T.C.
İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR İLE ANALİTİK FONKSİYONLARIN YAKLAŞIMI

Yüksek Lisans Tezi

Lara Delimelkonoğlu
1160Y55101

Danışman: Doç. Dr. Hamdullah Şevli

İstanbul, Mayıs 2013

T.C.
İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR İLE ANALİTİK FONKSİYONLARIN YAKLAŞIMI

Yüksek Lisans Tezi

Lara Delimelkonoğlu
1160Y55101

İstanbul, Mayıs 2013

T.C.

İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ONAY SAYFASI

Yüksek lisans öğrencisi Lara Delimelkonoğlu'nun "*Bazı Özel Fonksiyonlar İle Analitik Fonksiyonların Yaklaşımı*" konulu tez çalışması jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak (oybirliği ☐ /oyçokluğu ☐) ile başarılı bulunmuştur.

	Adı-Soyadı	İmza
Tez Danışmanı	: Doç. Dr. Hamdullah Şevli	....
Jüri Üyesi	: Prof. Dr. Ekrem Savaş	....
Jüri Üyesi	: Prof. Dr. Allaberen Ashyralyev	....

ÖZET

BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR İLE ANALİTİK FONKSİYONLARIN YAKLAŞIMI

DELİMELKONOĞLU, Lara

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Hamdullah Şevli

Mayıs 2013, 85 sayfa

Beş bölümden oluşan bu çalışmada bazı diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı incelenmiştir.

Bu çalışmanın birinci ve ikinci bölümünde konuya giriş yapılmış ve literatüre değinilmiştir. Üçüncü bölümde ise daha sonra kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, birinci mertebeden lineer homojen ve homojen olmayan diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı incelenerek üstel fonksiyonların yaklaşım özelliği ele alınmıştır.

Bu çalışmanın beşinci bölümünde ise Airy, Legendre, Hermite ve Chebyshev diferansiyel denklemlerinin çözümleri bulunmuş olup buradan elde edilen sonuçlar her analitik fonksiyonun bu özel fonksiyonlar tarafından belli bir hata sınırı ile yaklaştırılabileceğinin ispatlanmasında kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel Denklemlerin Kararlılığı, Hyers-Ulam Kararlılık, Airy denklemi, Legendre denklemi, Hermite denklemi, Chebyshev denklemi

ABSTRACT

APPROXIMATION OF ANALYTIC FUNCTIONS BY SOME SPECIAL FUNCTIONS

DELİMELKONOĞLU, Lara

MSc, Mathematics Science

Supervisor: Assoc.Prof.Dr.Hamdullah Şevli

May 2013, 85 pages

In this study consisting of five sections, Hyers-Ulam stability of some differential equations were investigated.

In the first and second sections of the study, introduction to the subject in hand and the relevant literature were mentioned. In the third section, the basic definitions and theorems which will be utilized were stated.

In the fourth section, Hyers-Ulam stability of first order linear homogeneous and nonhomogeneous differential equations and approximation property of exponential functions were examined.

In fifth section of this study inhomogeneous Airy, Legendre, Hermite and Chebyshev differential equations were solved and these results applied to prove every analytic functions can be approximated by these special functions with an error bound.

Key words: Hyers-Ulam stability, The stability of differential equations, Airy equation, Legendre equation, Hermite equation, Chebyshev equation

ÖNSÖZ

Diferansiyel denklemlerin tarihi 300 yıldan daha fazla bir süreye, 17. yüzyıla dayanmaktadır. Diferansiyel denklemler, uygulamalı matematiğin çok önemli kollarından biri olup, birçok problemin çözümünde önemli bir araçtır. Bu problemlere örnek olarak salınım problemleri, roket, uydu ve gezegenlerin hareketleri, kimyasal reaksiyonlar, radyoaktif maddelerin parçalanması verilebilir.

Son zamanlarda, fonksiyonel denklemlerin Hyers Ulam kararlılık teorisinin diferansiyel denklemlere uygulanmasıyla yeni bir çalışma alanı ortaya çıkmıştır. Bir fonksiyonun bazı şartlar altında yaklaşık olarak bir diferansiyel denklemi sağladığını kabul edersek; bu diferansiyel denklemi tam olarak sağlayan ve bu fonksiyona yakın olan başka bir fonksiyonu bulmanın mümkün olup olmadığını incelemek diferansiyel denklemlerin Hyers Ulam kararlılık problemi olarak ifade edilir.

Genellikle, deneysel veya gözlenen veriler teorik beklentilerle tamamen örtüşmez. Denklemlerin kullanılmasıyla doğal olayı açıklayabiliriz, fakat gerçek deney verilerinin ölçülmesi veya gözetilmesi yüzünden ortaya çıkan hatalar olabilir. Eğer doğal olayı açıklamak için eşitlikler yerine eşitsizlikleri kullanırsak, bu hatalar eşitsizliklerin çözümlerine absorbe edilir. Bu açıdan bakıldığında diferansiyel denklemlerin Hyers Ulam kararlılığı önemli bir çalışma alanıdır.

Bu çalışmada ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin Hyers Ulam kararlılık teorisi ve bazı özel fonksiyonlar yardımıyla analitik fonksiyonların yaklaşımı incelenmiştir.

Bu konuyu bana veren ve çalışmalarımda benden yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Hamdullah ŞEVLİ’ ye teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca yüksek lisans eğitimim sırasında üniversitemizde ziyaretçi profesör olarak bulunan Sayın Prof. Dr. Soon-Mo JUNG'a (Hongik Univ. Güney Kore) tezim hakkındaki tavsiye ve yönlendirmelerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Bazı matematik tarihçilerine göre diferansiyel denklemler ile ilgili çalışmalar 1675 yılında Leibniz'in

$$\int x dx = (1/2)x^2$$

denklemini yazmasıyla başlamıştır. Daha sonra Newton'un birinci mertebeden diferansiyel denklemleri

$$(1) \quad dy/dx = f(x)$$

$$(2) \quad dy/dx = f(x,y)$$

$$(3) \quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

şeklinde üç sınıfa ayırmasıyla diferansiyel denklemlerin integrasyonu ile ilgili genel metotlar gelişmiştir. Burada ilk iki denklemde bilinmeyen fonksiyon yalnızca bir bağımsız değişkene bağımlı olduğundan adi diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Son denklemde ise bilinmeyen fonksiyon birden fazla bağımsız değişkene bağımlı olduğundan kısmi diferansiyel denklem olarak adlandırılır (Sasser,1992).

17. yüzyılın sonları ve 18. yüzyıl arasında içlerinde pek çok ünlü matematikçi olan İsveçli Bernoulli ailesinin diferansiyel denklemlere çok büyük katkıları olmuştur.

Diferansiyel denklemler uzun zamandır çok çeşitli pratik problemin modellenmesi ve çözülmesi için bilim adamları ve mühendisler tarafından kullanılmaktadır. Birçok bilimsel problem bazı anahtar değişkenlerin diğer değişkenlere göre olan değişimlerini içerir. Genellikle bu değişkenlerdeki çok küçük değişimlerin dikkate alınması daha genel ve hassas bir tanımlama sağlar. Değişkenlerin sonsuz küçük veya diferansiyel değişimlerinin dikkate alınması durumunda, değişim hızlarını türevlerle ifade etmek suretiyle, fiziksel prensip ve kanunlar için kesin matematiksel formülasyonlar sağlayan diferansiyel denklemler elde edilir. Bu yüzden diferansiyel denklemler uzun zamandır doğa bilimleri ve mühendislikte karşılaşılan çok farklı problemlere başarıyla uygulanmaktadır.

Araştırmalar, diferansiyel denklemlerin yeni uygulamalarını keşfetmeye sadece fiziksel bilimlerde değil aynı zamanda biyoloji, tıp, istatistik, sosyoloji, psikoloji ve ekonomi gibi alanlarda da devam etmektedir. Hem teorik hem de uygulamalı diferansiyel denklem araştırmaları günümüzde çok aktif araştırma konuları arasında almaktadır.

Fiziksel kanun ve prensiplerin, göz önüne alınan değişkenlerdeki sonsuz küçük değişimleri dikkate almak suretiyle, bir probleme uygulanmasıyla diferansiyel denklemler elde edilmektedir. Dolayısıyla diferansiyel denklemin elde edilmesi problem hakkında yeterli bilgi sahibi olmayı, probleme dahil olan değişkenleri belirleyebilmeyi, uygun basitleştirmeler ve varsayımlar yapabilmeyi, kullanılacak fiziksel prensip ve kanunları bilmeyi ve de dikkatli bir analiz yapabilmeyi gerektirir.

Örneğin, Newton'un ikinci kanununu kullanarak düz bir çizgi boyunca F kuvvetinin etkisi altında hareket eden m kütleli bir cismin konumunu s olarak tanımlayan diferansiyel denklemi elde edelim.

Hız ve ivme tanımları aşağıdaki gibidir:

$$V = \frac{ds}{dt}$$

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Newton'un ikinci kanunu $Kuvvet\ =\ Kütle\ x\ İvme$ şeklinde ifade edildiğinden,

$$F(t) = ma(t) = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

elde edilir. Düzenleme yapılarak

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

1940 yılında Wisconsin Üniversitesi'nde yapılan bir konferansta, Stanislaw Ulam, konuşmasında birçok çözülmemiş problem sunmuştur. Bu problemlerden biri fonksiyonel denklemlerin kararlılık teorisinin başlangıç noktası olmuştur.

Matematik alanında "kararlılık" kavramı genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

"Bir teoremin hipotezlerinde ufak bir değişiklik yaparak teoremin ana sonucunun doğru ya da yaklaşık olarak doğru kaldığını hangi durumlarda söyleyebiliriz?"

