T.C.
İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

HEISENBERG GRUBUNDA ISI DENKLEMİ

Yüksek Lisans Tezi

Abdullah YENER

1160Y55105

Danışman: Prof. Dr. İsmail KÖMBE

İstanbul, 2013

T.C.
İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

HEISENBERG GRUBUNDA ISI DENKLEMİ

Yüksek Lisans Tezi

Abdullah YENER

1160Y55105

Danışman: Prof. Dr. İsmail KÖMBE

İstanbul, 2013

T.C.

İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ONAY SAYFASI

Yüksek lisans öğrencisi Abdullah Yener'in "Heisenberg Grubunda Isı Denklemi" konulu tez çalışması jürimiz tarafından Matematik Yüksek Lisans Tezi olarak (oybirliği ☐ / oyçokluğu ☐) ile başarılı bulunmuştur.

	Adı-Soyadı	**İmza**
Tez Danışmanı :	Prof. Dr. İsmail Kömbe	
Jüri Üyesi :	Prof. Dr. Doğan Kaya	
Jüri Üyesi :	Doç. Dr. Ahmet Duran	

Hazırlamış olduğum tez özgün bir çalışma olup YÖK ve İTİCÜ Lisansüstü Yönetmeliklerine uygun olarak hazırlanmıştır. Ayrıca, bu çalışmayı yaparken bilimsel etik kurallarına tamamıyla uyduğumu; yararlandığım tüm kaynakları gösterdiğimi ve hiçbir kaynaktan yaptığım ayrıntılı alıntı olmadığını beyan ederim. Bu tezin ihtiva ettiği tüm hususlar şahsi görüşüm olup İstanbul Ticaret Üniversitesi'nin resmi görüşünü yansıtmamaktadır.

Özet

Bu çalışmada,

$$u_t - u_{xx} = f(x,t)$$

ısı denkleminin $\mathbb{R}$ deki ve $\mathbb{R}^n$ deki temel özellikleri verildikten sonra, $\mathbb{H}^n$ Heisenberg grubunda $a(w) > 0$, $V(w) \in L^1_{loc}(\Omega)$ potansiyelleri ile verilmiş

$$\begin{cases} u_t = \nabla_{\mathbb{H}^n}(a(w)\nabla_{\mathbb{H}^n} u^m) + V(w)u^m, & (w,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(w,t) = 0, & (w,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u(w,0) = u_0(w) \geq 0, & w \in \Omega \end{cases}$$

doğrusal olmayan parabolik probleminin ne zaman pozitif çözümünün olmadığı ispatlanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Isı denklemi, başlangıç değer problemi, başlangıç-sınır değer problemi, temel çözüm, Fourier dönüşümü, Heisenberg grubu, singüler potansiyel, doğrusal olmayan parabolik denklem.

Abstract

In this study, after the fundamental properties of

$$u_t - u_{xx} = f(x,t)$$

heat equation on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^n$ are given, nonexistence of positive solution to the following

$$\begin{cases} u_t = \nabla_{\mathbb{H}^n}(a(w)\nabla_{\mathbb{H}^n} u^m) + V(w)u^m, & (w,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(w,t) = 0, & (w,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u(w,0) = u_0(w) \geq 0, & w \in \Omega \end{cases}$$

nonlinear parabolic equation with $a(w) > 0$, $V(w) \in L^1_{loc}(\Omega)$ potentials on the $\mathbb{H}^n$ Heisenberg group were analyzed.

Keywords: Heat equation, initial value problem, initial-boundary value problem, fundamental solution, Fourier transform, Heisenberg group, singular potential, the non-linear parabolic equation.

Teşekkür

Bu çalışmayı bana veren ve çalısmamın her aşamasında bana rehberlik eden, ilgi ve önerileri ile hep yanımda olan danışman hocam, Sayın Prof. Dr. İsmail Kömbe'ye sonsuz teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Bu günlere gelmeme vesile olan, maddi ve manevi yardımlarını benden esirgemeyen annem Zahire Yener, babam Mustafa Yener ve kardeşlerime, İstanbul'daki eğitimim boyunca bütün sıkıntılarıma ortak olan tüm yakınlarıma bütün samimiyetim ile şükranlarımı sunarım.

Savunmamda bulunan Prof. Dr. Doğan Kaya ve Doç Dr. Ahmet Duran hocalarıma çok değerli yorum, öneri ve kritikleri için teşekkür ederim.

Ayrıca üniversite eğitimim süresince üzerimde emeği olan Ortadoğu Teknik Üniversitesi ve İstanbul Ticaret Üniversitesi Matematik Bölümleri'ndeki saygıdeğer hocalarıma teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Abdullah Yener
İstanbul, 2013

Gösterimler

- $\mathbb{R}$, reel sayılar.
- $\mathbb{R}^+$, pozitif reel sayılar.
- $c = c(x)$, özgül ısı.
- $\rho = \rho(x)$, kütle yoğunluğu.
- $e(x,t)$, ısı enerjisi yoğunluğu.
- $k = k(x)$, maddenin ısı geçirgenlik katsayısı.
- $u(x,t)$, çubuğun herhangi bir t anında x noktasındaki sıcaklığı.
- Ω, pürüzsüz sınırlara sahip açık sınırlı bir bölge.
- $\partial\Omega$, Ω nın sınırı.
- $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$, Ω nın kapanışı.
- $\Omega_T := \Omega \times (0,T]$, parabolik bölge.
- $\partial\Omega_T$, Ω_T parabolik bölgesinin sınırı.
- $\bar{\Omega}_T := \Omega_T \cup \partial\Omega_T$, Ω_T parabolik bölgesinin kapanışı.
- $\ddot{\Gamma}_T := \partial\Omega_T \backslash ([0,L] \times \{T\})$, Ω_T parabolik bölgesinin alt ve yan sınırları.
- $C(\Omega)$, Ω bölgesindeki sürekli fonksiyonların sınıfı.
- $C^{2,1}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} | u, u_x, u_{xx}, u_t \in C(\Omega)\}$, Ω bölgesindeki x değişkenine göre 2. türevi, t değişkenine göre 1. türevi sürekli fonksiyonların sınıfı.
- $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$, f fonksiyonun Fourier dönüşümü.
- $\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$, f fonksiyonun ters Fourier dönüşümü.
- $f * g$, f ve g fonksiyonlarının konvolusyonu.
- $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayı.
- $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbb{R}^n$ de bir nokta.
- $|x| := (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$, Öklid normu.

- $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $n-$boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayındaki birim hiperküre.
- $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, $0 < x < \infty$, gama fonksiyonu.
- $V_{S^{n-1}}(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$, $\mathbb{R}^n$ uzayındaki birim hiperkürenin sınırladığı bölgenin hacmi.
- $nV_{S^{n-1}}(n) = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$, $\mathbb{R}^n$ uzayındaki birim hiperkürenin yüzey alanı.
- $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = u_{x_i} := \lim_{h\to 0}\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}$, u fonksiyonunun x_i değişkenine göre kısmi türevi.
- $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, $\mathbb{R}^n$ de Laplace operatörü.
- $|\Omega|$, Ω nın Lebesgue ölçümü.
- $C_c^k(\Omega)$, Ω bölgesinde k.mertebeden sürekli diferansiyellenebilir kompakt olarak destekli fonksiyonların sınıfı.
- $K \subset\subset \Omega := \bar{K}$ kompakt ve $K \subset \bar{K} \subset \Omega$, Ω nın kompakt alt kümesi.
- $\|u\|_p := \left(\int_\Omega |u|^p\, dx\right)^{1/p} < \infty, (1 \le p < \infty)$, p-norm.
- $L^p(\Omega) := \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ Lebesgue ölçülebilir, } \|u\|_p < \infty\right\}$, p-integrallenebilir fonksiyonların kümesi.
- $L^p_{loc}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid \text{her } K \subset\subset \Omega \text{ için } u \in L^p(\Omega)\}$.
- $K(x,t)$, $u_t = \Delta u$ ısı denkleminin temel çözümü.
- $\mathbb{H}^n$, Heisenberg grubu.
- $w := (z,l) = (x,y,l) = (x_1,...,x_n,y_1,...y_n,l)$, $\mathbb{H}^n$ de bir nokta.
- $\circ$, $\mathbb{H}^n$ de tanımlı grup işlemi.
- $X_i := \frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i\frac{\partial}{\partial l}$, $Y_i := \frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i\frac{\partial}{\partial l}$, $i = 1,...,n$, $\mathbb{H}^n$ deki vektör alanları.
- $\nabla_{\mathbb{H}^n} := (X_1,...,X_n,Y_1,...,Y_n)$, $\mathbb{H}^n$ de Gradyan vektörü.
- $\Delta_{\mathbb{H}^n} := \sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2)$, $\mathbb{H}^n$ de Kohn-Laplace operatörü.
- $Q = 2n+2$, $\mathbb{H}^n$ nin homojen boyutu.

- $\delta_\lambda : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$, Heisenberg genişletme dönüşümü.
- $\|w\|_{\mathbb{H}^n} := \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + y_i^2 \right)^2 + l^2 \right)^{1/4}$, $\mathbb{H}^n$ de tanımlanan norm.
- $d_{\mathbb{H}^n}(w, \eta) = \|\eta^{-1} \circ w\|_{H^n}$, $\mathbb{H}^n$ de tanımlanan uzaklık fonksiyonu.
- $\mathbf{B}_{\mathbb{H}^n}(a, r) := \{w \in \mathbb{H}^n : d(a, w) < r\}$, $\mathbb{H}^n$ de a merkezli r yarıçaplı açık yuvar.
- $\Phi(\rho, \theta, \theta_1, ..., \theta_{2n-1}) := w = (z, l) = (x, y, l)$, $\mathbb{H}^n$ de küresel dönüşüm.
- $J(\Phi)$, Φ dönüşümünün Jakobiyeni.
- $\det J(\Phi) = \rho^{2n+1} \sin^{n-1} \theta \sin^{2n-1} \theta_1 ... \sin \theta_{2n-2}$, $J(\Phi)$ nin determinantı.
- $dw = \det J(\Phi)\, d\theta_1 ... d\theta_{2n-2} d\theta d\rho$, $\mathbb{H}^n$ de küresel koordinatlarda birim kürenin hacim diferansiyeli.
- $\Gamma_n := \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 ... \int_0^\pi d\theta_{2n-2} \int_0^\pi d\theta_{2n-1} \sin^{2n-2} \theta_1 ... \sin \theta_{2n-2}$, $\mathbb{R}^{2n+1}$ deki $2n$ boyutlu birim kürenin Lebesgue yüzey ölçümü.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Bir kısmi diferansiyel denklem, $x_1, x_2, ..., x_n$ bağımsız değişkenlerine bağlı bilinmeyen $u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ fonksiyonu ve onun $u_{x_i}, u_{x_i x_j}, u_{x_i x_j x_k}, ...$ gibi sonlu sayıda kısmi türevlerinin oluşturduğu bağıntıdır. Bir kısmi diferansiyel denklem en genel haliyle

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, u_{x_i x_j x_k}, ...\right) = 0$$

şeklinde yazılır. Kısmi diferansiyel denklemler; mertebe, lineerlik gibi özelliklere göre sınıflandırılırlar. Bu sınıflandırma, adi diferansiyel denklemlerin sınıflandırmasına benzerdir. Bir kısmi diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türevin mertebesine **diferansiyel denklemin mertebesi** denir. İkinci mertebeden iki değişkenli kısmi diferansiyel denklem en genel haliyle, x ve y bağımsız değişken $u = u(x, y)$ olmak üzere,

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

olarak ifade edilir. Eğer kısmi diferansiyel denklem bilinmeyen fonksiyona ve bu fonksiyonun bütün kısmi türevlerine göre lineer ise bu denkleme **lineer kısmi diferansiyel denklem** denir. Örneğin ikinci mertebeden iki değişkenli lineer kısmi diferansiyel denklemin en genel şekli

$$\begin{aligned} &A(x, y) u_{xx} + B(x, y) u_{xy} + C(x, y) u_{yy} \\ &+D(x, y) u_x + E(x, y) u_y + F(x, y) u = G(x, y) \end{aligned}$$

olarak verilir. Eğer kısmi diferansiyel denklem, sadece en yüksek mertebeden kısmi türevlere göre lineer ve katsayılar bilinmeyen fonksiyon ile onun düşük mertebeden türevlerini de içeriyorsa, bu denkleme **yarı lineer kısmi diferansiyel denklem** denir. İkinci mertebeden iki değişkenli yarı lineer kısmi diferansiyel denkleminin en genel hali

$$\begin{aligned} &A(x, y, u, u_x, u_y) u_{xx} + B(x, y, u, u_x, u_y) u_{xy} \\ &+C(x, y, u, u_x, u_y) u_{yy} = D(x, y, u, u_x, u_y) \end{aligned}$$

gibidir. Eğer kısmi diferansiyel denklem yarı lineer ve denklemde görülen en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme **hemen-hemen lineer** denir. İkinci mertebeden iki değişkenli hemen-hemen lineer kısmi diferansiyel denklem

$$A(x, y) u_{xx} + B(x, y) u_{xy} + C(x, y) u_{yy} = D(x, y, u, u_x, u_y)$$

şeklinde verilir. Lineer kısmi diferansiyel denklemler dışındaki bütün denklemler **lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem** olarak adlandırılır. Bundan dolayı yarı lineer ve hemen hemen lineer kısmi diferansiyel denklemler lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin özel halleridirler.

Adi diferansiyel denklemlerin genel çözümleri, denklemin mertebesi kadar keyfi sabit içeren ve her noktasından teğet doğruların çizilebildiği eğri aileleridir. İki bağımsız değişkene sahip kısmi diferansiyel denklemlerin genel çözümleri ise denklemin mertebesi kadar keyfi fonksiyon ihtiva eden ve her noktasından teğet düzlemlerin çizilebildiği yüzey aileleridir.

Bir kısmi diferansiyel denklemi özdeş olarak sağlayan ve herhangi keyfi fonksiyon veya keyfi parametre içermeyen fonksiyona bu kısmi diferansiyel denklemin bir **özel çözümü** denir. Diğer taraftan bir kısmi diferansiyel denklemin mertebesi kadar sürekli türetilebilir keyfi fonksiyon içeren ve denklemi özdeş olarak sağlayan bir yüzey ailesine bu kısmi diferansiyel denklemin **genel çözümü** denir.

Diferansiyel denklemler genel olarak fiziksel olayların matematiksel modellemesi olduğundan bir diferansiyel denklemin çözümü bu fiziksel olayların belirlediği birtakım koşulların kullanılması ile elde edilir. Diferansiyel denklem ile verilen bu koşullar **başlangıç** ve **sınır koşulları** olarak adlandırılır. Kısmi diferansiyel denklem ile denklemin $t = t_0$ anındaki $u(t_0) = u_0$ fiziksel durumu verilirse buna **başlangıç koşulu** ve bu koşul ile birlikte verilen denkleme **başlangıç değer problemi** denir. Kısmi diferansiyel denklem ile beraber çözüm bölgesinin sınırlarında çözüm fonksiyonu veya çözüm fonksiyonunun türevlerinin değerleri fiziksel olaya bağlı olarak verilmiş ise bunlara **sınır koşulları** ve bu koşullar altında verilen denkleme **sınır değer problemi** denir. Bu sınır koşullarından en sık karşılaşılanlar:

- Dirichlet sınır koşulu

$$u\left(0,t\right) = \varphi_1\left(t\right), \; u\left(L,t\right) = \varphi_2\left(t\right), \; t > 0,$$

- Neumann sınır koşulu

$$u_x\left(0,t\right) = \mu_1\left(t\right), \quad u_x\left(L,t\right) = \mu_2\left(t\right), \quad t > 0,$$

- Robin sınır koşulu

$$u_x\left(0,t\right) - a_0 u\left(0,t\right) = \gamma_1\left(t\right), \quad t > 0, \quad a_0 \geq 0,$$

$$u_x(L,t) + a_L u(L,t) = \gamma_2(t), \quad t > 0, \quad a_L \geq 0$$

olarak tanımlanabilir. Hem başlangıç hem de sınır koşulları ile verilen problemlere de **başlangıç-sınır değer problemleri** denir.

Kısmi diferansiyel denklemler; parabolik, hiperbolik ve eliptik olmak üzere üç kısımda sınıflandırılır. Denklemin türünü bilmek denklem hakkında birçok bilgi vereceğinden ikinci mertebeden, iki bağımsız değişkenli hemen-hemen lineer

$$A(x,y)\,u_{xx} + B(x,y)\,u_{xy} + C(x,y)\,u_{yy} = D(x,y,u,u_x,u_y) \tag{1}$$

denklemininin A, B, C katsayılarına göre ne zaman parabolik, ne zaman hiperbolik, ne zaman eliptik olduğu verilecektir. Burada A, B, C katsayıları ve u fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip olsun ve katsayıların hepsi aynı anda sıfır olmasın. Bu sınıflandırmada denklemin tipi belirlenirken birinci mertebeden türevleri kapsayan terimlerin hiçbir etkisi olmayacak, sınıflandırma

$$\Delta(x,y) := B^2(x,y) - 4A(x,y)\,C(x,y)$$

olarak tanımlanan diskriminant fonksiyonunun işaretine göre belirlenecektir.

Tanım 0.0.1 (x_0, y_0) *noktasında* (1) *denklemi*

- $\Delta(x_0, y_0) > 0$ *ise hiperbolik;*
- $\Delta(x_0, y_0) = 0$ *ise parabolik;*
- $\Delta(x_0, y_0) < 0$ *ise eliptik;*

olarak adlandırılır.

Matematiksel fiziğin en eski denklemleri olan

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{2}$$

dalga denklemi hiperbolik tipten,

$$u_t - k u_{xx} = 0 \tag{3}$$

ısı denklemi parabolik tipten ve

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{4}$$

Laplace denklemi eliptik tipten denklemlere verilebilecek örneklerdir. Bu üç denklem tipi üzerindeki çalışmalar çok daha genel ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler teorisine ışık tutmakta ve bu denklemler mekanik, ısı iletimi, olasılık teorisi, matematik ve fiziğin diğer alanlarında çok büyük etkiye sahiptir. Bundan dolayı ikinci mertebeden denklemlere, özellikle de parabolik denklemlere, uzun yıllar boyu güçlü bir ilgi olmuştur. Bu (2), (3) ve (4) teki üç denklem sınıfı, başta Leonhard Euler $(1707-1783)$, James Bernoulli $(1667-1748)$, Daniel Bernoulli $(1700-1782)$, J.L. Lagrange $(1736-1813)$, Jean Joseph Fourier $(1768-1830)$, George Green $(1793-1841)$, Peter Gustav Lejeune Dirichlet $(1805-1859)$, Karl Gottfried Neumann $(1832-1925)$ ve Jacques Hadamard $(1865-1963)$ olmak üzere çok sayıda meşhur matematikçinin çalışma alanında olmuştur [28]. Bu çalışmanın konusu parabolik tipten denklemlerin en önemli temsilcisi olan

$$u_t - ku_{xx} = 0$$

ısı denklemi üzerine olacaktır.

