T.C.

İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

TOPOLOJİK UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MELEK KUTLU

1160Y55102

İSTANBUL, 2013

T.C.

İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

TOPOLOJİK UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MELEK KUTLU

1160Y55102

Danışman: Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ

İSTANBUL, 2013

T.C.

İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ONAY SAYFASI

Yüksek lisans öğrencisi Melek KUTLU' nun "Topolojik Uzaylarda İstatistiksel Yakınsaklık" konulu tez çalışması jürimiz tarafından……………………Yüksek Lisans tezi olarak (oybirliği / oyçokluğu) ile başarılı bulunmuştur.

	Adı-Soyadı	İmza
Tez Danışmanı	**: Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ**	**………..………**
Jüri Üyesi	**: Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI**	**………..………**
Jüri Üyesi	**: Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK**	**………..………**

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy yakınsak dizilerin kavramları verildi. Ayrıca lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı ve istatistiksel yakınsaklıkla arasındaki içerme teoremleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde topolojik gruplarda istatistiksel yakınsaklık ve lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları verildi. Son bölümde topolojik uzaylarda ve yerel katı Riesz uzaylarında istatistiksel yakınsaklık verildi. Ayrıca yerel katı Riesz uzaylarda lacunary istatistiksel yakınsaklık incelendi.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, Lacunary istatistiksel yakınsaklık, Topolojik grup, Topolojik uzay, Riesz uzayı, Yerel katı Riesz uzayı

2013, 60 sayfa

ABSTRACT

The thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, the concepts of denstiy, statistically convergent sequence and statistically Cauchy sequence are given and also the concepts of lacunary statistically convergent sequence and some inclusion theorems between lacunary statistical convergence and statistical convergence are concerned . In the third chapter, statistical and lacunary statistical convergence in topological groups are given . In the last chapter, statistical convergence in topology and on locally solid Riesz spaces are given. Also lacunary statistical convergence in locally solid Riesz spaces is concerned.

Key Words: Statistical convergence, Lacunary statistical convergence, Topological groups, Topological space, , Riesz space, Locally solid Riesz space

2013, 60 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek ve çalışmalarım süresince yardımlarını ve zamanını esirgemeyen hocam Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ' a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarım boyunca manevi yardımlarından dolayı arkadaşlarıma ve aileme şükranlarımı sunarım.

MELEK KUTLU

İSTANBUL, 2013

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
A'	A kümesinin tümleyeni
Γ_x	x dizisinin istatistiksel yığılma noktalar kümesi
L_x	x dizisinin alışılmış limit noktalar kümesi
Λ_x	x dizisinin istatistiksel limit noktalar kümesi
A^o	A nın içi
$\overline{A}$	A nın kapanış
$\|A\|$	A kümesinin eleman sayısı
$\delta(A)$	A kümesinin doğal yoğunluğu
$\underline{\delta}(A)$	A nın alt yoğunluğu
$\overline{\delta}(A)$	A nın üst yoğunluğu
$x \vee y$	x ve y nin supremumu
$x \wedge y$	x ve y nin infimumu
x^+	x ve 0 ın supremumu
x^-	(-x) ve 0 ın supremumu

İÇİNDEKİLER

Sayfa No.

BÖLÜM 4

Giriş

Klasik analizdeki adi yakınsaklık kavramından sonra birçok yakınsaklık kavramları ortaya çıkmıştır. Yeni yakınsaklık kavramlarından biri olan istatistiksel yakınsaklık ilk olarak 1949 yılında Steinhaus tarafından Polonya'da yapılan bir konferansta tanıtılmıştır. Daha sonra Fast (1951) tarafından geliştirilmiştir. Fridy (1985) istatistiksel yakınsak dizi ve istatistiksel Cauchy dizisi kavramlarının denkliğini gösterip toplanabilme metodunda istatistiksel yakınsaklığı incelemiştir. Fridy (1993) istatistiksel limit noktasının ve istatistiksel yığılma noktasının tanım ve özeliklerini vermiştir. Lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı Fridy ve Orhan (1993) tarafından incelenmiştir. Topolojik gruplarda lacunary istatistiksel yakınsak H. Çakallı (1995) üzerine çalışma yapmıştır. Daha sonra H. Çakallı (1996) topolojik gruplarda istatistiksel yakınsaklığı incelemiştir. Giuseppe Di Maio ve Ljubisa D.R.Kocinac (2008) topolojik uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramı üzerine çalışma yapmıştır. Topolojik vektör uzayı olan yerel katı Riesz uzaylarında istatistiksel yakınsaklık H. Albayrak ve Serpil Pehlivan (2012) tarafından, yerel katı Riesz uzaylarında lacunary istatistiksel yakınsaklık ise SA. Mohiuddine ve M.Alghamdi (2012) tarafından incelendi.

Bölüm 1

Genel Bilgiler

Bu bölümde konuyla ilgili daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1. [4]***(Dizi)***

Tanım kümesi $\mathbb{N}$ *doğal sayılar kümesi olan fonksiyona* ***dizi*** *denir.Diziler değer kümelerine göre adlandırılırlar. Eğer dizinin değer kümesi* $\mathbb{R}$ *reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi ,* $\mathbb{Q}$ *rasyonel sayılar kümesi olan diziye rasyonel terimli dizi denir ve* $x = (x_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *şeklinde tanımlanır.*

Tanım 1.1.2. [19]***(Lacunary Dizisi)*** $\theta = \{k_r\}$, *pozitif tamsayıların artan bir dizisi olsun.* $k_0 = 0$ *olmak üzere* $r \to \infty$ *için* $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ *ise* $\theta = \{k_r\}$ *dizisine lacunary dizisi denir.*

Burada $\theta = \{k_r\}$ *lacunary dizisi ile belirlenen aralıklar* $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ *ile ve* $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ *ile gösterlecektir.*

Tanım 1.1.3. [4]***(Sınırlı Dizi)*** (x_k) *dizisi verilmiş olsun . Eğer* $\forall k \in \mathbb{N}$ *için ,*

$$|x_k| \leq K$$

olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa (x_k) dizisine sınırlı dizi denir.

Tanım 1.1.4. [4]***(Yakınsak Dizi)***

*(x_k) bir reel sayı dizisi ve $x \in \mathbb{R}$ olsun.$\forall \epsilon > 0$ için ,$k > k_0$ olduğunda $|x_k - x| < \epsilon$ kalacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa (x_k) dizisi x e **yakınsaktır** denir ve*

$$\lim x_k = x \text{ veya } (x_k) \to x$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.5. [4]***(Cauchy Dizisi)***

*(x_k) bir reel sayı dizisi olsun .(x_k) bir **Cauchy dizisidir** $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ için bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $t, k \geq k_0$ için*

$$|x_t - x_k| < \epsilon.$$

Tanım 1.1.6. [5]***(Açık Ve Kapalı Küme)***

X bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun .Her $x \in A$ için $D(x; r) \subseteq A$ olacak şekilde bir r pozitif sayısı varsa A, X de açıktır denir.Tümleyeni açık olan kümeye kapalı küme denir.

Tanım 1.1.7. [5]***(Lineer Uzay)***

X boş olmayan bir küme ve F , reel yada kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X e F üzerinde lineer uzay (veya vektör uzayı) denir.

A) *X ,+ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,*

G1)$\forall x, y \in X$ *için* $x + y \in X$ *dir.*(*kapalılık özelliği*)

G2)$\forall x, y, z \in X$ *için* $x + (y + z) = (x + y) + z$ *dir.*(*birleşme özelliği*)

G3)$\forall x \in X$ *için* $x + 0 = 0 + x = x$ *olacak şekilde* $0 \in X$ *vardır.*(*Özdeş elemanın varlığı*)

G4)$\forall x \in X$ *için* $x + (-x) = (-x) + x = 0$ *olacak şekilde* $-x \in X$ *vardır.*(*ters elemanın varlığı*)

G5)$\forall x, y \in X$ *için* $x + y = y + x$ *dir.*(*değişme özelliği*)

B) *$x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:*

L1)$\alpha x \in L$ *dir.*

L2)$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ *dir*

L3)$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x dir$

L4)$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) dir$

L5)$1.x = x$ *dir.(Burada 1,F nin birim elemanıdır)*

Tanım 1.1.8. [5]***(Topolojik Uzay)***

X boş olmayan bir küme ve τ, X in altkümelerinin bir ailesi olsun.

(i) $X \in \tau$ *ve* $\emptyset \in \tau$,

(ii) τ *ya ait keyfi sayıdaki kümenin birleşimi* τ *ya aittir.*

(iii)τ *ya ait iki kümenin arakesiti* τ *ya aittir.*

şartları sağlanıyorsa τ ya , X için bir ***topoloji*** *ve (X, τ) çiftine de* ***topolojik uzay*** *denir.*

Tanım 1.1.9. [20]***(Komşuluklar)***

Bir (X, τ) uzayında bir $x \in X$ öğesi ile $V \subset X$ alt kümesini göz önüne alalım. Eğer

$$x \in T \subset V$$

biçiminde bir T açığı varsa V kümesine x noktasının τ ***topolojisine göre bir komşuluğu*** *ya da bir τ-**komşuluğu** denir.*

Bir (X, τ) uzayında bir x noktasının tüm komşuluklar ailesi $\mathcal{B}(x)$ ile gösterilecektir.

Önerme 1.1.1. [20]

Bir (X, τ) uzayındaki bir x noktasının $\mathcal{B}(x)$ komşuluklar ailesinin aşağıdaki özellikleri vardır.

(K_1) $\mathcal{B}(x)$ ailesi boş değildir ve her $V \in \mathcal{B}(x)$ için $x \in V$ olur.

(K_2) Her $V_1 \in \mathcal{B}(x)$ ve her $V_2 \in \mathcal{B}(x)$ için $V_1 \bigcap V_2 \in \mathcal{B}(x)$ olur.

(K_3) Her $V \in \mathcal{B}(x)$ ve her $V \subset U$ için $U \in \mathcal{B}(x)$ olur.

(K_4) Eğer $V \in \mathcal{B}(x)$ ise her $y \in W$ için $V \in \mathcal{B}(y)$ olacak biçimde bir $W \in \mathcal{B}(x)$ öğesi vardır.

Tanım 1.1.10. [20]***(Komşuluk Tabanı)***

Bir (X, τ) uzayı ile bunun keyfi bir x noktası verilsin . Bu noktanın $\mathcal{B}(x)$ komşuluklar ailesinin bir $\sigma(x)$ alt ailesini göz önüne alalım . Eğer $\forall V \in \mathcal{B}(x)$ için $U \subset V$ olacak *biçimde bir $U \in \sigma(x)$ var ise $\sigma(x)$ ailesine x noktasının bir $\tau-$* ***komşuluk tabanı*** *denir.*

Tanım 1.1.11. [20]***(Birinci Sayılabilir Uzay)***

Bir (X, τ) uzayında alınan her $x \in X$ noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı varsa (X, τ) uzayına ***birinci sayılabilir topolojik uzay*** *denir.*

Önerme 1.1.2. [20]

Birinci sayılabilir bir (X, τ) uzayındaki her x noktasının sayılabilir ve iç içe bir komşuluklar tabanı vardır.

.

Tanım 1.1.12. [20]***(Hausdorff Uzay)***

Bir (X, τ) uzayının farklı her x ve y noktalarının ayrık birer komşuluğu varsa bu uzaya T_2 ***uzayı*** *yada* ***Hausdorff uzayı*** *denir.*

Önerme 1.1.3. [20]

Bir Hausdorff uzayında yakınsak her dizinin limiti tektir.

Tanım 1.1.13. [1]***(Topolojik Vektör Uzayı)***

τ, bir X reel vektör uzayı üzerinde bir topoloji olsun.

+:$X \times X \to X; (x, y) \to x + y$

**:*$\mathbb{R} \times X \to X; (\lambda, x) \to \lambda x$

tanımlanan fonksiyonlar τ topolojisine göre sürekli ise τ ya lineer topoloji , (X, τ) ikilisine de topolojik vektör uzayı denir.

Önerme 1.1.4. [1] *Bir X vektör uzayı üzerinde tanımlı her lineer τ topolojisinin, sıfırın komşuluklarında aşağıdaki özelikleri sağlayan bir $\mathcal{N}$ tabanı vardır:*

a)$\forall V \in \mathcal{N}$ *dengeli bir kümedir yani* $\forall x \in V$ *ve* $|\lambda| \leq 1, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ *için* $\lambda x \in V$ *dir.*

b)$\forall V \in \mathcal{N}$ *soğurğan bir kümedir yani* $\forall x \in X$ *için* $\lambda x \in V$ *olacak şekilde bir* $\lambda > 0$ *vardır*

c)Her bir $V \in \mathcal{N}$ *için* $W + W \subseteq V$ *olacak şekilde birçok* $W \in \mathcal{N}$ *vardır.*

Tanım 1.1.14. [1]

X reel vektör uzayı ve $\leq$, bu uzayda kısmı sıralama bağıntısı olsun. Aşağıdaki özelikleri sağlayan X uzayına ***sıralı vektör uzayı*** *denir.*

i) $y \leq x$ *iken her bir* $z \in X$ *için* $y + z \leq x + z$

ii)$y \leq x$ *iken her bir* $\lambda \geq 0 \in \mathbb{R}$ *için* $\lambda y \leq \lambda x$

Ek olarak X bu sıralamaya göre lattice ise X uzayına ***Riesz uzayı*** *denir.*

Klasik lattice notasyonundan $\{x, y\}$ *nin supreumu* $x \vee y = sup\{x, y\}$ *olarak gösterilir. Benzer şekilde* $\{x, y\}$ *nin infimumu* $x \wedge y = inf\{x, y\}$ *ile gösterilir.*[2]

X *bir Riesz uzayı ve* x *,* X *nin bir elemanı ve* θ*,* X *nin sıfır elemanı olsun.*x *in pozitif kısmı* $x^+ = x \vee \theta$ *,* x *in negatif kısmı* $x^- = (-x) \vee \theta$ *ve* x *in modülü* $|x| = x \vee (-x)$ *olarak gösterilir.*[1]

Tanım 1.1.15. [2]***(Katı(solid) Küme)***
A bir X Riesz uzayının altkümesi olsun. Eğer $|x| \leq |y|$ *ve* $y \in A$ *iken* $x \in A$ *oluyorsa A kümesine katı(solid) denir.*

Tanım 1.1.16. [1]***(Yerel Katı Riesz uzayı)***
Bir X Riesz uzayının bir lineer τ *topolojisi, katı kümelerden oluşan sıfırda bir tabana(baza) sahip ise* τ *topolojisine yerel katı topoloji denir. Yerel katı topolojisiyle donatılmiş* (X, τ) *Riesz uzayına yerel katı Riesz uzayı denir.*

Yerel katı bir topolojide, $\mathcal{N}$*sol sembolü, önerme* 1.1.4 *deki* (a), (b) *ve* (c) *özeliklerini sağlayan ve katı kümelerden oluşan sıfırda herhangi bir taban gösterir.*[1]

Bölüm 2

İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde, İstatistiksel yakınsakla direk bağlantılı olan yoğunluk kavramından bahsedilip istatistiksel yakınsaklık kavramını, istatistiksel Cauchy dizisi, istatistiksel limit noktaları ve istatistiksel yığılma noktaları ile ilgili derinlemesine bir inceleme yapılmıştır.

2.1 İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklığın temeli yoğunluk kavramına dayanmaktadır. Bu nedenle öncelikle yoğunlukla ilgili tanım ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.1.1. [23]***(Yoğunluk)***

$\mathbb{N}$ *nin bir* A *alt kümesi için* $A_n = \{k \leq n \ : k \in A\}$ *olsun.*

$$\lim_n \tfrac{|A_n|}{n}$$

limiti mevcut ise bu limit değerine A *kümesinin yoğunluğu denir ve* $\delta(A)$ *ile gösterilir.*

Örnek 2.1.1. *Yoğunluğun tanımından*

$\delta(\mathbb{N}) = 1$

$\delta(\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}) = 0$

$\delta(\{2n : n \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$

$\delta(\{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$

olduğu kolayca görülür.