Genel fonksiyonel denklemler için aşağıdaki soru sorulabilir:

Birbirinden çok az farklı olan iki fonksiyonel denklemin çözümlerinin de birbirlerine çok yakın olması ne zaman doğrudur? Benzer şekilde verilen bir fonksiyonel denklem bir fonksiyonel eşitsizlik ile değiştirildiğinde eşitsizliğin çözümlerinin denklemin çözümlerine yakın olması gerektiği ne zaman iddia edilebilir?

$(G_1, .)$ bir grup ve $(G_{2,} *)$, $d(.,.)$ metriği ile bir metrik grup olsun. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Her $x, y \in G_1$ için

$$d(h(x \cdot y), h(x) * h(y)) < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan $h: G_1 \to G_2$ bir dönüşüm ise, her $x \in G_1$ için $d(h(x), H(x)) < \varepsilon$ ile $H: G_1 \to G_2$ bir homomofizm olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var mıdır? Diğer bir deyişle hangi şartlar altında bir yaklaşım homomorfizmine yaklaşan bir homomorfizm vardır (Ulam,1940).

Ulam'ın (1940) sorusu, Hyers (1941) tarafından X ve Y Banach uzayları için yanıtlanmıştır. $f: X \to Y$, her $x, y \in X$ ve bazı $\delta > 0$ için;

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta$$

olacak şekilde Banach uzayları arasında bir dönüşüm olsun. Bu takdirde her $x \in X$ için

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \delta$$

olacak şekilde bir tek $T: X \to Y$ toplamsal dönüşümü vardır. Her $x \in X$ için; $T: X \to Y$ fonksiyonu

$$T(x) = \lim_{n \to \infty} 2^{-n} f(2^n x)$$

limiti var olacak şekilde elde edilmiştir.

Eğer yukarıda verilen f fonksiyonu X deki bir noktada sürekli ise T dönüşümü X de her yerde süreklidir.

Hyers'in (1941) bu önemli sonucu aşağıdaki şekilde açıklanabilir:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

toplamsal Cauchy fonksiyonel denklemi Banach uzayının herhangi bir çifti için kararlıdır.

$$(x, y) \mapsto f(x + y) - f(x) - f(y)$$

fonksiyonu Cauchy farkı olarak adlandırılır.

Rassias (1978), Hyers (1941) teoreminin bir genellemesini Cauchy farkını sınırsız alarak aşağıda verilen teoremle ispatladı.

$f: X \to Y,$ her $x, y \in X$ için $\varepsilon \geq 0$ ve $0 \leq p < 1$ olmak üzere

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

olacak şekilde Banach uzayları arasında bir dönüşüm olsun. Bu taktirde her $x \in X$ için

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} f(2^n x)$$

limiti vardır ve $k = \frac{2}{2-2^p}$ iken

$$\|f(x) - T(x)\| \leq k\varepsilon\|x\|^p$$

olacak şekilde bir tek $T: X \to Y$ toplamsal dönüşümü vardır.

Ulam'ın probleminin bir genelleştirmesi olarak fonksiyonel denklemlerin yerine diferansiyel denklemlerin kullanılmasıyla yeni bir çalışma alanı ortaya çıkmıştır. Lineer diferansiyel denklemlerin Hyers Ulam kararlılığı tanımı aşağıdaki gibi verilebilir:

X, K cismi üzerinde bir normlu uzay olsun ve $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olsun. Burada K cismi olarak $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ alınır. $a_0, a_1, \dots, a_n: I \to K$ ve $g: I \to X$ sürekli fonksiyonları verilsin. n-defa sürekli diferansiyellenebilir her bir $y: I \to X$ fonksiyonu için, her $t \in I$ ve verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$\left\|a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) + g(t)\right\| \leq \varepsilon$$

eşitsizliği sağlandığında,

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) + g(t) = 0$$

diferansiyel denkleminin herhangi bir $t \in I$ için $\|y(t) - y_0(t)\| \leq K(\varepsilon)$ olacak şekilde n-defa sürekli diferansiyellenebilir bir $y_0: I \to X$ çözümü varsa, bu durumda yukarıdaki diferansiyel denklem Hyers Ulam kararlılığa sahiptir denir. Burada $K(\varepsilon)$, ε na bağlı ve $\lim_{\varepsilon\to 0} K(\varepsilon) = 0$ şartını sağlayan bir ifadedir (Jung, 2006). Yani, eğer $y(t)$ sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonu diferansiyel denklemin bir yaklaşık çözümü ise, o zaman denklemin $y(t)$ ye yakın bir $y_0(t)$ çözümü vardır. Diğer bir ifade ile diferansiyel denkleminin tüm çözümlerinin kümesi ile $y(t)$ fonksiyonu arasındaki uzaklık arasındaki fark en fazla $K(\varepsilon)$ kadardır.

Birinci mertebeden $y'(t) = \lambda y(t)$ lineer diferansiyel denklemi ile ifade edilebilen bir kapalı sistemi ele alalım. Eğer bu diferansiyel denklemin genel çözümünü ve bir başlangıç koşulunu biliyorsak, bu sistemin geçmişi, şimdiki anı ve geleceği tamamen belirlenmiştir. Böylece, bu sistem “öngörülebilir” dir. Bazen, dıştan kaynaklanan bir nedenle, sistem $y^{'}(t) = \lambda y(t)$ diferansiyel denklemi ile belirlenemeyebilir, sadece $\left|y^{'}(t) - \lambda y(t)\right| \leq \varepsilon$ gibi bir eşitsizlik tarafından açıklanabilir. O zaman bu sistemin geleceğini tam olarak öngörmek imkânsızdır.

Sistem, dışarıdan kaynaklı nedenlerden dolayı tamamen öngörülemez olmasına rağmen, eğer sistemin reel geleceği sınırlı bir hata ile $y^{'}(t) = \lambda y(t)$ diferansiyel denkleminin çözümünü takip ediyorsa, $y^{'}(t) = \lambda y(t)$ diferansiyel denklemi Hyers Ulam kararlılığa sahiptir deriz. Fakat eğer hata sınırı çok büyük ise, $y^{'}(t) = \lambda y(t)$ diferansiyel denklemi Hyers Ulam kararlılığa sahip değildir deriz.

Genellikle, deneysel (veya gözlenen) veriler teorik beklentilerle tamamen örtüşmez. Denklemlerin kullanılmasıyla doğal olayı açıklayabiliriz, fakat gerçek deney verilerinin ölçülmesi veya gözetilmesi yüzünden ortaya çıkan hatalar olabilir. Eğer doğal olayı açıklamak için eşitlikler yerine eşitsizlikleri kullanırsak, bu hatalar eşitsizliklerin çözümlerine absorbe edilir. Bu açıdan bakıldığında diferansiyel denklemlerin Hyers Ulam kararlılığı önemlidir (Jung, 2012).

Bu çalışmada ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin Hyers Ulam kararlılık teorisi ve bazı özel fonksiyonlar yardımıyla analitik fonksiyonların yaklaşımı incelecektir.

a_0, a_1 ve a_2 analitik fonksiyonlar olmak üzere, en genel ikinci mertebeden değişken katsayılı homojen lineer diferansiyel denklem

$$a_0\,(x)y'' + \ a_1\,(x)\,y' + a_2\,(x)y = 0$$

şeklinde ifade edilir.

Sabit katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemler cebirsel yöntemlerle çözülebilirler ve çözümler elementer fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilirler. Fakat değişken katsayılı denklemler için durum o kadar kolay değildir. Böyle denklemler bir kaç özel denklem sınıfı dışında cebirsel yöntemlerle çözülemez ve çözümleri elementer fonksiyonlar cinsinden ifade edilemez. Bu nedenle özellikle çözümleri elementer fonksiyonlar cinsinden ifade edilemeyen diferansiyel denklemleri çözmek için genel bir yöntem geliştirilmiştir. Seriler yöntemi denilen bu yöntemde çözümler kuvvet serisi cinsinden olacaktır. Yöntem, ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlere uygulanabildiği gibi yüksek mertebeden lineer denklemlere de uygulanabilir. Bu çalışmada ikinci mertebeden homojen ve homojen olmayan lineer diferansiyel denklemlere uygulanışı ele alınacaktır.

Değişken katsayılı ikinci mertebe lineer bir diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$$

şeklinde verilir. Burada $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ herhangi iki kuvvet serisidir. Diğer taraftan, her zaman x in her değeri için bu genel çözüm geçerli olmayabilir. O zaman genel çözümün geçerli olduğu, kullanılır olduğu aralığın belirlenmesi gerekmektedir. İşte bu nedenle, genel çözümde, verilen serilerin her biri için yakınsaklık aralığının bulunması zorunludur. Bu durumda, her iki serinin birlikte yakınsak olduğu aralık, diferansiyel denklemin genel çözümünün geçerli olduğu bölgeyi verecektir.

Uygulamada ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlere sık rastlanır. İkinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin en önemlileri arasında Airy, Legendre, Hermite, Chebyshev, Bessel ve Lagurre denklemleri sayılabilir.

Airy diferansiyel denkleminin çözümü olan Airy fonksiyonları astronomi ve mikroskopide kullanılmaktadır. Legendre diferansiyel denklemi daha çok fizikte ve diğer teknik alanlarda kullanılır. Özellikle küresel koordinat sisteminde, kısmi diferansiyel denklem ile ilgili Laplace denklemi çözerken ortaya çıkar. Hermite diferansiyel denklemi, kuantum mekaniği, olasılık teorisi ve istatistiksel mekanikte oldukça sık kullanılır. Chebyshev denklemi fizik ve mühendislikte büyük rol oynarken Bessel denklemi Laplace denkleminin silindirik koordinatlardaki çözümünde ortaya çıkar. Lagurre denklemi ise kuantum mekaniğinde kullanılır.

