Conditions in the Numerical Treatment of Parabolic differential equations, Math. Tables and Other Aids to Computation, 7, 135.

[8] Crank, J., Nicholsen, P., (1947). A Practial Method for Numerical İntegration of Solutions of Partial differential Equations of Heat-Conduction Type, Proc. Cambridge Philos Soc., 43, 50.

[9] Peacemann, D. W., Rachford, H.H., (1955). The Numerical Solution of Parabolic and Eliptic Differential Equations, J. Soc. Industrial Applied Maths, 3, 28

[10] Douglas, J., (1995). On The Numarical İntegration of $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$ by İmplicit Methods, J. Soc. Industrial Applied Maths, 3, 42.

[11] Khuri, S. A., (1998). A new approach to the cubic Schrödinger equation: anapplication of the decomposition technique. Applied Mathematics and Computation, 97(2-3), 251-254.

[12] Sadighi, A., and Ganji, D. D., (2008). Analytic treatment of linear and nonlinear Schrödinger equations: a study with homotopy-perturbation and Adomian decomposition methods. Physics Letters A, 372(4), 465-469.

[13] Biazar, J. and Ghazvini, H., (2007). Exact solutions for non-linear Schrödinger equations by He's homotopy perturbation method. Physics Letters A, 366(1-2), 79-84.

[14] He, J. H., (2005). Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations. Chaos, Solitons and Fractals, 26(3), 695-700.

[15] Mousaa, M. M. and Ragab, S. F., (2008). Application of the homotopy perturbation method to linear and nonlinear schrödinger equations. Zeitschrift für Naturforschung A, 63a, 140-144.

[16] Alomari, A. K., Noorani, M. S. M. and Nazar, R., (2009). Explicit series solutions of some linear and nonlinear Schrodinger equations via the homotopy analysis method. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14(4), 1196-1207.

[17] Ghanbari, B., (2014). An Analytical Study for (2+1)-dimensional Schrödinger equation. The Scientific World Journal, http://dx.doi.org/10.1155/438345.

[18] Hosseinzadeh, K., (2017). An analytic approximation to the solution of Schrodinger equation by VIM. Applied Mathematical Sciences, 11(16), 813-818.

[19] Wazwaz, A. M., (2008). A study on linear and nonlinear Schrodinger equations by the variational iteration method. Chaos, Solitons and Fractals, 37(4), 1136-1142.

[20] Akbaba, G. D., (2011). Sanal Katsayılı Gradyent içeren Schrödinger denklemi için lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

[21] Yıldırım Aksoy, N., (2017). Solution of a Nonlinear Schrödinger Equation with Galerkin's Method. Iğdır Universtiy Journal of the Institute of Science and Technology, 7(2), 225-239.

[22] Iskenderov, A. D. and Yagubov, G. Y., (2007). Optimal control problem with unbounded potential for multidimensional, nonlinear and nonstationary Schrödinger equation. Proceedings of the Lnkaran State University, Natural Sciences Series, 3-56.

[23] Iskenderov, A. D., Yagubov, G. Y. and Musayeva, M. A., (2012). Identification of the Quantum potentials. Baku, Casıoglu, 552.

[24] Mahmudov, N. M., (2007). Solvability of boundary value problems for a Schrödinger equation with püre ımaginary coefficient in the nonlinear part of this equation. Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 27(35), 25-36.

[25] Toyoğlu, F., (2012). İki boyutlu Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri ve onların nümerik çözümü. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü, Erzurum.

[26] Yagub, G., and Aksoy, E., (2017). The solvability of initial boundary value problem for three-dimensional nonlinear Schrödinger equation with a special gradient term. AIP Conference Proceedings, 1833, 020042.

[27] Becerril, R., Guzman, F. S., Rendon-Romero, A. and Valdez-Alvarado, S., (2008). Solving the time-dependent Schrödinger equation using finite difference methods. Revista Mexicana de Fisica E, 54(2), 120-132.

[28] Chan, T. F., Lee, D. and Shen, L., (1986). Stable explicit schemes for equations of the Schrödinger type. SIAM Journal on Numerical Analysis, 23(2), 274-281.

[29] Chan, T. F., and Shen, L., (1987). Stability analysis of difference schemes for variable coefficient Schrödinger type equations. SIAM Journal on Numerical Analysis, 24(2), 336-349.

[30] Dai, W., (1992). An unconditionally stable three-level explicit difference scheme for the Schrödinger equation with a variable coefficient. SIAM Journal on Numerical Analysis, 29(1), 174-181.

[31] Senger, Ö., (2006). Lineer Schrödinger denklemi için sınır değer probleminin çözümüne ait yüksek mertebeden kestirimler ve onların uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

[32] Yetişkin, H., (2005). Kompleks potansiyelli Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemi ve onun sonlu fark yaklaşımı. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

[33] Yildiz, B. and Yagubov, G., (1997). On an optimal control problem. Journal of computational and applied mathematics, 88(2), 275-287.

[34] Yıldırım Aksoy, N., Yagubov, G. and Yıldız, B., (2012). The finite difference approximations of the optimal control problem for non-linear Schrödinger

equation. International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation, 3(3), 158-183.