Doğal sayıların herbir sonlu altkümesi de sıfır yoğunluktadır. Bir A kümesi, doğal yoğunluğa sahip ise , bu durumda $\delta(A) = 1 - \delta(\mathbb{N} \backslash A)$ ve $0 \leq \delta(A) \leq 1$ dır.[23]

Tanım 2.1.2. [15]

$x = (x_k)$ bir dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu küme hariç diğer bütün k lar için bir P özeliğini sağlıyorsa, (x_k) dizisi ***hemen hemen her k için P özeliğini sağlıyor*** *denir ve h.h.k şeklinde gösterilir.*

Tanım 2.1.3. [15]***(İstatistiksel Yakınsaklık)***

$x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer $\forall \epsilon > 0$ için ,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\}| = 0$$

yani h.h.k için $|x_k - L| < \epsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim x_k = L$ veya $x_k \to L(S)$ biçiminde yazılır. Burada S sembolü ile istatistiksel yakınsak tüm dizilerin kümesi gösterilir.

Şimdide klasik yakınsaklıkla istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiyi gösterelim:

Yakınsak bir dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır.

Ancak bunun karşıtı her zaman doğru değildir.

Örnek 2.1.2. :$x = (x_k)$ *dizisi,*

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \ ,n \in \mathbb{N} \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın .

$\overline{\lim} x_k = 1$ *ve* $\overline{\lim} x_k = 0$ *olduğundan* (x_k) *dizisinin yakınsak olmadığı görülür. Her* $\epsilon > 0$ *için*

$$|\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$
$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

bulunur .Böylece $st - \lim x_k = 0$ *elde edilir. Yani* (x_k) *dizisi istatistiksel yakınsaktır. Bu halde bir dizi istatistiksel yakınsak ise klasik anlamda yakınsak olma zorunluluğu yoktur.*[15]

Ayrıca bilindiği gibi klasik anlamda yakınsak bir dizi sınırlıdır. Ancak istatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmayabilir.

Örnek 2.1.3.

$$x_k = \begin{cases} k, & k = n^2 \ ,n \in \mathbb{N} \\ 3, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ *dizisi için* $st - \lim x_k = 3$ *olup dizi sınırlı değildir. Ayrıca* $x = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ *dizisi sınırlı olduğu halde istatistiksel yakınsak değildir.*

Yardımcı Teorem 2.1.1. [24]

$x = (x_k)$ *dizisi verilsin.* $st - \lim x_k = L$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\delta(K) = 1$ *ve* $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = L$ *olacak şekilde bir,*

$$K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$$

altkümenin var olmasıdır.

Yardımcı Teorem 2.1.2. [24]

$st - \lim_{k\to\infty} x_k = a$, $st - \lim_{k\to\infty} y_k = b$ *ve* c *bir reel sayı olsun. Bu durumda,*

(i) $st - \lim_{k\to\infty}(x_k + y_k) = a + b$

(ii)$st - \lim_{k\to\infty}(c.x_k) = c.a$

dır.

İspat:(i)

$st - \lim_{k\to\infty} x_k = a$ *ve* $st - \lim_{k\to\infty} y_k = b$ *olsun.Bu durumda* $\forall\epsilon > 0$ *için* ,

$$\delta(\{k : |x_k - a| \geq \tfrac{\epsilon}{2}\}) = 0$$

$$\delta(\{k : |y_k - b| \geq \tfrac{\epsilon}{2}\}) = 0$$

dır.

$$\underbrace{\{k : |(x_k + y_k) - (a + b)| \geq \epsilon\}}_{A} \subseteq \underbrace{\{k : |x_k - a| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cup \{k : |y_k - b| \geq \frac{\epsilon}{2}\}}_{B}$$

olduğunu görelim. Yani $A \subseteq B$ *olduğunu göstermeliyiz. Bunun için bir* $m \notin B$ *için* $m \notin A$ *olduğunu göstermemiz yeterlidir. Ohalde bir* $m \notin B$ *alalım. Bu takdirde*

$$|x_m - a| < \tfrac{\epsilon}{2}$$
$$|y_m - b| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

dir. Her iki tarafdan toplam alınırsa

$$|x_m - a| + |y_m - b| < \epsilon$$

elde edilir.

Ayrıca üçgen eşitsizliğinden ,

$$|(x_m + y_m) - (a + b)| \leq |x_m - a| + |y_m - b| < \epsilon$$

olduğundan ,

$$|(x_m + y_m) - (a + b)| < \epsilon \textit{ olurki } m \notin A \textit{ olur.}$$

Böylece $A \subseteq B$ *olduğunu gösterdik. Şimdi her iki tarafın yoğunluğunu alırsak,*

$$\delta(\{k : |(x_k + y_k) - (a + b)| \geq \epsilon\}) \leq \delta(\{k : |x_k - a| \geq \tfrac{\epsilon}{2}\}) + \delta(\{k : |y_k - b| \geq \tfrac{\epsilon}{2}\})$$
$$\delta(\{k : |(x_k + y_k) - (a + b)| \geq \epsilon\}) \leq 0 + 0$$
$$\delta(\{k : |(x_k + y_k) - (a + b)| \geq \epsilon\}) = 0$$

olur. Bu takdirde $st-\lim_{k\to\infty}(x_k+y_k)=a+b$ *olur ve ispat tamamlanır.*

İspat (ii)

$c=0$ *için durum açıktır. Çünkü* $(0.x_k)=(0,0,\dots)$ *buhalde* $(0.x_k)\to 0$ *yakınsak her dizi istatistiksel yakınsak olduğundan* $st-\lim_{k\to\infty}(0.x_k)=0$ *olur.*

$c\neq 0$ *ve* $c\in\mathbb{R}$ *olsun.*$st-\lim_{k\to\infty}x_k=a$ *olduğundan,*

$\delta(\{k:|x_k-a|\geq\frac{\epsilon}{|c|}\})=0$ *yazabiliriz.Ayrıca ,*

$$\begin{aligned}\{k:|c.x_k-c.a|\geq\epsilon\} &= \{k:|c.(x_k-a)|\geq\epsilon\}\\ &= \{k:|c|.|(x_k-a)|\geq\epsilon\}\\ &= \{k:|x_k-a|\geq\frac{\epsilon}{|c|}\}\end{aligned}$$

. *Şimdi her iki taraftan yoğunluk aldığımızda,*

$$\begin{aligned}\delta(\{k:|c.x_k-c.a|\geq\epsilon\}) &= \delta(\{k:|x_k-a|\geq\frac{\epsilon}{|c|}\})\\ \delta(\{k:|c.x_k-c.a|\geq\epsilon\}) &=0\end{aligned}$$

olduğundan $st-\lim_{k\to\infty}(c.x_k)=c.a$ *olur ve ispat tamamlanır.*

Ayrıca (i) ve (ii) sağlandığından istatistiksel yakınsak dizi uzayının lineer uzay olduğu anlaşılır. Ayrıca reel sayıların tüm sınırlı istatistiksel yakınsak dizi uzayı, reel sayıların tüm sınırlı m *lineer normlu uzayın lineer bir alt uzayıdır.*($x=(x_k))\in m$ *olmak üzere* $\|x\|=\sup_{k=1,2,\dots}|x_k|$ *normudur.)*

m_0 ile reel sayıların tüm sınırlı istatistiksel yakınsak dizi kümesini gösterelim

Teorem 2.1.3. [24]

m_0 kümesi , m lineer normlu uzayın kapalı lineer bir altuzayıdır.

İspat:

$x^{(n)} = (x_k^{(n)})$ *bir reel sayı dizisi olsun.* $x^{(n)} \in m_0 (n = 1, 2, \dots)$, $x^{(n)} \to x \in m$ *olsun .Bu takdirde* $x \in m_0$ *olduğunu göstermeliyiz.* $x^{(n)} (n = 1, 2, \dots)$ *istatistiksel yakınsak bir dizi olduğundan* $\forall n$ *için bir* a_n *sayısı vardırki ,*

$$st - \lim_{k\to\infty} x_k^{(n)} = a_n \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

Göstermemiz gereken

a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *reel sayı dizisinin bir* a *reel sayısına yakınsaktır.*

b)$x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *olmak üzere* $st - \lim_{k\to\infty} x_k = a$

(a) *ve* (b) *ispatladıktan sonra bir önceki yardımcı teoremi kullanarak* $x \in m_0$ *olduğunu göstereceğiz.* ***İspat (a):***

$\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ *dizisi* m *de yakınsak bir dizi olduğundan* $\forall \epsilon > 0$ *ve* $\forall j, n > n_0$ *için*

$$\|x^{(j)} - x^{(n)}\| < \tfrac{\epsilon}{3} \qquad (5)$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. Ayrıca Yardımcı Teorem* 2.1.3. *den* $\delta(A_j) = \delta(A_n) = 1$ *ve*

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in A_j}} x_k^{(j)} = a_j \qquad (6)$$
$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in A_n}} x_k^{(n)} = a_n \qquad (7)$$

olacak şekilde $A_j, A_n \subset \mathbb{N}$ *kümeleri vardır.* $A_j \cap A_n$ *kümesinin yoğunluğu* 1 *olduğundan bu küme sonsuzdur. Ohalde bir* $k \in A_j \cap A_n$ *seçebiliriz, öyleki* (6) *ve* (7) *den*

$$|x_k^{(j)} - a_j| < \tfrac{\epsilon}{3}, \qquad |x_k^{(n)} - a_n| < \tfrac{\epsilon}{3} \qquad (8)$$

dir. Ayrıca (5) *ve* (8) *i kullanarak* $\forall j, n > n_0$ *için,*

$$\begin{aligned} |a_j - a_n| &\leq |a_j - x_k^{(j)}| + |x_k^{(j)} - x_k^{(n)}| + |x_k^{(n)} - a_n| \\ |a_j - a_n| &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

elde ederiz. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *reel sayı dizisi bir Cauchy dizisi olduğundan , bir* a *reel sayısına yakınsamak zorundadır. Buradan*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \qquad (9)$$

olur. Böylece (a) *koşulu ispatlanır.*

İspat (b):

$\epsilon > 0$ *olsun .Yardımcı Teorem* 2.1.3 *den* $\delta(A) = 1$ *ve* $\forall k \in A$ *için* $|x_k - a| < \epsilon$ *olacak şekilde bir* $A \subset \mathbb{N}$ *kümesi var olması ispat için yeterli olacaktır.*
$x^{(j)} \longrightarrow x$ *olduğundan*

$$\|x^{(p)} - x\| < \tfrac{\epsilon}{3} \qquad (10)$$

olacak şekilde bir $p \in \mathbb{N}$ *sayısı vardır.Aynı şekilde* (9) *içinde böyle bir* $p \in \mathbb{N}$ *sayısı seçilebilirki,*

$$|a_p - a| < \tfrac{\epsilon}{3} \qquad (11)$$

eşitsizliğini sağlar.
$st - \lim_{k\to\infty} x_k^{(p)} = a_p$ *olduğundan* $\delta(A) = 1$ *ve* $\forall k \in A$ *içi,*

$$|x_k^{(p)} - a_p| < \tfrac{\epsilon}{3} \qquad (12)$$

olacak şekilde bir $A \subset \mathbb{N}$ *vardır.*$(10),(11),(12)$ *den ve* $\forall k \in A$ *için*

$$\begin{aligned} |x_k - a| &\leq |x_k - x_k^{(p)}| + |a_p - a| + |x_k^{(p)} - a_p| \\ |x_k - a| &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

olduğundan (b) *koşuluda sağlanır. Şimdi* $x \in m_0$ *olduğunu göstereceğiz.*m_0 *lineer uzay olduğundan ,*

$$x = (a_n - x^{(n)}) + (x^{(n)}) + (a - a_n) + (x - a)$$

yazılabilir ve sağ taraf m_0 *ın elemanı olduğundan* $x \in m_0$ *dır.Böylece ispat tamamlanmış olur.*

Tanım 2.1.4. [15]***(İstatistiksel Cauchy Dizisi)***

Bir $x = (x_k)$ *dizisinin* $\forall \epsilon > 0$ *için*

$$|x_k - x_N| < \epsilon \quad h.h.k.$$

olacak şekilde bir $N = N(\epsilon)$ *sayısı var ise yani*

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \epsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ *dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.*

Teorem 2.1.4. [15] *Aşağıdaki önermeler birbirine denktir.*

i)x dizisi istatistiksel yakınsaktır.

ii)x dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.

iii)x dizisi verilsin.Hemen hemen her k (h.h.k) için $x_k = y_k$ *olacak şekilde yakınsak bir* y_k *dizisi vardır.*

İspat: *$(i) \to (ii)$ nin gösterilmesi yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir teoreminin ispatına benzerdir. $st-\lim x_k = L$ ve $\epsilon > 0$ olsun. Bu takdirde h.h.k. için $|x_k - L| < \frac{\epsilon}{2}$ dir. Eğer $|x_N - L| < \frac{\epsilon}{2}$ olacak şekilde N seçilirse,*

$$\begin{aligned} |x_k - x_N| &< |x_k - L| + |x_N - L| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \quad h.h.k \end{aligned}$$

Buradan x dizisinin istatistiksel Cauchy dizisi olduğu görülür.

Şimdi $(ii) \to (iii)$ yi gösterelim. (ii) koşulu sağlansın ve bir N sayısı seçelim öyleki h.h.k. için $I = [x_N - 1, x_N + 1]$ aralığı x_k yı içersin. Yine bir M sayısı seçelim öyleki h.h.k. için $I' = [x_M - \frac{1}{2}, x_M + \frac{1}{2}]$ aralığı x_k yı içersin. $I_1 = I \cap I'$ aralığı h.h.k. için x_k yı içerdiğini idda ediyoruz. Şimdi bunu gösterelim,

$$\{k \leq n : x_k \notin I \cap I'\} = \{k \leq n : x_k \notin I\} \cup \{k \leq n : x_k \notin I'\}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{1}{n}|\{k \leq n : x_k \notin I \cap I'\}| &\leq \lim_n \frac{1}{n}|\{k \leq n : x_k \notin I\}| + \lim_n \frac{1}{n}|\{k \leq n : x_k \notin I'\}| \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\lim_n \tfrac{1}{n}|\{k \leq n : x_k \notin I \cap I'\}| = 0$$

olur. Bu nedenle I_1*, h.h.k. için* x_k *yı içeren ve boyu* 1 *yada daha küçük olan kapalı bir aralıktır.* $I'' = [x_{N(2)} - \frac{1}{4}, x_{N(2)} + \frac{1}{4}]$ *aralığı h.h.k. için* x_k *yı içerecek şekilde bir* $N(2)$ *sayısı seçerek devam ederiz.* $I_2 = I_1 \cap I''$ *aralığı h.h.k. için* x_k *yı içeren ve boyu* $\frac{1}{2}$ *yada daha küçük olan kapalı bir aralıktır. Bu şekilde devam edilirse* $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ *kapalı aralıklar dizisi oluşturulur öyleki her bir* m *elemanı için* $I_m \supseteq I_{m+1}$*, uzunluğu* 2^{1-m} *den büyük olmayan bir aralık ve h.h.k için* $x_k \in I_m$ *dir. İç içe aralıklar teoreminden* $\cap_{m=1}^{\infty} I_m$ *ye eşit olan bir* λ *sayısı vardır. h.h.k. için* $x_k \in I_m$ *olduğundan,* $n > T_m$ *iken,*

$$\tfrac{1}{n}|\{k \leq n : x_k \notin I_m\}| < \tfrac{1}{m} \quad (\star)$$

olacak şekilde pozitif tam sayıların bir $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ *dizisini buluruz.* $k > T_1$ *ve* $T_m < k < T_{m+1}$ *iken* $x \notin I_m$ *olacak şekilde* x_k *nın tüm terimlerinden oluşan* x *in bir* z *alt dizisini tanımlayalım. Buradan yeni bir* $y = (y_k)$ *dizisi tanımlayalım*

$$y_k = \begin{cases} \lambda, & x_k,\ z \text{ nin bir terimi ise} \\ x_k, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

olsun. Bu takdirde $\lim y_k = \lambda$ *dir. Çünkü* $\epsilon > \frac{1}{m} > 0$ *ve* $k > T_m$ *ise* x_k*,* z *nin bir terimidir bu takdirde* $y_k = \lambda$*, yada* $y_k = x_k \in I_m$ *olur ve* $|y_k - \lambda| \leq I_m$ *uzunluğu* $\leq 2^{1-m}$ *dir. Ayrıca h.h.k. için* $x_k = y_k$ *olduğunu idda ediyoruz. Bunu göstermek için, eğer* $T_m < n < T_{m+1}$ *ise bu durumda,*

$$\{k \leq n : y_k x_k\} \subseteq \{k \leq n : x_k \notin I_m\},$$

olur. $(\star)$ *dan ,*

$$\tfrac{1}{n}|\{k \leq n : y_k \neq x_k\}| \leq \tfrac{1}{n}|\{k \leq n : x_k \notin I_m\}| < \tfrac{1}{m}$$

elde edilir. Buradan $m \to \infty$ *için, yukarıdaki ifadenin limiti* 0 *olur ve h.h.k. için* $x_k = y_k$ *dır. Böylece* $(ii) \to (iii)$ *olduğu görülür.*

