T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BANACH UZAYLARINDA ASİMTOTİK İZOMETRİK KOPYALAR İLE SABİT NOKTA TEORİSİ TESPİTİ

Mehmet KILIÇ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

OCAK-2020
KARS

T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BANACH UZAYLARINDA ASİMTOTİK İZOMETRİK KOPYALAR İLE SABİT NOKTA TEORİSİ TESPİTİ

Mehmet KILIÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

OCAK-2020

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Mehmet Kılıç'ın Dr. Öğr. Üyesi Veysel Nezir danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "...Banach uzaylarında asimtotik izometrik kopyalar ile sabit nokta teorisi tespiti..." adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ..birliği.. ile kabul edilmiştir.

28/01/2020

	Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA	
Üye	: Doç. Dr. Furkan YILDIRIM	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mehmet KILIÇ
28.01.2020

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

BANACH UZAYLARINDA ASİMTOTİK İZOMETRİK KOPYALAR İLE SABİT NOKTA TEORİSİ TESPİTİ

Mehmet KILIÇ

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

Asimtotik izometrik ℓ^1 kopyaya sahip olma Banach uzayın genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozduğuna işarettir. Bu sonuç ilk olarak Dowling, Lennard ve Turett tarafından verilmiştir. Bu sonucun verildiği çalışmada asıl amaç L^1 Lebesgue Banach uzaylarının yansımalı olmayan tüm alt uzaylarının sabit nokta teorisine sahip olmadığını göstermek olmuştur. Daha sonrasında ise bu kavram vasıtasıyla Banach uzaylarının sabit nokta teorisine sahip olması, yansımalı olması, belirli sınıf fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olacak şekilde yeniden normlanması konuları karakterize edilmiş; dolayısıyla bu kavram Banach uzay geometrisi için önemli bir araç olmuştur. Dowling, Lennard ve Turett'in aynı çalışmasında asimtotik izometrik c_0 kopyaya sahip olma kavramı da ele alınmış ve aynı şekilde bu kopyalara sahip Banach uzayların genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olmayacağı gösterilmiştir. Bu tez çalışmasında sonsuz boyutlu yansımalı olmayan Banach uzaylarının sabit nokta teorisine sahip olmadıklarının testi için kullanılan bu iki araç incelenmiştir. Unutulmamalıdır ki yansımalı olmayan Banach uzaylarının tamamının sabit nokta teorisine sahip olmadıkları bilinmemektedir fakat düzgün konvekslik, düzgün rotundluk, normal yapıya sahip olma gibi bazı ek geometrik koşullar ile yansımalı Banach uzaylarının sabit nokta teorisine sahip olduğu literatürde gösterilmiştir. Tez çalışmasında öncelikle Banach uzaylarının ℓ^1 veya c_0 izomorfik kopyalarından birine sahip olması ile hangi tür fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozdukları anlatılmıştır. Daha sonra ise asimtotik izometrik ℓ^1 veya c_0 kopyalardan birini içermesi kavramı ele alınmış, bu kavrama denk ifadeler incelenmiş ve bu durumlarda Banach uzayın genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: genişlemeyen fonksiyon, sabit nokta teorisi, kapalı sınırlı konveks küme, yansımalı Banach uzay, Banach latis, asimtotik genişlemeyen fonksiyon, asimtotik izometrik ℓ^1 kopya, asimtotik izometrik c_0 kopya, c_0'ın izomorfik kopyası, ℓ^1'in izomorfik kopyası

2020, 31 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

DETECTING THE FIXED POINT PROPERTY FOR BANACH SPACES USING ASYMPTOTICALLY ISOMETRIC COPIES

Mehmet KILIÇ

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof Dr. Veysel NEZİR

Having asymptotically isometric copy of ℓ^1 is a sign for a Banach space to fail the fixed point property for nonexpansive mappings. This result was given firstly by Dowling, Lennard and Turett. The main goal was to show that any nonreflexive subspace of the Lebesgue Banach space L^1 fails the fixed point property when the result of containing an asymptotically isometric copy of ℓ^1 was given in the study. Later, using this concept, Banach spaces have been characterized to have fixed point property for certain class of mappings, be reflexive and be renormed to have the fixed point property and so this concept has become an important tool for the geometry of Banach space. In the same study of Dowling, Lennard and Turett, the concept of having asymptotically isometric copy of c_0 was also taken into consideration and similarly it was proven that Banach spaces containing these type of copies cannot have the fixed point property. In this thesis study, these two tools are investigated to test whether or not infinite dimentional nonreflexive Banach spaces fail the fixed point property for nonexpansive mappings. It should not be forgotten that it is unknown whether or not all nonreflexive Banach spaces fail the fixed point property but with some additional conditions such as uniform convexity, uniform rotundness, and normal structure, it was shown in literature that reflexive Banach spaces do have fixed point property. In the thesis study, firstly, it is explained for what type of mappings, the Banach spaces containing isomorphic copy of ℓ^1 or c_0 fail the fixed point property. Next, the concept of having any asymptotically isometric copy of ℓ^1 or c_0 is considered and alternative statements are investigated; then, in these situations, it is shown that Banach spaces fail the fixed point property for nonexpansive mappings.

Key Words: nonexpansive mapping, fixed point property, closed bounded convex subset, reflexive Banach space, Banach lattice, asymptotically nonexpansive mapping, asymptotically isometric copy of ℓ^1, asymptotically isometric copy of c_0, isomorphic copy of c_0, isomorphic copy of ℓ^1

2020, 31 pages

ÖNSÖZ

Öncelikle yüksek lisans tez çalışmamda danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR'e değerli destekleri için teşekkür ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca tez sürecinde benden desteğini esirgemeyen sevgili eşim Ayşegül'e ve bu süreçte yaramazlık yapmayarak beni mutlu eden sevgili oğlum Hüseyin Miraç'a ve maddi manevi emeği geçen herkese teşekkür ederim.

Mehmet KILIÇ

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

ℓ^1	:	Mutlak toplanabilir dizilerin Banach uzayı
c_0	:	Sıfıra yakınsak dizilerin Banach uzayı
$\mathrm{co}\ C$	:	C 'nin konveks kabuğu
$\overline{\mathrm{co}}\ C$	:	C 'nin kapalı konveks kabuğu
$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$	:	n. terimi 1, diğerleri 0 olan ℓ^1 ve c_0'ın kanonik bazı

1. GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Bir Banach uzayının sabit nokta teorisine sahip olması demek bu uzaydan alınan keyfi her boş olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi üzerinde tanımlı ve görüntü noktaları yine aynı kümede olacak her genişlemeyen fonksiyonun yani görüntüler arası uzaklık noktalar arası uzaklığı aşmayan fonksiyonun bir sabit noktaya sahip olması demektir. Bu konuda ilk çalışmada Brouwer [2] tarafından Euclid uzaylarında kapalı ve sınırlı kümeler üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların sabit noktaya sahip olması sonucu verilmiştir. Schauder tarafından [24] ise bu sonuç tüm Banach uzaylarına kompakt kümeler için genelleştirilmiştir. Daha sonrasında ise Banach daralma prensibi adı ile metrik uzay geometrisinin tanınan önemli sonucu Banach tarafından tam metrik uzayları üzerinde tanımlı ve yine görüntü noktaları ele alınan Banach uzaylarında olacak şekilde tanımlanacak tüm daralan fonksiyonların bir tek sabit noktasının olduğu sonucu [1] literatüre kazandırılmıştır. Araştırmacılar daha sonra kompakt kümelerin sınıfının çok dar bir sınıf olduğu gerçeğini ele alarak daha genel sonuçlar için incelemelerde bulunmuşlar. Sabit nokta teorisyenleri için çok önemli bir tarih olarak kabul edilen 1965 yılında arka arkaya aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir. Öncelikle Browder [3] tarafından Hilbert uzaylarından alınacak boş olmayan her kapalı, sınırlı ve konveks küme üzerinde tanımlı ve yine görüntüsü aynı küme içinde yer alan her genişlemeyen fonksiyonun sabit noktaya sahip olduğu gösterilmiştir. Hatta bu teorem Banach uzayları için sabit nokta teorisine sahip olma kavramı olarak literatürde tanım niteliğinde kullanılmıştır. Yine aynı tarihde Browder'ın bu sonucu birbirinden bağımsız olarak iki ayrı çalışma ile yine Browder [4] ve Gohde [14] tarafından Hilbert uzay sonucu düzgün konveks Banach uzaylara genelleştirilmiştir. Aynı tarihde Kirk [16] tarafından ise bu sonuçlardan daha genel bir sonuç sunularak normal yapıya sahip yansımalı Banach uzaylarının sabit nokta teorisine sahip olduğu sonucu verilmiştir.