Bu çalışmada ikinci mertebeden pek çok lineer diferansiyel denkleme uygulanabilen kuvvet serisi metodunu kullanarak Airy, Legendre, Hermite ve Chebyshev denklemlerinin Hyers Ulam kararlılıkları ve yaklaşım özellikleri incelenecektir.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Lineer diferansiyel denklemlerin Hyers Ulam kararlılığını inceleyen ilk bilinen kişi Obłoza (1993;1997) dır. Daha sonra Alsina ve Ger (1998), bir diferansiyel denklemin Hyers Ulam kararlılığını araştıran ilk çalışmalarını yayınlamışlardır. Bu çalışmada yazarlar, eğer $y: I \to \mathbb{R}$, her $t \in I$ için

$$|y'(t) - y(t)| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir diferansiyellenebilir fonksiyon ise, o zaman $g(t) = e^t$ olmak üzere, her $t \in I$ için

$$|y(t) - g(t)| \leq 3\varepsilon$$

olacak şekilde herhangi bir $t \in I$ için $g'(t) = g(t)$ eşitliğini sağlayan bir $g: I \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonunun var olduğunu ispatladılar. Alsina ve Ger'in (1998) bu sonucu Miura ve Ark. (2001), Miura (2002) ve Takahasi ve Ark. (2002) tarafından genelleştirildi.

Takahasi ve Ark. (2002) X bir kompleks Banach uzayı olmak üzere, eğer $\varphi: I \to X$, her $t \in I$ için

$$|\varphi'(t) - \lambda\varphi(t)| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir diferansiyellenebilir fonksiyon ise, o zaman $y'(t) = \lambda y(t)$ diferansiyel denkleminin tüm çözümlerinin kümesi ile $\varphi(t)$ fonksiyonu arasındaki uzaklığın en fazla $\varepsilon/|Re\ \lambda|$ olduğunu gösterdiler.

$$|y(t) - g(t)| \leq 3\varepsilon$$

olacak şekilde herhangi bir $t \in I$ için $g'(t) = g(t)$ eşitliğini sağlayan bir $g: I \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonunun var olduğunu ispatladılar.

Miura ve Ark. (2004) tarafından λ bir kompleks sabit olmak üzere Banach uzayı değerli $y'(t) = \lambda y(t)$ diferansiyel denkleminin Hyers Ulam kararlılığına sahip olduğu ispatlandı. Yani, eğer f sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonu $y'(t) = \lambda y(t)$ diferansiyel denkleminin bir yaklaşık çözümü ise, o zaman denklemin f ye yakın bir çözümünün var olduğunu gösterdiler. Jung ve Lee (2006) ise aynı denklemin Hyers Ulam kararlılığını ispatlayarak Alsina ve Ger (1998) in bir teoremini genelleştirdiler.

Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin Hyers Ulam kararlılığı Wang ve Ark. (2008) , Popa ve Raşa (2011) ve Jung ve Brzdek (2010) çalışmalarında da ele alınmıştır.

Bu düşünce tarzının paralelinde ikinci ve daha yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin Hyers Ulam kararlılıkları da incelenmiştir.

Li ve Shen (2010) çalışmalarında ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin Hyers Ulam kararlılıklarını incelemişlerdir.

Cîmpeanve ve Popa (2010) çalışmalarında yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin Hyers Ulam kararlılıklarını incelemişlerdir.

Abdollahpour ve Najati (2011) çalışmalarında $y \in C^3[a,b]$, $f \in C[a,b]$ ve $-\infty < a < b < +\infty$ olmak üzere,

$$y^{(3)}(t) + \alpha y''(t) + \beta y'(t) + \gamma y(t) = f(t)$$

formundaki üçüncü mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin Hyers Ulam kararlılıklarını incelemişlerdir.

Jung (2008) çalışmasında homojen olmayan

$$y''(x) - xy(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

formundaki Airy diferansiyel denklemini kuvvet serisi metoduyla çözmüş ve her analitik fonksiyonun, sınırlı bir bölge üzerinde, hata sınırı ikinci dereceden bir fonksiyon olmak üzere Airy fonksiyonu ile yaklaştırılabileceğini ispatlamıştır.

Aynı şekilde (Jung, 2009a,2009b,2011a,2011b,2011c) çalışmalarında sırasıyla homojen olmayan Legendre, Hermite, Bessel, Chebyshev ve Lagurre diferansiyel denklemlerini çözmüş ve bu sonuçlar doğrultusunda analitik fonksiyonların bu özel fonksiyonlar yardımıyla yaklaştırılabileceğini ispatlamıştır.

Bu teorinin birinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemlere uygulamaları ilk olarak Jung (2009c) çalışmasında incelenmiştir. Gorjdi ve ark.(2011) ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin kararlılığını incelemişlerdir. Daha sonra Lungu ve ark.(2012) birinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin Hyers Ulam kararlılığı üzerine çalışmışlardır.

Jung ve ark. (2013) Gauss fonksiyonlarının yaklaşım özelliği üzerine çalışmaları son zamanlardaki çalışmalar arasında gösterilebilir. Bu çalışmada kuvvet serisi metodunu kullanarak homojen olmayan birinci mertebeden

$$y'(x) + \lambda(x-\mu)y(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(x-\mu)^m$$

Gauss fonksiyonunun yaklaşım özelliği ispatlanmıştır.

Jung ve Şevli (2013) çalışmasında Hyers-Ulam kararlılığı ispatlayabilmek için, pek çok farklı ikinci mertebeden lineer diferansiyel denkleme uygulanabilen kuvvet serisi metodu geliştirmişlerdir. Jung ve ark. (2013), pertürbe Volterra integro-diferansiyel denklemlerin Hyers Ulam kararlılığı üzerine çalışmaları yine son zamanlardaki çalışmalar arasında gösterilebilir.

Hamid Rezaei ve ark. (2013) çalışmasında $n.$ mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını incelemişlerdir. Daha özel olarak α_k skaler, y ve f, n defa sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere, Laplace transformu metodunu kullanarak

$$y^n(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\, y^{(k)}(t) = f(t)$$

diferansiyel denkleminin Hyers Ulam kararlılığı üzerine çalışmışlar ve Laplace transformu ile bu teoriyi bir araya getirmişlerdir

Bu çalışmanın dördüncü bölümünde birinci mertebeden, beşinci bölümünde ise ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin Hyers Ulam kararlılık teorisi ele alınacaktır. Çalışmanın ileride bu konuda çalışacaklara yol gösterici nitelikte olması amaçlanmaktadır.

3. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

3.1. Önbilgiler

Tanım 3.1.1. (Lineer Uzay)

$X \neq \emptyset$ bir küme ve F (reel/kompleks) sayıların bir cismi olsun.

$+: X \times X \to X$ $\qquad\qquad$ $\cdot: F \times X \to X$

$(x, y) \to x + y$ $\qquad\qquad$ $(\lambda, x) \to \lambda x$

fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlıyorsa, X kümesine F cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir. $\forall x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu \in F$ için;

(L1) $x + y = y + x$

(L2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

(L3) $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

(L4) Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde $(-x) \in X$ vardır.

(L5) Her $x \in X$ için $1 \cdot x = x$

(L6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

(L7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

(L8) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

Tanım 3.1.2. (Metrik Uzay)

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $d: X \times X \to R$, $(x, y) \to d(x, y)$ biçiminde fonksiyonu verilsin. Her $x, y, z \in X$ için,

(M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği) özeliklerini sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik (uzaklık fonksiyonu) denir. (X, d) ikilisine metrik uzay denir.

Tanım 3.1.3.

Bir (X, d) metrik uzayı üzerinde (x_n) dizisi verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ iken $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in N$ varsa yani $m, n \to \infty$ iken $d(x_m, x_n) \to 0$ oluyorsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.1.4.

Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir noktaya yakınsak ise, (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 3.1.5. (Normlu Uzay)

U, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\|: U \to R^+$$

$$x \to \|x\|$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(U, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir. $\forall x, y \in U$ için;

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ $(\alpha \; skaler)$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Tanım 3.1.6.

X bir normlu uzay ve elemanları X den alınan bir (x_n) dizisi verilsin. Eğer $m, n \to \infty$ iken $\|x_m - x_n\| \to 0$ olması durumunda $n \to \infty$ iken $\|x_m - x\| \to 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa X uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir.

Tanım 3.1.7.

(i) $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in A$ olsun. Herbir $\varepsilon > 0$ sayısı için, $|x - x_0| < \delta$ iken $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta: \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ reel sayısı bulunabilirse f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir.

(ii) Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $|x_1 - x_2| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x_1, x_2 \in A$ için

$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabilirse, f fonksiyonu A kümesinde düzgün süreklidir denir.

(ii) den her düzgün sürekli fonksiyonun sürekli olduğu görülür.

Teorem 3.1.1.

Kapalı bir aralıkta sürekli her fonksiyon o aralıkta düzgün süreklidir.

Teorem 3.1.2.(Weierstrass Teoremi)

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olmak üzere verilen her $\varepsilon > 0$ ve $x \in [a, b]$ için,

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

şartını sağlayan en az bir $P(x)$ polinomu bulunabilir.

Tanım 3.1.8.

Bir ya da daha fazla fonksiyonun türevlerini içeren denklemlere diferansiyel denklem denir.

Tanım 3.1.9.

Bir diferansiyel denklem eğer bir tek bağımsız değişkenden oluşan türevleri bulunduruyorsa bu tür diferansiyel denklemlere adi diferansiyel denklemler denir.

Genel olarak bağımlı değişkeni y, bağımsız değişkeni x olan bir adi diferansiyel denklem,

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

şeklinde bir fonksiyon olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.10.

Eğer bir diferansiyel denklem bir veya birden fazla bağımsız değişkenin kısmi türevlerini bulunduruyorsa bu tür diferansiyel denklemlere de kısmi türevli diferansiyel denklemler denir. Genel olarak bağımlı değişkeni u, bağımsız değişkenleri x ve y olan bir kısmi diferansiyel denklem,

$$F\left(x, y, u_x, u_y, u_{xx,} u_{xy,} u_{yy}, \dots\right) = 0$$

şeklinde bir fonksiyon olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.11.

Bir diferansiyel denklemde görülen en yüksek mertebeden türevin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi denir.