Şimdi $(iii) \to (i)$ *olduğunu gösterelim. O halde* (iii) *koşulu sağlansın. Bu takdirde h.h.k. için* $x_k = y_k$ *ve* $\lim y_k = L$ *dir.* $\epsilon > 0$ *olsun. Bu takdirde* $\forall n \in \mathbb{N}$ *için ,*

$$\{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\} \subseteq \{k \leq n : x_k \neq y_k\} \cup \{k \leq n : |y_k - L| > \epsilon\}$$

dir. $\lim y_k = L$ *olduğundan ikinci küme tam sayıların sabit bir* $l = l(\epsilon)$ *sayısını içerir ki,*

$$\lim_n \frac{1}{n}|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\}| \leq \lim_n \frac{1}{n}|\{k \leq n : x_k \neq y_k\}| + \lim_n \frac{1}{n} = 0$$

olur. Çünkü h.h.k için $x_k = y_k$ *dir. h.h.k için* $|x_k - L| < \epsilon$ *olduğundan* (i) *koşulu ispatlanır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.*

Şimdi istatistiksel limit noktası ve istatistiksel yığılma noktalası kavramlarını inceleyeceğiz.

Tanım 2.1.5. [16]***(Seyrek ve Seyrek Olmayan Alt Dizi)*** $x = (x_k)$ *dizisi verilsin.*(x_{k_j}) *, x dizisinin bir alt dizisi olsun.*

$$K = \{k_j : j \in \mathbb{N}\}$$

kümesinin yoğunluğu yani $\delta(K) = 0$ *ise* (x_{k_j}) *dizisine seyrek alt dizi denir. Diğer taraftan* $\delta(K) > 0$ *ise* (x_{k_j}) *dizisine seyrek olmayan alt dizi denir. Ayrıca* (x_{k_j}), $(x)_K$ *olarak ta gösterilebilir.*

Tanım 2.1.6. [16]***(İstatistiksel Limit Noktası)*** *Bir λ sayısının bir $x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel limit noktası olması için λ sayısına yakınsayan (x_k) dizisinin seyrek olmayan bir altdizisinin var olmasıdır.*

Bir (x_k) dizisinin tüm istatistiksel limit noktalarının kümesini Λ_x ile ve (x_k) dizisinin alışılmış limit noktalarının kümesini L_x ile gösteririz. Herhangi bir dizi için $\Lambda_x \subseteq L_x$ olduğu açıktır. [16]

Örnek 2.1.4. [16]

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \ ,n \in \mathbb{N} \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan dizinin alışılmış limit noktalarının kümesi $L_x = \{0, 1\}$ iken bu dizinin istatistiksel limit noktalarının kümesi $\Lambda_x = \{0\}$ dır.

Örnek 2.1.5. [16]:*$\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$, değer kümesi tüm rasyonel sayılar kümesi olan bir dizi olsun.(x_k) dizisini söyle tanımlayalım.*

$$x_k = \begin{cases} r_n, & k = n^2 \ ,n \in \mathbb{N} \\ k, & k \neq n^2 \end{cases}$$

dogal sayıların karesi olan kümenin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan $\Lambda_x = \emptyset$ dir. Ancak $\{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ kümesi $\mathbb{R}$ de yoğun olduğundan $L_x = \mathbb{R}$ dir.

Tanım 2.1.7. [16]***(İstatistiksel Yığılma Noktası)*** *Bir $x = (x_k)$ dizi verilmiş olsun. $\forall \epsilon > 0$ için,*

$$\{k \in \mathbb{N} : |x_k - m| < \epsilon\}$$

kümesi sıfır doğal yoğunluğa sahip değilse m sayısına x dizisinin istatistiksel yığılma noktasıdır denir.

Bir x dizisinin tüm istatistiksel yığılma noktaları kümesini Γ_x ile gösteririz. Herhangi bir x dizisi için $\Gamma_x \subseteq L_x$ olduğu açıktır. Γ_x ile Λ_x arasındaki kapsama ilişkisini görmek ise biraz daha zordur.

Alışılmış limit noktalarındaki bilgilerimizden $\Lambda_x = \Gamma_x$ olmasını bekleriz ancak durumun herzaman böyle olmadığını Fridy [16]) *de göstermiştir.*

.

Önerme 2.1.5. [16] *Herhangi bir $x = (x_k)$ sayı dizisi için $\Lambda_x \subseteq \Gamma_x$ dır.*

Örnek 2.1.6. [16] *$x = (x_k)$ dizisini şöyle tanımlayalım.*

$$x_k = \tfrac{1}{p}, \quad k = 2^{p-1}(2q+1)$$

ve $p - 1$, k nın asal çarpanlarından 2 nin çarpanlarının sayısı olsun.$\forall p$ için

$$\delta(\{k : x_k = \tfrac{1}{p}\}) = 2^{-p} > 0$$

olduğunu görmek kolaydır. Böylece $\frac{1}{p} \in \Lambda_x$ dir. Ayrıca $\delta(\{k : 0 < x_k < \frac{1}{p}\}) = 2^{-p}$ olduğundan $0 \in \Gamma_x$ dir . Böylece $\Gamma_x = \{0\} \cup \{\frac{1}{p}\}_{p=1}^{\infty}$ elde ederiz. Şimdi $0 \notin \Lambda_x$ olduğunu *iddia ediyoruz. Bunun için* $(x)_K$ *limiti sıfır olan bir alt dizi ise* $\delta(K) = 0$ *olduğunu gösterebiliriz.* $\forall p$ *için,*

$$\begin{aligned} |K_n| &= |\{k \in K_n : x_k \geq \frac{1}{p}\}| + |\{k \in K_n : x_k < \frac{1}{p}\}| \\ &\leq O(1) + |\{k \in \mathbb{N} : x_k < \frac{1}{p}\}| \\ &\leq O(1) + \frac{n}{2^p} \end{aligned}$$

Böylece $\delta(K) \leq 2^{-p}$ *ve* p *keyfi olduğundan* $\delta(K) = 0$ *olduğunu gösterir.*

Şimdi lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını verip kuvvetli lacunary yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ve lacunary istatistiksel yakınsaklık arasındaki bazı içerme teoremlerini inceleyeceğiz

Tanım 2.1.8. [19]***(Kuvvetli Lacunary Yakınsaklık)*** *Herhangi bir* $\theta = (k_r)$ *lacunary dizisi için,*

$$\lim_r \tfrac{1}{h_r} \textstyle\sum_{k \in I_r} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L *sayısı varsa* $x = (x_k)$ *dizisi* L *sayısına kuvvetli lacunary yakınsaktır denir ve kuvvetli lacunary yakınsak dizilerin kümesi* N_θ *ile gösterilir. Burada*

$$N_\theta = \{x = (x_k) : \lim_r \tfrac{1}{h_r} \textstyle\sum_{k \in I_r} |x_k - L| = 0\} \text{ ile gösterilir.}$$

Tanım 2.1.9. [17]***(Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık)***

$\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. $\forall\epsilon > 0$ için,

$$\lim_r \tfrac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \epsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\theta - \lim x = L$ yada $x_k \to L(S_\theta)$ biçiminde gösterilir.

Lacunary istatistiksel yakınsak dizi uzayı,

$$S_\theta = \{x = (x_k) : \lim_r \tfrac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \epsilon\}| = 0\}$$

biçiminde S_θ sembolü ile gösterilir.

Teorem 2.1.6. [17] *$\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. Bu takdirde*

(i) *(a) $x_k \to L(N_\theta)$ ise $x_k \to L(S_\theta)$,*

(b) N_θ, S_θ nın özalt kümesidir.

(ii) $x \in l_\infty$ ve $x_k \to L(S_\theta)$ ise $x_k \to L(N_\theta)$,

(iii) $S_\theta \cap l_\infty = N_\theta \cap l_\infty$

dır.

İspat: *(i)* *(a)$\epsilon > 0$ ve $x_k \to L(N_\theta)$ olsun . Bu takdirde ,*

$$\sum_{k \in I_r} |x_k - L| \geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \epsilon}} |x_k - L| \geq \epsilon |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \epsilon\}|,$$

yazabiliriz. Buradan da (a) koşulu gerçeklenir.

(b) *$N_\theta \subseteq S_\theta$ durumu açıktır. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. $x = (x_k)$ dizisini I_r aralığında ilk $[\sqrt{h_r}]$ tam sayılarında x, $1, 2, 3, \ldots, [\sqrt{h_r}]$, diğer durumlarda $x_k = 0$ olarak tanımlansın. Bu dizi sınırlı değildir. $\forall\epsilon > 0$ için,*

$$\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \epsilon\}| = \frac{[\sqrt{h_r}]}{h_r} \to 0 \quad r \to \infty,$$

dır. Ohalde (x_k) *dizisi için* $x_k \to 0(S_\theta)$ *dır. Diğer taraftan,*

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} |x_k - 0| = \frac{1}{h_r}\frac{[\sqrt{h_r}]([\sqrt{h_r}]+1)}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0$$

olduğundan $x_k \nrightarrow 0(N_\theta)$ *dır.*

(ii) $x_k \to L(S_\theta)$ *ve* $x \in l_\infty$ *olduğunu varsayalım.* $\forall k \in \mathbb{N}$ *için* $|x_k - L| \leq M$ *olsun. Verilen* $\epsilon > 0$ *için,*

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|x_k - L| &= \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ |x_k-L|\geq\epsilon}}|x_k - L| + \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ |x_k-L|<\epsilon}}|x_k - L| \\ &\leq \frac{M}{h_r}|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \epsilon\} + \epsilon \end{aligned}$$

elde ederiz ki $x_k \to L(N_\theta)$ *dır.*

(iii) (i) ve (ii) nin bir sonucudur.

Yardımcı Teorem 2.1.7. [17] *Herhangi bir* $\theta = \{k_r\}$ *lacunary dizisi için* $S - \lim x = L$ *olduğunda* $S_\theta - \lim x = L$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\liminf_r q_r > 1$ *olmasıdır.*

İspat:$\Leftarrow$ $\liminf_r q_r > 1$ *olsun. Bu takdirde yeterince büyük* r *için* $q_r \geq 1 + \delta$ *olacak şekilde* $\delta > 0$ *vardır. Buda,*

$$\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$$

olmasını gerektirir. $x_k \to L(S)$ *ise her* $\epsilon > 0$ *ve yeterince büyük* r *için* ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r}|\{k \le k_r : |x_k - L| \ge \epsilon\}| &\ge \frac{1}{k_r}|\{k \in I_r : |x_k - L| \ge \epsilon\}| \\ &\ge \frac{\delta}{1+\delta}.\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |x_k - L| \ge \epsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece yeterlilik ispatlanır.

$\Rightarrow$ $\liminf_r q_r = 1$ *olsun.* [19] *s.* 510 *daki gibi* $r(j) \ge r(j-1) + 2$ *olmak üzere,*

$$\tfrac{k_{r(j)}}{k_{r(j)-1}} < 1 + \tfrac{1}{j} \ ve \ \tfrac{k_{r(j)-1}}{k_{r(j-1)}} > j$$

olacak şekilde θ *lacunary dizisinin bir* $\{k_{r(j)}\}$ *alt dizisini seçebiliriz. Şimdi sınırlı bir* $x = (x_i)$ *dizisi tanımlayalım* $j = 1, 2, \ldots$ *olmak üzere* $i \in I_{r(j)}$ *ise* $x_i = 1$, *diğer durumlarda* $x_i = 0$ *olsun. Bu takdirde* $[19, s.510]$ *da* $x \notin N_\theta$ *fakat* $x \in |\sigma_1|$ *olduğunu gösterir. Teorem* 2.1.6. *nın* (*ii*) *koşulundan* $x \notin S_\theta$ *olur. Fakat* [6] *deki Teorem* 2.1 *den* $x \in S$ *olduğu görülür. Buradan* $S \nsubseteq S_\theta$ *olur ve ispat tamamlanır.*

Yardımcı Teorem 2.1.8. [17] *Herhangi bir* $\theta = \{k_r\}$ *lacunary dizisi için* $S_\theta - \lim x = L$ *olduğunda* $S - \lim x = L$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\limsup_r q_r < \infty$ *olmasıdır.*

İspat $\Leftarrow$ $\limsup_r q_r < \infty$ *ise bu takdirde her* r *için* $q_r < H$ *olacak şekilde* $H > 0$ *vardır.* $x_k \to L(S_\theta)$ *ve* $N_r = |\{k \in I_r : |x_k - L| \ge \epsilon\}|$ *olsun.*

$$\lim_r \tfrac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |x_k - L| \ge \epsilon\}| = 0$$

olduğundan, her $\epsilon > 0$ *için* $r > r_0$ *için,*

$$\tfrac{N_r}{h_r} < \epsilon$$

olacak şekilde bir $r_0 \in \mathbb{N}$ *vardır.* $M = \max\{N_r : 1 \le r \le r_0\}$ *olarak tanımlansın ve* n, $k_{r-1} < n \le k_r$ *aralığıdaki bir tam sayı olsun. Bu takdirde,*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}|\{k \le n : |x_k - L| \ge \epsilon\}| &\le \frac{1}{k_{r-1}}|\{k \le k_r : |x_k - L| \ge \epsilon\}| \\
&= \frac{1}{k_{r-1}}\{N_1 + N_2 + \cdots + N_{r_0} + N_{r_0+1} + \cdots + N_r\} \\
&\le \frac{M}{k_{r-1}}.r_0 + \frac{1}{k_{r-1}}\{h_{r_0+1}\frac{N_{r_0+1}}{h_{r_0+1}} + \cdots + h_r\frac{N_r}{h_r}\} \\
&\le \frac{r_0.M}{k_{r-1}} + \frac{1}{k_{r-1}}(\sup_{r>r_0}\frac{N_r}{h_r})\{h_{r_0+1} + \cdots + h_r\} \\
&\le \frac{r_0.M}{k_{r-1}} + \epsilon.\frac{k_r - k_{r_0}}{k_{r-1}} \\
&\le \frac{r_0.M}{k_{r-1}} + \epsilon.q_r \le \frac{r_0.M}{k_{r-1}} + \epsilon H
\end{aligned}$$

yazabiliriz ve böylece yeterlilik ispatlanmış olur.