Banach uzayının sabit nokta teorisine sahip olmasını gösteren bir çok geometrik özellikler bulunmaktadır. Yansımalı Banach uzaylarının sabit nokta teorisine sahip olması için düzgün rotundluk, düzgün konvekslik veya normal yapıya sahip olma yeter koşuldur. Klasik Banach uzaylar göz önüne alındığında yansımalı olanlar ($1 < p < \infty$ olduğunda Lebesgue integrallenebilen fonksiyonlar uzayı L^p veya dizi uzayları ℓ^p) düzgün rotund olduklarından sabit nokta teorisine sahiptirler. Klasik yansımalı olmayan Banach uzaylar (sıfıra yakınsak diziler uzayı c_0, mutlak toplanabilen diziler uzayı ℓ^1, mutlak Lebesgue integrallenebilen fonksiyonlar uzayı L^1, hemen hemen heryerde sınırlı ölçülebilir fonksiyonlar uzayı L^∞, ve $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı $C[0,1]$) ise ℓ^1 veya c_0'ın izometrik kopyalarından birini içermesi sebebiyle sabit nokta teorisini genişlemeyen fonksiyonlar için bozar. Dolayısıyla aşağıdaki iki sorunun ortaya çıkması doğal bir sonuçtur.

Soru 1: Eğer bir Banach uzayı X sabit nokta teorisine sahip ise yansımalı mıdır?

Soru 2: Eğer bir Banach uzayı X yansımalı ise sabit nokta teorisine sahip midir?

İlk soru ele alındığında, araştırmacılar yansımalı olmayan Banach uzayların sabit nokta teorisine sahip olacak şekilde yeniden normlanıp normlanamayacağı sorusuna cevap aramaları teşvik edilmiştir. Haliyle bu soruya cevap aranabilecek en makul yer en iyi bilinen yansımalı olmayan Banach uzaylar c_0 ve ℓ^1 Banach uzayları olmuştur. Bu Banach uzayların araştırmacılara sunduğu önemli bir avantaj iyi bilinen literatürde yer alan bir gerçek olan ([18] çalışması, Teorem 1.c.12 ve [19] çalışması Teorem 1.c.5 gereğince) eğer bir Banach uzayı bir Banach latis veya şartsız baza sahip bir Banach uzayı ise yansımalı olması için gerek ve yeter koşul uzayın c_0 veya ℓ^1'in hiç bir izomorfik kopyasını içermemesidir. Dolayısıyla, bu önemli sonuç araştırmacılara şu çıkarımı sunmuştur: eğer hem c_0 hem de ℓ^1 sabit nokta teorisine sahip olacak şekilde yeniden normlanamaz ise Banach latis olan Banach uzayların veya şartsız baza sahip Banach uzayların sabit nokta teorisine sahip olması Banach uzayın yansımalı olduğunu gösterirdi. Bu sebeple, bu iki uzayın izomorfizm sınıflarını çalışmak Banach uzaylarının çok geniş bir sınıfı için çok memnun edici sonuçlarının elde edilmesine imkan tanıyacaktır.

Bu konudaki çalışmalar James [15] tarafından başlatılmış ve c_0 veya ℓ^1'in izomorfik kopyasını içeren Banach uzaylar karakterize edilmiştir. Dowling, Lennard ve Turett tarafından gösterilmiştir ki eğer bir Banach uzayı c_0'ın izomorfik kopyasını içeriyorsa asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayacak şekilde yeniden normlanamaz. Ayrıca, eğer bir Banach uzayı ℓ^1'in izomorfik kopyasını içeriyorsa, bu uzay düzgün Lipschitz fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayacak şekilde yeniden normlanamaz. Bu sonuçlar sırasıyla [12] ve [9] çalışmalarında yer almaktadır. Ele alınan tez çalışmasında bu teoremler takip eden bölümlerde detaylı olarak anlatılmaktadır. Bilindiği üzere genişlemeyen fonksiyonlar aynı zamanda hem asimtotik genişlemeyen hem de düzgün Lipschitz olması sebebiyle daha genel bir sınıfı oluşturur. Fakat bu tarz izomorfik kopyaları içeren Banach uzaylarında kapalı, sınırlı ve konveks bir küme üzerinde sabit noktasız bir genişlemeyen fonksiyonun varlığı garanti edilememiştir. Bunun yerine ekstra koşullar içeren ve bu tarz kopyaları içeren ve Banach uzayın asimtotik izometrik c_0 kopya içermesi veya Banach uzayın asimtotik izometrik ℓ^1 kopya içermesi isimleri verilen iki kavramlar vasıtasıyla Banach uzayların asimtotik izometrik bu kopyaları içermesi halinde genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozduğu gösterilmiştir.

Yani, asimtotik izometrik ℓ^1 kopyaya sahip olma Banach uzayın genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozduğuna işarettir. Bu sonuç ilk olarak Dowling, Lennard ve Turett [9] tarafından verilmiştir. Bu sonucun verildiği çalışmada asıl amaç L^1 Lebesgue Banach uzaylarının yansımalı olmayan tüm alt uzaylarının sabit nokta teorisine sahip olmadığını göstermek olmuştur. Daha sonra bu kavram vasıtasıyla Banach uzaylarının sabit nokta teorisine sahip olması, yansımalı olması, belirli sınıf fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olacak şekilde yeniden normlanması konuları karakterize edilmiş; dolayısıyla bu kavram Banach uzay geometrisi için önemli bir araç olmuştur. Dowling, Lennard ve Turett'in aynı çalışmasında asimtotik izometrik c_0 kopyaya sahip olma kavramı da ele alınmış ve aynı şekilde bu kopyalara sahip Banach uzayların genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olmayacağı gösterilmiştir. Bu tez çalışmasında sonsuz boyutlu yansımalı olmayan Banach uzaylarının sabit nokta teorisine sahip olmadıklarının testi için kullanılan bu iki araç incelenmiştir. Unutulmamalıdır ki yansımalı olmayan Banach uzaylarının tamamının sabit nokta teorisine sahip olmadıkları bilinmemektedir, fakat düzgün konvekslik, düzgün rotundluk, normal yapıya sahip olma gibi bazı ek geometrik koşullar ile yansımalı Banach uzaylarının sabit nokta teorisine sahip olduğu literatürde [13] gösterilmiştir.

Tez çalışmasında öncelikle Banach uzaylarının ℓ^1 veya c_0 izomorfik kopyalarından birine sahip olması ile hangi tür fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozdukları anlatılmıştır. Daha sonra ise asimtotik izometrik ℓ^1 veya c_0 kopyalardan birini içermesi kavramı ele alınmış, bu kavrama denk ifadeler incelenmiş ve bu durumlarda Banach uzayın genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozduğu gösterilmiştir.

1.2 Kuramsal temeller

Bu bölümde tez çalışması ile ilgili gerekli temel tanım, lemma ve teoremler verilecektir.

Öncelikle çok iyi bilindiği gibi $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ ve $(c_0\,, \|\cdot\|_\infty)$ Banach uzaylarının tam tanımları ve alışılmış normları aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$c_0 = \left\{(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \;:\; \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\}$$

ve

$$\ell^1 = \left\{(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \;:\; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\right\}$$

olup

$x = (x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \in c_0$ için $\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ öyle ki x $\in c_0$ olduğundan $\|x\|_\infty = \underset{n\in\mathbb{N}}{\text{maks}} |x_n|$

ve

$$x = (x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \in \ell^1 \text{ için } \|x\|_\infty := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

dir.

Tanım 1.1 [13] E kümesi $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks bir altkümesi olsun. Her $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in E$ için $\| \mathrm{Tx} - \mathrm{Ty} \| \leq \| \mathrm{x} - \mathrm{y} \|$ koşulu sağlanırsa, $\mathrm{T}\colon E \to E$ fonksiyonuna genişlemeyen fonksiyon denir.

Tanım 1.2 [13] E kümesi $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks bir altkümesi olsun. Her $x, y \in E$ için $\| Tx - Ty \| = \| x - y \|$ koşulu sağlanırsa, $T: E \to E$ fonksiyonuna izometrik fonksiyon denir.

Kolayca görülebilir ki izometrik her fonksiyon aynı zamanda bir genişlemeyen fonksiyondur.

Tanım 1.3 [13] E kümesi $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks bir altkümesi olsun. Her $x, y \in E$ için $\| Tx - Ty \| \leq \lambda \| x - y \|$ koşulu sağlanacak şekilde en az bir $\lambda \in (0,1)$ varsa, $T: E \to E$ fonksiyonuna daralan fonksiyon denir.

Not edilmelidir ki bir $T: E \to E$ fonksiyonun birbirinden farklı her $x, y \in E$ için $\| Tx - Ty \| < \| x - y \|$ koşulunu sağlıyor olması yukarıdaki ifadeye denk ifadeyi sağlıyor olması anlamına gelir ki bu T fonksiyonun daralan fonksiyon olduğunu söyler.

Tanım 1.4 [13] E kümesi $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks bir altkümesi olsun. Her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x, y \in E$ için $T((1-\lambda)\, x + \lambda\, y) = (1-\lambda)\, T(x) + \lambda\, T(y)$ koşulu sağlanırsa $T: E \to E$ fonksiyonuna afin fonksiyon denir.

Tanım 1.5 [13] E kümesi $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks bir altkümesi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x, y \in E$ için $\| T^n(x) - T^n(y) \| \leq k \| x - y \|$ koşulunu sağlayan en az bir $k \in [1, \infty)$ bulunabiliyorsa $T: E \to E$ fonksiyonuna düzgün Lipschitz fonksiyon ve k'ya ise düzgün Lipschitz'lik katsayısı denir.

Tanım 1.6 [13] E kümesi $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks bir altkümesi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x, y \in E$ için $\| T^n(x) - T^n(y) \| \leq k_n \| x - y \|$ olacak şekilde 1'e azalarak yaklaşan en az bir $(k_n)_{n \in N}$ dizisi bulunabiliyor ise $T: E \to E$ fonksiyonuna asimtotik genişlemeyen fonksiyon denir.