Tanım 3.1.12.

Eğer bir diferansiyel denklem var olan tüm türevlere göre bir polinom denklem biçiminde ise, en yüksek mertebeden türevin kuvvetine diferansiyel denklemin derecesi denir.

Tanım 3.1.13.

Eğer bir diferansiyel denklem bilinmeyen fonksiyon ve bilinmeyen fonksiyonun var olan türevlerine göre birinci dereceden ise, diferansiyel denkleme lineerdir denir. En genel lineer diferansiyel denklem

$$a_0\,(x) y^{(n)} + a_1\,(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\,(x)\, y' + a_n\,(x) y = Q(x)$$

şeklindedir. Burada $a_0, a_1, \dots a_n$ ve Q , x in verilmiş fonksiyonlarıdır.

Tanım 3.1.14.

Diferansiyel denklemler bağımlı değişken ve türevlerinin katsayılarının durumuna göre de sınıflandırılmaktadır. Eğer bu katsayılar birer sabit ise sabit katsayılı diferansiyel denklem, eğer bağımsız değişkene bağlı fonksiyonlar ise değişken katsayılı diferansiyel denklemler denir.

3.2. Kuvvet Serileri

Bu bölümde kuvvet serileri ile ilgili temel tanım ve teoremlere değinilecektir.

Tanım 3.2.1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots \quad (3.1)$$

şeklindeki bir seriye kuvvet serisi denir. Buradaki c_k sayılarına serinin katsayıları adı verilir.

Verilen bir kuvvet serisinde esas konu, bu serinin ıraksaklığı veya yakınsaklığı problemi değildir. Çünkü serinin terimleri x 'e bağlı olduğundan, bu seri bazı x ler için yakınsak bazıları için ıraksak olabilir. Kuvvet serilerinde esas problem serinin hangi x ler için yakınsak hangileri için ıraksak olduğunu belirlemektir.

Tanım 3.2.2.

x in belli bir değeri için (3.1) bir sayı dizisidir. Eğer $x = x_1$ için

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x_1 - a)^k$$

sayı serisi yakınsak ise, (3.1) serisi $x = x_1$ de yakınsaktır denir.

Tanım 3.2.3.

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-a)^k$ kuvvet serisinin $|x-a| < R$ için yakınsak olduğu en büyük pozitif R sayısına, bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı, seriyi yakınsak yapan x noktalarının oluşturduğu $(a-R, a+R)$ aralığına da yakınsaklık aralığı denir.

Eğer seri sadece $x = a$ noktasında yakınsak ise $R = 0$; tüm x ler için yakınsak ise $R = \infty$ yazılır.

Tanım 3.2.4.

Bir kuvvet serisinin yakınsaklığı bölüm kriteri ile belirlenebilir. Bu kritere göre eğer

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| |x-a| = L$$

ise ;

L $<$ 1 için seri yakınsak,

L $>$ 1 için seri ıraksaktır.

Bu kriterden kolayca görülebilir ki (3.1) serisinin yakınsaklık yarıçapı

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

şeklindedir.

3.2.5. Kuvvet Serilerinin Türev ve İntegrali

Bir kuvvet serisinin toplamı, yakınsaklık aralığında

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-a)^k$$

ile verilen bir f fonksiyonu tanımlar. Bu fonksiyon $\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-a)^k\right)$ polinom dizisinin limiti olduğundan polinomların sahip olduğu birçok özelliğe sahiptir. Bu özelliklerin varlığı, serinin düzgün yakınsak olmasının sonucudur. Şimdi serinin düzgün yakınsaklığını veren teorem verilecektir.

Teorem 3.2.1.

Yakınsaklık yarıçapı R olan $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-a)^k$ serisi, $(a-R, a+R)$ tarafından kapsanan her bir kapalı aralık üzerinde düzgün ve mutlak yakınsaktır.

Teorem 3.2.2.

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-a)^k$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R ve $x \in (a-R, a+R)$ için

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-a)^k$$

olsun. f fonksiyonu integrallenebilirdir ve $[c,d] \subset (a-R, a+R)$ için

$$\int_c^d \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-a)^k\right)dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\int_c^d (x-a)^k\,dx\right)$$

sağlanır.

Teorem 3.2.3.

Herhangi bir (c_k) dizisi ve a sayısı için $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-a)^k$ serisi ve terimleri bu serinin terimlerinin türevlerinden oluşan $\sum_{k=0}^{\infty} k\,c_k\,(x-a)^{k-1}$ serisinin yakınsaklık yarıçapları aynıdır.

İspat

$\sum c_k\,(x-a)^k$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R_1, $\sum k\,c_k\,(x-a)^{k-1}$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R_2 olsun. Eğer $|x_1 - a| < R_2$ ise , $\sum k\,c_k\,(x-a)^{k-1}$ mutlak yakınsaktır.

$$\sum c_k\,(x-a)^k = (x_1 - a)\sum c_k\,(x_1 - a)^{k-1}$$

ve

$$| c_k(x_1 - a)^{k-1}| \leq |k\, c_k(x_1 - a)^{k-1}|$$

olduğundan $\sum c_k\,(x_1 - a)^k$ serisi de mutlak yakınsaktır. $\sum k\, c_k\,(x_1 - a)^{k-1}$ serisini yakınsak yapan her x_1 noktası $\sum c_k\,(x_1 - a)^k$ serisini de yakınsak yaptığından

$$R_2 \leq R_1 \tag{3.2}$$

olur.

$\sum c_k\,(x_1 - a)^k$ serisi yakınsak olsun. $|x_2 - a| < |x_1 - a|$ bağıntısını sağlayan her bir x_2 için $\sum c_k\,(x_2 - a)^k$ serisinin mutlak yakınsak olacağı açıktır.

$$\left|\frac{k\, c_k\,(x_2 - a)^{k-1}}{c_k(x_1 - a)^k}\right| = k\left|\frac{x_2 - a}{x_1 - a}\right|^{k-1} \cdot \frac{1}{|x_1 - a|}$$

ifadesinde

$$\left|\frac{x_2 - a}{x_1 - a}\right| = r$$

denilirse,

$$\left|\frac{k\, c_k\,(x_2 - a)^{k-1}}{c_k(x_1 - a)^k}\right| = \frac{1}{|x_1 - a|}.kr^{k-1}$$

bulunur. $0 \leq r < 1$ için

$$\lim_{k\to\infty} kr^{k-1}$$

olacağından $\frac{1}{|x_1-a|}.kr^{k-1}$ sınırlıdır. Şu halde

$$|kc_k(x_2 - a)^{k-1}| \leq M\left|c_k(x_1 - a)^k\right|$$

olacak şekilde bir M sayısı vardır. Dolayısıyla, $\sum c_k\,(x_1 - a)^{k-1}$ yakınsak olduğundan $\sum c_k\,(x_2 - a)^{k-1}$ yakınsaktır. $\sum c_k\,(x_2 - a)^k$ serisinin yakınsak olduğu açıktır.

$\sum c_k\,(x-a)^k$ serisinin yakınsak olduğu her x_2 noktasında $\sum kc_k\,(x-a)^{k-1}$ yakınsak olduğundan

$$R_1 \leq R_2 \tag{3.3}$$

bulunur.

O halde (3.2) ve (3.3) den $R_1 = R_2$ dır.

Teorem 3.2.4.

$\sum c_k\,(x-a)^k$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R ve $\forall x \in (a-R, a+R)$ için

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-a)^k$$

olsun. f fonksiyonu $(a-R, a+R)$ aralığında türevlenebilirdir ve

$$f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-a)^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}[c_k(x-a)^k]' = \sum_{k=0}^{\infty} kc_k\,(x-a)^{k-1}$$

olur.

Tanım 3.2.6.

Eğer bir f fonksiyonu a noktasının bir I komşuluğundaki tüm x ler için

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-a)^k$$

biçiminde yakınsak bir kuvvet serisine açılabiliyor ise , f fonksiyonuna a noktasında analitiktir denir. Bir fonksiyon a noktasında her mertebeden türeve sahip değilse a noktasında analitik olamaz.

Örnek 3.2.1.

İki polinomun bölümü olan $\frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel fonksiyonu $Q(a) = 0$ olan a lar hariç, tüm a lar için analitiktir. Bunun gibi e^x , $sinx, cosx$ fonksiyonları tüm x ler için analitiktir.

Bu fonksiyonların seriye açılımı;

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

şeklindedir.

3.3. Diferansiyel Denklemlerde Adi ve Tekil Nokta

İkinci mertebeden değişken katsayılı

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \qquad (3.4)$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

Eğer $P(x)$ ve $Q(x)$ x_0 noktasında analitik ise, x_0 noktasına (3.4) diferansiyel denkleminin adi noktası denir.

Eğer x_0, (3.4) denkleminin bir adi noktası değil ise, ona (3.4) denkleminin bir tekil noktası denir.

Teorem 3.3.1. (Analitik Çözümlerin Varlığı)

Eğer $x = x_0$ (3.4) diferansiyel denkleminin adi noktası ise, bu diferansiyel denklemin her çözümü $x = x_0$ da analitiktir. O halde $R > 0$ yakınsaklık yarıçapı olmak üzere;

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m$$

şeklinde kuvvet serisine açılabilir.

3.4. Diferansiyel Denklemlerde Kuvvet Serisi Çözüm Metodu

i) Öncelikle x_0 noktasının adi nokta olduğu doğrulanır.

ii) a_0, a_1 , a_2 , ... sabitler olmak üzere çözümün

$$y = a_0 + \ a_1 (x - x_0) + \ a_2 \ (x - x_0)^2 + \ \dots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \ (x - x_0)^m$$

şeklinde olduğunu varsayılır.

iii) $\frac{dy}{dx}$ ve $\frac{d^2y}{dx^2}$ değerleri hesaplanıp diferansiyel denklemde yerine yazılır.

iv) Homojen denklemin sağ tarafı sıfır olacağından ($x - x_0$) ın kuvvetleri sıfıra eşitlenir. Bu şekilde tüm katsayıları bulabilmemizi sağlayan indirgeme bağıntıları elde edilir.

4. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HYERS-ULAM KARARLILIĞI

Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin en genel şekli

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = Q(x) \tag{4.1}$$

biçimindedir. Burada a_0, a_1 ve Q x in verilmiş fonksiyonlarıdır.

$Q(x) = 0$ halinde, (4.1) denklemi homojen lineer denklem adını alır ve bu denklem değişkenlerine ayrılabilir bir denklemdir.

$$\frac{dy}{y} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx = 0$$

biçiminde yazdıktan sonra integral alınırsa,

$$y = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$$

elde edilir. Burada C, bir keyfi sabittir.

(4.1) denklemini normal form diyeceğimiz

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{4.2}$$

formuna getirelim. Burada $p(x) = a_1(x)/a_0(x)$, $q(x) = Q(x)/a_0(x)$ dir.

Şimdi (4.2) nin her iki yanını bir $\mu(x)$ çarpanı ile çarpalım. Bu suretle elde edilen

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x)$$

denkleminin birinci tarafının $\mu(x)y$ nin türevine eşit, yani

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \frac{d}{dx}[\mu(x)y]$$

olması için μ nün

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)p(x)$$

denklemini sağlaması gerektiği açıktır. Buradan

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

elde edilir. $\mu(x)$ fonksiyonuna denklemin integral çarpanı denir.

İntegral çarpanı yardımıyla (4.2) denklemi

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)q(x)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan integral alarak,

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)q(x)dx + \frac{C}{\mu(x)}$$

elde edilir. Bu (4.2) denkleminin genel çözümüdür.

a ve b reel sayıları $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ eşitsizliğini sağlamak üzere, $I = (a, b)$ bir açık reel aralık olsun. Üstelik $\varphi: I \to \mathbb{R}$ nin herhangi bir $t \in I$ için $\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}$ integrali var olacak şekilde verilmiş bir fonksiyon olduğunu kabul edelim.

Birinci mertebeden lineer

$$\varphi(t)y'(t) = y(t) \tag{4.3}$$

diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam kararlılığı Jung (2004) tarafından ele alınmıştır. Daha kesin olarak, eğer ya her $t \in I$ için $\varphi(t) > 0$ eşitsizliği ya da her $t \in I$ için $\varphi(t) < 0$ eşitsizliği sağlanıyorsa ve dahası eğer her bir diferansiyellenebilir $y: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in I$ için $|\varphi(t)y'(t) - y(t)| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman herhangi bir $t \in I$ için

$$\left|y(t) - ce^{\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}}\right| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir c reel sayısının var olduğu Jung (2004) tarafından ispatlanmıştır.

Lemma 4.1.

Bir sürekli diferansiyellenebilir $z: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun verilmiş olduğunu kabul edelim.

(a) $z(t) \leq \varphi(t)\, z'(t)$ eşitsizliğinin her $t \in I$ için doğru olması için gerek ve yeter şart her $t \in I$ için $\alpha'(t)\varphi(t) \geq 0$ ve

$$z(t) = \alpha(t)e^{\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}}$$

olacak şekilde bir diferansiyellenebilir $\alpha: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun var olmasıdır.

(b) $z(t) \geq \varphi(t)z'(t)$ eşitsizliğinin herhangi bir $t \in I$ için doğru olması için gerek ve yeter şart her $t \in I$ için $\beta'(t)\varphi(t) \leq 0$ ve

$$z(t) = \beta(t)e^{\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}}$$

olacak şekilde bir diferansiyellenebilir $\beta: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun var olmasıdır. (Jung, 2004).

Teorem 4.1.

$\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Sürekli birinci türeve sahip bir $y: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun her $t \in I$ için

$$\left|\varphi(t)y'(t) - y(t)\right| \leq \varepsilon \tag{4.4}$$

eşitsizliğinin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $t \in I$ için

$$y(t) = \varepsilon + \alpha(t)\, e^{\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}} \tag{4.5}$$

ve

$$0 \leq \alpha'(t)\varphi(t) \leq \; 2\varepsilon\, e^{-\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}} \tag{4.6}$$

olacak şekilde bir sürekli diferansiyellenebilir $\alpha: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun var olmasıdır (Jung, 2004).

(4.3) diferansiyel denkleminin Hyers Ulam kararlılığı aşağıda verilecek teorem ile ifade edilmektedir.

Teorem 4.2.

Eğer her $t \in I$ için $\varphi > 0$ eşitsizliği sağlanırsa veya her $t \in I$ için $\varphi < 0$ eşitsizliği sağlanırsa, ve eğer her bir sürekli diferansiyellenebilir $y: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in I$ için

$$\left|\varphi(t)y'(t) - y(t)\right| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman herhangi bir $t \in I$ için

$$\left|y(t) - ce^{\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}}\right| \leq \varepsilon \tag{4.7}$$

olacak şekilde bir c reel sayısı vardır (Jung, 2004).

Burada, γ bir keyfi reel sabit olmak üzere, $\gamma e^{\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}}$ fonksiyonunun (4.3) diferansiyel denkleminin genel çözümü olduğu dikkate alınmıştır.

Teorem 4.2, (4.4) eşitsizliğinin her bir çözümüne (4.3) diferansiyel denkleminin bir çözümü ile bir ε uzaklığı içinde yaklaşılabilir. Maalesef, Teorem 4.1 den $y(t)$ nin davranışları üzerine bazı bilgiler alabilmemize rağmen, (4.7) eşitsizliğindeki c sabitini bulmak için etkili bir yol yoktur.

Bununla birlikte, eğer bir başlangıç koşulu bilinirse, ki onu $y(a)$ ile gösterirsek, o zaman aşağıdaki sonuç, $y(t)$ için alt ve üst sınır değerlendirmeleri almamıza olanak verir.

Sonuç 4.1.

a nın bir reel sayı olduğunu ve her $t \in I$ için $\varphi(t) > 0$ olduğunu kabul edelim. $y: I \cup \{a\} \to \mathbb{R}$, I üzerinde sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Ayrıca y, a noktasında sağdan sürekli olsun. Eğer y fonksiyonu her $t \in I$ için ve bir $\varepsilon > 0$ için (4.4) eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman herhangi bir $t \in I$ için

$$(y(a) - \varepsilon)e^{\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}} + \varepsilon \leq y(t) \leq (y(a) + \varepsilon)e^{\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}} - \varepsilon \qquad (4.8)$$

değerlendirmesi vardır (Jung, 2004).

Sonuç 4.2.

a nın bir reel sayı olduğunu ve her $t \in I$ için $\varphi(t) < 0$ olduğunu kabul edelim. Dahası, $y: I \cup \{a\} \to \mathbb{R}$, I üzerinde sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Ayrıca y, a noktasında sağdan sürekli olsun. Eğer y fonksiyonu her $t \in I$ için ve bir $\varepsilon > 0$ için (4.4) eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman herhangi bir $t \in I$ için

$$(y(a) + \varepsilon)e^{\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}} - \varepsilon \leq y(t) \leq (y(a) - \varepsilon)e^{\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}} + \varepsilon \qquad (4.9)$$

değerlendirmesi vardır (Jung, 2004).

Birinci mertebeden homojen olmayan

$$y'(t) + g(t)y(t) + h(t) = 0 \tag{4.10}$$

lineer diferansiyel denklemin Hyers Ulam kararlılığı Jung (2006a) tarafından elde edilmiştir.

X bir kompleks Banach uzayı ve (a, b) bir keyfi aralık olsun. Dahası $g: I \to \mathbb{C}$, $h: I \to X$ ve $\varphi: I \to [0, \infty)$ nin keyfi $c \in I$ için $g(t)$ ve $e^{\int_a^t g(u)du} h(t)$ (a, c) üzerinde integrallenebilir ve ayrıca $\varphi(t) e^{\Re \int_a^t g(u)du}$, I üzerinde integrallenebilir olacak şekilde fonksiyonlar olduğunu kabul edelim. Burada $\Re(\omega)$ ile ω kompleks sayısının reel kısmı gösterilecektir.

Teorem 4.3 de, eğer her bir sürekli diferansiyellenebilir $y: I \to X$ fonksiyonu her $t \in I$ için

$$\|y'(t) + g(t)y(t) + h(t)\| \leq \varphi(t) \tag{4.11}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman (4.10) diferansiyel denkleminin her $t \in I$ için

$$\|y(t) - y_0(t)\| \leq e^{-\Re \int_a^t g(u)du} \int_t^b \varphi(v) e^{\Re \int_a^v g(u)du} dv$$

olacak şekilde bir tek çözümünün var olduğu ifade edilmektedir.

Teorem 4.3.

X bir kompleks Banach uzayı ve (a, b) bir keyfi aralık olsun. Burada $a < b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ keyfi bir biçimde verilmiştir. $g: I \to \mathbb{C}$ ve $h: I \to X$ ın her bir $c \in I$ için $g(t)$ ve $e^{\int_a^t g(u)du} h(t)$ (a, c) üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar olduğunu kabul edelim. Ayrıca $\varphi: I \to [0, \infty)$ nin $\varphi(t) e^{\Re \int_a^t g(u)du}$, I üzerinde integrallenebilir olacak şekilde bir fonksiyon olduğunu kabul edelim.

Eğer bir sürekli diferansiyellenebilir $y: I \to X$ fonksiyonu her $t \in I$ için (4.11) eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman her bir $t \in I$ için

$$\left\|y(t) - e^{-\int_a^t g(u)du}\left(x - \int_a^t h(v)e^{\int_a^v g(u)du}dv\right)\right\|$$
$$\leq e^{-\Re\int_a^t g(u)du}\int_t^b \varphi(v)e^{\Re\int_a^v g(u)du}dv \tag{4.12}$$

olacak şekilde bir tek $x \in X$ vardır (Jung, 2006a).

