T.C.

İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

BAZI UZAYLARDAKİ OPERATÖRLERİN SPEKTRAL DAVRANIŞLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fikriye KONTLAR

1160Y55103

İSTANBUL 2013

T.C.

İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

BAZI UZAYLARDAKİ OPERATÖRLERİN SPEKTRAL DAVRANIŞLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fikriye KONTLAR

1160Y55103

Danışman: Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK

İSTANBUL 2013

T.C.

İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ONAY SAYFASI

Yüksek lisans öğrencisi Fikriye KONTLAR ‘ın “Bazı Uzaylardaki Operatörlerin Spektral Davranışları” konulu tez çalışması jürimiz tarafından……………………

Yüksek Lisans tezi olarak (oybirliği / oyçokluğu) ile başarılı bulunmuştur.

	Adı-Soyadı	**İmza**
Tez Danışmanı:	……………………	…………
Jüri Üyesi	: ……………………	…………
Jüri Üyesi	: ……………………	…………

ÖZET

Bu çalışmada, belirli uzaylardaki operatörlerin spektral davranışları ele alındı ve bu alanda yazılmış çalışmaların bir kısmı incelendi.

Birinci bölümde sonraki bölümlerde kullandığımız temel tanım ve kavramlar verildi.

İkinci bölümde Δ fark operatörünün ve $B(r,s)$ fark operatörünün c, c_0 dizi uzaylarında ince spektrumu ele alındı. Ayrıca ikinci dereceden genelleştirilmiş fark operatörü Δ^2 nin c_0 dizi uzayı üzerinde ince spektrumu araştırıldı.

Üçüncü bölümde genelleştirilmiş $B(r,s)$ fark operatörünün ve ikinci dereceden $U(s,r,s)$ fark operatörünün ℓ_p dizi uzayında ince spektrumu ele alındı.

Dördüncü bölümde ℓ_1 dizi uzayı üzerinde Δ fark Operatörünün ince spektrumu incelendi.

Abstract

In this study, we examine spectral properties of operators in certain sequences space and we have investigated article, about this subject.

In the first chapter, some basic nations related to the subject were given for using other sections.

In the second chapter, fine spectrum of Δ and generalized difference $B(r,s)$ on c and c_0 sequences spaces were analysed and second order generalized difference operator Δ^2 were examined on c_0.

In the third chapter, generalized difference $B(r,s)$ and second order difference operator $U(s,r,s)$ were examined on $\ell_p$sequences spaces .

In the last chapter, fine spectrum of Δ were examined on ℓ_1 sequences spaces.

SİMGELER DİZİNİ

C	: Kompleks sayılar kümesi
R	: Reel sayılar kümesi
c	: Yakınsak dizilerin uzayı
c_0	: Sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı
ℓ_∞	: Reel terimli sınırlı dizilerin uzayı
ℓ_p	: p-mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı
ℓ_1	: Mutlak yakınsak dizilerin uzayı
X^*	: X uzayının duali
$R(T)$	: T operatörünün görüntü kümesi
$\overline{R(T)}$	: $R(T)$ nin kapanışı
$\rho(T)$	: T operatörünün regüler değer kümesi
$N(T)$	: T operatörünün çekirdeği
$\sigma(T)$	: T operatörünün spektrumu
σ_c	: Sürekli spektrum
σ_r	: Artık spektrum
σ_p	: Nokta spektrum
T^*	: T operatörünün adjointi
$\sigma(T,x)$	: X uzayı üzerinde T operatörünün spektrumu
$B(r,s)$	: X den Y ye sınırlı lineer dönüşümlerin uzayı

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada tezin başlangıcından bitimine kadar her aşamada yardımını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Necip Şimşek ‘ e maddi ve manevi desteğini esirgemeyen canım babam Adnan Kontlar’a sevgili aileme ve bana destek veren bütün saygıdeğer hocalarıma sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

n boyutlu kompleks bir uzayda tanımlı bir lineer dönüşümün öz değerleri literatürden bilindiği üzere λ kompleks sayılarından oluşur. Bulunan bu kompleks λ değerleri kümesine lineer dönüşümün spektrumu adı verilir.

Modern fonksiyonel analiz ve onun uygulamalarının ana dallarından biride spektral teoridir. Spektral teori ters operatörler ve onların esas operatörle olan ilişkilerinin incelenmesidir. Ters operatörlerle ilgili özellikler denklem çözme problemlerinde (lineer cebirsel denklem sistemleri, diferansiyel denklemler, integral denklemler) ters operatörün karşımıza çıkmasından dolayı önemlidir [12].

Bir operatörün spektrumu fikri, lineer denklemlerin ve onların sonsuz boyutlu genellemelerini içeren somut lineer cebir problemlerini anlamak için yapılan girişimler sonucu ortaya çıkmıştır.

Sonsuz boyutlu uzaylarda spektrum sonlu boyutlu uzaylardakine göre daha karmaşık ve bulunması daha zordur. Bu yüzden, sonsuz boyutlu uzaylarda dönüşümün spektrumunu belirlemek için sonlu boyutlu uzaylarda kullanılandan daha fazla bilgi ve teoriye ihtiyaç duyulur.

Dönüşümlerin spektrum kümesinin belirlenmesi ve dahası spektrum kümesinin hangi durumlarda ne tür kümelerden meydana geldiğinin belirlenmesi için, spektrum kavramından hareketle literatürde ince spektrum kavramı ele alınarak incelenmiştir.

Özellikle matris dönüşümlerinin spektrumunun ve ince spektrumunun incelenmesi ve araştırılması birçok önemli problemi ve sonucu beraberinde getirmiştir.

Dizi uzayları üzerindeki dönüşümlerin spektrumu ile ilgili ilk çalışma Brown, Holmas ve Shields tarafından birinci mertebeden Cesaro dönüşümünün Hilbert uzayı üzerindeki karekteristik değerlerini ve spektrum kümesini belirleyen çalışmadır.

Literatürde geniş yer tutan diğer operatörler ise Δ fark operatörü ve $B(r,s)$ genelleştirilmiş fark operatörüdür.

B. Altay ve F. Başar [1], fark matrisinin c_0, c dizi uzaylarındaki spektrumu, A. M. Akhmedov ve F. Başar ise ℓ_p uzayı üzerindeki spektrumu ile ilgilenmişlerdir. H. Furkan ve ark. Sırasıyla $B(r,s)$ genelleştirilmiş fark matrisin ℓ_1 ve bv dizi uzaylarında spektral incelemesini yapmışlardır. Ayrıca $B(r,s)$ genelleştirilmiş fark matrisinin c_0 ve c dizi uzaylarındaki spektrumu B. Altay ve F. Başar [2], tarafından incelenmiştir. Fark operatörü ile ilgili bir diğer çalışma A. Farés ve B. de Malafosse tarafından yapılmış olup fark operatörünün spektrumunu $a = (a_n)$ pozitif reel sayı dizisi olmak üzere

$$\|x\| = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| / a_n)^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$

normuna sahip tüm dizilerin Banach uzayı olan $\ell_p(a)$ dizi uzayı üzerinde incelemişlerdir. Fark matrisi ile ilgili son çalışmalardan biri de V. Karakaya ve ark. [9], ikinci mertebeden fark operatörünün ℓ_p ve bv_p $(1 < p < \infty)$ dizi uzayları üzerindeki spektrum incelemeleridir.

Literatür gelişimi içerisinde değişik operatörler belirli uzaylara etki ettirilmiş ve spektrumları incelenmiştir. Bu literatüre ait ayrıntı aşağıdaki gibi verilebilir.

V. Karakaya ve M. Altun Lacunary matrisinin spektrumunu elde etmişlerdir. M. Yıldırım, Rhaly operatörünün sırasıyla c_0, c ve ℓ_p uzaylarındaki spektrum incelemesini gerçekleştirmiştir. Bant matrislerin spektrum çalışmaları da literatürde geniş yer tutmaktadır. B. Altay ve M. Karakuş, bir bant matris olan Zweier matrisinin ℓ_1 ve bv uzayları üzerindeki spektrumlarını elde etmişlerdir. V.Karakaya ve M.Altun çalışmasında üst üçgensel ikili-bant matrisinin c_0 ve c uzayları üzerindeki spektrum analizini gerçekleştirmişlerdir. M. Altun, üst üçgensel ve alt üçgensel n-bant sonsuz matris olarak gösterilen Toeplitz operatörünün c_0 ve c dizi uzayları üzerindeki spektrumlarını incelemiştir. Bant matrisler ile ilgili diğer bir çalışma ise A. M. Akhmedov ve S. R. El-Shabrawy' nin bazı özelliklere sahip $\tilde{a} = (a_k)$ ve $\tilde{b} = (b_k)$ yakınsak dizileri ile ikili-bant matris tanımlayarak c yakınsak diziler uzayında $\mathrm{D}_{a,b}$ genelleştirilmiş fark matrisinin spektrumunu elde ettikleri çalışmalardır.

Bu çalışmada yukarıda bahsi geçen makalelerden özellikle; Δ fark [1] , Δ^2 fark operatörü[15], ikinci dereceden genelleştirilmiş fark operatörü *U(s,r,s)* [10] ve *B(r,s)* [6] *B(r,s)*[2] genelleştirilmiş fark operatörlerinin c, c_0 , ℓ_1,ℓ_p uzayları üzerinde ince spektrumları incelenmiştir.

BÖLÜM 1

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1 Konu ile İlgili Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde sonraki bölümlere yardımcı olacak konu, kavram ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1 (Lineer uzay)

L boş olmayan bir küme F *(R veya C)* bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L' ye F üzerinde lineer uzay denir.

A) L, + işlemine göre değişmeli gruptur.

G1) $\forall\ x,y \in L$ için x+y$\in L$ dir. (kapalılık özelliği)

G2) $\forall\ x,y,z \in L$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$ dir. (Birleşme özelliği)

G3) $\forall\ x \in L$ için $x+\theta=\theta+x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır. (Birim eleman)

G4) $\forall\ x \in L$ için $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır. (Ters eleman)

G5) $\forall\ x,y \in L$ için $x+y=y+x$ dir. (Değişme özelliği)

B) $\forall\ x,y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

L1) $\alpha x \in L$ (skalerle çarpmaya göre kapalılık)

L2) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

L3) $(\alpha+\beta).x= \alpha x+\beta y$

L4) $(\alpha.\beta)x=\alpha.(\beta x)$

L5) $1.x=x$ [1]

Tanım 1.2 (Lineer Bağımsızlık)

L, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $S = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ de *L* nin sonlu bir alt kümesi olsun. $\alpha_i \in F$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

olması her *i* için $\alpha_i = 0$ olmasını gerektiriyorsa *S* kümesine veya $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ vektörlerine (*F* üzerinde) lineer bağımsız denir. [5]

Tanım 1.3 (Baz)

L, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve *B, L* nin bir altcümlesi olsun. *B* lineer bağımsız ve *B, L*yi geriyorsa yani $<B>=L$ ise *B* ye (*F* üzerinde) *L* nin bir bazı(tabanı) denir. [5]

Tanım 1.4 (Dizi)

Tanım kümesi *N* doğal sayılar kümesi olan fonksiyona dizi denir. Diziler değer kümelerine göre çeşitli adar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi, rasyonel sayılar kümesi ise diziye rasyonel terimli dizi adı verilir. [3]

Tanım 1.5 (Sınırlı Dizi)

Her $n \in N$ için $|a_n| < M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa a_n dizisine sınırlı dizi denir. [18]

Tanım 1.6 (Monoton Dizi)

Her $n \geq 1$ için $a_n < a_{n+1}$ ise $\{a_n\}$ dizisine artan denir. Her $n \geq 1$ için $a_n > a_{n+1}$ ise $\{a_n\}$ dizisine azalan denir. Artan veya azalan bir diziye monoton denir.

Sınırlı ve monoton her dizi yakınsaktır. [18]

Tanım 1.7 (Kısmi Toplamlar Dizisi)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ serisi verildiğinde, bu serinin *n*. kısmi toplamı $\{S_n\}$ ile gösterilsin:

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Eğer $\{S_n\}$ dizisi yakınsak ve $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ bir gerçel sayı olarak var ise , $\sum a_n$ serisi yakınsaktır denir. [18]

Tanım 1.8 (Geometrik Seri)

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

geometrik serisi $|r|<1$ olduğu zaman yakınsaktır ve serinin toplamı;

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \text{ dir.}$$

Eğer $|r| \geq 1$ise geometrik seri ıraksaktır.[18]

1.2 Lineer Dönüşümler ve Lineer Operatörler

Tanım 1.9 (Lineer Dönüşüm)

X ve Y aynı skaler cisimde tanımlı vektör uzayları olsun. $T : X \to Y$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in F$ için;

$$\mathrm{T}(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

sağlanıyorsa T ye lineer dönüşüm denir.

$T : X \to Y$ lineer operatörünün tanım kümesi *D(T),* görüntü kümesi *R(T)* ve çekirdeği *N(T)* ile gösterilen uzayları;

$$D(T)=\{x\in X:\ Tx\in Y\}$$

$$R(T)=\{y\in Y:\ y=Tx,\ x\in X\}$$

$$N(T)=\{x\in D(T):\ Tx=\theta\ \}$$

şeklinde tanımlanır. *D(T)* uzayındaki farklı elemanları, *R(T)* uzayında farklı elemanlara taşıyan T dönüşümüne birebir dönüşüm denir. $T\theta=\theta$ özelliğine sahip bir T lineer dönüşümünün birebir olması için gerek ve yeter şart $N(T)=\theta$ olmasıdır [12].