Bölüm 1

$\mathbb{R}$ DE ISI DENKLEMİ

Bu bölümde parabolik tipten kısmi diferansiyel denklemlere verilebilecek en önemli örneklerden biri olan ısı denklemi

$$u_t - ku_{xx} = 0,\ \ k > 0 \tag{1.1}$$

tek boyutlu olarak çeşitli yönlerden incelenecektir. İlk olarak fizikte ısı denkleminin nasıl ortaya çıktığı ele alınacaktır. Daha sonra "Bir kısmi türevli denklemin iyi tanımlı olması ne demektir?", "Denklemin iyi tanımlı olabilmesi için denklemde hangi şartlar aranmalıdır?" gibi sorulara yanıt aranacaktır. Son olarak, çeşitli başlangıç ve sınır koşulları altında verilen bir ısı denkleminin çözümü elde edilecektir.

1.1 Isı Denkleminin Çıkarılışı

Bu bölümde bir boyutlu ısı denklemi

$$u_t - \alpha^2 u_{xx} = f(x,t) \tag{1.2}$$

enerji (ısı enerjisi) korunumu temel prensibi kullanılarak elde edilecektir. Öncelikle bu denklem elde edilirken kullanılacak kavramlar ve gösterimler şöyle verilebilir:

Akı: Birim zamanda birim yüzey alanından geçen ısı akımıdır.

Özgül Isı: $c = c(x)$ ile gösterilir. Belli bir maddenin sıcaklığını bir birim arttırabilmek için sağlanması gereken ısı enerjisidir.

Kütle Yoğunluğu: $\rho = \rho(x)$ ile gösterilir. Birim hacim başına düşen kütledir.

Isı Enerjisi Yoğunluğu: $e(x,t)$ ile gösterilir. Birim hacim başına düşen ısı miktarıdır.

Isı Geçirgenliği: $k = k(x)$ ile gösterilir. Maddenin ısı iletebilme özelliğidir.

İlk olarak, sabit A dik kesit alanına sahip, başlangıç sıcaklığı bilinen, L uzunluğundaki düzgün bir çubuk $x-$ekseni boyunca $x = 0$ dan $x = L$ ye kadar uzatılsın. Çubuğun herhangi t anında x noktasındaki sıcaklığı $u = u(x, t)$ ile gösterilsin. Denklem daha basit hale getirilmek için şu kabuller yapılsın:

- Çubuk, ince ve $x-$eksenine dik düzgün kesitlere sahip olsun.
- Her bir dik kesit üzerinde ısı sabit olsun.
- Çubuğun yanal yüzeyi ısı geçirmeyecek şekilde yalıtılmış olsun. Yani çubukta sadece $x-$ekseni yönünde bir ısı akışı olsun.

Ayrıca, aşağıdaki fiziksel prensipler hatırlansın:

- **Fourier Kanunu:** Eğer bir bölgede sıcaklık farklılıkları varsa, ısı enerjisi, sıcak bölgeden soğuk bölgeye doğru akar. Bu ısı akışı sıcaklığın türevi u_x ile orantılı ve $q = -ku_x$ dir.
- **Isı Enerjisi Korunumu Prensibi:** Yalıtılmış bir sistemdeki enerjinin toplam miktarı sabit kalır. Yani enerji kaybolmaz ancak şekli değişir.
- Kütlesi m olan bir nesnenin sıcaklığını Δu kadar artırmak için gerekli ısı miktarı $mc\Delta u$ dır.

Tanımlanan $c, \rho, k,$ termal katsayılarının hepsi malzemeye bağlı olduklarından x in fonksiyonu olabilirler. Burada düzgün bir çubuk için ısı iletimi problemi ele alındığından $c, \rho, k,$ termal katsayıları birer sabittir. Ele alınan çubuğun içinde x ve $x + \Delta x$ arasında kalan ince bir dilim düşünelim. Bu dilimin hacmi $A\Delta x$ olduğundan dilimdeki ısı enerjisi $Q(x, t) = e(x, t) A\Delta x$ dir. Ayrıca dilimdeki toplam kütle $\rho A\Delta x$ olduğundan herhangi bir ince dilimdeki toplam ısı enerjisi $Q(x, t) = \rho A\Delta x c\Delta u$ olur. Böylece ısı enerjisi ile sıcaklık arasındaki bağıntı elde edilir:

$$e(x, t) = c\rho u(x, t). \tag{1.3}$$

Çubuğun herhangi t anında $[x, x + \Delta x]$ parçasındaki, ısı enerjisi miktarı

$$\int_x^{x+\Delta x} Ae(s, t)\, ds = \int_x^{x+\Delta x} Ac\rho u(s, t)\, ds, \tag{1.4}$$

sınırlardan geçen net ısı enerjisi miktarı Fourier kanunu gereği

$$kA\left[u_x\left(x+\Delta x,t\right)-u_x\left(x,t\right)\right], \tag{1.5}$$

üretilen ısı enerjisi miktarı $F\left(x,t\right)$ harici ısı kaynağı olmak üzere

$$A\int_{x}^{x+\Delta x}F\left(s,t\right)ds \tag{1.6}$$

olarak ifade edilir. Bu dilim için ısı enerjisinin korunumu prensibi

$$\begin{aligned} & [x,x+\Delta x]\ \textbf{parçasındaki net ısı değişimi} \\ = & \ \textbf{sınırlardan geçen net ısı enerjisi miktarı} \\ & +[x,x+\Delta x]\ \textbf{de üretilen ısı enerjisi miktarı} \end{aligned} \tag{1.7}$$

(1.3), (1.4), (1.5), (1.6) ve (1.7) deki ifadeler birleştirilerek matematiksel olarak şöyle yazılır:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\int_{x}^{x+\Delta x}c\rho Au\left(s,t\right)ds\right] &= c\rho A\int_{x}^{x+\Delta x}u_t\left(s,t\right)ds \\ &= kA\left[u_x\left(x+\Delta x,t\right)-u_x\left(x,t\right)\right] \\ &\quad +A\int_{x}^{x+\Delta x}F\left(s,t\right)ds. \end{aligned}$$

Bu denklemde integral işaretinden kurtulmak için ortalama değer teoremi kullanılırsa, $\xi\in\left(x,x+\Delta x\right)$ olmak üzere

$$c\rho Au_t\left(\xi_1,t\right)\Delta x=kA\left[u_x\left(x+\Delta x,t\right)-u_x\left(x,t\right)\right]+AF\left(\xi_2,t\right)\Delta x \tag{1.8}$$

sonucuna ulaşılır. (1.8) deki eşitliğin her iki tarafı $c\rho A\Delta x$ ile bölündüğünde

$$u_t\left(\xi,t\right)=\frac{k}{c\rho}\left[\frac{u_x\left(x+\Delta x,t\right)-u_x\left(x,t\right)}{\Delta x}\right]+\frac{1}{c\rho}F\left(\xi,t\right)$$

denklemi elde edilir. Burada $\Delta x\to 0$ için limit alınırsa, $\alpha^2=k/c\rho$ materyelin geçirgenliği ve $f(x,t) = F(x,t)/c\rho$ olmak üzere, bu denklem arzu edilen

$$u_t(x,t) - \alpha^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t) \tag{1.9}$$

denklemine indirgenmiş olunur. Özel olarak $f(x,t) = 0$ ise, yani çubukta ısı oluşturan bir kaynak yok ise, (1.9) daki denklem

$$u_t - \alpha^2 u_{xx} = 0$$

halini alır. Buna **bir boyutlu homojen ısı denklemi** denir. Isının bir nesne üzerinde, belli bir konumda ve zamanda, nasıl dağılacağını tanımlayan bir kısmi diferansiyel denklemdir. u_t sıcaklığın zamana bağlı değişim hızını, u_{xx} ise çözüm grafiğinin dışbükeylik ve içbükeylik durumunu göstermektedir. $u(x,t)$ çözüm fonksiyonunun dışbükey olduğu noktalarda cismin sıcaklığı artmakta, içbükey olduğu aralıkta ise azalmaktadır.

1.2 Çözümün Özellikleri

Karşılaşılan bir diferansiyel denklemde sorulması gereken ilk soru çözümün varlığı ve tekliği hakkında olmalıdır. Varlık ve teklik problemi halledildikten sonra sorulması gereken soru verilen problemdeki giriş verilerinde yapılan küçük değişikliklerin çözüme nasıl etki edeceği sorusudur. Yani çözümün giriş verilerine göre sürekliliği konusudur. Ancak bu sorulara cevap verildikten sonra çözümün çeşitli özelliklerinden veya onun sayısal olarak bulunmasından söz edilebilir. Şimdi Fransız matematikçi Jacques Solomon Hadamard $(1865 - 1963)$ tarafından ortaya atılan iyi tanımlılık kavramını verelim.

Tanım 1.2.1 *Kısmi diferansiyel denklemlerde verilen bir problemin çözümü mevcut ve tek ise ve giriş verilerine göre sürekli ise bu probleme* ***iyi tanımlı problem*** *denir.*

Eğer bu koşulların herhangi birisi sağlanmıyor ise probleme **iyi tanımlanmamış problem** denir.

Tanım 1.2.2 *İyi tanımlı bir kısmi diferansiyel denklemde, çözüm denklemde görülen tüm kısmi türevlere göre sürekli ise çözüme* ***klasik çözüm*** *denir.*

Bu tanımlardan sonra, ilk olarak parabolik denklem için maksimum prensibi kanıtlanacak ve bu prensip kullanılarak Dirichlet sınır koşullu başlangıç-sınır değer probleminin

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = f(x,t), & 0 \leq x \leq L,\ t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = g(t),\ u(L,t) = h(t), & t > 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

iyi tanımlı olabilmesi için gereken çözümün tekliği ve giriş verilerine göre sürekliliği şartları incelenecektir. Daha sonra, verilen bir başlangıç değer probleminin

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.11}$$

iyi tanımlı olup olmadığı incelenip hangi şartlar altında çözümün tek ve giriş verilerine göre sürekli olduğu verilecektir.

Parabolik denklem için maksimum prensibine geçmeden önce çözüm bölgesi ile ilgili gerekli tanımlar şöyle verilebilir:

$$\Omega := \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L,\ t > 0\right\}$$

düzlemde bir bölge, $\Gamma := \partial\Omega$ ise bu bölgenin sınırı olsun.

$$\Omega_T := \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L,\ 0 < t < T\right\}$$

parabolik bölge olmak üzere, $\Gamma_T := \partial\Omega_T$ ile $\Omega_T \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinin sınırı gösterilsin. Ayrıca $\bar{\Omega}_T := \Omega_T \cup \Gamma_T$ ve $\ddot{\Gamma}_T := \Gamma_T \backslash ([0,L] \times \{T\})$ olarak tanımlansın. Şimdi $u_t - ku_{xx} = 0$ denkleminin $\bar{\Omega}_T$ parabolik bölgesinde tanımlanmış $u = u\,(x,t)$ çözümü için maksimum-minimum prensibi şöyle ifade edilsin:

Teorem 1.2.1 [***Maksimum-Minimum Prensibi***]. *$u(x,t)$ fonsiyonu parabolik $\bar{\Omega}_T$ bölgesinde*

$$u_t - ku_{xx} = 0 \tag{1.12}$$

denkleminin çözümü ise, bu fonksiyon maksimum ve minimum değerini ya $x = 0$, ya $x = L$, ya da $t = 0$ sınırında alır. Yani

$$\max_{\bar{\Omega}_T} u = \max_{\ddot{\Gamma}_T} u \ \ ve\ \ \min_{\bar{\Omega}_T} u = \min_{\ddot{\Gamma}_T} u$$

dir.

Kanıt. *$u\,(x,t)$ fonksiyonunun maksimum değerini $(x_0,t_0) \in \Omega_T$ noktasında aldığı* *kabul edilsin. O halde,* $u_t(x_0,t_0)=0$ *ve* $u_{xx}(x_0,t_0)\le 0$ *olmalıdır. Eğer* $u_{xx}(x_0,t_0)>0$ *olsaydı* $u(x,t_0)$ *fonksiyonu* $x=x_0$ *civarında dışbükey bir fonksiyon olup, bu noktada maksimum değerine sahip olamazdı.*

i. *Eğer* $u_{xx}(x_0,t_0)<0$ *olursa,* (x_0,t_0) *noktasında*

$$u_t-ku_{xx}>0$$

eşitsizliği elde edilir ve bu da $u(x,t)$ *fonksiyonunun* (1.12) *ısı denkleminin çözümü olmasıyla çelişir.*

ii. $u_{xx}(x_0,t_0)=0$ *olsun.* $\epsilon>0$ *için yeni bir*

$$v(x,t)=u(x,t)+\epsilon x^2 \tag{1.13}$$

fonksiyonu tanımlansın. Fonksiyonun t *ve* x *değişkenlerine göre gerekli türevleri alınıp ısı denkleminde yerine yazılırsa*

$$\begin{aligned} v_t-kv_{xx} &= \overbrace{u_t-ku_{xx}}^{=0}-2\epsilon k \\ &= -2\epsilon k \\ &< 0 \end{aligned} \tag{1.14}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi yeni tanımlanan $v(x,t)$ *fonksiyonunun maksimum değerine* $\dddot{\Gamma}_T$ *sınırında ulaşacağı gösterilsin.* $v(x,t)$ *fonksiyonunun maksimum değerine* Ω_T *bölgesindeki bir noktada ulaştığı kabul edilsin. O halde, bu noktada* $v_t=0$ *ve* $v_{xx}\le 0$ *yani*

$$v_t-kv_{xx}\ge 0$$

olmalıdır. Diğer yandan,

$$v_t-kv_{xx}=-2\epsilon k<0$$

olduğundan çelişki elde edilir. Bu da $v(x,t)$ *fonksiyonunun maksimum değerine* $x=0$, $x=L$, $t=0$ *veya* $t=T$ *sınırlarında ulaşabileceği anlamına gelir. Son olarak* $v(x,t)$ *fonksiyonunun maksimum değerini* $t=T$ *üst sınırında alamayacağı gösterilsin. Herhangi* (x_0,T) *noktasında* $v(x,t)$ *fonksiyonunun maksimum değerini aldığı varsayılsın. Bu defa* (x_0,T) *maksimum noktası olduğundan*

$v_{xx}(x_0,T) \leq 0$ *ve* $v(x_0,T) \geq v(x_0,T-h)$ *eşitsizlikleri sağlanır.* $v(x_0,T) \geq v(x_0,T-h)$ *eşitsizliğinden*

$$v_t(x_0,T) = \lim_{h\to 0^+} \frac{v(x_0,T) - v(x_0,T-h)}{h} \geq 0$$

elde edilir. Burada

$$v_t(x_0,T) - kv_{xx}(x_0,T) \geq 0$$

olduğundan (1.14) *eşitsizliğiyle yine çelişki elde edilir. Bu da* $v(x,t)$ *fonksiyonunun maksimum değerine* $\dddot{\Gamma}_T$ *sınırında ulaşacağını gösterir. Yani*

$$\max_{\bar{\Omega}_T} v(x,t) \leq \max_{\dddot{\Gamma}_T} v(x,t) \tag{1.15}$$

eşitsizliği gerçeklenir. $M := \max_{\dddot{\Gamma}_T} u(x,t)$ *olarak tanımlansın.* (1.13) *ten*

$$\max_{\dddot{\Gamma}_T} v(x,t) \leq \max_{\dddot{\Gamma}_T} u(x,t) + \max_{\dddot{\Gamma}_T} \epsilon x^2 = M + \epsilon L^2, \tag{1.16}$$

$u(x,t) = v(x,t) - \epsilon x^2$ *ve* $0 \leq x \leq L$ *olduğundan*

$$\max_{\bar{\Omega}_T} u(x,t) \leq \max_{\bar{\Omega}_T} v(x,t) \tag{1.17}$$

olacağı aşikardır. Sonuç olarak (1.15), (1.16) *ve* (1.17) *den*

$$\max_{\bar{\Omega}_T} u(x,t) \leq \max_{\bar{\Omega}_T} v(x,t) \leq \max_{\dddot{\Gamma}_T} v(x,t) \leq M + \epsilon L^2 \tag{1.18}$$

elde edilir. (1.18) *eşitsizliğinde*

$$\max_{\bar{\Omega}_T} u(x,t) \leq M$$

yazılabilir. $u(x,t)$ *fonksiyonu* $\bar{\Omega}_T$ *bölgesinde sürekli olduğundan*

$$\max_{\bar{\Omega}_T} u(x,t) = M = \max_{\dddot{\Gamma}_T} u(x,t)$$

eşitliği bulunur ki bu da ispatı tamamlar. Minimum değeri için teorem benzer şekilde ispatlanır.

■

Şimdi maksimum-minimum prensibi yardımıyla Dirichlet sınır koşullu (1.10) parabolik problemi için çözümün tekliği ele alınsın.