Tanım 1.7 [13] Eğer $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayının her boştan farklı kapalı, sınırlı ve konveks altkümesi E üzerinde tanımlı herhangi genişlemeyen $T: E \to E$ fonksiyonunun E'de en az bir sabit noktası var isei yani en az bir $x \in E$ için $Tx = x$ ise bu durumda

$(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayına genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip ya da sabit noktasını korur denir.

Tanım 1.8 [13] Eğer $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayının her boştan farklı kapalı, sınırlı ve konveks altkümesi E üzerinde tanımlı herhangi düzgün Lipschitz $T: E \to E$ fonksiyonunun E'de en az bir sabit noktası var ise, yani en az bir $x \in E$ için $Tx = x$ ise bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayına düzgün Lipschitz fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip ya da sabit noktasını korur denir.

Tanım 1.9 [13] Eğer bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayının her boştan farklı kapalı, sınırlı ve konveks altkümesi E üzerinde tanımlı herhangi asimtotik genişlemeyen $T: E \to E$ fonksiyonunun E'de en az bir sabit noktası var ise, yani en az bir $x \in E$ için $Tx = x$ ise bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayına asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip ya da sabit noktasını korur denir.

Aşağıdaki iki teorem James Distorsiyon teoremleri ismi ile anılır [15].

Teorem 1.10 Bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayıın c_0 'ın bir izomorfik kopyasını içermesi için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon \in (0,1)$ ve her $(t_n)_{n\in N} \in c_0$ için

$$(1-\varepsilon)\sup_n |t_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \leq \sup_n |t_n|$$

olacak şekilde X'de en az bir $(x_n)_{n\in N}$ dizisinin varlığıdır.

Teorem 1.11 Bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayıın ℓ^1 'in bir izomorfik kopyasını içermesi için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon \in (0,1)$ ve her $(t_n)_{n\in N} \in \ell^1$ için

$$(1-\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty} |t_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|$$

olacak şekilde X'de en az bir $(x_n)_{n\in N}$ dizisinin varlığıdır.

Dowling, Johnson, Lennard ve Turett [8] çalışması ile yukarıda verilen teoremler genelleştirilmiş ve James Kuvvetlendirilmiş Distorsiyon teoremleri isimleri ile aşağıdaki teoremler sunulmuştur.

Teorem 1.12 Bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayın ℓ^1 'in bir izomorfik kopyasını içermesi için gerek ve yeter koşul sıfıra yakınsayan her $(\varepsilon_n)_{n\in N} \subset (0,1)$ dizisi, her $(t_n)_{n\in N} \in \ell^1$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$(1-\varepsilon_k)\sum_{n=k}^{\infty}|t_n| \leq \left\|\sum_{n=k}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq \sum_{n=k}^{\infty}|t_n|$$

olacak şekilde X'de en az bir $(x_n)_{n\in N}$ dizisinin varlığıdır.

Teorem 1.13 Bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayın c_0 'ın bir izomorfik kopyasını içermesi için gerek ve yeter koşul sıfıra yakınsayan her $(\varepsilon_n)_{n\in N} \subset (0,1)$ dizisi, her $(t_n)_{n\in N} \in c_0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$(1-\varepsilon_k)\sup_{n\geq k}|t_n| \leq \left\|\sum_{n=k}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq (1+\varepsilon_k)\sup_{n\geq k}|t_n|$$

olacak şekilde X'de en az bir $(x_n)_{n\in N}$ dizisinin varlığıdır.

Bu teoremlerin sabit nokta teorisinde nasıl kullanışlı olduğu materyal ve yöntemler bölümünde anlatılmaktadır.

Tez çalışmasının odaklandığı konu olan asimtotik izometrik kopyalar ise aşağıdaki tanımlar ile verilmiştir.

Tanım 1.14 [9] Bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayına aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda ℓ^1'in bir asimtotik izometrik kopyasını içerir denir: X'de en az bir $(x_n)_{n\in N}$ dizisi ve $(0,1)$ aralığında sıfıra azalarak yaklaşan bir $(\varepsilon_n)_{n\in N}$ dizisi varsa ki her $(a_n)_{n\in N} \in \ell^1$ dizisi için

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n)|a_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

dir.

Tanım 1.15 [15,16] Bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayına aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içerir denir: X'de en az bir $(x_n)_{n\in N}$ dizisi ve

$(0,1)$ aralığında sıfıra azalarak yaklaşan bir $(\varepsilon_n)_{n\in N}$ dizisi varsa ki her $(a_n)_{n\in N} \in c_0$ dizisi için

$$\sup_n (1-\varepsilon_n)|a_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq \sup_n |a_n|$$

dir

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde öncelikle ℓ^1 ve c_0 Banach uzaylarının genişlemeyen hatta afin izometrik fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlamadıkları gösterilmektedir. Daha sonra ise bir Banach uzayının ℓ^1 veya c_0 izomorfik kopyalarından birine sahip olması durumunda uzayın sabit nokta teorisi odaklı sonuçları ile araştımacıların Banach uzayının ℓ^1 veya c_0'ın asimtotik izometrik kopyalarını içerdiğini test edebilmek için alternatif tanım sunan teoremler verilecektir.

2.1 ℓ^1 ve c_0 Banach uzayları ve afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisi

Bu alt başlıkda öncelikle mutlak toplanabilir dizilerin Banach uzayı ℓ^1'in sonra ise sıfıra yakınsak dizilerin Banach uzayı c_0'ın afin izometrik fonksiyonların dolayısıyla afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olmadıkları gösterilmiştir.

<u>Teorem 2.1</u> [13] $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ Banach uzayı $\|\cdot\|_1-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar.

İspat: c_0'ın kanonik bazı e_n yani n'inci terimi 1 diğer tüm terimleri 0 olan dizi ele alınmak üzere

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n \colon \; her \;\; t_n \geq 0 \;\; ve \;\; \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}$$

kümesi göz önüne alınsın. Kolayca görülür ki bu küme birim kapalı yuvar içinde kalan bir kümedir, dolayısıyla sınırlıdır. Ayrıca $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $\mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2, \ldots, \mathrm{x}^k \in E$ için her $\mathrm{s} = 1,2,\ldots,k$ değerinde ${t_n}^s \geq 0 \;\; ve \;\; \sum_{n=1}^{\infty} {t_n}^s = 1$ koşullarını sağlayan skalerler ile $\mathrm{x}^s = \sum_{n=1}^{\infty} {t_n}^s e_n$ formunda yazılır. O halde, $\sum_{s=1}^{\mathrm{k}} a_s = 1$ koşullarını sağlayan keyfi $a_s \geq 0 \quad (\mathrm{s} \in 1,2,\ldots,k)$ skalerleri için $\sum_{s=1}^{\mathrm{k}} a_s \mathrm{x}^s = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\mathrm{k}} a_s {t_n}^s e_n$ olup $\sum_{s=1}^{\mathrm{k}} a_s {t_n}^s \geq 0 \;\; ve \;\; \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\mathrm{k}} a_s {t_n}^s = 1$ dir. Dolayısıyla, E kümesi konvekstir. Son olarak ise görülebilir ki E kümesi kapalıdır. Gerçekten de eğer $(\mathrm{x}^s)_{\mathrm{s} \in \mathrm{N}}$ dizisi E

kümesinin $x \in \ell^1$ noktasına yakınsayan bir dizisi ise her $s \in \mathbb{N}$ için ${t_n}^s \geq 0 \ ve \ \sum_{n=1}^{\infty} {t_n}^s = 1$ koşullarını sağlayan skaler vardır ki $\mathrm{x}^s = \sum_{n=1}^{\infty} {t_n}^s e_n$ formunda yazılır. Bu durumda kuvvetli yakınsaklık zayıf yakınsaklığı dolayısıyla koordinatsal yakınsaklığı gerektirdiğinden her s koordinatı için ${t_n}^s \xrightarrow{n} a_s$ olacak şekilde $(\mathrm{a}_s)_s \in \ell^1$ dizisi vardır ki $\mathrm{x} = \sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{a}_s e_s$ formunda yazılır. Ayrıca bu noktasal yakınsaklık dolayısıyla ise her $s \in \mathbb{N}$ için $a_s \geq 0 \ ve \ \sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{a}_s = 1$ dir. O halde, $x \in E$ olup E kümesi kapalıdır.