Uyarı 4.1.

(4.10) diferansiyel denkleminin genel çözümünün

$$y(t) = e^{-\int_a^t g(u)du}\left(x - \int_a^t h(v)e^{\int_a^v g(u)du}dv\right)$$

olduğuna dikkat edelim. Burada x, X in keyfi bir elemanıdır (Jung, 2006a).

Sonuç 4.3.

X bir kompleks Banach uzayı ve $I = (a, b)$ bir açık aralık olsun. Burada $a < b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ keyfi bir biçimde verilmiştir. $g: I \to \mathbb{C}$ ve $h: I \to X$ ın her bir $c \in I$ için $g(t)$ ve $e^{\int_b^t g(u)du}h(t)$ fonksiyonları (c, b) üzerinde integrallenebilir olacak şekilde fonksiyonlar olduğunu kabul edelim. Üstelik $\varphi: I \to [0, \infty)$ nin $\varphi(t)e^{\Re\int_b^t g(u)du}$, I üzerinde integrallenebilir olacak şekilde bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer her bir sürekli diferansiyellenebilir $y: I \to X$ fonksiyonu her $t \in I$ için (4.11) eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman herhangi bir $t \in I$ için

$$\left\|y(t) - e^{-\int_b^t g(u)du}\left(x - \int_b^t h(v)e^{\int_b^v g(u)du}dv\right)\right\|$$
$$\leq e^{-\Re\int_b^t g(u)du}\int_a^b \varphi(v)e^{\Re\int_b^v g(u)du}dv \tag{4.13}$$

olacak şekilde bir tek $x \in X$ vardır (Jung, 2006a).

Uyarı 4.2.

(4.10) diferansiyel denkleminin genel çözümünün

$$y(t) = e^{-\int_b^t g(u)du}\left(x - \int_b^t h(v)e^{\int_b^v g(u)du}dv\right)$$

biçiminde olduğuna dikkat edelim. Burada x, X in keyfi bir elemanıdır (Jung, 2006a).

Şimdi Hyers Ulam kararlılığa sahip olan birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem örneği verilecektir.

Örnek 4.1.

Eğer Teorem 4.3 de $h(t) \equiv 0$ ve $\varphi(t) \equiv \varepsilon$ alırsak, aşağıdaki sonucu elde ederiz:

X bir kompleks Banach uzayı ve $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olmak üzere $I = (a, b)$ bir açık aralık olsun. $g: I \to \mathbb{C}$ nin her bir $c \in I$ için $e^{\Re \int_a^t g(u)du} h(t)$ fonksiyonu (a, c) üzerinde integrallenebilir olacak şekilde bir sürekli ve integrallenebilir fonksiyonlar olduğunu kabul edelim. Eğer bir sürekli diferansiyellenebilir $y: I \to X$ fonksiyonu her $t \in I$ için

$$\|y'(t) + g(t)y(t)\| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman her bir $t \in I$ için

$$\left\|y(t) - e^{-\int_a^t g(u)du}x\right\| \leq \varepsilon e^{-\Re \int_a^t g(u)du} \int_t^b e^{\Re \int_a^v g(u)du}dv$$

olacak şekilde bir tek $x \in X$ vardır (Jung, 2006a).

Farklı bir bakış açısıyla, Jung (2009d) çalışmasında kuvvet serisi metodunu kullanarak,

$$y'(x) - \lambda y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - c)^m \tag{4.14}$$

formundaki birinci mertebeden homojen olmayan lineer diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulmuş ve üstel fonksiyonların yaklaşım özelliğini ispatlamıştır.

Birinci mertebeden lineer

$$y'(t) - \lambda y(t) = 0 \qquad (4.15)$$

diferansiyel denklemi en yaygın kullanılan diferansiyel denklem olup, birçok uygulamada karşımıza çıkar. (4.15) denkleminin her çözümü $y(x) = \alpha e^{\lambda x}$ formundadır ve üstel fonksiyon olarak adlandırılır.

Teorem 4.4.

c ve λ, sırasıyla sabit bir reel sayı ve sabit bir kompleks sayı olsunlar. Eğer $\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-c)^m$ kuvvet serisinin yarıçapı $\rho > 0$ ise, o halde (4.14) diferansiyel denkleminin her $y: (c-\rho, c+\rho) \to \mathbb{C}$ çözümü, her $x \in (c-\rho, c+\rho)$ için

$$y(x) = y_h(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{k!\lambda^{m-k-1}}{m!} a_k (x-c)^m \qquad (4.16)$$

formundadır. Burada $y_h(x)$ homojen (4.15) denkleminin çözümüdür (Jung, 2009d).

İspat

(4.14) denkleminin her katsayısı $x = c$ de analitik olduğundan, (4.14) denkleminin her çözümü $x - c$ nin kuvvetleri şeklinde kuvvet serisine açılabilir. $y: (c-\rho, c+\rho) \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun (4.16) daki gibi verildiğini varsayalım. Öncelikle $y(x) - y_h(x)$ şeklinde tanımlanan $y_p(x)$ fonksiyonunun homojen olmayan (4.14) denklemini sağladığı ispatlanacaktır.

$$y'_p(x) - \lambda y_p(x) =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{k!\lambda^{m-k-1}}{(m-1)!} a_k (x-c)^{m-1} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{k!\lambda^{m-k}}{m!} a_k (x-c)^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-c)^m$$

olur ki buradan $y_p(x)$ in homojen olmayan (4.14) denkleminin özel bir çözümü olduğu görülür. (4.14) ün her çözümü, homojen denklemin çözümü $y_h(x)$ ve homojen olmayan denklemin özel çözümü $y_p(x)$ in toplamı olarak ifade edilebileceğinden, (4.14) ün her çözümü (4.16) deki gibidir.

Şimdi

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k!|\lambda|^{m-k-1}}{m!}|a_k||x-c|^m \tag{4.17}$$

kuvvet serisini göz önüne alalım.

$$c_m := \sum_{k=0}^{m-1}\frac{k!|\lambda|^{m-k-1}}{m!}|a_k|$$

olmak üzere (4.17) kuvvet serisine oran testini uygulanarak,

$$\frac{c_{m+1}}{c_m} = \left[\frac{|\lambda|}{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k!|\lambda|^{m-k-1}}{m!}|a_k| + \frac{|a_m|}{m+1}\right]\left[\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k!|\lambda|^{m-k-1}}{m!}|a_k|\right]^{-1}$$
$$\leq \frac{|\lambda|}{m+1} + \frac{|a_m|}{m+1}\left[\frac{(m-1)!}{m!}|a_{m-1}|\right]^{-1} = \frac{|\lambda|}{m+1} + \frac{m}{m+1}\left|\frac{a_m}{a_{m-1}}\right|$$

elde edilir.

Buradan,

$$\lim_{m\to\infty} sup\left|\frac{c_{m+1}}{c_m}\right| \leq \lim_{m\to\infty} sup\left|\frac{a_m}{a_{m-1}}\right|$$

elde edilir ki, bu (4.17) kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının $\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-c)^m$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapından daha az olmadığı anlamına gelir. Bu nedenle (4.16) daki kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı ρ dan az değildir. O halde (4.16) daki $y(x)$, $(c-\rho, c+\rho)$ aralığında iyi tanımlıdır.

Varsayalım ki ρ, ρ_0 ve ρ_1 $0<\rho_1<\rho_0<\ \rho$ şartını sağlayan sabitler olsunlar. Verilen bir $K \geq 0$ için, tüm $f:(c-\rho, c+\rho) \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının kümesi C_K ile tanımlansın ve aşağıdaki özellikler sağlansın:

(a) $f(x)$ yakınsaklık yarıçapı en az ρ olan$\sum_{m=0}^{\infty} b_m(x-c)^m$ kuvvet serisine açılabilsin,

(b) $m \geq 0$ için $a_m = (m+1)b_{m+1} - \lambda b_m$ olmak üzere

$$\sum_{m=0}^{\infty}|a_m\rho_0^m| \leq K|\sum_{m=0}^{\infty} a_m\rho_0^m|$$

şartı sağlansın.

$\{b_m\}$ reel sayıların her $m \geq 0$ için $b_{m+1} \geq \lambda b_m/(m+1)$ ya da $m \geq 0$ için $b_{m+1} \leq \lambda b_m/(m+1)$ şartını sağlayan bir dizisi olsun. Eğer $f:(c-\rho, c+\rho) \to \mathbb{R}$

fonksiyonu $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x-c)^m$ şeklinde tanımlanırsa, $K \geq 1$ olmak üzere f fonksiyonu C_K kümesine aittir. Yani $K \geq 1$ için C_K kümesi boş değildir (Jung, 2009d).

Şimdi üstel fonksiyonların yaklaşım özelliği incelenecektir. Daha özel olarak birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin lokal Hyers Ulam kararlılığı ispatlanacaktır.

Teorem 4.5.

Eğer bir $y \in C_K$ fonksiyonu her $x \in (c-\rho, c+\rho)$ ve bazı $\varepsilon \geq 0$ için

$$|y'(x) - \lambda y(x)| \leq \varepsilon \tag{4.18}$$

eşitsizliğini sağlarsa, o halde (4.15) diferansiyel denkleminin bir $y_h: (c-\rho, c+\rho) \to \mathbb{C}$ özel çözümü vardır öyle ki herhangi $x \in [c-\rho_1, c+\rho_1]$ için,

$$|y(x) - y_h(x)| \leq C|x-c|$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$C = K\varepsilon\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_0 - \rho_1} + \left(\sum_{k=0}^{[|\lambda\rho_0|]-1} \frac{k!}{|\lambda\rho_0|^k}\right)\frac{e^{|\lambda\rho_1|}-1}{|\lambda\rho_1|}\right] \tag{4.19}$$

şeklindedir. Özel olarak, $y_h \in C_K$ sağlanır (Jung, 2009d).