$\Rightarrow$ $\limsup_r q_r = \infty$ *olsun.* [19] *s.* 511 *deki gibi* $q_{r(j)} > j$ *olacak şekilde bir* $\theta = \{k_r\}$ *lacunary dizisinin bir* $\{k_{r(j)}\}$ *alt dizisini seçebiliriz. Sınırlı bir* $x = (x_i)$ *dizisi tanımlayalım.* $j = 1, 2, \ldots$ *için* $k_{r(j)-1} < i \le 2k_{r(j)-1}$ *ise* $x_i = 1$ *ve diğer durumlarda* $x_i = 0$ *olsun.* [19] *s.* 511 *den* $x \in N_\theta$ *fakat* $x \notin |\sigma_1|$ *dir. Teorem* 2.1.6 *nın* (i) *koşulundan* $x \in S_\theta$ *dır. Fakat* [6] *deki Teorem* 2.1 *den* $x \notin S$ *olduğu görülür. Buradan* $S_\theta \nsubseteq S$ *olur ve ispat tamamlanır.*

Yardımcı Teorem 2.1.7 *ve* 2.1.8 *den aşağıdaki teorem elde edilir.*

Teorem 2.1.9. [17] $\theta = \{k_r\}$ *bir lacunary dizisi olsun.* $S = S_\theta$ *olması için gerek ve yeter koşul* $1 < \liminf_r q_r \le \limsup_r q_r < \infty$ *olmasıdır.*

Tanım 2.1.10. [18]***(Lacunary İstatistiksel Cauchy Dizisi)*** *$\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. Her bir r için $k'(r) \in I_r$, $\lim_r x_{k'(r)} = L$ ve $\forall \epsilon > 0$ için,*

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - x_{k'(r)}| \geq \epsilon\}| = 0$$

olacak şekilde x in bir $\{x_{k'(r)}\}$ alt dizisi varsa x dizisine lacunary istatistiksel Cauchy dizisi yada S_θ-Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.1.10. [18] *Bir $x = (x_k)$ dizisinin lacunary istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul lacunary istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır.*

İspat: $\Rightarrow$ *$x_k \to L(S_\theta)$ ve her $j \in \mathbb{N}$ için $K^{(j)} = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| < \frac{1}{j}\}$ olsun. Buradan her bir j için $K^{(j)} \supseteq K^{(j+1)}$ ve $r \to \infty$ giderken,*

$$\frac{|K^{(j)} \cap I_r|}{h_r} \to 1 \quad (r \to \infty)$$

dır. $r \geq m(1)$ olduğunda $\frac{|K^{(1)} \cap I_r|}{h_r} > 0$ olacak şekilde bir $m(1)$ seçelim, yani $K^{(1)} \cap I_r \neq \emptyset$ olsun. Aynı şekilde $r \geq m(2)$ olduğunda $K^{(2)} \cap I_r \neq \emptyset$ olacak şekilde $m(2) > m(1)$ seçelim. Bu takdirde $m(1) \leq r < m(2)$ aralığındaki herbir r için $k'(r) \in I_r \cap K^{(1)}$ olacak şekilde $k'(r) \in I_r$ seçelim yani $|x_{k'(r)} - L| < 1$ olsun. Genel olarak, $r > m(p+1)$ olduğunda $I_r \cap K^{(p+1)} \neq \emptyset$ olacak şekilde $m(p+1) > m(p)$ seçelim. Bu takdirde $m(p) \leq r < m(p+1)$ aralığındaki bütün r ler için $k'(r) \in I_r \cap K^{(p)}$ seçelim, yani

$$|x_{k'(r)} - L| < \frac{1}{p}$$

olsun. Buradan her bir r için $k'(r) \in I_r$ ve $|x_{k'(r)} - L| < \frac{1}{p}$ olduğundan $\lim_r x_{k'(r)} = L$ olur. Dahası, her $\epsilon > 0$ için,

$$\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |x_k - x_{k'(r)}| \geq \epsilon\}| \leq \frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \frac{\epsilon}{2}\}|$$
$$+\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |x_{k'(r)} - L| \geq \frac{\epsilon}{2}\}|$$

dir.$x_k \to L(S_\theta)$ *ve* $\lim_r x_{k'(r)} = L$ *olduğundan,*

$$\lim_r \frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |x_k - x_{k'(r)}| \geq \epsilon\}| = 0$$

elde edilir. Böylece x *dizisinin lacunary istatistiksel Cauchy dizisi olduğu görülür.*

$\Leftarrow$: $x = (x_k)$*, lacunary istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Her* $\epsilon > 0$ *için,*

$$|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \epsilon\} \leq |\{k \in I_r : |x_k - x_{k'(r)}| \geq \frac{\epsilon}{2}\}|$$
$$+|\{k \in I_r : |x_{k'(r)} - L| \geq \frac{\epsilon}{2}\}|$$

elde ederiz. Buradan $x_k \to L(S_\theta)$ *olur ve ispat tamamlanır.*

Sonuç 2.1.11. [18] *Lacunary istatistiksel yakınsak bir dizi yakınsak bir alt diziye sahiptir.*

Bölüm 3

Topolojik Gruplarda İstatistiksel ve Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde topolojik gruplarda istatistiksel ve lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramlarından bahsedeceğiz.

Bu bölümde X uzayını, birinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlayan ve toplamsal olarak yazılan değişmeli topolojik Hausdorff grup olarak göstereceğiz.

$C(X)$ *ve* $C_0(X)$ *sırasıyla* X *uzayındaki yakınsak tüm dizilerin kümesini ve* 0 *a yakınsak tüm dizilerin kümesi olsun.*

$S(X)$, X *uzayındaki istatistiksel yakınsak tüm dizilerin kümesi, özel olarak* $S_0(X)$ *ise ,*X *uzayındaki* 0 *a istatistiksel yakınsak tüm dizilerin kümesi olsun. Benzer şekilde* $S_\theta(X)$ *sembolü* X *uzayındaki lacunary istatistiksel yakınsak tüm dizilerin kümesini gösterir.*

3.1 Topolojik Gruplarda İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.1.1. [8] *(x_n), X de bir dizi olsun. 0 ın her U komşuluğu için,*

$$\lim_{m\to\infty} m^{-1}|\{n \leq m : x_n - l \notin U\}| = 0$$

olacak şekilde bir $l \in X$ varsa, (x_n) dizisine l ye istatistiksel yakınsaktır denir.

Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır yani $C(X) \subset S(X)$ dir. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Bunu aşağıdaki örnekle göstereceğiz.

Örnek 3.1.1. [8]

$$x_n = \begin{cases} x, & n = m^2, \quad m = 1, 2, \ldots \\ 0, & \textit{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

olsun. (x_n) dizisi 0 a istatistiksel yakınsaktır ancak klasik anlamda yakınsak değildir.

Teorem 3.1.1. [9] *Bir (x_n) dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şartın sağlamasıdır.*

(a) 0 ın her U komşuluğu için,

$$\lim_{r\to\infty} x_{k'(r)} = l \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : x_k - x_{k'(r)} \notin U\}| = 0$$

olacak şekilde (x_n) nin bir $(x_{k'(r)})$ alt dizisi vardır.

İspat: *$st - \lim_{n\to\infty} x_n = l$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi alalım. (U_n), 0 ın iç içe komşuluklar tabanının bir dizisi olsun. Herhangi bir pozitif j tamsayısı için $K_{(j)} = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n \text{ ve } x_k - l \in U_j\}$ olsun. Böylece her bir j için $K(j+1) \subset K(j)$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|K^j| = 1$ dir. $n > m(1)$ olduğunda $\frac{1}{n}|K^{(1)}| > 0$ olacak şekilde $m(1)$ seçelim, yani, $K^{(1)} \neq \emptyset$ olsun. Bu takdirde $m(1) \leq r < m(2)$ aralığındaki her bir r pozitif tamsayısı için,$k(r) \in K^p$ seçelim yani $x_{k'(r)} - l \in U_1$ olsun. Genel olarak , $r > m(p+1)$ olduğunda $K^{p+1} \neq \emptyset$ olacak şekilde $m(p+1) > m(p)$ seçelim. Bu takdirde $m(p) \leq r < m(p+1)$ eşitsizliğini sağlayan tüm r ler için $k'(r) \in K^p$ seçelim yani $x_{k'(r)} - l \in U_p$ olsun. Dahası 0 ın her U komşuluğu için $W + W \subset U$ olacak şekilde 0 ın bir W simetrik komşuluğu vardır. Böylece,*

$\frac{1}{n}|\{k \leq n : x_k - x_{k'(r)} \notin U\}| \leq \frac{1}{n}|\{k \leq n : x_k - l \notin W\}| + \frac{1}{n}|\{k \leq n : l - x_{k'(r)} \notin W\}|$

elde ederiz. $st{-}\lim_{n\to\infty} x_n = l$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : x_k{-}l \notin W\}| = 0$ *ve* $\lim_{r\to\infty} x_{k'(r)} = l$ *olduğundan* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : x_{k'(r)} - l \notin W\}| = 0$ *dır. Böylece* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : x_k - x_{k'(r)} \notin U\}| = 0$ *elde edilir. Buradan* (a) *koşulu sağlanır.*

Şimdi (a) *koşulunun sağlandığını varsayalım. Bu takdirde* 0 *ın herhangi bir* U *komşuluğu için* $W + W \subset U$ *olacak şekilde* 0 *ın bir* W *komşuluğunu seçebiliriz. Bu takdirde,*

$\frac{1}{n}|\{k \leq n : x_k - l \notin U\}| \leq \frac{1}{n}|\{k \leq n : x_k - x_{k'(r)} \notin W\}| + \frac{1}{n}|\{k \leq n : x_{k'(r)} - l \notin W\}|$

yazabiliriz. (a) *koşulu sağlandığından* (x_n) *dizisinin istatistiksel yakınsak olduğu görülür.*

Teorem 3.1.2. [9] $\lim_{k\to\infty} x_k = l$ *ve* $st - \lim_{k\to\infty} y_k = 0$ *ise,*

$$st - \lim_{k\to\infty}(x_k + y_k) = \lim_{k\to\infty} x_k$$

dır.

İspat: *U, 0 ın herhangi bir komşuluğu olsun. Bu takdirde* $W + W \subset U$ *olacak şekilde* 0 *ın bir* W *simetrik komşuluğunu seçebiliriz.* $\lim_{k\to\infty} x_k = l$ *olduğundan bir* k_0 *sayısı vardır öyleki* $k \geq k_0$ *olduğunda* $x_k - l \in W$ *dir. Buradan,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : x_k - l \notin W\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{k_0}{n} = 0$$

olur ve $st - \lim_{k\to\infty} y_k = 0$ *olduğundan* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : y_k \notin W\}| = 0$ *dır. Ohalde*

$$\{k \leq n : (x_k - l) + y_k \notin U\} \subset \{k \leq n : x_k - l \notin W\} \cup \{k \leq n : y_k \notin W\}$$

dir. Buradan,

$$\frac{1}{n}|\{k \leq n : (x_k - l) + y_k \notin U\}| \leq \frac{1}{n}|\{k \leq n : x_k - l \notin W\}| + \frac{1}{n}|\{k \leq n : y_k \notin W\}|$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : (x_k - l) + y_k \notin U\}| = 0$$

bulunur. Böylece $st - \lim_{k\to\infty}(x_k + y_k) = \lim_{k\to\infty} x_k$ *elde edilir ve ispat tamamlanır.*

3.2 Topolojik Gruplarda Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda, topolojik gruplarda lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını ve istatistiksel yakınsak tüm dizilerin kümesi ile lacunary istatistiksel yakınsak tüm dizilerin kümesi arasındaki ilişkiyi göstereceğiz.

Tanım 3.2.1. [7] $x = (x_k)$, *X uzayında bir dizi olsun. Sıfırın her U komşuluğu için,*

$$\lim_{r\to\infty}(h_r)^{-1}|\{k \in I_r : x_k - l \notin U\}| = 0$$

oluyorsa x dizisine l ye lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\theta - \lim_{k\to\infty} x_k = l$ biçiminde yazılır.

Teorem 3.2.1. [7] *Lacunary istatistiksel yakınsak dizinin limiti tektir.*

İspat: *$x = (x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. x dizisinin l_1 ve l_2 gibi iki farklı lacunary istatistiksel limitinin olduğunu varsayalım. X bir Hausdorff uzay olduğundan $l_1 - l_2 \notin U$ olacak şekilde 0 ın bir U komşuluğu vardır. Bu takdirde $W + W \subset U$ olacak şekilde 0 ın bir W komşuluğunu seçebiliriz. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $z_k = l_1 - l_2$ olsun. Dolayısıyla $\forall r \in \mathbb{N}$ için ,*

$$\{k \in I_r : z_k \notin U\} \subset \{k \in I_r : l_1 - x_k \notin W\} \cup \{k \in I_r : x_k - l_2 \notin W\}$$

dir. Şimdi buradan $\forall r \in \mathbb{N}$ için ,

$$\begin{aligned}(h_r)^{-1}|\{k \in I_r : z_k \notin U\}| &\leq (h_r)^{-1}|\{k \in I_r : l_1 - x_k \notin W\} \\ &+ (h_r)^{-1}|\{k \in I_r : x_k - l_2 \notin W\}|\end{aligned}$$

elde edilir. $S_\theta - \lim_{k\to\infty} x_k = l_1$ ve $S_\theta - \lim_{k\to\infty} x_k = l_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}(h_r)^{-1}|\{k \in I_r : z_k \notin U\}| &\leq \lim_{r\to\infty}(h_r)^{-1}|\{k \in I_r : l_1 - x_k \notin W\} \\ &+ \lim_{r\to\infty}(h_r)^{-1}|\{k \in I_r : x_k - l_2 \notin W\}|\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan $1 \leq 0 + 0 = 0$ bulunur ve çelişki elde edilir. Ohalde $l_1 = l_2$ dir.

Teorem 3.2.2. [7] *Herhangi bir θ lacunary dizisi için, $S(X) \subseteq S_\theta(X)$ olması için gerek ve yeter koşul $\liminf_r q_r > 1$ olmasıdır.*

İspat: $\Leftarrow$ $\liminf_r q_r > 1$, $\liminf_r q_r = \alpha$ *olduğunu varsayalım.* $\beta = (\alpha - 1)/2$ *olsun. Bu takdirde $r \geq n_0$ için $q_r \geq 1+\beta$ olacak şekilde bir n_0 pozitif tamsayısı vardır. Buradan $r \geq n_0$ için,*

$$h_r(k_r)^{-1} = 1 - (k_{r-1})(k_r)^{-1} = 1 - (q_r)^{-1} \geq 1 - (1+\beta)^{-1} = \beta(1+\beta)^{-1}$$

dir. Herhangi bir $(x_k) \in S(X)$ alalım ve $S - \lim_{k\to\infty} x_k = l$ olsun. $S_\theta - \lim x_k = l$ olduğunu göstereceğiz. 0 ın herhangi bir U komşuluğunu alalım. Bu takdirde $r \geq n_0$ için,

$$\begin{aligned} (k_r)^{-1}|\{k \leq k_r : x_k - l \notin U\}| &\geq (k_r)^{-1}|\{k \in I_r : x_k - l \notin U\}| \\ &= h_r(k_r)^{-1}(h_r)^{-1}|\{k \in I_r : x_k - l \notin U\}| \\ &\geq \beta(1+\beta)^{-1}(h_r)^{-1}|\{k \in I_r : x_k - l \notin U\}| \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $S_\theta - \lim x_k = l$ dir.