Teorem 1.1 X ve Y normlu uzaylar olmak üzere $T : X \to Y$ lineer dönüşümü için aşağıdaki önermeler denktir.

1)T,bir noktada süreklidir.

2)T, X uzayı üzerinde düzgün süreklidir.

3)T sınırlıdır.

T dönüşümünün normu;

$$\|T\| = \sup_{x\neq\theta}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

ile tanımlanır.[12]

Tanım 1.10 (Operatör)

Reel analizde, reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlarla çalışılır. Fonksiyonel analizde metrik uzaylar, normlu uzaylar ve lineer uzaylar gibi daha genel uzaylar ve bu uzaylarda tanımlı fonksiyonlar incelenir. Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir. [5]

Tanım 1.11 (Lineer operatör)

L ve L' aynı bir *F* cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T : L \to L'$ operatörü

$$T(x+y)=T(x)+T(y) \text{ ve } T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

şartlarını sağlıyorsa *T*' ye lineer operatör denir. Kolayca görüldüğü gibi yukarıdaki şartlar

$$T(\alpha x+\beta y)= \alpha Tx+\beta Ty \qquad \alpha, \beta \in F$$

şartına denktir. [12]

Tanım 1.12 (Sınırlı Lineer Operatör)

X ve Y bir normlu uzay ve *T:* $D(T) \to Y$ ye bir lineer operatör olsun. Burada *D(T)* *X* ' in alt kümesidir. Eğer her $x \in D(T)$ için,

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

olacak şekilde c >0 sayısı varsa *T'* ye sınırlı lineer operatör denir. [12]

Tanım 1.13 (Lineer Fonksiyonel)

F =*R* veya *F* =*C* olmak üzere *L, F* üzerinde bir vektör uzayı olsun. $f : L \to \mathrm{F}$ operatörüne fonksiyonel denir. Burada *L* reel lineer uzay ise *F=R*; *L* kompleks lineer uzay ise *F= C* dir.

Lineer fonksiyoneller, lineer operatör olarak sınırlı ise yani, $|f(x)| \leq k\|x\|$

olacak şekilde $k \geq 0$ reel sayısı varsa *f '* ye sınırlı lineer fonksiyonel denir [5].

Tanım 1.14 (Metrik Uzay)

X boş olmayan bir cümle olsun. $d:XxX \rightarrow R$ fonksiyonu için;

M1) $d(x,y) \geq 0$

M2) $d(x,y)=0$ ise $x=y$

M3) $d(x,y)=d(y,x)$ (simetri özelliği)

M4) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa d ye X de bir metrik fonksiyonu ve (X,d) ikilisine ise bir metrik uzay denir. [5]

Tanım 1.15 (İzomorfizm)

Bir X vektör uzayından Y vektör uzayına tanımlı, yapıyı koruyan birebir ve üzerine bir dönüşüme izomorfizm denir. Örneğin X ve Y aynı cisim üzerinde iki lineer uzay olsun. X den Y ye bir T izomorfizmi için $x,y \in X$ için;

$$T(x+y)=Tx+Ty$$

$$T(\alpha x)=\alpha Tx$$

şartını sağlayan birebir ve üzerine bir dönüşümdür. X ve Y uzayları arasında bir izomorfizm varsa bu uzaylara izomorfik uzaylar denir. $X \cong Y$ ile gösterilir.[12]

Tanım 1.16 (Normlu Uzay)

N bir lineer uzay olsun. $\| \ \| : N \rightarrow \mathrm{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için $\alpha \in F$ ve $x, y \in N$ olmak üzere;

N1) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\theta$

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

N3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa $\|\ \|$ fonksiyonuna N üzerinde norm denir. [5]

Tanım 1.17 (Cauchy Dizisi)

(X,d) metrik uzay (x_n) X de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık , her m,n> n_0 için $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) bir Cauchy dizisi denir.[5]

Tanım 1.18 (Tamlık)

(X,d) bir metrik uzay olsun. *X* uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise *(X,d)* metrik uzayına tam uzay denir. [12]

Tanım1.19 (Banach Uzayı)

N normlu bir lineer uzay olsun. *N* norm metriğine göre tam ise *N* 'ye Banach Uzayı denir. [12]

Tanım 1.20 (Sürekli Dual)

X herhangi bir normlu uzay olmak üzere; *X'* den *C*(veya *R*) tüm sınırlı lineer dönüşümlerin *X '* in sürekli duali denir ve X^* ile gösterilir. Yani $X^* = B(X, C)$ dir.

Tanım 1.21 (Dönüşümün Tersi)

X ve Y normlu uzaylar ve bu uzayların alt uzayları $D(T) \subset X$ ve $R(T) \subset Y$ olmak üzere $T : D(T) \to Y$ birebir lineer dönüşüm olsun. $R(T)$ uzayından $D(T)$ uzayına tanımlı ve $R(T)$ uzayından alınan $T_X = Y \in R(T)$ elemanını $D(T)$ uzayında bir x elamanına taşıyan $T^{-1}: R(T) \to D(T)$ dönüşümüne, T dönüşümünün tersi denir.[12]

Tanım 1.22 (Operatörün Adjointi)

X ve Y normlu uzaylar ve $T: X \to Y$ bir sınırlı operatör olsun. X ve Y uzaylarının dual uzayları X' ve Y' olsun. Bu taktirde T operatörünün adjoint operatörü;

$$T^*: Y' \to X' \ , \ f(x) = (T^* g)(x) = g(T_x)$$

şeklinde tanımlanır. T^* operatörüne T operatörünün adjoint operatörü denir..[12]

1.3 Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri

Tanım 1.23 (c uzayı)

(x_n) bir dizi olmak üzere,

$$c = \{x = (x_n) : \lim_{n\to\infty} |x_n - l| = 0, \ l \in C \}$$

şartını sağlayan dizilerin uzayıdır. Bu uzayı metrik uzay yapan fonksiyon;

$$d(x,y) = \sup_{n\in N} |x_n - y_n|$$

dir.

Tanım 1.24 (c_0 uzayı)

(x_n) bir dizi olmak üzere,

$$c_0 = \{x = (x_k) : \lim_{k\to\infty} x_k = 0 \}$$

şartını sağlayan dizilerin uzayıdır. Bu uzayı metrik uzay yapan fonksiyon;

$$d(x,y)=\max|\,|x_n - y_n| \qquad \text{dir.}$$

Tanım 1.25 (ℓ_∞ uzayı)

Sınırlı dizilerin ℓ_∞ uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\ell_\infty = \{x=(x_k) : \sup|x_k| < \infty\}$$

ℓ_∞ üzerindeki metrik $x = (x_k) \in \ell_\infty$ ve $y = (y_k) \in \ell_\infty$ olmak üzere,

$$d_\infty(x,y) = \sup_{k\in N}|x_k - y_k|$$

dır.

Tanım 1.26 (ℓ_p uzayı)

$$\ell_p = \{x=(x_k) : \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < \infty\}, \qquad 0 < p < \infty$$

ve ℓ_p de norm;

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{dir.}$$

Tanım 1.27 (Matris Dönüşümleri)

$A=(a_{nk})$ reel veya kompleks terimli bir sonsuz matris ve x=(x_k) herhangi bir dizi olsun. Eğer her $n\in N$ için;

$$(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serileri yakınsak ise Ax=$(Ax)_n$ dizisine x dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir. λ ve μ herhangi iki dizi uzayı ve A bir sonsuz matris olsun.

Eğer her $x \in \lambda$ için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve μ uzayına ait ise A matrisi λ uzayından μ uzayına tanımlı bütün matris dönüşümlerinin kümesi (λ, μ) ile gösterilir.[8]

Tanım 1.28 (Üçgensel Matris)

$A = (a_{nk})$ bir matris olsun. $k > n$ için $a_{nk} = 0$ ve $a_{nn} = 0$ terimlerinden oluşan $A = (a_{nk})$ matrisine üçgen matris denir. Üçgen matris dönüşümleri birebirdir.

Teorem 1.2

A=(a_{nk})matrisinin c uzayından yine bu uzaya tanımlı sınırlı lineer bir $T \in B(c)$ operatörüne karşılık gelmesi için gerek ve yeter şartlar;

i) A matrisinin bütün satırları ℓ_1 uzayında ve ℓ_1 normları sınırlıdır.

ii) A matrisinin bütün sütunları c uzayındadır.

iii) A matrisinin e=(1,1,1…) dizisini yine c uzayına taşımasıdır.

Bu cins dönüşümlere, yakınsaklığı koruyan operatör denir. T operatörünün normu, satırların ℓ_1 normlarının supremumudur.[17]

Teorem 1.3

A=(a_{nk})matrisinin c_0 uzayından yine bu uzaya tanımlı sınırlı lineer bir $T \in B(c_0)$ operatörüne karşılık gelmesi için gerek ve yeter şartlar;

i) A matrisinin bütün satırları ℓ_1 uzayında ve ℓ_1 normları sınırlıdır.

ii) A matrisinin bütün sütunları c_0 uzayındadır.

T operatörünün normu, satırların ℓ_1 normlarının supremumudur.[17]

Teorem 1.4

$A \in B(\ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

olmasıdır. [13]

Teorem 1.5 Eğer $A \in B(\ell_\infty) \cap B(\ell_1)$ ise $A \in B(\ell_p)$ $1 < p < \infty$ ' dur.[13]

Teorem1.6) $A \in B(\ell_\infty)$ olsun. Eğer $A \in B(\ell_p)$, $1 \le p < \infty$ ve $q > p$ ise $A \in B(\ell_q)$ dur. [7]

1.4 Sonlu Boyutlu Normlu Uzaylarda Spektral Teori

X sonlu boyutlu normlu uzay ve $T : X \to X$ lineer operatör olsun. Bu tip uzaylarda verilen operatörlerin spektral teorisi sonsuz boyutlu uzaylardaki operatörlerin spektral teorisine göre daha basittir. Operatörlerin , matris temsiline sahip olduğunu bildiğimizden ve operatörlerin spektral teorisi esasta matrislerin öz değer teorisi olduğundan dolayı matrislerle başlıyacağız. Bir matrisin bütün öz değerlerinin kümesine o matrisin spektrumu denir.

Tanım 1.29 (Bir Matrisin Öz değer ve Öz vektörleri)

A kare matrisinin bir öz değeri,

$$Ax = \lambda x$$

şartını sağlayan $x \neq 0$ gibi bir çözüme sahip olacak λ sayısıdır. A nın bütün öz değerlerinin oluşturduğu kümeye A nın spektrumu denir. Yukarıdaki denklemi,

$$(A-\lambda \mathrm{I})x=0$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ise x in bileşenleri olan $x_1,\dots,x_n$ gibi n tane bilinmeyen içeren n tane lineer denklemden oluşan homojen bir sistemdir ve $x \neq 0$ gibi bir çözüme sahip olabilmesi için katsayılar determinantı olan $\det(A-\lambda \mathrm{I})=0$ olması gerekmektedir.

Örnek: Aşağıdaki A matrisinin öz değerlerini bulunuz.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Bu matris için ;

$$A-\lambda \mathrm{I}=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

Böylece ;

$$\det(A-\lambda \mathrm{I})=(3-\lambda)(4-\lambda)-5(-2)=\lambda^2+\lambda-2$$

Ve A nın öz denklemi $\lambda^2+\lambda-2=0$ olur. Bu durumda $\lambda_1=1$ ve $\lambda_2=-2$ olur. Bu iki değer A matrisinin spektrumunu verir.

1.5 Sonsuz Boyutlu Normlu Uzaylarda Spektral Teori

Sonsuz boyutlu uzaylarda spektrum sonlu boyutlu uzaylardakine göre daha karmaşık ve bulunması daha zordur. Bu yüzden, sonsuz boyutlu uzaylarda dönüşümün spektrumunu belirlemek için sonlu boyutlu uzaylarda kullanılandan daha fazla bilgi ve teoriye ihtiyaç duyulur.

