T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİR SCHRÖDİNGER DENKLEMİNE SONLU FARK METODUNUN UYGULANMASI

Emel SARIAHMET
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY

OCAK-2020
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİR SCHRÖDİNGER DENKLEMİNE SONLU FARK METODUNUN UYGULANMASI

Emel SARIAHMET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY

OCAK-2020
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Emel SARIAHMET'in Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Bir Schrödinger Denklemine Sonlu Fark Metodunun Uygulanması" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy . . birliği . . . . . ile kabul edilmiştir.

31/01/2020

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	**: Prof. Dr. Gabil YAGUB**	
Üye	**: Prof. Dr. Ercan ÇELİK**	
Üye	**: Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY**	N. Yıldırım

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Emel SARIAHMET
31.01.2020

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

BİR SCHRÖDİNGER DENKLEMİNE SONLU FARK METODUNUN UYGULANMASI

Emel SARIAHMET

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY

Bu tezde lineer olmayan bir Schrödinger denklemine sonlu fark metodu uygulanmıştır. Bunun için 1. çeşit bir sınır değer problemi gözönüne alınmıştır. Bu başlangıç sınır değer problemi ayrıklaştırılarak fark şeması oluşturulmuştur. Fark şemasının kararlı olduğu ispatlanarak fark şemasının hatası değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Schrödinger Denklemi, Sonlu Farklar Yöntemi, Başlangıç Sınır Değer Problemi

2020, 78 Sayfa

ABSTRACT

(Master Thesis)

APPLICATION OF FINITE DIFFERENCE METHOD TO A SCHRODINGER EQUATION

Emel SARIAHMET

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY

In this thesis, the finite difference method is applied to a non-linear Schrödinger equation. For this purpose, a first type boundary value problem is considered. This initial boundary value problem is discretized and the difference scheme is constituted. By proving the stability of the difference scheme, the error of the difference scheme is evaluated.

Key Words: Schrödinger Equation, Finite Difference Method, Initial Boundary Value Problem

2020, 78 pages

ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile yoğun çalışma programına rağmen Lisans eğitim sürecimden bu yana her zaman yol gösterici ve aynı zamanda hayat görüşü ile desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen, öğrencisi olmaktan onur duyduğum değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarım sırasında yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB hocama saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Üzerimde büyük emeklerini olduğunu düşündüğüm lisans eğitim sürecimden bu yana manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen her daim arkamda duran Sayın Prof. Dr. Haydar YÜKSEK ve Doç. Dr. Özlem GÜRSOY KOL hocama teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Tüm hayatım boyunca maddi manevi yanımda olan desteğini her adımda hissettiğim beni en iyi şekilde yetiştiren aileme özellikle de annem Ayşe SARIAHMET'e çok teşekkür ediyorum.

Emel SARIAHMET

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET .... **i**
ABSTRACT .... **ii**
ÖNSÖZ .... **iii**
ŞEKİLLER DİZİNİ .... **v**
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ .... **vi**
1. GENEL BİLGİLER **1**
1.1. Giriş 1
1.2. Kuramsal Temeller 3
2. MATERYAL VE YÖNTEM **10**
2.1. Sonlu Farklar Yöntemi 10
2.1.1 Taylor Seri Açılımlarına Dayalı Sonlu Fark Formülleri 13
2.1.2. Türevlerin Sonlu Fark Formülleri 16
2.1.2.1. I. Mertebeden Türevlerin Sonlu Fark Formülleri 16
2.1.2.2. II. Mertebeden Türevlerin Sonlu Fark Formülleri 18
2.1.3. Açık (Explicit) ve Kapalı (Implicit) Yöntem 23
2.1.3.1. Açık (Explicit) Yöntem 23
2.1.3.2. Kapalı (Implicit) Yöntem 24
2.2. Başlangıç Sınır Değer Problemi 26
3. BULGULAR **29**
3.1. Başlangıç Sınır Değer Probleminin Ayrıklaştırılması 29
3.2. Fark Şemasının Kararlılığı 31
3.3. Fark Şemasının Hatası 44
4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA **72**
5. KAYNAKLAR **73**
ÖZGEÇMİŞ **78**

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1.1.	Sürekli ve Ayrık Problemler Arasındaki İlişki	12
Şekil 2.1.2.	Düğüm Noktalarının Gösterimi	13

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\forall$	:	Herhangi
hhh	:	Hemen hemen her yerde
b.s.d.p.	:	Başlangıç sınır değer problemi
$i=\sqrt{-1}$	:	Sanal birim
$I=(0,l)$	:	Verilen bölge
$\Omega=I\times(0,T)$	:	Verilen bölge
$\bar{\Omega}=[0,l]\times[0,T]$	:	Verilen bölge
$\delta_{\bar{t}}\xi_{jn}=\dfrac{\xi_{jn}-\xi_{jn-1}}{\tau}$	:	t 'ye göre sol fark türev formülü
$\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}=\dfrac{\xi_{jn}-\xi_{j-1n}}{h}$	:	x ' e göre sol fark türev formülü
$\delta_{x}\xi_{jn}=\dfrac{\xi_{j+1n}-\xi_{jn}}{h}$	:	x ' e göre sağ fark türev formülü
$\delta_{x\bar{x}}\xi_{jn}=\dfrac{\xi_{j+1n}-2\xi_{jn}+\xi_{j-1n}}{h^2}$	:	x ' e göre ikinci mertebeden merkezi fark türev formülü
$\Vert\cdot\Vert_{L_p(I)}$	:	$1\le p\le\infty$ olmak üzere $L_p(I)$ uzaylarında norm
$\Vert\cdot\Vert_{L_p(\Omega)}$	:	$1\le p\le\infty$ olmak üzere $L_p(\Omega)$ uzaylarında norm
$W_2^2(I)$	:	Sobolev uzayı
$W_2^{0,1}(\Omega)$	:	Sobolev uzayı
$W_2^1(\Omega)$	:	Sobolev uzayı
(u,v)	:	u ile v fonksiyonunun iç çarpımı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Schrödinger denklemi kuantum mekaniğin temel denklemidir ve Newton'un ikinci yasası $F = ma$ ile benzer rolü oynamaktadır. Klasik mekanikte Newton'un ikinci yasası ile belirli bir $F(x,t)$ kuvvetinin etkisi altındaki m kütleli bir parçacığın belirli bir zamandaki konumunu (dolayısıyla hızını, momentumunu, kinetik enerjisini v.s) belirleyebiliyoruz. İşte klasik mekanikte Newton'un ikinci yasasının yaptığı işlemi kuantum mekanikte Schrödinger denklemi üstlenir. Ancak, Schrödinger denklemi, bir maddenin (parçacığın) dalga özelliklerini (yani dalganın uzunluğu, frekansı, dalganın enerji ve momentum,..vs) modelleyen bir dalga denklemidir ve onun çözümü bir dalga fonksiyonu olarak adlandırılır. Bu dalga fonksiyonu, parçacığın zamanla değişimi hakkında bize bilgi verir. Ancak parçacığın konumunu tam olarak belirleyemez. Sadece belirli bir alanda parçacığın bulunma olasılığını ifade eder.

Schrödinger denklemi

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r,t)\right]\psi(r,t) = (T+V)\psi(r,t) = H\psi(r,t)$$

biçiminde kuantum mekanik bir sistemin toplam enerjisini ifade eden bir denklemdir. Burada $i = \sqrt{-1}$, r ve t sırasıyla konum vektörü ve zaman değişkeni; $\psi(r,t)$ dalga fonksiyonu; $\hbar$ indirgenmiş plank sabitidir, yani h plank sabiti olmak üzere $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ dir; m parçacığın kütlesi olmak üzere,

$$T = \frac{p^2}{2m} \text{ kinetik enerji operatörü,}$$

$$p = -i\hbar\nabla \text{ momentum operatörü,}$$

$$V = V(r,t) \text{ parçacığın potansiyel enerji operatörü,}$$

H Hamiltonian operatörü olup sistemin toplam enerjisini tanımlar.Burada ∇ gradient operatörü ∇^2 ise Laplace operatörüdür.

Görüldüğü gibi

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(r,t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(r,t)\right]\psi(r,t)$$

Schrödinger denkleminin sağ tarafı iki terimin toplamından oluşmaktadır ki bu terimlerden ilki sistemin kinetik enerjisi, ikincisi potansiyel enerjisidir. Bu ikisinin toplamı da yani kinetik enerji ile potansiyel enerjinin toplamı da sistemin toplam enerjisini verir. Denklemin sol tarafı ise ψ dalga fonksiyonunun zamana göre değişimini ifade eder.

Böylece Schrödinger denklemi, bir kuantum mekanik sistemin enerjisinin zamanla nasıl değiştiğini ifade eden bir denklemdir [1,2].

Pek çok araştırmacı Schrödinger denkleminin farklı versiyonlarının çözümlerini farklı metodlar kullanarak tam, yaklaşık veya nümerik olarak incelemişlerdir. Mesela, [3,4] çalışmalarında Adomian ayrıştırma metodu; [5-7] çalışmalarında Homotopy Perturbasyon metodu; [8,9] çalışmalarında Homotopy Analiz metodu; [10,11] çalışmalarında Varyasyonel iterasyon metodu; [12-18,36] çalışmalarında ise Galerkin metodu kullanılarak denklemin çözümleri incelenmiştir.

Bu çalışmada ise biz lineer olmayan bir Schrödinger denkleminin çözümünü sonlu farklar metodu ile inceleyeceğiz.

Lineer Schrödinger denkleminin sonlu farklar metoduyla çözümü [15,17,19-25] çalışmalarında incelenmiştir. Bu çalışmalarda genelde, fark şeması oluşturulmuş, fark şemasının kararlılığı ve yakınsaklığı araştırılmış ve nümerik örnekler verilmiştir.

[15,26-35,37-39] çalışmalarında ise lineer olmayan Schrödinger denklemi için sınır değer problemlerine sonlu fark metodu uygulanmıştır. Ve çoğunda yöntemin kararlılığı , hatası, yakınsaklığı araştırılmıştır.

Yukarıda bahsedilen çalışmalarda gözönüne alınan lineer olmayan Schrödinger denklemleri momentum operatörünü içermez. Bu çalışmada ise biz momentum operatörünü içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için bir b.s.d.p. ne sonlu farklar yöntemini uyguluyoruz. Fark şemasının kararlılığını ispat ederek, şemanın hatasını değerlendiriyoruz.

Bu çalışma 4 bölümden oluşmaktadır.

Tezin 1. bölümü 1.1. ve 1.2. bölümlerinden oluşmaktadır. 1.1. bölümünde Schrödinger denklemi ile ilgili genel bir bilgi verilerek bu çalışmayla alakalı literatür taraması verilmiş olup 1.2. bölümünde tezde kullanılan temel tanımlar, teoremler ve bazı önemli eşitsizlikler verilmiştir.

Tezin 2. bölümü, 2 alt bölümden oluşmaktadır. 2.1. bölümünde sonlu farklar yöntemi ve uygulanması hakkında genel bilgiler verilmiş olup, 2.2. bölümünde bu çalışmada göz önüne alınacak olan b.s.d.p. ifade edilir.

Tezin 3. bölümü, 3 alt bölümden oluşmaktadır. 3.1. bölümünde b.s.d.p. ayrıklaştırılarak fark şeması oluşturulur. 3.2. bölümünde fark şemasının kararlılığı ispatlanır. 3.3. bölümünde ise fark şemasının hatası değerlendirilir.

Tezin 4. bölümünde ise elde edilen sonuçlar belirtilerek, bu alanda literatürdeki çalışmalardan farklılığı vurgulanmıştır.

1.2. Kuramsal Temeller

Çalışmanın bu bölümünde, tezde kullanacağımız bazı kavramların tanımları verilerek, teoremler ve lemmalar ifade edilmiştir.

Tanım 1.2.1. Bir özelliğin bir E kümesi üzerinde hemen hemen her yerde (kısaca hhh) sağlanması demek, o özelliğin E'de ölçümü sıfır olan bazı alt kümelerinin dışında sağlanması demektir. Örneğin "E'de hhh $f=0$" ifadesinin anlamı E'nin bazı Z alt kümesinin dışındaki her yerde $f(x)=0$'dır. Öyle ki Z kümesinin ölçümü sıfırdır [40].

Tanım 1.2.2. I, $\mathbb{R}^n$' de bir bölge ve $1 \le p < \infty$ reel sayı olmak üzere, I üzerinde

$$\int_I |u(x)|^p \, dx \le \infty, \; x \in I$$

koşulunu sağlayan u fonksiyonlar sınıfına $L_p(I)$ uzayı denir. Bu uzay üzerindeki norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{L_p(I)} = \left(\int_I |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

[41].

Tanım 1.2.3. $L_2(I)$ bir hilbert uzayı olmak üzere, I kümesi üzerinde ölçülebilir olan mutlak değerinin karesiyle integrallenebilen fonksiyonlar uzayını göstermektedir. $L_2(I)$ uzayı üzerinde iç çarpım

$$\langle u,v \rangle_{L_2(I)} = \int_0^l u(x)\bar{v}(x)\,dx$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $L_2(I)$ uzayı üzerinde norm

$$\|u\|_{L_2(I)} = \sqrt{\langle u,u \rangle_{L_2(I)}}$$

olarak tanımlanmaktadır [42].

Tanım 1.2.4. $L_\infty(I)$ bir banach uzayı olmak üzere, I kümesi üzerinde sınırlı, ölçülebilir ve sonlu

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_\infty(I)} &= vrai \sup_{x \in I} |u(x)| = ess \sup \{ |u(x)| : x \in I \} \\ &= \inf \{ c \ge 0 : hhh \; x \in I \text{ için } |u(x)| \le c \} \end{aligned}$$

normuna sahip $u = u(x)$ fonksiyonlarının uzayıdır [42].

Tanım 1.2.5. $S(\Omega)=\{u\in\Omega : u,\ \Omega$ da tanımlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi$\}$ ve $1\le p<\infty$ olmak üzere

$$\int_{\Omega}|u(x,t)|^{p}\,dxdt<\infty$$

özelliğine sahip tüm ölçülebilir fonksiyonların sınıfına $L_p(\Omega)$ uzayı adı verilir. Bu $L_p(\Omega)$ uzayı

$$L_p(\Omega)=\left\{u\in S(\Omega):\int_{\Omega}|u(x,t)|^{p}\,dxdt<\infty,\ 1\le p<\infty\right\}$$

biçiminde gösterilir.

Eğer $u\in L_p(\Omega)$ ve $c\in\mathbb{C}$ ise $cu\in L_p(\Omega)$ olur. Ayrıca $u,v\in L_p(\Omega)$ için

$$|u(x,t)+v(x,t)|^{p}\le\left(|u(x,t)|+|v(x,t)|\right)^{p}\le 2^{p}\left(|u(x,t)|^{p}+|v(x,t)|^{p}\right)$$

olduğundan $u+v\in L_p(\Omega)$ yazılabilir. Bu durumda, $L_p(\Omega)$ uzayı bir vektör uzayı olur. $L_p(\Omega)$ uzayı üzerinde

$$\|u\|_{L_p(\Omega)}=\left(\int_{\Omega}|u(x,t)|^{p}\,dxdt\right)^{1/p},\ 1\le p<\infty$$

biçiminde bir norm tanımlandığında $L_p(\Omega)$ uzayı bu norm altında bir Banach uzayıdır. $L_p(\Omega)$ uzayında $1\le p<\infty,\ p=2$ olarak alındığında $L_2(\Omega)$ uzayı oluşur. Bu uzayda norm

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}=\left(\int_{\Omega}|u(x,t)|^{2}\,dxdt\right)^{1/2}$$

dır ve

$$\langle u,v\rangle=\int_{\Omega}u(x,t)\,\bar{v}(x,t)\,dxdt\Rightarrow\|u\|=\sqrt{\langle u,v\rangle}$$

iç çarpımıyla $L_2(\Omega)$ uzayı bir Hilbert uzayıdır [43].

Tanım 1.2.6. Ω üzerinde hemen hemen sınırlı fonksiyonların uzayına $L_\infty(\Omega)$ uzayı denir ve bu uzay üzerindeki norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}\|u\|_{L_\infty(\Omega)} &= vrai\sup_{(x,t)\in\Omega}|u(x,t)| = ess\sup_{(x,t)\in\Omega}|u(x,t)| \\ &= \inf\left\{C>0:\ hhh(x,t)\in\Omega \text{ için } |u(x,t)|\le C\right\}\end{aligned}$$

Tanım1.2.7. $W_2^1(I)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(I)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle_{W_2^1(I)} &= \int_0^l \left(u(x)\overline{v}(x) + \frac{\partial u(x)}{\partial x}\frac{\partial \overline{v}(x)}{\partial x}\right)dx, \\ \|u\|_{W_2^1(I)} &= \sqrt{\langle u,u\rangle_{W_2^1(I)}}.\end{aligned}$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(I)$ uzayı $W_2^1(I)$ uzayının alt uzayı olup, I aralığının uç noktalarında sıfıra eşit olan fonksiyonların uzayıdır [42].

Tanım 1.2.8. $W_2^2(I)$ hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların ikinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(I)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle_{W_2^2(I)} &= \int_0^l \left(u(x)\overline{v}(x) + \frac{\partial u(x)}{\partial x}\frac{\partial \overline{v}(x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \overline{v}(x)}{\partial x^2}\right)dx \\ \|u\|_{W_2^2(I)} &= \sqrt{\langle u,u\rangle_{W_2^2(I)}}, \\ \overset{0}{W}{}_2^2(I) &\equiv W_2^2(I)\cap \overset{0}{W}{}_2^1(I)\end{aligned}$$

[42].

Tanım1.2.9. $W_2^{0,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların t değişkenine göre genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle u,v\rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left(u(x,t)\overline{v}(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \overline{v}(x,t)}{\partial t} \right) dxdt,$$
$$\|u\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{W_2^{0,1}(I)}}$$

[42].

Tanım 1.2.10. $C^k([0,T],B)$ banach uzayı olup, elemanları $[0,T]$ aralığında tanımlanmış k. dereceden sürekli türevlere sahip ve değerleri $B-$Banach uzayına ait fonksiyonların uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\|u\|_{C^k([0,T],B)} = \sum_{m=0}^{k} \max_{0\le t\le T} \left\| \frac{d^m u(t)}{dt^m} \right\| < +\infty$$

[42].

Tanım 1.2.11. $D \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $|z| < \sigma$ şartını sağlayan tüm z 'ler için $1 \le p < \infty$ iken $\| f(x+z) - f(x)\|_{L_p(D)} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\sigma > 0$ sayısı varsa, $f(x)$ fonksiyonuna L_p normu anlamında süreklidir denir [42].

Teorem 1.2.1. $1 \le p < \infty$ iken $L_p(D)$'den olan her fonksiyon L_p normu anlamında süreklidir [44].

Teorem 1.2.2. (Hölder ve Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) $1 \le p \le \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ise $\| fg\|_{L_1(E)} \le \| f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_{p'}(E)}$'dır. Yani E, R^n'de ölçülebilir bir küme olmak üzere

$$\int_E |fg| \le \left(\int_E |f|^p\right)^{1/p}\left(\int_E |g|^{p'}\right)^{1/p'} \quad (1<p<\infty);$$
$$\int_E |fg| \le \left(ess\sup_E |f|\right)\int_E |g|$$

dır. Bu teoremin bir sonucu olarak $p = p' = 2$ olduğunda

$$\int_E |fg| \le \left(\int_E |f|^2\right)^{1/2}\left(\int_E |g|^2\right)^{1/2}$$

elde edilen eşitsizliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir [40].

Teorem 1.2.3. (Fubini Teoremi) (X, A, μ) ve (Y, B, v) iki tam ölçüm uzayı ve f, $X \times Y$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Öyleyse:

1) Hemen hemen her $x \in X$ için $f_x(y) = f(x, y)$ ile tanımlanan f_x fonksiyonu Y üzerinde integrallenebilen bir fonksiyondur.

2) Hemen hemen her $y \in Y$ için $f^y(x) = f(x, y)$ ile tanımlanan f^y fonksiyonu X üzerinde integrallenebilen bir fonksiyondur.

3) $\int_Y f(x, y)dv(y)$, X üzerinde integrallenebilen bir fonksiyondur.

4) $\int_X f(x, y)d\mu(x)$, Y üzerinde integrallenebilen bir fonksiyondur.

5) $\int_X \left[\int_Y fdv\right]d\mu = \int_{X\times Y} fd(\mu \times v) = \int_Y \left[\int_X fd\mu\right]dv.$

[45].

Lemma 1.2.1. (Ayrık Gronwall Eşitsizliği) Negatif olmayan $\{w(n), g(n),\ n = 1, 2, ..., N,\ N\tau = T\}$ ağ fonksiyonlarının

$$w(n) \le g(n) + \tau\sum_{l=1}^{n} B_l w(l)$$

eşitsizliğini sağladığını kabul edelim. Burada $B_l\ (l = 1, 2, ..., N)$ negatif olmayan sabitlerdir. Bu durumda herhangi $0 \le n \le N$ için

$$w(n) \le g(n)\exp\left(n\tau\sum_{l=1}^{n} B_l\right)$$

dır [32].

Lemma 1.2.2. ($\varepsilon -$Cauchy Eşitsizliği) Keyfi a, b sayıları ve herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$|ab| \le \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir [46].

Lemma 1.2.3. (Young Eşitsizliği) $p, q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere herhangi $a > 0, b > 0$ reel sayıları için

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

dır [47].

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Sonlu Farklar Yöntemi

Günümüzde uygulamalı bilim dallarında ortaya çıkan problemler, teorik ve uygulamalı yöntemler ile çözülebilmektedir. Problemin analitik çözümü olsa bile sayısal yöntemlerin kullanılmasıyla çözüm çok daha basit hale indirgenebilmektedir.