Şimdi görülebilir ki E kümesinin $\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n$ formunda yazılan noktaları için $T(\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_{n+1}$ kuralı ile verilen sağa kaydırma ismini alan iyi taımlı $\mathrm{T}: E \to E$ fonksiyonu afin $\|\cdot\|_1-$genişlemeyen (hatta afin $\|\cdot\|_1-$izometri) sabit noktasız bir fonksiyondur. Gerçekten de her $s \in \mathbb{N}$ için $a_s \geq 0,\ b_s \geq 0$, $\sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{a}_s = 1$ ve $\sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{b}_s = 1$ koşullarını sağlayan skalerler vasıtasıyla $\mathrm{x} = \sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{a}_s e_s$ ve $\mathrm{y} = \sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{b}_s e_s$ formunda yazılan keyfi $x, y \in E$ noktaları için

$$\| \mathrm{Tx} - \mathrm{Ty} \|_1 = \left\| \sum_{s=1}^{\infty} (\mathrm{a}_s - \mathrm{b}_s) e_{s+1} \right\|_1 = \sum_{s=1}^{\infty} |\mathrm{a}_s - \mathrm{b}_s| = \left\| \sum_{s=1}^{\infty} (\mathrm{a}_s - \mathrm{b}_s) e_s \right\|_1$$
$$= \| \mathrm{x} - \mathrm{y} \|_1$$

olacaktır. Bu fonksiyonun afin olduğunu görmek çok kolaydır. Sabit noktasının olmadığını görmek için ise olmayana ergi metodu kullanılabilir. Yani kabul edilsin ki en az bir $x \in E$ için $Tx = x$ olsun ki bu nokta $t_n \geq 0 \ ve \ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ koşullarını sağlayan skalerler ile $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n$ formunda yazılsın. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n$ olacağından $t_1 e_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) e_{n+1} = (0,0,0, \dots)$ yani

$$(t_1, t_2 - t_1, t_3 - t_2, \dots, t_{k+1} - t_k, \dots) = (0,0,0, \dots)$$

olup her $k \in \mathbb{N}$ için $t_k = 0$ bulunur fakat bu ise $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ ile çelişir.

<u>Teorem 2.2</u> [13] $(c_0\ , \|\cdot\|_\infty)$ Banach uzayı $\|\cdot\|_\infty-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar.

İspat: c_0'ın kanonik bazı $(e_n)_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}}$ yani n'inci terimi 1 diğer tüm terimleri 0 olan dizi ele alınmak üzere

$$E:=\left\{\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n:\ 1=\ t_1\geq t_2\ \geq t_3\geq\cdots\geq t_n\downarrow_n 0\ (\text{yani azalarak sıfıra yakınsar})\right\}$$

kümesi göz önüne alınsın. Kolayca görülürki bu küme birim kapalı yuvar içinde kalan bir kümedir. Dolayısıyla sınırlıdır. Ayrıca bir önceki teoremde uygulanan aynı ispat tekniği ile koordinatsal yakınsama dolayısıyla kapalı olduğu görülecektir. Konveks olduğu da bir önceki ispat yöntemi ile gösterilir. Bu sebeple ispatın detayına girilmemiştir. Şimdi görülebilir ki E kümesinin $\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n$ formunda yazılan noktaları için $T(\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n)=e_1+\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_{n+1}$ kuralı ile verilen sağa kaydırma ismini alan iyi taımlı $\mathrm{T}: E\to E$ fonksiyonu afin $\|\cdot\|_\infty-$genişlemeyen (hatta afin $\|\cdot\|_\infty-$izometri) sabit noktasız bir fonksiyondur. Gerçekten de $a_1=1,\ b_1=1$ ve her $s\in\mathbb{N}$ için $a_s\geq a_{s+1}$, $a_n\xrightarrow{n}0,\ b_s\geq b_{s+1},\ b_n\xrightarrow{n}0$ koşullarını sağlayan skalerler vasıtasıyla $\mathrm{x}=\sum_{s=1}^{\infty}\mathrm{a_s}e_s$ ve $\mathrm{y}=\sum_{s=1}^{\infty}\mathrm{b_s}e_s$ formunda yazılan keyfi $x,y\in E$ noktaları için

$$\|\mathrm{Tx}-\mathrm{Ty}\|_\infty=\left\|\sum_{s=1}^{\infty}(\mathrm{a_s}-\mathrm{b_s})e_{s+1}\right\|_\infty=\underset{s\in\mathbb{N}}{\mathrm{maks}}|\mathrm{a_s}-\mathrm{b_s}|=\left\|\sum_{s=1}^{\infty}(\mathrm{a_s}-\mathrm{b_s})e_s\right\|_\infty$$
$$=\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|_\infty$$

olacaktır. Bu fonksiyonun afin olduğunu görmek çok kolaydır. Sabit noktasının olmadığını görmek için ise olmayana ergi metodu kullanılabilir. Yani kabul edilsin ki en az bir $x\in E$ için $Tx=x$ olsun öyle ki bu nokta $1=\ t_1\geq t_2\ \geq t_3\geq\cdots\geq t_n\downarrow_n 0$ koşullarını sağlayan skalerler ile $x=\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n$ formunda yazılsın. Bu durumda $e_1+\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n$ olacağından $\sum_{n=1}^{\infty}(t_{n+1}-t_n)e_{n+1}=(0,0,0,\dots)$ yani

$$(0,t_2-t_1,t_3-t_2,\dots,t_{k+1}-t_k,\dots)=(0,0,0,\dots)$$

olup $t_1=1$ olduğundan her $k\in\mathbb{N}$ için $t_k=1$ bulunur fakat bu ise $t_n\xrightarrow{n}0$ olması ile çelişir.

2.2 Banach uzayın ℓ^1 veya c_0 izomorfik kopyalarından birine sahip olması

Teorem 2.3 [9] ℓ^1'in bir izomorfik kopyasını içeren her $(\mathrm{X},\|\cdot\|)$ Banach uzayı düzgün Lipschitz fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar. Yani, bir başka deyişle ℓ^1 düzgün Lipschitz fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayacak şekilde yeniden normlanamaz.

İspat: Kabul edilsin ki $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ Banach uzayı ℓ^1'in bir izomorfik kopyasını içersin. Bu durumda Teorem 1.12 gereğince X'de en az bir $(\mathrm{x_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır ki sıfıra yakınsak her $(\varepsilon_n)_{\mathrm{n}\in\mathrm{N}} \subset (0,1)$, her $(\mathrm{t_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$(1-\varepsilon_k)\sum_{n=k}^{\infty}|t_n| \leq \left\|\sum_{n=k}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq \sum_{n=k}^{\infty}|t_n| \qquad (2.3.1)$$

dir.

$$E := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \colon \, her \;\; t_n \geq 0 \;\; ve \;\; \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1\right\}$$

kümesi göz önüne alınsın. 2.3.1 eşitsizliği dolayısıyla kolayca görülürki bu küme birim kapalı yuvar içinde kalan bir kümedir, dolayısıyla sınırlıdır. Teorem 2.1'deki ispata benzer şekilde E kümesinin konveksliği kolayca görülebilir. Kapalılık ise şu şekilde gösterilebilir.Yukarıdaki 2.3.1 eşitsizliği dolayısıyla $(\mathrm{x_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ dizisi birim yuvar içinde kalır çünkü n. terimin katsayısı 1 ve diğerleri 0 olacak şekilde lineer kombinasyon ele alındığında $\|x_n\| \leq 1$ olacaktır. O halde bu dizinin zayıf yakınsak bir alt dizisi vardır (sınırlı her dizinin zayıf yakınsak bir alt dizisi bulunur). Öyleyse bu alt dizi de yukarıdaki koşulu sağlayacağından genelliği bozmadan ele alınan ilk dizi alt dizi ile değiştirilebileceği düşünülerek $(\mathrm{x_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ dizisinin zayıf yakınsak olduğu kabul edilebilir. Dolayısıyla bu dizinin konveks kombinasyonu da dizinin zayıf yakınsadığı noktanın aynı konveks kombinasyon katsayılı konveks kombinasyonuna zayıf yakınsayacaktır. O halde E kümesi konveks ve zayıf kapalıdır. Fakat iyi bilinen gerçek olarak (bkz Sayfa 3, property 1.1 [13]) bu E kümesinin kapalı olduğunu söyler. Not edilmelidir ki analiz ve fonksiyonlar teorisi alanında çalışan araştırmacıların da bildiği üzere bu kümeye literatürde $(\mathrm{x_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu denir ve zayıf kapalılığı, konveks olması dolayısıyla kapalılığı da bir başka iyi bilinen gerçektir.

Şimdi Teorem 2.1'in ispatına benzer olarak sağa kaydırma fonksiyonu $T(\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_{n+1}$ kuralı ile tanımlanabilir. Bu durumda E kümesinden alınan keyfi iki $z = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ ve $w = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n$ noktaları ile her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\|T^k z - T^k w\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} (t_n - s_n)x_{n+k}\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |t_n - s_n| \leq \frac{1}{1-\varepsilon_1} \left\|\sum_{n=1}^{\infty} (t_n - s_n)x_n\right\|$$
$$= \frac{1}{1-\varepsilon_1} \|z - w\|$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla, T fonksiyonu bir düzgün Lipschitz fonksiyondur.

Şimdi olmayana ergi metodu ile bu fonksiyonun sabit noktası olmadığı görülebilir. Gerçekten de eğer $t_n \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ olmak üzere $T(\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ olacak şekilde bir noktanın varlığı kabul edilir ise bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ olacaktır. Yani, $t_1 x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n)x_{n+1} = 0$ dır. Bu durumda 2.3.1 eşitsizliğinin sol tarafı gereğince $(1-\varepsilon_1)(t_1 + |t_2 - t_1| + |t_3 - t_2| + \cdots + |t_{n+1} - t_n| + \cdots) = 0$ ve bu ise her $k \in \mathbb{N}$ için $t_k = 0$ olacağını söyleyeceğinden çelişkidir çünkü $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ olması gerekir.

<u>Teorem 2.4</u> [11,12] c_0'ın bir izomorfik kopyasını içeren her $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayı asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar. Yani, bir başka deyişle c_0 asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisinisağlayacak şekilde yeniden normlanamaz.