Teorem 1.7

X normlu bir uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda T^{-1} in sınırlı terse sahip olması için gerek ve yeter şart T^* operatörünün örten olmasıdır. [9]

Teorem 1.8

X normlu bir uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda T operatörünün X içinde yoğun bir görüntüye sahip olması için gerek ve yeter şart T^* operatörünün birebir olmasıdır.[9]

Tanım1.30 (Resolvent)

$X \neq \{\theta\}$ bir kompleks normlu uzay ve $D(T) \subset X$ tanım kümesi iken $T: D(T) \to X$ bir lineer operatör olsun. $D(T)$ üzerinde I birim operatör ve λ kompleks sayı iken T yi

$$T_\lambda = (T - \lambda \mathrm{I})$$

operatörü ile eşleştiririz. Eğer T_λ nın tersi varsa $R_\lambda(T)$ ile belirlenir. Yani;

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda \mathrm{I})^{-1}$$

ve bu T operatörünün resolvent operatörü yada T operatörünün resolventi olarak adlandırılır.[12]

Eğer $(T - \lambda \mathrm{I})^{-1}$ mevcut sınırlı ve X uzayında yoğun kümede tanımlı ise burada ki λ skalerine T operatörünün regüler değeri denir. T operatörünün bütün regüler değerlerinin kümesine T operatörünün resolvent kümesi $\rho(T)$ ile gösterilir.[12]

Tanım1.31 (Spektrum Kümesi)

Kompleks düzlemde $\sigma(T) = C - \rho(T)$ nin spektrumu denir. $\lambda \in \sigma(T)$ ise T 'nin spektral değeri olarak adlandırılır. Tüm spektral değerlerin oluşturduğu kümeye de spektrum kümesi denir.[12]

Tanım 1.32 (İnce Spektrum)

Lineer dönüşümler üzerine araştırmalar yapan Goldberg, lineer dönüşümlerin şu şekilde sınıflandırmasını yapmıştır;

T: $X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. *R(T)*'nin *X* içindeki kapanışını $\overline{R(T)}$ ile gösterelim. Bu durumda *R(T)* için;

I) *R(T)=X*

II)*R(T)≠X* fakat $\overline{R(T)}$=X

III) $\overline{R(T)}$≠X

R(T) üzerinde göz önüne alınan T^{-1} için,

1) T^{-1} mevcut ve sınırlı

2) T^{-1} mevcut fakat sınırlı değil

3) T^{-1} mevcut değil

Yukarıdaki durumlar göz önüne alırsak;

I_1, I_2,I_3,II_1, II_2, $\mathrm{II}_{3,}$ III_1,III_2, III_3 olmak üzere dokuz durum söz konusudur. Örneğin $T \in \mathrm{I}_1$ ise *R(T)=X* ve T^{-1} mevcut ve sınırlıdır. T$\in \mathrm{III}_2$ ise $\overline{R(T)}$≠X ve T^{-1}, *R(T)* üzerinde mevcut ancak sınırlı değildir.

Yukarıda ki ayrışımlar yardımıyla spektrumla ilgili aşağıdaki terimler verilebilir. Artık burada spektrum 3 e ayrılmıştır.[9]

Tanım 1.34 (Nokta Spektrumu)

$R_\lambda(T)$ nin var olmadığı yani; $(T-\lambda \mathrm{I})^{-1}$ nin mevcut olmadığı durumda ki λ skalerlerinin kümesine nokta spektrumu denir. $\sigma_p(T)$ ile gösterilir. Bu durumda $\lambda \in$ $\sigma(T)$ dir. [12]

Tanım 1.35 (Sürekli Spektrum)

$R_\lambda(T)$ nin var olduğu yani, $(T-\lambda \mathrm{I})^{-1}$ nin mevcut olduğu, yoğun bir küme üzerinde tanımlı olduğu, sınırlı olmadığı $\lambda \in \mathrm{C}$ kompleks sayılarının kümesine T dönüşümünün sürekli spektrumu denir ve $\sigma_c(T)$ ile gösterilir.[12]

Tanım 1.36 (Artık Spektrum)

$R_\lambda(T)$ nin var olduğu yani, $(T-\lambda \mathrm{I})^{-1}$ nin mevcut olduğu, yoğun bir küme üzerinde tanımlı olmayan, sınırlı olabilirde, olmayabilirde bu şekilde ki $\lambda \in \mathrm{C}$ kompleks sayılarının kümesine T dönüşümünün sürekli spektrumu denir. Ayrıca $\sigma_r(T)$ ile gösterilir.[12]

Sonlu boyutlu durumlarda ; $\sigma_c(T)=\sigma_r(T)=\theta$ ve spektrum sadece $\sigma_p(T)$ kümesinden oluşur. Yani $\sigma(T)=\sigma_p(T)$ dir. Sonsuz boyutlu bir normlu uzay ise $T \in B(X)$ operatörü için $\sigma(T)=\sigma_p(T)$ eşitliği daima geçerli değildir.

Yukarıdaki tanımlardan elde edilen şartları aşağıdaki tabloda gösterelim, bu tabloda

(R_1): $R_\lambda(T)$ vardır.

(R_2): $R_\lambda(T)$ sınırlıdır.

(R_3): $R_\lambda(T)$ X de yoğun küme üzerinde tanımlı

şeklinde tanımlanmıştır.

Sağlanır	Sağlanmaz	λ elemanıdır
R_1, R_2, R_3		$\rho(T)$
R_1	R_3	$\sigma_r(T)$
	R_1	$\sigma_p(T)$
R_1, R_3	R_2	$\sigma_c(T)$

[12]

BÖLÜM 2

Δ Fark Operatörünün ve *B(r,s)* Fark operatörünün c, c_0 Dizi Uzaylarında İnce Spektrumu

2.1 Δ Fark Operatörünün c_0 Dizi Uzayı Üzerinde İnce Spektrumu

Bu bölümde; Δ fark operatörünün c_0 dizi uzayı üzerinde ince spektrum davranışları incelenecektir.

$$\Delta : c_0 \to c_0$$

$\Delta x = \{ x_0, x_1 - x_0, x_2 - x_1, \cdots \}$ olduğuna göre bunun matris temsili şu şekildedir,

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Teorem 2.1 $\sigma(\Delta, c_0) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - 1| \le 1\}$ [1]

İspat: Spektrumun tanımından, Δ operatörünün spektrumunun var olması için $(\Delta - \alpha I)^{-1}$nin $B(c_0)$ uzayında mevcut olmaması gerekir. Varsayalım ki $\alpha \notin \sigma(\Delta, c_0) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - 1| \le 1\}$olsun. Bu durumda $(\Delta - \alpha I)^{-1}$nin $B(c_0)$ da olduğunu göstermek yeterlidir.

$(\Delta - \alpha I)$ matrisi alt üçgensel matris olduğundan $(\Delta - \alpha I)$ matrisinin tersi mevcuttur.

$(\Delta - \alpha I)(\Delta - \alpha I)^{-1} = I$ dır.

$$(\Delta - \alpha \mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1-\alpha & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1-\alpha & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1-\alpha & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1-\alpha & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$(1-\alpha)a_{11} + 0.a_{12} + 0.a_{13} = 1$$

$$a_{11} = \frac{1}{(1-\alpha)}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0$$

$$(-1)a_{11} + (1-\alpha)a_{21} + 0a_{31} = 0$$

$$-a_{12} + (1-\alpha)a_{21} + 0.a_{32} = 1$$

$$-a_{13} + (1-\alpha)a_{23} + 0.a_{33} = 0$$

$$a_{21} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}, \quad a_{22} = \frac{1}{(1-\alpha)}, \quad a_{23} = 0$$

$$-a_{21} + (1-\alpha)a_{31} + 0a_{31} = 0$$

$$-a_{22} + (1-\alpha)a_{32} + a_{41} = 0$$

$$0.a_{13} - a_{23} + (1-\alpha)a_{33} = 1$$

$$a_{31} = \frac{1}{(1-\alpha)^3}, \quad a_{32} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}, \quad a_{33} = \frac{1}{(1-\alpha)}$$

Bu şekilde devam edersek ;

$$(\Delta - \alpha I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\alpha} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{(1-\alpha)^2} & \frac{1}{(1-\alpha)} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{(1-\alpha)^3} & \frac{1}{(1-\alpha)^2} & \frac{1}{(1-\alpha)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$$(\Delta-\alpha I)^{-1}=a_{nk}$$

a_{nk} matrisi için ;

$$a_{nk}=\begin{cases} 0; & k>n \\ \dfrac{(1-\alpha)^k}{(1-\alpha)^{n+1}} & k\le n \end{cases}$$

dir.

$$\left\|(\Delta-\alpha I)^{-1}\right\|_{(c_0\ ,c_0)}=\sup_{n\in N}\sum_{k=0}^{n}\frac{|1-\alpha|^k}{|1-\alpha|^{n+1}}$$

$$=\sup_{n\in N}\left(\frac{1+|1-\alpha|+|1-\alpha|^2+\cdots+|1-\alpha|^n}{|1-\alpha|^{n+1}}\right)$$

$$=\ \sup_{n\in N}\left(\left|\frac{1}{1-\alpha}\right|^{n+1}+\left|\frac{1}{1-\alpha}\right|^{n}+\cdots+\left|\frac{1}{1-\alpha}\right|\right)$$

$$=\sup_{n\in N}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{1-\alpha}\right|^{k+1}<\infty \qquad (2.1)$$

$\alpha\notin\sigma(\Delta,c_0)$ kabulümüzden dolayı $|1-\alpha|>0$ olur ve bunun sonucunda (2.1) sağlanmış olur.

Eğer $\alpha\in\{\alpha\in\mathrm{C}:|\alpha-1|\le 1\}$ ise o zaman (2.1) ;

$$\left\|(\Delta-\alpha I)^{-1}\right\|_{(c_0\ ,c_0)}=\infty$$

olduğu görülür. Bunun anlamı $(\Delta-\alpha\mathrm{I})^{-1}\notin B(c_0)$ dır. Böylece $\sigma(\Delta,c_0)=\{\alpha\in\mathrm{C}:|\alpha-1|\le 1\}$ olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 2.2 $\sigma_p(\Delta, c_0) = \phi$ [1]

İspat: c_0 uzayında seçtiğimiz bir $x \neq \theta = (0,0,0,......)$ için yazılan $\Delta x = \alpha x$ eşitliğinin çözümü;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha x_0 \\ x_1 - x_0 &= \alpha x_1 \\ x_2 - x_1 &= \alpha x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemini elde ederiz. Buradan $\alpha \neq 1$ ise $x_0 = 0$ olur. Bu durumda $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = 0$ olur, bu kabulümüz olan $x \neq \theta = (0,0,0,......)$ ile çelişir. Eğer $\alpha = 1$ ise yine $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = 0$ olur. Yani $\Delta x = \alpha x$ eşitliğini sağlayan $x \neq \theta$ dizisi mevcut değildir.

Eğer $T : c_0 \to c_0$ matris temsili A olan bir operatör ise T operatörünün adjoint operatörü $T^* : c_0^* \to c_0^*$ ın matris temsili A^t(A nın transpozu) ile tanımlı A^t matris temsiline sahiptir.

Teorem 2.3 $\sigma_p(\Delta^*, c_0^*) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - 1| < 1\}$ [1]

İspat: $c_0^* \cong \ell_1$ uzayında seçtiğimiz bir $x \neq \theta = (0,0,0,......)$için yazılan $\Delta^* x = \alpha x$ eşitliğinin çözümü;

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Bu durumda;

$$\begin{aligned} x_0 - x_1 &= \alpha x_0 \\ x_1 - x_2 &= \alpha x_1 \\ x_2 - x_3 &= \alpha x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

bu denklem sisteminden $x_n = (1-\alpha)^n x_0$ elde edilir. Burada bizim amacımız $x \neq \theta$ iken yazılan $\Delta^* x = \alpha x$ eşitliğini sağlayan α değerlerini bulmaktır. Eğer ilk terimi sıfır ise $x = \theta$ olur ve kabulümüzle çelişir. İlk terimi sıfırdan farklı ise $x \neq \theta$ iken $\Delta^* x = \alpha x$ eşitliğini sağlayan α değerleri vardır. Bu yüzden c_0^* dual uzayında nokta spektrumu mevcuttur ve $x = (x_n) \in \ell_1$ olması gerekir. $x_n = (1-\alpha)^n x_0 \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $|\alpha - 1| < 1$ olmasıdır.

Teorem 2.4 $\sigma_r(\Delta\ , c_0) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - 1| < 1\}$ [1]

İspat: Rezidüel spektrumun var olması için $(\Delta - \alpha I)$ nın tersinin mevcut olduğunu ve $\overline{R(\Delta - \alpha I)} \neq c_0$ olduğunu göstermeliyiz. Öncelikle $(\Delta - \alpha I)$ alt üçgensel matris olduğundan tersi vardır. Rezidüel spektrumun ilk şartını sağladı.

Teorem 1.8 i kullanarak $(\Delta - \alpha I)$ nın $c_0$da yoğun bir görüntüye sahip olup olmadığına bakmalıyız. Teorem2.3 den dolayı $\Delta^* - \alpha I$ birebir değildir. Böylece $\overline{R(\Delta - \alpha I)} \neq c_0$dır. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 2.5 $\sigma_c(\Delta\ , c_0) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - 1| = 1\}$ [1]

İspat : Yukarıdaki teoremlerde nokta spektrumunu, rezidüel spektrumunu elde ettik.

$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T)$ olduğunu bildiğimizden dolayı $\sigma_c(\Delta\ , c_0) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - 1| = 1\}$ elde edilir.

2.2 Δ Fark Operatörünün c Dizi uzayı Üzerinde İnce Spektrumu

Teorem2.6: $\sigma(\Delta, c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - 1| \leq 1\}$ [1]

İspat: Spektrumun tanımından, Δ operatörünün spektrumunun var olması için $(\Delta - \alpha I)^{-1}$ nin $B(c)$ uzayında mevcut olmaması gerekir. Varsayalım ki $\alpha \notin \sigma(\Delta, c) = \{\alpha \in \mathrm{C} : |\alpha - 1| \leq 1\}$ olsun. Bu durumda $(\Delta - \alpha I)^{-1}$ nin $B(c)$ de olduğunu göstermek yeterlidir.

$(\Delta - \alpha I)$ matrisi alt üçgensel matris olduğundan $(\Delta - \alpha I)$ matrisinin tersi mevcuttur.

$(\Delta - \alpha I).(\Delta - \alpha I)^{-1} = \mathrm{I}$ dır.