Bir fonksiyonun s_0 noktasındaki türevi için yaklaşık hesaplama yapan yaklaşım tekniğine sonlu fark yaklaşımı denir. Bu yöntemde hesaplama yapılırken, s_0 noktası ile bu noktadan küçük bir artış ile elde edilen $(s_0 + h)$ noktasındaki fonksiyon değerleri kullanılabilir.

Sonlu fark yaklaşımında türevin tanımı olan;

$$\left.\frac{d\xi}{dx}\right|_{s=s_0} = \lim_{h\to 0}\frac{\xi(s_0+h)-\xi(s_0)}{h} \tag{0.1}$$

eşitliğin yerine,

$$\left.\frac{\partial\xi}{\partial s}\right|_{s=s_0} \approx \frac{\xi(s_0+h)-\xi(s_0)}{h} \tag{0.2}$$

yaklaşımı kullanılır. Burada $s-$ ekseni üzerinde küçük bir artış h ile gösterilmektedir [48].

Bir fonksiyonun analitik çözümünün olması durumunda, fonksiyonun belirli noktalardaki türevini, belirli aralıklardaki integralini ve istenen noktalardaki değerlerini hesaplamak mümkündür. Ancak bir fonksiyonun analitik çözümünün bilinmediği durumlarda sadece fonksiyon değerlerinin belli ayrık noktalarda bilindiği yerlerde bu tür hesaplamaları yapmak mümkün değildir. Bu tür hesaplamaları yapabilmek için sayısal yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bu yaklaşımlardan sonlu farklar yöntemi, sayısal türev için geliştirilmiş bir yöntemdir. Ayrıca günümüzde en çok kullanılan yöntemlerden birisidir.

Sonlu farklar uygulamaları ilk kez Daniel ve Jacob Bernoulli, Leonard Euler, Jacobo Stirling gibi bilim adamları tarafından yapılmıştır. Mühendislik alanlarında sık sık karşılaşılan örneğin, türev ve integral alma, iç ve dış değer bulma, sayısal veriye polinom uydurma gibi problemler sonlu farklar yaklaşımı ile çözülebilir. Son yıllarda gelişen bilgisayar teknolojisi ve buna bağlı olarak ortaya çıkan hızlı ve süper bilgisayarlar, sayısal hesaplamaları daha cazip hale sokarken, özellikle sonlu farklar yaklaşımı ile ilgili çalışmaların artışındaki en etkili neden olmuştur [49].

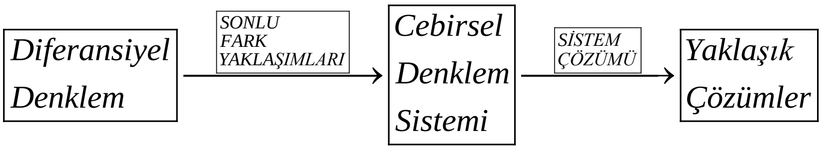
Kısmi diferansiyel denklemler için de pek çok sayısal hesaplama teknikleri vardır. Matematikte çoğunlukla nümerik bir yöntem olan sonlu fark yöntemleri gerek lineer gerekse lineer olmayan problemlerde en sık kullanılan yöntemdir. Sonlu farklar yönteminin temeli, kısmi diferansiyel denklemlerde görülen türevlerin sonlu ve ayrık noktalarda yaklaşık olarak ifade edilmesi üzerine kuruludur. Bu yaklaşımlar cebirsel formdadır ve yaklaşık çözümler düğüm noktaları üzerinden hesaplanır. Sonlu fark yaklaşımının uygulanmasında aşağıdaki adımlar göz önünde bulundurulur:

→ Çözüme geçmeden önce problemin çözüm bölgesi dikdörtgen şeklinde kafeslere ayrılır. Bu kafeslerin düğüm(grid) noktaları üzerinden yaklaşık çözüm bulunur.
→ Taylor serisi yardımı ile diferansiyel denklemdeki türevler yerine onlara karşılık gelen sonlu fark formülleri yazılır. Böylece çözülmek istenen diferansiyel denklem, bir cebirsel denklem sisteminin çözümü problemine indirgenir ve bu cebirsel denklem sisteminin çözümü uygun yöntemlerden biri ile bulunur.
→ Problemde verilen başlangıç ve sınır şartlarının yerine uygun fark yaklaşımları yazılır.
→ Yöntemin geçerliliği için yakınsaklığı, tutarlılığı ve kararlılığı incelenir.

Diferansiyel problemleri ayrıklaştırırken aşağıdaki üç önemli noktayı dikkate almak gerekmektedir:

- Diferansiyel problemin sonlu farklara dönüştürüldüğünde diskretleştirme hatasının bulunması ve değerlendirilmesi
- Elde edilen cebirsel denklem sisteminin bilinen yöntemlerden biriyle çözülmesi
- Yaklaşık çözümle gerçek çözüm arasındaki farkın değerlendirilmesi.

Aşağıdaki şekil ile bir diferansiyel denklemin yaklaşık çözümlerinin bulunması süreci gösterilmiştir:



Şekil 2.1.1 : Sürekli ve Ayrık Problemler Arasındaki İlişki.

s ve t sırasıyla uzay ve zaman değişkeni olmak üzere; ξ, s ve t nin bir fonksiyonu olsun. Uzay değişkeni adım uzunluğu $h(\equiv \Delta s)$, zaman değişkeni adım uzunluğu $\tau(\equiv \Delta t)$ olmak üzere, uzay ve zaman koordinatları sırasıyla;

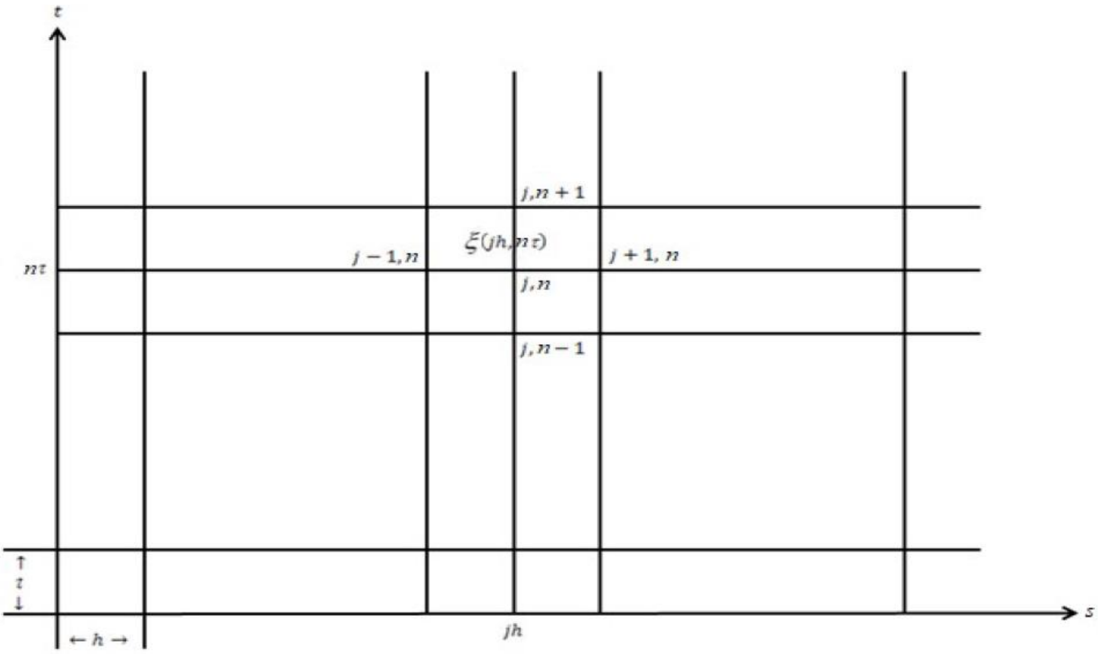
$$s = s_j = j\Delta s = jh,\ j = \overline{0, M}$$

$$t = t_n = n\Delta t = n\tau, n = \overline{0, N}$$

olarak gösterilir.

Ayrıca, ξ fonksiyonunun $(jh, n\tau)$ düğüm noktasındaki değeri,

$$\xi = \xi(j\Delta s, n\Delta t) = \xi(jh, n\tau) = \xi_j^n$$



Şekil 2.1.2 : Düğüm Noktalarının Gösterimi

ile gösterilir [50].

Çözüm bölgesinde ortaya çıkan notasyon:

<u>NOTASYON</u>	<u>ANLAMI</u>
$\xi(s,t)$	Sürekli çözüm (Gerçek çözüm)
$\xi(s_j,t_n)$	Bölüntü noktalarında hesaplanan sürekli çözüm
ξ_j^n	Sonlu fark denklemlerinin çözümüyle elde edilen yaklaşık nümerik (sayısal) çözüm

[51].

2.1.1 Taylor Seri Açılımlarına Dayalı Sonlu Fark Formülleri

Taylor seri açılımları bir fonksiyonun değişik mertebeden türevlerine yapılan sonlu fark yaklaşımlarının elde edilmesinde önemli rol oynar.

<u>Teorem 2.1.1.1</u> k sayısı herhangi bir doğal sayı olmak üzere $\xi(s)$ fonksiyonunun s_0 noktasının herhangi bir civarında $k+1.$ mertebeden türevinin var olduğunu varsayalım. Ayrıca s noktası s_0 ' ın gösterilen civarından bir nokta, p ise herhangi pozitif sayı olsun. Şu halde s_0 ve s noktaları arasında öyle bir φ noktası bulunabilir ki

$$\begin{aligned}\xi(s) &= \xi(s_0) + \frac{\xi'(s_0)}{1!}(s-s_0) + \frac{\xi''(s_0)}{2!}(s-s_0)^2 + \\ &+ \ldots + \frac{\xi^k(s_0)}{k!}(s-s_0)^k + R_{k+1}(s)\end{aligned} \tag{0.3}$$

gerçeklenmektedir. Bu durumda,

$$R_{k+1}(s) = \left(\frac{s-s_0}{s-\varphi}\right)^p \frac{(s-\varphi)^{k+1}}{k!\,p}\xi^{k+1}(\varphi) \tag{0.4}$$

(2.3) formülüne Taylor formülü denir. $R_{k+1}(s)$ ifadesine ise genelde kalan terim veya hata terimi denir.

$R_{k+1}(s)$ kalanı Lagrange, Cauchy ve Peano olmak üzere üç farklı şekilde ifade edilir. φ noktası s_0 ve s arasında olduğundan $\varphi = s_0 + \theta(s-s_0)$ yazılabilir. Burada $\theta = \theta(p)$ olup $0 < \theta < 1$ eşitsizliği sağlanır. Bu durumda $s - \varphi = (s-s_0)(1-\theta)$ olup bunu (2.4) formülünde kullanırsak

$$R_{k+1}(s) = \frac{(s-s_0)^{(k+1)}(1-\theta)^{(k-p+1)}}{k!\,p}\xi^{(k+1)}(s_0 + \theta(s-s_0)) \tag{0.5}$$

olur. Burada $p = k+1$ ve $p = 1$ olarak alınırsa sırasıyla Lagrange ve Cauchy kalan formülü olarak adlandırılan aşağıdaki formüller elde edilir:

$$R_{k+1}(s) = \frac{(s-s_0)^{k+1}}{(k+1)!}\xi^{(k+1)}(s_0 + \theta(s-s_0)) \tag{0.6}$$

$$R_{k+1}(s) = \frac{(s-s_0)^{k+1}(1-\theta)^k}{k!}\xi^{(k+1)}(s_0 + \theta(s-s_0)). \tag{0.7}$$

Bazen sayısal hata hesabından daha çok hatanın $s-s_0$ 'a göre hangi mertebeden sonsuz küçük olması önemlidir. Bu amaçla da kalanın $R_{k+1}(s)=o\left(s^{k+1}\right)$ biçiminde Peano şekli kullanılır [52].

<u>Tanım 2.1.1.1.</u> Fonksiyon serisi olan

$$\begin{aligned}\xi(s)=\xi(s_0)+\frac{\xi'(s_0)}{1!}(s-s_0)+...+\frac{\xi^{(k)}(s_0)}{k!}(s-s_0)^k+ \\ +...=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi^{(k)}(s_0)}{k!}(s-s_0)^k\end{aligned} \tag{0.8}$$

serisine I aralığında sonsuz kez türetilebilen $\xi(s)$ fonksiyonu için Taylor serisi denir. (2.3) formülüne göre (2.8) Taylor serisinin bir s noktasında $\xi(s)$'e yakınsaması için yeter ve gerek şart

$$\lim_{k\to\infty}R_{k+1}(s)=0 \tag{0.9}$$

olmasıdır [52]. (2.8) formülünde $s=s_0+h$ olarak seçilirse, ξ fonksiyonunun $s=s_0$ noktası civarındaki seri açılımı,

$$\begin{aligned}\xi(s_0+h)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi^{(k)}(s_0)}{k!}h^k \\ &=\xi(s_0)+\frac{\xi'(s_0)}{1!}h+\frac{\xi''(s_0)}{2!}h^2+o\left(h^3\right)\end{aligned} \tag{0.10}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $o\left(h^3\right)$ ifadesi ile serinin kalan terimleri gösterilmektedir. Ve kalan terimler içerisindeki ilk terimin h^3 terimini içerdiğini söyler. Buradaki h küçük bir değeri temsil ettiğinden $h<1$ olması durumunda $h>h^2>h^3>h^4>...$ olur. Dolayısıyla $\xi(s_0+h)$ değerinin hesaplanmasında ihmal edilen $o\left(h^3\right)$ ifadesi genelde hata derecesi olarak ifade edilir.

(2.10) ile verilen Taylor seri açılımında h^2'li terimden sonraki terimler ihmal edilerek $\xi''(s_0)$ değeri çekilirse,

$$\begin{aligned}\xi'(s_0) &= \frac{\xi(s_0+h)-\xi(s_0)}{h}+\frac{h}{2!}\xi''(s_0)+o(h^2) \\ &= \frac{\xi(s_0+h)-\xi(s_0)}{h}+o(h)\end{aligned} \tag{0.11}$$

olur. Böylece elde edilen yaklaşımlar sonlu fark yönteminin uygulamalarında, diferansiyel denklemdeki türev terimleri yerine kullanılır. Ve uygun bir h değeri için ayrık noktalardaki yaklaşık çözümler elde edilir.

2.1.2. Türevlerin Sonlu Fark Formülleri

2.1.2.1. I. Mertebeden Türevlerin Sonlu Fark Formülleri

Bir $\xi(s)$ fonksiyonunun $(s+h)$ noktası civarındaki Taylor seri açılımı (2.8) formülü ile

$$\xi(s+h)=\xi(s)+\xi'(s)h+\xi''(s)\frac{h^2}{2!}+\xi'''(s)\frac{h^3}{3!}+\ldots \tag{0.12}$$

şeklinde yazılır. Burada birinci türev çekildiğinde

$$\xi'(s)=\frac{\xi(s+h)-\xi(s)}{h}-\xi''(s)\frac{h}{2!}-\xi'''(s)\frac{h^2}{3!}-\ldots \tag{0.13}$$

denklemi elde edilir. Hata terimi

$$o(h)=-\xi''(s)\frac{h}{2!}-\xi'''(s)\frac{h^2}{3!}-\ldots \tag{0.14}$$

olarak gösterilirse birinci türev

$$\xi'(s)=\frac{\xi(s+h)-\xi(s)}{h}+o(h) \tag{0.15}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifade indissel formda

$$\xi'(s)=\frac{\xi_{j+1}-\xi_j}{h}+o(h) \tag{0.16}$$

şeklini alır. Bu formüle birinci mertebeden hataya sahip ileri fark formülü denir [53-55]. İleri fark formülünde adım uzunluğu azaldıkça, kesme hatası küçülür. Ve sonlu fark yaklaşımının doğruluğu artar. Denklemden hata terimi çekildiğinde

$$o(h) = \xi'(s) - \left(\frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{h} \right) \tag{0.17}$$

bulunur. Dolayısıyla türevin gerçek değeri ile sonlu fark gösterimi arasındaki farkın hata terimi olduğu görülür.

$\xi(s)$ fonksiyonunun $(s-h)$ noktası civarındaki Taylor seri açılımı

$$\xi(s-h) = \xi(s) - \xi'(s)h + \xi''(s)\frac{h^2}{2!} - \xi'''(s)\frac{h^3}{3!} + \dots \tag{0.18}$$

şeklinde yazılabilir. (2.18)'den birinci türev çekildiğinde;

$$\xi'(s) = \frac{\xi(s) - \xi(s-h)}{h} + o(h) \tag{0.19}$$

bulunur. Bu ifade indissel formda yazıldığında

$$\xi'(s) = \frac{\xi_j - \xi_{j-1}}{h} + o(h) \tag{0.20}$$

şeklini alır. Bu formüle birinci mertebeden hataya sahip geri fark formülü denir [53-55].

(2.12) ve (2.18) denklemleri birbirinden çıkartıldığında;

$$\xi(s+h) - \xi(s-h) = \xi'(s)2h + \xi'''(s)\frac{2h^3}{3!} \tag{0.21}$$

eşitliği elde edilir. Buradan birinci türev çekildiğinde

$$\xi'(s) = \frac{\xi(s+h) - \xi(s-h)}{2h} + o(h^2) \tag{0.22}$$

bulunur. Bu ifade indissel formda

$$\xi'(s) = \frac{\xi_{j+1} - \xi_{j-1}}{2h} + o(h^2) \tag{0.23}$$

şeklini alır. Bu formüle ikinci mertebeden hataya sahip merkezi fark formülü denir [53-55].

2.1.2.2. II. Mertebeden Türevlerin Sonlu Fark Formülleri

$\xi(s)$ fonksiyonunun $(s+2h)$ noktası civarındaki Taylor seri açılımı

$$\xi(s+2h)=\xi(s)+\xi'(s)2h+\xi''(s)\frac{(2h)^2}{2!}+\xi'''(s)\frac{(2h)^3}{3!}+... \qquad (0.24)$$

şeklinde yazılabilir. (2.12) denklemi 2 ile çarpılıp (2.24) denkleminden çıkartıldığında birinci türev $\xi'(s)$ yok edilerek

$$\xi(s+2h)-2\xi(s+h)=-\xi(s)+\xi''(s)h^2+\xi'''(s)h^3 \qquad (0.25)$$

eşitliği elde edilir. Buradan ikinci türev çekilip hata terimi yerine yazıldığında

$$\xi''(s)=\frac{\xi(s+2h)-2\xi(s+h)+\xi(s)}{h^2}+o(h) \qquad (0.26)$$

bulunur. Bu ifade indissel formda yazıldığında ikinci türevin

$$\xi''(s)=\frac{\xi_{j+2}-2\xi_{j+1}+\xi_j}{h^2}+o(h) \qquad (0.27)$$

şeklinde ileri fark formülü elde edilir [53-55].

$\xi(s)$ fonksiyonunun $(s-2h)$ noktası civarındaki Taylor seri açılımı

$$\xi(s-2h)=\xi(s)-\xi'(s)(2h)+\xi''(s)\frac{(2h)^2}{2!}-\xi'''(s)\frac{(2h)^3}{3!}+... \qquad (0.28)$$

şeklinde yazılabilir. (2.18) denklemi 2 ile çarpılıp (2.28) denkleminden çıkartıldığında birinci türev $\xi'(s)$ yok edilerek

$$\xi(s-2h)-2\xi(s-h)=-\xi(s)+\xi''(s)h^2-\xi'''(s)h^3+... \qquad (0.29)$$

eşitliği elde edilir. Buradan ikinci türev çekilip hata terimi yerine yazıldığında

$$\xi''(s)=\frac{\xi(s)-2\xi(s-h)+\xi(s-2h)}{h^2}+o(h) \tag{0.30}$$

bulunur. Bu ifade indissel formda yazıldığında ikinci türevin

$$\xi''(s)=\frac{\xi_j-2\xi_{j-1}+\xi_{j-2}}{h^2}+o(h) \tag{0.31}$$

şeklinde geri fark formülü elde edilir [53-55].

(2.12) ile (2.18) denklemleri toplandığında;

$$\xi(s+h)+\xi(s-h)=2\xi(s)+\xi''(s)h^2+... \tag{0.32}$$

eşitliği elde edilir. Buradan ikinci türev çekilip hata terimi yerine yazıldığında

$$\xi''(s)=\frac{\xi(s+h)-2\xi(s)+\xi(s-h)}{h^2}+o(h^2) \tag{0.33}$$

bulunur. Bu ifade indissel formda ikinci türevin

$$\xi''(s)=\frac{\xi_{j+1}-2\xi_j+\xi_{j-1}}{h^2}+o(h^2) \tag{0.34}$$

şeklinde merkezi fark formülü elde edilir [53-55].

Şimdi iki değişkenli $\xi(s,t)$ fonksiyonu için birinci mertebeden ve ikinci mertebeden türevlerin sonlu fark yaklaşımlarını elde etmeye çalışalım. Bunun için

$$\xi(s+h,t)=\xi(s,t)+\frac{\partial\xi}{\partial s}h+\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}\frac{h^2}{2!}+\frac{\partial^3\xi}{\partial s^3}\frac{h^3}{3!}+... \tag{0.35}$$

taylor seri açılımını kullanalım. Burada h^2 ’li ve sonraki terimler ihmal edilirse;

$$\frac{\partial\xi}{\partial s}(s,t)\cong\frac{\xi(s+h,t)-\xi(s,t)}{h}+\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}\frac{h}{2} \tag{0.36}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}(s,t)=\frac{\xi_{j+1}^n-\xi_j^n}{h}+o(h) \tag{0.37}$$

ileri fark formülü elde edilir. Benzer şekilde Taylor seri açılımından

$$\xi(s-h,t)=\xi(s,t)-\frac{\partial\xi}{\partial s}h+\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}\frac{h^2}{2!}-\frac{\partial^3\xi}{\partial s^3}\frac{h^3}{3!}+\dots \tag{0.38}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial s}\cong\frac{\xi(s,t)-\xi(s-h,t)}{h}+\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}\frac{h}{2} \tag{0.39}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial s}\cong\frac{\xi_j^n-\xi_{j-1}^n}{h}+o(h) \tag{0.40}$$

geri fark formülü elde edilir.