Teorem 1.2.2 [***Çözümün Tekliği***]. *f, ϕ, g, h fonksiyonları verilmiş olsun.* (1.10) *Dirichlet probleminin çözümü mevcut ise tektir.*
Kanıt. *u ve v fonksiyonları denklem* (1.10) *ile verilen problemin çözümleri olsun. O halde $w = u - v$ fonksiyonu*

$$\begin{cases} w_t - kw_{xx} = 0, & 0 \le x \le L, t > 0 \\ w(x,0) = 0, & 0 \le x \le L \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

homojen ısı probleminin çözümüdür. Maksimum−minimum prensibi gereğince çözüm, maksimum ve minimum değerini çözüm bölgesinin sınırlarında, yani ya $t = 0$, ya $x = 0$, yada $x = L$ sınırında alır. Denklem (1.19) *daki başlangıç ve sınır koşullarına göre bu sınır değerlerinde $w = 0$ olduğundan $x \in [0, L]$, $t > 0$ için*

$$\min w = 0 \le w \le 0 = \max w,$$

yani $w(x,t) \equiv 0$ olur. Buradan da

$$u - v = w \equiv 0 \Longrightarrow u \equiv v$$

elde edilir. Bu da çözümün tek olduğunun kanıtıdır. ■

Son olarak (1.10) probleminde giriş verilerindeki küçük değişiklikler çözümü çok etkiler mi? sorusuna cevap niteliğindeki şu teorem verilsin:

Teorem 1.2.3 [***Çözümün Giriş Verilerine Göre Sürekliliği***]. (1.10) *da verilen parabolik problemin $u(x,t)$ çözümü giriş verilerine göre süreklidir.*
Kanıt. *u^i $(i = 1, 2)$ fonksiyonları*

$$\begin{cases} u_t^i - ku_{xx}^i = f_i(x,t), & 0 \le x \le L, t > 0 \\ u^i(x,0) = \phi_i(x), & 0 \le x \le L \\ u^i(0,t) = g_i(t), & t > 0 \\ u^i(l,t) = h_i(t), & t > 0 \end{cases}$$

parabolik problemlerinin çözümleri olsun. O halde $w = u^1 - u^2$ *fonksiyonu*

$$\begin{cases} w_t - kw_{xx} = 0, & 0 \leq x \leq L, t > 0 \\ w(x,0) = \phi_1(x) - \phi_2(x), & 0 \leq x \leq L \\ w(0,t) = g_1(t) - g_2(t), & t > 0 \\ w(L,t) = h_1(t) - h_2(t), & t > 0 \end{cases}$$

verilen başlangıç-sınır koşullarıyla birlikte homojen ısı denkleminin çözümüdür. Maksimum ve minimum prensipleri gereği

$$-\max_{(x,t)\in \ddot{\Gamma}_T} \{|w(x,t)|\} \leq \max_{(x,t)\in \bar{\Omega}_T} \{|w(x,t)|\} \leq \max_{(x,t)\in \ddot{\Gamma}_T} \{|w(x,t)|\}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Buradan

$$\begin{aligned} \max_{(x,t)\in \bar{\Omega}_T} \left\{\left|u^1(x,t) - u^2(x,t)\right|\right\} &= \max_{(x,t)\in \bar{\Omega}_T} \{|w(x,t)|\} \\ &\leq \max_{(x,t)\in \ddot{\Gamma}_T} \{|w(x,t)|\} \\ &= \max_{(x,t)\in \bar{\Omega}_T} \left\{ \begin{array}{l} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|, |g_1(t) - g_2(t)|, \\ |h_1(t) - h_2(t)| \end{array} \right\} \end{aligned}$$

olur. Herhangi $\epsilon > 0$ *sayısı verilsin. Her* $(x,t) \in [0,L] \times (0,\infty)$ *için* $|\phi_1(x) - \phi_2(x)| < \epsilon$, $|g_1(t) - g_2(t)| < \epsilon$ *ve* $|h_1(t) - h_2(t)| < \epsilon$ *olduğunda* $|u^1(x,t) - u^2(x,t)| < \epsilon$ *olur. Bu da* (1.10) *probleminin* $u\,(x,t)$ *çözümünün giriş verilerine göre sürekliliğini kanıtlar.* ∎

Sonuç olarak (1.10) daki Dirichlet sınır koşullu ısı problemi iyi tanımlıdır.

Şimdi

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.20}$$

başlangıç değer problemi için çözümün tekliği ve giriş verisine göre sürekliliği incelenecektir. İlk olarak $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ giriş fonksiyonu ve aranan $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ çözümü sürekli olsun. Fakat çözüm fonksiyonu üzerine başka koşul yüklenmediği sürece çözümün tekliğinden bahsedilemez. Örneğin başlangıç verisi $\phi\,(x) = 0$ olarak alındığında (1.20) problemi $u\,(x,t) \equiv 0$ aşikar çözümünün dışında çözümlere sahiptir. Rus matematikçi Andrey Nikolaevich Tychonov $(1905 - 1993)$ tarafından bulunan

$$u\,(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \frac{d^k}{dt^k} \left(e^{-1/k^2}\right)$$

fonksiyonu problemin aşikar olmayan bir çözümüdür. Eğer (1.20) deki başlangıç değer probleminin çözümünün tekliğinden bahsedilmek isteniyorsa (1.20) denklemine bazı ek koşullar yüklenmelidir. Yüklenen koşul $u(x,t)$ çözümünü her $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ değeri için sınırlı yapmalıdır. Bu koşul şöyle ifade edilebilir:

$$|u(x,t)| \leq S, \ \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \tag{1.21}$$

Tanımlanan sınırlılık koşulu ile sonsuz aralıkta verilmiş (1.20) parabolik probleminin çözümünün tekliği bir teoremle ifade edilsin. Burada $C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ ile $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ bölgesindeki x değişkenine göre ikinci türevi, t değişkenine göre birinci türevi sürekli fonksiyonların sınıfı gösterilmektedir.

Teorem 1.2.4 *Eğer $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ fonksiyonu (1.21) sınırlılık koşulunu sağlıyor ve (1.20) başlangıç değer probleminin çözümü ise tektir.*
Kanıt. *Bakınız [23].* ■

Son olarak gerekli ek koşullar ile birlikte (1.20) probleminin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ bölgesindeki $u(x,t)$ çözümünün ϕ giriş verisine göre sürekliliği gösterilsin.

Teorem 1.2.5 *(1.20) parabolik probleminde $\phi \in C(\mathbb{R})$ ve $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ olsun. Ayrıca $u(x,t)$ çözüm fonksiyonu $x \to \pm\infty$ durumunda $u(x,t) \to 0$ koşulunu ve $\phi(x)$ giriş verisi her $x \in \mathbb{R}$ için $|\phi(x)| \leq S_\phi$ sınırlılık koşulunu sağlasın. O halde verilen (1.20) başlangıç değer probleminin $u(x,t)$ çözümü giriş verilerine göre süreklidir.*
Kanıt. *ϕ_i $(i = 1,2)$ giriş verileriyle verilmiş başlangıç değer problemleminin çözümleri u^i $(i = 1,2)$ fonksiyonları olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için $S_\epsilon := \sup|\phi_1(x) - \phi_2(x)|$ olarak tanımlansın. u^i fonksiyonları (1.20) probleminin çözümü olduğundan Poisson formulü gereği her $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ için*

$$\begin{aligned}
\left|u^1(x,t) - u^2(x,t)\right| &= \left|\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} [\phi_1(x) - \phi_2(x)]\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy\right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \left|\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|\phi_1(x) - \phi_2(x)|}_{\leq S_\epsilon} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy\right| \\
&\leq \frac{S_\epsilon}{\sqrt{4\pi kt}} \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{S_\epsilon}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta}_{=\sqrt{\pi}} \\
&= S_\epsilon
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır. Bu da ispatı tamamlar. ■

Sonuç olarak bazı ek şartlar ile birlikte (1.20) parabolik problemi iyi tanımlı hale getirilebilir.

1.3 Çözümün İncelenmesi

Bu bölümde $L > 0$ uzunluğundaki yüzeyi izole edilmiş bir çubukta $t \in (0, \infty)$ zamanına bağlı ısı iletimi problemi ele alınacaktır. Bu problemin çözümleri başlangıç-sınır değer problemi ve başlangıç-değer problemi olmak üzere iki alt başlık altında incelenecektir.

1.3.1 Başlangıç-Sınır Değer Problemleri

Parabolik denklemler zamana bağlı fiziksel bir sürecin matematiksel modelini yansıttığından dolayı, bir çubuktaki ısı iletimi problemini oluşturmak için ilk olarak $t = 0$ başlangıç anında çubuğun herhangi bir $x \in (0, L)$ noktasındaki sıcaklığını vermek gerekir:

$$u(x, 0) = \phi(x), \ x \in (0, L). \tag{1.22}$$

Bu koşula ısı iletimi problemi için **başlangıç koşulu** denir. Eğer çubuk sonlu ise karşılaşılan fiziksel modele bağlı olarak çok çeşitli sınır koşulları tanımlanabilir. Bu sınır koşullarından en sık karşılaşılanlar:

Eğer çubuğun uçlarındaki;

- sıcaklık belli ise Dirichlet sınır koşulu

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \ u(L, t) = \varphi_2(t), \ t > 0, \tag{1.23}$$

- akı verilmiş ise Neumann sınır koşulu

$$u_x(0, t) = \mu_1(t), \ u_x(L, t) = \mu_2(t), \ t > 0, \tag{1.24}$$

- akı ile sıcaklık arasında doğrusal bir bağıntı verilmiş ise Robin sınır koşulu

$$\begin{aligned} u_x(0,t) - a_0 u(0,t) &= \gamma_1(t), \ t > 0, \ a_0 \geq 0, \\ u_x(L,t) + a_L u(L,t) &= \gamma_2(t), \ t > 0, \ a_L \geq 0 \end{aligned} \tag{1.25}$$

olarak tanımlanan sınır koşullarıdır. Bu kısımda sonlu bir çubukta çeşitli sınır koşullarıyla verilmiş

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x,t), & k > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in [0,L] \\ \text{Sınır Koşulları} \end{cases}$$

ısı iletimi probleminin çözümü, Fransız matematikçi Joseph Fourier'in 1800 lü yılların başlarında bizlere kazandırdığı Fourier serisi yöntemi, diğer adıyla değişkenlere ayırma yöntemi, ile ele alınacaktır.

Dirichlet Koşullu Başlangıç-Sınır Değer Problemi

İlk olarak $u_t - ku_{xx} = 0$ ısı denkleminin ve (1.23) Dirichlet sınır koşullarının homojen olduğu durum, yani çubuğun uç noktalarındaki sıcaklığın sıfır olduğu ve çubuk üzerinde ısı üreten bir kaynağın olmadığı durum detaylı bir şekilde incelenecektir.

$$u_t - ku_{xx} = 0, \ \Omega = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L, \ t > 0\right\} \tag{1.26}$$

homojen ısı denklemi,

$$u(x,0) = \phi(x), \quad x \in [0,L] \tag{1.27}$$

başlangıç koşulu ve

$$u(0,t) = 0, \ u(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{1.28}$$

homojen Dirichlet sınır koşulu ile verilmiş olsun. Burada $\phi(x)$ fonksiyonu çubuğun başlangıç sıcaklığını, $u(x,t)$ ise herhangi bir t anında çubuğun x noktasındaki sıcaklığını göstermektedir.

Tanım 1.3.1 $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ *fonksiyonu* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *bölgesinde* (1.26) *homojen ısı denklemini,* $t = 0$ *başlangıç anında* (1.27) *başlangıç şartını,* $x = 0$ *ve* $x = L$ *sınırlarında* (1.28) *Dirichlet sınır koşullarını sağlıyor ise bu fonksiyona verilen başlangıç-sınır değer probleminin* ***klasik çözümüdür*** *denir.*

Çözüm fonksiyonu

$$u(x,t) = X(x)T(t) \not\equiv 0$$

olarak iki tek değişkenli fonksiyonun çarpımı şeklinde kabul edilip denklem (1.26) da yerine konursa

$$\frac{T^{'}(t)}{kT(t)} = \frac{X^{''}(x)}{X(x)} \tag{1.29}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı sadece x değişkenine sol tarafı ise sadece t değişkenine bağlı olduğundan (1.29) oranı

$$\frac{T^{'}(t)}{kT(t)} = \frac{X^{''}(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \forall x \in (0, L)\,, \quad t > 0$$

bir sabite, $-\lambda \in \mathbb{R}$ sabitine, eşittir. Son özdeşlikte (1.28) Dirichlet sınır koşulları uygulanırsa, problem

$$T'(t) + \lambda k T(t) = 0 \tag{1.30}$$

birinci dereceden adi diferansiyel denklem ve

$$X^{''}(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1.31}$$

$$X\,(0) = 0,\ X\,(L) = 0 \tag{1.32}$$

ikinci dereceden özdeğer problemine (Sturm-Liouville problemine) dönüşür. Sturm-Liouville probleminde çeşitli $\lambda \in \mathbb{R}$ değerlerine karşılık gelen çözümleri ayrı ayrı inceleyelim:

i. $\lambda < 0$ olsun. B ve C reel sayıları için (1.31) denkleminin çözümü olarak

$$X(x) = Be^{\sqrt{-\lambda}x} + Ce^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

elde edilir. B ve C katsayılarını bulmak için

$$X(0) = 0 = X(L)$$

sınır koşulları uygulandığında $B = C = 0$ olur. Yani (1.31) ve (1.32) ile verilen özdeğer problemin tek çözümü $X(x) \equiv 0$ olarak bulunur.

ii. $\lambda = 0$ olsun. B ve C reel sayılar olmak üzere (1.31) denkleminin genel çözümü

$$X(x) = Bx + C$$

fonksiyonudur. Sınır koşullarından dolayı $B = C = 0$ olduğundan sadece

$$X(x) \equiv 0$$

aşikar çözümü bulunur.

iii. $\lambda > 0$ olsun. B, C reel sayılar olmak üzere (1.31) adi diferansiyel denkleminin çözümü

$$X(x) = B\sin(\sqrt{\lambda}x) + C\cos(\sqrt{\lambda}x) \tag{1.33}$$

fonksiyonu olacaktır. $X(0) = 0$ sınır koşulundan $C = 0$, $X(L) = 0$ koşulundan ise $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L},$$

yani

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

özdeğerleri bulunur. Bu özdeğerlere karşılık

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L},\ n = 1, 2, 3, ...$$

özfonksiyonları elde edilir.

Her bir $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ değeri için $T'(t) + \lambda_n kT(t) = 0$ adi diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n kt},\ t > 0,\ n = 1, 2, 3, ...$$

olarak bulunur. Sonuç olarak her $n = 1, 2, 3, ...$ için verilen sınır koşullarıyla birlikte homojen ısı denklemini Ω bölgesinde sağlayan

$$u_n(x,t) := X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n kt}\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{1.34}$$

özel çözümleri bulunur. (1.26) ısı denklemi lineer ve homojen olduğundan, üst üste bindirme prensibi gereğince (1.34) çözümlerinin lineer birleşimi de (1.28) sınır koşulu ile birlikte (1.26) ısı denkleminin çözümüdür. Bu nedenle,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt}\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{1.35}$$

sonsuz serisi de yakınsak ve x e göre iki, t ye göre bir kez türetilebilir olmak koşulu ile, (1.28) Dirichlet sınır koşullu (1.26) homojen ısı denklemini sağlar. Geride sağlanması gereken tek koşul (1.27) başlangıç koşuludur. Bu koşul ile A_n katsayıları belirlenecektir. Çözümün verilen başlangıç şartını sağladığı düşünülürse

$$\phi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad x \in (0,L) \tag{1.36}$$

koşulu elde edilir. Yani $\phi(x)$ başlangıç fonksiyonu $\sin \frac{n\pi x}{L}$ fonksiyonları cinsinden yazılabilmelidir. Burada hangi şartlar altında bu serinin $\phi(x)$ başlangıç fonksiyonuna yakınsadığı sorusu akla gelmektedir. Lejeune Dirichlet tarafından incelenen bu sorun bir teorem olarak şöyle verilebilir.

Teorem 1.3.1 [***Fourier Serisinin Yakınsaklığı***]. *$2L$ periyotlu f fonksiyonu ve onun türevi, $[-L,L]$ aralığında parçalı sürekli olsun. O halde her x reel sayısı için Fourier serisi; $f(x)$ in sürekli olduğu noktalarda $f(x)$ e, süreksiz olduğu noktalarda ise $f(x)$ in sol ve sağ limitlerinin ortalamasına $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ yakınsar.*

(1.36) daki A_n ler $\phi(x)$ fonksiyonunun Fourier sinüs serisinin katsayılarıdır. $[0,L]$ aralığında $\left\{\sin \frac{n\pi x}{L}\right\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisi ortogonal bir sistem oluşturur. Bundan dolayı A_n katsayılarını hesaplamak için (1.36) eşitliğinin her iki tarafı $\sin \frac{m\pi x}{L}$ ile çarpılıp 0 dan L ye kadar integre edilirse,

$$\int_0^L \phi(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{L}{2}, & m = n \end{cases}$$

olduğundan Fourier sinüs katsayıları

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \tag{1.37}$$

olarak bulunur. Yapılanlar özetlenecek olunursa, eğer $u(x,0) = \phi(x)$ başlangıç fonksiyonu $[0,L]$ aralığında sürekli, $(0,L)$ aralığında birinci türevi parçalı sürekli ve $\phi(0) = \phi(L) = 0$ şartlarını sağlıyor ise verilen ısı iletimi probleminin tek çözümü (1.37) deki A_n Fourier sinüs katsayısı ile

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{1.38}$$

olarak bulunur.

(1.38) çözüm fonksiyonunda (1.37) deki A_n Fourier sinüs katsayısı yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{L} \int_0^L \phi(y) \sin \frac{n\pi y}{L} dy \right] e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{L} \\ &= \int_0^L \left[\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \sin \frac{n\pi y}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \right] \phi(y) dy \end{aligned}$$

integrali elde edilir. Bu integralde

$$G\,(x,t,y) := \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \sin \frac{n\pi y}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{1.39}$$

şeklinde tanımlanan $G\,(x,t,y)$ fonksiyonuna verilen ısı denklemine ait **Green fonksiyonu** denir. Böylelikle (1.26), (1.27) ve (1.28) ile verilmiş ısı probleminin çözümü (1.39) Green fonksiyonu yardımı ile ifade edilmiş olunur:

$$u\,(x,t) = \int_0^L G\,(x,t,y)\,\phi(y)dy, \quad x \in [0,L]\,, t > 0.$$

Şimdi uçları farklı $T_1 > 0$ ve $T_2 > 0$ sıcaklığında olan bir çubuk ve çubuk üzerinde herhangi bir ısı kaynağının söz konusu olmadığı durum için,

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = T_1, & t > 0 \\ u(L,t) = T_2, & t > 0 \end{cases} \tag{1.40}$$

ısı iletimi problemi ele alınacaktır. T_1 ve T_2 ler sıfırdan farklı oldukları için homojen olmayan sınır şartları mevcuttur. Değişkenlerine ayırma metodunu kullanabilmek için verilen Dirichlet sınır koşulları homojen hale getirilmelidir. Bunun için (1.40) probleminin çözümü

$$u(x,t) = \left[T_1 + \frac{x}{L}\,(T_2 - T_1) \right] + U(x,t) \tag{1.41}$$

fonksiyonu şeklinde aranacaktır. O halde (1.41) çözümünde gerekli türevler alınıp denklem (1.40) ta yerine konduğunda

$$u\,(0,t) = T_1 = T_1 + U(0,t) \Longrightarrow U(0,t) = 0,$$

$$u\,(L,t) = T_2 = T_2 + U(L,t) \Longrightarrow U(L,t) = 0$$

homojen sınır koşulları ve

$$U(x,0) = \phi(x) - \left[T_1 + \frac{x}{L}\,(T_2 - T_1)\right]$$

başlangıç değeri elde edilir. Sonuç olarak,

$$\bar{\phi}(x) = \phi(x) - \left[T_1 + \frac{x}{L}\,(T_2 - T_1)\right]$$

olmak üzere (1.40) taki problem

$$\begin{cases} U_t - kU_{xx} = 0, & 0 < x < L,\ t > 0 \\ U(x,0) = \bar{\phi}(x), & 0 \le x \le L \\ U(0,t) = U(L,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{1.42}$$

homojen sınır koşullu hale çevrilmiş olunur. Daha önce bulunduğu gibi (1.42) nin çözümü

$$A_n = \frac{2}{L}\int\limits_0^L \bar{\phi}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

olmak üzere,

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

dir. Böylece çözüm fonksiyonu

$$u(x,t) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt}\sin\frac{n\pi x}{L}\right] + T_1 + \frac{x}{L}\,(T_2 - T_1)$$

olarak bulunur.