[35] Wang, B. and Liang, D., (2018). The finite difference scheme for nonlinear Schrödinger equations on unbounded domain by artificial boundary conditions. Applied Numerical Mathematics, 128, 183-204.

[36] Radziünas, M., (1996). On convergence and stability of difference schemes for nonlinear Schrödinger type equations. Lithuanian Mathematical Journal, 36(2), 178-194.

[37] Xie, S. S., Li, G. X. and Yi, S., (2009). Compact finite difference schemes with high accuracy for one-dimensional nonlinear Schrödinger equation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198, 1052-1060.

[38] Ivanauskas, F. and Radziunas, M., (1999). On convergence and stability of the explicit difference method for solution of nonlinear Schrödinger equations. SIAM Journal on Numerical Analysis, 36(5), 1466-1481.

[39] Sun, Z. Z. and Zhao, D. D., (2010). On the $L\infty$ convergence of a difference scheme for coupled nonlinear Schrödinger equations. Computers and Mathematics with Applications, 59, 3286-3300.

[40] Chen, J. and Zhang, L. M., (2017). Numerical approximation of solution for the coupled nonlinear Schrödinger equations. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 33(2), 435-450.

[41] Hu, H. and Hu, H., (2018). Maximum norm error estimates of fourth-order compact difference scheme for the nonlinear Schrödinger equation involving a quintic term. Journal of inequalities and applications, 2018(1), 180.

[42] Cavalcanti, M. M., Corrêa, W. J., Sepúlveda, M. A. and Asem, R. V., (2019). Finite difference scheme for a high order nonlinear Schrödinger equation with localized damping. Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica, 64(2), 161-172.

[43] Potapov, M. M., and Razgulin, A. V., (1990). Difference methods in problems of the optimal control problems of the steady selfaction of light beams. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 30(4), 134-142.

[44] Yagubov, G. Y., (1994). Optimal control by coefficient of Quasilinear Schrödinger equation. Doctoral of Science Thesis, Kiev State University, Kiev, Russia.

[45] Yagubov, G. Y. and Musayeva, M. A., (1994). The finite difference method for solution of variational formulation of an inverse problem for nonlinear Schrödinger equation. Izv. AN. Azerbaijan-Sercies Physics Technical Mathematical Science, 15(5–6), 58-61.

[46] Yıldırım Aksoy, N., Hào, D. N. and Yagub, G. (2017). Finite Difference Method for an Optimal Control Problem for a Nonlinear Time-dependent Schrödinger Equation. Numerical Functional Analysis and Optimization, 38(6), 799-817.

[47] Wheeden, R. L. and Zygmund, A., (1977). Measure and Integral: An Introduction to real analysis. Markel Dekker, INC. New York.

[48] Özeroğlu, Y., (2017). Lineer olmayan bir Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer probleminin çözümü, Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

[49] Yıldırım Aksoy, N., (2009). Lineer olmayan Schrödinger denkleminin sınırsız katsayısıyla optimal kontrol problemleri ve onların sonlu fark yaklaşımı. Doktora tezi. Atatürk Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

[50] Mikhailov, V. P., (1983). Kısmi türevli diferansiyel denklemler. Moskova (Rusça), Nauka, 424.

[51] Dadaş, M. E., (2019). Schrödinger Denklemi için Bir Ters Problemin Varyasyonel Metodlarla Çözümü. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

[52] Ladyzhenskaja, O. A., Solonnikov, V. A. and Ural'ceva, N. N., (1968). Linear and quasi-linear equations of parabolic type. American Mathematical Soc, *ABD,* 646.

[53] Mahsereci, N., (2007). Haar İntegrali. Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[54] Kaş, H.B., (2015). Kleın-Gordon Denkleminin Sonlu Farklar Metodu ile Çözümü. Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[55] Ateş, M. H., (2014). Eşit Genişlikli Dalga (Ew) Deklemlerinin Sonlu Fark Yöntemleri ile Çözümleri. Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.

[56] Deniz, M., (2013). Geçici Elektromanyetik Alan Yayılımının Sonlu Farklar Yöntemleriyle İki Boyutlu Modellenmesi. Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[57] Gölgeleyen, Fikret., (2003). Parabolik Türden Kısmi Türevli Denklemlerin Sonlu Fark Metodu ile Sayısal Çözümleri ve Kararlılık Analizi. Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.

[58] Yıldırım Aksoy, N., Koçak, Y., Özeroğlu, Y., (2016). On the solvability of inital boundary value problems for nonlinear time dependent Schrödinger Equations. Quaestiones Mathematicae, 39(9), 751-771.

[59] Yagub, G., Ibrahimov, N. S. and Zengin, M., (2018). The solvability of the Initial-Boundary Value Problems for a Nonlinear Schrödinger Equation with a Special Gradient Term. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 14(2), 214-232.

[60] Karaoğlu, B., Kuantum Mekaniğine Giriş. Seçkin Yayıncılık, Ankara, 2008.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Tuğçe TOLUÇ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Elazığ-1992
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (e-posta)	: tugcetoluc23@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Hıdır Sever Lisesi - 2007/2011
Lisans	: Kafkas Üniversitesi - 2012/2016
Yüksek Lisans	: Kafkas Üniversitesi - 2017/2020

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Çatalca Belediyesi Yazı İşleri Müdürlüğü - 2017