(2.38) formülünü (-1) ile çarpıp (2.35) ile taraf tarafa toplarsak

$$\xi(s+h,t)-\xi(s-h,t)=\frac{\partial\xi}{\partial s}2h+\frac{\partial^3\xi}{\partial s^3}\frac{h^3}{3}+\dots \tag{0.41}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial s}\cong\frac{\xi(s+h,t)-\xi(s-h,t)}{2h}+\frac{\partial^3\xi}{\partial s^3}\frac{h^2}{6} \tag{0.42}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial s}\cong\frac{1}{2h}\left(\xi_{j+1}^n-\xi_{j-1}^n\right)+o\left(h^2\right) \tag{0.43}$$

merkezi fark formülü elde edilir.

Benzer şekilde t 'ye göre türevler için;

$$\xi(s,t+\tau)=\xi(s,t)+\frac{\partial\xi}{\partial t}\tau+\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\frac{\tau^2}{2!}+\frac{\partial^3\xi}{\partial t^3}\frac{\tau^3}{3!}+\dots \tag{0.44}$$

ve

$$\xi(s,t-\tau)=\xi(s,t)-\frac{\partial\xi}{\partial t}\tau+\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\frac{\tau^2}{2!}-\frac{\partial^3\xi}{\partial t^3}\frac{\tau^3}{3!}+\dots \tag{0.45}$$

Taylor serisi açılımlarını kullanırsak

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}\cong\frac{\xi_j^{n+1}-\xi_j^n}{\tau}+o(\tau) \tag{0.46}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}\cong\frac{\xi_j^n-\xi_j^{n-1}}{\tau}+o(\tau) \tag{0.47}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \cong \frac{\xi_j^{n+1} - \xi_j^{n-1}}{2\tau} + o\left(\tau^2\right) \tag{0.48}$$

formülleri elde edilir. Bu formüllere sırasıyla t' ye göre ileri fark, geri fark ve merkezi fark formülleri denir.

Şimdi de ξ fonksiyonunun s değişkenine göre II. mertebeden türevlerin sonlu fark formüllerini bulmaya çalışalım. Bunun için aşağıdaki taylor serisi açılımlarını göz önüne alalım.

$$\xi\left(s+2h,t\right) = \xi\left(s,t\right) + \frac{\partial \xi}{\partial s} 2h + \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} \frac{\left(2h\right)^2}{2!} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial s^3} \frac{\left(2h\right)^3}{3!} + \ldots \tag{0.49}$$

$$\xi\left(s-2h,t\right) = \xi\left(s,t\right) - \frac{\partial \xi}{\partial s} 2h + \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} \frac{\left(2h\right)^2}{2!} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial s^3} \frac{\left(-2h\right)^3}{3!} + \ldots \tag{0.50}$$

$$\xi\left(s+h,t\right) = \xi\left(s,t\right) + \frac{\partial \xi}{\partial s} h + \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial s^3} \frac{h^3}{3!} + \ldots \tag{0.51}$$

$$\xi\left(s-h,t\right) = \xi\left(s,t\right) - \frac{\partial \xi}{\partial s} h + \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} \frac{h^2}{2!} - \frac{\partial^3 \xi}{\partial s^3} \frac{h^3}{3!} + \ldots \tag{0.52}$$

(2.51) denklemi (-2) ile çarpılıp (2.49) ile taraf tarafa toplanırsa,

$$\xi\left(s+2h,t\right) - 2\xi\left(s+h,t\right) = -\xi\left(s,t\right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} h^2 + \frac{\partial^3 \xi}{\partial s^3} h^3 + \ldots \tag{0.53}$$

olur. Buradan;

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} \cong \frac{\xi\left(s+2h,t\right) - 2\xi\left(s+h,t\right) + \xi\left(s,t\right)}{h^2} - \frac{\partial^3 \xi}{\partial s^3} h + \ldots \tag{0.54}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} \cong \frac{\xi_j^n - 2\xi_{j+1}^n + \xi_{j+2}^n}{h^2} + o\left(h\right) \tag{0.55}$$

ileri fark formülü elde edilir.

(2.52) denklemi (-2) ile çarpılıp (2.50) denklemi ile taraf tarafa toplanırsa

$$\xi(s-2h,t)-2\xi(s-h,t)=-\xi(s,t)+\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}h^2-\frac{\partial^3\xi}{\partial s^3}h^3+... \qquad (0.56)$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}\cong\frac{\xi(s-2h,t)-2\xi(s-h,t)+\xi(s,t)}{h^2}+\frac{\partial^3\xi}{\partial s^3}h \qquad (0.57)$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}\cong\frac{\xi_j^n-2\xi_{j-1}^n+\xi_{j-2}^n}{h^2}+o(h) \qquad (0.58)$$

geri fark formülü elde edilir.

(2.51) denklemi ile (2.52) denklemi taraf tarafa toplanırsa

$$\xi(s+h,t)+\xi(s-h,t)=2\xi(s,t)+\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}h^2+\frac{\partial^4\xi}{\partial s^4}\frac{2h^4}{4!}+... \qquad (0.59)$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}\cong\frac{\xi(s+h,t)+\xi(s-h,t)-2\xi(s,t)}{h^2}+\frac{\partial^4\xi}{\partial s^4}\frac{h^2}{12} \qquad (0.60)$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}=\frac{\xi_{j+1}^n-2\xi_j^n+\xi_{j-1}^n}{h^2}+o(h^2) \qquad (0.61)$$

merkezi fark formülü elde edilir. Benzer şekilde t değişkenine göre

$$\xi(s,t+\tau)=\xi(s,t)+\frac{\partial\xi}{\partial t}\tau+\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\frac{\tau^2}{2!}+\frac{\partial^3\xi}{\partial t^3}\frac{\tau^3}{3!}+... \qquad (0.62)$$

$$\xi(s,t-\tau)=\xi(s,t)-\frac{\partial\xi}{\partial t}\tau+\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\frac{\tau^2}{2!}-\frac{\partial^3\xi}{\partial t^3}\frac{\tau^3}{3!}+... \qquad (0.63)$$

$$\xi(s,t+2\tau)=\xi(s,t)+\frac{\partial\xi}{\partial t}(2\tau)+\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\frac{(2\tau)^2}{2!}+\frac{\partial^3\xi}{\partial t^3}\frac{(2\tau)^3}{3!}+... \qquad (0.64)$$

$$\xi(s,t-2\tau)=\xi(s,t)-\frac{\partial\xi}{\partial t}(2\tau)+\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\frac{(2\tau)^2}{2!}-\frac{\partial^3\xi}{\partial t^3}\frac{(2\tau)^3}{3!}+... \qquad (0.65)$$

Taylor serileri kullanılırsa t'ye göre ikinci mertebeden türevler için sırasıyla ileri fark, geri fark ve merkezi fark türev formülleri olarak adlandırılan aşağıdaki türev formülleri elde edilir.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \cong \frac{\xi_j^{n+2} - 2\xi_j^{n+1} + \xi_j^n}{\tau^2} + o(\tau) \tag{0.66}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \cong \frac{\xi_j^{n-2} - 2\xi_j^{n-1} + \xi_j^n}{\tau^2} + o(\tau) \tag{0.67}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \cong \frac{\xi_j^{n+1} - 2\xi_j^{n} + \xi_j^{n-1}}{\tau^2} + o\left(\tau^2\right) \tag{0.68}$$

2.1.3. Açık (Explicit) ve Kapalı (Implicit) Yöntem

Sonlu fark metodunu kullanarak verilen bir diferansiyel denklemi çözmek için birçok yöntem vardır. Bunların başlıcaları açık (explicit) ve kapalı (implicit) yöntemdir.

2.1.3.1. Açık (Explicit) Yöntem

Açık yöntem ismi herhangi bir noktadaki işlev değerlerini daha erken zamanlardaki sonlu fark çözüm değerlerinden açıkça hesaplanmasından gelmektedir. Yani bulunan zaman değerinden bir sonraki zaman adımındaki değerleri hesaplamaktadır. Açık yöntem $\xi(s,t)$ bilinen değerlerini kullanarak $\xi(s,t+\tau)$ bilinmeyen değerlerinin adım adım hesaplanmasıdır. Dolayısıyla $t-$ yönünde noniteratif (yineleme olmayan) işlem yapar. Ayrıklaştırılmış şekil üzerinde, tek bir hesaplama noktasında bir bilinmeyenli cebirsel denklemin çözümünü yapmaktadır. Böylece istenilen zamana ulaşılıncaya kadar bu süreç tekrarlanılarak türevli denkleme yaklaşımda bulunulmaktadır. Lineer olmayan bir denkleme uygulandığında sonuçta bir denklem sistemi vermesine rağmen kararlılık söz konusu olduğunda bazı kısıtlamalar getirdiğinden yeterli değildir [56,57].

2.1.3.2. Kapalı (Implicit) Yöntem

Kapalı yöntemler (Implicit Schemes), açık yöntemlerdeki gibi bir önceki zaman adımı değerlerinde açıkça hesaplama yapılmamaktadır. Bunun yerine sonlu farklar denkleminde birden fazla bilinmeyen bulunmaktadır. Böylece, model içerisindeki tüm hesaplama noktalarında doğrusal denklem takımı oluşturulmaktadır. Bir zaman adımı bu denklem takımını çözerek hesaplama yapılmaktadır. Elde edilmek istenen zamandaki çözüme ulaşılıncaya kadar bu süreç tekrarlanmaktadır. Hesaplama noktasının artışı, denklem sayısının artmasına sebep vermektedir. Açık yönteme karşılık bu kötü bir özellik gibi görünse de kapalı yöntemlerin kararlılık ve tutarlılık özellikleri bakımından iyi olduğundan dolayı kapalı yöntemi tercih sebebi yapmaktadır. Kapalı yöntemler, kararlılık sağlamak için hesaplama miktarında artış gibi bir bedel ödeyerek çözüme ulaşmayı amaçlamaktadır. Lineer olmayan bir denkleme uygulandığında yine lineer olmayan denklem sistemi verir [56,57].

Açık Yöntem ile Kapalı Yöntem Arasındaki Farklar

1) Açık yöntemde bir tek bilinmeyen olduğundan bütün ağ noktalarında kolaylıkla hesaplanır.

Kapalı yöntem birden fazla bilinmeyen içerdiğinden sonlu fark denkleminin $(n+1)$ zaman adımındaki bütün ağ noktaları için yazılması gerekir. Böylece bilinmeyen sayısı kadar denklem elde edilip, eş zamanlı çözülerek sonuca ulaşılır.

2) Açık yöntemde sayısal çözümün bir sonraki zaman adımındaki $(n+1)$. değeri, bir önceki zaman adımındaki (n). verilmiş değerler yardımıyla bulunur.

Kapalı yöntemde $(n+1)$. adımındaki bilinmeyenleri bulmak için bir denklem sistemi karşımıza çıkar. Bu sistemi çözmek için ise iteratif ve direct yöntemlerden biri kullanılır. Daha açıklayıcı olması sebebiyle açık formül bilinmediğinden tüm grid noktalar üzerinde denklem yazılarak elde edilen denklem sistemi çözülerek yaklaşık çözüm elde edilir.

3) Açık yöntemler genelde koşullu kararlıdırlar.

Kapalı yöntemler ayrıklaştırılmış denklemlerin kararlılığı üzerinde büyük avantaj sağlamaktadır. Çünkü birçoğu koşulsuz kararlıdır. Böylece, zaman için daha büyük adım uzunlukları kullanılmasına izin verilir.

4) Açık yöntemin uygulanması ve programlanması kolaydır. Dolayısıyla çözümü elde etmek daha kolaydır denebilir.

Kapalı yöntemin uygulanması ve programlanması daha komplekstir. $(n+1)$. adımdaki bilinmeyenler için elde edilen sistemin çözümünde farklı yöntemler kullanılmalıdır.

Tutarlılık

Bir sonlu fark yaklaşımı ile elde edilmiş olan cebirsel denklem sistemi, denklemde yer almakta olan konumsal ve zamansal adım büyüklüklerinin sıfıra yaklaştığı bir limit durumunda orjinal kısmi türevli diferansiyel denklem sistemine denk ise o zaman söz konusu cebirsel denklem sisteminin orjinal kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi ile tutarlı olduğu söylenebilir.

Söz konusu cebirsel denklem sistemi ile elde edilecek olan yaklaşık sonucun, kısmi türevli diferansiyel denklem sisteminin gerçek sonucuna yaklaşması için tutarlılığın gerekli bir koşul olduğu açıktır. Bununla birlikte cebirsel denklem sisteminin, orjinal denklem sistemi ile tutarlı olması yakınsama için yeterli bir koşul olmamaktadır.

Yakınsaklık

Bir kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü $\xi(s,t)$, nümerik çözümü de ξ_j^n ile verilsin. Bu durumda;

$$(h,\tau)\to 0 \text{ iken } \left(s_j,t^n\right)\to(s,t) \text{ ve } \xi(s,t)-\xi_j^n\to 0$$

oluyorsa sonlu farklar yöntemi yakınsaktır denir [58]. Yani, konum ve zaman adımları $(h$ ve $\tau)$ küçültülerek sıfıra yaklaştırıldıklarında sonlu farklar yönteminin verdiği yaklaşık çözüm, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin kesin çözümüne yaklaşıyorsa söz konusu yaklaşık çözümün yakınsak olduğu söylenebilir.

Kısmi türevli diferansiyel denklemin kesin sonucu ile sonlu farklar yöntemi ile elde edilmekte olan sonucun arasındaki fark çözüm hatasını oluşturmaktadır. Bu hatanın miktarı konum adımı h ve zaman adımı τ ’ nun büyüklüğünden ve söz konusu cebirsel denklemler oluşturulurken orjinal diferansiyel denklemin türevlerini ifade eden sonlu fark terimlerinin ihmal edilmiş olanlarından kaynaklanmaktadır.

Kararlılık

Kararlılık özelliği, tutarlı bir nümerik yöntemin yakınsaklığı için gerekli bir özelliktir. Zamana bağlı diferansiyel problemlerinde, çözüm için uygulanan nümerik yöntem eğer yakınsak ise problemin tam çözümü sınırlıyken nümerik yöntemde sınırlı çözümler üretir. Kararlılık kavramının temelinde yatan esas budur.

Kısmi türevli denklemlerin sonlu fark metodu ile sayısal çözümünde hesaplamanın her aşamasında hatalar ortaya çıkar. Eğer ortaya çıkan bu hatalar hesaplama ilerledikçe sınırsız olarak büyümüyor ise uygulama kararlıdır denir [59].

2.2. Başlangıç Sınır Değer Problemi

Bu bölümde sonlu fark yöntemini uygulayacağımız b.s.d.p. ni ifade edeceğiz. Bu problem aşağıdaki gibidir:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+ia_1\frac{\partial\psi}{\partial x}-a(x)\psi+v(x)\psi+ia_2|\psi|^2\psi=g(x,t),\ (x,t)\in\Omega \tag{0.69}$$

$$\psi(x,0)=\vartheta(x),\ x\in I \tag{0.70}$$

$$\psi(0,t)=\psi(l,t)=0,\ t\in(0,T). \qquad (0.71)$$

Burada $\psi=\psi(x,t)$ dalga fonksiyonu, $\Omega=I\times(0,T)$ $i=\sqrt{-1}$, $I=(0,l)$ $a_0,a_1,a_2>0$ verilen reel sayılar; $a(x)$ ve $v(x)$ ise sırasıyla

$$\text{hemen hemen her } (hhh)\ x\in I \text{ için } 0\le a(x)\le \mu_0\ ,\ \mu_0=sbt>0, \qquad (0.72)$$

$$v\in L_\infty(I),\ hhh\ x\in I \text{ için } |v(x)|\le b_0 \qquad (0.73)$$

şartlarını sağlar. Burada $b_0>0$ verilen sayıdır. Ayrıca ϑ ve g

$$\vartheta\in \overset{0}{W}{}_2^2(I) \quad \text{ve} \quad g\in W_2^{0,1}(\Omega)$$

biçiminde verilen fonksiyonlardır.

Öncelikle (2.69)-(2.71) probleminin çözümünü tanımlayalım.

Tanım 2.2.1. (2.69)-(2.71) probleminin çözümü $B_0=C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(I)\right)\cap C^1([0,T],\ L_2(I))$ uzayına ait olan ve $hhh\ x\in I$ ve herhangi $t\in[0,T]$ için (2.69) denklemini, $hhh\ x\in I$ için (2.70) şartını ve $hhh\ t\in(0,T)$ için (2.71) şartını sağlayan bir $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonudur [36].

(2.69)-(2.71) b.s.d.p. nin çözümü için [36] çalışmasından aşağıdaki teoremi kolaylıkla yazabiliriz:

Teorem 2.2.1. $a(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları sırasıyla (2.72)-(2.73) şartlarını sağlasın ve $\vartheta\in\overset{0}{W}{}_2^2(I)$, $g\in W_2^{0,1}(\Omega)$ verilen fonksiyonlar olsun. Bu durumda (2.69)-(2.71) probleminin B_0 uzayına ait olan tek çözümü vardır ve bu çözüm $\forall t\in[0,T]$ için

$$\|\psi(.,t)\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(I)}+\left\|\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(I)}\le c_0\left(\|\vartheta\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(I)}+\|g\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\|\vartheta\|^3_{\overset{0}{W}{}_2^1(I)}\right) \qquad (0.74)$$

değerlendirmesini sağlar. Burada $c_0 > 0$, ϑ, g ve t' ye bağlı olmayan bir sabittir.

3. BULGULAR

3.1. Başlangıç Sınır Değer Probleminin Ayrıklaştırılması

Bu bölümde (2.69)-(2.71) probleminin sonlu fark aynısı yazılır. Bunun için öncelikle çözüm bölgesi yani $\bar{\Omega}=[0,l]\times\left[0,T\right]$ bölgesi aşağıdaki gibi kafeslere bölünür:

$$x_j = jh-\frac{h}{2},\quad j=\overline{1,M-1},\quad x_1-\frac{h}{2}=0,\quad x_{M-1}+\frac{h}{2}=l$$

$$t_n = n\tau,\quad n=\overline{0,N},\quad h=\frac{l}{M-1},\quad \tau=\frac{T}{N}$$

$$M\equiv M_k,\ N\equiv N_k,\ h\equiv h_k,\ \tau\equiv\tau_k,\ k\geq 1.$$

Burada h ve τ sırasıyla konum ve zamanın adım uzunluğudur.

Bu çalışmada kullanacağımız notasyonlar aşağıdaki gibidir:

$$\delta_{\bar{t}}\xi_{jn}=\frac{\xi_{jn}-\xi_{jn-1}}{\tau},\quad \delta_{\bar{x}}\xi_{jn}=\frac{\xi_{jn}-\xi_{j-1n}}{h}$$

$$\delta_{x}\xi_{jn}=\frac{\xi_{j+1n}-\xi_{jn}}{h},\quad \delta_{x\bar{x}}\xi_{jn}=\frac{\xi_{j+1n}-2\xi_{jn}+\xi_{j-1n}}{h^2}.$$

$V_h=\left\{v:v=\left(v_0,v_1,v_2,...,v_M\right)\right\}$ olmak üzere herhangi $u,v\in V_h$ için iç çarpım

$$\left(u,v\right)=h\sum_{j=1}^{M-1}u_j\bar{v}_j$$

olarak tanımlanır. Ayrıca v ’ nin ayrık normları

$$\|v\|_{L_p} = \sqrt[p]{h\sum_{j=1}^{M-1}|v_j|^p}$$

$$\|v\|_{L_\infty} = \max_{1\le j\le M-1}|v_j|$$

$$\|\delta_x v\|_{L_2} = \sqrt{h\sum_{j=1}^{M-1}|\delta_x v_j|^2}$$

olarak tanımlansın. Böylece (2.69)-(2.71) probleminin fark şeması

$$i\delta_{\bar{t}}\xi_{jn} + a_0\delta_{x\bar{x}}\xi_{jn} + ia_1\delta_{\bar{x}}\xi_{jn} - a_j\xi_{jn} + v_j\xi_{jn} + ia_2|\xi_{jn}|^2\xi_{jn} = g_{jn},\ j=\overline{1,M-1},\ n=\overline{1,N} \quad (3.1)$$

$$\xi_{j0} = \vartheta_j, \quad j=\overline{0,M} \quad (3.2)$$

$$\xi_{Mn} = \xi_{0n} = 0, \quad n=\overline{1,N} \quad (3.3)$$

biçiminde yazılır. Burada $a_j, \vartheta_j, g_{jn}, v_j$ ağ fonksiyonları

$$a_j = \frac{1}{h}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} a(x)dx, \quad j=\overline{1,M-1}$$

$$\vartheta_j = \frac{1}{h}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \vartheta(x)dx, \quad j=\overline{1,M-1}, \quad \vartheta_0 = \vartheta_M = 0$$

$$g_{jn} = \frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} g(x,t)\,dxdt, \quad j=\overline{1,M-1}, \quad n=\overline{1,N}$$

$$v_j = \frac{1}{h}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} v(x)\,dx, \quad j=\overline{1,M-1}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca (2.72) ve (2.73) şartlarından

$$0 \le a_j \le \mu_0, \quad j=\overline{1,M-1} \quad (3.4)$$

$$0 \le |v_j| \le b_0, \quad j=\overline{1,M-1} \quad (3.5)$$

yazılır.