Şimdi homojen olmayan denklem ve homojen sınır koşulları olarak verilen

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x,t), & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{1.43}$$

başlangıç-sınır değer probleminin çözümü

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

serisi şeklinde aranacaktır. Bu serideki $X_n(x)$ ler (1.43) denkleminin homojen haliyle ilişkili olan Sturm-Louville probleminin

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

özfonksiyonlarıdır. Yani (1.43) problemi için çözüm

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{1.44}$$

olarak aranacak ve $T_n(t)$ ler belirlenmeye çalışılacaktır. (1.44) çözüm serisinin t ve x değişkenlerine göre gerekli türevleri alınırsa

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{1.45}$$

$$u_{xx} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kT_n(t) \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{1.46}$$

serileri elde edilir. (1.45) ve (1.46) serileri ve (1.44) çözüm serisi yakınsak olduğu varsayılarak (1.43) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n'(t) + \left(\tfrac{n\pi}{L}\right)^2 kT_n(t)\right] \sin\tfrac{n\pi x}{L} = F(x,t), \\
&\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \sin 0 = 0, \\
&\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin n\pi = 0, \\
&\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin n\pi x = \phi(x)
\end{aligned}$$

eşitlikleri, yani

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t)+\left(\tfrac{n\pi}{L}\right)^2 kT_n(t)\right]\sin\tfrac{n\pi x}{L}=F(x,t)\,, \\ &\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin n\pi x=\phi(x) \end{aligned} \tag{1.47}$$

denklemleri elde edilir. (1.47) deki denklemlerin her iki tarafı $\sin\frac{m\pi x}{L}$ fonksiyonu ile çarpılıp 0 dan L ye kadar integre edilirse, (1.43) problemi adi diferansiyel denklemlerde

$$\begin{cases} T_n'(t)+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kT_n(t)=\frac{2}{L}\int\limits_0^L F(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \\ T_n(0)=\frac{2}{L}\int\limits_0^L \phi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \end{cases} \tag{1.48}$$

başlangıç-değer problemine dönüşür. Dikkat edilirse (1.48) deki ilk eşitliğin sağ tarafındaki integral $F(x,t)$ fonksiyonunun, ikinci eşitliğin sağ tarafındaki integral ise $\phi(x)$ fonksiyonunun Fourier sinüs katsayılarıdır.

$$F_n(t)=\frac{2}{L}\int\limits_0^L F(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

ve

$$A_n=\frac{2}{L}\int\limits_0^L \phi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

olarak alınırsa, her $n=1,2,3,...$ için

$$\begin{cases} T_n'+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kT_n=F_n, \\ T_n(0)=A_n \end{cases}$$

başlangıç-değer probleminin çözümü

$$T_n(t)=A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}+\int\limits_0^t e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k(t-y)}F_n(y)\,dy$$

olarak bulunur. Yani

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} + \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k(t-y)} F_n(y)\, dy \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

serisi $\Omega = (0, L) \times (0, \infty)$ bölgesinde (1.43) probleminin çözümü olur. Dikkat edilirse çözümde beliren ilk seri (1.43) probleminin homojen halinin çözümüdür. Doğal olarak çözümde beliren ikinci seri homojen olmayan bölüme katkıyı yapan kısımdır.

Son olarak, (1.26) denkleminin ve (1.28) sınır koşullarının homojen olmadığı durum

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x,t), & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 \le x \le L \\ u(0,t) = T_1, & t > 0 \\ u(L,t) = T_2, & t > 0 \end{cases} \tag{1.49}$$

ele alınsın. Bu problemin çözümüne daha önce elde edilen (1.40) ve (1.43) problemlerinin çözümlerinin toplamı şeklinde rahatlıkla ulaşılabilir.

Neumann Koşullu Başlangıç-Sınır Değer Problemi

$u_t - ku_{xx} = 0$ ısı denkleminin ve (1.24) Neumann sınır koşullarının homojen olduğu durum; yani çubuğun uç noktalarındaki akının sıfır olduğu ve çubuk üzerinde ısı üreten bir kaynağın olmadığı durum

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 \le x \le L \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{1.50}$$

incelenecektir. Burada değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılıp Neumann sınır şartları uygulanırsa, problem (1.50)

$$T'(t) + \lambda k T(t) = 0 \tag{1.51}$$

denklemi ve

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0,\ X(L) = 0 \end{cases} \tag{1.52}$$

Sturm-Liouville problemine dönüşmüş olur. (1.52) Sturm-Liouville probleminde çeşitli $\lambda \in \mathbb{R}$ değerlerine karşılık gelen çözümler incelendiğinde

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\ X_n(x) = \cos \frac{n\pi}{L},\ n = 0, 1, 2, ... \tag{1.53}$$

özdeğer-özfonksiyon çiftleri elde edilir. Burada Dirichlet sınır koşullu ısı probleminden farklı olarak $\lambda = 0$ özdeğerine karşılık $X(x) = 1$ özfonksiyonu olduğu için (1.53) te $n = 0$ dan başlamıştır. (1.51) denkleminin

$$T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n kt} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

çözümleri de dikkate alınarak verilen ısı denkleminin homojen Neumann sınır şartlarını sağlayan çözümü

$$u(x,t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \cos \frac{n\pi x}{L} \tag{1.54}$$

olur. $u(x,0) = \phi(x)$ başlangıç koşulu dikkate alındığında

$$\phi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L},$$

A_n katsayıları

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \phi(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

olarak bulunur.

1.3.2 Başlangıç Değer Problemi (Cauchy Problemi)

Sonsuz Aralıkta Cauchy Problemi

Bu kısımda başlangıç anında belirli bir ısıya sahip, $x-$ekseni üzerinde bulunan sonsuz uzunluktaki bir çubukta ısı dağılımı problemi incelenecektir. Bir önceki bölümde ele alınan problem sonlu aralıkta tanımlandığından Fourier serisi yöntemi kullanılarak çözüme ulaşıldı. Sonsuz aralıkta tanımlanmış periyodik olmayan fonksiyonlar için Fourier serisi yöntemi işe yaramayacaktır. Bu durum söz konusu olduğu zaman, problemin çözümüne Fourier serisi gösteriminin doğal genişlemesi olan Fourier dönüşümü yardımı ile ulaşılabilir. Fourier dönüşümü değişik bilim dallarında kullanılan çok etkin bir güce sahiptir. Elektrik, ısı ve ışıkla ilgili denklemleri çözmekte, astronomi, tıp ve kimya gibi birçok alanda kullanılır [28]. Problemin çözümü incelenmeye geçilmeden önce çözümde kullanılacak olan Fourier integralleri ve Fourier dönüşümleri hakkında kısa bilgi verelim.

Tanım 1.3.2 $\left[\textit{\textbf{Fourier İntegrali}}\right]$. *$f$ tüm reel x değerleri için tanımlı ve mutlak integrallenebilen bir fonksiyon olsun. O halde f nin Fourier integrali;*

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t)\, dt \tag{1.55}$$

ve

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t)\, dt \tag{1.56}$$

Fourier katsayıları olmak üzere,

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} [A(\omega) \cos(\omega x) + B(\omega) \sin(\omega x)]\, d\omega \tag{1.57}$$

şeklinde ifade edilir.

(1.55) ve (1.56) Fourier katsayıları (1.57) denkleminde yerine yazılarak f fonksiyonunun farklı bir Fourier integral gösterimi elde edilir:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos[\omega(t-x)]\, dt d\omega. \tag{1.58}$$

Bu tanımdan sonra hangi şartlar altında f nin Fourier integral gösterimine sahip olacağını ifade eden teoremin verilmesi uygun olur.

Teorem 1.3.2 $\left[\textit{\textbf{Fourier İntegralinin Yakınsaklığı}}\right]$. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $[-L, L]$ sonlu aralığında parçalı sürekli ve $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ integrali yakınsak ise, f nin Fourier integrali, $f(x)$ in*

i. *sürekli olduğu noktalarda $f(x)$ değerine*

ii. *süreksiz olduğu noktalarda ise $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ değerine yakınsar.*

Fourier integralinin incelenmesinde bazen integrali kompleks fonksiyonlar cinsinden ifade etmek daha kullanışlı olabilmektedir. Ayrıca Fourier dönüşümlerinin elde edilişinde kompleks Fourier integrali temel teşkil edeceğinden (1.57) denkleminde $\cos(\omega x)$ ve $\sin(\omega x)$ trigonometrik fonksiyonları yerine $\frac{1}{2}\left[e^{i\omega} + e^{-i\omega}\right]$ ve $\frac{1}{2}\left[e^{i\omega} - e^{-i\omega}\right]$

kompleks üstel formları yazılarak gerekli işlemler yapıldığında aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 1.3.3 $\left[\textbf{\textit{Kompleks Fourier İntegrali}}\right]$. *$f$ nin kompleks Fourier integrali;*

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt \tag{1.59}$$

kompleks Fourier katsayısı olmak üzere,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\, e^{i\omega x} d\omega \tag{1.60}$$

şeklinde ifade edilir.

Ayrıca (1.59) kompleks Fourier katsayısının (1.60) integralinde yerine konulması ile, f nin kompleks Fourier integrali için başka bir gösterim şöyle verilebilir:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega(t-x)} dt d\omega. \tag{1.61}$$

(1.61) integrali (1.58) deki integralin sadece farklı bir yazım şekli olduğundan orada verilen yakınsaklık şartları burada da geçerli olacaktır. (1.61) kompleks Fourier integrali kullanılarak Fourier dönüşümleri şöyle ifade edilebilir.

Tanım 1.3.4 [***Fourier ve Ters Fourier Dönüşümü***]. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $[-L, L]$ sonlu aralığında parçalı sürekli ve $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ integrali yakınsak olsun. O halde,*

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx$$

integraline $f(x)$ fonksiyonunun ***Fourier dönüşümü****,*

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x} d\omega$$

integraline de $f(x)$ nin ***ters Fourier dönüşümü*** *denir.*

Problemin Fourier dönüşümü yardımıyla çözümünde gerekli olan bir fonksiyonun türevinin Fourier dönüşümü formülü şu şekilde verilsin:

Teorem 1.3.3 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve integrallenebilir, f' türevi parçalı sürekli ve integrallenebilir olsun. Ayrıca $|x| \to \pm\infty$ için $f(x) \to 0$ koşulunu sağlasın. O halde*

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = (i\omega)\,\mathcal{F}\{f(x)\}$$

dir.

Bu sonuç daha genel olarak

$$\mathcal{F}\left\{f^{(n)}(x)\right\} = (i\omega)^n\,\mathcal{F}\{f(x)\}$$

formülü ile verilir. Şimdi iki fonksiyonun çarpımının ters Fourier dönüşümünün bulunması gerektiğinde çok faydalı olacak bir tanım ve teorem verilecektir.

Tanım 1.3.5 [***Konvolusyon***]. *$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları integrallenebilir olsun. O halde*

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

integraline, yakınsak olması halinde, $(-\infty, \infty)$ aralığında f ve g fonksiyonlarının ***konvolusyonu*** *denir.*

Teorem 1.3.4 *$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega)$ ve $\mathcal{F}\{g(x)\} = G(\omega)$ olmak üzere $\mathcal{F}\{f * g\} = F(\omega)\,G(\omega)$ ve $\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\,G(\omega)\} = f * g$ dir.*

Fourier integrali ve dönüşümleri hakkındaki bu kısa önbilgiden sonra sonsuz aralıkta tanımlanmış

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in (0,\infty) \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.62}$$

başlangıç değer probleminin çözümü incelenecektir. Burada $\phi(x) \in C(\mathbb{R})$ ve $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ olduğu varsayılsın ve $x \to \mp\infty$ için $u(x,t) \to 0$ olsun. Ayrıca (1.62) problemi için aranılan $u(x,t)$ çözümünün x değişkenine göre Fourier dönüşümü $U(\omega,t)$ olsun. O halde

$$\mathcal{F}\{u(x,t)\} = U(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,e^{-i\omega x}dx$$

olur. (1.62) denklemindeki gerekli türevler için Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{F}\left\{u_{xx}\left(x,t\right)\right\} = \left(i\omega\right)^2 \mathcal{F}\left\{u\left(x,t\right)\right\} = -\omega^2 U\left(\omega,t\right),$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{u_t\left(x,t\right)\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left[u\left(x,t\right)\right]e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u\left(x,t\right)e^{-i\omega x}dx\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[U\left(\omega,t\right)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $u_t - ku_{xx} = 0$ ısı denklemine Fourier dönüşümü uygulandığında

$$\mathcal{F}\left\{u_t - ku_{xx}\right\} = \mathcal{F}\left\{u_t\right\} - k\mathcal{F}\left\{u_{xx}\right\} = \frac{dU}{dt} + k\omega^2 U = 0 \tag{1.63}$$

t değişkenine göre (1.63) adi diferansiyel denklemi elde edilir. Elde edilen bu denklemin genel çözümü C sabit olmak üzere

$$U\left(\omega,t\right) = Ce^{-k\omega^2 t} \tag{1.64}$$

dir. Diğer yandan verilen $u(x,0) = \phi(x)$ başlangıç koşuluna da Fourier dönüşümü uygulandığında

$$\begin{aligned}
U\left(\omega,0\right) &= \mathcal{F}\left\{u\left(x,0\right)\right\} = \mathcal{F}\left\{\phi(x)\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(x)e^{-i\omega x}dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (1.63) denkleminin genel çözümündeki C sabiti

$$U\left(\omega,0\right) = C = \mathcal{F}\left\{\phi(x)\right\}$$

olarak bulunur. Bu (1.64) te yerine konursa

$$U\left(\omega,t\right) = \mathcal{F}\left\{\phi(x)\right\}e^{-k\omega^2 t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-i\omega x} e^{-k\omega^2 t} dx$$

çözümüne ulaşılır. Şimdi $U(\omega, t)$ nin ters Fourier dönüşümü alınırsa (1.62) parabolik Cauchy probleminin çözümü

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\{U(\omega,t)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega,t)\, e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) e^{-i\omega y} e^{-k\omega^2 t} dy \right] e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega^2 t - i\omega(y-x)} \phi(y) dy \right] d\omega \end{aligned} \tag{1.65}$$

olarak bulunur. (1.65) çözümü konvolusyon özelliğinden yararlanılarak daha sade şekilde ifade edilebilir. Çözüm fonksiyonu

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\{U(\omega,t)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\{\phi(x)\}\, e^{-k\omega^2 t}\right\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\phi(x)\}\} * \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-k\omega^2 t}\right\} \\ &= \phi(x) * \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-k\omega^2 t}\right\} \end{aligned}$$

şeklinde yazıldıktan sonra $\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-k\omega^2 t}\right\}$ ters Fourier dönüşümü hesaplansın:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-k\omega^2 t}\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega^2 t} \cos(\omega x)\, d\omega + \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-k\omega^2 t} \sin(\omega x)}_{\text{tek fonksiyon}} d\omega}_{=0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega^2 t} \cos(\omega x)\, d\omega \end{aligned}$$

integralini elementer yollardan hesaplamak mümkün değildir. Onun için

$$P(x,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega^2 t} \cos(\omega x)\, d\omega \tag{1.66}$$

olarak tanımlanıp, (1.66) eşitliğinde x değişkenine göre türev alınırsa

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} -\omega \sin(\omega x)\, e^{-k\omega^2 t} d\omega \tag{1.67}$$

elde edilir. (1.67) denkleminin sağındaki integralin sonucuna ulaşabilmek için kısmi integrasyon yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2kt} \underbrace{\lim_{R\to\infty} \left(\sin(\omega x)\, e^{-k\omega^2 t} \right)\Big|_{-R}^{R}}_{=0} - \frac{x}{2kt} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega^2 t} \cos(\omega x)\, d\omega}_{=P(x,t)} \\ &= -\frac{x}{2kt} P, \end{aligned}$$

yani

$$\frac{dP}{dx} + \frac{x}{2kt} P = 0 \tag{1.68}$$

adi diferansiyel denklemine ulaşılır. Bu denklemin genel çözümünü bulmak için

$$\mu(x,t) = e^{\int \frac{x}{2kt} dx} = e^{\frac{x^2}{4kt}}$$

integral çarpanı ile (1.68) in her iki tarafı çarpılırsa

$$\frac{d}{dx} \left(P e^{\frac{x^2}{4kt}} \right) = 0,$$

$$P(x,t) = C e^{-\frac{x^2}{4kt}} \tag{1.69}$$

genel çözümü elde edilir. Buradaki C sabitini belirlemek için

$$P(0,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega^2 t} d\omega$$

başlangıç şartı eklenirse,

$$\begin{aligned}
P^2 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega^2 t}d\omega\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-k\rho^2 t}d\rho\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-kt\left(\omega^2+\rho^2\right)}d\omega d\rho \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ktr^2} r dr d\theta \\
&= \int\limits_{0}^{\infty} e^{-ktr^2} r dr \\
&= \frac{1}{2kt}\lim_{R\to\infty}\left(-e^{-ktr^2}\right)\Big|_0^R \\
&= \frac{1}{2kt}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$P(0,t) = \frac{1}{\sqrt{2kt}}$$

olur ve (1.69) çözümündeki C sabiti

$$C = \frac{1}{\sqrt{2kt}}$$

olarak belirlenir. Yani $e^{-k\omega^2 t}$ fonksiyonun ters Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-k\omega^2 t}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

dir. Sonuç olarak verilen (1.62) başlangıç koşullu ısı probleminin çözümü konvolusyon özelliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \phi(x) * \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-k\omega^2 t}\right\} \\
&= \phi(x) * \left[\frac{1}{\sqrt{2kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}dy
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradaki

$$K(x-y,t) := \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}}{\sqrt{4\pi kt}}$$

fonksiyonuna **kaynak fonksiyonu, Green fonksiyonu, Gaussian, temel çözüm** veya **ısı çekirdeği** denir. Yani, $x-$ekseni üzerinde bulunan sonsuz uzunluktaki bir çubukta ısı dağılımını veren (1.62) başlangıç değer probleminin çözümü

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)\phi(y)dy$$

integrali ile verilir. $K(x-y,t) := \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}}{\sqrt{4\pi kt}}$ olarak tanımlanan temel çözümü $K(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{4\pi kt}}$ şeklinde göstermek daha uygun olacaktır. Temel çözümün önemli özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir:

i. Her $x \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $K(x,t) > 0$ dır.

ii. Her $x \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $u_t - ku_{xx} = 0$ ısı denkleminin bir çözümüdür.

iii. $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ bölgesinde x ve t değişkenlerine göre sonsuz kere türevlenebilirdir.

iv. Her $t > 0$ için $\int_{\mathbb{R}} K(x,t)dx = 1$ dir.