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1-\alpha & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1-\alpha & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Buradan;

$$(\Delta - \alpha I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\alpha} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{(1-\alpha)^2} & \frac{1}{(1-\alpha)} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{(1-\alpha)^3} & \frac{1}{(1-\alpha)^2} & \frac{1}{(1-\alpha)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$(\Delta - \alpha I)^{-1} = a_{nk}$$

a_{nk} matrisi için ;

$$a_{nk} = \begin{cases} 0; & k > n \\ \dfrac{(1-\alpha)^k}{(1-\alpha)^{n+1}} & k \leq n \end{cases}$$

dır. Böylece;

$$\left\|(\Delta-\alpha I)^{-1}\right\|_{(c,c)} = \sup_{n\in N}\sum_{k=0}^{n} \frac{|1-\alpha|^{k}}{|1-\alpha|^{n+1}}$$

$$= \sup_{n\in N}\left(\frac{1+|1-\alpha|+|1-\alpha|^{2}+\cdots+|1-\alpha|^{n}}{|1-\alpha|^{n+1}} \right)$$

$$= \sup_{n\in N}\left(\left|\frac{1}{1-\alpha}\right|^{n+1} + \left|\frac{1}{1-\alpha}\right|^{n} + \cdots + \left|\frac{1}{1-\alpha}\right| \right)$$

$$= \sup_{n\in N}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{1-\alpha}\right|^{k+1} < \infty \qquad (2.2)$$

elde edilir. Çünkü $|1-\alpha|>1$ olduğundan $\left|\frac{1}{1-\alpha}\right|<1$ olur. O halde , $(\Delta-\alpha I)^{-1}\in B(c)$ olur.

$\alpha \in \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha-1| \le 1\}$ ise (2.2) den ;

$$\left\|(\Delta-\alpha I)^{-1}\right\|_{(c\;\;,c)} = \infty$$

olduğu açıktır. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 2.8 $\sigma_p(\Delta, c)=\phi$ [1]

İspat: c uzayında seçtiğimiz $x\neq\theta=(0,0,0,\ldots\ldots)$ için yazılan $\Delta x=\alpha x$ eşitliğinin çözümü;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Bu durumda;

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha x_0 \\ x_1 - x_0 &= \alpha x_1 \\ x_2 - x_1 &= \alpha x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. $\alpha \neq 1$ ise $x_0 = 0$ olur. Bu durumda $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = 0$ olur buda kabulümüz olan $x \neq \theta = (0,0,0,......)$ ile çelişir. Eğer $\alpha = 1$ ise yine $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = 0$ olur. Yani $\Delta x = \alpha x$ eşitliğini sağlayan $x \neq \theta$ dizisi mevcut değildir.

Eğer $T : c \to c$ matris temsili A olan sınırlı bir lineer operatör ise o zaman $T^* : c^* \to c^*$ ın $C \oplus l_1$ uzayında matris temsili

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ b & A^t \end{pmatrix}$$

dır. . Burada *x*, *A* matrisinin satır toplamlar dizisinin limiti ile *A* matrisinin sütunlarının limitinin toplamının farkıdır ve b de her $k \in N$ için *A* matrisinin k. sütununun limitidir.

O halde $\Delta : c \to c$ için $\Delta^* \in B(l_1)$ matrisi ;

$$\Delta^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta^t \end{pmatrix}$$

formundadır.

Teorem2.9 $\sigma_p(\Delta^*, c^*) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - 1| < 1\} \cup \{0\}$ [1]

İspat: $c_0^* \cong \ell_1$ uzayında seçtiğimiz $x \neq \theta = (0,0,0,......)$ için yazılan $\Delta^* x = \alpha x$ eşitliğinin çözümü;

$$\Delta^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha x_0 \\ x_1 - x_2 &= \alpha x_1 \\ x_2 - x_3 &= \alpha x_2 \\ &\vdots \\ x_k - x_{k+1} &= \alpha x_k \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (2.3)$$

ise n≥2 için $x_n = (1-\alpha)^n x_0$ elde edilir. Burada bizim amacımız $x \neq \theta$ iken yazılan $\Delta^* x = \alpha x$ eşitliğini sağlayan α değerlerini bulunmaktadır. Eğer $\alpha \neq 0$ ise $x_0 = 0$ bu durumda $x = \theta$ olur ve kabulümüzle çelişir. Eğer $x_0 \neq 0$ ise $\alpha = 0$ olur. $\alpha = 0$ için $x \neq \theta$ iken yazılan $\Delta^* x = \alpha x$ eşitliğini sağlayan α değerleri bulunmaktadır. Bu yüzden c^* dual uzayında nokta spektrumu mevcuttur ve $x = (x_n) \in \ell_1$ olması gerekir. $x_n = (1-\alpha)^n x_0$ olması için gerek ve yeter şart $|\alpha - 1| < 1$ olmasıdır.

Teorem 2.10 $\sigma_r(\Delta, c) = \{\alpha \in C : |\alpha - 1| < 1\} \cup \{0\}$ [1]

İspat: Rezidüel spektrumun var olması için $(\Delta - \alpha I)$ nın tersinin mevcut olduğunu ve $\overline{R(\Delta - \alpha I)} \neq c$ olduğunu göstermeliyiz. Öncelikle $(\Delta - \alpha I)$ alt üçgensel matris olduğundan tersi vardır. Rezidüel spektrumun ilk şartını sağladı. Teorem 1.8 i kullanarak $(\Delta - \alpha I)$ nın c de yoğun bir görüntüye sahip olup olmadığına bakmalıyız. Fakat teorem 2.9 dan dolayı $\Delta^* - \alpha I$ birebir değildir. Dolayısı ile $\overline{R(\Delta - \alpha I)} \neq c$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.11 $\sigma_c(\Delta, c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - 1| = 1\} \setminus \{0\}$

İspat: Yukarıdaki teoremlerde nokta spektrumunu, rezidüel spektrumunu elde ettik.

$\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_r(T)\cup\sigma_c(T)$ olduğundan dolayı $\sigma_c(\Delta\ ,c\ )=\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-1|=1\}$

elde edilir.

2.3 Genelleştirilmiş *B(r,s)*Fark operatörünün c_0 Uzayı Üzerindeki İnce Spektrumu

Bu bölümde genelleştirilmiş *B(r,s)* fark operatörünün c_0 dizi uzayı üzerindeki spektrum, nokta spektrumu, sürekli spektrum ve rezidüel spektrumu incelenecektir.

$B(r,s):c_0\to c_0$ olmak üzere ;

$$B(r,s)=\begin{bmatrix} r & 0 & 0 & \cdots \\ s & r & 0 & \cdots \\ 0 & s & r & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Teorem 2.12 $\sigma(B(r,s),c_0)=\{\alpha\in\mathrm{C}:\ |\alpha-r|\le|s|\}$ [2]

İspat: Spektrumun tanımından, *B(r,s)* operatörünün spektrumunun var olması için $(B(r,s)-\alpha\mathrm{I})^{-1}$nin $B(c_0)$ uzayında mevcut olmaması gerekir. Varsayalım ki $\alpha\notin\sigma(B(r,s),c_0)=\{\alpha\in\mathrm{C}:|\alpha-r|\le|s|\}$ olsun. Bu durumda $(B(r,s)-\alpha\mathrm{I})^{-1}$nin $B(c_0)$ uzayında var olduğunu göstermeliyiz. $(B(r,s)-\alpha\mathrm{I})$ alt üçgensel matris olduğundan tersi vardır.

$(B(r,s)-\alpha\mathrm{I}).(B(r,s)-\alpha\mathrm{I})^{-1}=\mathrm{I}$ olduğundan

$$(B(r,s)-\alpha \mathrm{I})^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{r-\alpha} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{-s}{(r-\alpha)^2} & \frac{1}{(r-\alpha)} & 0 & \cdots \\ \frac{s^2}{(r-\alpha)^3} & \frac{-s}{(r-\alpha)^2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$(B(r,s)-\alpha \mathrm{I})^{-1}=a_{nk}$ matrisi elde edilir.

$$a_{nk}=\begin{cases} 0; & k>n \\ \frac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{n-k+1}} & k\le n \end{cases}$$

Şeklindedir. Şimdi;

$$\left\| (B(r,s)-\alpha \mathrm{I})^{-1} \right\|_{(c_0:c_0)} = \sup_{n\in n} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{n-k+1}} \right|$$

$$=\left|\frac{1}{r-\alpha}\right| \sup_{n} \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{s}{r-\alpha}\right|^{n-k}$$

$$=\left|\frac{1}{r-\alpha}\right| \left|\sum_{k=0}^{n}\right| \left|\frac{s}{r-\alpha}\right|^{k} <\infty$$

$$=\frac{1}{r-\alpha}(\left(\frac{s}{r-\alpha}\right)^{n}+\left(\frac{s}{r-\alpha}\right)^{n-1}+\left(\frac{s}{r-\alpha}\right)^{n-2}+\ldots\ldots+1)$$

$$=\left|\frac{1}{r-\alpha}\right| \sup_{n\in n} \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{(-s)^k}{(r-\alpha)^k}\right| <\infty \quad (2.3)$$

olur. Çünkü $|\alpha-r|>s$ aldığımızdan $\left|\frac{s}{r-\alpha}\right|<1$ olur. Buradan $(B(r,s)-\alpha \mathrm{I})^{-1}\in(c_{0,}c_0)$ olur. Benzer şekilde;

$\alpha\in\{\alpha\in C:|\alpha-r|\le s\}$ ve $\alpha\ne r$ ise o zaman (2.3) den görülür ki;

$$\left\| (B(r,s)-\alpha \mathrm{I})^{-1} \right\|_{(c_0:c_0)} =\infty$$

bu sonuçtan bizim aradığımız $(B(r,s)-\alpha \mathrm{I})^{-1} \notin (c_{0,} c_0)$ durumunu elde ederiz. Eğer $\alpha = r$ ise $B(r,s)-\alpha\mathrm{I} = B(0,s)$ operatör bu formdadır. Matris gösterimi şu şekildedir;

$$B(0,s)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & s & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Buradan *B(0,s)* terslenemez. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.13 $\sigma_p(B(r,s),c_0)=\phi$ [2]

İspat: varsayalım ki c_0 uzayında seçtiğimiz $x \neq \theta = (0,0,0.\cdots)$ için yazılan *B(r,s)x=*αx eşitliğini çözdüğümüzde;

$$\begin{aligned} rx_0 &= \alpha x_0 \\ sx_0 + rx_1 &= \alpha x_1 \\ sx_1 + rx_2 &= \alpha x_2 \\ &\vdots \\ sx_k + rx_{k+1} &= \alpha x_{k+1} \end{aligned}$$

$x=(x_n)$ dizisinin ilk terimi sıfırdan farklı ise bu taktirde $\alpha = r$ olur. Bu bizim kabulümüzle $x \neq \theta = (0,0,0.\cdots)$ ile çelişir. $\alpha \neq r$ ise bu yine bizim $x \neq \theta = (0,0,0.\cdots)$ kabulümüzle çelişir. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 2.14 $\sigma_p(B(r,s)^*, c_0^*) = \{\alpha \in \mathrm{C} : |\alpha - \mathrm{r}| < s\}$ [2]

İspat: $c_0^* \cong \ell_1$ uzayında seçilen $x \neq \theta = (0,0,0,......)$ için yazılan $B(r,s)^* x = \alpha x$ eşitliğini çözdüğümüzde;

$$
\begin{aligned}
rx_0 + sx_1 &= \alpha x_0 \\
rx_1 + sx_2 &= \alpha x_1 \\
rx_2 + sx_3 &= \alpha x_2 \\
&\vdots \\
rx_k + sx_{k+1} &= \alpha x_k
\end{aligned}
$$

$x_n = \left(\frac{\alpha - r}{s}\right)^n x_0$ elde ederiz. Burada bizim amacımız $x \neq \theta$ iken yazılan $B(r,s)^* x = \alpha x$ eşitliğini sağlayan α değerlerini bulmaktır. Eğer ilk terimi sıfır ise $x = \theta$ olur ve kabulümüzle çelişir. İlk terimi sıfırdan farklı ise $x \neq \theta$ iken $B(r,s)^* x = \alpha x$ eşitliğini sağlayan α değerleri vardır. Bu yüzden c_0^* dual uzayında nokta spektrumu mevcuttur ve $x = (x_n) \in \ell_1$ olması gerekir. $x_n = \left(\frac{\alpha - r}{s}\right)^n x_0 \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart

$\left|\frac{\alpha - r}{s}\right| < 1$ olmasıdır. Dolayısıyla $|\alpha - \mathrm{r}| < s$ dir.

Teorem 2.15 $\sigma_r(B(r,s) \ ,c_0 \ ) = \{\alpha \in \mathrm{C} : |\alpha - \mathrm{r}| < s\}$ [2]

İspat: Rezidüel spektrumun var olması için $(B(r,s) - \alpha \mathrm{I})$ nın tersinin mevcut olduğunu ve $\overline{R(B(r,s) \ - \alpha \mathrm{I})} \neq c_0$ olduğunu göstermeliyiz. Öncelikle $B(r,s) - \alpha \mathrm{I}$ alt üçgensel matris olduğundan tersi vardır. Rezidüel spektrumun ilk şartını sağladı. Teorem 1.8 i kullanarak $B(r,s) - \alpha \mathrm{I}$ nın c_0 da yoğun bir görüntüye sahip olup olmadığına bakmalıyız. Teorem 2.14 ten dolayı $B(r,s)^* - \alpha \mathrm{I}$ bire-bir değildir. Dolayısıyla $\overline{R(B(r,s) \ - \alpha \mathrm{I})} \neq c_0$ dır. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 2.16: $\sigma_c(B(r,s) \ ,c_0 \ ) = \{\alpha \in \mathrm{C} : |\alpha - \mathrm{r}| = s\}$ [2]

İspat: Yukarıdaki teoremlerden rezidüel spektrumunu, nokta spektrumunu elde ettik.