3.2. Fark Şemasının Kararlılığı

Teorem 3.2.1. $a(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları sırasıyla (2.72)-(2.73) şartlarını sağlasın ve $\vartheta \in \overset{0}{W}{}_2^2(I)$, $\mathrm{g} \in W_2^{0,1}(\Omega)$ olsun. Bu durumda (3.1)-(3.3) fark şemasının çözümü olan ξ_{jn} fonksiyonu $\forall\, m \in \{1,2,...,N\}$ için

$$\begin{aligned}
&h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jm}\right|^2 + a_0 h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jm}\right|^2 + a_0 h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jn} - \delta_{\bar{x}}\xi_{jn-1}\right|^2 + 2h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn} - \xi_{jn-1}\right|^2 + \\
&2a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn} - \xi_{j-1n}\right|^2 + 4a_2 h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4 \le \frac{a_2 h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^4 + a_0 h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{x}}\vartheta_j\right|^2 + \\
&c_1\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2 + \tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|^2 + \tau h\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{t}} g_{jn}\right|^2\right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

değerlendirmesini sağlar. Buradaki $c_1 > 0$ sabiti, h,τ ve m ’den bağımsızdırlar.

İspat : (3.1)-(3.3) şeması

$$\begin{aligned}
&ih\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{t}}\xi_{jn}\overline{\eta}_{jk} + ha_0\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{x\bar{x}}\xi_{jn}\overline{\eta}_{jn} + iha_1\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}\overline{\eta}_{jn} - h\sum_{j=1}^{M-1}a_j\xi_{jn}\overline{\eta}_{jn} + \\
&h\sum_{j=1}^{M-1}v_j\xi_{jn}\overline{\eta}_{jn} + iha_2\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2\xi_{jn}\overline{\eta}_{jn} = h\sum_{j=1}^{M-1}g_{jn}\overline{\eta}_{jn},\ n = \overline{1,N}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

toplam özdeşliğine denktir. (3.7) deki $\overline{\eta}_{jn}$ fonksiyonu $\left\{\left(x_j,t_n\right)_k\right\}$ ağlar dizisinde tanımlı, $n = \overline{1,N}$ için $\eta_{0n} = \eta_{Mn} = 0$ şartlarını sağlayan herhangi η_{jn} ağ fonksiyonunun kompleks eşleniğidir. (3.7) de $\overline{\eta}_{jn}$ fonksiyonunun yerine $\tau\overline{\xi}_{jn}$ ağ fonksiyonunu alırsak

$$\begin{aligned}
&ih\tau\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{t}}\xi_{jn}\overline{\xi}_{jn} + a_0 h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{x\bar{x}}\xi_{jn}\overline{\xi}_{jn} + ia_1 h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}\overline{\xi}_{jn} - h\tau\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left|\xi_{jn}\right|^2 + \\
&h\tau\sum_{j=1}^{M-1}v_j\left|\xi_{jn}\right|^2 + ia_2 h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4 = h\tau\sum_{j=1}^{M-1}g_{jn}\overline{\xi}_{jn},\ n = \overline{1,N}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

yazılır. Bu eşitliğin sol tarafındaki ikinci terime kısmi toplam formülünü uygulayalım. Bunun için öncelikle aşağıdaki Lemmayı ifade ve ispat edelim:

Lemma3.2.1. (Kısmi Toplam Formülü) Herhangi iki $u,v \in V_h = \{v : v = (v_0, v_1, ..., v_M), \quad v_0 = v_M = 0\}$ ağ fonksiyonları için

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_{x\bar{x}}u_j\right)\bar{v}_j = -h\sum_{j=1}^{M}\left(\delta_{\bar{x}}u_j\right)\left(\delta_{\bar{x}}\bar{v}_j\right)$$

dır.

İspat : $h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_{x\bar{x}}u_j\right)\bar{v}_j = h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_x\delta_{\bar{x}}u_j\right)\bar{v}_j$ olmak üzere $\left(\delta_{\bar{x}}u_j\right) = F_j$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
h\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{x\bar{x}}u_j\bar{v}_j &= h\sum_{j=1}^{M-1}\delta_x\left(F_j\right)\bar{v}_j = h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\frac{F_{j+1}-F_j}{h}\right)\bar{v}_j = \sum_{j=1}^{M-1}\left(F_{j+1}-F_j\right)\bar{v}_j \\
&= \left(F_M - F_{M-1}\right)\bar{v}_{M-1} + \left(F_{M-1}-F_{M-2}\right)\bar{v}_{M-2} + ... + \left(F_2 - F_1\right)\bar{v}_1 \\
&= F_M\bar{v}_{M-1} - F_{M-1}\bar{v}_{M-1} + F_{M-1}\bar{v}_{M-2} - F_{M-2}\bar{v}_{M-2} + ... + F_2\bar{v}_1 - F_1\bar{v}_1 + \\
&\quad F_M\bar{v}_M - F_M\bar{v}_M + F_1\bar{v}_0 - F_1\bar{v}_0 \\
&= F_M\bar{v}_M - \left(F_M\bar{v}_M - F_M\bar{v}_{M-1}\right) - \left(F_{M-1}\bar{v}_{M-1} - F_{M-1}\bar{v}_{M-2}\right) - \\
&\quad ... - \left(F_2\bar{v}_2 - F_2\bar{v}_1\right) - \left(F_1\bar{v}_1 - F_1\bar{v}_0\right) - F_1\bar{v}_0
\end{aligned}$$

olup eşitliğin her iki tarafını h 'a bölersek

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{x\bar{x}}u_j\bar{v}_j &= \frac{1}{h}\bar{v}_M F_M - F_M\frac{\left(\bar{v}_M - \bar{v}_{M-1}\right)}{h} - F_{M-1}\frac{\left(\bar{v}_{M-1} - \bar{v}_{M-2}\right)}{h} - \\
&\quad ... - F_2\frac{\left(\bar{v}_2 - \bar{v}_1\right)}{h} - F_1\frac{\left(\bar{v}_1 - \bar{v}_0\right)}{h} - \frac{F_1}{h}\bar{v}_0 \\
&\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{x\bar{x}}u_j\bar{v}_j = -\sum_{j=1}^{M}F_j\frac{\left(\bar{v}_j - \bar{v}_{j-1}\right)}{h} \Rightarrow h\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{x\bar{x}}u_j\bar{v}_j = -h\sum_{j=1}^{M}F_j\delta_{\bar{x}}\bar{v}_j = -h\sum_{j=1}^{M}\delta_{\bar{x}}u_j\delta_{\bar{x}}\bar{v}_j$$

bulunur. Böylece lemma ispatlanmış olur.

Lemma 3.2.1. i (3.8) de dikkate alırsak $n = \overline{1, N}$ için

$$ih\tau\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar t}\xi_{jn}\overline{\xi}_{jn}-a_0h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar x}\xi_{jn}\right|^2+ia_1h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar x}\xi_{jn}\overline{\xi}_{jn}-h\tau\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left|\xi_{jn}\right|^2+$$
$$h\tau\sum_{j=1}^{M-1}v_j\left|\xi_{jn}\right|^2+ia_2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4=h\tau\sum_{j=1}^{M-1}g_{jn}\overline{\xi}_{jn} \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.9) eşitliğinden eşleniğini çıkarırsak

$$ih\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_{\bar t}\xi_{jn}\overline{\xi}_{jn}+\delta_{\bar t}\overline{\xi}_{jn}\xi_{jn}\right)+ia_1h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_{\bar x}\xi_{jn}\overline{\xi}_{jn}+\delta_{\bar x}\overline{\xi}_{jn}\xi_{jn}\right)+$$
$$2ia_2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4=2ih\tau\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(g_{jn}\overline{\xi}_{jn}\right) \tag{3.10}$$

olup buradan

$$h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_{\bar t}\xi_{jn}\overline{\xi}_{jn}+\delta_{\bar t}\overline{\xi}_{jn}\xi_{jn}\right)+a_1h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_{\bar x}\xi_{jn}\overline{\xi}_{jn}+\delta_{\bar x}\overline{\xi}_{jn}\xi_{jn}\right)+$$
$$2a_2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4=2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(g_{jn}\overline{\xi}_{jn}\right),\ n=\overline{1,N} \tag{3.11}$$

yazılır.

$$\begin{aligned}
\tau\left(\delta_{\bar t}\xi_{jn}\overline{\xi}_{jn}+\delta_{\bar t}\overline{\xi}_{jn}\xi_{jn}\right)&=\tau\left(\frac{\left(\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right)}{\tau}\overline{\xi}_{jn}+\frac{\left(\overline{\xi}_{jn}-\overline{\xi}_{jn-1}\right)}{\tau}\xi_{jn}\right)\\
&=\left(\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right)\overline{\xi}_{jn}+\left(\overline{\xi}_{jn}-\overline{\xi}_{jn-1}\right)\xi_{jn}\\
&=\left|\xi_{jn}\right|^2-\xi_{jn-1}\overline{\xi}_{jn}+\left|\xi_{jn}\right|^2-\overline{\xi}_{jn-1}\xi_{jn}-\left|\xi_{jn-1}\right|^2+\left|\xi_{jn-1}\right|^2\\
&=\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{jn-1}\right|^2-\xi_{jn-1}\overline{\xi}_{jn}+\xi_{jn}\overline{\xi}_{jn}-\overline{\xi}_{jn-1}\xi_{jn}+\xi_{jn-1}\overline{\xi}_{jn-1}\\
&=\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{jn-1}\right|^2+\overline{\xi}_{jn}\left(\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right)-\overline{\xi}_{jn-1}\left(\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right)\\
&=\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{jn-1}\right|^2+\left(\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right)\left(\overline{\xi}_{jn}-\overline{\xi}_{jn-1}\right)\\
&=\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{jn-1}\right|^2+\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\tau\left(\delta_{\bar t}\xi_{jn}\overline{\xi}_{jn}+\delta_{\bar t}\overline{\xi}_{jn}\xi_{jn}\right)=\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{jn-1}\right|^2+\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2 \tag{3.12}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$h\left(\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}\overline{\xi}_{jn}+\delta_{\bar{x}}\overline{\xi}_{jn}\xi_{jn}\right)=h\left(\frac{\left(\xi_{jn}-\xi_{j-1n}\right)}{h}\overline{\xi}_{jn}+\frac{\left(\overline{\xi}_{jn}-\overline{\xi}_{j-1n}\right)}{h}\xi_{jn}\right)$$

$$=\left(\xi_{jn}-\xi_{j-1n}\right)\overline{\xi}_{jn}+\left(\overline{\xi}_{jn}-\overline{\xi}_{j-1n}\right)\xi_{jn}$$

$$=\left|\xi_{jn}\right|^2-\xi_{j-1n}\overline{\xi}_{jn}+\left|\xi_{jn}\right|^2-\overline{\xi}_{j-1n}\xi_{jn}-\left|\xi_{j-1n}\right|^2+\left|\xi_{j-1n}\right|^2$$

$$=\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{j-1n}\right|^2-\xi_{j-1n}\overline{\xi}_{jn}+\xi_{jn}\overline{\xi}_{jn}-\overline{\xi}_{j-1n}\xi_{jn}+\xi_{j-1n}\overline{\xi}_{j-1n}$$

$$=\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{j-1n}\right|^2+\overline{\xi}_{jn}\left(\xi_{jn}-\xi_{j-1n}\right)-\overline{\xi}_{j-1n}\left(\xi_{jn}-\xi_{j-1n}\right)$$

$$=\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{j-1n}\right|^2+\left(\xi_{jn}-\xi_{j-1n}\right)\left(\overline{\xi}_{jn}-\overline{\xi}_{j-1n}\right)$$

$$=\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{j-1n}\right|^2+\left|\xi_{jn}-\xi_{j-1n}\right|^2$$

olup

$$h\left(\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}\overline{\xi}_{jn}+\delta_{\bar{x}}\overline{\xi}_{jn}\xi_{jn}\right)=\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{j-1n}\right|^2+\left|\xi_{jn}-\xi_{j-1n}\right|^2 \tag{3.13}$$

eşitliği elde edilir. Böylece (3.12) ve (3.13) eşitlikleri (3.11)'de kullanılırsa

$$\begin{aligned}&h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{jn-1}\right|^2+\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2\right)+a_1\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{j-1n}\right|^2+\left|\xi_{jn}-\xi_{j-1n}\right|^2\right)\\&2a_2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4=2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(g_{jn}\overline{\xi}_{jn}\right),\ n=\overline{1,N}\end{aligned} \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.14) deki bütün eşitlikleri n üzerinden 1 'den $m\le N$'ye kadar toplayalım. Böylece aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\begin{aligned}&h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{jn-1}\right|^2\right)+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2+a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{j-1n}\right|^2\right)+\\&a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{j-1n}\right|^2+2a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4=2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(g_{jn}\overline{\xi}_{jn}\right).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{jn-1}\right|^2\right)&=\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\xi_{j1}\right|^2-\left|\xi_{j0}\right|^2+\left|\xi_{j2}\right|^2-\left|\xi_{j1}\right|^2+\left|\xi_{j3}\right|^2-\left|\xi_{j2}\right|^2+\right.\\&\left.+\ldots+\left|\xi_{jm}\right|^2-\left|\xi_{jm-1}\right|^2\right)=\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\xi_{jm}\right|^2-\left|\xi_{j0}\right|^2\right)\end{aligned}$$

ve

$$\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{j-1n}\right|^2\right)=\sum_{n=1}^{m}\left(\left|\xi_{1n}\right|^2-\left|\xi_{0n}\right|^2+\left|\xi_{2n}\right|^2-\left|\xi_{1n}\right|^2+\left|\xi_{3n}\right|^2-\left|\xi_{2n}\right|^2+\right.$$

$$\left.+\ldots+\left|\xi_{M-1n}\right|^2-\left|\xi_{M-2n}\right|^2\right)=\sum_{n=1}^{m}\left(\left|\xi_{M-1n}\right|^2-\left|\xi_{0n}\right|^2\right)$$

olduğundan burada (3.2) ve (3.3) şartlarını kullanırsak

$$\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{jn-1}\right|^2\right)=\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jm}\right|^2-\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2 \tag{3.16}$$

$$\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{j-1n}\right|^2\right)=\sum_{n=1}^{m}\left|\xi_{M-1n}\right|^2 \tag{3.17}$$

yazılır. (3.16) ve (3.17) yi (3.15)' de dikkate alırsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jm}\right|^2+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2+a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\left|\xi_{M-1n}\right|^2+a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{j-1n}\right|^2+$$
$$2a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4=h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2+2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(g_{jn}\bar{\xi}_{jn}\right)$$

olup buradan

$$\begin{aligned}&h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jm}\right|^2+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2+a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\left|\xi_{M-1n}\right|^2+a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{j-1n}\right|^2+\\&2a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4\le h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2+2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|\left|\xi_{jn}\right|\end{aligned} \tag{3.18}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.18) in sağ tarafındaki ikinci toplamın m. terimini ayıralım ve ayırdığımız bu terime $\varepsilon-$ Cauchy eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}&h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jm}\right|^2+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2+a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\left|\xi_{M-1n}\right|^2+a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{j-1n}\right|^2+\\&2a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4\le h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2+2h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|\left|\xi_{jn}\right|+\varepsilon h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jm}\right|^2+\frac{h\tau}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jm}\right|^2.\end{aligned} \tag{3.19}$$

(3.19) da $\varepsilon=2\tau$ olarak alınır ve Young eşitsizliği uygulanırsa

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jm}\right|^2+2h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2+2a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\left|\xi_{M-1n}\right|^2+2a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{j-1n}\right|^2+$$
$$4a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4\le 2h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|^2+4T\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jm}\right|^2+2h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2+2h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2$$

olup yukarıdaki eşitsizliğin sağ taraftaki ilk iki terimi birleştirip sonra $m\le N$’ ye büyültürsek;

$$\begin{gathered}h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jm}\right|^2+2h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2+2a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\left|\xi_{M-1n}\right|^2+\\ 2a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{j-1n}\right|^2+4a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4\le 4Th\tau\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|^2+\\ 2h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2+2h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2,\forall m\in\{1,2,...,N\}\end{gathered}\tag{3.20}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.20) nin sol tarafındaki bütün terimler pozitif olduğundan,

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jm}\right|^2\le 4Th\tau\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|^2+2h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2+2h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2,\ \forall m\in\{1,2,...,N\}\tag{3.21}$$

yazılır. Bu eşitsizlikte Gronwall lemmasının diskrit aynısını [32] kullanırsak;

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jm}\right|^2\le c_2\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2+\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|^2\right),\quad \forall m\in\{1,2,...,N\}\tag{3.22}$$

olur. (3.20) nin sol tarafındaki bütün terimlerin pozitif olduğunu dikkate alarak (3.22)’yi (3.20)’de yerine yazarsak

$$\begin{gathered}h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jm}\right|^2+2h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2+2a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{j-1n}\right|^2+\\ 4a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4\le c_3\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2+\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|^2\right),\ \forall m\in\{1,2,...,N\}\end{gathered}\tag{3.23}$$

değerlendirmesini elde ederiz.

Şimdi $\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}$ fonksiyonunu değerlendirelim. Bunun için (3.7) toplam özdeşliğinin sol tarafındaki ikinci terime kısmi toplam formülünü uygulayarak $\bar{\eta}_{jn}$ fonksiyonunun yerine $\tau\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn}$ alalım. Bu durumda aşağıdaki özdeşlik elde edilir:

$$\begin{aligned} &ih\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{t}}\xi_{jn}\right|^2 - a_0h\tau\sum_{j=1}^{M}\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}\delta_{\bar{x}}\left(\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn}\right) + ia_1h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn} - h\tau\sum_{j=1}^{M-1}a_j\xi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn} + \\ &h\tau\sum_{j=1}^{M-1}v_j\xi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn} + ia_2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2\xi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn} = h\tau\sum_{j=1}^{M-1}g_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn},\ n=\overline{1,N}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

(3.24) ile eşleniğini toplarsak

$$\begin{aligned} &-a_0h\sum_{j=1}^{M}\tau\left(\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}\delta_{\bar{x}}\left(\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn}\right) + \delta_{\bar{x}}\bar{\xi}_{jn}\delta_{\bar{x}}\left(\delta_{\bar{t}}\xi_{jn}\right)\right) + ia_1h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn} - \delta_{\bar{x}}\bar{\xi}_{jn}\delta_{\bar{t}}\xi_{jn}\right) - \\ &h\tau\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left(\xi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn} + \bar{\xi}_{jn}\delta_{\bar{t}}\xi_{jn}\right) + h\tau\sum_{j=1}^{M-1}v_j\left(\xi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn} + \bar{\xi}_{jn}\delta_{\bar{t}}\xi_{jn}\right) + \\ &ia_2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2\left(\xi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn} - \bar{\xi}_{jn}\delta_{\bar{t}}\xi_{jn}\right) = h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(g_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn} + \bar{g}_{jn}\delta_{\bar{t}}\xi_{jn}\right) \end{aligned} \tag{3.25}$$

yazılır. (3.25) de

$$\begin{aligned} \tau\left(\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}\delta_{\bar{x}}\left(\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn}\right) + \delta_{\bar{x}}\bar{\xi}_{jn}\delta_{\bar{x}}\left(\delta_{\bar{t}}\xi_{jn}\right)\right) &= \tau\left(\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}\delta_{\bar{t}}\left(\delta_{\bar{x}}\bar{\xi}_{jn}\right) + \delta_{\bar{x}}\bar{\xi}_{jn}\delta_{\bar{t}}\left(\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}\right)\right) \\ &= \left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}\right|^2 - \left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jn-1}\right|^2 + \left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jn} - \delta_{\bar{x}}\xi_{jn-1}\right|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h\tau\left(\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn} - \delta_{\bar{x}}\bar{\xi}_{jn}\delta_{\bar{t}}\xi_{jn}\right) &= h\tau\left(\frac{\xi_{jn}-\xi_{j-1n}}{h}\right)\left(\frac{\bar{\xi}_{jn}-\bar{\xi}_{jn-1}}{\tau}\right) - \left(\frac{\bar{\xi}_{jn}-\bar{\xi}_{j-1n}}{h}\right)\left(\frac{\xi_{jn}-\xi_{jn-1}}{\tau}\right) \\ &= \left(-\xi_{jn}\bar{\xi}_{jn-1} - \bar{\xi}_{jn}\xi_{j-1n} + \xi_{j-1n}\bar{\xi}_{jn-1} + \bar{\xi}_{jn}\xi_{jn-1} + \xi_{jn}\bar{\xi}_{j-1n} - \xi_{jn-1}\bar{\xi}_{j-1n}\right) \\ &= \left(\bar{\xi}_{jn}\xi_{jn-1} - \xi_{jn}\bar{\xi}_{jn-1} - \bar{\xi}_{j-1n}\left(\xi_{jn-1}-\xi_{jn}\right) + \xi_{j-1n}\left(\bar{\xi}_{jn-1}-\bar{\xi}_{jn}\right)\right) \\ &= \left(2iIm\left(\bar{\xi}_{jn}\xi_{jn-1}\right) + 2iIm\left(\bar{\xi}_{j-1n}\left(\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right)\right)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\xi_{jn}\right|^2\left(\xi_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn} - \bar{\xi}_{jn}\delta_{\bar{t}}\xi_{jn}\right) &= \left|\xi_{jn}\right|^2\left(\xi_{jn}\frac{\left(\bar{\xi}_{jn}-\bar{\xi}_{jn-1}\right)}{\tau} - \bar{\xi}_{jn}\frac{\left(\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right)}{\tau}\right) \\ &= \frac{\left|\xi_{jn}\right|^2}{\tau}\left(\bar{\xi}_{jn}\xi_{jn-1} - \xi_{jn}\bar{\xi}_{jn-1}\right) = \frac{\left|\xi_{jn}\right|^2}{\tau}2iIm\left(\xi_{jn}\bar{\xi}_{jn-1}\right) \end{aligned}$$