İspat: Kabul edilsin ki $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayı c_0'ın bir izomorfik kopyasını içersin. Bu durumda Teorem 1.13 gereğince X'de en az bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır ki sıfıra yakınsak her $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$, her $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$(1-\varepsilon_k)\sup_{n\geq k}|t_n| \leq \left\|\sum_{n=k}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq (1+\varepsilon_k)\sup_{n\geq k}|t_n| \qquad (2.4.1)$$

dir.

$$E := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \colon\ 1 = t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \cdots \geq t_n \downarrow_n 0 \text{ (yani azalarak sıfıra yakınsar)}\right\}$$

kümesi göz önüne alınsın. 2.4.1 eşitsizliği dolayısıyla kolayca görülürki bu küme birim kapalı yuvar içinde kalan bir kümedir, dolayısıyla sınırlıdır. Yine Teorem 2.1'deki ispata benzer şekilde E kümesinin konveksliği kolayca görülebilir. Bir önceki teoremin ispatındaki kümenin kapalılığının gösterildiği aynı yöntem kullanılarak E kümesinin zayıf kapalı olduğu görülür. Çünkü $y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ şeklinde tanımlanan dizi 2.4.1 eşitsizliğini sağlar ve E kümesi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğudur.

Şimdi Teorem 2.2'in ispatına benzer olarak sağa kaydırma fonksiyonu $T(\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n) = x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_{n+1}$ kuralı ile tanımlanabilir. Bu durumda E kümesinden alınan keyfi iki $z = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ ve $w = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n$ noktaları ile her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\|T^k z - T^k w\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} (t_n - s_n) x_{n+k}\right\| \leq (1+\varepsilon_{k+1}) \sup_n |t_n - s_n| \\ &\leq (1+\varepsilon_{k+1}) \left\|\sum_{n=1}^{\infty} (t_n - s_n) x_n\right\| = (1+\varepsilon_{k+1}) \|z - w\|\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla $k \to \infty$ iken $1 + \varepsilon_{k+1} \to 1$ olduğundan T fonksiyonu bir asimtotik genişlemeyen fonksiyondur. Ayrıca daha önceki teoremlerin ispatında olduğu gibi kolayca görülebilir ki bu fonksiyonun bir sabit noktası yoktur.

2.3 Bir Banach uzay içinde c_0'ın veya ℓ^1'in asimtotik izometrik kopyasının tespiti için alternatif ifadeler

Bu bölümde bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayı c_0'ın veya ℓ^1'in bir asimtotik izometrik kopyasını içerdiğini anlamak için alternatif ifadeler anlatılacaktır. Aşağıdaki iki teorem ile tanım niteliğinde olacak denklik belirten bu alternatif ifadeler verilmektedir.

Teorem 2.5 [8,9] X bir Banach uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) X ℓ^1'in bir asimtotik izometrik kopyasını içerir.

(b) X'de en az bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve $0 < m \leq M < \infty$ sabit sayıları bulunabilir ki her $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ için

$$m \sum_{n=1}^{\infty} |t_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n \| = m \text{ dir.}$$

(c) $(0,1)$ aralığında sıfıra azalarak yaklaşan bir $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve X'de en az bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bulunabilir ki her $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n=k}^{\infty} |t_n| \;\leq\; \left\| \sum_{n=k}^{\infty} t_n x_n \right\| \;\leq\; (1+\varepsilon_k) \sum_{n=k}^{\infty} |t_n|$$

dir.

İspat: (a) ifadesinin doğruluğu kabul edilsin. Bu durumda Tanım 1.14'e göre (0,1) aralığında sıfıra azalarak yaklaşan bir $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve X'de en az bir $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bulunabilir öyle ki her $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon_n)|t_n| \;\leq\; \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n \right\| \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|$$

dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = (1-\varepsilon_n)^{-1} y_n$ olarak tanımlansın. Bu durumda her $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n| \;\leq\; \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon_n)^{-1} |\, t_n| \;\leq\; (1-\varepsilon_1)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|$$

dir. Ayrıca, $1 \leq \| x_n \| \leq (1-\varepsilon_n)^{-1}$ olacağından $\lim_{n\to\infty} \| x_n \| = 1$ dir. Buradan (b) ifadesi elde edilir.

Şimdi tersine kabul edilsin ki (b) ifadesi gerçekleşsin. (0,1) aralığında sıfıra azalarak yaklaşan keyfi bir $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ele alınsın. Gerekirse (a) ifadesindeki eşitsizliğin her tarafı m sayısı ile bölünebileceğinden $m = 1$ olarak kabul edilebilir. $\lim_{n\to\infty} \| x_n \| = m = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\| x_n \| \geq m = 1$ olduğundan gerekirse alt diziye geçilerek, kabul edilebilir ki her $n \in \mathbb{N}$ için $1 \leq \| x_n \| \leq 1 + \varepsilon_n$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n = (1+\varepsilon_n)^{-1} x_n$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\| y_n \| \leq 1$ olacağından, her $(t_n)_n \in \ell^1$ için

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n \right\| \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|$$

dir. Ayrıca,

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n \right\| \;=\; \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n (1+\varepsilon_n)^{-1} x_n \right\| \geq \sum_{n=1}^{\infty} (1+\varepsilon_n)^{-1} |t_n| \geq \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon_n)|t_n|$$

dir. Dolayısıyla X Banach uzayı ℓ^1'in bir asimtotik izometrik kopyasını içerir ve bu (b) ifadesinin (a) ifadesi için yeter koşul olduğunu ifade eder.

(b) ve (c) ifadelerinin denkliği açıktıt.

Böylece, Teorem 2.5'in ispatı tamamdır.

Teorem 2.6 [11] X bir Banach uzayı olsun. Aşaağıdaki ifadeler denktir:

(a) X c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içerir.

(b) X'de en az bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve $0 < m \le M < \infty$ sabit sayıları bulunabilir ki her $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ için

$$m \sup_n |t_n| \le \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \le M \sup_n |t_n|$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n \| = M \text{ dir.}$$

(c) $(0,1)$ aralığında sıfıra azalarak yaklaşan bir $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve X'de en az bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bulunabilir ki her $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$(1-\varepsilon_k) \sup_{n\ge k} |t_n| \le \left\| \sum_{n\ge k} t_n x_n \right\| \le \sup_{n\ge k} |t_n|$$

dir.

İspat: Bir önceki teoremin ispatına bezer şekilde (a) ifadesinin doğruluğu kabul edilsin. Bu durumda, Tanım 1.15'e göre $(0,1)$ aralığında sıfıra azalarak yaklaşan bir $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve X'de en az bir $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bulunabilir öyle ki her $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ için

$$\sup_n (1-\varepsilon_n)\, |t_n| \le \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \le \sup_n |t_n|$$

dir.

$m = \inf_n (1-\varepsilon_n)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $0 < m < 1$ olup her $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ için

$$m \sup_n |t_n| \le \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \le \sup_n |t_n|.$$

dir. Ayrıca $1-\varepsilon_n \le \| x_n \| \le 1$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty} \| x_n \| = 1$ dir.

Şimdi tersine kabul edilsin ki (b) ifadesi gerçekleşsin. (0,1) aralığında sıfıra azalarak yaklaşan keyfi bir $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ele alınsın. x_n yerine eşitsizliğin her tarafı M ile bölünerek x_n/M göz önüne alınırsa, kabul edilebilir ki $M = 1$ dir. Ohalde her $n \in \mathbb{N}$ için $m \leq \| x_n \| \leq 1$ ve $\lim_{n\to\infty} \| x_n \| = 1$ elde edilecektir. Bu sebeple ve gerekirse alt diziye geçilebileceği yani koşulları alt dizilerinde sağlaması sebebiyle her $n \in \mathbb{N}$ için $1 - \varepsilon_n \leq \| x_n \| \leq 1$ koşulunu sağlayan alt dizi ile en son bahsedilen dizinin değiştirilebileceği düşünülerek ele alınan dizinin (b) ifadesinde yer alan eşitsizliği $M = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $m \leq \| x_n \| \leq 1$ ile $1 - \varepsilon_n \leq \| x_n \| \leq 1$ koşullarını gerçekleştirerek sağladığı kabul edilebilir.

Şimdi de gerekirse $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir alt dizisine geçilerek yukarıdaki koşulları ve aynı zamanda her $n \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon_n < m/4$ koşulunu sağladığı kabul edilebilir. Şimdi $\delta_1 = m$ ve her $n \geq 2$ için $\delta_n = (4/m)\varepsilon_n$ olarak tanımlansın.