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T)$$

olduğundan dolayı $\sigma_c(B(r,s)\ ,c_0\ ) = \{\alpha \in \mathrm{C} : |\alpha - \mathrm{r}| = s\}$ elde edilir.

2.4 Genelleştirilmiş *B(r,s)* Fark operatörünün *c* Uzayı Üzerindeki İnce Spektrumu

Teorem 2.17 $\sigma(B(r,s), \mathrm{c}\ ) = \{\alpha\ \in \mathrm{C}\!: |\alpha - r| \leq |s|\}$ [2]

İspat: Spektrumun tanımından, *B(r,s)* operatörünün spektrumunun var olması için $(B(r,s) - \alpha \mathrm{I})^{-1}$nin $B(c\ )$uzayında mevcut olmaması gerekir. Varsayalım ki $\alpha \notin \sigma(B(r,s), c\ ) = \{\alpha \in \mathrm{C}\ : |\alpha - r| \leq |s|\ \}$ olsun. Bu durumda $(B(r,s) - \alpha \mathrm{I})^{-1}$nin *B(c)*uzayında var olduğunu göstermeliyiz. $(B(r,s) - \alpha \mathrm{I})$ alt üçgensel matris olduğundan tersi vardır.

$(B(r,s) - \alpha \mathrm{I}) . (B(r,s) - \alpha \mathrm{I})^{-1} = \mathrm{I}$ olduğundan

$$(B(r,s) - \alpha \mathrm{I})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r-\alpha} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{-s}{(r-\alpha)^2} & \frac{1}{(r-\alpha)} & 0 & \cdots \\ \frac{s^2}{(r-\alpha)^3} & \frac{-s}{(r-\alpha)^2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$(B(r,s) - \alpha \mathrm{I})^{-1} = a_{nk}$ matrisi elde edilir.

$$a_{nk} = \begin{cases} 0; & k > n \\ \dfrac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{n-k+1}} & k \leq n \end{cases}$$

şeklindedir. Şimdi;

$$\left\| (B(r,s) - \alpha \mathrm{I})^{-1} \right\|_{(c\ \ :c\ \ )} = \sup_{n \in n} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{n-k+1}} \right|$$

$$=\left|\frac{1}{r-\alpha}\right|\sup_{n}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{s}{r-\alpha}\right|^{n-k}$$

$$=\frac{1}{r-\alpha}(\left(\frac{s}{r-\alpha}\right)^{n}+\left(\frac{s}{r-\alpha}\right)^{n-1}+\left(\frac{s}{r-\alpha}\right)^{n-2}+\ldots\ldots\ldots+1)$$

$$=\left|\frac{1}{r-\alpha}\right|\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{s}{r-\alpha}\right|^{k}<\infty$$

$$=\left|\frac{1}{r-\alpha}\right|\sup_{n\in n}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{(-s)^{k}}{(r-\alpha)^{k}}\right|<\infty \quad (2.5)$$

olur. Çünkü $|\alpha-r|>s$ aldığımızdan $\left|\frac{s}{r-\alpha}\right|<1$ olur. Buradan $(B(r,s)-\alpha I)^{-1}\in(c,c)$ olur. Benzer şekilde;

$\{\alpha\in\{\alpha\in C:|\alpha-r|\leq s\}$ ve $\alpha\neq r$ ise o zaman (2.5) den görülür ki ;

$$\left\|(B(r,s)-\alpha I)^{-1}\right\|_{(c:c)}=\infty$$

olur. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 2.18 $\sigma_p(B(r,s),c)=\phi$ [2]

İspat: Varsayalım ki *c* uzayında seçtiğimiz $x\neq\theta=(0,0,0.\cdots)$ için yazılan $B(r,s)x=\alpha x$ eşitliğinin çözümü;

$$\begin{aligned}
rx_0 &= \alpha x_0\\
sx_0+rx_1 &= \alpha x_1\\
sx_1+rx_2 &= \alpha x_2\\
&\vdots\\
sx_k+rx_{k+1} &= \alpha x_{k+1}
\end{aligned}$$

$x=(x_n)$ dizisinin ilk terimi sıfırdan farklı ise bu taktirde $\alpha=r$ olur. Bu bizim kabulümüzle $x\neq\theta=(0,0,0.\cdots)$ ile çelişir. $\alpha\neq r$ ise bu yine bizim $x\neq\theta=(0,0,0.\cdots)$ kabulümüzle çelişir. Buda ispatı tamamlar.

Eğer $T: c \to c$,matris temsili A olan sınırlı bir lineer operatör ise o zaman $T^*: c^* \to c^*$ ın $C \oplus l_1$ uzayında matris temsili

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ b & A^t \end{pmatrix}$$

dir. Burada *x*, *A* matrisinin satır toplamlarının dizisinin limiti ile *A* matrisinin sütunlarının limitinin toplamlarının farkıdır ve *b* de her $k \in N$ için *A* matrisinin *k*. sütununun limitidir.

Burada $B(r,s): c \to c$ için $B(r,s)^* \in B(\ell_1)$ için matrisi;

$$B(r,s)^* = \begin{bmatrix} r+s & 0 \\ 0 & B(r,s)^t \end{bmatrix}$$

formundadır.

Teorem 2.19 $\sigma_p(B(r,s)^*, c^*) = \{\alpha \in C : |\alpha - r| < |s|\} \cup \{r+s\}$ [2]

İspat: $c_0^* \cong \ell_1$ uzayında seçtiğimiz $x \neq \theta = (0,0,0,\ldots\ldots)$ için yazılan $B(r,s)^* x = \alpha x$ eşitliğini çözdüğümüzde;

$$\begin{aligned} (r+s)x_0 &= \alpha x_0 \\ rx_1 + sx_2 &= \alpha x_1 \\ rx_2 + sx_3 &= \alpha x_2 \\ &\vdots \\ rx_k + sx_{k+1} &= \alpha x_k \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Buradan ;

$$x_n = \left(\frac{\alpha - r}{s}\right)^{n-1} x_0 \qquad (2.8)$$

elde ederiz.

Eğer $x_0 \neq 0$ ise bu taktirde $\alpha = r+s$ dir. Yani $x \neq \theta$ iken yazılan $B(r,s)^* x = \alpha x$ eşitliğini sağlayan α değerlerini bulunmaktadır. Bunun anlamı $\alpha = r+s$ iken nokta spektrumu vardır.

$x = (x_n) \in \ell_1$ olması gerekir. (2.8) den görülür ki; $x = (x_n) \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $\left|\frac{\alpha - r}{s}\right| < 1$ olmasıdır. Yani $|\alpha - r| < |s|$ olmasıdır. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 2.20 $\sigma_r(B(r,s)\ ,c\ \ ) = \{\alpha \in \mathrm{C} : |\alpha - \mathrm{r}| < |s|\} \cup \{r+s\}$ [2]

İspat: Rezidüel spektrumun var olması için $(B(r,s) - \alpha \mathrm{I})$ nın tersinin mevcut olduğunu ve $\overline{R(B(r,s)\ \ -\alpha \mathrm{I})} \neq c$ olduğunu göstermeliyiz. Öncelikle $B(r,s) - \alpha \mathrm{I}$ alt üçgensel matris olduğundan tersi vardır. Rezidüel spektrumun ilk şartını sağladı. Teorem 1.8 i kullanarak $B(r,s) - \alpha \mathrm{I}$ nın c de yoğun bir görüntüye sahip olup olmadığına bakmalıyız. Teorem 2.19 dan dolayı $B(r,s)^* - \alpha \mathrm{I}$ bire-bir değildir. Dolayısıyla $\overline{R(B(r,s)\ \ -\alpha \mathrm{I})} \neq c$ dir. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 2.21 $\sigma_c(B(r,s)\ ,c\ \ ) = \{\alpha \in \mathrm{C} : |\alpha - \mathrm{r}| = s\} \backslash \{\mathrm{r+s}\}$ [2]

İspat: Yukarıdaki teoremlerden nokta spektrumu, rezidüel spektrumunu elde ettik.

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T)$$

olduğundan dolayı $\sigma_c(B(r,s)\ ,c_0\ \ ) = \{\alpha \in \mathrm{C} : |\alpha - \mathrm{r}| = s\}$ elde edilir.

2.5 Δ^2 Genelleştirilmiş Fark Operatörünün c_0 Dizi Uzayı Üzerindeki İnce Spektrumu

Bu kısımda Δ^2 fark operatörünün c_0 dizi uzayı üzerinde ince spektrumunu inceleyeceğiz.

$$\Delta^2 : c_0 \to c_0$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

fark operatörünün matris temsilinin yukarıdaki gibi olduğunu biliyoruz. O halde Δ^2

Operatörünün matris temsilini kolayca bulabiliriz.

$$\Delta^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

olduğundan;

$$\Delta^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Teorem 2.22 $\sigma(\Delta^2, c_0) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - 1| \leq 3\}$ [15]

İspat: Bu teoremin ispatını iki aşamada yapıcağız. İlk olarak biz $\alpha \in C$ ve $|1-\alpha| > 3$ iken $\alpha \notin \sigma(\Delta^2, c_0)$ olduğunu göstermeliyiz. $(\Delta^2 - \alpha I)^{-1} = a_{nk}$ üçgensel bir matris olduğundan $(\Delta^2 - \alpha I)^{-1}$ bir terse sahiptir.

$(\Delta^2 - \alpha I)(\Delta^2 - \alpha I)^{-1} = I$ olduğuna göre;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -2 & 1-\alpha & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -2 & 1-\alpha & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -2 & 1-\alpha & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Yukarıdan $(\Delta^2 - \alpha \mathrm{I})$ değerini elde ederiz. Şimdi $(\Delta^2 - \alpha \mathrm{I})^{-1}$ ni hesaplayalım.

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -2 & 1-\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -2 & 1-\alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -2 & 1-\alpha & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1-\alpha & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & \cdots \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & \cdots \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & \cdots \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{45} & b_{55} & \cdots \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$(1-\alpha)b_{11} + 0.b_{21} + \cdots = 1 \qquad b_{11} = \frac{1}{(1-\alpha)}$$

$$(1-\alpha)b_{12} + 0.b_{22} + 0.b_{23} + \cdots = 0 \qquad b_{12} = 0$$

$$(1-\alpha)b_{13} + 0.b_{14} + \cdots = 0 \qquad b_{13} = 0$$

$$-2b_{11} + (1-\alpha)b_{21} + 0.b_{31} + \cdots = 0 \qquad b_{21} = \frac{2}{(1-\alpha)^2}$$

$$-2b_{12} + (1-\alpha)b_{22} + 0.b_{32} + \cdots = 1 \qquad b_{22} = \frac{1}{(1-\alpha)}$$

$$-2b_{13} + (1-\alpha)b_{23} + 0.b_{33} + \cdots = 0 \qquad b_{23} = 0$$

$$b_{11} - 2b_{21} + (1-\alpha)b_{31} + 0.b_{41} + \cdots = 0 \qquad b_{31} = \frac{2^2}{(1-\alpha)^3} - \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

$$b_{12} - 2b_{22} + (1-\alpha)b_{32} + 0.b_{41} + \cdots = 0 \qquad b_{32} = \frac{2}{(1-\alpha)^2}$$

$$b_{13} - 2b_{23} + (1-\alpha)b_{33} + \cdots = 1 \qquad b_{33} = \frac{1}{(1-\alpha)}$$

$$b_{21} - 2b_{31} + (1-\boldsymbol{\alpha})b_{41} + 0.b_{51} + \cdots = 0 \qquad b_{41} = \frac{2^3}{(1-\boldsymbol{\alpha})^4} - \frac{2^2}{(1-\boldsymbol{\alpha})^3}$$

$$b_{22} - 2b_{32} + (1-\boldsymbol{\alpha})b_{42} + \cdots = 0 \qquad b_{42} = \frac{2^2}{(1-\boldsymbol{\alpha})^3} - \frac{1}{(1-\boldsymbol{\alpha})^2}$$

$$b_{23} - 2b_{33} + (1-\boldsymbol{\alpha})b_{43} + \cdots = 0 \qquad b_{43} = \frac{2}{(1-\boldsymbol{\alpha})^2}$$

$$b_{24} - 2b_{34} + (1-\boldsymbol{\alpha})b_{44} + \cdots = 1 \qquad b_{44} = \frac{1}{(1-\boldsymbol{\alpha})}$$

$$b_{31} - 2b_{41} + (1-\boldsymbol{\alpha})b_{51} + \cdots = 0 \qquad b_{51} = \frac{2^4}{(1-\boldsymbol{\alpha})^4} - \frac{2^3}{(1-\boldsymbol{\alpha})^3} - \frac{2^2}{(1-\boldsymbol{\alpha})^3} + \frac{1}{(1-\boldsymbol{\alpha})^3}$$

$$b_{32} - 2b_{42} + (1-\boldsymbol{\alpha})b_{52} + \cdots = 0 \qquad b_{52} = \frac{2^3}{(1-\boldsymbol{\alpha})^4} - \frac{2^2}{(1-\boldsymbol{\alpha})^3}$$

$$b_{33} - 2b_{43} + (1-\boldsymbol{\alpha})b_{53} + \cdots = 0 \qquad b_{53} = \frac{2^2}{(1-\boldsymbol{\alpha})^3} - \frac{1}{(1-\boldsymbol{\alpha})^2}$$

$$b_{34} - 2b_{44} + (1-\boldsymbol{\alpha})b_{54} + \cdots = 0 \qquad b_{54} = \frac{2}{(1-\boldsymbol{\alpha})^2}$$

$$b_{35} - 2b_{45} + (1-\boldsymbol{\alpha})b_{55} + \cdots = 1 \qquad b_{55} = \frac{1}{(1-\boldsymbol{\alpha})}$$