$\Rightarrow$ $\liminf_r q_r = 1$ *olduğunu varsayalım. Bu takdirde,*

$$r(j) > r(j-1) + 2$$

olmak üzere

$$k_{r(j)}(k_{r(j)-1})^{-1} < 1 + j^{-1} \ \textit{ve} \ k_{r(j)-1}(r(j-1))^{-1} > j$$

olacak şekilde θ lacunary dizisinin bir $(k_{r(j)})$ alt dizisini seçebiliriz. X in 0 dan farklı bir x elemanını alalım. (x_k) dizisini şöyle tanımlayalım,

$$x_k = \begin{cases} x, & k \in I_{r(j)} \quad (j = 1, 2, \ldots, n, \ldots), \\ 0, & \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

olsun. Bu takdirde $(x_k) \in S(X)$(hatta $(x_k) \in S_0(X)$) dir. Bunu göstermek için 0 ın herhangi bir U komşuluğunu alalım. Bu takdirde $W \subset U$ ve $x \notin W$ olacak şekilde 0 ın bir W komşuluğunu seçebiliriz. Diğer taraftan her bir m için $k_{r(j_m)} < m < k_{r(j_m)+1}$ olacak şekilde j_m pozitif sayısı bulabiliriz. Bu takdirde her bir m için,

$$m^{-1}|\{k \leq m : x_k \notin U\}| \leq k_{r(j_m)}^{-1}|\{k \leq m : x_k \notin W\}|$$

$$\leq k_{r(j_m)}^{-1}\{|\{k \leq k_{r(j_m)} : x_k \notin W\}| + |\{k_{r(j_m)} < k \leq m : x_k \notin W\}|\}$$
$$\leq k_{r(j_m)}^{-1}|\{k \leq k_{r(j_m)} : x_k \notin W\}| + k_{r(j_m)}^{-1}(k_{r(j_m)+1} - k_{r(j_m)})$$
$$< (j_m + 1)^{-1} + 1 + j_m^{-1} - 1 < (j_m + 1)^{-1} + j_m^{-1}$$

olur. Dolayısıyla $(x_k) \in S_0(X)$ *dir. Şimdi* $(x_k) \notin S_\theta(X)$ *olduğunu göstereceğiz.* X *Hausdorff uzayı olduğundan* $x \notin V$ *olacak şekilde* 0 *ın bir* V *simetrik komşuluğu vardır. Böylece,*

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}(h_r)^{-1}|\{k_{r(j)-1} &< k \leq k_{r(j)} : x_k \notin V\}| \\ &= \lim_{j\to\infty}(h_r)^{-1}(k_{r(j)} - k_{r(j)-1}) \\ &= \lim_{j\to\infty}(h_r)^{-1}(h_{r(j)}) = 1\end{aligned}$$

ve

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\neq r(j), j=1,2,\ldots}} h_r^{-1}|\{k_{r-1} < k < k_r : x_k - x \notin V\}| = 1 \neq 0$$

dir. Buradan ne x *nede* 0, (x_k) *dizisinin lacunary istatistiksel limitidir. Aynı zamanda* X *uzayının hiç bir noktası* (x_k) *dizisinin lacunary istatistiksel limiti değildir. Böylece* $(x_k) \notin S_\theta(X)$ *dir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.*

Teorem 3.2.3. [7] *Herhangi bir* θ *lacunary dizisi için,* $S_\theta(X) \subseteq S(X)$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\limsup_r q_r < \infty$ *olmasıdır.*

İspat: $\Leftarrow$ $\limsup_r q_r < \infty$ *olduğunu varsayalım.* $\forall r$ *için* $q_r < H$ *olacak şekilde bir* $H > 0$ *vardır.* (x_k) *dizisi* $S_\theta(X)$ *in bir elemanı yani* $S_\theta - \lim x_k = l$ *olsun.* 0 *ın herhangi bir* U *komşuluğunu alalım.* ϵ *herhangi bir pozitif sayı olsun.* $N_r = |\{k \in I_r : x_k - l \notin U\}|$ *şeklinde tanımlansın. Lacunary istatistiksel yakınsaklığın tanımından* $\forall r > r_0$ *için* $N_r(h_r)^{-1} < \epsilon(2H)^{-1}$ *olacak şekilde bir* r_0 *pozitif tamsayısı vardır.* $M = \max\{N_r : 1 \leq r \leq r_0\}$ *ve* n, $k_{r-1} < n \leq k_r$ *eşitsizliğini sağlayan herhangi bir tamsayı olsun. Bu takdirde,*

$$n^{-1}|\{k \leq n : x_k - l \notin U\}| \leq r_0 M(k_{r-1})^{-1} + \epsilon(2H)^{-1}q_r$$

yazabiliriz. $\lim_{r\to\infty} k_r = \infty$ *olduğundan* $r > r_1$ *için,*

$$(k_{r-1})^{-1} < (2r_0M/\epsilon)^{-1}$$

olacak şekilde bir $r_1 \geq r_0$ pozitif tamsayısı vardır. Buradan $r > r_1$ için,

$$n^{-1}|\{k \leq n : x_k - l \notin U\}| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

dir. Böylece $S - \lim x_k = l$ olur.

$\Rightarrow$ $\limsup_r q_r = \infty$ *olduğunu varsayalım. X in 0 dan farklı bir x elemanını alalım. $q_{r(j)} > j, k_{r(j)} > j + 3$ olacak şekilde $\theta = (k_r)$ lacunary dizisinin bir $(k_{r(j)})$ alt dizisini alalım ve (x_k) dizisini şöyle tanımlayalım,*

$$x_k = \begin{cases} x, & k_{r(j)-1} < k \leq 2k_{r(j)-1} \quad (j = 1, 2, \ldots, n, \ldots), \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

olsun. U, x i içermeyen 0 ın simetrik bir komşuluğu olsun. Bu takdirde $j > 1$ için,

$$\begin{aligned} (h_r)^{-1}|\{k \leq k_{r(j)} : x_k \notin U\}| &< (k_{r(j)-1})(h_{r(j)})^{-1} \\ &= (k_{r(j)-1})(k_{r(j)} - k_{r(j)-1})^{-1} < (j-1)^{-1} \end{aligned}$$

dir. Buradan $(x_k) \in S_\theta(X)$ olur. Fakat $(x_k) \notin S(X)$ dir.

$$\begin{aligned} (2k_{r(j)-1})^{-1}|\{k &\leq 2k_{r(j)-1} : x_k \notin U\}| \\ &= (2k_{r(j)-1})^{-1}[k_{r(1)-1} + k_{r(2)-1} + \cdots + k_{r(j)-1}] > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olduğundan (x_k) dizisi istatistiksel yakınsak olamaz. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.4. *θ bir lacunary dizisi olsun. Bu takdirde $S(X) = S_\theta(X)$ olması için gerek ve yeter koşul*

$$1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$$

olmasıdır. (H. Çakallı, [6])

Teorem 3.2.5. *Bir (x_k) dizisi hem $S(X)$ e hemde $S_\theta(X)$ e ait ise ,*

$$S - \lim_{k\to\infty} x_k = S_\theta - \lim_{k\to\infty} x_k$$

dir.

İspat: *Herhangi bir* $(x_k) \in S(X) \cap S_\theta(X)$ *alalım.* $S - \lim_{k\to\infty} x_k = l_1$ *ve* $S_\theta - \lim_{k\to\infty} x_k = l_2$ *olsun.* $l_1 \neq l_2$ *olduğunu varsayalım.* X *bir Hausdorff uzay olduğundan* $l_1 - l_2 \notin U$ *olacak şekilde* 0 *ın bir* U *simetrik komşuluğu vardır.* $W + W \subset U$ *olacak şekilde* 0 *ın bir* W *simetrik komşuluğunu seçebiliriz. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:* $\forall k \in \mathbb{N}$ *için* $z_k = l_2 - l_1$ *olmak üzere,*

$(k_m)^{-1}|\{k \leq k_m : z_k \notin U\}|$

$\leq (k_m)^{-1}|\{k \leq k_m : x_k - l_1 \notin W\}| + (k_m)^{-1}|\{k \leq k_m : l_2 - x_k \notin W\}|$

Bu eşitsizlikten,

$1 \leq (k_m)^{-1}|\{k \leq k_m : x_k - l_1 \notin W\}| + (k_m)^{-1}|\{k \leq k_m : l_2 - x_k \notin W\}|$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terim $m \to \infty$ *a giderken* 0 *a yaklaşır. Bunu göstermek için,*

$t_r = h_r^{-1}|\{k \in I_r : l_2 - x_k \notin W\}|$ *olmak üzere*

$(k_m)^{-1}|\{k \leq k_m : l_2 - x_k \notin W\}| = (k_m)^{-1}|\{k \in \bigcup_{r=1}^m I_r : I_2 - x_k \notin W\}|$

$= (k_m)^{-1} \sum_{r=1}^m |\{k \in I_r : l_2 - x_k \notin W\}| = (\sum_{r=1}^m h_r)^{-1}(\sum_{r=1}^m h_r.t_r)$

yazalım. $S_\theta - \lim x_k = l_2$ *olduğundan* $\lim_{r\to\infty} t_r = 0$ *dır. Bu nedenle* t_r *nin regüler ağırlık anlamındaki dönüşümü de sıfıra yakınsar ki,*

$$\lim_{m\to\infty}(k_m)^{-1}|\{k \leq k_m : l_2 - x_k \notin W\}| = 0 \qquad (i)$$

olur. Diğer taraftan $S - \lim x_k = l_1$ *olduğundan,*

$$\lim_{m\to\infty}(k_m)^{-1}|\{k \leq k_m x_k - l_1 \notin W\}| = 0 \qquad (ii)$$

dır. (i) *ve* (ii) *den,*

$$\lim_{m\to\infty}(k_m)^{-1}|\{k \leq k_m : z(k) \notin U\}| = 0$$

elde edilir ve bu durum çelişki yaratır. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 3.2.2. $\theta = (k_r)$ *bir lacunary dizisi ve* (x_k)*,* X *de bir dizi olsun.* $\forall r$ *için* $k'(r) \in I_r$*,* $\lim_{r\to\infty} x_{k'(r)} = l$ *ve* 0 *ın her* U *komşuluğu için,*

$$\lim_{r\to\infty}(h_r)^1|\{k \in I_r : x_k - x_{k'(r)} \notin U\}| = 0$$

olacak şekilde (x_k) dizisinin bir $(x_{k'(r)})$ alt dizisi varsa (x_k) dizisine S_θ-Cauchy dizisi denir. (*H. Çakallı,* [6])

Teorem 3.2.6. *Bir (x_k) dizisinin S_θ-yakınsak olması için gerek ve yeter koşul bir S_θ-Cauchy dizisi olmasıdır.* (*H. Çakallı,* [6])

İspat: $\Leftarrow$ *(x_k) dizisinin bir S_θ-Cauchy olduğunu varsayalım. U, 0 ın herhangi bir komşuluğu olsun. Bu takdirde $W+W \subseteq U$ olacak şekilde 0 ın bir W komşuluğunu seçebiliriz. Böylece,*

$$(h_r)^{-1}|\{k \in I_r : x_k - l \notin U\}| \leq (h_r)^{-1}|\{k \in I_r : x_k - x_{k'(r)} \notin W\}|$$

$$+(h_r)^{-1}|\{k \in I_r : x_{k'(r)} - l \notin W\}|$$

olur. $\lim_{r\to\infty}(h_r)^{-1}|\{k \in I_r : x_k - x_{k'(r)} \notin U\}| = 0$ *ve* $\lim_{r\to\infty} x_{k'(r)} = l$ *olduğundan, yukarıdaki eşitsizlik yardımıyla* $S_\theta - \lim_{k\to\infty} x_k = l$ *olarak bulunur.*

$\Rightarrow$ $S_\theta - \lim_{k\to\infty} x_k = l$ *olacak şekilde bir (x_k) dizisi alallım. (U_n), 0 ın iç içe bir komşuluklar tabanı olsun. Her bir $j \in \mathbb{N}$ için $K^j = \{k \in \mathbb{N} : x(k) - l \in U_j\}$ olsun. Böylece her bir j için $K^{j+1} \subseteq K^j$ ve $\lim |K^j \cap I_r|(h_r)^{-1} = 1$ dir. $r \geq m(1)$ olduğunda $|K^{(1)} \cap I_r| > 0$ olacak şekilde bir $m(1)$ seçelim, yani $K^{(1)} \cap I_r \neq \emptyset$ olsun. Bu takdirde $m(1) \leq r < m(2)$ sağlayan her bir r için $k'(r) \in K^{(1)} \cap I_r$ olacak şekilde $k'(r) \in I_r$ seçelim, yani $x(k'(r)) - l \in U_1$ Genel olarak $r > m(p+1)$ olduğunda $I_r \cap K^{p+1} \notin \emptyset$ olacak şekilde $m(p+1) > m(p)$ seçelim. Bu takdirde $m(p) \leq r < m(p+1)$ eşitsizliğini sağlayan $\forall r$ için $k'(r) \in I_r \cap K^{(p)}$ seçeriz yani $x_{k'(r)} - l \in U_p$ olsun. Buradan $\lim_{r\to\infty} x_{(k'(r)} = l$ olduğu görülür. U, 0 ın herhangi bir komşuluğu olsun. Bu takdirde $W+W \subseteq U$ olacak şekilde 0 ın bir W simetrik komşuluğunu seçebiliriz. Buaradan,*

$$(h_r)^{-1}|\{k \in I_r : x_k - x_{k'(r)} \notin U\}| \leq (h_r)^{-1}|\{k \in I_r : x_k - l \notin W\}|$$

$$+(h_r)^{-1}|\{k \in I_r : l - x_{k'(r)} \notin W\}|$$

olur. $S_\theta - \lim_{r\to\infty} x_k = l$ *ve* $\lim_{r\to\infty} x_{k'(r)} = l$ *olduğundan,*

$$\lim_{r\to\infty}(h_r)^{-1}|\{k \in I_r : x_k - x_{k'(r)} \notin U\}| = 0$$

olur ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.7. *Herhangi bir lacunary istatistiksel yakınsak dizinin yakınsak bir altdizisi vardır.*

Bölüm 4

Topolojik Uzaylarda İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde topolojik uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramını verip özel olarak yerel katı Riesz uzayında istatistiksel yakınsaklık ve lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramlarını ve özelliklerini inceleyeceğiz.

4.1 Topolojik Uzaylarda İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 4.1.1. [21] $(x_n)_{n\in N}$, *X topolojik uzayında bir dizi ve $x \in X$ olsun. x in her U komşuluğu için*

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\}) = 0$$

oluyorsa x_n dizisi x e istatistiksel yakınsaktır denir ve $s-\lim x_n = x$ olarak gösterilir.

$X = R$ aldığımızda yukarıdaki tanımın eşdeğer bir ifadesi söyledir; $(x_n)_{n\in A} \to x$ olacak şekilde $\delta(A) = 1$ olan $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir A altkümesi vardır, yani x in herbir V komşuluğu için $n \geq n_0$ ve $n \in A$ olduğunda $x_n \in V$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

Yukarıdaki ifade, topolojik uzaylarda yeni bir yakınsaklık ifadesinin doğmasını sağlamıştır.

Tanım 4.1.2. [21]

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X topolojik uzayında bir dizi ve $x \in X$ olsun. $\lim x_{m\to\infty, m\in A} = x$ olacak şekilde $\delta(A) = 1$ olan bir $A \subset \mathbb{N}$ altkümesi varsa (x_n) dizisi , x e s^*- yakınsaktır denir ve $s^* - \lim x_n = x$ olarak gösterilir.

Yardımcı Teorem 4.1.1. [21]
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X topolojik uzayında bir dizi ve $x \in X$ olsun. $s^*-\lim x_n = x$ ise $s-\lim x_n = x$ dir.

İspat: *U , x in bir komşuluğu olsun. $s^* - \lim x_n = x$ olduğundan $n \geq n_0$ ve $n \in A$ olduğunda $x_n \in U$ olacak şekilde $\delta(A) = 1$ olan bir $A \subset \mathbb{N}$ altkümesi ve $n_0 = n_0(U)$ vardır. Bu takdirde*

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\} \subset \{1, 2, \ldots, n_0\} \cup (\mathbb{N} \backslash A)$$

dır ve $\delta(\{1, 2, \ldots, n_0\} \cup (\mathbb{N} \backslash A)) = 0$ olduğundan $s-\lim x_n = x$ olur ve teorem ispatlanır

Fakat, bunun karşıtı birinci sayılabilir uzaylarda sağlanır.