İspat

y, C_K kümesine ait olduğundan, (a) ve (b) özelliklerinden her $x \in (c-\rho, c+\rho)$ için,

$$y'(x) - \lambda y(x) = \sum_{m=0}^{\infty}[(m+1)b_{m+1} - \lambda b_m]\,(x-c)^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\,(x-c)^m \tag{4.20}$$

sağlanır.

(4.18) ve (4.20) göz önüne alınarak, her $x \in (c-\rho, c+\rho)$ için,

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} a_m\,(x-c)^m\right| \leq \varepsilon$$

elde edilir. Eğer x yerine $c+\rho_0$ alınırsa,

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} a_m\,{\rho_0}^m\right| \leq \varepsilon$$

sağlanır. Bu eşitsizlik ve (b) özelliğinden,

$$|\sum_{m=0}^{\infty} a_m\, \rho_0{}^m| \leq K|\sum_{m=0}^{\infty} a_m\, \rho_0{}^m| \leq K\varepsilon$$

elde edilir.

Abel formülü kullanılarak,

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left|a_k\rho_0^k\right|\frac{k!}{|\lambda\rho_0|^k} = \left(\sum_{i=0}^{m-1}\left|a_i\rho_0^i\right|\right)\frac{(m-1)!}{|\lambda\rho_0|^{m-1}} + \sum_{k=0}^{m-2}\left(\sum_{i=0}^{k}\left|a_i\rho_0^i\right|\right)\frac{k!}{|\lambda\rho_0|^k}\left(1-\frac{k+1}{|\lambda\rho_0|}\right)$$

$$\leq K\varepsilon\left(\frac{(m-1)!}{|\lambda\rho_0|^{m-1}} + \sum_{k=0}^{[|\lambda\rho_0|]-1}\frac{k!}{\left|\lambda\rho_0\right|^k}\right) \tag{4.21}$$

elde edilir.

$k \geq \left|\lambda\rho_0\right| - 1$ için $1-(k+1)/\left|\lambda\rho_0\right| \leq 0$ olduğundan, (4.20),(4.21) ve Teorem 4.4 den

(4.15) diferansiyel denkleminin bir y_h çözümü mevcuttur öyleki her $x \in (c-\rho, c+\rho)$ için,

$$|y(x) - y_h(x)| \leq \sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^{m-1}}{m!}|x-c|^m\sum_{k=0}^{m-1}\left|a_k\rho_0^k\right|\frac{k!}{|\lambda\rho_0|^k}$$

$$\leq K\varepsilon|x-c|\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{m+1} + \sum_{k=0}^{[|\lambda\rho_0|]-1}\frac{k!\left|\lambda\rho_0\right|^{m-k}}{(m+1)!}\right]\left|\frac{x-c}{\rho_0}\right|^m$$

$$= K\varepsilon|x-c|\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\left|\frac{x-c}{\rho_0}\right|^m + \sum_{k=0}^{[|\lambda\rho_0|]-1}\frac{k!}{|\lambda\rho_0|^k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|\lambda\rho_0|^m}{(m+1)!}\left|\frac{x-c}{\rho_0}\right|^m\right] \tag{4.22}$$

sağlanır.

Öte yandan, herhangi $x \in [c-\rho_1, c+\rho_1]$ için,

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\left|\frac{x-c}{\rho_0}\right|^m \leq \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^m \leq 1 + \frac{1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_0-\rho_1}$$

ve

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|\lambda\rho_0|^m}{(m+1)!}\left|\frac{x-c}{\rho_0}\right|^m \leq \sum_{m=0}^{\infty}\frac{|\lambda\rho_0|^m}{(m+1)!}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^m = \frac{1}{|\lambda\rho_1|}\left(e^{|\lambda\rho_1|}-1\right)$$

olduğundan (4.22) den, her $x \in [c-\rho_1, c+\rho_1]$ ve C, (4.19) deki gibi olmak üzere,

$$|y(x) - y_h(x)| \leq C|x-c|$$

elde edilir. $y_h(x) = \alpha e^{\lambda x}$ özelliğini sağlayan kompleks α sayısı mevcut olduğundan, y_h nin C_K kümesine ait olduğunu görmek kolaydır.

Şimdi y_h nin tekliği ispatlanacaktır. Varsayalım ki $y_i: (c-\rho, c+\rho) \to \mathbb{C}$, $i \in \{1,2\}$, homojen (4.15) denkleminin çözümü olsun. Her $x \in [c-\rho_1, c+\rho_1]$ ve bazı $C_i > 0$ sabitleri için

$$|y(x) - y_i(x)| \leq C_i|x-c|$$

eşitsizliği sağlansın. O halde her bir $i \in \{1,2\}$ için $y_i(x) = \alpha_i e^{\lambda x}$ olacak şekilde bir α_i kompleks sayısı mevcuttur. Buradan, herhangi $x \in [c-\rho_1, c+\rho_1]$ için

$$\left|\alpha_1 e^{\lambda x} - \alpha_2 e^{\lambda x}\right| = |y_1(x) - y_2(x)| \leq (C_1 + C_2)|x-c|$$

elde edilir. Eğer bu eşitsizlikte $x = c$ alınırsa $|\alpha_1 - \alpha_2|e^{\lambda x} = 0$ olur ki buradan $y_1 \equiv y_2$ olduğu görülür (Jung, 2009d).

Sonuç 4.4.

Varsayalım ki λ bir kompleks sabit; ρ, ρ_0 ve ρ_1 ise $0 < \rho_1 < \rho_0 < \rho$ ve $|\lambda\rho_0| < 1$ şartlarını sağlayan pozitif sabitler olsunlar. Eğer $y \in C_K$ fonksiyonu her $x \in (c-\rho, c+\rho)$ ve bazı $\varepsilon \geq 0$ için (4.18) eşitsizliğini sağlıyorsa, (4.15) diferansiyel denkleminin herhangi $x \in [c-\rho_1, c+\rho_1]$ için,

$$|y(x) - y_h(x)| \leq K\varepsilon\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_0 - \rho_1}\right)|x-c|$$

eşitsizliğini sağlayan bir tek $y_h: (c-\rho, c+\rho) \to \mathbb{C}$ çözümü mevcuttur (Jung, 2009d).

5. İKİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

5.1. Airy Denklemi

Airy diferansiyel denklemi uygulamalı matematikte birçok hesapta karşılaşılan bir denklemdir.

Jung (2008) çalışmasında, a_m kuvvet serisinin katsayıları ve ρ yakınsaklık yarıçapı olmak üzere $\rho > 0$ ve her $x \in (-\rho, \rho)$ için

$$y''(x) - xy(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \tag{5.1}$$

formundaki homojen olmayan Airy diferansiyel denkleminin çözümünü incelemiştir.

5.1.1. Homojen Airy Diferansiyel Denklemi

Uygulamalı matematikteki birçok hesapta karşımıza çıkan

$$y''(x) = xy(x) \tag{5.2}$$

Airy diferansiyel denkleminin genel çözümü kuvvet serileri cinsinden ifade edilebilir. Bu bölümde b_m kuvvet serisinin katsayıları ve ρ yakınsaklık yarıçapı olmak üzere $\rho > 0$ ve her $x \in (-\rho, \rho)$ için

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \tag{5.3}$$

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m\, b_m x^{m-1}$$

$$y''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) b_m x^{m-2} \tag{5.4}$$

(5.3) ve (5.4) eşitlikleri (5.2) denkleminde yerine konularak

$$2b_2 + \sum_{m=1}^{\infty} [(m+2)(m+1) b_{m+2} - b_{m-1}]\, x^m = 0$$

elde edilir.

Buradan,

$b_2 = 0$ ve $\forall\, m \geq 1$ için $(m+2)(m+1)b_{m+2} = b_{m-1}$

elde edilir.

$$b_{3m} = \frac{b_0}{(3m)(3m-1)\ldots 6.5.3.2} \qquad (5.5)$$

$$b_{3m+1} = \frac{b_1}{(3m+1)(3m)\ldots 7.6.4.3} \qquad (5.6)$$

eşitlikleri elde edilir.

(5.2) , (5.5) ve (5.6) eşitliklerinden homojen (5.2) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = b_0 \sum_{m=0}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{m} (3j-1)(3j)\right]^{-1} x^{3m}$$

$$+ b_1 \sum_{m=0}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{m} (3j+1)(3j)\right]^{-1} x^{3m+1} \qquad (5.7)$$

olarak bulunur.

5.1.2. Homojen Olmayan Airy Diferansiyel Denklemi

(5.1) denkleminin göz önüne alalım.

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m\, c_m x^{m-1}$$

$$y''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2}$$

Bu verileri (5.1) denkleminde yerine koyarak;

$$2c_2 + \sum_{m=0}^{\infty} \left[(m+3)(m+2)c_{m+3} - c_m\right] x^{m+1} = a_0 + \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1}\, x^{m+1}$$

elde edilir. Buradan $\forall\, m \in N_0$ için,

$$2c_2 = a_0 \text{ ve}$$

$$(m+2)(m+1)c_{m+2} - c_{m-1} = a_m$$

indirgeme bağıntıları elde edilir.

$$m = 0 \text{ için } c_3 = \frac{a_1 + c_0}{3.2}$$

$$m = 1 \text{ için } c_4 = \frac{a_2 + c_1}{4.3}$$

$$m = 2 \text{ için } c_5 = \frac{a_3}{5.4} + \frac{a_0}{2.5.4}$$

Buradan $m = \{0,1,2,\dots\}$ için değerler yerine konularak ve $c_0 = 0$, $c_1 = 0$ kabul ederek (5.1) denkleminin çözümü

$$y_p(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{n} (3j+1)(3j+2)\right]^{-1} x^{3n+2}$$

$$+x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=1}^{3} a_{3i+k} \; x^{3i+k} \left[\prod_{j=i}^{n} (3j+k+1)(3j+k+2)\right]^{-1} x^{3(n-i)} \qquad (5.8)$$

şeklinde bulunur (Jung, 2008).