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{(1-\alpha)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\frac{2}{(1-\alpha)^2} & \frac{1}{(1-\alpha)} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\frac{2^2}{(1-\alpha)^3}-\frac{1}{(1-\alpha)^2} & \frac{2}{(1-\alpha)^2} & \frac{1}{(1-\alpha)} & 0 & 0 & \cdots \\
\frac{2^3}{(1-\alpha)^4}-\frac{2^2}{(1-\alpha)^3} & \frac{2^2}{(1-\alpha)^3}-\frac{1}{(1-\alpha)^2} & \frac{2}{(1-\alpha)^2} & \frac{1}{(1-\alpha)} & 0 & \cdots \\
\frac{2^4}{(1-\alpha)^4}-\frac{2^3}{(1-\alpha)^3}-\frac{2^2}{(1-\alpha)^4}+\frac{1}{(1-\alpha)^3} & \frac{2^3}{(1-\alpha)^4}-\frac{2^2}{(1-\alpha)^3} & \frac{2^2}{(1-\alpha)^3}-\frac{1}{(1-\alpha)^2} & \frac{2}{(1-\alpha)^2} & \frac{1}{(1-\alpha)} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}
$$

$(\Delta^2-\alpha\mathrm{I})^{-1}$ i yukarıdaki matrise eşittir. Genel hesap;

$$b_{kk}=\frac{1}{(1-\alpha)}$$

$$b_{k,k-1}=\frac{2}{(1-\alpha)^2}$$

$$b_{k,k-2}=\frac{2}{(1-\alpha)^3}-\frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

$$b_{k,k-3}=\frac{2^4}{(1-\alpha)^4}-\frac{2^2}{(1-\alpha)^3}$$

$$b_{k,k-3}=\frac{2^4}{(1-\alpha)^5}-\frac{2^3}{(1-\alpha)^4}-\frac{2^2}{(1-\alpha)^4}+\frac{1}{(1-\alpha)^3}$$

$\vdots$

bu şekilde devam eder. Öncelikle $\sum_{k=0}^{\infty}|b_{nk}|$ serisinin yakınsak olduğunu ispatlayalım :

$$S_k=\sum_{j=0}^{k}|b_{kj}|=|b_{k,0}|+|b_{k,1}|+|b_{k,2}|+|b_{k,3}|+\cdots+|b_{k,k}|=|b_{k,k}|+|b_{k,k-1}|+|b_{k,k-2}|+\cdots+|b_{k,0}|$$

$$S_k = \left|\frac{1}{(1-\alpha)}\right| + \left|\frac{2}{(1-\alpha)^2}\right| + \left|\frac{2^2}{(1-\alpha)^3} - \frac{1}{(1-\alpha)^2}\right| + \left|\frac{2^3}{(1-\alpha)^4} - \frac{2^2}{(1-\alpha)^3}\right| +$$

$$\left|\frac{2^4}{(1-\alpha)^4} - \frac{2^3}{(1-\alpha)^3} - \frac{2^2}{(1-\alpha)^4} + \frac{1}{(1-\alpha)^3}\right| + \cdots$$

Şimdi;

$$\lim_k S_k = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{2}{(1-\alpha)}\right| + \left|\frac{2}{(1-\alpha)}\right|^2 + \left|\frac{2^4}{(1-\alpha)^4} - \frac{2^5}{(1-\alpha)^5}\right| + \left|\frac{2^5}{(1-\alpha)^5} - \frac{2^4}{(1-\alpha)^4} - \frac{2^3}{(1-\alpha)^4} + \frac{2}{(1-\alpha)^3}\right| + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(|B_2| + |B_2|^2 + |B_2|^3 + \frac{1}{2}|B_3| + |B_2|^4 + |B_2|^3 + |B_2|^5 + |B_2|^4 + \frac{1}{2}|B_2|^4 + \frac{1}{4}|B_2| \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(|B_2| + \frac{3}{2}|B_2|^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 |B_2|^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 |B_2|^4 + \cdots\right)$$

$$< \left(|B_2| + \frac{3}{2}|B_2|^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 |B_2|^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 |B_2|^4 + \cdots\right)$$

$$< \left|\frac{1}{1-\alpha}\right|\left(1 + \left|\frac{3}{1-\alpha}\right| + \left|\frac{3}{1-\alpha}\right|^2 + \left|\frac{3}{1-\alpha}\right|^3 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{|1-\alpha| - 3} < \infty$$

bu taktirde; $\lim_k S_K < \infty$ pozitif reel sayıların bir serisidir ve yakınsaktır buda S_k nın sınırlılığını gerektirir.

İkinci olarak $\lim_{n\to\infty} |b_{nk}| = 0,$ bu her k$\in N_0$ için $|1-\alpha| > 3$ iken $(\Delta^2 - \alpha I)^{-1} \in B(c_0)$ dır.

Aşama 2: $\alpha \in \sigma(\Delta^2, C_0)$ olursa; $\alpha \neq 1$ ve $|1-\alpha| < 3$ İken $(\Delta^2 - \alpha I)$ alt üçgensel matris olduğundan tersi vardır.

fakat $\sup_k S_k$ sınırlı değildir. $|1-\alpha|<3$ iken $(\Delta^2-\alpha\mathrm{I})^{-1}\notin(c_0,c_0)$ dır.

$\alpha\neq 1$ ve $|1-\alpha|=3$ iken $\lim S_k=\infty$ olmasını gerektirir. $\sup_k S_k$ sınırlı değildir. $(\Delta^2-\alpha\mathrm{I})^{-1}\notin(c_0,c_0)$ dır ve son olarak $\alpha=1$ ise;

$$(\Delta^2-\alpha\mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

terslenemez ve bu ispatı tamamlar.

Teorem 2.23 $\sigma_p(\Delta^2,c_0)=\phi$ [15]

İspat: c_0 uzayında seçtiğimiz $x\neq\theta$ için yazılan $\Delta^2 x=\alpha x$ eşitliğini açtığımızda;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & x_0=\alpha x_0 \\ & -2x_0+x_1=\alpha x_1 \\ & x_0-2x_1+x_2=\alpha x_2 \\ & x_1-2x_2+x_3=\alpha x_3 \\ & \qquad\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemi elde ederiz. Buradan $\alpha\neq 1$ ise $x_0=0$ olur. Bu durumda $x_1=x_2=x_3=\cdots=0$ olur ki buda $x\neq\theta=(0,0,0,\ldots\ldots)$ ile çelişir. $\alpha=1$ ise yine yukarıdaki sistemden açıktır ki $x_0 = 0$ olur ve $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = 0$ olurki bu yine kabulümüzle çelişir. Yani $\Delta^2 x = \alpha x$ eşitliğini sağlayan $x \neq \theta$ dizisi mevcut değildir.

Teorem 2.24 $\sigma_p((\Delta^2)^*, \ell_1) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - 1| \leq 2\}$ [15]

İspat: $c_0^* \cong \ell_1$ uzayında seçtiğimiz $f \neq \theta = (0,0,0,\ldots\ldots)$için yazılan $\Delta^* f = \alpha f$ olsun.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_0 - 2f_1 + f_2 &= \alpha f_0 \\ f_1 - 2f_2 + f_3 &= \alpha f_1 \\ f_2 - 2f_3 + f_4 &= \alpha f_2 \\ &\cdots \\ f_k - 2f_{k+1} + f_{k+2} &= \alpha f_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$f_0 = \frac{2}{1-\alpha}\left(f_1 - \frac{f_2}{2}\right)$$

$$f_1 = \frac{2}{1-\alpha}\left(f_2 - \frac{f_3}{2}\right)$$
$$\vdots$$

buradan $\dfrac{2}{|1-\alpha|} > 1$ olduğunda ;

$$|f_k| = \frac{2}{|1-\alpha|}\left|f_{k+1} - \frac{1}{2}f_{k+2}\right| > \left|f_{k+1} - \frac{1}{2}f_{k+2}\right| \geq |f_{k+1}| - \left|\frac{1}{2}f_{k+2}\right|$$

elde edilir. Buradan açıktır ki her bir $k \in N_0$ için $f = (0,0,0,\ldots f_k, f_{k+1}, 0,\ldots)$ λ ya karşılık gelen öz vektördür. Benzer bir teknikle $|f_0| \geq |f_1| \geq |f_2| \geq \ldots \geq |f_k|$ olduğunu gösterebiliriz. Bu $\sup_k |f_k| < \infty$ olmasını gerektirir buda $|f_0| < \infty$ olduğunu gösterir. Aksine eğer $\sup_k |f_k| < \infty$ ise $|1-\alpha| \le 2$ olduğunu görmek kolaydır.

Teorem 2.25 $\sigma_r(\Delta^2, c_0) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \le 2\}$ [15]

İspat: $|1-\alpha| < 2$ için $\Delta^2 - \alpha I$ tersi vardır. Fakat teorem 2.22 den $(\Delta^2)^* - \alpha I$ birebir değildir. Dolayısıyla teorem 1.8 den $\overline{R(\Delta - \alpha I)} \neq c_0$ olduğunu biliyoruz. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 2.26 $\sigma_c(\Delta^2, c_0) = \{\alpha \in \mathbb{C} : 2 < |1-\alpha| \le 3\}$ [15]

İspat: $\sigma\ (\Delta^2, c_0) = \sigma_p(\Delta^2, c_0) \cup \sigma_r(\Delta^2, c_0) \cup \sigma_c(\Delta^2, c_0)$ olmalıdır. Buradan

$\sigma_c(\Delta^2, c_0) = \{\alpha \in\ : 2 < |1-\alpha| \le 3\}$ olduğu açıktır.

BÖLÜM 3

Genelleştirilmiş *B(r,s)* Fark operatörünün ve İkinci Dereceden *U(s,r,s)* Fark Operatörünün ℓ_p Dizi Uzayında İnce Spektrumu

3.1 Genelleştirilmiş *B(r,s)* Fark operatörünün ℓ_p Uzayı Üzerindeki İnce Spektrumu

Teorem 3.1 $B(r,s):\ell_p \to \ell_p$ sınırlı lineer operatör ise aşağıdaki eşitliği gerektirir.[15]

$$(|r|^p+|s|^p)^{\frac{1}{p}} \le \|B(r,s)\|_{\ell_p} \le |r|+|s|$$

İspat: ℓ_p de $e^{(0)}=(1,0,0...)$ alalım. Bu taktirde de $B(r.s)e^{(0)}=(r,s,0...)$ olur. Biz buradan;

$$\frac{\|B(r,s)e^{(0)}\|_{\ell_p}}{\|e^{(0)}\|_{\ell_p}}=(|r|^p+|s|^p)^{\frac{1}{p}}$$

yi elde ederiz.

$$\|B(r,s)\|_{\ell_p}=\sup\frac{\|B(r,s)e^{(0)}\|_{\ell_p}}{\|e^{(0)}\|_{\ell_p}}=(|r|^p+|s|^p)^{\frac{1}{p}}$$

olduğundan dolayı ;

$$(|r|^p+|s|^p)^{\frac{1}{p}} \le \|B(r,s)\| \tag{3.1}$$

şimdi, $x=(x_k)\in\ell_p$ burada Minkowski eşitliğini kullanalım ve $x_{-1}=0$ alalım.

$$\|B(r,s)x\|_{\ell_p} = (\sum_{k=0}^{\infty} |sx_{k-1} + rx_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sum (|sx_{k-1}|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum |rx_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |s| \sum (|x_{k-1}|^p)^{\frac{1}{p}} + |r| (\sum |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$= (|r| + |s|)(\|x\|_{\ell_p})$$

Buradan;

$$\|B(r,s)\|_{\ell_p} \leq |r| + |s| \qquad (3.2)$$

(3.1) ve (3.2) den

$$(|r|^p + |s|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|B(r,s)\|_{\ell_p} \leq |r| + |s|$$

sonucunu elde ederiz.