Kanıt. (iv) $u = \frac{x}{\sqrt{4kt}}$, değişken dönüşümü yapılırsa $dx = (\sqrt{4kt})du$ olur. Sonuç olarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{4\pi kt}}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du}_{=\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1$$

olduğu görülür. ■

Bölüm 2

$\mathbb{R}^n$ DE ISI DENKLEMİ

Bir önceki bölümde detaylı bir şekilde $\mathbb{R}$ de ısı denklemi ele alındıktan sonra, şimdi bu konuların daha genel halleri $\mathbb{R}^n$ de ele alınacaktır. Gerçel sayılarda ısı denklemine dair kanıtlanan maksimum-minimum prensibi ve diğer hemen hemen her sonuç $\mathbb{R}^n$ de kanıtlanabilir. Böylece $\mathbb{R}$ için tanımlanan kavramlar ve kanıtlanan sonuçlar genelleştirilerek çok daha genel kavram ve sonuçlar elde edilir.

$n-$boyutlu ısı denklemi

$$u_t - \Delta u = 0, \tag{2.1}$$

başlangıç ve sınır koşulları ile birlikte çeşitli yönlerden incelenecektir. Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık düzgün bir bölge, $\partial\Omega$, Ω nın sınırı ve $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ olmak üzere,

$$u : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$$

$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \bar{\Omega}$ uzay ve $t > 0$ zaman değişkenlerine bağlı $n+1$ değişkenli bir fonksiyondur. Ayrıca, Laplace operatörü $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ uzay değişkeni ile

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

şeklinde verilir.

2.1 Temel Çözüm ve Özellikleri

İlk olarak homojen

$$u_t - \Delta u = 0 \tag{2.2}$$

ısı denkleminin çözümü elde edilecektir. Burada $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned} v &= \lambda^{\alpha} u && (2.3)\\ \eta &= \lambda^{\beta} x && (2.4)\\ \tau &= \lambda t && (2.5) \end{aligned}$$

benzerlik dönüşümü yapılıp gerekli kısmi türevler

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \lambda^{-\alpha}\frac{\partial v}{\partial \tau}\underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial t}}_{=\lambda} + \lambda^{-\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial \eta_k}\underbrace{\frac{\partial \eta_k}{\partial t}}_{=0}\\ &= \lambda^{1-\alpha}\frac{\partial v}{\partial \tau}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \lambda^{-\alpha}\frac{\partial v}{\partial \tau}\underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial x_i}}_{=0} + \lambda^{-\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial \eta_k}\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}\\ &= \lambda^{-\alpha}\frac{\partial v}{\partial \eta_i}\underbrace{\frac{\partial \eta_i}{\partial x_i}}_{=\lambda^{\beta}}\\ &= \lambda^{\beta-\alpha}\frac{\partial v}{\partial \eta_i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda^{\beta-\alpha}\frac{\partial v}{\partial \eta_i}\right)\\ &= \lambda^{\beta-\alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial \eta_i}\underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial x_i}}_{=0} + \lambda^{\beta-\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta_k \partial \eta_i}\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}\\ &= \lambda^{\beta-\alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta_i^2}\underbrace{\frac{\partial \eta_i}{\partial x_i}}_{=\lambda^{\beta}}\\ &= \lambda^{2\beta-\alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta_i^2} \end{aligned}$$

hesaplanarak (2.2) denkleminde yerine yazılırsa, (2.2) ısı denklemi

$$\lambda^{1-\alpha}\frac{\partial v}{\partial \tau} - \lambda^{2\beta-\alpha}\Delta_{\eta} v = 0 \qquad (2.6)$$

denklemine dönüşür. Isı denkleminin dönüşümden etkilenmemesi için (2.6) da $1-\alpha = 2\beta-\alpha$ olmalıdır. Yani $\beta = 1/2$, $\lambda > 0$ için (2.2) denklemi ölçekleme altında değişmez:

$$v_\tau - \Delta_\eta v = 0.$$

Bunun sonucunda, her $\lambda > 0$ için

$$u(x,t) = \lambda^\alpha u\left(\sqrt{\lambda}x, \lambda t\right) \tag{2.7}$$

olur. (2.7) çözüm fonksiyonundaki t değişkeninden kurtulmak için $\lambda = t^{-1}$ alınıp

$$u(x,t) = t^{-\alpha}u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) := t^{-\alpha}v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

şeklindeki çözümler aransın. Önce $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$ olarak tanımlanıp $u(x,t) = t^{-\alpha}v(y)$ formundaki çözüm (2.2) ısı denkleminde yerine yazılsın:

$$\alpha t^{-(\alpha+1)}v(y) + \frac{1}{2}t^{-(\alpha+1)}y\nabla v(y) + t^{-(\alpha+1)}\Delta v(y) = 0. \tag{2.8}$$

(2.8) eşitliğinde her taraf $t^{-(\alpha+1)}$ ifadesi ile sadeleştirilirse

$$\alpha v(y) + \frac{1}{2}y\nabla v(y) + \Delta v(y) = 0 \tag{2.9}$$

denklemine ulaşılır. Şimdi, Δ_η operatörü rotasyon altında değişmeyeceğinden, $v(y)$ fonksiyonu radyal $r = |y|$ olarak düşünülüp $v(y) = w(|y|) = w(r)$ cinsinden çözüm aranırsa, (2.9) daki denklem

$$\alpha w + \frac{1}{2}r\frac{dw}{dr} + \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{dw}{dr} = 0 \tag{2.10}$$

ikinci dereceden adi diferansiyel denklemine dönüşür. $\alpha = \frac{n}{2}$ için (2.10) denklemi

$$\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{dw}{dr}\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(r^n w\right) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Buradan c sabit olmak üzere

$$r^{n-1}\frac{dw}{dr} + \frac{1}{2}r^n w = c \tag{2.11}$$

elde edilir.

$$\lim_{r\to\infty} w(r) = \lim_{r\to\infty} w'(r) = 0$$

ek koşulları ile (2.11) denkleminde $c = 0$ olarak belirlenir. Sonuç olarak, (2.10) adi diferansiyel denklemi

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{r}{2}w$$

denklemine indirgenip, b sabit olmak üzere

$$w(r) = be^{\frac{-r^2}{4}}$$

çözümüne ulaşılır. Gerekli düzenlemeler ile

$$u(x,t) = \frac{b}{t^{n/2}}e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \tag{2.12}$$

çözümü elde edilir. Burada $b = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}}$ seçilerek (2.2) deki $n-$boyutlu ısı denklemi için temel çözüme ulaşılmış olunur.

Tanım 2.1.1 [***Temel Çözüm***].

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{\frac{-|x|^2}{4t}}, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

*şeklinde tanımlanmış $K(x,t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $u_t - \Delta u = 0$ homojen ısı denkleminin **temel çözümü** denir.*

$(0,0)$ noktasının temel çözüm fonksiyonu için singüler nokta olduğu aşikardır. Şimdi (2.13) temel çözümünün bazı özellikleri verilebilir:

i. $K(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$,

ii. $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) K(x,t) = 0$, $t > 0$,

iii. $K(x,t) > 0$, $t > 0$,

iv. $\int_{\mathbb{R}^n} K(x,t)\,dx = 1$, $t > 0$.

Kanıt. (iv.)

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,t)\,dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}dx \\
&= \frac{1}{(\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2}d\eta \\
&= \frac{1}{(\pi)^{n/2}}\prod_{i=1}^{n}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta_i^2}d\eta_i}_{=\sqrt{\pi}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

■

2.2 Başlangıç Değer Problemi

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.14}$$

başlangıç değer probleminin çözümü, tek boyutlu ısı denkleminde olduğu gibi Fourier dönüşümü metodu ile elde edilecektir. Tek fark Fourier dönüşümünün n bileşenli $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ değişkenine uygulanacak olmasından kaynaklanan katsayılardan ibaret olacaktır. Fourier dönüşümünün temel özelliklerine bir önceki bölümde değinildiğinden bu bölümde tekrar değinilmeyecektir. İlk olarak, $x \in \mathbb{R}^n$ değişkenine göre (2.14) ısı denklemindeki gerekli türevler ve başlangıç koşulu için Fourier dönüşümü uygulanırsa, $\mathcal{F}\{u(x,t)\} = U(\omega,t)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{u_t(x,t)\} &= \frac{\partial}{\partial t}U(\omega,t), \\
\mathcal{F}\{\Delta u(x,t)\} &= \sum_{j=1}^{n}(i\omega_j)^2 U(\omega,t) \\
&= -\left(\omega_1^2+\omega_2^2+...+\omega_n^2\right)U(\omega,t) \\
&= -|\omega|^2 U(\omega,t), \\
\mathcal{F}\{u(x,0)\} &= U(\omega,0) = \mathcal{F}\{\phi(x)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani çözülmesi gereken (2.14) problemi,

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + |\omega|^2 U = 0, \\ U(\omega, 0) = \mathcal{F}\{\phi(x)\} \end{cases} \tag{2.15}$$

adi diferansiyel denklemine dönüşür. Buradan (2.15) denkleminin çözümü

$$U(\omega, t) = \mathcal{F}\{\phi(x)\} e^{-|\omega|^2 t} \tag{2.16}$$

olarak bulunur. (2.16) da ters Fourier dönüşümü uygulanırsa, aranan çözüm konvolusyon yardımı ile

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\{U(\omega,t)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\{\phi(x)\} e^{-|\omega|^2 t}\right\} \\ &= \phi(x) * \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-|\omega|^2 t}\right\} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki $e^{-|\omega|^2 t}$ fonksiyonun ters Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-|\omega|^2 t}\right\} &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\omega|^2 t} e^{i\omega x} d\omega \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega_k^2 t} e^{i\omega_k x_k} d\omega_k\right] \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega_k^2 t} \cos(\omega_k x_k)\, d\omega_k + \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-\omega_k^2 t} \sin(\omega_k x_k)\, d\omega_k}_{\text{tek fonksiyon}}}_{=0}\right] \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega_k^2 t} \cos(\omega_k x_k)\, d\omega_k\right] \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x_k^2}{4t}}\right] \\ &= \frac{1}{(2t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \end{aligned}$$

olduğundan, (2.14) başlangıç değer probleminin çözümü

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \phi(x) * \frac{1}{(2t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \phi(y)\, dy \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu integrale **Poisson integrali** denir. Sonuç olarak, çözüm fonksiyonu $u_t - \Delta u = 0$ homojen ısı denkleminin $K(x,t)$ temel çözümü ve verilen $\phi(x)$ başlangıç değer fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ üzerindeki integrasyonu olarak ifade edilir:

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t)\, \phi(y)\, dy, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta $u(x,0) = \phi(x)$ başlangıç verisi pozitif olarak verildiğinde, $K(x-y,t)$ temel çözümü de pozitif olduğundan,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümünün de pozitif olacağıdır.

2.3 Başlangıç-Sınır Değer Problemi

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0, & \partial\Omega \times [0,\infty) \\ u = \phi, & \Omega \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{2.17}$$

başlangıç-sınır değer probleminin çözümü, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık ve düzgün sınırlı bir bölge ve $\partial\Omega$ da onun sınırları olmak üzere,

$$u(x,t) = X(x)\, T(t) \not\equiv 0 \tag{2.18}$$

formunda aranacaktır. Bu çözüm (2.17) ısı denklemini ve sınır koşullarını sağlamalıdır. (2.18) formundaki çözümde $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$ ve $t \geq 0$ değişkenlerine göre gerekli türevler alınırsa

$$u_t(x,t) = X(x)\, T'(t), \tag{2.19}$$

$$\Delta u(x,t) = \Delta X(x)\, T(t) \tag{2.20}$$

eşitlikleri elde edilir. (2.19) ve (2.20) deki eşitlikler ısı denkleminde yerine yazıldığında

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = X(x)\, T'(t) - \Delta X(x)\, T(t) = 0 \tag{2.21}$$

denklemine ulaşılır. (2.21) ifadesi farklı bir şekilde yazılırsa,

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)} \tag{2.22}$$

eşitliğinin sol tarafı yalnızca $t > 0$ değişkenine sağ tarafı ise sadece $x \in \Omega$ değişkenine bağlı olduğundan bu (2.22) oranı sadece sabit bir değere eşit olabilir. Buradan, $-\lambda$ ayırma sabiti olmak üzere,

$$\begin{cases} \Delta X(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in \Omega \\ X(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.23}$$

ikinci dereceden özdeğer problemi ve

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0 \tag{2.24}$$

birinci dereceden adi diferansiyel denklemine ulaşılır. (2.23) özdeğer probleminin λ_n özdeğerlerine karşılık gelen sıfırdan farklı $X_n(x)$ çözümlerine özfonksiyon denir. (2.23) probleminin özdeğerleri

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ...$$

$n \to \infty$ durumunda $\lambda_n \to \infty$ sonsuza giden pozitif artan bir dizi oluşturur. Ayrıca $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ özfonksiyonlar dizisi ortogonal bir sistem teşkil eder. Yani

$$m \neq n \text{ için } \int\limits_{\Omega} X_m(x)\, X_n(x)\, dx = 0$$

dır. (2.24) adi diferansiyel denkleminin λ_n özdeğerlerine karşılık gelen çözümü c sabit olmak üzere $n = 1, 2, ...$ için

$$T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n t}$$

dir. Böylece her $n = 1, 2, 3, ...$ için

$$u_n(x,t) = A_n X_n(x) e^{-\lambda_n t} \tag{2.25}$$

fonksiyon dizisi verilen sınır koşullarıyla birlikte (2.17) homojen ısı denklemini sağlar. (2.25) fonksiyon dizisinde $n \to \infty$ için A_n katsayısı yeteri kadar hızlı şekilde sıfıra giderse ısı denklemi lineer ve homojen olduğundan üst üste bindirme prensibi gereğince (2.25) çözümlerinin lineer birleşimi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) e^{-\lambda_n t}$$

de sınır koşullarıyla birlikte (2.17) ısı denkleminin biçimsel çözümüdür. Geride sağlanması gereken tek koşul $u(x,0) = \phi(x)$ başlangıç koşuludur. Bu başlangıç koşulunun sağlanması için A_n katsayısı

$$u(x,0) = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) \tag{2.26}$$

denklemini sağlayacak şekilde seçilmelidir. Yani ϕ başlangıç fonksiyonu X_n özfonksiyonları cinsinden yazılmalıdır. Bunun için ϕ fonksiyonu üzerine bazı şartlar yüklenmelidir. Şimdi hangi şartlar altında bir fonksiyonun özfonksiyonlar cinsinden açılabileceğini söyleyen önemli bir teoremi ifade edelim.

Teorem 2.3.1 *Eğer $\phi \in C^2(\bar{\Omega})$ ve $\partial\Omega$ sınırında $\phi(x) = 0$ oluyorsa ϕ fonksiyonu (2.23) özdeğer probleminin X_n özfonksiyonları cinsinden ifade edilebilir.*

Şimdi A_n katsayısını hesaplamak için (2.26) eşitliğinin her iki tarafı $X_n(x)$ özfonksiyonu ile çarpılıp Ω bölgesinde integre edilirse

$$A_n = \frac{\int_{\Omega} \phi(x) X_n(x)\, dx}{\int_{\Omega} [X_n(x)]^2\, dx} \tag{2.27}$$

oranı elde edilir. Sonuç olarak $\phi(x)$ başlangıç fonksiyonunun uygun şartları sağlaması halinde (2.17) başlangıç-sınır değer probleminin çözümü (2.27) katsayısı ile birlikte

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) e^{-\lambda_n t} \tag{2.28}$$

olarak bulunur.

Bölüm 3

HEISENBERG GRUBU'NDA ISI DENKLEMİ

Heisenberg grubu harmonik analiz, quantum mekanik, çok değişkenli komplex analiz, kısmi diferansiyel denklemler gibi matematiğin birçok dalında önemli roller üstlenir [24]. Hörmander'in 1967 yılındaki vektör alanlarının karelerinin toplamı şeklindeki operatörleri konu alan çalışması bu alanda büyük etkiye sahiptir [25]. Heisenberg grubundaki birçok gelişme E. Stein'ın [30] 1970 yılında Fransa'daki uluslararası kongrede nilpotent Lie grupları üzerine vermiş olduğu sunumdan sonra hız kazanmıştır. Ayrıca Folland ve Stein [13] tarafından 1974 yılında yapılan çalışmanın Heisenberg grubu üzerindeki analiz için önemli bir yeri vardır.

Bu bölümde Heisenberg grubunun özellikleri üzerinde genişçe duralacaktır. İlk olarak $\mathbb{H}^1$ Heisenberg grubu üzerindeki gerekli tanım ve sonuçlar verilecektir. Daha sonra bu kavramların daha genel halleri $\mathbb{H}^n$ uzayında tanımlanacaktır. Son olarak doğrusal ve doğrusal olmayan parabolik denklemlerde pozitif çözümün yokluğu üzerine yapılmış çalışmalar incelenecek ve

$$\begin{cases} u_t = \nabla_{\mathbb{H}^n}\left(a\left(w\right)\nabla_{\mathbb{H}^n}u^m\right) + V\left(w\right)u^m, & (w,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u\left(w,t\right) = 0, & (w,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u\left(w,0\right) = u_0\left(w\right) \geq 0, & w \in \Omega \end{cases}$$

doğrusal olmayan parabolik probleminin ne zaman pozitif çözümünün olmadığı ispatlanacaktır. Okurlar burada bulamadıkları ispat ve açıklamalar için [5, 6, 29] kaynaklarına bakabilir.

3.1 $\mathbb{H}^1$ Heisenberg Grubu

Tanım 3.1.1 $\mathbb{H}^1$, $\mathbb{R}^3$ *uzayı üzerinde*

$$(x,y,l)\circ(x',y',l') = (x+x', y+y', l+l'-2(xy'-yx')) \tag{3.1}$$

işlemi ile verilmiş bir gruptur.

Burada (x,y,l) yerine (z,l), $z = x+iy$ kompleks koordinatları düşünülürse (3.1) ile verilen grup işlemi

$$(z,l)\circ(z',l') = \left(z+z', l+l'+2\,\mathrm{Im}\,z\overline{z'}\right)$$

olarak daha sade şekilde yazılabilir. $\mathbb{H}^1 = (\mathbb{R}^3,\circ)$ grubunun birim elemanı $e=(0,0,0)$ ve bir elemanın tersi $(x,y,l)^{-1} = (-x,-y,-l)$ dir.