Yardımcı Teorem 4.1.2. [21] *X birinci sayılabilir bir uzay, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ X uzayındaki bir dizi ve $x \in X$ olsun. $s - \lim x_n = x$ ise $s^* - \lim x_n = x$ dir.*

İspat:
X birinci sayılabilir uzay olduğundan bir $x \in X$ noktasında X in sayılabilir azalan bir komşuluk tabanı vardır ve bu komşuluk tabanı $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ olsun. Her bir $i \in \mathbb{N}$ için

$$A_i = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_i\}$$

olarak tanımlayalım. Buradan $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ ve $\forall i \in \mathbb{N}$ için $\delta(A_i) = 1$ olur. $k_1 \in A_1$ alalım. Ohalde her bir $n \geq k_2$ için

$$\frac{|A_2(n)|}{n} = \frac{|\{m \in A_2 : m \leq n\}|}{n} > \frac{1}{2}$$

olacak şekilde bir $k_2 \in A$, $k_2 > k_1$ vardır(çünkü $\delta(A_2) = 1$). Ve böyle devam edersek her bir $n \geq k_i$ için,

$$\frac{|A_i(n)|}{n} = \frac{|\{m \in A_i : m \leq n\}|}{n} > 1 - \frac{1}{i}$$

yi sağlayan $k_1 < k_2 < \ldots, k_i \in A_i$ elde ederiz

$A \subset \mathbb{N}$ kümesini şöyle oluştururuz. Her $k \leq k_1$ için $k \in A$ dır. Eğer $i \geq 1$ ve $k_i < k < k_{i+1}$ ise $k \in A$ olması için gerek ve yeter koşul $k \in A_i$ olmasıdır. $A = \{n_1 < n_2 < \ldots\}$ olsun. Eğer $n \in \mathbb{N}$, $k_i < n < k_{i+1}$ aralığında ise

$$\frac{|A(n)|}{n} \geq \frac{|A_i(n)|}{n} > 1 - \frac{1}{i}$$

olur ve sonuç olarak $\delta(A) = 1$ *dir.*
Şimdi $\lim_{n\to\infty, n\in A} x_n = \lim_{i\to\infty} x_{n_i} = x$ *olduğunu gösterelim.* V, x *in bir komşuluğu ve* $U_i \subset V$ *olsun. Eğer* $n \in A$ *ve* $n \geq k_i$ *ise* $k_j \leq n \leq k_{j+1}$ *olacak şekilde* $j \geq i$ *vardır ve* A *nın tanımından* $n \in A_j$ *olur. Böylece herbir* $n \in A, n \geq k_i$ *için* $x_n \in U_j \subset U_i \subset V$ *olurki* $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = x$ *elde edilir ve ispat tamamlanır.*

Teorem 4.1.3. [21]
Hausdorff uzaylarda istatistiksel yakınsak dizinin limiti tektir.

Tanım 4.1.3. [21]***(İstatistiksel Yoğun Küme)*** *Bir* $A \subset \mathbb{N}$ *alt kümesi için* $\delta(A) = 1$ *ise* A *kümesine istatistiksel yoğundur denir.*

Yardımcı Teorem 4.1.4. [21]

Bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul istatistiksel yoğun bir alt dizisinin istatistiksel yakınsak olmasıdır.*

İspat:
Yeter şart açıktır.
Gerek şart: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi ,* x *e istatistiksel yakınsak olsun ve* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *dizisi* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisinin istatistiksel olarak yoğun bir alt dizisi olsun.* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *dizisinin istatistiksel ıraksak olduğunu farzedelim. Ohalde* $\forall p \in X$ *için* $\delta(\{k \in \mathbb{N} : x_{n_k} \notin V\}) \neq 0$ *olacak şekilde* p *nin bir* V *komşuluğu vardır. Bu takdirde*

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin V\}) \geq \delta(\{k \in \mathbb{N} : x_{n_k} \notin V\}) \neq 0$$

olup (x_n) *dizisi ıraksar. Böylece çelişki elde edilir. Bu takdirde* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *dizisi istatistiksel yakınsak olmalıdır.*

Şimdi topolojik uzaylarda istatistiksel limit noktası ve istatistiksel yığılma noktası tanımlarını vereceğiz.

Tanım 4.1.4. [21]***(İstatistiksel Limit Noktası)*** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *,bir* X *topolojik uzayında bir dizi olsun.* $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ *olacak şekilde ,*

$$\{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \dots\} \subset \mathbb{N}$$

kümesinin yoğunluğu sıfırdan farklı ise x noktasına (x_n) dizisinin istatistiksel limit noktası denir.

Bir (x_n) dizisinin tüm istatistiksel limit noktalarının kümesi, $\Lambda(x_n)$ ile gösterilsin.

Tanım 4.1.5. [21]***(İstatitiksel Yığılma Noktası)*** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *, bir X topolojik uzayında bir dizi olsun. x in her U komşuluğu için $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$ kümesinin üst yoğunluğu pozitif ise x e (x_n) dizisinin istatistiksel yığılma noktası denir.*

Bir (x_n) dizisinin tüm istatistiksel yığılma noktalarının kümesi ,$\Theta(x_n)$ ile gösterilsin.

Teorem 4.1.5. [21] *Herhangi bir X topolojik uzayı ve bu uzaydaki herhangi bir (x_n) dizisi için $\Lambda(x_n) \subset \Theta(x_n)$ dir.*

İspat: *$y \in \Lambda(x_n)$ olsun ve (x_{n_k}) dizisi $\overline{\delta}(\{n_k : k \in \mathbb{N}\}) = \alpha > 0$ ve $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = y$ koşullarını sağlayan (x_n) nin bir alt dizisi olsun. U, y nin bir komşuluğu olsun. Bu takdirde sonlu sayıda k lar yani $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{i_0}$ hariç tüm k lar için $x_{n_k} \in U$ dur. Dahası,*

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \quad \supset \quad \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \backslash \{n_{k_1}, \ldots, n_{k_{i0}}\}$$

ve böylece

$$\overline{\delta}(\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}) = \lim_{m\to\infty} \sup \tfrac{|\{n\leq m : x_n \in U\}|}{m} \geq \lim_{m\to\infty} \sup \tfrac{|\{n_k : k\in\mathbb{N}\}|}{m} - \tfrac{1}{m} O(1) \geq \tfrac{\alpha}{2}$$

dir. (Burada kullandığım O klasik Landau notasyonudur). Böylece $y \in \Theta(x_n)$ olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.6. [21] *X bir topolojik uzay ve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bu uzayda herhangi bir dizi olsun. $\Theta(x_n)$ kümesi kapalıdır.*

İspat: *$y \in \overline{\Theta(x_n)}$ ve U, y nin herhangi bir komşuluğu olsun. Bir $z \in U \cap \Theta(x_n)$ noktası vardır. $V \subset U$ olacak şekilde z nin bir V komşuluğunu alalım. z, $\Theta(x_n)$ de olduğundan,*

$$\overline{\delta}(\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}) > 0$$

dır. $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \supset \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$ olduğundan,

$$\overline{\delta}(\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}) > 0$$

elde edilir. Böylece $y \in \Theta(x_n)$ *dir.*

Teorem 4.1.7. [21] $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ve* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X *uzayında birer dizi olsunlar.* $\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}) = 0$ *ise* $\Theta(x_n) = \Theta(y_n)$ *ve* $\Lambda(x_n) = \Lambda(y_n)$ *dir.*

İspat: $p \in \Theta(x_n)$ *ve* U, p *nin bir komşuluğu olsun. Bu takdirde* $\overline{\delta}(\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}) > 0$ *dır.Ayrıca*

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \backslash \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : y_n \in U\}$$

ve $\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}) = 0$ *olduğundan ,*

$$\overline{\delta}(\{n \in \mathbb{N} : y_n \in U\}) > 0$$

elde edilir. Böylece $p \in \Theta(y_n)$ *olur. Simetri alınarak* $\Theta(y_n) \subset \Theta(x_n)$ *olduğu görülür. Böylece* $\Theta(x_n) = \Theta(y_n)$ *eşitliği sağlanır.*

$\Lambda(x_n) = \Lambda(y_n)$ *eşitliği benzer şekilde gösterilir.*

Teorem 4.1.8. [21]
K , X *uzayının kompakt bir altkümesi olsun bu takdirde* $\overline{\delta}(\{n \in \mathbb{N} : x_n \in K\}) > 0$ *olacak şekilde* X *deki herbir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi için* $K \cap \Theta(x_n) \neq \emptyset$ *dır.*

İspat: $K \cap \Theta(x_n) = \emptyset$ *olsun.Bu takdirde her* $y \in K$ *için* y *nin bir* V_y *komşuluğu vardır öyleki* $M_y = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V_y\}$ *kümesinin yoğunluğu* 0 *dır.* K *nın* $\{V_y : y \in K\}$ *açık örtüsünden* K *nın* $\{V_{y_1}, \ldots, V_{y_j}\}$ *sonlu altörtüsünü alalım.*

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in K\} \subset M_{y_1} \cup, \cdots \cup M_{y_j}$$

olduğundan , $\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n \in K\}) = 0$ *olur ve böylece çelişki elde etmiş oluruz. Bu takdirde* $K \cap \Theta(x_n) \neq \emptyset$ *dır. Böylece ispat tamamlanır.*

4.2 Yerel Katı Riesz Uzayında İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde yerel katı Riesz uzaylarında istatistiksel τ-yakınsak, istatistiksel τ-Cauchy yakınsak ve istatistiksel τ-sınırlı dizi kavramlarını ve özelliklerini inceleyeceğiz Daha sonra istatistiksel süreklilik kavramından ve özelliklerinden bahsedeceğiz.

Tanım 4.2.1. [1]***(İstatistiksel τ-Yakınsaklık)*** (X, τ) *yerel katı bir Riesz uzayı ,* (x_n) *,* X *uzayında bir dizi ve* $x_0 \in X$ *olsun. Sıfırın her* U τ*-komşuluğu için ,*

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n - x_0 \notin U\}) = 0$$

sağlanıyorsa (x_n) *dizisi* x_0 *a istatistiksel* τ*- yakınsaktır denir. Kısaca* $st_\tau - \lim x_n = x_0$ *olarak gösterilir.*

Örnek 4.2.1. $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$ *yerel katı Riesz uzayını inceleyelim (*$\|.\|$ *norm Öklid normu) ve* (x_n) *dizisini şöyle tanımlayalım,*

$$x_n = \begin{cases} (2 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{3}{n}) & n \neq k^2 \ ,k \in \mathbb{N} \\ (5, 5) & n = k^2 \end{cases}$$

Tüm $V(\epsilon)$ *ların* $\mathcal{N}sol$ *ailesi söyle tanımlansın,*$0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ *ve sıfır tabanı* $(\theta = (0, 0))$ *olmak üzere,*

$V(\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < \epsilon\}$

$x_0 = (2, 1)$ *için ,*

$$x_n - x_0 = \begin{cases} (\frac{1}{n}, \frac{3}{n}) & n \neq k^2 \ ,k \in \mathbb{N} \\ (3, 4) & n = k^2 \end{cases}$$

Sıfırın her U τ*- komşuluğu ve* $\epsilon > 0$ *için* $V(\epsilon) \subseteq U$ *olacak şekilde* $V(\epsilon) \in \mathcal{N}sol$ *sayıları vardır öyleki* A *sonlu bir küme olmak üzere ,*

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n - x_0 \notin V(\epsilon)\} = A \cup \{1, 4, 9, 16, \ldots, k^2, \ldots\}$$

Buradan ,

$$\begin{aligned} \delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n - x_0 \notin U\}) &\leq \delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n - x_0 \notin V(\epsilon)\}) \\ &= \delta(A) + \delta(\{1, 4, 9, 16, \ldots, k^2, \ldots\}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak $st_\tau - \lim x_n = (2, 1)$ *olur.*

Tanım 4.2.2. [1]***(İstatistiksel τ-Sınırlı Dizi)***
(x_n), (X,τ) yerel katı Riesz uzayında bir dizi olsun. Sıfırın her U τ-komşuluğu için ,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \lambda x_n \notin U\}) = 0$$

*olacak şekilde $\lambda > 0$ sayıları varsa (x_n) dizisine **istatistiksel τ- sınırlıdır** denir.*

Tanım 4.2.3. [1]***(İstatistiksel τ-Cauchy Dizisi)***
(x_n), (X,τ) yerel katı Riesz uzayında bir dizi olsun. Sıfırın her U τ-komşuluğu için ,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n - x_k \notin U\}) = 0$$

*olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ sayıları varsa (x_n) dizisine **istatistiksel τ-Cauchy dizisi** denir.*

Teorem 4.2.1. *(X,τ) bir Hausdorf yerel katı bir Riesz uzayı olsun.(x_n) ve (y_n) , X uzayında birer dizi olsunlar. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(a) $st_\tau - \lim x_n = x_1$ ve $st_\tau - \lim x_n = x_2$ ise $x_1 = x_2$ dir.
(b) $st_\tau - \lim x_n = x$ ise $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $st_\tau - \lim \alpha x_n = \alpha x$ dir.
(c) $st_\tau - \lim x_n = x$ ve $st_\tau - \lim y_n = y$ ise $st_\tau - \lim(x_n + y_n) = x + y$ dir.

İspat:(a)
U , sıfırın herhangi bir τ-komşuluğu olsun. Bu takdirde $V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{N}sol$ vardır. Önerme 1.1.4 *ün*
(c) *özelliğinden $W + W \subseteq V$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{N}sol$ seçebiliriz. $st_\tau - \lim x_n = x_1$ ve $st_\tau - \lim x_n = x_2$ olduğundan*

$$K_1 = \{n \in \mathbb{N} : x_n - x_1 \in W\}$$

ve

$$K_2 = \{n \in \mathbb{N} : x_n - x_2 \in W\}$$

olacak şekilde bir $\delta(K_1) = \delta(K_2) = 1$ vardır.
$K = K_1 \cap K_2$ olsun. $\forall n \in K$ için ,

$$x_1 - x_2 = x_1 - x_n + x_n - x_2 \in W + W \subseteq V \subseteq U$$

Böylece sıfırın her U τ*-komşuluğu için* $x_1 - x_2 \in U$. (X, τ) *Hausdorff uzayı olduğundan , sıfırın tüm* U τ*-komşuluklarının kesişimi tek nokta kümesi* $\{\theta\}$ *dır. Buradan* $x_1 - x_2 = \theta$ *dır. Böylece* $x_1 = x_2$ *elde edilir.*

İspat (b): $st_\tau - \lim x_n = x$ *ve* U *, sıfırın keyfi bir* τ*-komşuluğu olsun. Bu takdirde* $V \subseteq U$ *olacak şekilde bir* $V \in \mathcal{N}sol$ *vardır.* $st_\tau - \lim x_n = x$ *olduğundan ,*

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n - x \in V\}) = 1$$

$|\alpha| \leq 1$ *olsun.*V *dengeli küme olduğundan ,* $x_n - x \in V$ *olması* $\alpha(x_n - x) \in V$ *olmasını gerektirir. Bu takdirde,*

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n - x \in V\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : \alpha x_n - \alpha x \in V\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : \alpha x_n - \alpha x \in U\}.$$

dur. Böylece sıfırın her U τ*-komşuluğu için,*

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \alpha x_n - \alpha x \in U\} = 1$$

elde edilir. Şimdi de $|\alpha| > 1$ *ve* $\lceil|\alpha|\rceil$, $|\alpha|$ *dan büyük veya eşit en küçük tamsayı olsun.* .$\lceil|\alpha|\rceil W \subseteq V$ *olacak şekilde bir* $W \in \mathcal{N}sol$ *vardır.* $st_\tau - \lim x_n = x$ *olduğundan ,*

$$K = \{n \in \mathbb{N} : x_n - x \in W\}$$

olacak şekilde $\delta(K) = 1$ *vardır. Bu takdirde* $\forall n \in K$ *için,*

$$|\alpha x - \alpha x_n| = |\alpha||x - x_n| \leq \lceil|\alpha|\rceil|x - x_n| \in \lceil|\alpha|\rceil W \subseteq V \subseteq U$$

olur. V *katı(solid) olduğundan* $\alpha x - \alpha x_n \in V$ *dir. Böylece* $\forall n \in K$ *için* $\alpha x - \alpha x_n \in U$ *olur. Bu takdirde sıfırın her* U τ*-komşuluğu için ,*