ve (3.12) eşitliğini kullanırsak

$$
\begin{aligned}
&-a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left[\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}\right|^2-\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jn-1}\right|^2+\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}-\delta_{\bar{x}}\xi_{jn-1}\right|^2\right]-\\
&2a_1\sum_{j=1}^{M-1}\left(Im\left(\bar{\xi}_{jn}\xi_{jn-1}\right)+Im\left(\bar{\xi}_{j-1n}\left(\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right)\right)\right)-\\
&h\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left[\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{jn-1}\right|^2+\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2\right]+\\
&h\sum_{j=1}^{M-1}v_j\left[\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{jn-1}\right|^2+\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2\right]-\\
&2a_2 h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2 Im\left(\xi_{jn}\bar{\xi}_{jn-1}\right)=2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\operatorname{Re}\left(g_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn}\right),\ n=\overline{1,N}
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

elde edilir. (3.26) daki bütün bağıntıları n indisi üzerinden 1'den $m\le N$'ye kadar toplayalım. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&a_0 h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left[\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}\right|^2-\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jn-1}\right|^2\right]+a_0 h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}-\delta_{\bar{x}}\xi_{jn-1}\right|^2+\\
&2a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(\bar{\xi}_{jn}\xi_{jn-1}\right)+2a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(\bar{\xi}_{j-1n}\left(\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right)\right)+\\
&h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left[\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{jn-1}\right|^2\right]+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2-\\
&h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}v_j\left[\left|\xi_{jn}\right|^2-\left|\xi_{jn-1}\right|^2\right]-h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}v_j\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2+\\
&2a_2 h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2 Im\left(\xi_{jn}\bar{\xi}_{jn-1}\right)=-2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\operatorname{Re}\left(g_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn}\right)
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

elde edilir. (3.27)'deki gerekli işlemler yapılırsa ve (3.2) şartı kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jm}\right|^2-a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\vartheta_j\right|^2+a_0 h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}-\delta_{\bar{x}}\xi_{jn-1}\right|^2+\\
&+2a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(\bar{\xi}_{jn}\xi_{jn-1}\right)+2a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(\bar{\xi}_{j-1n}\left(\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right)\right)+h\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left|\xi_{jm}\right|^2\\
&-h\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left|\vartheta_j\right|^2+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}a_j\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2+2a_2 h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2 Im\left(\xi_{jn}\bar{\xi}_{jn-1}\right)\\
&=-2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\operatorname{Re}\left(g_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn}\right)+h\sum_{j=1}^{M-1}v_j\left(\left|\xi_{jm}\right|^2-\left|\vartheta_j\right|^2\right)+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}v_j\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2
\end{aligned}
$$

olup

$$a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jm}\right|^2 + a_0 h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jn} - \delta_{\bar{x}}\xi_{jn-1}\right|^2 + 2a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1} Im\left(\bar{\xi}_{jn}\xi_{jn-1}\right) +$$
$$2a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1} Im\left(\bar{\xi}_{j-1n}\left(\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right)\right) + h\sum_{j=1}^{M-1} a_j\left|\xi_{jm}\right|^2 +$$
$$h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1} a_j\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2 + 2a_2 h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2 Im\left(\xi_{jn}\bar{\xi}_{jn-1}\right) \tag{3.28}$$
$$= -2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Re}\left(g_{jn}\delta_{\bar{t}}\bar{\xi}_{jn}\right) + a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\vartheta_j\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M-1} a_j\left|\vartheta_j\right|^2 +$$
$$h\sum_{j=1}^{M-1} v_j\left|\xi_{jm}\right|^2 - h\sum_{j=1}^{M-1} v_j\left|\vartheta_j\right|^2 + h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1} v_j\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2$$

eşitliği elde edilir. (3.28) in sağ tarafında bulunan ilk toplama kısmi toplam formülünü uygularsak

$$a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jm}\right|^2 + a_0 h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jn} - \delta_{\bar{x}}\xi_{jn-1}\right|^2 = -2a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1} Im\left(\bar{\xi}_{jn}\xi_{jn-1}\right) -$$
$$2a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1} Im\left(\bar{\xi}_{j-1n}\left(\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right)\right) - h\sum_{j=1}^{M-1} a_j\left|\xi_{jm}\right|^2 -$$
$$h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1} a_j\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2 - 2a_2 h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2 Im\left(\xi_{jn}\bar{\xi}_{jn-1}\right) +$$
$$2h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Re}\left(\delta_{\bar{t}}\, g_{jn}\bar{\xi}_{jn}\right) - 2h\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Re}\left(g_{jm}\bar{\xi}_{jm}\right) + 2h\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Re}\left(g_{j1}\bar{\xi}_{j0}\right) + a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\vartheta_j\right|^2 +$$
$$h\sum_{j=1}^{M-1} a_j\left|\vartheta_j\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M-1} v_j\left|\xi_{jm}\right|^2 - h\sum_{j=1}^{M-1} v_j\left|\vartheta_j\right|^2 + h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1} v_j\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sol tarafındaki terimlerin pozitif olduğunu dikkate alarak her iki tarafın mutlak değerini alıp, (3.4) ve (3.5) şartlarını kullanarak Young eşitsizliğini uygularsak

$$a_0h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jm}\right|^2+a_0h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}-\delta_{\bar{x}}\xi_{jn-1}\right|^2\le a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\xi_{jn}\right|^2+\left|\xi_{jn-1}\right|^2\right)+$$
$$+a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\xi_{j-1n}\right|^2+\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2\right)+h\mu_0\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jm}\right|^2+h\mu_0\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2+$$
$$\left|a_2\right|h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4+\left|a_2\right|h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2\left|\xi_{jn-1}\right|^2+hb_0\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jm}\right|^2+hb_0\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2+ \tag{3.29}$$
$$a_0h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\vartheta_j\right|^2+h\mu_0\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2+h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_{jn}\right|^2+h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2+$$
$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jm}\right|^2+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jm}\right|^2+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{j1}\right|^2+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2+hb_0\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2.$$

eşitsizliği elde edilir. (3.29) da

$$\begin{aligned}
&\left|a_2\right|h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4+\left|a_2\right|h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2\left|\xi_{jn-1}\right|^2\le\left|a_2\right|h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4\\
&+\frac{\left|a_2\right|h}{2}\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4+\frac{\left|a_2\right|h}{2}\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn-1}\right|^4\\
&=\frac{3}{2}\left|a_2\right|h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4+\frac{\left|a_2\right|h}{2}\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn-1}\right|^4\\
&=\frac{3}{2}a_2h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4+\frac{a_2h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{n=0}^{m-1}\left|\xi_{jn}\right|^4\\
&=\frac{3}{2}a_2h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4+\frac{a_2h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{m-1}\left|\xi_{jn}\right|^4+\frac{a_2h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{j0}\right|^4\\
&=\frac{3}{2}a_2h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4+\frac{a_2h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{m-1}\left|\xi_{jn}\right|^4+\frac{a_2h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^4,
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{m}\left|\xi_{jn-1}\right|^2=\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{n=0}^{m-1}\left|\xi_{jn}\right|^2=\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{m-1}\left|\xi_{jn}\right|^2+\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{j0}\right|^2=\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{m-1}\left|\xi_{jn}\right|^2+\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2$$

ve

$$\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{j-1n}\right|^2=\sum_{n=1}^{m}\left(\left|\xi_{0n}\right|^2+\left|\xi_{1n}\right|^2+\left|\xi_{2n}\right|^2+\ldots+\left|\xi_{M-1n}\right|^2\right)=\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=0}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2=\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2$$

olduğunu dikkate alırsak

$$
\begin{aligned}
& a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jm}\right|^2 + a_0 h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}-\delta_{\bar{x}}\xi_{jn-1}\right|^2 \le a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2 + a_1\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{m-1}\left|\xi_{jn}\right|^2 + \\
& a_1\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2 + a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2 + a_1\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2 + h\mu_0\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jm}\right|^2 + \\
& h\mu_0\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2 + \frac{3}{2}a_2 h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4 + \frac{a_2 h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{m-1}\left|\xi_{jn}\right|^4 + \frac{a_2 h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^4 + \\
& a_0 h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{x}}\vartheta_j\right|^2 + h\mu_0\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2 + hb_0\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jm}\right|^2 + hb_0\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2 + h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_{jn}\right|^2 + \\
& h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jm}\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jm}\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{j1}\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2 + hb_0\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2
\end{aligned}
$$

olup, buradan

$$
\begin{aligned}
& a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jm}\right|^2 + a_0 h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jn}-\delta_{\bar{x}}\xi_{jn-1}\right|^2 \le \left(a_1 + h\mu_0 + hb_0 + h\right)\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2 + \\
& \left(h\mu_0 + hb_0 + h + 2a_1\right)\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jm}\right|^2 + \left(a_1 + hb_0 + h\mu_0\right)\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}-\xi_{jn-1}\right|^2 + \\
& 3a_1\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2 + \frac{3}{2}a_2 h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4 + \frac{a_2 h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{m-1}\left|\xi_{jn}\right|^4 + \frac{a_2 h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^4 + \\
& a_0 h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{x}}\vartheta_j\right|^2 + h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_{jn}\right|^2 + h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jm}\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{j1}\right|^2
\end{aligned}
\qquad (3.30)
$$

eşitsizliği yazılır.

Şimdi, (3.30) daki $h\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jm}\right|^2$ terimi için aşağıdaki lemmayı ifade ve ispat edelim.

<u>Lemma 3.2.2. :</u> Herhangi $m\in\{1,2,...,N\}$ için

$$
h\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jm}\right|^2 \le \left(2+\frac{1}{T}\right)\left(\tau h\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_{jn}\right|^2 + \tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|^2\right) \qquad (3.31)
$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $T=\tau N>0,$ verilen bir sabittir.

<u>İspat:</u>

$$\left|g_m\right|^2-\left|g_1\right|^2=\sum_{n=1}^{m-1}\left(\left|g_{n+1}\right|^2-\left|g_n\right|^2\right)$$

$$=\left(g_m-g_{m-1}\right)\bar{g}_m+\left(g_{m-1}-g_{m-2}\right)\bar{g}_{m-1}+\ldots+\left(g_2-g_1\right)\bar{g}_2+\left(\bar{g}_m-\bar{g}_{m-1}\right)g_{m-1}+$$

$$\left(\bar{g}_{m-1}-\bar{g}_{m-2}\right)g_{m-2}+\ldots+\left(\bar{g}_2-\bar{g}_1\right)g_1$$

$$=\sum_{n=1}^{m-1}\left(g_{n+1}-g_n\right)\bar{g}_{n+1}+\sum_{n=1}^{m-1}\left(\bar{g}_{n+1}-\bar{g}_n\right)g_n=\tau\sum_{n=1}^{m-1}\delta_{\bar{t}}g_n\bar{g}_{n+1}+\tau\sum_{n=1}^{m-1}\delta_{\bar{t}}\bar{g}_n g_n\Rightarrow$$

$$\left|g_m\right|^2=\left|g_1\right|^2+\tau\sum_{n=1}^{m-1}\delta_{\bar{t}}g_n\bar{g}_{n+1}+\tau\sum_{n=1}^{m-1}\delta_{\bar{t}}\bar{g}_n g_n\Rightarrow$$

$$\left|g_m\right|^2\le\left|g_1\right|^2+\tau\sum_{n=1}^{m-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_n\right|\left|g_{n+1}\right|+\tau\sum_{n=1}^{m-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_n\right|\left|g_n\right|$$

$$\le\left|g_1\right|^2+\left(\tau\sum_{n=1}^{m-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_n\right|^2\right)^{1/2}\left(\tau\sum_{n=1}^{m-1}\left|g_{n+1}\right|^2\right)^{1/2}+\left(\tau\sum_{n=1}^{m-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_n\right|^2\right)^{1/2}\left(\tau\sum_{n=1}^{m-1}\left|g_n\right|^2\right)^{1/2}$$

$$=\left|g_1\right|^2+\left(\tau\sum_{n=1}^{m-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_n\right|^2\right)^{1/2}\left[\left(\tau\sum_{n=1}^{m-1}\left|g_{n+1}\right|^2\right)^{1/2}+\left(\tau\sum_{n=1}^{m-1}\left|g_n\right|^2\right)^{1/2}\right]$$

$$=\left|g_1\right|^2+\left(\tau\sum_{n=1}^{m-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_n\right|^2\right)^{1/2}\left[\left(\tau\sum_{n=2}^{m}\left|g_n\right|^2\right)^{1/2}+\left(\tau\sum_{n=1}^{m-1}\left|g_n\right|^2\right)^{1/2}\right]$$

$$\le\left|g_1\right|^2+\left(\tau\sum_{n=1}^{m-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_n\right|^2\right)^{1/2}\left[\left(\tau\sum_{n=1}^{m}\left|g_n\right|^2\right)^{1/2}+\left(\tau\sum_{n=1}^{m}\left|g_n\right|^2\right)^{1/2}\right]$$

$$\le\left|g_1\right|^2+\left(\tau\sum_{n=1}^{N-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_n\right|^2\right)^{1/2}\left[2\left(\tau\sum_{n=1}^{N}\left|g_n\right|^2\right)^{1/2}\right]$$

olduğundan buradan

$$\left|g_m\right|^2\le\left|g_1\right|^2+\tau\sum_{n=1}^{N-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_n\right|^2+\tau\sum_{n=1}^{N}\left|g_n\right|^2 \tag{3.32}$$

yazılır. Ayrıca

$$|g_1|^2 = |g_m|^2 - \left(\tau \sum_{n=1}^{m-1} \delta_{\bar{t}} g_n \bar{g}_{n+1} + \tau \sum_{n=1}^{m-1} |\delta_{\bar{t}} \bar{g}_n g_n|^2 \right)$$

$$|g_1|^2 \le |g_m|^2 + \tau \sum_{n=1}^{m-1} |\delta_{\bar{t}} g_n| |g_{n+1}| + \tau \sum_{n=1}^{m-1} |\delta_{\bar{t}} g_n| |g_n|$$

$$|g_1|^2 \le \left(\tau \sum_{n=1}^{N-1} |\delta_t g_n|^2 + \tau \sum_{n=1}^{N} |g_n|^2 \right) + |g_m|^2 \Rightarrow$$

$$\tau \sum_{m=1}^{N} |g_1|^2 \le \tau \sum_{m=1}^{N} \left(\tau \sum_{k=1}^{N-1} |\delta_t g_n|^2 + \tau \sum_{n=1}^{N} |g_n|^2 \right) + \tau \sum_{m=1}^{N} |g_m|^2$$

olup burada $\tau \sum_{m=1}^{N} = N\tau = T$ olduğunu dikkate alırsak

$$T|g_1|^2 \le T \left(\tau \sum_{n=1}^{N-1} |\delta_t g_n|^2 + \sum_{n=1}^{N} |g_n|^2 \right) + \tau \sum_{m=1}^{N} |g_m|^2$$

$$|g_1|^2 \le \tau \sum_{n=1}^{N-1} |\delta_t g_n|^2 + \tau \sum_{n=1}^{N} |g_n|^2 + \frac{1}{T} \tau \sum_{m=1}^{N} |g_m|^2 \tag{3.33}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{T}\right) \tau \sum_{n=1}^{N} |g_n|^2 + \tau \sum_{n=1}^{N-1} |\delta_t g_n|^2$$

yazılır. (3.33)'ü (3.32)'de kullanırsak

$$|g_m|^2 \le |g_1|^2 + \tau \sum_{n=1}^{N-1} |\delta_t g_n|^2 + \tau \sum_{n=1}^{N} |g_n|^2$$

$$|g_m|^2 \le \left(1 + \frac{1}{T}\right) \tau \sum_{n=1}^{N} |g_n|^2 + \tau \sum_{n=1}^{N-1} |\delta_t g_n|^2 + \tau \sum_{n=1}^{N-1} |\delta_t g_n|^2 + \tau \sum_{n=1}^{N} |g_n|^2$$

$$= \left(2 + \frac{1}{T}\right) \tau \sum_{n=1}^{N} |g_n|^2 + 2\tau \sum_{n=1}^{N-1} |\delta_t g_n|^2 \le \left(2 + \frac{1}{T}\right) \left(\tau \sum_{n=1}^{N} |g_n|^2 + \tau \sum_{n=1}^{N-1} |\delta_t g_n|^2 \right)$$

olup sonuçta

$$|g_m|^2 \le \left(2 + \frac{1}{T}\right) \left(\tau \sum_{n=1}^{N-1} |\delta_t g_n|^2 + \tau \sum_{n=1}^{N} |g_n|^2 \right) \tag{3.34}$$

bulunur. Burada her iki taraf j üzerinden 1'den $M-1$'e toplanır ve h ile çarpılırsa;

$$h \sum_{j=1}^{M-1} |g_{jm}|^2 \le \left(2 + \frac{1}{T}\right) \left(\tau h \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} |\delta_t g_{jn}|^2 + \tau h \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N} |g_{jn}|^2 \right), \ \forall m \in \{1, 2, ..., N\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi (3.30) eşitsizliğinde Lemma 3.2.2'yi ve (3.23) değerlendirmesini kullanalım. Böylece

$$a_0 h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jm}\right|^2 + a_0 h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jn} - \delta_{\bar{x}}\xi_{jn-1}\right|^2 \le c_4\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2 +$$
$$c_5\left(\tau h\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_{jn}\right|^2 + \tau h\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{N}\left|g_{jn}\right|^2\right) + \frac{a_2 h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^4 + a_0 h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{x}}\vartheta_j\right|^2 \tag{3.35}$$

değerlendirmesini elde ederiz. (3.35) ile (3.23) değerlendirmelerini birleştirirsek

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jm}\right|^2 + a_0 h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jm}\right|^2 + a_0 h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\xi_{jn} - \delta_{\bar{x}}\xi_{jn-1}\right|^2 + 2h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn} - \xi_{jn-1}\right|^2 +$$
$$2a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn} - \xi_{j-1n}\right|^2 + 4a_2 h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\xi_{jn}\right|^4 \le \frac{a_2 h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^4 + a_0 h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{x}}\vartheta_j\right|^2 + \tag{3.36}$$
$$c_6\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\vartheta_j\right|^2 + \tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|g_{jn}\right|^2 + \tau h\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{t}}g_{jn}\right|^2\right),\ \forall m\in\{1,2,...,N\}$$

elde edilir. Buradaki $c_6 > 0$, h, τ ve m 'den bağımsızdırlar.

Böylece Teorem 3.2.1 ispat edildi.

Bu teoremi kullanarak fark şemasının sağ tarafa ve başlangıç şartına göre kararlı olduğunu kolaylıkla gösterebiliriz.

3.3. Fark Şemasının Hatası

Bu bölümde fark şemasının hatası için bir bağıntı elde etmeye çalışacağız. Bunun için, ilk olarak ψ_{jn} fonksiyonunu, (x_j, t_n) noktasında $\psi(x,t)$ fonksiyonunun tam çözümü olmak üzere

$$\psi_{jn} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi(x,t)\,dxdt,\quad j=\overline{1,M-1},\quad n=\overline{1,N} \tag{3.37}$$

$$\psi_{j0} = \vartheta_j,\quad j=\overline{0,M},\quad \psi_{0n} = \psi_{Mn} = 0,\quad n=\overline{1,N} \tag{3.38}$$

olarak tanımlayalım ve

$$[e]=\{e_{jn}\}=\{\xi_{jn}-\psi_{jn}\}$$

ile fark şemasının hatasını gösterelim. Bu durumda e_{jn} aşağıdaki sistemi sağlar:

$$i\delta_{\bar{t}}e_{jn}+a_0\delta_{x\bar{x}}e_{jn}+ia_1\delta_{\bar{x}}e_{jn}-a_je_{jn}+v_je_{jn}+ia_2\left(\left|\xi_{jn}\right|^2\xi_{jn}-\left|\psi_{jn}\right|^2\psi_{jn}\right)=I_{jn}$$
$$j=\overline{1,M-1}\,,\quad n=\overline{1,N} \tag{3.39}$$

$$e_{j0}=0\,,\quad j=\overline{0,M} \tag{3.40}$$

$$e_{0n}=e_{Mn}=0\,,\quad n=\overline{1,N}. \tag{3.41}$$

Burada

$$I_{jn}=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}+ia_1\frac{\partial\psi}{\partial x}-a(x)\psi+v(x)\psi+ia_2\left|\psi\right|^2\psi\right)dxdt$$
$$-i\delta_{\bar{t}}\psi_{jn}-a_0\delta_{x\bar{x}}\psi_{jn}-ia_1\delta_{\bar{x}}\psi_{jn}+a_j\psi_{jn}-v_j\psi_{jn}-ia_2\left(\left|\psi_{jn}\right|^2\psi_{jn}\right), \tag{3.42}$$
$$j=\overline{1,M-1}\,,\quad n=\overline{1,N}$$

dır.