Teorem 3.2 $\sigma(B(r,s), \ell_p) = \{\alpha \in C : |\alpha - r| \leq s\}$ [15]

İspat: Spektrumun tanımından, *B(r,s)* operatörünün spektrumunun var olması için $(B(r,s) - \alpha \mathrm{I})^{-1}$ nin $B(\ell_p)$ uzayında mevcut olmaması gerekir. Varsayalım ki $\alpha \notin \sigma(B(r,s), \ell_p)$= $\{\alpha \in \mathrm{C} : |\alpha - r| \leq |s|\}$ olsun. Bu durumda $(B(r,s) - \alpha \mathrm{I})^{-1}$ nin $B(\ell_p)$ uzayında var olduğunu göstermeliyiz. $(B(r,s) - \alpha \mathrm{I})$ alt üçgensel matris olduğundan tersi vardır.

$$(B(r,s) - \alpha \mathrm{I}) \,.\, (B(r,s) - \alpha \mathrm{I})^{-1} = \mathrm{I}$$

Buradan;

$$(B(r,s)-\alpha I)^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{r-\alpha} & 0 & 0 & \cdots \\ \dfrac{-s}{(r-\alpha)^2} & \dfrac{1}{(r-\alpha)} & 0 & \cdots \\ \dfrac{s^2}{(r-\alpha)^3} & \dfrac{-s}{(r-\alpha)^2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$(B(r,s)-\alpha I)^{-1}=a_{nk}$ matrisi elde edilir.

.

$$a_{nk}=\begin{cases} 0; & k>n \\ \dfrac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{n-k+1}} & k\le n \end{cases}$$

şeklindedir. Şimdi $A\in B(\ell_p)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\|=\sup_n\sum_k|a_{nk}|<\infty$$

Olmasıdır. Bu teoremi kullanalım;

Şimdi;

$$\left\|(B(r,s)-\alpha I)^{-1}\right\|_{(\ell_1,\ell_1)}=\sup_n\sum|a_{nk}|$$

$$=\sup_n\sum\left|\frac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{n-k+1}}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{r-\alpha}\right|\sup_n\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{s}{r-\alpha}\right|^{n-k}$$

$$=\frac{1}{r-\alpha}(\left(\frac{s}{r-\alpha}\right)^n+\left(\frac{s}{r-\alpha}\right)^{n-1}+\left(\frac{s}{r-\alpha}\right)^{n-2}+\ldots\ldots\ldots1)$$

$$\left|\frac{1}{r-\alpha}\right|\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{s}{r-\alpha}\right|^{k}<\infty$$

olur. Çünkü $|\alpha-r|>s$ aldığımızdan $\left|\frac{s}{r-\alpha}\right|<1$ olur. Buradan $(B(r,s)-\alpha\mathrm{I})^{-1}\in(\ell_p,\ell_p)$ olur. Benzer şekilde;

$$\left\|(B(r,s)-\alpha\mathrm{I})^{-1}\right\|_{(\ell_\infty,\ell_\infty)}<\infty \qquad (2.10)$$

olur. Buda gösterir ki $(B(r,s)-\alpha\mathrm{I})^{-1}\in(\ell_\infty,\ell_\infty)\cap(\ell_1,\ell_1)$ dur. Teorem 1.5 den $(B(r,s)-\alpha\mathrm{I})^{-1}\in(\ell_p,\ell_p)$ dir. Benzer şekilde;

$\alpha\in\{\alpha\in C:|\alpha-r|\le s\}$ ve $\alpha\neq r$ ise o zaman 2.10 dan görülür ki

$$\left\|(B(r,s)-\alpha\mathrm{I})^{-1}\right\|_{(\ell_\infty,\ell_\infty)}=\infty$$

olur. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 3.3 $\sigma_p(B(r,s),\ell_p)=\theta$ [15]

İspat: ℓ_p uzayında $x\neq\theta=(0,0,0.\cdots)$ için yazılan B(r,s)x= α x eşitliğini açtığımızda;

$$\begin{aligned} rx_0 &= \alpha x_0\\ sx_0+rx_1 &= \alpha x_1\\ sx_1+rx_2 &= \alpha x_2\\ &\vdots\\ sx_k+rx_{k+1} &= \alpha x_{k+1}\end{aligned}$$

$\alpha=r$ için $x_0=x_1=x_2=\ldots=0$ olur. Bu bizim kabulümüzle $x\neq\theta=(0,0,0.\cdots)$ ile çelişir. $\alpha\neq r$ için $x_0=0$ olur, devam edersek $x_0=x_1=x_2=\ldots=0$ kabulümüzle yani $x\neq\theta$ ile çelişir. Yani B(r,s)x= α x eşitliğini sağlayan $x\neq\theta$ mevcut değildir.

Teorem 3.4 $\sigma_p(B(r,s)^*, \ell_p^{\,*}) = \{\alpha \in \mathrm{C} : |\alpha - \mathrm{r}| < s\}$ [15]

İspat: $p^{-1} + q^{-1} = 1$ iken $\ell_p^{\,*} \cong \ell_q$ $B(r,s)^* x = \alpha x$ eşitliğini çözdüğümüzde;

$$
\begin{aligned}
rx_0 + sx_1 &= \alpha x_0 \\
rx_1 + sx_2 &= \alpha x_1 \\
&\vdots \\
rx_k + sx_{k+1} &= \alpha x_k
\end{aligned}
$$

$x_n = \left(\dfrac{\alpha - r}{s}\right)^n x_0$ elde ederiz. Burada bizim amacımız $x \neq \theta$ iken yazılan $B(r,s)^* x = \alpha x$ eşitliğini sağlayan α değerlerini bulmaktır. Eğer ilk terimi sıfır ise $x = \theta$ olur ve kabulümüzle çelişir. İlk terimi sıfırdan farklı ise $x \neq \theta$ iken $B(r,s)^* x = \alpha x$ eşitliğini sağlayan α değerleri vardır. Bu yüzden ℓ_p^* dual uzayında nokta spektrumu mevcuttur ve $x = (x_n) \in \ell_q$ olması gerekir. $x_n = \left(\dfrac{\alpha - r}{s}\right)^n x_0 \in \ell_q$ olması için gerek ve yeter şart $\left|\dfrac{\alpha - r}{s}\right| < 1$ olmasıdır. Dolayısıyla $|\alpha - \mathrm{r}| < s$ dir.

Teorem 3.5 $\sigma_r(B(r,s), \ell_p) = \{\alpha \in \mathrm{C} : |\alpha - \mathrm{r}| < s\}$ [15]

İspat: Rezidüel spektrumun var olması için $(B(r,s) - \alpha\mathrm{I})$ nın tersinin mevcut olduğunu ve $\overline{R(B(r,s) \;\; - \alpha\mathrm{I})} \neq \ell_p$ olduğunu göstermeliyiz. Öncelikle $B(r,s) - \alpha\mathrm{I}$ alt üçgensel matris olduğundan tersi vardır. Rezidüel spektrumun ilk şartını sağladı. Teorem 1.8 i kullanarak $B(r,s) - \alpha\mathrm{I}$ nın ℓ_p de yoğun bir görüntüye sahip olup olmadığına bakmalıyız. Teorem 2.14 ten dolayı ($B(r,s)^* - \alpha\mathrm{I}$) bire-bir değildir. Dolayısıyla $\overline{R(B(r,s) \;\; - \alpha\mathrm{I})} \neq \ell_p$ dir. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 3.6 $\sigma_c(B(r,s)\ ,\ell_p\ ) = \{\alpha \in \mathrm{C} : |\alpha - \mathrm{r}| = s\}$ [15]

İspat: Yukarıdaki teoremlerden nokta spektrumu, rezidüel spektrumunu elde ettik.

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T)$$

olduğundan dolayı $\sigma_c(B(r,s)\ ,\ell_p\ ) = \{\alpha \in \mathrm{C} : |\alpha - \mathrm{r}| = s\}$ elde edilir.

3.2 ℓ_p Dizi Uzayı Üzerinde İkinci Dereceden $U(s,r,s)$ Fark Operatörünün İnce Spektrumu

Bu bölümde ikinci derecedenn $U(s,r,s)$ fark operatörünün ℓ_p dizi uzayı üzerindeki ince spektrumunu inceleyeceğiz. $U(s,r,s)$ nin matris temsili şu şekildedir.

$$U(s,r,s) = \begin{bmatrix} r & s & 0 & 0 & \dots \\ s & r & s & 0 & \cdots \\ 0 & s & r & s & \cdots \\ 0 & 0 & s & r & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Teorem 3 .7 $U(s,r,s) : \ell_p \to \ell_p$ sınırlı lineer operatördür ve aşağıdaki eşitsizliği sağlar.[10]

$$(|r|^p + 2|s|^p)^{\frac{1}{p}} \le \|U(s,r,s)\|_{\ell_p} \le 2|s| + |r|.$$

İspat: ℓ_p de $e^{(1)} = (0,1,0,...)$ alalım. Bu taktirde $U(s,r,s)e^{(1)} = (s,r,s,0...)$ olur. Biz buradan;

$$\frac{\|U(s,r,s)e^{(1)}\|_{\ell_p}}{\|e^{(1)}\|_{\ell_p}} = (|r|^p + 2|s|^p)^{\frac{1}{p}}$$

yi elde ederiz.

$$\left\|U(s,r,s)e^{(1)}\right\|_{\ell_p} = \sup\frac{\left\|U(s,r,s)e^{(1)}\right\|_{\ell_p}}{\left\|e^{(1)}\right\|_{\ell_p}} = (|r|^p + 2|s|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Buradan açıkça görülür ki;

$$(|r|^p + 2|s|^p)^{\frac{1}{p}} \le \left\|U(s,r,s)\right\|_{\ell_p} \qquad (3.7)$$

olur. Şimdi, $x = (x_k) \in \ell_p$ ve $\|x\| = 1$ alalım. Burada Minkowski eşitsizliğini kullanalım ve $x_{-1} = 0$ alalım.

$$\left\|U(s,r,s)x\right\|_{\ell_p} = (\sum_{k=0}^{\infty}\left|sx_{k-1} + rx_k + sx_{k+1}\right|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le (\sum_{k=0}^{\infty}\left|sx_{k-1}\right|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum\left|rx_k\right|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=0}^{\infty}\left|sx_{k+1}\right|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$= (|r| + 2|s|)(\|x\|_{\ell_p})$$

Buradan;

$$\left\|U(s,r,s)\right\|_{\ell_p} \le 2|s| + |r| \qquad (3.8)$$

(3.7) ve (3.8) den

$$(|r|^p + 2|s|^p)^{\frac{1}{p}} \le \left\|U(s,r,s)\right\|_{\ell_p} \le 2|s| + |r|.$$

sonucunu elde ederiz.

Teorem 3.8 $\sigma(U(s,r,s),\ell_p) =$ [r-s, r+s] [10]

İspat: Öncelikle $\lambda \notin \{\lambda \in \mathrm{C}: \lambda = r + 2s.\cos\theta, \theta \in [0, 2\Pi]\}$ için $(U(s,r,s) - \alpha \mathrm{I})^{-1}$nin B(ℓ_p) de var olduğunu göstermeliyiz. Daha sonra;

$$\lambda \in \{\lambda \in \mathrm{C}: \lambda = r + 2s.\cos\theta, \theta \in [0, 2\Pi]\}$$

İçin $(U(s,r,s)-\alpha\mathrm{I})$ nın terslenemez olduğunu ispatlayacağız.

$\lambda \notin \sigma(U(s,r,s),\ell_p)$ olsun. $|a_2|>1>|a_1|$ iken;

$$p(x)=sx^2+(r-\lambda)x+s$$

polinomunun kökleri $|a_1|$ ve $|a_2|$ olsun.

$$\begin{aligned}
&(r-\lambda)x_1+sx_2=y_1\\
&sx_1+(r-\lambda)x_2+sx_3=y_2\\
&sx_2+(r-\lambda)x_3+sx_4=y_3\\
&\ldots
\end{aligned}\tag{3.8}$$

$x=(x_k)$ için $y=(y_k)$ terimleri $(U(s,r,s)-\alpha\mathrm{I})^{-1}$nin matrisini verir.

Bu homojen olmayan lineer rekürans bağıntısıdır. $x,y\in\ell_p$ gerçeğini kullanarak (3.8) için genel fonksiyonlarla bir çözüme ulaşabiliriz.

Bu çözüm;

$$x_k=\frac{1}{s(a_1^{\,2}-1)}\sum_{n=0}^{\infty}t_{kn}y_n \tag{3.9}$$

ile verilebilir. Burada;

Eğer $k\geq n$ ise , $t_{kn}=a^{k+1-n}-a^{k+3-n}$ dir. Eğer $k<n$ ise; $t_{kn}=a^{n+1-k}-a^{n+3-k}$ dır.

Böylece;

$$\left\|(U(s,r,s)-\lambda\mathrm{I})^{-1}\right\|_{(\ell_1,\ell_1)}=\sup_k\sum_{n=k}^{\infty}|x_k|\leq\sup_k(|a_1|+|a_1|^{2k+3})\sum_{n=0}^{k}|a_1|^n<\infty$$

yani ;

$(U(s,r,s)-\alpha\mathrm{I})^{-1}\in(\ell_1,\ell_1)$ dir. Benzer şekilde;

$$\left\|(U(s,r,s)-\lambda\mathrm{I})^{-1}\right\|_{(\ell_1,\ell_1)}<\infty$$

teorem 1.5 den $(U(s,r,s)-\alpha\mathrm{I})^{-1}\in(\ell_p,\ell_p)$ dir. Buda gösterir ki;

$\sigma(U(s,r,s),\ell_p)\subseteq\{\lambda\in C:\lambda=r+2s.\cos\theta,\ \theta\in[0,2\Pi]\}$

dir.