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \alpha x - \alpha x_n \in U\}) = 1$$

elde ederiz. Bu takdirde $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $st_\tau - \lim \alpha x_n = \alpha x$ *olur ve ispat tamamlanır.*

İspat (c):U *, sıfırın keyfi bir* τ*-komşuluğu olsun. Bu takirde* $V \subseteq U$ *olacak şekilde bir* $V \in \mathcal{N}sol$ *vardır.* $W + W \subseteq V$ *olacak şekilde başka bir* $W \in \mathcal{N}sol$ *seçelim.*$st_\tau - \lim x_n = x$ *ve* $st_\tau - \lim y_n = y$ *olduğundan,*

$$K_1 = \{n \in \mathbb{N} : x_n - x \in W\}$$

ve

$$K_2 = \{n \in \mathbb{N} : y_n - y \in W\}$$

olacak şekilde bir $\delta(K_1) = \delta(K_2) = 1$ *vardır.* $K = K_1 \cap K_2$ *olsun. Bu takdirde* $\delta(K) = 1$ *ve* $\forall n \in K$ *için ,*

$$(x_n + y_n) - (x + y) = (x_n - x) + (y_n - y) \in W + W \subseteq V \subseteq U.$$

Böylece,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : (x_n + y_n) - (x + y) \in U\}) = 1$$

elde ederiz. U keyfi olduğundan $st_\tau - \lim(x_n + y_n) = x + y$ olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2. *(X, τ) yerel katı Riesz uzayındaki bir (x_n) dizisi istatistiksel τ-yakınsak ise istatistiksel τ-sınırlıdır.*

İspat:*(x_n) dizisi $x_0 \in X$ noktasına istatistiksel τ-yakınsak olsun. U, sıfırın keyfi bir τ-komşuluğu olsun. Bu takdirde $V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{N}sol$ vardır. $W + W \subseteq V$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{N}sol$ seçebiliriz. $st_\tau - \lim x_n = x_0$ olduğundan ,*

$$K = \{n \in \mathbb{N} : x_n - x_0 \notin W\}$$

olacak şekilde bir $\delta(K) = 0$ vardır. W soğurğan olduğundan $\mu x_0 \in W$ olacak şekilde bir $\mu > 0$ vardır.$\lambda \leq 1$ ve $\lambda \leq \mu$ olsun. W katı(solid) ve $|\lambda x_0| \leq |\mu x_0|$ olduğundan $\lambda x_0 \in W$ dir. W dengeli olduğundan , $x_n - x_0 \in W$ olması $\lambda(x_n - x_0) \in W$ olmasını gerektirir.$\forall n \in \mathbb{N} \backslash K$ için ,

$$\lambda x_n = \lambda(x_n - x_0) + \lambda x_0 \in W + W \subseteq V \subseteq U$$

olur. Böylece ,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \lambda x_n \notin U\}) = 0$$

elde ederiz. Sonuç olarak , (x_n) dizisi istatistiksel τ-sınırlıdır.

Teorem 4.2.3. *(X, τ) yerel katı Riesz uzayındaki bir (x_n) dizisi istatistiksel τ-yakınsak ise istatistiksel τ-Cauchy dir.*

İspat:*(x_n) dizisi $x_0 \in X$ noktasına istatistiksel τ-yakınsak olsun. U, sıfırın keyfi bir τ-komşuluğu olsun. Bu takdirde $V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{N}sol$ vardır.$W + W \subseteq V$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{N}sol$ seçebiliriz. $st_\tau - \lim x_n = x_0$ olduğundan ,*

$$K = \{n \in \mathbb{N} : x_n - x_0 \notin W\}$$

olacak şekilde bir $\delta(K) = 0$ vardır. $\forall k, n \in \mathbb{N} \backslash K$ için ,

$$x_n - x_k = x_n - x_0 + x_0 - x_k \in W + W \subseteq V \subseteq U$$

olduğundan

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n - x_k \notin U\} \subseteq K$$

Bu takdirde sıfırın her U τ-komşuluğu için,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n - x_k \notin U\}) = 0$$

olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ sayıları vardır. Buradan (x_n) dizisinin istatistiksel τ-Cauchy dizisi olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.4. *(X, τ) yerel katı bir Riesz uzayı olsun ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq y_n \leq z_n$ olacak şekilde (x_n),(y_n) ve (z_n), X uzayında birer dizi olsunlar. Eğer $st_\tau - \lim x_n = st_\tau - \lim z_n = a$ ise bu takdirde $st_\tau - \lim y_n = a$ dır.*

İspat: *U, sıfırın keyfi bir τ-komşuluğu olsun.Buhalde $V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{N}sol$ vardır.$W + W \subseteq V$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{N}sol$ seçebiliriz. $st_\tau - \lim x_n = st_\tau - \lim z_n = a$ olduğundan ,*

$$K_1 = \{n \in \mathbb{N} : x_n - a \in W\}$$

ve

$$K_2 = \{n \in \mathbb{N} : z_n - a \in W\}$$

olacak şekilde bir $\delta(K_1) = \delta(K_2) = 1$ vardır.$K = K_1 \cap K_2$ olsun.$\forall n \in K$ için,

$$\begin{aligned} x_n &\leq y_n \leq z_n \\ x_n - a &\leq y_n - a \leq z_n - a \\ |y_n - a| &\leq |x_n - a| + |z_n - a| \in W + W \subseteq V \end{aligned}$$

V katı(solid) olduğundan ,$\forall n \in K$

$$y_n - a \in V \subseteq U$$

dur. Bu takdirde sıfırın her U τ-komşuluğu için ,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : y_n - a \in U\}) = 1$$

olacağından $st_\tau - \lim y_n = a$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Şimdi yerel katı Riesz uzaylarında istatistiksel süreklilik kavramından ve özelliklerini inceleyelim.

Tanım 4.2.4. [1]***(İstatistiksel Süreklilik)***
(X_1, τ_1) ve (X_2, τ_2) yerel katı Riesz uzayı ve $A \subset X_1$ olsun . $f : A \to X_2$ bir fonksiyon olmak üzere bir $x_0 \in A$ noktasında $st_{\tau_1} - \lim x_n = x_0$ olması X_2 uzayında $st_{\tau_2} - \lim f(x_n) = f(x_0)$ olmasını gerektiriyorsa f fonksiyonu x_0 noktasında istatistiksel süreklidir denir.

Teorem 4.2.5. *(X_1, τ_1) ve (X_2, τ_2) yerel katı Riesz uzayı olsun.$f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ fonksiyonu düzgün sürekli ise f istatistiksel süreklidir.*

İspat:*$f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ fonksiyonu düzgün sürekli olsun ve X_1 de $st_{\tau_1} - \lim x_n = x_0$ sağlansın. X_1 ve X_2 nin sıfırları sırasıyla θ_1 ve θ_2 ile gösterilsin. V , θ_2 nin keyfi bir τ_2-komşuluğu olsun. f düzgün sürekli olduğundan ,*

$$x - y \in W \quad \Rightarrow \quad f(x) - f(y) \in V \qquad (1)$$

olacak şekilde θ_1 in W τ_1-komşulukları vardır. $st_{\tau_1} - \lim x_n = x_0$ olduğundan,

$$K = \{n \in \mathbb{N} : x_n - x_0 \in W\}$$

olacak şekilde $\delta(K) = 1$ vardır. (1) den $\forall n \in K$ için

$$f(x_n) - f(x_0) \in V.$$

olur. Böylece

$$K \subseteq \{n \in \mathbb{N} : f(x_n) - f(x_0) \in V\}$$

elde ederiz. Bu takdirde

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : f(x_n) - f(x_0) \in V\}) = 1$$

olur. Böylece $st_{\tau_2} - \lim f(x_n) = f(x_0)$ olur. Buda f nin istatistiksel sürekli olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.6. (X,τ) *yerel katı bir Riesz uzayı olsun. Aşağıdaki dönüşümler istatistiksel süreklidir.*

(a) $(X,\tau)\times(X,\tau)\to(X,\tau);(x,y)\mapsto x\vee y$
(b) $(X,\tau)\times(X,\tau)\to(X,\tau);(x,y)\mapsto x\wedge y$
(c)(X,τ) $\to(X,\tau);x\mapsto|x|$
(d)(X,τ) $\to(X,\tau);x\mapsto x^-$
(e)(X,τ) $\to(X,\tau);x\mapsto x^+$

İspat (a): $st_{\tau\times\tau}-\lim(x_n,y_n)=(x,y)$ *ve* U *,* X *uzayında sıfırın keyfi bir* τ*-komşuluğu olsun. Bu takdirde* $V\subseteq U$ *olacak şekilde bir* $V\in\mathcal{N}sol$ *vardır.* $W+W\subseteq V$ *olacak şekilde bir* $W\in\mathcal{N}sol$ *seçebiliriz.* $st_{\tau\times\tau}-\lim(x_n,y_n)=(x,y)$ *olduğundan ,*

$$K=\{n\in\mathbb{N}:(x_n-x,y_n-y)\in W\times W\}$$

olacak şekilde $\delta(K)=1$ *vardır. Ayrıca* $\forall n\in K$ *için ,*

$$|x_n\vee y_n-x\vee y|\leq|x_n-x|+|y_n-y|\in W+W\subseteq V$$

dir. V *katı olduğundan* $\forall n\in K$ *için* $x_n\vee y_n-x\vee y\in V$ *dir. Bu takdirde*

$$\{n\in\mathbb{N}:x_n\vee y_n-x\vee y\in U\}\supseteq K$$

elde edilir. Ve böylece

$$\delta(\{n\in\mathbb{N}:x_n\vee y_n-x\vee y\in U\})=1$$

olur. Sonuç olarak $st_\tau-\lim(x_n\vee y_n)=x\vee y$ *dir.*

İspat(b): U*, sıfırın keyfi bir* τ*-komşuluğu olsun. Bu takdirde* $V\subseteq U$ *olacak şekilde bir* $V\in\mathcal{N}sol$ *vardır.*$W+W\subseteq V$ *olacak şekilde bir* $W\in\mathcal{N}sol$ *seçebiliriz.* $st_{\tau\times\tau}-\lim(x_n,y_n)=(x,y)$ *olduğundan ,*

$$K=\{n\in\mathbb{N}:(x_n-x,y_n-y)\in W\times W\}$$

olacak şekilde $\delta(K)=1$ *vardır.*$\forall n\in K$ *için ,*

$$\begin{aligned}|x_n\wedge y_n-x\wedge y| &= |-[(-x_n)\vee(-y_n)]+[(-x)\vee(-y)]|\\ &\leq |(-x)-(-x_n)|+|(-y)-(-y_n)|\\ &= |x_n-x|+|y_n-y|\in W+W\subseteq V\end{aligned}$$

V *katı olduğundan* $\forall n\in K$ *için* $x_n\wedge y_n-x\wedge y\in V$ *dir. Böylece,*

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n \wedge y_n - x \wedge y \in U\}) = 1$$

elde ederiz. Bu takdirde $st_\tau - \lim(x_n \wedge y_n) = x \wedge y$ *dir.*

İspat (c): U*, sıfırın keyfi bir* τ*-komşuluğu olsun. Bu takdirde* $V \subseteq U$ *olacak şekilde bir* $V \in \mathcal{N}sol$ *vardır.* $W + W \subseteq V$ *olacak şekilde bir* $W \in \mathcal{N}sol$ *seçebiliriz.* $st_\tau - \lim x_n = x \in X$ *olsun. Bu takdirde,*

$$K = \{n \in \mathbb{N} : x_n - x \in W\}$$

olacak şekilde $\delta(K) = 1$ *vardır.*$\forall n \in K$ *için ,*

$$\begin{aligned} ||x_n| - |x|| &= |[x_n \vee (-x_n)] - [x \vee (-x)]| \\ &\leq |x_n - x| + |(-x_n) - (-x)| \in W + W \subseteq V \end{aligned}$$

dir. V *katı olduğundan* $\forall n \in K$ *için* $|x_n| - |x| \in V$ *dir. Böylece,*

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : |x_n| - |x| \in U\}) = 1$$

elde ederiz. Bu takdirde $st_\tau - \lim |x_n| = |x|$ *dir.*

İspat(d): U*, sıfırın keyfi bir* τ*-komşuluğu olsun. Bu takdirde* $V \subseteq U$ *olacak şekilde bir* $V \in \mathcal{N}sol$ *vardır.* $st_\tau - \lim x_n = x$ *olsun. Bu takdirde,*

$$K = \{n \in \mathbb{N} : x_n - x \in V\}$$

olacak şekilde $\delta(K) = 1$ *vardır.* $\forall n \in K$ *için,*

$$\begin{aligned} |x_n^- - x^-| &= |[(-x_n) \vee 0] - [(-x) \vee 0] \leq |(-x_n) - (-x)| + |0 - 0| \\ &= |x - x_n| \in V \end{aligned}$$

dir. V *katı olduğundan* $\forall n \in K$ *için* $x_n^- - x^- \in V$ *dir. Böylece,*

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n^- - x^- \in U\}) = 1,$$

elde ederiz. Bu takdirde $st_\tau - \lim x_n^- = x^-$ *dir.*

İspat(e): U*, sıfırın keyfi bir* τ*-komşuluğu olsun. Bu takdirde* $V \subseteq U$ *olacak şekilde bir* $V \in \mathcal{N}sol$ *vardır.*$st_\tau - \lim x_n = x$ *olsun. Bu takdirde,*

$$K = \{n \in \mathbb{N} : x_n - x \in V\}$$

olacak şekilde $\delta(K) = 1$ *vardır.* $\forall n \in K$ *için,*

$$\begin{aligned} |x_n^+ - x^+| &= |(x_n \vee 0) - (x \vee 0) \leq |x_n - x| + |0 - 0| \\ &= |x_n - x| \in V \end{aligned}$$

dir. V *katı olduğundan* $\forall n \in K$ *için* $x_n^+ - x^+ \in V$ *dir. Böylece ,*

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n^+ - x^+ \in U\}) = 1,$$

elde edilir. Bu takdirde $st_\tau - \lim x_n^+ = x^+$ *dir.*

4.3 Yerel Katı Riesz Uzayında Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda, yerel katı Riesz uzayı çerçevesinde lacunary istatistiksel τ-yakınsaklık, lacunary istatistiksel τ- sınırlılık ve lacunary istatistiksel τ-Cauchy dizisi kavramları ve özelikleri incelenecektir.

Bu kısımda yerel katı Riesz uzayı LSR-uzayı şekilde kullanılacaktır.

Tanım 4.3.1. [22]***(Lacunary İstatistiksel τ- Yakınsaklık)*** *(X, τ) bir LSR-uzayı ve θ bir lacunary dizisi olsun. $x = (x_j)$, X uzayında bir dizi olsun. Sıfırın her U τ-komşuluğu için $K_U = \{j \in \mathbb{N} : x_j - l \notin U\}$ olmak üzere $\delta_\theta(K_U) = 0$ oluyorsa yani,*

$$\lim_{r\to\infty} \tfrac{1}{h_r}|\{j \in I_r : x_j - l \notin U\}| = 0$$

ise $x = (x_j)$ dizisi, $l \in X$ e lacunary istatistiksel τ-yakınsaktır denir ve $S_\theta(\tau) - \lim x = l$ biçiminde yazılır.