Şimdi e_{jn} için bir değerlendirme elde etmeye çalışalım. (3.39)-(3.41) sistemi $\eta_{0n}=\eta_{Mn}=0\,,\quad n=\overline{1,N}$ şartlarını sağlayan herhangi η_{jn} ağ fonksiyonu için

$$h\sum_{j=1}^{M-1}i\delta_{\bar{t}}e_{jn}\bar{\eta}_{jn}+a_0h\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{x\bar{x}}e_{jn}\bar{\eta}_{jn}+ia_1h\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{x}}e_{jn}\bar{\eta}_{jn}-h\sum_{j=1}^{M-1}a_je_{jn}\bar{\eta}_{jn}+$$
$$h\sum_{j=1}^{M-1}v_je_{jn}\bar{\eta}_{jn}+ia_2h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\xi_{jn}\right|^2\xi_{jn}-\left|\psi_{jn}\right|^2\psi_{jn}\right)\bar{\eta}_{jn}=h\sum_{j=1}^{M-1}I_{jn}\bar{\eta}_{jn},\ n=\overline{1,N} \tag{3.43}$$

toplam özdeşliğine denktir. (3.43)'ün sol tarafındaki ikinci terime kısmi toplam formülünü uygulayıp özdeşlikte $\bar{\eta}_{jn}$ fonksiyonunun yerine $\tau\bar{e}_{jn}$ ağ fonksiyonunu alırsak

$$h\tau\sum_{j=1}^{M-1} i\left(\delta_{\bar{t}} e_{jn}\right)\overline{e}_{jn} - a_0 h\tau\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}} e_{jn}\right|^2 + ia_1 h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_{\bar{x}} e_{jn}\right)\overline{e}_{jn} - h\tau\sum_{j=1}^{M-1} a_j \left|e_{jn}\right|^2 +$$
$$h\tau\sum_{j=1}^{M-1} v_j \left|e_{jn}\right|^2 + ia_2 h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\xi_{jn}\right|^2 \xi_{jn} - \left|\psi_{jn}\right|^2 \psi_{jn}\right)\overline{e}_{jn} = h\tau\sum_{j=1}^{M-1} I_{jn}\overline{e}_{jn},\ n=\overline{1,N} \tag{3.44}$$

yazılır. (3.44) eşitliğinden eşleniğini çıkarırsak $n=\overline{1,N}$ için

$$ih\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left(\delta_{\bar{t}} e_{jn}\right)\overline{e}_{jn} + \left(\delta_{\bar{t}}\overline{e}_{jn}\right)e_{jn}\right) + ia_1 h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left(\delta_{\bar{x}} e_{jn}\right)\overline{e}_{jn} + \left(\delta_{\bar{x}}\overline{e}_{jn}\right)e_{jn}\right) +$$
$$+ia_2 h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left[\left(\left|\xi_{jn}\right|^2 \xi_{jn}\overline{e}_{jn} + \left|\xi_{jn}\right|^2 \overline{\xi}_{jn} e_{jn}\right) - \left(\left|\psi_{jn}\right|^2 \psi_{jn}\overline{e}_{jn} + \left|\psi_{jn}\right|^2 \overline{\psi}_{jn} e_{jn}\right)\right]$$
$$= 2ih\tau\sum_{j=1}^{M-1} Im\left(I_{jn}\overline{e}_{jn}\right),$$

olup buradan

$$h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left(\delta_{\bar{t}} e_{jn}\right)\overline{e}_{jn} + \left(\delta_{\bar{t}}\overline{e}_{jn}\right)e_{jn}\right) + a_1 h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left(\delta_{\bar{x}} e_{jn}\right)\overline{e}_{jn} + \left(\delta_{\bar{x}}\overline{e}_{jn}\right)e_{jn}\right) +$$
$$a_2 h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left[\left(\left|\xi_{jn}\right|^2 \xi_{jn}\overline{e}_{jn} + \left|\xi_{jn}\right|^2 \overline{\xi}_{jn} e_{jn}\right) - \left(\left|\psi_{jn}\right|^2 \psi_{jn}\overline{e}_{jn} + \left|\psi_{jn}\right|^2 \overline{\psi}_{jn} e_{jn}\right)\right] \tag{3.45}$$
$$= 2h\tau\sum_{j=1}^{M-1} Im\left(I_{jn}\overline{e}_{jn}\right)$$

yazılır.

$$\begin{aligned}
\left(\left|\xi_{jn}\right|^2 \xi_{jn} - \left|\psi_{jn}\right|^2 \psi_{jn}\right)\overline{e}_{jn} &= \left(\left|\xi_{jn}\right|^2 \xi_{jn} - \left|\xi_{jn}\right|^2 \psi_{jn} + \left|\xi_{jn}\right|^2 \psi_{jn} - \left|\psi_{jn}\right|^2 \psi_{jn}\right)\overline{e}_{jn} \\
&= \left(\left|\xi_{jn}\right|^2 \left(\xi_{jn} - \psi_{jn}\right) + \psi_{jn}\left(\left|\xi_{jn}\right|^2 - \left|\psi_{jn}\right|^2\right)\right)\overline{e}_{jn} \\
&= \left(\left|\xi_{jn}\right|^2 e_{jn} + \psi_{jn}\left(\xi_{jn}\overline{\xi}_{jn} - \psi_{jn}\overline{\psi}_{jn} - \xi_{jn}\overline{\psi}_{jn} + \xi_{jn}\overline{\psi}_{jn}\right)\right)\overline{e}_{jn} \\
&= \left|\xi_{jn}\right|^2 \left|e_{jn}\right|^2 + \psi_{jn}\left(\xi_{jn}\left(\overline{\xi}_{jn} - \overline{\psi}_{jn}\right) + \overline{\psi}_{jn}\left(\xi_{jn} - \psi_{jn}\right)\right)\overline{e}_{jn} \\
&= \left|\xi_{jn}\right|^2 \left|e_{jn}\right|^2 + \psi_{jn}\xi_{jn}\left(\overline{e}_{jn}\right)^2 + \left|\psi_{jn}\right|^2 \left|e_{jn}\right|^2 \\
&= \left(\left|\xi_{jn}\right|^2 + \left|\psi_{jn}\right|^2\right)\left|\overline{e}_{jn}\right|^2 + \psi_{jn}\xi_{jn}\left(\overline{e}_{jn}\right)^2
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\left(\left|\xi_{jn}\right|^2 \xi_{jn} - \left|\psi_{jn}\right|^2 \psi_{jn}\right)\overline{e}_{jn} = \left(\left|\xi_{jn}\right|^2 + \left|\psi_{jn}\right|^2\right)\left|e_{jn}\right|^2 + \psi_{jn}\xi_{jn}\left(\overline{e}_{jn}\right)^2$$

yazılır. Böylece

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\left|\xi_{jn}\right|^2 \xi_{jn}-\left|\psi_{jn}\right|^2 \psi_{jn}\right)\bar{e}_{jn}+\left(\left|\xi_{jn}\right|^2 \bar{\xi}_{jn}-\left|\psi_{jn}\right|^2 \bar{\psi}_{jn}\right)e_{jn}\right] \\
&=2\left(\left|\xi_{jn}\right|^2+\left|\psi_{jn}\right|^2\right)\left|e_{jn}\right|^2+\psi_{jn}\xi_{jn}\left(\bar{e}_{jn}\right)^2+\bar{\psi}_{jn}\bar{\xi}_{jn}\left(e_{jn}\right)^2
\end{aligned} \tag{3.46}
$$

olur. (3.45)’de (3.12)-(3.13) ve (3.46) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&h\sum_{j=1}^{M-1}\left[\left|e_{jn}\right|^2-\left|e_{jn-1}\right|^2+\left|e_{jn}-e_{jn-1}\right|^2\right]+a_1\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left[\left|e_{jn}\right|^2-\left|e_{j-1n}\right|^2+\left|e_{jn}-e_{j-1n}\right|^2\right] \\
&+a_2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left[2\left(\left|\xi_{jn}\right|^2+\left|\psi_{jn}\right|^2\right)\left|e_{jn}\right|^2+\psi_{jn}\xi_{jn}\left(\bar{e}_{jn}\right)^2+\bar{\psi}_{jn}\bar{\xi}_{jn}\left(e_{jn}\right)^2\right] \\
&=2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(I_{jn}\bar{e}_{jn}\right),\ n=\overline{1,N}
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

elde edilir. (3.47) deki bütün eşitlikleri n üzerinden 1’den $m\leq N$’ye toplayalım. Böylece aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$
\begin{aligned}
&h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left[\left|e_{jn}\right|^2-\left|e_{jn-1}\right|^2\right]+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{jn-1}\right|^2+a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left[\left|e_{jn}\right|^2-\left|e_{j-1n}\right|^2\right] \\
&+a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{j-1n}\right|^2+2a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\xi_{jn}\right|^2+\left|\psi_{jn}\right|^2\right)\left|e_{jn}\right|^2 \\
&=-a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\psi_{jn}\xi_{jn}\left(\bar{e}_{jn}\right)^2-a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\bar{\psi}_{jn}\bar{\xi}_{jn}\left(e_{jn}\right)^2+2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(I_{jn}\bar{e}_{jn}\right).
\end{aligned} \tag{3.48}
$$

(3.48) de

$$
\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|e_{jn}\right|^2-\left|e_{jn-1}\right|^2\right)=\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|e_{jm}\right|^2-\left|e_{j0}\right|^2\right)
$$

ve

$$
\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|e_{jn}\right|^2-\left|e_{j-1n}\right|^2\right)=\sum_{n=1}^{m}\left(\left|e_{M-1n}\right|^2-\left|e_{0n}\right|^2\right)
$$

olduğunu dikkate alarak (3.40)-(3.41) şartlarını kullanırsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jm}\right|^2+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{jn-1}\right|^2+a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\left|e_{M-1n}\right|^2+a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{j-1n}\right|^2+$$
$$2a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\xi_{jn}\right|^2+\left|\psi_{jn}\right|^2\right)\left|e_{jn}\right|^2=-a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\psi_{jn}\xi_{jn}\left(\overline{e}_{jn}\right)^2-$$
$$a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\overline{\psi}_{jn}\overline{\xi}_{jn}\left(e_{jn}\right)^2+2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}Im\left(I_{jn}\overline{e}_{jn}\right)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}&h\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jm}\right|^2+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{jn-1}\right|^2+a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{j-1n}\right|^2+\\&2a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\xi_{jn}\right|^2+\left|\psi_{jn}\right|^2\right)\left|e_{jn}\right|^2\le 2a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\psi_{jn}\right|\left|\xi_{jn}\right|\left|e_{jn}\right|^2+\\&2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}\right|\left|e_{jn}\right|\end{aligned}\tag{3.49}$$

eşitsizliği yazılır. (3.49)'un sağ tarafındaki ilk terime Young eşitsizliği uygularsak

$$\begin{aligned}&h\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jm}\right|^2+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{jn-1}\right|^2+a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{j-1n}\right|^2+\\&+a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\xi_{jn}\right|^2+\left|\psi_{jn}\right|^2\right)\left|e_{jn}\right|^2\le 2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}\right|\left|e_{jn}\right|\end{aligned}\tag{3.50}$$

elde edilir. (3.50) nin sağ tarafındaki toplamın $m.$ terimin ayıralım ve ayırdığımız terime $\varepsilon-$Cauchy eşitsizliğini, kalan toplama da Young eşitsizliğini uygulayalım. Böylece

$$\begin{aligned}&h\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jm}\right|^2+h\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{jn-1}\right|^2+a_1\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}-e_{j-1n}\right|^2+\\&a_2h\tau\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\xi_{jn}\right|^2+\left|\psi_{jn}\right|^2\right)\left|e_{jn}\right|^2\le 2h\tau\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jm}\right|^2+2h\tau\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jm}\right|^2+\\&h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}\right|^2+h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}\right|^2\end{aligned}\tag{3.51}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.51) de sol taraftaki bütün terimlerin pozitif olduğunu gözönüne alarak $\varepsilon=2\tau$ olarak seçilirse

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jm}\right|^2\le 4T\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jm}\right|^2+2h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}\right|^2+2h\tau\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}\right|^2$$

olup, buradan

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jm}\right|^2 \le \left(4T+2\right)h\tau\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}\right|^2 + 2h\tau\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jn}\right|^2 \tag{3.52}$$

eşitsizliği yazılır. (3.52) de $\forall m\in\{1,2,3,...,N\}$ için ayrık Gronwall lemmasını kullanırsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|e_{jm}\right|^2 \le c_7 h\tau\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}\right|^2 \tag{3.53}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.53) deki I_{jn} yı değerlendirmek için işlem kolaylığı açısından

$$I_{jn} = I_{jn}^1 + I_{jn}^2 + I_{jn}^3 + I_{jn}^4 + I_{jn}^5 + I_{jn}^6$$

olarak gösterelim ve burada $j=\overline{1,M-1}$, $\text{n}=\overline{1,N}$ için

$$I_{jn}^1 = \frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} i\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdt - i\delta_{\bar{t}}\psi_{jn} \tag{3.54}$$

$$I_{jn}^2 = \frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dxdt - a_0\delta_{x\bar{x}}\psi_{jn} \tag{3.55}$$

$$I_{jn}^3 = \frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} ia_1\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdt - ia_1\delta_{\bar{x}}\psi_{jn} \tag{3.56}$$

$$I_{jn}^4 = \frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} -a\left(x\right)\psi dxdt + a_j\psi_{jn} \tag{3.57}$$

$$I_{jn}^5 = \frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} v\left(x\right)\psi dxdt - v_j\psi_{jn} \tag{3.58}$$

$$I_{jn}^6 = \frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} ia_2\left|\psi\right|^2\psi dxdt - ia_2\left|\psi_{jn}\right|^2\psi_{jn} \tag{3.59}$$

olsun.

Önce $j=\overline{1,M-1}$, $n=\overline{2,N}$ için I_{jn}^{1} ağ fonksiyonunu değerlendirelim. (3.54) ve (3.37) formüllerini kullanırsak aşağıdaki eşitliği yazarız:

$$
\begin{aligned}
I_{jn}^{1} &= \frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} i\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdt - i\delta_{\bar t}\psi_{jn} \\
&= \frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} i\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdt - i\frac{1}{\tau}\left[\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi(x,t)dxdt - \frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi(x,t)dxdt\right] \\
&= \frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} i\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdt - i\frac{1}{h\tau^2}\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\big(\psi(x,t)-\psi(x,t-\tau)\big)dxdt\right] \\
&= \frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}dxdt - \frac{1}{h\tau^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t-\tau}^{t} i\frac{\partial\psi(x,\theta)}{\partial\theta}d\theta dxdt \\
&= \frac{i}{h\tau^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{-\tau}^{0}\left(\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\psi(x,t+\theta)}{\partial\theta}\right)d\theta dxdt \\
&= \frac{i}{h\tau^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{-\tau}^{0}\left(\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\psi(x,t+\theta)}{\partial t}\right)d\theta dxdt.
\end{aligned}
$$

Buradan $j=\overline{1,M-1}$, $n=\overline{2,N}$ için

$$
\left|I_{jn}^{1}\right| \le \frac{1}{h\tau^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{-\tau}^{0}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\psi(x,t+\theta)}{\partial t}\right|d\theta dxdt \tag{3.60}
$$

yazılır. (3.60) eşitsizliği, Fubini teoremi ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$\left|I_{jn}^{1}\right| \le \frac{1}{h\tau^{2}} \int_{-\tau}^{0} \left[\int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(x,t+\theta)}{\partial t} \right| dxdt \right] d\theta$$

$$\le \frac{\sqrt{h}}{h\tau} \left(\int_{-\tau}^{0} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(x,t+\theta)}{\partial t} \right|^{2} dxdtd\theta \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$h\tau \sum_{n=2}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left|I_{jn}^{1}\right|^{2} \le \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{0} \left[\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(x,t+\theta)}{\partial t} \right|^{2} dxdt \right] d\theta \qquad (3.61)$$

eşitsizliği elde edilir. Kuramsal Temeller Teorem1.2.1.’i dikkate alarak $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ fonksiyonu $L_2(\Omega)$ normu anlamında sürekli olduğundan; $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $|\theta| \le \tau < \sigma$ iken

$$\left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(x,t+\theta)}{\partial t} \right|^{2} dxdt \right)^{½} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\sigma > 0$ sayısı vardır. Dolayısıyla $\tau < \sigma$ ve $\tau \to 0$ için $\theta \to 0$ olacağından

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(x,t+\theta)}{\partial t} \right|^{2} dxdt \to 0$$

olur. Böylece

$$h\tau \sum_{n=2}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left|I_{jn}^{1}\right|^{2} \le w_{\tau}^{0} \qquad (3.62)$$

olarak yazabiliriz. Burada w_{τ}^{0}, τ ’ya bağlı olup $\tau \to 0$ için $w_{\tau}^{0} \to 0$’dır.

Şimdi $j = \overline{1, M-1}$ için I_{j1}^{1} fonksiyonunu değerlendirelim. (3.54) ve (3.37) formüllerini kullanarak

$$I_{j1}^{1}=\frac{1}{h\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} i\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdt-i\delta_{\bar{t}}\psi_{j1}$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} i\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdt-\frac{i}{\tau}\left[\frac{1}{h\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi(x,t)dxdt-\psi_{j0}\right]$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} i\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdt-\frac{i}{\tau}\left[\frac{1}{h\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi(x,t)dxdt-\frac{1}{\tau}\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi(x,t_0)\,dxdt\right]$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} i\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdt+\frac{i}{h\tau^2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\psi(x,\theta)}{\partial\theta}d\theta dxdt\Rightarrow$$

$$\left|I_{j1}^{1}\right|\le\frac{1}{h\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|dxdt+\frac{1}{h\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,\theta)}{\partial\theta}\right|dxd\theta=\frac{2}{h\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|dxdt$$

eşitsizliği elde edilir. Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|I_{j1}^{1}\right|\le\frac{2\sqrt{\tau h}}{h\tau}\left(\int_{0}^{\tau}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}$$

olup, buradan

$$\left|I_{j1}^{1}\right|^2\le\frac{4}{h\tau}\int_{0}^{\tau}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|^2dxdt\quad\Rightarrow$$

$$\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{j1}^{1}\right|^2\le4\int_{0}^{\tau}\left(\int_{0}^{\ell}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|^2\right)dxdt=4\int_{0}^{\tau}\left\|\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(I)}^2dt$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte (2.74) değerlendirmesi kullanılırsa

$$\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{j1}^{1}\right|^2\le c_8\tau,\ j=\overline{1,M-1}\tag{3.63}$$

yazılır. (3.62) ve (3.63) taraf tarafa toplanırsa

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}^{1}\right|^{2} \le w_{\tau}^{0} + c_{9}\tau \qquad (3.64)$$

elde edilir.

Şimdi I_{jn}^{2} yi değerlendirelim. (3.55) ve (3.37) formüllerini kullanarak $j=\overline{2,M-2}$, $n=\overline{1,N}$ için

$$I_{jn}^{2}=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a_0\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dxdt-a_0\delta_{x\bar{x}}\psi_{jn}$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a_0\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dxdt-a_0\left[\frac{\psi_{j+1n}-2\psi_{jn}+\psi_{j-1n}}{h^2}\right]$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a_0\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dxdt$$

$$-a_0\left[\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_{j+1}-\frac{h}{2}}^{x_{j+1}+\frac{h}{2}}\frac{\psi(x,t)}{h^2}dxdt-\frac{1}{h\tau}2\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\frac{\psi(x,t)}{h^2}dxdt+\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_{j-1}-\frac{h}{2}}^{x_{j-1}+\frac{h}{2}}\frac{\psi(x,t)}{h^2}dxdt\right]$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a_0\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dxdt-\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_{j+1}-\frac{h}{2}}^{x_{j+1}+\frac{h}{2}}\psi(x,t)dxdt+\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi(x,t)dxdt$$

$$+\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi(x,t)dxdt-\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_{j-1}-\frac{h}{2}}^{x_{j-1}+\frac{h}{2}}\psi(x,t)dxdt$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a_0\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dxdt-\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\big(\psi(x+h,t)-\psi(x,t)\big)dxdt$$

$$-\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\big(\psi(x,t)-\psi(x-h,t)\big)dxdt$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a_0\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dxdt-$$

$$\frac{a_0}{h^3\tau}\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\frac{\partial\psi(\varsigma,t)}{\partial\varsigma}d\varsigma dxdt-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x-h}^{x}\frac{\partial\psi(\varsigma,t)}{\partial\varsigma}d\varsigma dxdt\right]$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a_0\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dxdt-$$

$$\frac{a_0}{h^3\tau}\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\frac{\partial\psi(\varsigma,t)}{\partial\varsigma}d\varsigma dxdt-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\frac{\partial\psi(\varsigma-h,t)}{\partial\varsigma}d\varsigma dxdt\right]$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} a_0\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dxdt-\frac{a_0}{h^3\tau}\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\int_{\varsigma-h}^{\varsigma}\frac{\partial^2\psi(\eta,t)}{\partial\eta^2}d\eta d\varsigma dxdt\right]$$

$$=\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\int_{\varsigma-h}^{\varsigma}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}d\eta d\varsigma dxdt-\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\int_{\varsigma-h}^{\varsigma}\frac{\partial^2\psi(\eta,t)}{\partial\eta^2}d\eta d\varsigma dxdt$$

$$=\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\int_{\varsigma-h}^{\varsigma}\left(\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(\eta,t)}{\partial\eta^2}\right)d\eta d\varsigma dxdt$$

$$=\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{0}^{h}\int_{-h}^{0}\left(\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial\eta^2}\right)d\eta d\varsigma dxdt$$

$$=\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{0}^{h}\int_{-h}^{0}\left(\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2}\right)d\eta d\varsigma dxdt$$

olup $j=\overline{2,M-2},\ n=\overline{1,N}$ için

$$\left|I_{jn}^2\right|\le\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{0}^{h}\int_{-h}^{0}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2}\right|d\eta d\varsigma dxdt \tag{3.65}$$

yazılır. (3.65) de Fubini Teoremi ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak

$$\left|I_{jn}^2\right|\le\frac{a_0\sqrt{\tau h}}{\tau h^2}\left(\int_{0}^{h}\int_{-h}^{0}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2}\right|^2 d\eta d\varsigma dxdt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\left|I_{jn}^2\right|^2\le\frac{a_0{}^2}{h^3\tau}\int_{0}^{h}\int_{-h}^{0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)d\eta d\varsigma$$

$$=\frac{a_0{}^2}{h^3\tau}\int_0^h\int_{-h}^0\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(x+\varsigma,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi(x+\varsigma,t)}{\partial x^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\partial^2\psi(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)d\eta d\varsigma$$

$$\leq\frac{2a_0{}^2}{h^3\tau}\int_0^h\int_{-h}^0\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(x+\varsigma,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)d\eta d\varsigma+$$

$$\frac{2a_0{}^2}{h^3\tau}\int_0^h\int_{-h}^0\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi(x+\varsigma,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)d\eta d\varsigma$$

$$\Rightarrow$$

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=2}^{M-2}\left|I_{jn}^2\right|^2\leq\frac{2a_0{}^2}{h^2}\int_0^h\int_{-h}^0\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=2}^{M-2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(x+\varsigma,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)d\eta d\varsigma+$$

$$\frac{2a_0{}^2}{h^2}\int_0^h\int_{-h}^0\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=2}^{M-2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi(x+\varsigma,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)d\eta d\varsigma$$

olup

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=2}^{M-2}\left|I_{jn}^2\right|^2\leq\frac{2a_0{}^2}{h^2}\int_0^h\int_{-h}^0\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(x+\varsigma,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)d\eta d\varsigma+$$
$$\frac{2a_0{}^2}{h^2}\int_0^h\int_{-h}^0\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial^2\psi(x+\varsigma,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)d\eta d\varsigma \tag{3.66}$$

eşitsizliği elde edilir. Kuramsal Temeller Teorem1.2.1.'i dikkate alarak $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ fonksiyonu $L_2(\Omega)$ normu anlamında sürekli olduğundan, $\forall\varepsilon>0$ verildiğinde $|\varsigma|\leq h<\sigma$ iken

$$\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(x+\varsigma,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)^{1/2}<\frac{\varepsilon}{2}$$

ve $|\eta|\leq h<\sigma$ iken

$$\left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 \psi(x+\varsigma,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2} \right|^2 dxdt \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $\sigma > 0$ sayısı vardır. Dolayısıyla $h < \sigma$ ve $h \to 0$ için $\varsigma \to 0$ ve $\eta \to 0$ olacağından

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi(x+\varsigma,t)}{\partial x^2} \right|^2 dxdt \to 0$$

ve

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 \psi(x+\varsigma,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi(x+\varsigma+\eta,t)}{\partial x^2} \right|^2 dxdt \to 0$$

olur. Böylece

$$h\tau \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=2}^{M-2} \left| I_{jn}^2 \right|^2 \le w_h^0 \tag{3.67}$$

olarak yazabiliriz. Burada w_h^0, h' a bağlı olup $h \to 0$ için $w_h^0 \to 0$'dır.