$t_1, t_2, \ldots, t_n$ skalerleri için $\| \sum_{k=1}^{n} t_k x_k \|$ ifadesi göz önüne alınsın. Kabul gereği ve yukarıdaki değerlendirmeler doğrultusunda

$$m \max_{1\leq k\leq n} |t_k| \;\leq\; \left\| \sum_{k=1}^{n} t_k x_k \right\| \;\leq\; \max_{1\leq k\leq n} |t_k|$$

dir. Ayrıca, orantılama yapılarak kabul edilebilir ki $\max_{1\leq k\leq n} |t_k| = 1$ dir (Yani yukarıdaki eşitsizlikte t_k'lar $t_k / \max_{1\leq k\leq n} |t_k|$ ile yer değiştirilebilir ve $\max_{1\leq k\leq n} |t_k| = 1$ olmak üzere yukarıdaki eşitsizlik sağlanır). Bu ise

$$m \;\leq\; \left\| \sum_{k=1}^{n} t_k x_k \right\| \leq 1.$$

anlamına gelir. O halde, $\max_{1\leq k\leq n} |t_k| = 1$ kabul edilebileceğinden X'in c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içerdiğini ispatlamak için

$$\max_{1\leq k\leq n} (1 - \delta_k)|t_k| \;\leq\; \left\| \sum_{k=1}^{n} t_k x_k \right\| \;\leq\; 1.$$

olduğunu ispatlamak yeterli olacaktır. Öyleyse, sağ taraf eşitsizliği bir önceki eşitsizlikte görüldüğünden sol taraf eşitsizliğini göstermek ispatı tamamlayacaktır. Öncelikle not edilebilir ki eğer $|t_j| < m$ ise bu durumda

$$(1-\delta_j)|t_j| \;\leq\; (1-\varepsilon_j)|t_j| \;<\; m \;\leq\; \left\|\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right\|$$

olacaktır. Şimdi diğer bir durum incelenebilir. Eğer $|t_j| \geq m$ ise c_j sayıları $c_j = sgn\ t_j$ olarak kabul edilebilir. Buradan üçgen eşitsizliği gereğince

$$1-\varepsilon_j \;\leq \| x_j \| \leq\; \frac{1}{2}\left\|x_j + \sum_{1\leq k\leq n, k\neq j} c_j t_k x_k\right\| \;+\; \frac{1}{2}\left\|x_j - \sum_{1\leq k\leq n, k\neq j} c_j t_k x_k\right\|$$

$$\leq\; \frac{1}{2}\left\|x_j + \sum_{1\leq k\leq n, k\neq j} c_j t_k x_k\right\| \;+\; \frac{1}{2}$$

olacaktır. Bu sebeple $\| x_j + \sum_{1\leq k\leq n, k\neq j} c_j t_k x_k \| \geq 1 - 2\varepsilon_j$ dir. Yine üçgen eşitsizliği gereğince

$$\begin{aligned} 1-2\varepsilon_j \;&\leq\; \left\|x_j + \sum_{1\leq k\leq n, k\neq j} c_j t_k x_k\right\| \\ &\leq\; \frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{n} c_j t_k x_k\right\| \;+\; \frac{1}{2}\left\|(2-c_j t_j)x_j + \sum_{1\leq k\leq n, k\neq j} c_j t_k x_k\right\| \\ &\leq\; \frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right\| \;+\; \frac{1}{2}\,(2-|t_j|) \end{aligned}$$

dir. Bu sebeple $\| \sum_{k=1}^{n} t_k x_k \| \geq |t_j| - 4\varepsilon_j$ elde edilir ve $|t_j| \geq m$ kabulü gereğince

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right\| \;\geq\; |t_j| - 4\varepsilon_j \;\geq\; |t_j| - (4/m)|t_j|\varepsilon_j \;=\; (1-\delta_j)|t_j|$$

olacaktır. Ohalde, iki durumu göz önüne alarak denilebilir ki $\left\| \sum_{j=1}^{n} t_j x_j \right\| \geq \max\limits_{1\leq j\leq n}(1-\delta_j)|t_j|$ dir. Dolayısıyla, X Banach uzayı c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içerir ve bu (b) ifadesinin (a) ifadesi için yeter koşul olduğunu ifade eder.

(b) ve (c) ifadelerinin denkliği açıktır.

Böylece, Teorem 2.6'in ispatı tamamdır.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Çalışmanın bu bölümünde Dowling, Lennard ve Turett'in sonuçları [9,10,11,12] anlatılacaktır. Gösterilecektir ki eğer bir X Banach uzayı ℓ^1'in veya c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içerirse, bu durumda X genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar. İki ayrı alt başlıklarla bu iki durum ele alınacak ve örnekler sunulacaktır.

3.1 ℓ^1'in bir asimtotik izometrik kopyasını içeren Banach uzayları genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisi

Bu bölümde ℓ^1'in bir asimtotik izometrik kopyasını içeren Banach uzaylarının genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olmadığı gösterilmekte ve örnekler sunulmaktadır.

Teorem 3.1 [10,12] ℓ^1'in bir asimtotik izometrik kopyasını içeren her $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayı genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar.

İspat: Kabul edilsin ki $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayı ℓ^1'in bir asimtotik izometrik kopyasını içersin. Bu durumda Tanım 1.14 gereğince X'de en az bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve sıfıra yakınsak, $(0,1)$ aralığında bir $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bulunabilir ki her $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon_n)|t_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |t_n| \qquad (3.1.1)$$

dir. $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(1,\infty)$ aralığında azalan ve $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 1$ olacak şekilde seçilsin. Gerekirse alt diziye geçilerek veya $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi alt dizisi ile değiştirilerek yukarıdaki eşitsizlik de sağlanacak şekilde kabul edilebilir ki

$$\lambda_{n+1} < (1-\varepsilon_n)\lambda_n$$

eşitsizliği sağlanır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n = \lambda_n x_n$ olarak tanımlansın ve bu dizinin kapalı konveks kabuğu olarak tanımlanan $C = \overline{co}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi ele alınsın. Daha önceki bölümlerde ele aldığımız kümelerde olduğu gibi, açıkça, C kümesi X'in öyle bir kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesidir ki elemanları her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ olmak üzere $z = \sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n$ formunda yazılır. Şimdi $T: C \to C$ fonksiyonu

$T(\sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n y_{n+1}$ kuralı ile göz önüne alınsın. Olmayana ergi metodu ile eğer T fonksiyonunun C'de sabit noktası vardır denilir ise $\sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} t_n y_{n+1}$ olacak şekilde her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ koşullarını sağlayan skalerlerin mevcut olduğu beklenilir. Bu durumda $t_1\lambda_1 x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n(\lambda_{n+1}t_{n+1} - \lambda_n t_n) = 0$ olup (3.1.1) eşitsizliği gereğince $(1-\varepsilon_1)t_1\lambda_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon_n)|\lambda_{n+1}t_{n+1} - \lambda_n t_n| = 0$ ve dolayısıyla, tüm parçaların sıfır olması gerekeceğinden her $n \in \mathbb{N}$ için $0 = t_1\lambda_1 = \lambda_{n+1}t_{n+1} - \lambda_n t_n$; dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n = 0$ elde edilir fakat bu bir çelişkidir.

Şimdi T fonksiyonunun genişlemeyen (hatta T'nin daralan) fonksiyon olduğu gösterilecektir.

C kümesinin $z \neq w$ olacak şekilde iki farklı $z = \sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n$ ve $w = \sum_{n=1}^{\infty} s_n y_n$ noktası göz önüne alınsın. Bu durumda

$$\begin{aligned}\| Tz - Tw \| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (t_n - s_n) y_{n+1} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |t_n - s_n| \ \| y_{n+1} \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |t_n - s_n| \lambda_{n+1} \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} |t_n - s_n| \lambda_n (1-\varepsilon_n) \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (t_n - s_n)\lambda_n x_n \right\| = \| z - w \| .\end{aligned}$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

Dowling, Johnson, Lennard ve Turett [8] tarafından aşağıdaki örnek ile ℓ^1'in alışılmış normuna bir eşdeğer norm ile yeniden normlamasının ℓ^1'in asimtotik izometrik kopyasını içermediği gösterilmiştir. Bu ℓ^1'in genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olabilmesi için adayların var olabileceğine işaret etmiştir. Gerçekten de aşağıdaki örneğin bir özel durumu ile Lin [17] çalışması bu gerçeği kanıtlamıştır.

<u>Örnek 3.2</u> $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,1)$ aralığında bire artarak yakınsayan bir dizi olsun. ℓ^1'de alışılmış norma bir eşdeğer norm her $x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ için aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$|||x||| = \sup_n \gamma_n \sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|.$$

Bu durumda, $(\ell^1, |||\cdot|||)$ Banach uzayı ℓ^1'in asimtotik izometrik kopyasını içermez [8].

Lin tarafından [17] her $n \in \mathbb{N}$ için $\gamma_n = \frac{8^n}{1+8^n}$ olarak seçerek $(\ell^1, |||\cdot|||)$ 'in genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olduğu gösterilmiştir.

Bu konuda literatürde aşağıda verilen önemli sonuçlar elde edilmiştir.

<u>Teorem 3.3</u> [6] X bir Banach uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) X Banach uzayı ℓ^1'in bir asimtotik izometrik kopyasını içerir.

(b) X^* Dual Banach uzayı $L^1[0,1]$ 'in bir izometrik kopyasını içerir.

(c) X^* Dual Banach uzayı $C[0,1]^*$ dual Banach uzayının bir izometrik kopyasını içerir.

<u>Sonuç 3.4</u> [6,9,12] Eğer bir X Banach uzayı ℓ^1'in bir asimtotik izometrik kopyasını içerir ise ne X ne de dual Banach uzay X^* genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olamaz.

<u>Teorem 3.5</u> [10] Γ sayılamaz bir küme olsun. Bu durumda $\ell^1(\Gamma)$'in tüm eşdeğer yeniden normlamaları ℓ^1'in bir asimtotik izometrik kopyasını içerir. Dolayısıyla $\ell^1(\Gamma)$ genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayacak şekilde yeniden normlanamaz.