$\lambda\in\sigma(U(s,r,s),\ell_p)$ ve $\lambda\neq r$ olsun. Bu taktirde $(U(s,r,s)-\alpha\mathrm{I})^{-1}$ vardır fakat $y=(1,0,0,...)\in\ell_p$ ve $x=(x_k)$, ℓ_p de değildir. Böylece, $|a_2|>1>|a_1|$ olması gerekmez. Yani, $(U(s,r,s)-\alpha\mathrm{I})^{-1}$ i B(ℓ_p) de mevcut değildir. Eğer $\lambda=r$ ise $U(s,r,s)-\lambda\mathrm{I}=U(s,0,s)$ dir. $U(s,0,s)x=\theta$ olduğundan $x\neq\theta=\{0,0,0,\ldots)$olmasını gerektirir. $U(s,r,s):\ell_p\to\ell_p$ terslenemez. Bu da gösterir ki; $\{\lambda\in C:\lambda=r+2s.\cos\theta,\ \theta\in\ [0,2\Pi]\}\subseteq\sigma(U(s,r,s),\ell_p)$

dir. Diğer taraftan $a_1.a_2=1$için bu kökler aşağıdaki formda yazılabilir.

$$a_1=\frac{1}{a_2}=e^{i\theta}$$

Bu taktirde; $\dfrac{(\lambda-r)}{s}=a_1+a_2=e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2.\cos\theta$ dır. Böylece $\lambda=r+2s.\cos\theta$ olur.

Teorem 3.9 $\sigma(U(s,r,s),l_p)=\phi$ [15]

İspat: $U(s,r,s)$ operatörünün öz değeri λ olsun. $x=\{x_1,x_2,x_3,...)\in\ell_p$ bu öz değere karşılık gelen bir öz vektör olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} rx_1+sx_2&=\lambda x_1\\ sx_1+rx_2+sx_3&=\lambda x_2\\ sx_2+rx_3+sx_4&=\lambda x_3\\ \cdots \end{aligned}.$$

Eğer $x_1=0$ ise bu taktirde her $k\in N$ için $x_k=0$ olur. Buradan eşitliğin çözümü lineer homojen rekürans bağıntısına döner.

$k \geq 1$ için $x_{k+2} + qx_{k+1} + x_k = 0$ olur.

Burada $q = \dfrac{r-\lambda}{s}$ dir. Reküranslar bağıntısının karekteristik polinomu;

$x^2 + qx + 1 = 0$

Burada iki durum vardır.

Durum 1: |q|=2

bu durumda karekteristik polinom bir köke sahiptir. Eğer q=-2 ise a=1, eğer q=2 ise a =-1 dir. Böylece reküranslar bağıntısının çözümü aşağıdaki formdadır:

Eğer q=-2 ise $x_n = nx_1$ ve eğer q=2 ise $x_n = (-1)^{n+1} nx_1$ dir.

Bunun anlamıda $(x_n) \notin \ell_p$ dir. Bu yüzden bu durumda öz değer yoktur.

Durum 2: $|q| \neq 2$

bu durumda $a_1.a_2 = 1$ iken $|a_1| \neq 1$ ve $|a_2| \neq 1$ olmak üzere iki farklı köke sahiptir. $|a_2| > 1 > |a_1|$ alalım. Reküranslar bağıntısının çözümü :

$$x_n = A(a_2)^n + B(a_1)^n$$

formundadır. $qx_1 + x_2 = 0$ gerçeğini kullanarak;

$$A = \frac{1}{a_2 - a_1} x_1, \ B = \frac{1}{a_1 - a_2} x_1$$

elde ederiz. Böylece;

$$x_n = \frac{(a_2)^n - (a_1)^n}{a_2 - a_1} x_1$$

elde ederiz. Bu durumda yine $(x_n) \notin \ell_p$ dir. Bu yüzden öz değer yoktur.

Teorem 3.10 $\sigma_p(U^*(s,r,s),l^*{}_p)=\phi$ [15]

İspat: $U^*(s,r,s)=U^t(s,r,s)=U(s,r,s)$ olduğundan dolayı yukarıdaki teoremden ispat kolayca elde edilir.

Sonuç: $\sigma_r(U\ \ (s,r,s),l_p)=\phi$ [15]

Teorem 3.11 $\sigma_c(U\ \ (s,r,s),l_p)=$[r-s, r+s] [15]

İspat: $\sigma(U\ \ (s,r,s),\ell_p)=\sigma_p(U\ \ (s,r,s),\ell_p)\cup\sigma_r(U\ \ (s,r,s),\ell_p)\cup\sigma_c(U\ \ (s,r,s),\ell_p)$

olduğundan dolayı $\sigma_c(U\ \ (s,r,s),\ell_p)=$[r-s, r+s] yi elde ederiz.

BÖLÜM 4

4.1 Δ Fark Operatörünün ℓ_1 Dizi Uzayı Üzerinde İnce Spektrumu

Teorem 4.1 $\sigma(\Delta,\ell_1)=\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-1|\le 1\}$ [11]

İspat: Spektrumun tanımından, Δ operatörünün spektrumunun var olması için $(\Delta-\alpha I)^{-1}$ nin $B(\ell_1)$ uzayında mevcut olmaması gerekir. Varsayalım ki $\alpha\notin\sigma(\Delta,\ell_1)=\{\alpha\in\mathrm{C} \;:|\alpha-1|\le 1\}$ olsun. Bu durumda $(\Delta-\alpha I)^{-1}$nin $B(\ell_1)$ de olduğunu göstermek yeterlidir.

$(\Delta-\alpha I)$ matrisi alt üçgensel matris olduğundan $(\Delta-\alpha I)$ nın tersi mevcuttur.

$(\Delta-\alpha I).(\Delta-\alpha I)^{-1}=\mathrm{I}$ dir.

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1-\alpha & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1-\alpha & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Buradan;

$$(\Delta-\alpha I)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{1-\alpha} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{(1-\alpha)^2} & \frac{1}{(1-\alpha)} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{(1-\alpha)^3} & \frac{1}{(1-\alpha)^2} & \frac{1}{(1-\alpha)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$$(\Delta-\alpha I)^{-1}=a_{nk}$$

a_{nk} matrisi $k>n$ için 0 dır. $k \le n$ ise ;

$$a_{nk} = \frac{(1-\alpha)^k}{(1-\alpha)^{n+1}}$$

dır.

$$\left\|(\Delta-\alpha \mathrm{I})^{-1}\right\|_{(\ell_1,\ell_1)} = \sup_{n\in N} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left|(1-\alpha)\right|^k}{\left|(1-\alpha)\right|^{n+1}}$$

$$= \sup_{n\in N} \left(\frac{1+\left|1-\alpha\right| + \left|1-\alpha\right|^2 + \cdots + \left|1-\alpha\right|^n}{(1-\alpha)^{n+1}} \right)$$

$$= \sup_{n\in N} \left(\left|\frac{1}{1-\alpha}\right|^{n+1} + \left|\frac{1}{1-\alpha}\right|^{n} + \cdots + \left|\frac{1}{1-\alpha}\right| \right)$$

$$= \sup_{n\in N} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\left|1-\alpha\right|^n} < \infty \qquad (4.1)$$

olur.

$\left|\frac{1}{1-\alpha}\right| < 1$ olduğundan $\sup_{n\in N} \sum_{k=0}^{n} a_{nk} < \infty$ olur dolayısıyla $(\Delta-\alpha I)^{-1} \in B(\ell_1)$ dir.

Eğer $\alpha \in \{\alpha \in C : \left|\alpha - 1\right| \le 1\}$ ise o zaman 2.3' den görülür ki ;

$$\left\|(\Delta-\alpha \mathrm{I})^{-1}\right\|_{(\ell_1,\ell_1)} = \infty$$

dur. Bu ifadenin anlamı;

$$(\Delta-\alpha I)^{-1} \notin B(\ell_1)$$

olmasıdır. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 4.2 $\sigma_p(\Delta,\ell_1)=\theta$ [11]

İspat: c_0 uzayında seçtiğimiz $x\neq\theta=(0,0,0,......)$ için yazılan $\Delta x=\alpha x$ eşitliğini açtığımızda;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha x_0 \\ x_1 - x_0 &= \alpha x_1 \\ x_2 - x_1 &= \alpha x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan $\alpha\neq 1$ise $x_0=0$ olur. Bu durumda $x_1=x_2=x_3=\cdots=0$ olur buda kabulümüz olan $x\neq\theta=(0,0,0,......)$ile çelişir. Eğer $\alpha=1$ ise yine $x_1=x_2=x_3=\cdots=0$ olur. Yani $\Delta x=\alpha x$ eşitliğini sağlayan $x\neq\theta$ dizisi mevcut değildir.

Eğer $T:\ell_1\to\ell_1$ matris temsili A olan bir operatör ise T operatörünün adjoint operatörü $T^*:c_0^*\to c_0^*$ın matris temsili A^t(A nın transpozu) ile tanımlı A^t matris temsiline sahiptir.

Teorem 4.3 $\sigma_p(\Delta^*,\ell_1^*)=\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-1|\leq 1\}$ [11]

İspat: $\ell_1^*\cong\ell_\infty$ uzayında seçtiğimiz $x\neq\theta=(0,0,0,......)$için yazılan $\Delta^* x=\alpha x$ eşitliğini çözdüğümüzde;

$$\begin{aligned} f_0 - f_1 &= \alpha f_0 \\ f_1 - f_2 &= \alpha f_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

buradan, $f_k = (1-\alpha)^k f_0$ elde edilir. $(x_n) \in \ell_1^*$ olması için gerek ve yeter şart $|\alpha - 1| < 1$ olmasıdır.

Teorem 4.4 $\sigma_r(\Delta, \ell_1) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - 1| \leq 1\}$ [11]

İspat: $|\alpha - 1| < 1$ için $(\Delta - \alpha I)$ operatörü birebir olduğundan tersi vardır. Teorem 4.3 ten $\Delta^* - \alpha I$ bire-bir değildir, dolayısıyla Teorem 1.8 den $\overline{R(\Delta - \alpha I)} \neq \ell_1$ dir. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 4.5 $\sigma_c(\Delta, \ell_1) = \phi$ [11]

İspat: $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T)$ olduğundan dolayı $\sigma_c(\Delta, \ell_1) = \phi$ elde edilir.

SONUÇ

Bu çalışmada, litaretürde var olan bazı operatörlerin klasik dizi uzayları üzerindeki spektral davranışları incelenmiştir.

Matematik alanı dışında da büyük önem ve uygulamalara sahip olan spektral davranış, bu tezde özellikle matris operatörlerinin ince(fine) spektrumu için incelenmiştir.

Yapılan bu çalışmayla literatürdeki birçok makale ve çalışma taraması yapılmış ve konuyla ilgili daha sonra yapılacak olan lisansüstü çalışmalara alt yapı olacak şekilde literatür ve bilgi edinilmiş ve sonunda bu tez hazırlanmıştır.

KAYNAKÇA

[1] ALTAY B. Ve BAŞAR F.(2004) on the fine spektrum of the difference operatör Δ on c_0 and c Information Sciences 168 217-224.

[2] ALTAY B. Ve BAŞAR F.(2005) on the fine spektrum of the generalized difference operatör B(r,s) over the sequences space c_0 and c International Journal Of Math and Math Sciences 18 3005-3013

[3] BALCI M. (1995) Analiz Ankara Yayınları

[4] BAYRAKTAR, M.(1998) Fonksiyonel Analiz, Atatürk üniversitesi yayınları

[[5]BAYRAKTAR, M.(2006) Fonksiyonel Analiz

[6] BİLGİÇ H. ve FURKAN H. (2006) on the fine spektrum of the generalized difference operatör B(r,s) over the sequences space ℓ_p and bv_p Nonlinear Analysis 68 499-506

[7] CARTLİDGE, P.J. (1978), “Weighted mean matrices as operators on ℓ_p”, Ph. D. Dissertation, Indiana University.

[8] DÜNDAR, E. (2006) . Bazı Limitleme Metodlarının Muhtelif Dizi uzayları Üzerindeki Spektrumu. Yüksek Lisans Tezi.

[9] GOLDBERG, S (1966) Unbounded Linear Operators, Mc Graw-HillBook Comp.

[10] KARAKAYA V. Ve MANAFOV M. Ve ŞİMŞEK N. (2012) on the fine spektrum of the second difference operatör over the sequences space ℓ_p and bv_p Mathematical and Computer Modelling 55 426-431

[11] KAYADUMAN K. Ve FURKAN H. (2006) The fine spectra of the difference operatör on the sequences spaces ℓ_1 ve bv International Mathematical Forum 24 1153-1160.

[12] KREYSZİG, E. (1978) Introductory Functional Analysis with Aplications John Wiley and Sons Inc. Newyork-Chichester-Brisbane-Toronto

[13] MADDOX I.J (1970).Elements of Functional Analysis, Cambridge University

[14] SCHAUM'S OUT LİNES (1989) Matris İşlemleri McGraw-HillCompanies, Inc.

[15] S.DUTTA VE P.BALİARSİNGH (2013) on the fine spektrum of second order generalized difference operatör Δ^2 over the sequences space c_0 Bol.Soc.Paran.Mat 31 235-244

[16] SOYKAN Y. (2008) Fonksiyonel Analiz Nobel yayınları

[17] TAYLOR,A.E.,(1958). Introduction to Funtional Analysis , Wiley, New York.

[18] THOMAS .George .B(2010) Massachussets Institute Of Tecnology.