Tanım 4.3.2. [22]***(Lacunary İstatistiksel τ-Sınırlı Dizi)*** *(X, τ), LSR-uzayında bir dizi ve θ lacunary dizisi ve $x = (x_j)$, X de bir dizi olsun. Sıfırın her U τ-komşuluğu için,*

$$\delta_\theta(\{j \in \mathbb{N} : \lambda x_j \notin U\}) = 0$$

yani,

$$\lim_{r\to\infty} \tfrac{1}{h_r}|\{j \in I_r : \lambda x_j \notin U\}| = 0$$

olacak şekilde $\lambda > 0$ sayıları varsa x dizisine lacunary istatistiksel τ-sınırlıdır denir.

Tanım 4.3.3. [22]***(Lacunary İstatistiksel τ-Cauchy Dizisi)*** *(X, τ) bir LSR-uzayı, θ bir lacunary dizisi ve $x = (x_j)$, X de bir dizi olsun. Sıfırın her U τ-komşuluğu için,*

$$\lim_{r\to\infty} \tfrac{1}{h_r}|\{j \in I_r : x_j - x_p \notin U\}| = 0$$

olacak şekilde $p \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_j)$ dizisine lacunary istatistiksel τ-Cauchy dizisi denir.

Teorem 4.3.1. *(X,τ) bir Hausdorff LSR-uzayı ve θ bir lacunary dizisi olsun. $x = (x_j)$ ve $y = (y_k)$, X uzayında birer dizi olsunlar. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(i) $S_\theta(\tau) - \lim_j x_j = l_1$ *ve* $S_\theta(\tau) - \lim_j x_j = l_2$ *ise* $l_1 = l_2$
(ii) $S_\theta(\tau) - \lim_j x_j = l$ *ise* $S_\theta(\tau) - \lim_j \alpha x_j = \alpha l, \alpha \in \mathbb{R}$
(iii) $S_\theta(\tau) - \lim_j x_j = l$ *ve* $S_\theta(\tau) - \lim_j y_j = \mu$ *ise* $S_\theta(\tau) - \lim_j (x_j + y_j) = l + \mu$

İspat (i)
$S_\theta(\tau) - \lim_j x_j = l_1$ ve $S_\theta(\tau) - \lim_j x_j = l_2$ olduğunu varsayalım. U, sıfırın herhangi bir τ-komşuluğu olsun. Bu takdirde $V \subseteq U$ olacak şekilde $V \in \mathcal{N}sol$ vardır. $W + W \subseteq V$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{N}sol$ seçelim.

$$K_1 = \{j \in \mathbb{N} : x_j - l_1 \in W\},$$
$$K_2 = \{j \in \mathbb{N} : x_j - l_2 \in W\},$$

olsun. $S_\theta(\tau) - \lim_j x_j = l_1$ ve $S_\theta(\tau) - \lim_j x_j = l_2$ olduğundan $\delta_\theta(K_1) = \delta_\theta(K_2) = 1$ dir. Bu takdirde $\delta_\theta(K_1 \cap K_2) = 1$ ve özel olarak $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ dir. $j \in K_1 \cap K_2$ olsun. Bu takdirde,

$$l_1 - l_2 = l_1 - x_j + x_j - l_2 \in W + W \subseteq V \subseteq U$$

dur. Böylece sıfırın her U τ-komşuluğu için, $l_1 - l_2 \in U$ dur. (X,τ) Hausdorff olduğundan sıfırın tüm U τ-komşuluklarının kesişimi tek nokta kümesi $\{\Theta\}$ dır. Buradan $l_1 - l_2 = \Theta$ olur, yani $l_1 = l_2$ dir.

İspat(ii) *U, sıfırın keyfi bir τ-komşuluğu ve $S_\theta(\tau) - \lim_j x_j = l$ olsun. Bu takdirde $V \subseteq U$ olacak şekilde $V \in \mathcal{N}sol$ vardır. Ayrıca*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{j \in I_r : x_j - l \in V\}| = 1$$

dir. V dengeli olduğundan, $|\alpha| \leq 1$ olmak üzere her bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için $x_j - l \in V$ olması $\alpha(x_j - l) \in V$ olmasını gerektirir. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \{j \in \mathbb{N} : x_j - l \in V\} &\subseteq \{j \in \mathbb{N} : \alpha x_j - \alpha l \in V\} \\ &\subseteq \{j \in \mathbb{N} : \alpha x_j - \alpha l \in U\} \end{aligned}$$

olur. Böylece sıfırın her U τ-komşuluğu için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r}|\{j \in I_r : \alpha x_j - \alpha l \in U\}| = 1$$

elde edilir.
Şimdi, $|\alpha| > 1$ *ve* $[|\alpha|]$, $|\alpha|$ *ya eşit yada büyük en küçük tamsayı olsun.* $[|\alpha|]W \subseteq V$ *olacak şekilde* $W \in \mathcal{N}sol$ *vardır.* $S_\theta(\tau) - \lim_j x_j = l$ *olduğundan,*

$$K = \{j \in \mathbb{N} : x_j - l \in W\}$$

kümesinin θ*-yoğunluğu sıfırdır. Dolayısıyla,*

$$|\alpha l - \alpha x_j| = |\alpha||l - x_j| \geq [|\alpha|]|l - x_j| \in [|\alpha|]W \subseteq V \subseteq U$$

dur. V *katı olduğundan,* $\alpha l - \alpha x_j \in V$ *dir. Buradan* $\alpha l - \alpha x_j \in U$ *dur. Böylece sıfırın her* U τ*-komşuluğu için ,*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r}|\{j \in I_r : \alpha x_j - \alpha l \in U\}| = 1$$

dir. Buradan $S_\theta(\tau) - \lim_j \alpha x_j = \alpha l$ *olur.*

İspat(iii): U *sıfırın keyfi bir* τ*-komşuluğu olsun. Bu takdirde* $V \subseteq U$ *olacak şekilde* $V \in \mathcal{N}sol$ *vardır.* $W + W \subseteq V$ *olacak şekilde* $W \in \mathcal{N}sol$ *seçebiliriz.* $S_\theta(\tau) - \lim_j x_j = l$ *ve* $S_\theta(\tau) - \lim_j y_j = \mu$ *olduğundan,*

$$H_1 = \{j \in \mathbb{N} : x_j - l \in W\},$$
$$H_2 = \{j \in \mathbb{N} : y_j - \mu \in W\}$$

olmak üzere $\delta_\theta(H_1) = \delta_\theta(H_2) = 1$ *dir.* $H = H_1 \cap H_2$ *olsun. Bu takdirde* $\delta_\theta(H) = 1$ *ve*

$$(x_j + y_j) - (l + \mu) = (x_j - l) + (y_j - \mu) \in W + W \subseteq V \subseteq U$$

dur. Böylece,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r}|\{j \in I_r : (x_j + y_j) - (l + \mu) \in U\}| = 1$$

dir. U *keyfi olduğundan,* $S_\theta(\tau) - \lim_j (x_j + y_j) = l + \mu$ *dir.*

Teorem 4.3.2. (X, τ) *bir* LSR*-uzayı ve* θ *bir lacunary dizisi olsun. Bir* $x = (x_j)$ *dizisi lacunary istatistiksel* τ*-yakınsak ise lacunary istatistiksel* τ*-sınırlıdır.*

İspat:*Bir* $x = (x_j)$ *dizisi bir* $l \in X$ *noktasına lacunary istatistiksel* τ*-yakınsak olduğunu varsayalım.* U*, sıfırın keyfi bir* τ*-komşuluğu olsun. Bu takdirde* $V \subseteq U$ *olacak şekilde* $V \in \mathcal{N}sol$ *vardır.* $W + W \subseteq V$ *olacak şekilde bir* $W \in \mathcal{N}sol$ *seçebiliriz.* $S_\theta(\tau) - \lim_{j\to\infty} x_j = l$ *olduğundan,*

$$K = \{j \in \mathbb{N} : x_j - l \notin W\}$$

kümesinin θ-yoğunluğu sıfırdır. W soğurğan olduğundan $\lambda l \in W$ olacak şekilde $\lambda > 0$ vardır. $\alpha \leq 1$ ve $\alpha \leq \lambda$ olsun. W katı ve $|\alpha l| \leq |\lambda l|$ olduğundan $\alpha l \in W$ dir. W dengeli olduğundan, $x_j - l \in W$ olması $\alpha(x_j - l) \in W$ olmasını gerektirir. Bu takdirde, her bir $j \in N \backslash K$

$$\alpha x_j = \alpha(x_j - l) + \alpha l \in W + W \subseteq V \subseteq U$$

dur. Böylece

$$\lim_{r\to\infty} \tfrac{1}{h_r}|\{j \in I_r : \alpha x_j \notin U\}| = 0$$

olur. Ohalde (x_j) lacunary istatistiksel τ-sınırlıdır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır..

Teorem 4.3.3. *(X, τ) bir LSR-uzayı ve θ bir lacunary dizisi olsun. Eğer (x_j), (y_j) ve (z_j) dizileri,*

(i) $\forall j \in \mathbb{N}$ için $x_i \leq y_j \leq z_j$
(ii) $S_\theta(\tau) - \lim_j x_j = l = S_\theta(\tau) - \lim_j z_j$

şartlarını sağlıyorsa $S_\theta(\tau) - \lim_j y_j = l$ dir.

İspat: *U, sıfırın keyfi bir komşuluğu olsun. Bu takdirde $V \subseteq U$ olacak şekilde $V \in \mathcal{N}sol$ vardır. $W + W \subseteq V$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{N}sol$ seçebiliriz. (ii) den*

$$A = \{j \in \mathbb{N} : x_j - l \in W\}$$
$$B = \{j \in \mathbb{N} : z_j - l \in W\}$$

olmak üzere $\delta_\theta(A) = \delta_\theta(B) = 1$ dir. Ayrıca $\delta_\theta(A \cap B) = 1$ ve (i) den $\forall j \in \mathbb{N}$ için,

$$x_j - l \leq y_j - l \leq z_j - l$$

dir. Buradan $\forall j \in A \cap B$ için ,

$$|y_j - l| \leq |x_j - l| + |z_j - l| \in W + W \subseteq V$$

elde ederiz. V katı olduğundan, $y_j - l \in V \subseteq U$ dur. Bu halde sıfırın her U τ-komşuluğu için,

$$\lim_{r\to\infty} \tfrac{1}{h_r}|\{j \in I_r : y_j - l \in U\}| = 1$$

dir. Böylece, $S_\theta(\tau) - \lim_j y_j = l$ olur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.3.4. *(X,τ) bir LSR-uzayı ve θ bir lacunary dizisi olsun. Bir $x=(x_j)$ dizisi lacunary istatistiksel τ-yakınsak ise bu dizi lacunary istatistiksel τ-Cauchy dir.*

İspat: *$S_\theta(\tau)-\lim_{j\to\infty} x_j = l$ ve U sıfırın keyfi bir τ-komşuluğu olsun. $V\subseteq U$ olacak şekilde $V\in\mathcal{N}sol$ vardır. $W+W\subseteq V$ olacak şekilde bir $W\in\mathcal{N}sol$ seçebiliriz. Bu takdirde,*

$$\lim_{r\to\infty}\tfrac{1}{h_r}|\{j\in I_r : y_j - l\notin U\}| = 0$$

dır. Ayrıca

$$K=\{j\in\mathbb{N} : x_j - l\notin W\}$$

olmak üzere $\forall j,p\in\mathbb{N}\backslash K$ için

$$x_j - x_p = x_j - l + l - x_p \in W+W\subseteq V\subseteq U$$

dur. Dolayısıyla,

$$\{j\in\mathbb{N} : x_j - x_p\notin U\}\subseteq K$$

dır. Sıfırın her bir U τ-komşuluğu için, $\forall j,p\geq N$ için,

$$\lim_r \tfrac{1}{h_r}\{j\in I_r : x_j - x_p\notin U\} = 0$$

olacak şekilde $N\in\mathbb{N}$ vardır.Buradan (x_j) dizisi lacunary istatistiksel τ-Cauchy olduğu görülür. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Sonuç

Bu çalışmanın ilk bölümlerinde, klasik analizdeki yakınsaklık, Cauchy yakınsaklık, limit ve yığılma noktaları kavramlarının istatistiksel yakınsaktaki karşılıkları incelendi. Daha sonraki bölümlerde ise istatistiksel yakınsaklığın son zamanlarda çalışılan konularına ağırlık verildi. Bu nedenle bu çalışma aynı zamanda istatistiksel yakınsaklığın günümüze kadarki tarihi gelişimini de göstermektedir.

Kaynakça

[1] *H. Albayrak , S. Pehlivan , Statistical convergence and statistical continuity on locally solid Riesz spaces,Topology and its Applications*159(2012), 1887 − 1893

[2] *C.D. Aliprantis, O.Burkinshaw, Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics, second ed.,Amer.Math.Soc.*(2003)

[3] *S. Aytar, Yoğunluk Kavramı Ve İstatistiksel Yakınsaklık, Yüksek Lisans Tezi, Isparta,* (2001)

[4] *M. Balcı, Analiz* 1*, Balcı Yayınları, Ankara,*(1999)

[5] *M. Bayraktar, Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitapevi, Ankara,*(2006)

[6] *J. Connor, The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, Analysis* 8(1988), 47 − 63

[7] *H. Çakallı, Lacunary statistical convergence in topological groups, Indian J. Pure Appl. Math.* 26(1995), 113 − 119

[8] *H. Çakallı, On statistical convergence in topological groups, Pure Appl. Math. Sci.* 43(1996), 27 − 31

[9] *H. Çakallı, A study on statistical convergence, Functional Analysis, Approximation and Computation* 1 : 2(2009), 19 − 24

[10] *H. Çakallı, M.K. Khan, Summability in topological spaces, Appl. Math. Lett,* 24(2011), 348 − 352

[11] *H. Çakallı, M.K. Khan, Statistical Summability in Topological Spaces Seminar,http://www.math.kent.edu/ kazim/StatSeminar/Fall*2010*.pdf,* (2010)

[12] *P. Das, E. Savaş, On l-convergence of nets in locally solid Riesz spaces, Filomat* 27 : 1(2013), 89 − 94

[13] *K. Demirci, İstatistiksel Yakınsaklık, Yüksek Lisans Tezi, Ankara,* (1992)

[14] *H. Fast, Sur la convergence statistique, Colloq.Math.* $2(1951), 241-244$

[15] *J.A. Fridy, On statistical convergence, Analysis* $5(1985), 301-313$

[16] *J.A.Fridy, Statistical Limit Points, Proc. Amer. Math. Soc.*$118(1993), 1187-1192$

[17] *J.A.Fridy and C. Orhan, Lacunary Statistical Convergence, Pacific J. Math.* $(1993), 43-51$

[18] *J.A.Fridy and C. Orhan, Lacunary Statistical Summability , Journal of Mathematical Analysis and Applications* $173(1993), 497-504$

[19] *AR. Freedman, J. Sember and M. Raphael, Some Cesàro Type Summability Spaces, Proc. London Math. Soc.* $37(1978), 508-520$

[20] *A. Kılıç, Genel Topoloji, Bursa,* (2002)

[21] *G.Di Maio, Lj.D.R. Kocinac, Statistical convergence in topology, Topology and its Applications* $156(2008), 28-45$

[22] *SA. Mohiuddine and M. Alghamdi,Statistical summability through a lacunary sequence in locally solid Riesz spaces, Journal of Inequalities and Applications* $(2012), 1-9$

[23] *I. Niven and H.S. Zuckerman,An Introduction to the Theory of Numbers. John Wiley, Fourth Ed, New York,* (1980)

[24] *T. Salat, On statistically convergent sequences of real numbers. Math. Slovaca* $30(1980), 139-150$

[25] *E. Savaş, On lacunary double statistical convergence in locally solid Riesz spaces, Journal of inequalities and Applications*$(2013), 1-12$

[26] *E. Savaş, On generalized double statistical convergence in locally solid Riesz spaces, Miskolc Math. Notes Preprint.*

[27] *I.J. Schoenberg, The integrability of certain functions and related summability methods, Amer. Math. Monthly* $66(1959), 361-375$