<u>Teorem 3.6</u> [5] Ağırlık fonksiyonu w üzerinde hafif kısıtlamalar ile, Lorentz uzayı $L_{w,1}(0,\infty)$ ℓ^1'in bir asimtotik izometrik kopyasını içerir. Aynı koşullar göz önüne alınarak seçilen ağırlık fonksiyonu w ile, Lorentz uzayı $L_{w,1}(0,\infty)$'nun bir alt uzayının genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olması için gerek ve yeter koşul alt uzayın yansımalı olmasıdır.

<u>Tanım 3.7</u> [23] ℓ^2 (karesi toplanabilen dizilerin Banach uzayı) üzerinde tanımlı iz-sınıfı operatörlerin (ize sahip kompakt operatörlerin) Banach uzayına C_1 iz sınıfı

denilmektedir. Not edilmelidir ki her $A \in C_1$ ve her sınırlı operatör B için $T(AB) = T(BA)$ koşulunu sağlayan lineer fonksiyona C_1'de bir iz denir.

Teorem 3.8 [7] C_1 iz sınıfının yansımalı olmayan her alt uzayı ℓ^1'in bir asimtotik izometrik kopyasını içerir. C_1 iz sınıfının bir alt uzayının genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olması için gerek ve yeter koşul alt uzayın yansımalı olmasıdır.

Teorem 3.9 [10] Eğer Y $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$'in kapalı, sonsuz boyutlu bir alt uzayı ise bu durumda Y alt uzayı ℓ^1'in bir asimtotik izometrik kopyasını içerir. O halde, $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ 'in bir Y kapalı alt uzayının genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olması için gerek ve yeter koşul Y kapalı alt uzayının sonlu boyutlu olmasıdır.

3.2 $\mathbf{c_0}$'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içeren Banach uzayları genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olamaz.

Bu bölümde c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içeren Banach uzaylarının genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olmadığı gösterilmekte ve örnekler sunulmaktadır.

Teorem 3.10 [10,11,12] c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içeren her $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayı genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar.

İspat: Kabul edilsin ki $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayı c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içersin. Bu durumda Tanım 1.14 gereğince X'de en az bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve sıfıra yakınsak, $(0,1)$ aralığında bir $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bulunabilir ki her $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ için

$$\sup_n (1-\varepsilon_n)|a_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq \sup_n |a_n| \qquad (3.10.1)$$

$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(1,\infty)$ aralığında azalan ve $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 1$ olacak şekilde seçilsin. Gerekirse alt diziye geçilerek veya $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi alt dizisi ile değiştirilerek yukarıdaki eşitsizlik de sağlanacak şekilde kabul edilebilir ki

$$\lambda_{n+1} < (1-\varepsilon_n)\lambda_n$$

eşitsizliği sağlanır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n = \lambda_n x_n$ olarak tanımlansın ve bu dizinin kısmi toplamlar dizisinin kapalı konveks kabuğu olan

$$C := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n :\ 1 = t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \cdots \geq t_n \downarrow_n 0 \text{ (yani azalarak sıfıra yakınsar)} \right\}$$

kümesi göz önüne alınsın. Daha önceki bölümlerde ele aldığımız kümelerde olduğu gibi, açıkça, C kümesi X'in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesidir öyle ki elemanları $1 = t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \cdots \geq t_n \geq \cdots$ ve $t_n \downarrow_n 0$ olmak üzere, $z = \sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n$ formunda yazılır. Şimdi $T: C \to C$ fonksiyonu $T(\sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n) = y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n y_{n+1}$ olarak tanımlansın. Olmayana ergi metodu ile eğer T fonksiyonunun C'de sabit noktası vardır denilir ise $\sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n = y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n y_{n+1}$ olacak şekilde $1 = t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \cdots \geq t_n \geq \cdots$ ve $t_n \downarrow_n 0$ koşullarını sağlayan skalerlerin mevcut olduğu beklenilir. Buradan, $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1}(\lambda_{n+1}t_{n+1} - \lambda_n t_n) = 0$ olarak bulunur. Öyleyse, (3.10.1) eşitsizliği gereğince tüm parçaların sıfır olması gerekeceğinden her $n \in \mathbb{N}$ için $0 = \lambda_{n+1}t_{n+1} - \lambda_n t_n$; dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $t_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}$ elde edilir. Fakat bu bir çelişkidir çünkü bu t_n'in bire yakınsadığını söyler.

Şimdi T fonksiyonunun genişlemeyen (hatta T'nin daralan) fonksiyon olduğu gösterilecektir.

C kümesinin $z \neq w$ olacak şekilde iki farklı $z = \sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n$ ve $w = \sum_{n=1}^{\infty} s_n y_n$ noktası göz önüne alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\| Tz - Tw \| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (t_n - s_n) y_{n+1} \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (t_n - s_n) \lambda_{n+1} x_{n+1} \right\| \\
&\leq \sup_n |t_n - s_n| \lambda_{n+1} < \sup_n |t_n - s_n| \lambda_n (1-\varepsilon_n) \\
&\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (t_n - s_n) \lambda_n x_n \right\| = \| z - w \| .
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

Dowling, Lennard ve Turett tarafından aşağıdaki teoremden sonra verilen örnek ile c_0'ın alışılmış normuna bir eşdeğer norm ile yeniden normlamasının c_0'ın asimtotik izometrik kopyasını içermediği gösterilmiştir. Bu c_0'ın genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olabilmesi için adayların var olabileceğine işaret etmiştir. Fakat hiç bir araştırmacı halen bu soruyu yanıtlamayamamıştır. Yakın geçmişte ise tez danışmanı Nezir ile Mustafa'nın çalışması [22] sayesinde afinlik koşulu altında c_0'ın genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olacak şekilde yeniden normlanabileceği gösterilmiştir.

c_0'ın tamamının genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozduğu materyal ve yöntemler bölümünde gösterilmişti. Fakat aşağıdaki teorem göstermektedir ki c_0'da çok büyük sınıflar genişlemeyen fonksiyonlar sabit nokta teorisine sahip olamaz.

Teorem 3.11 [11] $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$'in kapalı, sonsuz boyutlu her Y alt uzayı c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içerir. O halde, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$'in bir Y kapalı alt uzayının genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olması için gerek ve yeter koşul Y kapalı alt uzayının sonlu boyutlu olmasıdır.

Şimdi $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ Banach uzayının bir yeniden normlaması ve bu eşdeğer norm ile tanımlandığında uzayın c_0'ın asimtotik izometrik kopyasını içermediğini ifade eden örnek sunulacaktır.

Örnek 3.12 [11] ℓ^∞'de alışılmış norma bir eşdeğer norm her $x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ için aşağıdaki şekilde tanımlansın

$$|||x||| = \sup_j |\xi_j| + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} |\xi_j| .$$

Bu durumda, $(\ell^\infty, |||\cdot|||)$ Banach uzayı c_0'ın asimtotik izometrik kopyasını içermez.

Kolayca görülebilir ki $|||\cdot|||$ normu ℓ^∞'un alışılmış normuna eşdeğer olup, her $x \in \ell^\infty$ için $||x||_\infty \leq |||x||| \leq 2||x||_\infty$ koşulunu sağlamaktadır.

Olmayana ergi metodu ile kabul edilsin ki $(\ell^\infty, |||\cdot|||)$ Banach uzayı c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içersin. Yani, ℓ^∞ 'de en az bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve sıfıra yakınsak,

$(0,1)$ aralığında bir $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bulunabilir ki her $n \in \mathbb{N}$ ve her $t_1, t_2, \dots, t_n$ skaleri için

$$\max_{1\le j\le n}(1-\varepsilon_j)|t_j| \;\le\; \left|\left|\left|\sum_{j=1}^{n} t_j x_j\right|\right|\right| \;\le\; \max_{1\le j\le n}|t_j| \qquad (3.12.1)$$

dir.