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial l},\ Y = \frac{\partial}{\partial y} - 2x\frac{\partial}{\partial l},\ T = \frac{\partial}{\partial l} \tag{3.2}$$

vektör alanları $\mathbb{H}^1$ Heisenberg grubundaki tanjant uzayı için bir baz oluşturur. $Z = (X-iY)/2$ kompleks formunda düşünülürse, (3.2) de tanımlanan vektör alanları,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

olmak üzere

$$Z = \frac{\partial}{\partial z} + i\overline{z}\frac{\partial}{\partial l},\ T = \frac{\partial}{\partial l}$$

şeklinde verilebilir. $\mathbb{H}^1$ de gradyan vektörü $\nabla_{\mathbb{H}^1} := (X,Y)$ ve Laplace operatörü

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbb{H}^1} &= (X)^2 + (Y)^2 \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} - 2x\frac{\partial}{\partial l}\right)^2 \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 4\frac{\partial}{\partial l}\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) + 4\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial^2}{\partial l^2}\end{aligned} \tag{3.3}$$

olarak tanımlanır. $\mathbb{H}^1$ de tanımlanan (3.3) ikinci dereceden diferansiyel operatörü kompleks formda

$$\Delta_{\mathbb{H}^1} = -\frac{1}{2}\left(Z\bar{Z} + \bar{Z}Z\right) = -\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}} + i\frac{\partial}{\partial l}\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \overline{z}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right) - |z|^2\frac{\partial^2}{\partial l^2}$$

olarak da verilebilir. $(x,y,l)\,,\,(x',y',l')\in\mathbb{H}^1$ olsun. $\mathbb{H}^1$ de, norm

$$\begin{aligned}\|(x,y,l)\|_{\mathbb{H}^1} &= \left(\left(x^2+y^2\right)^2+l^2\right)^{1/4} \\ &= \left(|z|^4+l^2\right)^{1/4}\end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklinde, uzaklık fonksiyonu ise bu norm ve grup işlemi yardımı ile

$$d_{\mathbb{H}^1}\left((x,y,l)\,,(x',y',l')\right)=\left\|(x',y',l')^{-1}\circ(x,y,l)\right\|_{\mathbb{H}^1} \tag{3.5}$$

olarak verilir. Burada $\circ$, (3.1) deki grup işlemi ve $(x',y',l')^{-1}=(-x',-y',-l')$ olduğuna dikkat edilirse (3.5) uzaklık fonksiyonu açık olarak

$$\begin{aligned}d_{\mathbb{H}^1}\left((z,l)\,,(z',l')\right) &= \|(-z',l')\circ(z,l)\|_{\mathbb{H}^1} \\ &= \left\|z-z',l-l'-2\operatorname{Im}z\overline{z'}\right\|_{\mathbb{H}^1} \\ &= \left(|z-z'|^4+\left(l-l'-2\operatorname{Im}z\overline{z'}\right)^2\right)^{1/4}\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Heisenberg genişletme dönüşümü

$$\delta_\lambda(z,l)=\left(\lambda z,\lambda^2 l\right),\ \ \lambda>0,\ \ (z,l)\in\mathbb{H}^1$$

şeklinde tanımlanır. O halde u, $\mathbb{H}^1$ de tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, $\Delta_{\mathbb{H}^1}$ diferansiyel operatörü

$$\Delta_{\mathbb{H}^1}\left(u\left(\lambda z,\lambda^2 l\right)\right)=\lambda^2\left(\Delta_{\mathbb{H}^1}u\right)\left(\lambda z,\lambda^2 l\right)$$

eşitliğini gerçeklediğinden dolayı bu fonksiyonun $\mathbb{H}-$homojenlik derecesi 2 dir.

$\mathbb{H}^1$ Heisenberg grubu topolojik olarak $\mathbb{R}^3$ üç boyutlu öklid uzayına homeomorfiktir. Şimdi $\mathbb{H}^1$ ve $\mathbb{R}^3$ uzayları arasındaki analoji şöyle ifade edilebilir:

1. $\mathbb{R}^3$ te genişletme dönüşümü, $\lambda>0$ olmak üzere

   $$\delta_\lambda(x_1,x_2,x_3)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$$

   iken, $\mathbb{H}^1$ de

   $$\delta_\lambda(x,y,l)=\left(\lambda x,\lambda y,\lambda^2 l\right)$$

   olarak verilir.

2. $\mathbb{R}^3$ te Laplace operatörü

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

şeklinde iken, $\mathbb{H}^1$ de Laplace operatörü

$$\Delta_{\mathbb{H}^1} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 4\frac{\partial}{\partial l}\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) + 4\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial^2}{\partial l^2}$$

şeklinde verilir.

3. $\mathbb{R}^3$ te herhangi $x = (x_1, x_2, x_3)$ noktasının orjinden uzaklığı

$$d_{\mathbb{R}^3}(x) = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2},$$

herhangi iki nokta $x, y \in \mathbb{R}^3$ arası uzaklık ise

$$d_{\mathbb{R}^3}(x,y) = \left((x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2\right)^{1/2}$$

şeklindedir. $\mathbb{H}^1$ de ise herhangi $(z,l) \in \mathbb{H}^1$ noktasının orjinden uzaklığı

$$d_{\mathbb{H}^1}((z,l)) = \left(|z|^4 + l^2\right)^{1/4},$$

herhangi iki nokta $(z,l), (z',l') \in \mathbb{H}^1$ arası uzaklık ise

$$d_{\mathbb{H}^1}((z,l),(z',l')) = \left(|z-z'|^4 + \left(l - l' - 2\operatorname{Im} z\overline{z'}\right)^2\right)^{1/4}$$

şeklinde verilir.

4. $\mathbb{R}^3$ te açık birim yuvar

$$\mathbf{B}_{\mathbb{R}^3}(0,1) = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2} < 1\right\}$$

olarak tanımlanırken, $\mathbb{H}^1$ de ise

$$\mathbf{B}_{\mathbb{H}^1}(0,1) = \left\{(z,l) \in \mathbb{H}^1 : \left(|z|^2 + l^2\right)^{1/4} < 1\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Daha detaylı bilgi için Greiner'ın [22] deki çalışmasına bakılabilir. Bu kısa analojiden sonra $\mathbb{H}^1$ deki integral hesaplamalarında kolaylık sağlayan ve sıkça kullanılan küresel koordinatları verelim:

$$0 < \rho < \infty,\ 0 \leq \phi \leq \pi,\ 0 \leq \theta < 2\pi,$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin^{1/2} \phi \cos \theta, \\ y &= \rho \sin^{1/2} \phi \sin \theta, \\ l &= \rho^2 \cos \phi. \end{aligned}$$

Bu dönüşüm

$$\rho = \left(|z|^4 + l^2 \right)^{1/4},$$

$$z = |z|\, e^{i\theta} = \rho \sin^{1/2} \phi e^{i\theta},$$

$$l + i\, |z|^2 = \rho^2 e^{i\theta}$$

şeklinde yazılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\partial}{\partial z} + i\overline{z}\frac{\partial}{\partial l} \\ &= e^{-i\theta} \left(\frac{i}{2} \sin^{1/2} \phi e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\sin^{1/2} \phi}{\rho} e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{i}{2} \frac{1}{\rho \sin^{1/2} \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial}{\partial l} &= \frac{\cos \phi}{2\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \phi}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}$$

elemanları küresel koordinatlarda gösterilmiş olunur. $\mathbb{H}^1$ de t zaman değişkeni olmak üzere, ısı operatörü

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_{\mathbb{H}^1} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(X^2 + Y^2 \right) \tag{3.6}$$

şeklinde gösterilir. Bu ısı operatörüne karşılık gelen temel çözüm fonksiyonu $K(z, l; t) :$ $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$,

$$\frac{\partial K(z, l; t)}{\partial t} - \Delta_{\mathbb{H}^1} K(z, l; t) = 0,\ t > 0 \tag{3.7}$$

homojen ısı denkleminin çözümüdür ve

$$\lim_{v \to 0} K(z, l; t) = \delta(z)\, \delta(l)$$

limit şartını sağlar [6]. Şimdi (3.7) ısı denkleminin temel çözümü verilebilir:

Teorem 3.1.1 $\mathbb{H}^1$ *de* (3.7) *deki ısı denkleminin* $K(z,l;t)$ *temel çözümü*

$$f(z,l,\tau) = -i\tau l + h\tau \coth(2\tau h)\left(x^2+y^2\right)$$

fonksiyonu ve

$$V(\tau) = \frac{2h\tau}{\sinh(2h\tau)}$$

hacim elemanı ile birlikte,

$$K(z,l;t) = \frac{1}{(2\pi t)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{f(z,l,\tau)}{t}} V(\tau)\, d\tau$$

şeklinde verilir.

Daha fazla bilgi için Calin, Chang ve Greiner'ın çalışmalarına bakılabilir [6].

3.2 $\mathbb{H}^n$ Heisenberg Grubu

Tanım 3.2.1 $w := (z,l) = (x,y,l) = (x_1,...,x_n,y_1,...y_n,l) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *noktalarından oluşan,*

$$\tau_w(w') = w \circ w' = \left(x+x', y+y', l+l'+2\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i' - y_i x_i')\right)$$

değişmeli olmayan grup operasyonu ile tanımlanmış $(\mathbb{R}^{2n+1},\circ)$ *yapısına* $2n+1$ *boyutlu* $\mathbb{H}^n$ ***Heisenberg grubu*** *denir.*

Burada $w \circ w' \neq w' \circ w$ olduğuna dikkat edilmelidir. $\mathbb{H}^n$ üzerinde tanımlanan vektör alanları şöyle verilir:

$$X_i := \frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i\frac{\partial}{\partial l},\ Y_i := \frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i\frac{\partial}{\partial l},\ i \in \{1,...,n\}.$$

Tanım 3.2.2 [***Lie Parantez Operatörü***]. $\Gamma(TM)$ *ile bir* M *manifoldu üzerindeki vektör alanlarının kümesi gösterilsin.* M *bir diferansiyellenebilir manifold,* M *manifoldunda bir* U *açık kümesi üzerinde vektör alanları* X *ve* Y *olmak üzere,* $f \in$

$C^{\infty}(U,\mathbb{R})$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} [,]: \quad & \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM) \\ & [X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \end{aligned}$$

ile tanımlanan dönüşüme X ve Y vektör alanlarının ***Lie operatörü*** *denir. Burada $X(f)$, f fonksiyonunun X vektör alanına göre yöne göre türevidir.*

Her $i=1,2,...,n$ için ilgili Lie parantezleri

$$[X_i,X_j] = [Y_i,Y_j] = \left[X_i,\frac{\partial}{\partial l}\right] = \left[Y_i,\frac{\partial}{\partial l}\right] = 0$$

sıfır olduğundan sadece

$$[X_i,Y_j] = -4\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial l}$$

komütatör ilişkisi vardır. Burada buna karşılık gelen Heisenberg gradyan vektörü

$$\nabla_{\mathbb{H}^n} := (X_1,...,X_n,Y_1,...,Y_n)$$

şeklindedir. Verilen gradyan vektörü $\mathbb{H}^n$ deki her nokta için $2n$ boyutlu bir vektör alanı oluşturur. Burada Kohn Laplace operatörü

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} := \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2+Y_i^2\right) \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanır. (3.8) Kohn Laplace operatörü daha açık olarak

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+4y_i\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial t}-4x_i\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial t}+4\left(x_i^2+y_i^2\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$$

şeklinde yazılır. Bu operatör ikinci dereceden self-adjoint bir diferansiyel operatördür. Heisenberg genişletme dönüşümü $\delta_\lambda:\mathbb{H}^n\to\mathbb{H}^n$, $\lambda>0$ için

$$\delta_\lambda(w) := \left(\lambda x,\lambda y,\lambda^2 l\right)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.2.3 *Eğer $\mathbb{H}^n$ üzerinde tanımlı f fonksiyonu her $\lambda>0$ için*

$$f(\delta_\lambda(w)) = f\left(\lambda z,\lambda^2 l\right) = \lambda^m f(z,l)$$

*eşitliğini sağlıyor ise, bu fonksiyonun $\mathbb{H}^n$ üzerindeki $\mathbb{H}-$**homojenlik derecesi** m dir denir.*

$\mathbb{H}^n$ Heisenberg grubunun homojen boyutu $Q = (2n+1)+1 = 2n+2$ dir ve δ_λ nin Jakobiyeninin determinantı λ^Q olarak bulunur. X_i ve Y_i nin δ_λ a göre birinci dereceden homojen vektör alanları olduklarını göstermek çok zor değildir:

$$X_i(\delta_\lambda) = \lambda\delta_\lambda(X_i)\,, \; Y_i(\delta_\lambda) = \lambda\delta_\lambda(Y_i)\,.$$

$\mathbb{H}^n$ de,$\nabla_{\mathbb{H}^n}$ ve $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ operatörleri $\tau_w(w')$ sol ötelemeye göre invaryant ve sırasıyla birinci ve ikinci dereceden δ_λ genişletme dönüşümüne göre homojendir. Daha açık bir şekilde gösterilecek olunursa

$$\nabla_{\mathbb{H}^n}(u \circ \tau_w) = (\nabla_{\mathbb{H}^n} u) \circ \tau_w, \; \nabla_{\mathbb{H}^n}(u \circ \delta_\lambda) = \lambda(\nabla_{\mathbb{H}^n} u) \circ \delta_\lambda,$$

$$\Delta_{\mathbb{H}^n}(u \circ \tau_w) = (\Delta_{\mathbb{H}^n} u) \circ \tau_w, \; \Delta_{\mathbb{H}^n}(u \circ \delta_\lambda) = \lambda^2(\Delta_{\mathbb{H}^n} u) \circ \delta_\lambda$$

şeklinde yazılabilir. Folland ve Stein [13] tarafından tanımlanan $\mathbb{H}^n$ Heisenberg grubundaki norm

$$\|w\|_{\mathbb{H}^n} = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + y_i^2 \right)^2 + l^2 \right)^{\frac{1}{4}}$$

şeklindedir. $\mathbb{H}^n$ deki orjin $0 = (0,0)$ ve orjinden herhangi bir w noktasına uzaklığı veren fonksiyon

$$\rho = d(w) = d(z,l) = \left(|z|^4 + l^2\right)^{\frac{1}{4}}$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyon aşağıdaki bazı özelliklere sahiptir:

i. $d(w) = 0 \Longleftrightarrow w = 0,$

ii. $d(w^{-1}) = d(-w) = d(w)\,,$

iii. $d(\delta_\lambda w) = \lambda d(w)\,,$

iv. $d(w) : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ fonsiyonu süreklidir.

$\mathbb{H}^n$ deki herhangi iki nokta arasındaki mesafeyi veren uzaklık fonksiyonu şöyle tanımlanır:

$w, \eta \in \mathbb{H}^n$ olsun. η^{-1} noktası $\circ$ grup işlemine göre η nın tersi ve $\eta^{-1} = -\eta$ olmak üzere, $\mathbb{H}^n$ deki uzaklık fonksiyonu

$$d_{\mathbb{H}^n}(w, \eta) = \left\| \eta^{-1} \circ w \right\|_{H^n}$$

şeklindedir. Uzaklık fonksiyonu simetri özelliğini sağlar:

$$d_{\mathbb{H}^n}(w, \eta) = d(\eta, w).$$

Ayrıca yaklaşık olarak üçgen eşitsizliğini sağlar [13]. Yani her $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{H}^n$ için

$$d_{\mathbb{H}^n}(w_1, w_2) \leq C\left(d_{\mathbb{H}^n}(w_1, w_3) + d_{\mathbb{H}^n}(w_3, w_2)\right)$$

dir. Şimdi tanımlanan uzaklık fonksiyonu ile birlikte $\mathbb{H}^n$ deki açık yuvarın tanımı verilebilir. $\mathbb{H}^n$ deki r yarıçaplı, a merkezli açık yuvar

$$\mathbf{B}_{\mathbb{H}^n}(a, r) := \{w \in \mathbb{H}^n : d(a, w) < r\}$$

şeklindedir. Buna Heisenberg yuvarı, bazen de Koranyi yuvarı denir. $\mathbb{R}^n$ uzayında Öklid yuvarının üstlendiği rolü $\mathbb{H}^n$ de Koranyi yuvarı üstlenir.

Folland, Kohn Laplace operatörü ile klasik Laplace operatorü arasında çok önemli bir bağlantı kurmuştur [12]. $c_Q > 0$ uygun bir pozitif sabit olmak üzere

$$\Psi(w) = \frac{c_Q}{d(w)^{Q-2}}$$

sıfır noktasında bir kutup noktasına sahip, $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$ operatörünün temel çözümüdür. Burada $Q = 2n + 2$ dir.

Şimdi ilerideki hesaplamalarda çok faydası olacak bir lemmanın ifade ve ispatı şöyle verilebilir.

Lemma 3.2.1 *$\phi = \phi(\rho)$ fonksiyonu $\mathbb{H}^n$ de sadece ρ değişkenine bağlı olsun. Ve $\rho = \left((x^2 + y^2)^2 + l^2\right)^{\frac{1}{4}} = (r^4 + l^2)^{\frac{1}{4}}$ olarak verilsin. O halde*

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2 = \frac{r^2}{\rho^2} |\phi'(\rho)|^2 \tag{3.9}$$

dir.