Şimdi $j = 1,\ j = \overline{M-1}$ ve $n = \overline{1,N}$ için $\left| I_{1n}^2 \right|$ ve $\left| I_{M-1n}^2 \right|$ terimlerini değerlendirelim. Bunun için (3.55) ve (3.37) formülleri kullanılırsa

$$I_{1n}^2=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dxdt-a_0\delta_{x\bar{x}}\psi_{1n}$$

$$=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dxdt-a_0\frac{(\psi_{2n}-2\psi_{1n}+\psi_{0n})}{h^2}$$

$$=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dxdt-\frac{a_0}{h^2}\left[\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_2-\frac{h}{2}}^{x_2+\frac{h}{2}}\psi(x,t)dxdt-2\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\psi(x,t)dxdt+\psi_{0n}\right]$$

$$=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dxdt-\frac{a_0}{\tau h^3}\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_2-\frac{h}{2}}^{x_2+\frac{h}{2}}\psi(x,t)dxdt-2\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\psi(x,t)dxdt\right]$$

$$=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\frac{\partial\psi(x_1+h/2,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(x_1-h/2,t)}{\partial x}\right)dt-$$

$$\frac{a_0}{\tau h^3}\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\big(\psi(x+h,t)-\psi(x,t)\big)dxdt-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\big(\psi(x,t)-\psi(x_1-h/2,t)\big)dxdt\right]$$

$$I_{1n}^2=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{\partial\psi(x_1+h/2,t)}{\partial x}dt-\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\frac{\partial\psi(\varsigma,t)}{\partial\varsigma}d\varsigma dxdt+$$

$$\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x}\frac{\partial\psi(\varsigma,t)}{\partial\varsigma}d\varsigma dxdt-\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{\partial\psi(x_1-h/2,t)}{\partial x}dt$$

$$I_{1n}^2=\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\left[\frac{\partial\psi(x_1+h/2)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(\varsigma,t)}{\partial\varsigma}\right]d\varsigma dxdt+$$

$$\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x}\left[\frac{\partial\psi(\varsigma,t)}{\partial\varsigma}-\frac{\partial\psi(x_1-h/2,t)}{\partial x}\right]d\varsigma dxdt$$

$$=\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\int_{\varsigma}^{x_1+\frac{h}{2}}\frac{\partial^2\psi(\eta,t)}{\partial\eta^2}d\eta d\varsigma dxdt+\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{\varsigma}\frac{\partial^2\psi(\eta,t)}{\partial\eta^2}d\eta d\varsigma dxdt$$

$\Rightarrow$

$$\left|I_{1n}^2\right|\le\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\int_{\varsigma}^{x_1+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi(\eta,t)}{\partial\eta^2}\right|d\eta d\varsigma dxdt+\frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{\varsigma}\left|\frac{\partial^2\psi(\eta,t)}{\partial\eta^2}\right|d\eta d\varsigma dxdt$$

elde edilir. Buradan

$$\left|I_{1n}^2\right| \le \frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}+h}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi(\eta,t)}{\partial\eta^2}\right|^2 d\eta d\varsigma dxdt + \frac{a_0}{h^3\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi(\eta,t)}{\partial\eta^2}\right| d\eta d\varsigma dxdt$$

$$= \frac{2a_0}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi(\eta,t)}{\partial\eta^2}\right| d\eta dt + \frac{a_0}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi(\eta,t)}{\partial\eta^2}\right| d\eta dt$$

$$= \frac{3a_0}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi(\eta,t)}{\partial\eta^2}\right| d\eta dt$$

olup

$$\left|I_{1n}^2\right| \le \frac{3a_0}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\right| dxdt,\ \ \mathrm{n}=\overline{1,N} \tag{3.68}$$

eşitsizliği ve benzer şekilde

$$\left|I_{M-1n}^2\right| \le \frac{3a_0}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_k}\int_{x_{M-1}-\frac{h}{2}}^{x_{M-1}+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\right| dxdt,\ \ \mathrm{n}=\overline{1,N} \tag{3.69}$$

yazılır. (3.68) ve (3.69) dan Cauchy- Schwarz eşitsizliğinin yardımıyla

$$\left|I_{1n}^2\right| \le \frac{3a_0\sqrt{\tau h}}{h\tau}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}},\ \ \mathrm{n}=\overline{1,N},$$

$$\left|I_{M-1n}^2\right| \le \frac{3a_0\sqrt{\tau h}}{h\tau}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_{M-1}-\frac{h}{2}}^{x_{M-1}+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}},\ \ \mathrm{n}=\overline{1,N}$$

bulunur. Buradan

$$h\tau\sum_{n=1}^{N}\left|I_{1n}^{2}\right|^{2}\leq 9a_0{}^{2}\int_{0}^{h}\left\|\frac{\partial^2\psi(x,.)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,T)}^{2}dx$$

$$h\tau\sum_{n=1}^{N}\left|I_{M-1n}^{2}\right|^{2}\leq 9a_0{}^{2}\int_{l-h}^{l}\left\|\frac{\partial^2\psi(x,.)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,T)}^{2}dx$$

olup

$$h\tau\sum_{n=1}^{N}\left|I_{1n}^{2}\right|^{2}+h\tau\sum_{n=1}^{N}\left|I_{M-1n}^{2}\right|^{2}\leq 9a_0{}^{2}\left(\int_{0}^{h}\left\|\frac{\partial^2\psi(x,.)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,T)}^{2}dx+\int_{l-h}^{l}\left\|\frac{\partial^2\psi(x,.)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,T)}^{2}dx\right) \tag{3.70}$$

yazılır. $h\to 0$ olduğunda $h\tau\sum_{n=1}^{N}\left|I_{1n}^{2}\right|^{2}+h\tau\sum_{n=1}^{N}\left|I_{M-1n}^{2}\right|^{2}\to 0$ olur. Bu bilgileri dikkate alarak (3.70) ile (3.67)'i birleştirirsek sonuçta

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}^{2}\right|^{2}\leq w_h^0 \tag{3.71}$$

yazabiliriz.

Şimdi I_{jn}^{3} ü değerlendirelim. (3.56) ve (3.37) formüllerini kullanarak $j=\overline{2,M-2}$, $n=\overline{1,N}$ için

$$I_{jn}^{3}=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}ia_1\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdt-ia_1\delta_{\bar{x}}\psi_{jn}$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}ia_1\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdt-ia_1\frac{\left(\psi_{jn}-\psi_{j-1n}\right)}{h}$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}ia_1\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdt-\frac{ia_1}{h}\left[\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi(x,t)dxdt-\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_{j-1}-\frac{h}{2}}^{x_{j-1}+\frac{h}{2}}\psi(x,t)dxdt\right]$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}ia_1\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdt-\frac{ia_1}{h^2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi(x,t)dxdt+\frac{ia_1}{h^2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_{j-1}-\frac{h}{2}}^{x_{j-1}+\frac{h}{2}}\psi(x,t)dxdt$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} ia_1\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdt-\frac{ia_1}{h^2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi(x,t)dt+\frac{ia_1}{h^2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi(x-h,t)dxdt$$

$$=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} ia_1\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdt-\frac{ia_1}{h^2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(\psi(x,t)-\psi(x-h,t)\right)dxdt$$

$$=\frac{ia_1}{h^2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{-h}^{0}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}d\varsigma dxdt-\frac{ia_1}{h^2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x-h}^{x}\frac{\partial\psi(\varsigma,t)}{\partial\varsigma}d\varsigma dxdt$$

$$=\frac{ia_1}{\tau h^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{-h}^{0}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}d\varsigma dxdt-\frac{ia_1}{\tau h^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{-h}^{0}\frac{\partial\psi}{\partial\varsigma}(x+\varsigma,t)d\varsigma dxdt$$

$$=\frac{ia_1}{\tau h^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{-h}^{0}\left[\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(x+\varsigma,t)}{\partial x}\right]d\varsigma dxdt\Rightarrow$$

$$\left|I_{jn}^3\right|\le\frac{a_1}{\tau h^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{-h}^{0}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(x+\varsigma,t)}{\partial x}\right|d\varsigma dxdt, \tag{3.72}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.72) de, Fubini Teoremi ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak

$$\left|I_{jn}^3\right|\le\frac{a_1h\sqrt{\tau}}{h^2\tau}\left(\int_{-h}^{0}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(x+\varsigma,t)}{\partial x}\right|^2dxdtd\varsigma\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow$$

$$\left|I_{jn}^3\right|^2\le\frac{a_1^2}{\tau h^2}\int_{-h}^{0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(x+\varsigma,t)}{\partial x}\right|^2dxdt\right)d\varsigma\Rightarrow$$

$$h\tau\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=2}^{M-2}\left|I_{jn}^3\right|^2\le\frac{a_1^2}{h}\int_{-h}^{0}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(x+\varsigma,t)}{\partial x}\right|^2dxdt\right)d\varsigma \tag{3.73}$$

olur. Kuramsal Temeller Teorem1.2.1.’i dikkate alarak $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ fonksiyonu $L_2(\Omega)$ normu anlamında sürekli olduğundan $\forall\varepsilon>0$ verildiğinde $|\varsigma|\le h<\sigma$ iken

$$\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(x+\varsigma,t)}{\partial x}\right|^{2}dxdt\right)^{1/2}<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\sigma>0$ vardır. Dolayısıyla $h<\sigma$ ve $h\to 0$ için $\varsigma\to 0$ olacağından

$$\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(x+\varsigma,t)}{\partial x}\right|^{2}dxdt\to 0$$

olur. Böylece

$$h\tau\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=2}^{M-2}\left|I_{jn}^{3}\right|^{2}\le w_h^1 \tag{3.74}$$

yazabiliriz. Burada w_h^1, h'a bağlı olup $h\to 0$ için $w_h^1\to 0$'dır.

Şimdi $j=1,\ j=\overline{M-1}$ ve $n=\overline{1,N}$ için $\left|I_{1n}^{3}\right|$ ve $\left|I_{M-1n}^{3}\right|$ terimlerini değerlendirelim. Bunun için (3.56) ve (3.37) formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
I_{1n}^{3}&=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}ia_1\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdt-ia_1\delta_{\bar{x}}\psi_{1n}\\
&=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}ia_1\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdt-ia_1\left(\frac{\psi_{1n}-\psi_{0n}}{h}\right)\\
&=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}ia_1\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdt-\frac{ia_1}{h}\left[\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\psi(x,t)dxdt-\psi\left(x_1-\frac{h}{2},t\right)\right]\\
&=\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}ia_1\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdt-\frac{ia_1}{h}\left[\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\left(\psi(x,t)-\psi\left(x_1-\frac{h}{2},t\right)\right)dxdt\right]\\
&=\frac{ia_1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{0}^{h}\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdt-\frac{ia_1}{h^2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x}\frac{\partial\psi}{\partial\varsigma}(\varsigma,t)\,d\varsigma dxdt\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$I_{1n}^{3}\le\frac{ia_1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{0}^{h}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}dxdt-\frac{ia_1}{h^2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\frac{\partial\psi}{\partial\varsigma}(\varsigma,t)\,d\varsigma dxdt\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\left|I_{1n}^3\right| &\le \frac{a_1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_0^h\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|dxdt+\frac{a_1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_0^h\left|\frac{\partial\psi}{\partial\varsigma}(\varsigma,t)\right|d\varsigma dt\\ &=\frac{a_1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_0^h\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|dxdt+\frac{a_1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_0^h\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t)\right|dxdt\\ &=\frac{2a_1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_0^h\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t)\right|dxdt\end{aligned}$$

olup

$$\left|I_{1n}^3\right|\le\frac{2a_1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_0^h\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t)\right|dxdt,\ \mathrm{n}=\overline{1,N} \tag{3.75}$$

ve benzer şekilde

$$\left|I_{M-1n}^3\right|\le\frac{2a_1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{l-h}^{l}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t)\right|dxdt,\ \mathrm{n}=\overline{1,N} \tag{3.76}$$

eşitsizlikleri yazılır. (3.75) ve (3.76) da Fubini Teoremi ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanırsak

$$\left|I_{1n}^3\right|\le\frac{2a_1\sqrt{\tau h}}{\tau h}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_0^h\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t)\right|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}},\ \mathrm{n}=\overline{1,N}$$

$$\left|I_{M-1n}^3\right|\le\frac{2a_1\sqrt{\tau h}}{\tau h}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{l-h}^{l}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t)\right|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}},\ \mathrm{n}=\overline{1,N}$$

yazılır. Buradan

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\left|I_{1n}^3\right|^2\le 4a_1^2\int_0^h\left(\int_0^T\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|^2dt\right)dx=4a_1^2\int_0^h\left\|\frac{\partial\psi(x,.)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,T)}^2dx,$$

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\left|I_{M-1n}^3\right|^2\le 4a_1^2\int_{l-h}^{l}\left(\int_0^T\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|^2dt\right)dx=4a_1^2\int_{l-h}^{l}\left\|\frac{\partial\psi(x,.)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,T)}^2dx$$

olup

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\left|I_{1n}^3\right|^2+\tau h\sum_{n=1}^{N}\left|I_{M-1n}^3\right|^2\le 4a_1^2\left(\int_0^h\left\|\frac{\partial\psi(x,.)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,T)}^2dx+\int_{l-h}^{l}\left\|\frac{\partial\psi(x,.)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,T)}^2dx\right) \tag{3.77}$$

eşitsizliği yazılır. (3.77) de $h\to 0$ olduğunda

$$h\tau\sum_{n=1}^{N}\left|I_{1n}^{3}\right|^{2}+h\tau\sum_{n=1}^{N}\left|I_{M-1n}^{3}\right|^{2}\to 0$$

olacaktır. Dolayısıyla (3.77) ile (3.74) birleştirilirse

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}^{3}\right|^{2}\le w_{h}^{1} \tag{3.78}$$

yazabiliriz.

Şimdi I_{jn}^{4} ü değerlendirelim. (3.57) ve (3.37) formüllerini kullanarak $j=\overline{1,M-1}$, $n=\overline{1,N}$ için

$$I_{jn}^{4}=-\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a(x)\psi(x,t)\,dxdt+a_j\psi_{jn}=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(a_j\psi_{jn}-a(x)\psi(x,t)\right)dxdt$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(a_j\psi_{jn}-a(x)\psi_{jn}+a(x)\psi_{jn}-a(x)\psi(x,t)\right)dxdt$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(a_j-a(x)\right)\psi_{jn}\,dxdt+\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a(x)\left(\psi_{jn}-\psi(x,t)\right)dxdt$$

$$=\frac{1}{\tau h}\psi_{jn}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(a_j-a(x)\right)dxdt+\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a(x)\left(\psi_{jn}-\psi(x,t)\right)dxdt$$

$$=\psi_{jn}\frac{1}{h}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(a_j-a(x)\right)dx+\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a(x)\left(\psi_{jn}-\psi(x,t)\right)dxdt$$

$$=\psi_{jn}.0+\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a(x)\left(\psi_{jn}-\psi(x,t)\right)dxdt$$

eşitliği elde edilir. Yukarıda (2.72) şartını kullanırsak

$$\left|I_{jn}^{4}\right|\le\frac{\mu_0}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\psi_{jn}-\psi(x,t)\right|dxdt,\ j=\overline{1,M-1},\ \mathrm{n}=\overline{1,N} \tag{3.79}$$

yazılır. Burada

$$\psi_{jn}-\psi(x,t)=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi(\varsigma,\theta)\,d\varsigma d\theta-\psi(x,t)$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(\psi(\varsigma,\theta)-\psi(x,t)\right)d\varsigma d\theta$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(\psi(\varsigma,\theta)-\psi(\varsigma,t)+\psi(\varsigma,t)-\psi(x,t)\right)d\varsigma d\theta$$

olduğundan

$$\psi_{jn}-\psi(x,t)=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t}^{\theta}\frac{\partial\psi(\varsigma,\eta)}{\partial\eta}\,d\eta d\varsigma d\theta+\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{\varsigma}\frac{\partial\psi(\gamma,t)}{\partial\gamma}\,d\gamma d\varsigma d\theta \quad (3.80)$$

yazılır. Böylece (3.80)'i (3.79)'da dikkate alırsak

$$\left|I_{jn}^{4}\right|\le\frac{\mu_0}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left[\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t}^{\theta}\left|\frac{\partial\psi(\varsigma,\eta)}{\partial\eta}\right|d\eta d\varsigma d\theta+\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{\varsigma}\left|\frac{\partial\psi(\gamma,t)}{\partial\gamma}\right|d\gamma d\varsigma d\theta\right]dxdt$$

$$\le\frac{\mu_0}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left[\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left|\frac{\partial\psi(\varsigma,\eta)}{\partial\eta}\right|d\eta d\varsigma d\theta+\frac{1}{h\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(\gamma,t)}{\partial\gamma}\right|d\gamma d\varsigma d\theta\right]dxdt$$

$$=\frac{\mu_0}{(\tau h)^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left|\frac{\partial\psi(\varsigma,\eta)}{\partial\eta}\right|d\eta d\varsigma d\theta dxdt+$$

$$\frac{\mu_0}{(\tau h)^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(\gamma,t)}{\partial\gamma}\right|d\gamma d\varsigma d\theta dxdt$$

$$=\frac{\mu_0}{h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(\varsigma,\eta)}{\partial\eta}\right|d\varsigma d\eta+\frac{\mu_0}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(\gamma,t)}{\partial\gamma}\right|d\gamma dt$$

olacağından

$$\left|I_{jn}^{4}\right| \le \frac{\mu_0}{h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|dxdt + \frac{\mu_0}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|dxdt \tag{3.81}$$

eşitsizliği yazılır. (3.81) de önce Cauchy-Schwarz, sonra Young eşitsizliğini kullanırsak

$$\left|I_{jn}^{4}\right|^2 \le \frac{2\mu_0{}^2\tau}{h}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|^2 dxdt\right) + \frac{2\mu_0{}^2 h}{\tau}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt\right)$$

olup buradan

$$\begin{aligned}\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}^{4}\right|^2 &\le 2\mu_0{}^2\tau^2\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|^2 dxdt\right) + 2\mu_0{}^2h^2\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt\right)\\ &= 2\mu_0{}^2\tau^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2\mu_0{}^2h^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega)}^2\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıda (2.74) değerlendirmesi kullanılırsa

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}^{4}\right|^2 \le c_{10}\left(\tau^2+h^2\right) \tag{3.82}$$

yazılır. Burada $c_{10}>0$ sabiti h ve τ dan bağımsızdır.