Genelliği bozmadan $(\mathrm{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin koordinatsal olarak sıfıra yakınsadığı kabul edilebilir çünkü (3.12.1) eşitsizliği bir alt dizinin zayıf yakınsaklığını, dolayısıyla koordinatsal yakınsaklığını ifade eder ve alt diziye geçilerek, ele alınan dizinin alt dizi ile değiştirildiği düşünülerek $(\mathrm{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin koordinatsal olarak sıfıra yakınsadığı kabul edilebilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = (\xi_j^n)_{j=1}^{\infty}$ olarak tanımlansın. $|||x_1||| \ge 1-\varepsilon_1 > 0$ olduğundan en az bir $j \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\xi_j^1 \ne 0$. $k = \min\{j : \xi_j^1 \ne 0\}$ ve $\alpha = \frac{1}{3\cdot 2^k}|\xi_k^1|$ olarak seçilsin. Öyle bir $N_1 \ge k$ bulunabilir ki $\sum_{j=N_1+1}^{\infty} 2^{-j} < \frac{\alpha}{4}$ dir. $N_2 \in \mathbb{N}$ öyle seçilsin ki her $n \ge N_2$ için $\varepsilon_n < \alpha$ olsun. $(\mathrm{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi koordinatsal olarak sıfıra yakınsadığından, öyle $N \ge N_2$ seçilsin ki her $j = 1,2,\dots,N_1$ ve her $n \ge N$ için $|\xi_j^n| < \frac{\alpha}{4}$ olsun. O halde, her $n \ge N$ için

$$\begin{aligned}
\| x_n \|_\infty \le \left|||x_\mathrm{n}|||\right| &= \| x_n \|_\infty + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}|\xi_j^n| \\
&= \| x_n \|_\infty + \sum_{j=1}^{N_1} 2^{-j}|\xi_j^n| + \sum_{j=N_1+1}^{\infty} 2^{-j}|\xi_j^n| \\
&\le \| x_n \|_\infty + \sum_{j=1}^{N_1} 2^{-j}\frac{\alpha}{4} + \sum_{j=N_1+1}^{\infty} 2^{-j} \\
&\le \| x_n \|_\infty + \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

dir. $\|\cdot\|_\infty$ normunun üçgen eşitsizliği dolayısıyla $\| x_n \|_\infty \le \frac{1}{2}(\| x_1 + x_n \|_\infty + \| x_1 - x_n \|_\infty)$ olacaktır. Bu sebeple ya $\| x_1 + x_n \|_\infty \ge \| x_n \|_\infty$ ya da $\| x_1 - x_n \|_\infty \ge \| x_n \|_\infty$ dir. Eğer $\| x_1 + x_n \|_\infty \ge \| x_n \|_\infty$ ise

$$1 \;\ge\; |||x_1 + x_n||| = \| x_1 + x_n \|_\infty + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}|\xi_j^1 + \xi_j^n|$$

$$\geq \| x_n \|_\infty + 2^{-k} \mid \xi_k^1 + \xi_k^n \mid$$
$$\geq |||x_n||| - \frac{\alpha}{2} + 2^{-k} \left(|\xi_k^1| - |\xi_k^n| \right)$$
$$\geq |||x_n||| - \frac{\alpha}{2} + 2^{-k} \left(|\xi_k^1| - \frac{\alpha}{4} \right)$$
$$\geq |||x_n||| - \alpha + 2^{-k} |\xi_k^1|$$
$$\geq 1 - \varepsilon_n - \alpha + 2^{-k} |\xi_k^1|$$
$$\geq 1 - \alpha - \alpha + 2^{-k} |\xi_k^1|$$
$$= 1 + \alpha$$

elde edilir. Fakat bu mümkün değildir. Dolayısıyla, çelişkiye düşülür.

Eğer $\| x_1 - x_n \|_\infty \geq \| x_n \|_\infty$ olduğu kabul edilirse aynı şekilde aynı metod kullanılarak çelişki elde edilirdi. Dolayısıyla, $(\ell^\infty, |||\cdot|||)$ Banach uzayı c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içermez.

Not edilmelidir ki bir Banach uzayın c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içermemesi onun genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olduğunu söylemez. Gerçekten de ele alınan önceki örnek için kanonik bazın kısmi toplamlar dizisinin kapalı konveks kabuğu kullanılıp sağa kaydırma fonksiyonu ele alınırsa fonksiyonun genişlemeyen ve sabit noktasız olduğu kolayca görülebilir.

Teorem 3.13 [11,12] X Banach uzayı c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içeren bir Banach uzayı olsun. Bu durumda dual uzay X^*, dual normu ile, ℓ^1'in bir asimtotik izometrik kopyasını içerir.

Not edilmelidir ki yukarıdaki teoremin tersi doğru değildir. Yani, dual uzay ℓ^1'in bir asimtotik izometrik kopyasını içerir ise uzayın kendisi c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içerir denilemez. Örnek olarak $\mathrm{X} = \ell^1$'in kendisi alışılmış norm ile ele alınabilir.

Aşağıdaki sonuç Teorem 3.13'nin direkt sonucudur.

Sonuç 3.14 [11,12] Eğer bir X Banach uzayı c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içerir ise, bu durumda ne X ne de dual uzay X^* genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olamaz, ve hatta dualin duali olan X^{**} Banach uzayı sabit nokta teorisine sahip olacak şekilde yeninden normlanamaz.

Teorem 3.15 [11] Γ sayılamaz bir küme olsun. Bu durumda, $c_0(\Gamma)$ 'in tüm eşdeğer yeniden normlamaları c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içerir. Dolayısıyla, $c_0(\Gamma)$ genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayacak şekilde yeniden normlanamaz.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında ℓ^1 veya c_0'ın iyi kopyalarını içeren Banach uzayları ele alınmıştır. Alternatif ifadeler ele alınmış ve farklı sınıf fonksiyonlar için bu kopyaları içeren Banach uzaylarının sabit nokta teorisini sağlamadıkları gösterilmiştir. Literatürde bu kopyalar sabit nokta teorisinin bozulduğunu test etmek için önemli araçlar olarak kullanılmıştır. Bu araçlar bazı Banach uzaylarının veya alt uzaylarının yansımalılığı hakkında bilgiler sunmuş ve tez çalışmasında bu konuda ilgili teoremler tanıtılmıştır. Bu araçların genelleştirmeleri ve denk ifadeleri yakın geçmişte tez danışmanı Nezir'in son iki çalışmasında [20,21] yapılmıştır. Araştırmacılar bu araçları daha da genelleştirmek ve uygulamalarını görmek için çalışmalar yapabilir.

KAYNAKLAR

[1] Banach, S. (1922). Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrals. Fund. Math. 3, 133-181.

[2] Brouwer, L. E. J. (1912). Über abbildung von mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 71(1) , 97–115.

[3] Browder, F. E. (1965). Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A 53(6), 1272–1276.

[4] Browder, F. E. (1965). Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 54 (4), 1041-1044.

[5] Carothers, N. L., Dilworth, S. J., & Lennard, C. J. (1996). On a Localization of the UKK Property and the Fixed Point Property in $L_{w,1}$. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 111-124.

[6] Dilworth, S. J., Girardi, M., & Hagler, J. (2000). Dual Banach spaces which contain an isometric copy of L_1 arXiv preprint math/0004168.

[7] Dodds, P. G., Dodds, T. K., Dowling, P. N., Lennard, C. J., & Sukochev, F. A. (1995, November). A uniform Kadec-Klee property for symmetric operator spaces. In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (Vol. 118, No. 3, pp. 487-502). Cambridge University Press.

[8] Dowling, P., Johnson, W., Lennard, C., & Turett, B. (1997). The optimality of James's distortion theorems. Proceedings of the American Mathematical Society, 125(1), 167-174.

[9] Dowling, P., and Lennard, C. (1997). Every nonreflexive subspace of L_1 [0, 1] fails the fixed point property. Proceedings of the American Mathematical Society, 125(2), 443-446.

[10] Dowling, P. N., Lennard, C. J., & Turett, B. (1996). Reflexivity and the fixed-point property for nonexpansive maps. Journal of mathematical analysis and applications, 200(3), 653-662.

[11] Dowling, P. N., Lennard, C. J. and Turett, B. (1998). Asymptotically isometric copies of c_0 in Banach Spaces. Journal of mathematical analysis and applications, 219(2), 377-391.

[12] Dowling, P. N., Lennard, C. J., & Turett, B. (2000). Some fixed point results in l1 and c0. Nonlinear Analysis-Series A Theory and Methods and Series B Real World Applications, 39(7), 929.

[13] Goebel, K., and Kirk, W. A. (1990). Topics in metric fixed point theory (Vol. 28). Cambridge University Press.

[14] Göhde, D. (1965). Zum prinzip der kontraktiven abbildung. Math. Nachr., 30, 251–258.

[15] James, R. C. (1964). Uniformly non-square Banach spaces. Annals of Mathematics, 542-550.

[16] Kirk, W. A. (1965). A fixed point theorem for mappings which do not increase distances. Amer. Math. Monthly, 72(9), 1004–1006.

[17] Lin, P. K. (2008). There is an equivalent norm on ℓ^1 that has the fixed point property. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 68(8), 2303-2308.

[18] Lindenstrauss, J., & Tzafriri, L. (1977). Classical Banach spaces I: Sequence spaces, Ergebnisse der Mathematik (Vol. 92). Springer-Verlag.

[19] Lindenstrauss, J., & Tzafriri, L. (2013). Classical Banach spaces II: function spaces (Vol. 97). Springer Science & Business Media.

[21] Nezir, V. (2020). Asymptotically isometric copies of $\ell^{1\oplus 0}$. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 1-14.

[22] Nezir, V. New asymptotically isometric properties that imply the failure of the fixed point property in copies of c_0 and ℓ^1, submitted.

[22] Nezir, V. and Mustafa, N. (2018). c_0 can be renormed to have the fixed point property for affine nonexpansive mappings, Filomat, 32(16), 5645-5663.

[23] Kalton, N. J. (2007). Banach Spaces and Their Applications in Analysis: Proceedings of the International Conference at Miami University, May 22-27, 2006, in Honor of Nigel Kalton's 60th Birthday. Walter de Gruyter.

[24] Schauder, J. (1930). Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen. Studia. Math., 2, 171-180.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Mehmet KILIÇ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Nizip, 05.05.1983
Yabancı Dili	: Orta derece İngilizce
İletişim (e-posta)	: karakaya2761@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Atatürk Lisesi-2003
Lisans	: Karadeniz Teknik Üniversitesi-2008
Yüksek Lisans	: Kafkas Üniversitesi-2020

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Iğdır Üniversitesi 2013-