Kanıt.

$$X_i\phi = \left(\frac{\partial\rho}{\partial x_i} + 2y_i\frac{\partial\rho}{\partial l}\right)\phi'(\rho)\,,\ Y_i\phi = \left(\frac{\partial\rho}{\partial y_i} - 2x_i\frac{\partial\rho}{\partial l}\right)\phi'(\rho)\,,\ i\in\{1,...,n\} \tag{3.10}$$

olmak üzere

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n}\phi|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left((X_i\phi)^2 + (Y_i\phi)^2\right) \tag{3.11}$$

olduğu biliniyor. Gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial x_i} &= \left[\left(x^2+y^2\right)^2 + l^2\right]^{-3/4}\left(x^2+y^2\right)x_i\phi'(\rho) \\ &= \left(r^4+l^2\right)^{-3/4}x_i r^2\phi'(\rho) \\ &= \frac{r^2}{\rho^3}x_i\phi'(\rho)\,,\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial y_i} &= \left[\left(x^2+y^2\right)^2 + l^2\right]^{-3/4}\left(x^2+y^2\right)y_i\phi'(\rho) \\ &= \left(r^4+l^2\right)^{-3/4}y_i r^2\phi'(\rho) \\ &= \frac{r^2}{\rho^3}y_i\phi'(\rho)\,,\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial l} &= \left[\left(x^2+y^2\right)^2 + l^2\right]^{-3/4}\frac{l}{2}\phi'(\rho) \\ &= \frac{l}{2}\rho^{-3}\phi'(\rho)\end{aligned} \tag{3.14}$$

kısmi türevleri elde edilir. Bu (3.12), (3.13) ve (3.14) deki kısmi türevler (3.10) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$X_i\phi = \left(\frac{r^2}{\rho^3}x_i + 2y_i\frac{l}{2}\rho^{-3}\right)\phi'(\rho)$$

ve

$$Y_i\phi = \left(\frac{r^2}{\rho^3}y_i + 2x_i\frac{l}{2}\rho^{-3}\right)\phi'(\rho)$$

eşitlikleri bulunur. Sonuç olarak

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n}\phi|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left((X_i\phi)^2 + (Y_i\phi)^2\right) = \frac{r^2}{\rho^2}\left|\phi'(\rho)\right|^2$$

elde edilir. ■

Son olarak, $\int_D \phi(w)\,dw$ integralini hesaplayabilmek için D'Ambrosio [9] tarafından kullanılan $\mathbb{H}^n$ deki küresel dönüşümler verilecektir. Burada $0 \leq R_1 < R_2$ yarıçapları ve $\phi \in L^1(D)$ operatörü ile birlikte $D = B_{\mathbb{H}^n}(0, R_2) \backslash B_{\mathbb{H}^n}(0, R_1)$ halkası verilsin. Heisenberg grubundaki herhangi bir nokta, $R_1 < \rho < R_2$, $\theta \in (0, \pi)$, $i = 1, ..., 2n-2$ için $\theta_i \in (0, \pi)$ ve $\theta_{2n-1} \in (0, 2\pi)$ olmak üzere, küresel koordinatlara

$$w = (z, l) = (x, y, l) = (x_1, ..., x_n, y_1, ...y_n, l) := \Phi(\rho, \theta, \theta_1, ..., \theta_{2n-1}),$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho(\sin\theta)^{1/2}\cos\theta_1, \\
y_1 &= \rho(\sin\theta)^{1/2}\sin\theta_1\cos\theta_2, \\
&\ldots \\
x_{n-1} &= \rho(\sin\theta)^{1/2}\sin\theta_1\sin\theta_2...\cos\theta_{2k-3}, \\
y_{n-1} &= \rho(\sin\theta)^{1/2}\sin\theta_1\sin\theta_2...\sin\theta_{2k-3}\cos\theta_{2k-2}, \\
x_n &= \rho(\sin\theta)^{1/2}\sin\theta_1\sin\theta_2...\sin\theta_{2k-3}\sin\theta_{2k-2}\cos\theta_{2k-1}, \\
y_n &= \rho(\sin\theta)^{1/2}\sin\theta_1\sin\theta_2...\sin\theta_{2k-3}\sin\theta_{2k-2}\sin\theta_{2k-1}, \\
l &= \rho^2\cos\theta
\end{aligned}$$

olarak dönüştürülür. Burada

$$\begin{aligned}
\rho &= \left(\left(x^2+y^2\right)^2 + l^2\right)^{\frac{1}{4}}, \\
\theta &= \sin^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{\left(\left(x^2+y^2\right)^2+l^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right), \\
\theta_1 &= \cos^{-1}\left(\frac{x_1}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\right), \\
&\ldots \\
\theta_{2n-2} &= \cos^{-1}\left(\frac{y_{n-1}}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}\prod_{i=1}^{2n-3}\sin\theta_i}\right), \\
\theta_{2n-1} &= \cos^{-1}\left(\frac{x_{2n-2}}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}\prod_{i=1}^{2n-2}\sin\theta_i}\right)
\end{aligned}$$

dir. Φ operatörünün jakobiyeni $J(\Phi)$ ile gösterilirse, $\mathbb{H}^n$ de küresel koordinatlarda birim kürenin hacim diferansiyeli

$$dw = dxdydl = \det J(\Phi)\, d\theta_1 ... d\theta_{2n-2} d\theta d\rho$$

ve $J(\Phi)$ nin determinantı

$$\det J(\Phi) = \rho^{2n+1} \sin^{n-1}\theta \sin^{2n-2}\theta_1 ... \sin\theta_{2n-2}$$

olarak hesaplanır. Eğer $r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2 + y_1^2 + ... + y_n^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ nin Öklid normu ve $\phi(w) = \phi(r, l)$ silindirik fonksiyon ise,

$$\Gamma_n := \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 ... \int_0^\pi d\theta_{2n-2} \int_0^\pi d\theta_{2n-1} \sin^{2n-2}\theta_1 ... \sin\theta_{2n-2}$$

$\mathbb{R}^{2n+1}$ deki $2n$ boyutlu birim kürenin Lebesgue yüzey ölçümü olmak üzere, $\int_D \phi(w)\, dw$ integrali

$$\int_D \phi(w)\, dw = \Gamma_n \int_0^\pi d\theta \int_{R_1}^{R_2} \rho^{2n+1} (\sin\theta)^{n-1} \phi\left(\rho^2 \sin\theta, \rho^2 \cos\theta\right) d\rho$$

olarak hesaplanabilir.

3.3 $\mathbb{H}^n$ de Singüler Potansiyele Sahip Parabolik Denklemler

Bu bölümde, $\mathbb{H}^n$ Heisenberg grubunda $a(w) > 0$ ve $V(w)$ potansiyelleri ile verilmiş

$$\begin{cases} u_t = \nabla_{\mathbb{H}^n}(a(w)\nabla_{\mathbb{H}^n} u^m) + V(w) u^m, & (w,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(w,t) = 0, & (w,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u(w,0) = u_0(w) \geq 0, & w \in \Omega \end{cases} \tag{3.15}$$

doğrusal olmayan parabolik probleminde pozitif çözümün yokluğu üzerinde durulacaktır. Burada $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ düzgün sınırlara sahip sınırlı bir bölgedir.

Son yıllarda singüler potansiyele sahip parabolik denklemler üzerinde pozitif çözümün varlığı ve yokluğu üzerine birçok çalışma vardır [3, 7, 17, 18, 19, 21].

Bütün bu çalışmalara motivasyon kaynağı olarak Baras ve Goldstein [3] ikilisinin 1984 yılında yaptığı çalışma gösterilebilir. Bu çalışmada, Baras ve Goldstein tarafından $\mathbb{R}^n$ de $\frac{c}{|x|^2}$ singüler potansiyeline sahip

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \frac{c}{|x|^2}u, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.16}$$

doğrusal Cauchy-Dirichlet probleminin pozitif çözümü incelenmiştir [3]. Problemin çözümünde $\frac{c}{|x|^2}$ potansiyelinin rolü çok kritiktir. İncelemenin sonucunda (3.16) probleminin, $c > \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ için $u \equiv 0$ dışında negatif olmayan çözümünün olmadığı, $c \leq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ için ise pozitif zayıf çözümlerinin varlığı gösterilmiştir. Bu önemli çalışmada kullanılan potansiyel çok özel bir potansiyeldir. Bu, Acaba daha genel pozitif singüler potansiyeller için pozitif çözüm var mıdır? sorusunu akla getirmiştir.

Ve bu soru 1999 yılında Cabre ve Martel [7] tarafından yapılan çalışmada cevap bulmuştur. Bu çalışmada pozitif çözümün varlığı ve yokluğu üzerindeki temel etkenin

$$\sigma_{\inf}(V;\Omega) := \inf_{0 \not\equiv \phi \in C_c^\infty(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx - \int_\Omega V(x)|\phi|^2 dx}{\int_\Omega |\phi|^2 dx} \tag{3.17}$$

enerji fonksiyonunun büyüklüğü olduğu gösterilmiştir. Bu çalışmaların paralelinde, Goldstein ve Kömbe [19] 2003 yılında yaptıkları çalışmalarında $\mathbb{R}^n$ de $V(x)$ potansiyeline sahip doğrusal olmayan parabolik problem üzerinde önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Bu aşamada doğal olarak $\mathbb{R}^n$ de çalışılan bütün bu problemlerin $\mathbb{H}^n$ de bir karşılığı var mıdır? sorusu akla gelmektedir. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında yapılan bu çalışmalar vesilesiyle $\mathbb{H}^n$ Heisenberg grubunda singüler potansiyele sahip parabolik problemlere olan ilgi daha da artmıştır. Buna ilişkin ilk örnek 2001 yılında Goldstein ve Zhang [21] tarafından $\mathbb{R}^n$ deki problem (3.16) nın bir karşılığı olarak ele alınan, $\mathbb{H}^n$ deki

$$\begin{cases} u_t = \Delta_{\mathbb{H}^n} u + \frac{a|z|^2}{|z|^4 + l^2}u, \\ u(z,l,0) = u_0(z,l), \quad w = (z,l) \in \mathbb{H}^n,\ t \in (0,T] \end{cases} \tag{3.18}$$

doğrusal parabolik problemi olarak gösterilebilir. Bu problemin sonucu şöyle verilebilir:

Teorem 3.3.1 [***Goldstein-Zhang***]. *$a \in \mathbb{R}^+$ ve $a^* = \left(\frac{Q-2}{2}\right)^2 = \left(\frac{2n+2-2}{2}\right)^2 = n^2$ olsun.*

i. $a \leq a^*$ *ise* (3.18) *probleminin bazı* $u_0 > 0$ *değerleri için pozitif çözümü vardır.*

ii. $a > a^*$ *iken* (3.18) *problemi* $u \equiv 0$ *çözümü dışında negatif olmayan çözüme sahip değildir.*

Goldstein ve Zhang bu çalışmalarının ardından $\mathbb{H}^n$ de daha genel singüler potansiyele sahip doğrusal ısı denklemleri üzerinde durdular [20]. Daha sonra, 2004 yılında Goldstein ve Kömbe [18], 2003 yılında yaptıkları $\mathbb{R}^n$ deki çalışmalarını genişleterek, $\mathbb{H}^n$ de

$$\begin{cases} u_t = \Delta_{\mathbb{H}^n}\left(u^m\right) + V\left(w\right) u^m, & \Omega \times \left(0, T\right), \ 0 < m < 1 \\ u\left(w, t\right) = 0, & \partial\Omega \times \left(0, T\right) \\ u\left(w, 0\right) = u_0\left(w\right) \geq 0, & \Omega \end{cases} \tag{3.19}$$

doğrusal olmayan difüzyon (porous medium) denkleminde pozitif çözümün yokluğu üzerine yoğunlaştılar.

2005 yılında G. R. Goldstein, J. A. Goldstein ve I. Kömbe [17] $0 < m < 1$, $V \in L^1_{loc}\left(\Omega\right)$ ve $\gamma \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde bütün bu çalışmaları içeren

$$\begin{cases} u_t = \nabla\left(\left|x\right|^{-2\gamma} \nabla u^m\right) + V\left(x\right) u^m, & \Omega \times \left(0, T\right) \\ u\left(x, t\right) = 0, & \partial\Omega \times \left(0, T\right) \\ u\left(x, 0\right) = u_0\left(x\right) \geq 0, & \Omega \end{cases} \tag{3.20}$$

problemini ele aldılar. Dikkat edilirse, $\gamma = 0$ ve $m = 1$ olarak düşünüldüğünde bu problem $V\left(x\right) = \frac{c}{|x|^2}$ potansiyeli için Baras ve Goldstein'ın 1984 yılında inceledikleri $\frac{c}{|x|^2}$ singüler potansiyelli (3.16) doğrusal problemine dönüşür. Sadece $\gamma = 0$ kabul edildiğinde (3.20) deki problem Goldstein ve Kömbe'nin ilk olarak $\mathbb{R}^n$ de, daha sonra $\mathbb{H}^n$ de çalıştıkları doğrusal olmayan problemdir [18, 19].

Bizi motive eden bütün bu çalışmaların ışığında, $\mathbb{R}^n$ deki $\left|x\right|^{-2\gamma}$ potansiyeli için çalışılan (3.20) doğrusal olmayan probleminin acaba daha genel $a\left(w\right) > 0$ potansiyeli için $\mathbb{H}^n$ de bir karşılığı var mıdır? sorusunu sorabiliriz. Bu sorunun yanıtına geçmeden önce ele alınacak olan problemin çözümünde ihtiyaç duyulacak olan $\mathbb{R}^n$ deki Sobolev eşitsizliğinin Folland ve Stein [13] tarafından bulunan $\mathbb{H}^n$ deki karşılığı şöyle verilebilir:

Teorem 3.3.2 [***Folland-Stein***]. $1 < p < Q$, $p^* = \frac{pQ}{Q-p}$ *olsun.* $\phi \in C_c^\infty\left(\mathbb{H}^n\right)$ *için*

$$\left(\int_{\mathbb{H}^n} |\phi|^{p^*} dw\right)^{1/p^*} \leq S \left(\int_{\mathbb{H}^n} |\nabla_{\mathbb{H}^n}\phi|^p \, dw\right)^{1/p} \tag{3.21}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği pozitif S sayısı vardır.

Folland-Stein teoreminin doğal sonucu olarak şu lemma verilebilir:

Lemma 3.3.1 *$\Omega \subset \mathbb{H}^n$ sınırlı bir bölge olmak üzere $1 \leq p < Q$ değeri için $M \in L^{Q/p}(\Omega)$ ve $\phi \in C_c^p(\Omega)$ olsun. O halde her $\epsilon > 0$ için*

$$\int_\Omega M(w)\,|\phi|^p\,dw \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n}\phi|^p\,dw + C(\epsilon)\int_\Omega |\phi|^p\,dw \tag{3.22}$$

eşitsizliğini gerçekleyen $C(\epsilon) > 0$ sabiti vardır.

Kanıt. *$M_k(w) := \min\{M(w), k\}$ olarak tanımlansın. $k \to \infty$ için $\|M_k - M\|_{L^{Q/p}} \to 0$ olur. Buradan*

$$\int_\Omega M(w)\,|\phi|^p\,dw \leq \int_\Omega |M_k - M|\,|\phi|^p\,dw + k\int_\Omega |\phi|^p\,dw$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağındaki ilk integral ifadesi için Hölder eşitsizliği uygulandığında

$$\int_\Omega M\,|\phi|^p\,dw \leq \left(\int_\Omega |M - M_n|^{\frac{Q}{p}}\,dw\right)^{\frac{p}{Q}} \left(\int_\Omega |\phi|^{\frac{Qp}{Q-p}}\,dw\right)^{\frac{Q-p}{Q}} + k\int_\Omega |\phi|^p\,dw$$

olur. $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{H}^n)$ olsun. $1 \leq p < Q$ ve $q = \frac{Qp}{Q-p}$ olduğunda (3.21) Folland-Stein eşitsizliği kullanılırsa

$$\left(\int_\Omega |\phi(w)|^q\,dw\right)^{1/q} \leq S\left(\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n}\phi(w)|^p\,dw\right)^{1/p}$$

elde edilir. Buradan

$$\int_\Omega M\,|\phi|^p\,dx \leq S\left(\int_\Omega |M - M_n|^{\frac{Q}{p}}\,dx\right)^{\frac{p}{Q}} \int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n}\phi|^p\,dw + k\int_\Omega |\phi|^p\,dw$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği görülür. Sonuç olarak yeteri kadar büyük k sabiti için

$$\left(\int_\Omega |M - M_n|^{\frac{Q}{p}}\,dx\right)^{\frac{p}{Q}} \leq \frac{\epsilon}{(1-\epsilon)\,S}$$

olur. Böyle bir k sabiti için $C(\epsilon) = k$ seçilirse istenen sonuç elde edilmiş olunur. ■

Problem 3.3.1 *$\Omega \subset \mathbb{H}^n$ sınırlı bölgesinde $V(w)$ ve pozitif $a(w)$ fonksiyonları $L^1_{loc}(\Omega)$ sınıfından ve $0 < m < 1$ olmak üzere*

$$\begin{cases} u_t = \nabla_{\mathbb{H}^n}\left(a(w)\nabla_{\mathbb{H}^n}u^m\right) + V(w)u^m, & (w,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(w,t) = 0, & (w,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u(w,0) = u_0(w) \geq 0, & w \in \Omega \end{cases} \tag{3.23}$$

doğrusal olmayan parabolik probleminin pozitif çözümü hangi şartlar altında yoktur?

Teorem 3.3.3 *$n \geq 3$ doğal sayısı için $\frac{n}{n+1} \leq m < 1$ ve $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ sınırlı bölgesinde $a(w) > 0, V(w) \in L^1_{loc}(\Omega)$ olsun. Eğer*

$$\inf_{0 \not\equiv \phi \in C_c^\infty(\Omega)} \frac{\int_\Omega (\epsilon + a(w)) \left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\phi\right|^2 dw - \int_\Omega V(w)\left|\phi\right|^2 dw}{\int_\Omega \left|\phi\right|^2 dw} = -\infty \tag{3.24}$$

ise (3.23) probleminin $u > 0$ çözümü yoktur.

Kanıt. *Bu ispat kontrapozitif tekniği yardımı ile verilecektir. Herhangi $T > 0$ sayısı için $u : [0,T) \to L^1(\Omega)$ fonksiyonunun $\Omega \times (0,T)$ bölgesinde $u_0 \geq 0$ olan fakat $u \equiv 0$ olmayan, (3.23) probleminin pozitif çözümü olduğu kabul edilsin. $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ olmak üzere*

$$u_t = \nabla_{\mathbb{H}^n}\left(a(w)\nabla_{\mathbb{H}^n}u^m\right) + V(w)u^m$$

eşitliğinin her iki tarafı ϕ^2/u^m test fonksiyonu ile çarpıldıktan sonra $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ bölgesinde integre edilirse

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1-m}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{1-m}\phi^2(w)\,dw \\ = &\int_\Omega \nabla_{\mathbb{H}^n}\left(a(w)\nabla_{\mathbb{H}^n}u^m\right)\frac{\phi^2}{u^m}dw + \int_\Omega V(w)\phi^2(w)\,dw \end{aligned} \tag{3.25}$$

eşitliği yakalanır. Bu eşitliğin sağındaki ilk integrale kısmi integrasyon uygulandığında, bu integral $\nabla_{\mathbb{H}^n}u^m = mu^{m-1}\nabla_{\mathbb{H}^n}u$ özdeşliği ile

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla_{\mathbb{H}^n}\left(a(w)\nabla_{\mathbb{H}^n}u^m\right)\frac{\phi^2}{u^m}dw \\ = &-\int_\Omega \left(a(w)\nabla_{\mathbb{H}^n}u^m\right)\nabla_{\mathbb{H}^n}\left(u^{-m}\phi^2\right)dw \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int\limits_{\Omega} \left(a(w)\, m u^{m-1} \nabla_{\mathbb{H}^n} u\right)\left(-m u^{-m-1} \left(\nabla_{\mathbb{H}^n} u\right)\phi^2 + u^{-m} 2\phi \left(\nabla_{\mathbb{H}^n}\phi\right)\right) dw \\
&= \int\limits_{\Omega} a(w) \left(m^2 \frac{\phi^2}{u^2} \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\right|^2 - 2m \frac{\phi}{u} \nabla_{\mathbb{H}^n} u \nabla_{\mathbb{H}^n}\phi\right) dw \\
&= -\int\limits_{\Omega} a(w) \left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\phi\right|^2 dw + \int\limits_{\Omega} a(w) \left|m \frac{\phi}{u} \nabla_{\mathbb{H}^n} u - \nabla_{\mathbb{H}^n}\phi\right|^2 dw \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

olarak ifade edilir. Buradaki $\int_{\Omega} a(w) \left|m\frac{\phi}{u}\nabla_{\mathbb{H}^n} u - \nabla_{\mathbb{H}^n}\phi\right|^2 dw$ *integrali pozitif olduğundan* (3.26) *eşitliğinden çıkarılırsa*

$$
\int\limits_{\Omega} \nabla_{\mathbb{H}^n} \left(a(w) \nabla_{\mathbb{H}^n} u^m\right) \frac{\phi^2}{u^m} dw \geq -\int\limits_{\Omega} a(w) \left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\phi\right|^2 dw \qquad (3.27)
$$

eşitsizliği elde edilir. (3.25) *ve* (3.27) *deki ifadeler birleştirilirse*

$$
\int\limits_{\Omega} V(w)\, \phi^2(w)\, dw - \int\limits_{\Omega} a(w) \left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\phi\right|^2 dw \leq \frac{1}{1-m} \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} u^{1-m} \phi^2(w)\, dw \qquad (3.28)
$$

eşitsizliği bulunur. $0 < t_1 < t_2 < T$ *olmak üzere,* (3.28) *deki integral eşitsizliğinin her iki tarafı* t *değişkenine göre* t_1 *den* t_2 *ye kadar integre edilirse*

$$
\begin{aligned}
&(t_2 - t_1) \int\limits_{\Omega} V(w)\, \phi^2(w)\, dw - (t_2 - t_1) \int\limits_{\Omega} a(w) \left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\phi\right|^2 dw \\
&\leq \frac{1}{1-m} \int\limits_{\Omega} \left(u^{1-m}(w, t_2) - u^{1-m}(w, t_1)\right) \phi^2(w)\, dw
\end{aligned}
$$

olur. Yani

$$
K = \frac{1}{(1-m)(t_2 - t_1)}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} V(w)\, \phi^2(w)\, dw - \int\limits_{\Omega} a(w) \left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\phi\right|^2 dw \qquad (3.29) \\
&\leq K \int\limits_{\Omega} \left(u^{1-m}(w, t_2) - u^{1-m}(w, t_1)\right) \phi^2(w)\, dw
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır. $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ *sınırlı olduğundan* $|\Omega|$ *sonludur. Şimdi bu basamakta,*