Şimdi I_{jn}^{5} i değerlendirelim. (3.58) ve (3.37) formüllerini kullanarak $j=\overline{1,M-1}$, $n=\overline{1,N}$ için

$$\begin{aligned}I_{jn}^{5} &= \frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} v(x)\psi - v_j\psi_{jn}\\ &= \frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(v(x)\psi(x,t)-v_j\psi_{jn}+v(x)\psi_{jn}-v(x)\psi_{jn}\right)dxdt\\ &= \frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(v(x)-v_j\right)\psi_{jn}dxdt + \frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} v(x)\left(\psi(x,t)-\psi_{jn}\right)dxdt\end{aligned}$$

$$=\frac{\psi_{jn}}{h}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(v(x)-v_j\right)dxdt+\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}v(x)\left(\psi(x,t)-\psi_{jn}\right)dxdt$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}v(x)\left(\psi(x,t)-\psi_{jn}\right)dxdt$$

yazılır. Buradan (3.80) eşitliğini ve (2.73) şartını kullanarak

$$\left|I_{jn}^5\right|\le\frac{1}{\tau h}b_0\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\psi(x,t)-\psi_{jn}\right|dxdt$$

$$=\frac{b_0}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t}^{\theta}\frac{\partial\psi(\varsigma,\eta)}{\partial\eta}d\eta d\varsigma d\theta+\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{\varsigma}\frac{\partial\psi(\gamma,t)}{\partial\gamma}d\gamma d\varsigma d\theta\right|dxdt$$

$$\le\frac{b_0}{(\tau h)^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t}^{\theta}\left|\frac{\partial\psi(\varsigma,\eta)}{\partial\eta}\right|d\eta d\varsigma d\theta dxdt+$$

$$\frac{b_0}{(\tau h)^2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{\varsigma}\left|\frac{\partial\psi(\gamma,t)}{\partial\gamma}\right|d\gamma d\varsigma d\theta dxdt$$

$$\le\frac{b_0}{h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(\varsigma,\eta)}{\partial\eta}\right|d\varsigma d\eta+\frac{b_0}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(\gamma,t)}{\partial\gamma}\right|d\gamma dt$$

$$=\frac{b_0}{h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|dxdt+\frac{b_0}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|dxdt$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte önce Cauchy-Schwarz eşitsizliğini sonra da Young eşitsizliğini kullanırsak

$$\left|I_{jn}^5\right|\le\frac{b_0\sqrt{\tau h}}{h}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|^2dxdt\right)^{1/2}+\frac{b_0\sqrt{\tau h}}{\tau}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|^2dxdt\right)^{1/2}\Rightarrow$$

$$\left|I_{jn}^5\right|^2\le\frac{2b_0^{\,2}\tau}{h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|^2dxdt+\frac{2b_0^{\,2}h}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|^2dxdt\Rightarrow$$

olup buradan

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}^{5}\right|^{2}\leq 2{b_0}^{2}\tau^{2}\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}+2{b_0}^{2}h^{2}\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega)}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıda (2.74) değerlendirmesi kullanılırsa

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}^{5}\right|^{2}\leq c_{11}\left(\tau^{2}+h^{2}\right) \tag{3.83}$$

yazılır. Burada $c_{11}>0$ sabiti h ve τ dan bağımsızdır.

Şimdi I_{jn}^{6} yı değerlendirelim. (3.59) ve (3.37) formüllerini kullanırsak $j=\overline{1,M-1}$, $n=\overline{1,N}$ için

$$I_{jn}^{6}=\frac{ia_2}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}|\psi|^{2}\psi\,dxdt-ia_2\left|\psi_{jn}\right|^{2}\psi_{jn}=\frac{ia_2}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(-\left|\psi_{jn}\right|^{2}\psi_{jn}+|\psi|^{2}\psi\right)dxdt$$

$$=\frac{ia_2}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(-\left(\left|\psi_{jn}\right|^{2}+|\psi|^{2}\right)\left(\psi_{jn}-\psi\right)-\psi_{jn}\psi\left(\bar{\psi}_{jn}-\bar{\psi}\right)\right)dxdt\Rightarrow$$

$$\left|I_{jn}^{6}\right|\leq\frac{|a_2|}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\left(\left|\psi_{jn}\right|^{2}+|\psi|^{2}\right)\left(\psi_{jn}-\psi\right)\right|dxdt+\frac{|a_2|}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\psi_{jn}\psi\left(\bar{\psi}_{jn}-\bar{\psi}\right)\right|dxdt$$

$$\leq\frac{a_2}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(\left|\psi_{jn}\right|^{2}+|\psi|^{2}\right)\left|\psi_{jn}-\psi\right|dxdt+\frac{1}{2}\frac{a_2}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(\left|\psi_{jn}\right|^{2}+|\psi|^{2}\right)\left|\psi_{jn}-\psi\right|dxdt$$

$$=\frac{3}{2}\frac{a_2}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(\left|\psi_{jn}\right|^{2}+|\psi|^{2}\right)\left|\psi_{jn}-\psi\right|dxdt$$

$$\leq\frac{3}{2}\frac{a_2}{\tau h}\left(\left(\max_{\substack{1\leq j\leq M-1\\1\leq n\leq N}}\left|\psi_{jn}\right|\right)^{2}+\left(vrai\max_{(x,t)\in\Omega}|\psi|\right)^{2}\right)\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\psi_{jn}-\psi\right|dxdt$$

olduğundan

$$\left|I_{jn}^{6}\right| \le \frac{3}{2}\frac{a_2}{\tau h}\left(\left\|\psi\right\|_{L_\infty(\Omega)}^{2} + \max_{\substack{1\le j\le M-1\\1\le n\le N}}\left|\psi_{jn}\right|^{2}\right)\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\psi-\psi_{jn}\right| dxdt \qquad (3.84)$$

yazılır. (2.74) değerlendirmesini kullanarak

$$\left\|\psi\right\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_{12}\left\|\psi\right\|_{C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(I)\right)} \le c_{13}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{13} > 0$ sabiti ile (2.74) değerlendirmesinin sağ tarafı gösterilmektedir. Böylece

$$\left\|\psi\right\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_{13} \qquad (3.85)$$

olur.

Şimdi $\left|\psi_{jn}\right|$'ları değerlendirelim. Bunun için (3.37) formülünü göz önüne alırsak, $j=\overline{1,M-1},\ \mathrm{n}=\overline{1,N}$ için

$$\begin{aligned}\left|\psi_{jn}\right| &\le \frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\psi\right| dxdt \le \frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(vrai\max_{x\in I}\left|\psi\right|\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} dx\right)dt\\ &= \frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(vrai\max_{x\in I}\left|\psi\right|\right)dt\\ &\le \frac{1}{\tau}vrai\max_{x\in I\times(0,T)}\left|\psi\right|\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt = \left\|\psi\right\|_{L_\infty(\Omega)}\end{aligned}$$

yazılır. Burada (3.85) i kullanırsak

$$j=\overline{1,M-1},\ n=\overline{1,N}\ \text{ için } \left|\psi_{jn}\right| \le \mathrm{c}_{13} \qquad (3.86)$$

olur. Böylece (3.85) ve (3.86) yı (3.84) de gözönüne alırsak

$$\left|I_{jn}^{6}\right| \le c_{14}\frac{a_2}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\psi-\psi_{jn}\right|dxdt$$

$$\le c_{14}\frac{a_2}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left[\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t}^{\theta}\left|\frac{\partial\psi(\varsigma,\eta)}{\partial\eta}\right|d\eta d\varsigma d\theta+\frac{1}{\tau h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{x}^{\varsigma}\left|\frac{\partial\psi(\gamma,t)}{\partial\gamma}\right|d\gamma d\varsigma d\theta\right]dxdt$$

$$\le c_{14}\frac{a_2}{h}\left(\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left|\frac{\partial\psi(\varsigma,\eta)}{\partial\eta}\right|d\eta d\varsigma\right)+c_{14}\frac{a_2}{\tau}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(\gamma,t)}{\partial\gamma}\right|d\gamma dt\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|I_{jn}^{6}\right| \le c_{14}\frac{a_2\sqrt{\tau h}}{h}\left(\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left|\frac{\partial\psi(\varsigma,\eta)}{\partial\eta}\right|^2 d\eta d\varsigma\right)^{1/2}+c_{14}\frac{a_2\sqrt{\tau h}}{\tau}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(\gamma,t)}{\partial\gamma}\right|^2 d\gamma dt\right)^{1/2}$$

$$=c_{14}a_2\left[\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{h}}\left(\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left|\frac{\partial\psi(\varsigma,\eta)}{\partial\eta}\right|^2 d\eta d\varsigma\right)^{1/2}+\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\tau}}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(\gamma,t)}{\partial\gamma}\right|^2 d\gamma dt\right)^{1/2}\right]$$

olup buradan

$$\left|I_{jn}^{6}\right| \le c_{14}a_2\left[\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{h}}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|^2 dxdt\right)^{1/2}+\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\tau}}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt\right)^{1/2}\right]$$

yazılır. Böylece

$$\left|I_{jn}^{6}\right|^2 \le 2c_{14}^2a_2^2\frac{\tau}{h}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|^2 dxdt+2c_{14}^2a_2^2\frac{h}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt \Rightarrow$$

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}^{6}\right|^2 \le 2c_{14}^2a_2^2\tau^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}^2+2c_{14}^2a_2^2h^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega)}^2$$

yazılır. Yukarıda (2.74) değerlendirmesi kullanılırsa

$$\tau h\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|I_{jn}^{6}\right|^2 \le c_{15}\left(\tau^2+h^2\right) \tag{3.87}$$

elde edilir.

$$I_{jn} = I_{jn}^1 + I_{jn}^2 + I_{jn}^3 + I_{jn}^4 + I_{jn}^5 + I_{jn}^6$$

olduğundan

$$\left|I_{jn}\right|^2 \le 6\left|I_{jn}^1\right|^2 + 6\left|I_{jn}^2\right|^2 + 6\left|I_{jn}^3\right|^2 + 6\left|I_{jn}^4\right|^2 + 6\left|I_{jn}^5\right|^2 + 6\left|I_{jn}^6\right|^2$$

eşitsizliğinde (3.64), (3.71), (3.78), (3.82), (3.83) ve (3.87) değerlendirmeleri dikkate alınırsa

$$\tau h \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left|I_{jn}\right|^2 \le w_\tau^0 + w_h^0 + w_h^1 + c_{16}\left(\tau^2 + h^2\right) \tag{3.88}$$

yazılır. Bu ifade $\forall m \in \{1, 2, , ..., N\}$ için (3.53) de dikkate alınırsa

$$h \sum_{j=1}^{M-1} \left|e_{jm}\right|^2 \le c_{17}\left(w_\tau^0 + w_h^0 + w_h^1 + \tau^2 + h^2\right) \tag{3.89}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki Teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.3.1 : Teorem 3.2.1. in sağlandığını kabul edelim. Bu durumda (3.1)-(3.3) fark şemasının hatası için

$$h \sum_{j=1}^{M-1} \left|e_{jm}\right|^2 \le c_{18}\left(w_\tau^0 + w_h^0 + w_h^1 + \tau^2 + h^2\right), \quad \forall m \in \{1, 2, ..., N\}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $c_{18} > 0$ sayısı τ ve h'dan bağımsız bir sabittir ve $\tau \to 0$ ve $h \to 0$ için $w_\tau^0 \to 0,\ w_h^0 \to 0,\ w_h^1 \to 0$'dır.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, momentum operatörünü içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için bir b.s.d.p ne sonlu fark metodu uygulanmıştır. Bu amaçla ilk olarak problem ayrıklaştırılmıştır. Daha sonra bölüm (3.2)'de fark şemasının kararlı olduğu ispatlanmış olup bölüm (3.3) de fark şemasının hatası değerlendirilmiş ve yöntemin yakınsaklığı gösterilmiştir. Bu alanda, [15,26-35,37-39] çalışmalarında lineer olmayan Schrödinger denkleminin nümerik çözümleri incelenmiş ve gözönüne alınan problemlere sonlu fark metoduyla yaklaşılmıştır. Bu çalışmaların çoğunda fark şemasının kararlılığı ve yakınsaklığı gösterilmiş ve nümerik örnekleme yapılmıştır. Bu çalışmalarda incelenen lineer olmayan Schrödinger denklemlerinin hiçbiri momentum operatörünü içermez. Dolayısıyla bizim gözönüne aldığımız denklem, momentum operatörü olduğundan bu çalışmada elde edilen sonuçlar bu alanda literatürdeki çalışmalardan oldukça farklı ve günceldir.

5. KAYNAKLAR

[1] https://www.cs.mcgill.ca/~rwest/wikispeedia/wpcd/wp/s/schr%25c3%25B6dinger_equation.htm.

[2] Karaoğlu, B., (2008). Kuantum mekaniğine giriş. Seçkin Yayıncılık, Ankara, 279.

[3] Khuri, S. A., (1998). A new approach to the cubic Schrödinger eguation: An application of the decomposition technique. Applied Mathematics and Computation, 97(2-3), 251-254.

[4] Sadighi, A. and Ganji, D. D., (2008). Analytic treatment of linear and nonlinear Schrödinger equations: A study with homotopy-perturbation and Adomian decomposition methods. Physics Letters A, 372(4), 465-469.

[5] Biazar, J. and Ghazvini, H., (2007). Exact solutions for non-linear Schrödinger equations by He's homotopy perturbation method. Physics Letters A, 366(1-2), 79-84.

[6] He, J. H., (2005). Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations. Chaos, Solitons and Fractals, 26(3), 695-700.

[7] Mousaa, M. M. and Ragab, S. F., (2008). Application of the homotopy perturbation method to linear and nonlinear Schrödinger equations. Zeitschrift für Naturforschung A, 63a, 140-144.

[8] Alomari, A. K., Noorani, M. S. M. and Nazar, R., (2009). Explicit series solutions of some linear and nonlinear Schrödinger equations via the homotopy analysis method. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14(4), 1196-1207.

[9] Ghanbari, B., (2014). An analytical study for (2+1)-dimensional Schrödinger equation. The Scientific World Jaurnal, http://dx.doi.org/10.1155/2014/438345.

[10] Hosseinzadeh, Kh., (2017). An analytic approximation to the solution of Schrodinger equation by VIM. Applied Mathematical Sciences, 11(16), 813-818.

[11] Wazwaz, A. M., (2008). A study on linear and nonlinear Schrodinger equations by the variational iteration method. Chaos, Solitons and Fractals, 37(4), 1136-1142.

[12] Akbaba, G. D., (2011). Sanal katsayılı gradyent içeren Schrödinger denklemi için lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

[13] Yıldırım Aksoy, N., (2017). Solution of a nonlinear Schrödinger equation with Galerkin's method. Iğdır Universtiy Journal of the Institute of Science and Technology, 7(2), 225-239.

[14] Iskenderov, A. D. and Yagubov, G. Y., (2007). Optimal control problem with unbounded potential for multidimensional, nonlinear and nonstationary Schrödinger equation. Proceedings of the Lnkaran State University, Natural Sciences Series, 3-56.

[15] Iskenderov, A. D., Yagubov, G. Y. and Musayeva, M. A., (2012). Identification of Quantum potentials. Baku,Azerbaijan, Casıoglu, 552.

[16] Mahmudov, N. M., (2007). Solvability of boundary value problems for a Schrödinger equation with püre ımaginary coefficient in the nonlinear part of this equation. Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 27(35), 25-36.

[17] Toyoğlu, F., (2012). İki boyutlu Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri ve onların nümerik çözümü. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

[18] Yagub, G. and Aksoy, E., (2017). The solvability of initial boundary value problem for three-dimensional nonlinear Schrödinger equation with a special gradient term. AIP Conference Proceedings, 1833, 020042.

[19] Becerril, R., Guzman, F. S., Rendon-Romero, A. and Valdez-Alvarado, S., (2008). Solving the time-dependent Schrödinger equation using finite difference methods. Revista Mexicana de Fisica E, 54(2), 120-132.

[20] Chan, T. F., Lee, D. and Shen, L., (1986). Stable explicit schemes for equations of the Schrödinger type. SIAM Journal on Numerical Analysis, 23(2), 274-281.

[21] Chan, T. F. and Shen, L., (1987). Stability analysis of difference schemes for variable coefficient Schrödinger type equations. SIAM Journal on Numerical Analysis, 24(2), 336-349.

[22] Dai, W., (1992). An unconditionally stable three-level explicit difference scheme for the Schrödinger equation with a variable coefficient. SIAM Journal on Numerical Analysis, 29(1), 174-181.

[23] Senger, Ö., (2006). Lineer Schrödinger denklemi için sınır değer probleminin çözümüne ait yüksek mertebeden kestirimler ve onların uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

[24] Yetişkin, H., (2005). Kompleks potansiyelli Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemi ve onun sonlu fark yaklaşımı. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

[25] Yildiz, B. and Yagubov, G., (1997). On an optimal control problem. Journal of computational and applied mathematics, 88(2), 275-287.

[26] Yıldırım Aksoy, N., Yagubov, G. and Yıldız, B., (2012). The finite difference approximations of the optimal control problem for non-linear Schrödinger equation. International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation, 3(3), 158-183.

[27] Wang, B. and Liang, D., (2018). The finite difference scheme for nonlinear Schrödinger equations on unbounded domain by artificial boundary conditions. Applied Numerical Mathematics, 128, 183-204.

[28] Radziūnas, M., (1996). On convergence and stability of difference schemes for nonlinear Schrödinger type equations. Lithuanian Mathematical Journal, 36(2), 178-194.

[29] Xie, S. S., Li, G. X. and Yi, S., (2009). Compact finite difference schemes with high accuracy for one-dimensional nonlinear Schrödinger equation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198, 1052-1060.

[30] Ivanauskas, F. and Radziunas, M., (1999). On convergence and stability of the explicit difference method for solution of nonlinear Schrödinger equations. SIAM Journal on Numerical Analysis, 36(5), 1466-1481.

[31] Sun, Z. Z. and Zhao, D. D., (2010). On the $L\infty$ convergence of a difference scheme for coupled nonlinear Schrödinger equations. Computers and Mathematics with Applications, 59, 3286-3300.

[32] Chen, J. and Zhang, L. M., (2017). Numerical approximation of solution for the coupled nonlinear Schrödinger equations. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 33(2), 435-450.

[33] Hu, H. and Hu, H., (2018). Maximum norm error estimates of fourth-order compact difference scheme for the nonlinear Schrödinger equation involving a quintic term. Journal of inequalities and applications, 2018(1), 180.

[34] Cavalcanti, M. M., Corrêa, W. J., C. Sepúlveda, M. A., & Asem, R. V. (2019). Finite difference scheme for a high order nonlinear Schrödinger equation with localized damping. Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica, 64(2), 161-172.

[35] Potapov, M. M. and Razgulin, A. V. (1990). Difference methods in problems of the optimal control problems of the steady selfaction of light beams. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, *30*(4), 134-142.

[36] Yagub, G., Ibrahimov, N. S. and Zengin, M., (2018). The Solvability of the Initial-Boundary Value Problems for a Nonlinear Schrödinger Equation with a Special Gradient Term. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 14(2), 214-232.

[37] Yagubov, G. Y., (1994). Optimal control by coefficient of Quasilinear Schrödinger equation. Doctoral of Science Thesis, Kiev State University, Kiev, Russia.

[38] Yagubov, G. Y. and Musayeva, M. A., (1994). The finite difference method for solution of variational formulation of an inverse problem for nonlinear Schrödinger equation. Izv. AN. Azerbaijan-Sercies Physics Technical Mathematical Science, 15(5–6), 58-61.

[39] Yıldırım Aksoy, N., Hào, D. N. and Yagub, G. (2017). Finite Difference Method for an Optimal Control Problem for a Nonlinear Time-dependent Schrödinger Equation. Numerical Functional Analysis and Optimization, 38(6), 799-817.

[40] Wheeden, R. L. and Zygmund, A., (1977), Measure and Integral: An Introduction to real analysis. Markel Dekker, INC, New York.

[41] Adams, R. A., (1975). Sobolev spaces. Academic Press, New York.

[42] Yıldırım Aksoy, N., (2009). Lineer olmayan Schrödinger denkleminin sınırsız katsayısıyla optimal kontrol problemleri ve onların sonlu fark yaklaşımı. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

[43] Özeroğlu, Y., (2017). Lineer olmayan bir Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer probleminin çözümü. Yüksek Lisan Tezi, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

[44] Mikhailov, V. P., (1983). Kısmi türevli diferansiyel denklemler. Nauka,424, Moskova, (Rusça).

[45] https://www.math.Isu.edu/~rich/Fubini.

[46] Ladyzhenskaja, O. A., Solonnikov, V. A. and Ural'ceva, N. N., (1968). Linear and Quasilinear equations of parabolic type. American Mathematical Soc., 646, ABD. (İng.).

[47] Miçooğulları, V., (2013). Klasik Eşitsizlikler. Yüksek Lisans Tezi, Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Şalıurfa.

[48] Eqonte, I. O., (2004). "Numerical solution to ordinary differantial equations," (Doctoral dissertation University of Agriculture Abeokuta, Nigeria).

[49] Canıtez, N., (1992). Jeofizikte Modelleme. Literatür Yayıncılık.

[50] Smith, G. D., (1987). Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods. Clarendon Press, Oxford.

[51] Recktenwald, G. W., (2011). "Finite-difference approximations to the heat equation."

[52] Mahmudov, E., (2002). Matematik analiz ve uygulamaları. Papatya Yayıncılık, İstanbul, 392.

[53] Chung, T. J., (2010). Computational fluid Dynamics. Second Edition, Cambridge University Press, New York.

[54] Hirsch, C., (2007). Numerical computation of internal and external flows. Second Edition, Butterworth-Heinemann, Oxford.

[55] Hoffman, K. A. and Chiang, S. T., (2000). Computational fluid Dynamics. Fourth Edition, Engineering Education System, Kansas.

[56] Aktaş, C., (1995). Diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri. Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

[57] Deniz, M., (2013). Geçici elektromanyetik alan yayılımının sonlu farklar yöntemleriyle iki boyutlu modellenmesi. Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.

[58] Kim, S., (2003). Numerical Methods for Differential Equations. Lexington, Kentucky, USA.

[59] Özişik, M. N., (1994). Finite difference methods in heat transfer, CRC press., Florida.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:Emel SARIAHMET
Doğum Yeri ve Tarihi	:Çayeli/12.01.1989
Yabancı Dili	:İngilizce
İletişim (e-posta)	:emel.sariahmet53@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:Çayeli Vakıfbank Lisesi (Rize) / 2007
Lisans	:Kafkas Üniversitesi (Kars) / 2016
Yüksek Lisans	:Kafkas Üniversitesi (Kars) / 2020

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :

Kafkas Üniversitesi (Kars) Kaküv Koleji (2016-2018)

Çayeli Beyazsu Ortaokulu (Rize) (2018-2019)