$\frac{n}{n+1} \leq m < 1$ *için* $f(x) = x^{(1-m)(n+1)}$ *konkav fonksiyonuna* Ω *bölgesinde Jensen eşitsizliği uygulanırsa,* $u(w, t_i) \in L^1(\Omega)$ *olduğundan*

$$\int\limits_{\Omega} (u(w, t_i))^{(1-m)(n+1)}\, dw \leq C(|\Omega|) \left(\int\limits_{\Omega} u(w, t_i)\, dw\right)^{(1-m)(n+1)} < \infty$$

sonlu integrali elde edilir. Bu da

$$u^{1-m}(w, t_i) \in L^{n+1}(\Omega)$$

demektir. Buradan da

$$\left(u^{1-m}(w, t_2) - u^{1-m}(w, t_1)\right) \in L^{n+1}(\Omega)$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi $(u^{1-m}(w, t_2) - u^{1-m}(w, t_1))$ *fonksiyonu için Sobolev eşitsizliğinin doğal sonucu olan* ***Lemma* 3.3.1** *kullanılırsa; her* $\epsilon > 0$ *için*

$$K \int\limits_{\Omega} \left(u^{1-m}(w, t_2) - u^{1-m}(w, t_1)\right) \phi^2(w)\, dw \leq \epsilon \int\limits_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2\, dw + C(\epsilon) \int\limits_{\Omega} \phi^2 dw$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir $C(\epsilon) > 0$ *sayısı bulunur. Son olarak, elde edilen bu son eşitsizlik* (3.29) *da kullanılıp*

$$\int\limits_{\Omega} V(w)\, \phi^2(w)\, dw - \int\limits_{\Omega} a(w)\, |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2\, dw \leq \epsilon \int\limits_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2\, dw + C(\epsilon) \int\limits_{\Omega} \phi^2 dw$$

gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{\int_{\Omega} (\epsilon + a(w))\, |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2\, dw - \int_{\Omega} V(w)\, \phi^2(w)\, dw}{\int_{\Omega} \phi^2 dw} \geq -C(\epsilon)$$

eşitsizliği, yani

$$\inf_{0 \not\equiv \phi \in C_c^{\infty}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} (\epsilon + a(w))\, |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2\, dw - \int_{\Omega} V(w)\, \phi^2(w)\, dw}{\int_{\Omega} \phi^2 dw} > -\infty$$

sonucu elde edilir. Bu ise

$$\inf_{0 \not\equiv \phi \in C_c^{\infty}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} (\epsilon + a(w))\, |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2\, dw - \int_{\Omega} V(w)\, \phi^2(w)\, dw}{\int_{\Omega} \phi^2 dw} \neq -\infty$$

demektir. Bu da ispatı tamamlar. Yani (3.23) *nolu problemin* $u > 0$ *çözümü yoktur.*
■

Verilen bu ispattan sonra, Hangi uygun $a(w) > 0$ ve $V(w)$ potansiyelleri için çözümün yokluğundaki en büyük etken olan

$$\inf_{0 \not\equiv \phi \in C_c^{\infty}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} (\epsilon + a(w)) \left| \nabla_{\mathbb{H}^n} \phi \right|^2 dw - \int_{\Omega} V(w) \phi^2(w)\, dw}{\int_{\Omega} \phi^2 dw}$$

enerji fonksiyonu $-\infty$ a gider?, Bu uygun potansiyeller nasıl bulunabilir? gibi sorular sorulabilir. İşte bu gibi soruların cevabı daha sonraki çalışmalarımızda verilmeye çalışılacaktır.

SONUÇ

Giriş bölümünde konuyla ilgili temel tanım ve önbilgiler verildikten sonra çalışmanın ilk bölümünde öncelikle $u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t)$ bir boyutlu ısı denklemi enerji korunumu temel prensibi kullanılarak elde edilmiştir. Bunun ardından $u_t = k u_{xx}$ denkleminin $\bar{\Omega}_T$ parabolik bölgesinde tanımlanmış $u = u(x,t)$ çözümü için maksimum-minimum prensibi ispatı ile verilmiştir. Maksimum prensibi yardımı ile Dirichlet sınır koşullu başlangıç-sınır değer ve başlangıç değer problemlerinin iyi tanımlı olabilmesi için gereken çözümün tekliği ve giriş verilerine göre sürekliliği şartları incelenmiştir. Daha sonra Fourier serisi yöntemi kullanılarak çeşitli Dirichlet ve Neumann sınır koşulları ile verilmiş başlangıç-sınır değer probleminin çözümü elde edilmiştir. Bölümün sonunda sonsuz aralıkta tanımlanmış başlangıç değer probleminin çözümü elde edilirken Fourier serisi gösteriminin doğal genişlemesi olan Fourier dönüşümü kullanılmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde $u_t - \Delta u = 0$ $n-$boyutlu ısı denklemi başlangıç ve sınır koşulları ile birlikte çeşitli yönlerden incelenmiştir. $\mathbb{R}$ de ısı denklemine dair tanımlanan kavramlar ve kanıtlanan sonuçlar genelleştirilerek, çok daha genel kavramlar ve sonuçlar elde edilebilir. İlk olarak gerekli benzerlik dönüşümleriyle $n-$boyutlu ısı denkleminin temel çözümü verilmiştir. Daha sonra $\mathbb{R}^n$ de verilen bir başlangıç değer probleminin çözümü tek boyutlu ısı denklemlerinde olduğu gibi Fourier dönüşümü metodu ile elde edilmiştir. Burada Fourier dönüşümü n bileşenli $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ değişkenine göre uygulanacak olmasından kaynaklanan birtakım farklılıklar ortaya çıkmıştır. Son olarak verilen başlangıç-sınır değer problemi, $u(x,t) = X(x)T(t)$ formunda çözüm aranarak, ikinci dereceden özdeğer problemi ve birinci dereceden adi diferansiyel denklemine indirgenip çözüme ulaşılmıştır.

Son bölüm olan üçüncü bölüm tezin esas konusu olan $\mathbb{H}^n$ Heisenberg Grubu'nda doğrusal ve doğrusal olmayan parabolik denklemlerine ayrılmıştır. Öncelikle Heisenberg grubundaki kavramların daha rahat anlaşılabilmesi için $\mathbb{H}^1$ Heisenberg grubu ile $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayı arasındaki paralellikler verilerek konuya giriş yapılmıştır. $\mathbb{H}^1$ de tanımlanan bu kavramlar $\mathbb{H}^n$ e genelleştirilerek çalışmanın omurgası sayılabilecek altyapı kurulmuştur. Bu bölümün son kısmında ise öncelikle ele alınan probleme bir anlamda ilham kaynağı olan o alanda yapılan çalışmalar kronolojik sırası ve birbirleriyle olan ilişkisi dikkate alınarak özetlenmiştir.

Bütün bu ön hazırlıklardan sonra Heisenberg grubunda aşağıdaki

$$\begin{cases} u_t = \nabla_{\mathbb{H}^n}\left(a\left(w\right)\nabla_{\mathbb{H}^n}u^m\right) + V\left(w\right)u^m, & (w,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u\left(w,t\right) = 0, & (w,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u\left(w,0\right) = u_0\left(w\right) \geq 0, & w \in \Omega \end{cases} \tag{3.30}$$

doğrusal olmayan parabolik probleminin $u > 0$ çözümünün yokluğu incelenmiştir. Çözümün yokluğuna etki eden en büyük unsurun

$$\inf_{0 \not\equiv \phi \in C_c^\infty(\Omega)} \frac{\int_\Omega \left(\epsilon + a\left(w\right)\right)\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\phi\right|^2 dw - \int_\Omega V\left(w\right)\phi^2\left(w\right)dw}{\int_\Omega \phi^2 dw}$$

enerji fonksiyonunun büyüklüğü olduğu gösterilerek şu sonuç elde edilmiştir:

Teorem 3.3.4 *$n \geq 3$ doğal sayısı için $\frac{n}{n+1} \leq m < 1$ ve $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ sınırlı bölgesinde $a\left(w\right) > 0, V\left(w\right) \in L^1_{loc}\left(\Omega\right)$ olsun. Eğer*

$$\inf_{0 \not\equiv \phi \in C_c^\infty(\Omega)} \frac{\int_\Omega \left(\epsilon + a\left(w\right)\right)\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\phi\right|^2 dw - \int_\Omega V\left(w\right)\left|\phi\right|^2 dw}{\int_\Omega \left|\phi\right|^2 dw} = -\infty$$

ise (3.30) probleminin $u > 0$ çözümü yoktur.

$a\left(w\right) > 0$, $V\left(w\right) \in L^1_{loc}\left(\Omega\right)$ sınıfından genel fonksiyonlar için ele alınan bu problemde hangi özel $V\left(w\right)$ ve $a\left(w\right) > 0$ potansiyelleri seçilirse enerji fonksiyonunun $-\infty$ değerine yakınsayacağı sorusu gündeme gelmektedir. Bu soru başlı başına bir araştırma konusu olup ileriki çalışmalarda cevaplanmaya çalışılacaktır.

EK: Bazı Tanım, Eşitsizlik, Teorem ve Formüller

Teorem 3.3.5 $\left[\textbf{\textit{İntegraller için Ortalama Değer Teoremi}}\right]$. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

eşitliğini sağlayan bir $c \in [a,b]$ sayısı vardır.

Tanım 3.3.1 [***Konkav Fonksiyon***]. *Eğer her $a, b \in \mathbb{R}^n$ ve her $t \in [0,1]$ için,*

$$f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b)$$

ise o zaman $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna ***konkav*** *denir.*

Tanım 3.3.2 [***Ölçülebilir Fonksiyon***]. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Herhangi bir $I \subset \mathbb{R}$ alt aralığı için*

$$f^{-1}(I) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in I\} \in \mathcal{M}$$

ise f fonksiyonuna ***ölçülebilir*** *denir.*

Tanım 3.3.3 [***Toplanabilir Fonksiyon***]. *Eğer*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|\,dx < \infty$$

integrali sonlu ise ölçülebilir f fonksiyonuna ***toplanabilir*** *denir.*

Teorem 3.3.6 [***Jensen Eşitsizliği***]. *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık ve sınırlı bir bölge, $u : \Omega \to \mathbb{R}$*

toplanabilir ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konkav bir fonksiyon olsun. O zaman

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} udx\right) \geq \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} f(u)\,dx$$

olur.

Kanıt. *f konkav olduğundan, her $p \in \mathbb{R}$ için öyle bir $r \in \mathbb{R}$ sayısı vardır ki*

$$f(q) \leq f(p) + r(q-p)$$

eşitsizliği her $q \in \mathbb{R}$ için geçerlidir. $p := \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} udx$, $q := u(x)$ olarak alındığında

$$f(u(x)) \leq f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} udx\right) + r\left(u(x) - \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} udx\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte her iki taraf Ω üzerinde x değişkenine göre integre edilirse ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.3.7 [***Young Eşitsizliği***]. *a ve $b \geq 0$ olsun. p ve q sayıları pozitif olsunlar ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlasınlar. O zaman*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. *e^x fonksiyonu dışbükey olduğundan*

$$ab = e^{\ln a + \ln b} = e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln a^q} \leq \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \frac{1}{q}e^{\ln a^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

elde edilir. Ayrıca e^x mutlak artan olduğundan eşitlik ancak ve ancak $a^p = b^q$ ise geçerlidir. ■

Teorem 3.3.8 [***Hölder Eşitsizliği***]. *$1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ olsun. O zaman*

$$\int\limits_{\Omega} |uv|\,dx \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

olur.

Kanıt. $\|u\|_p = \|v\|_q = 1$ *kabul edilirse* $1 < p, q < \infty$ *için Young eşitsizliğinden*

$$\int\limits_{\Omega} |uv|\, dx \leq \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega} |u|^p\, dx + \frac{1}{q} \int\limits_{\Omega} |u|^q\, dx = 1 = \|u\|_p \|v\|_q$$

olur. ■

Burada $u \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ düzgün sınırlı bir bölge, $v = (v^1, ..., v^n)$ $\partial\Omega$ sınırının dış birim normal vektör alanı, $v = (v^1, ..., v^n)$ vektörü $\partial\Omega$ sınırının birim dış normali,

$$\frac{\partial u}{\partial v} := v \nabla u$$

ise u fonksiyonunun normal yönündeki türevi olsun.

Teorem 3.3.9 [***Gauss-Green Teoremi***]. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *sınırlı ve açık bir bölge olsun.* $u \in C^1(\bar{\Omega})$ *ise* $i = 1, 2, ..., n$ *için*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int\limits_{\partial\Omega} u v^i dS$$

olur.

Teorem 3.3.10 [***Kısmi İntegrasyon***]. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *sınırlı ve açık bir bölge ve* $u, w \in C^1(\bar{\Omega})$ *olsun. O zaman* $i = 1, 2, ..., n$ *için*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} w dx = -\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial w}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\partial\Omega} u w v^i dS$$

olur.

Teorem 3.3.11 [***Green Formülleri***]. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *sınırlı ve açık bir bölge ve* $u, w \in C^2(\bar{\Omega})$ *olsun. O zaman* $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ *gradyan vektörü olmak üzere*

i. $\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} dS,$

ii. $\int_{\Omega} (\nabla w . \nabla u)\, dx = -\int_{\Omega} (u \Delta w)\, dx + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial v} u\right) dS,$

iii. $\int_{\Omega} (u \Delta w - w \Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial u}{\partial v} - w \frac{\partial u}{\partial v}\right) dS$

formülleri geçerlidir.

KAYNAKÇA

[1] A. Altın, Fourier Analizi, Gazi Kitabevi, Ankara, 2011.

[2] İ. E. Anar, Kısmi Diferensiyel Denklemler, Palme Yayıncılık, Ankara, 2005.

[3] P. Baras, J. A. Goldstein, The heat equation with a singular potential, Trans. AMS, **284** (1984) , 121 – 139.

[4] R. Beals, P. C. Greiner, Calculus on Heisenberg Manifolds, Ann. Math. Studies, Vol. 119, Princetown University Press, 1988.

[5] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni, Stratified Lie Groups and Potential Theory for their Sub-Laplacians, Springer, 2000.

[6] O. Calin, D. Chang, P. Greiner, Geometric Analysis on the Heisenberg Group and Its Generalizations, American Mathematical Society, International Press, 2007.

[7] X. Cabré, Y. Martel, Existence versus explosion instantanée pour des équations de la chaleur linéaires avec potential singulier, C. R. Acad. Sci. Paris, **329** (1999) , 973 – 978.

[8] M. Çağlıyan, O. Çelebi, Kısmi Diferensiyel Denklemler, Dora, Bursa, 2010.

[9] L. D'Ambrosio, Critical degenerate inequalities on the Heisenberg group, Manuscripta Math. **106**, (2001) 519 – 536.

[10] L. C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

[11] S. J. Farlow, Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Dover Publications, Inc, New York, 1993.

[12] G. B. Folland, A fundamental solution for a subelliptic operator, Bull. Amer. Math. Soc. **79** (1973) , 373 – 376.

[13] G. B. Folland, E. M. Stein, Estimates for the ∂_h complex and analysis on the Heisenberg group, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974) , 492 – 522.

[14] G. B. Folland, Introduction to PDEs, second edition. Princeton University Press, New Jersey, 1995.

[15] J. Fritz, Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 1978.

[16] N. Garofalo, E. Lanconelli, Frequency Functions on the Heisenberg group, the uncertainty principle and unique continuation, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **40**, 2 (1990) , 313 − 356.

[17] G. R. Goldstein, J. A. Goldstein, I. Kömbe, Nonlinear parabolic equations with singular coefficient and critical exponent, Applicable Analysis, **84** (2005) , 571 − 583.

[18] J. A. Goldstein, I. Kömbe, Nonlinear degenerate parabolic equations on the Heisenberg group, International Journal of Evolution Equations, **1** (2004) , 1 − 22.

[19] J. A. Goldstein, I. Kömbe, Nonlinear parabolic differential equations with singular lower order term, Advences in Differential Equations, **10** (2003) , 1153 − 1192.

[20] J. A. Goldstein, Q. S. Zhang, Linear parabolic equations with strong singular potentials. Trans. Amer. Math. Soc., **355** (2003) , 197 − 211.

[21] J. A. Goldstein, Q. S. Zhang, On a degenerate heat equation with a singular potential, J. Functional Analysis, **186** (2001) , 342 − 359.

[22] P. C. Greiner, Spherical harmonics on the Heisenberg group, Canad. Math. Bull. **23** (1980) , 383 − 396.

[23] A. H. Hasanov, Kısmi Türevli Denklemler, Literatür Yayıncılık, İstanbul, 2010.

[24] R. Howe, On the role of the Heisenberg group in harmonic analysis, Bull. Amer. Math. Soc. **3** (1980) , 821 − 843.

[25] L. Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math., **119** (1967) , 147 − 171.

[26] K. Koca, Kısmi Türevli Denklemler, Gazi Kitabevi, Ankara, 2013.

[27] G. M. Lieberman, Second Order Parabolic Differential Equations, World Scientific Publishing Co., Inc, NJ, 1996.

[28] T. Myint-U, L. Debnath, Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Birkhauser, Boston, 2007.

[29] E. M. Stein, Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals, Princeton University Press, New Jersey, 1993.

[30] E. M. Stein, Some problem in harmonic analysis suggested by symmetric spaces and semi-simple groups, Actes, Cong. Intern. Math., Nice, 1 (1970) , 179 − 189.

[31] W. A. Strauss, Partial Differential Equations An Introduction, John Wiley-Sons, 1992.

[32] D. W. Trim, Applied Partial Differential Equations, PWS-Kent Publishing Company, Boston, 1989.