Lemma 5.1.

$\tau \geq 2$ tamsayısı için , $\{\alpha_m\}$ negatif olmayan sayıların dizisi olsun öyle ki her

$n \in \{0,1,2,\dots\}$ için $\alpha_{\tau n+1} \geq \alpha_{\tau n+2} \geq \cdots \geq \alpha_{\tau n+\tau}$ sağlansın ve $\{\beta_m\}$ normlu uzayda kısmi toplamları $B(m) = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m$ olan bir dizi olsun.

Eğer her $m \in \mathbb{N}$ için $\|B(m)\| \leq C$ şartını sağlayan bir C sabiti mevcut ise herhangi $n \in \{0,1,2,\dots\}$ için

$$\left\|\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=1}^{\tau} \alpha_{\tau i+k} \beta_{\tau i+k}\right\| \leq 2C \sum_{i=0}^{n} \alpha_{\tau i+1}$$

eşitsizliği sağlanır (Jung,2008).

Teorem 5.1.

$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $\rho > 0$ olsun. Homojen olmayan Airy diferansiyel denkleminin her $y: (-\rho,\rho) \to \mathbb{C}$ çözümü, her $x \in (-\rho,\rho)$ ve $y_h(x)$ homojen Airy denkleminin çözümü olmak üzere

$y(x) =$

$y_h\,(x) + \frac{a_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{n}(3j+1)(3j+2)\right]^{-1} x^{3n+2}\ +$

$x^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=1}^{3} a_{3i+k}\ \ x^{3i+k}\ \left[\prod_{j=i}^{n}(3j+k+1)(3j+k+2)\right]^{-1} x^{3(n-i)}$ (5.9)

biçimindedir (Jung, 2008).

İspat

Denklem (5.1) deki her katsayı x=0 da analitik olduğundan, (5.1) in her çözümü kuvvet serisine açılabilir. (5.9) eşitliğindeki $y: (-\rho, \rho) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu ile (5.2) denkleminin çözümü olan $y_h(x)$ fonksiyonunu alalım. Öncelikle $y(x) - y_h(x)$ şeklinde tanımlanan $y_p(x)$ fonksiyonunun homojen olmayan (5.1) denklemini sağladığını gösterilecektir.

Bunun için

$$y_p''(x) - xy_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

olduğunu göstermemiz gerekir.

(5.8) den dolayı

$y_p''(x) =$

$\frac{a_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{n}(3j+1)(3j+2)\right]^{-1}(3n+2)(3n+1)\,x^{3n} +$

$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=1}^{3} a_{3i+k}\quad\left[\prod_{j=i}^{n}(3j+k+1)(3j+k+2)\right]^{-1}(3j+k+1)(3j+k+2)x^{3n+k}$

Buradan da $y_p''(x)$,

$a_0 + \frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{n-1}(3j+1)(3j+2)\right]^{-1} x^{3n} + \sum_{k=1}^{3} a_k\, x^k + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{3} a_{3n+k}\ \ x^{3n+k}$

$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{3} a_{3i+k}\quad\left[\prod_{j=i}^{n-1}(3j+k+1)(3j+k+2)\right]^{-1} x^{3n+k}$

şeklinde bulunur.

$xy_p(x) = \frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{n-1}(3j+1)(3j+2)\right]^{-1} x^{3n} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{3} a_{3i+k}\ \left[\prod_{j=i}^{n-1}(3j+k+\right.$

$\left.1)(3j+k+2)\right]^{-1} x^{3n+k}$

bulunur.

$$y_p''(x) - xy_p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{3} a_k\, x^k + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{3} a_{3n+k} \; x^{3n+k}$$

olur. Buradan da

$$y_p''(x) - xy_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

bulunur.

O halde $y_p(x)$ homojen olmayan Airy denkleminin özel bir çözümüdür.

$$y''(x) - xy(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

denkleminin her çözümünü homojen denklemin çözümü $y_h(x)$ ve homojen olmayan denklemin özel çözümü olan $y_p(x)$ in toplamı olarak yazabiliriz.

O halde $y''(x) - xy(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ denkleminin her çözümü (5.9) şeklinde verilebilir.

Oran testi (5.7) denklemine uygulanırsa kuvvet serisinin her noktada yakınsak olduğunu görülür. O halde, (5.1) denkleminin x in kuvvet serisi şeklinde yazılabilen özel bir $y_0(x)$ çözümü vardır ki yakınsaklık yarıçapı en az ρ kadardır. Öte yandan, özel çözüm $y_p(x)$, $y_0(x)$ ve $y_h(x)$ in toplamı olarak yazılabileceğinden yakınsaklık yarıçapı en az ρ kadardır (Jung,2008).

5.1.3. Airy Fonksiyonlarının Yaklaşım Özelliği

Bu bölümde her analitik fonksiyonun sınırlı bir bölge üzerinde hata sınırı ikinci dereceden bir fonksiyon olan Airy fonksiyonu ile yaklaştırılabileceğini ispatlanacaktır.

Teorem 5.2.

Varsayalım ki ρ ve ρ_0 , $\rho < \min\{\sqrt[3]{6}, \rho_0\}$ olacak şekilde pozitif sabitler olsun. Eğer $y\colon (-\rho, \rho) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu yakınsaklık yarıçapı ρ_0 olan

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \tag{5.10}$$

şeklindeki kuvvet serisi ile gösterilebiliyorsa, o halde Airy denkleminin bir

$y_h\colon (-\rho, \rho) \to \mathbb{C}$ çözümü ve $\forall x \in (-\rho, \rho)$ olmak üzere

$$|y(x) - y_h(x)| \le Cx^2$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C > 0$ sabiti vardır (Jung, 2008).

İspat

Varsayalım ki $y(x)$, yakınsaklık yarıçapı $\rho_0 > \rho$ olan $\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ şeklindeki bir kuvvet serisiyle gösterilsin.O halde,

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)\, c_m\, x^{m-2} - x \sum_{m=0}^{\infty} c_m\, x^m$$

$$= 2c_2 + \sum_{m=1}^{\infty} [(m+2)(m+1)c_{m+2} - c_{m-1}]\, x^m$$

olur ki bu kuvvet serisinin de yakınsaklık yarıçapı ρ_0 dır.

Bu kuvvet serisi $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ ile gösterilecektir, yani

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)\, c_m\, x^{m-2} - x \sum_{m=0}^{\infty} c_m\, x^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \tag{5.11}$$

olur. Buradan da her $x \in (-\rho_0, \rho_0)$ ve $m \in \{0,1,2,\ldots\}$ için

$$2c_2 = a_0 \ , \ (m+2)(m+1)c_{m+2} - c_{m-1} = a_m \tag{5.12}$$

indirgeme bağıntıları bulunur.

$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ serisinin yakınsaklık yarıçapı $\rho_0 > \rho$ dur ve bu seri yakınsaklık aralığında mutlak yakınsaktır. Yani $\forall x \in (-\rho_0, \rho_0)$ için

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_m x^m| < \infty$$

olur.

Bu kuvvet serisi [-ρ, ρ] aralığında süreklidir. O halde $\exists C_0 > 0$ sabiti vardır öyle ki bazı $x \in (-\rho, \rho)$ için,

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_m x^m| \leq C_0 \text{ olur.}$$

Bu durumda her $x \in (-\rho, \rho)$ ve herbir $n \geq 0$ tamsayısı için;

$$|\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |a_m x^m| \leq C_0$$

olur.

Herhangi $n \in \mathbb{N}$, i$\in \{0,1,2,\dots,n\}$ ve $k \in \{1,2,3\}$ için $\tau = 3$ alırsak ;

$$\alpha_{3i+k} = \left[\prod_{j=i}^{n} (3j+k+1)(3j+k+2)\right]^{-1} |x|^{3(n-i)}$$

$$\beta_{3i+k=} \left|a_{3i+k} x^{3i+k}\right|$$

elde ederiz. Buradan her $i, n \geq 0$ için,

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=1}^{3} \beta_{3i+k} = \sum_{m=1}^{3n+3} |a_m x^m|$$

ve

$$\alpha_{3i+1} > \alpha_{3i+2} > \alpha_{3i+3}$$

elde edilir.

Denklem (5.10) ve (5.11) den görürüz ki $y(x)$ homojen olmayan (5.1) Airy denkleminin çözümüdür.

Lemma 5.1 den,

$$\left|\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=1}^{3} \alpha_{3i+k} \ \beta_{3i+k}\right| =$$

$$\left|\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=1}^{3} \left[\prod_{j=i}^{n} (3j+k+1)(3j+k+2)\right]^{-1} |x|^{3(n-i)}\right| . \left|a_{3i+k} x^{3i+k}\right|$$

$$\leq 2C_0 \sum_{i=0}^{n} \alpha_{3i+1} = 2C_0 \sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{j=i}^{n}(3j+2)(3j+3)\right]^{-1} |x|^{3(n-i)}$$

elde edilir.

Teorem 5.1 ve (5.12) den her $|x| < \rho$ için

$$|y(x) - y_h(x)|$$

$$\leq \frac{|a_0|}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{n}(3j+1)(3j+2)\right]^{-1} |x|^{3n+2} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left|\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=1}^{3} \alpha_{3i+k} \beta_{3i+k}\right|$$

$$\leq |b_2| \sum_{n=0}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{n}(3j+1)(3j+2)\right]^{-1} |x|^{3n+2}$$

$$+ 2C_0 x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{j=i}^{n}(3j+2)(3j+3)\right]^{-1} |x|^{3(n-i)}$$

sağlanır.

Öte yandan $|x| < \sqrt[3]{6}$ olduğundan;

$$|b_2| \sum_{n=0}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{n}(3j+1)(3j+2)\right]^{-1} |x|^{3n+2}$$

$$\leq |b_2| \left[|x|^2 + \frac{1}{5{,}4} |x|^5 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{n}(3j+1)(3j+2)\right]^{-1} |x|^{3n+2}\right]$$

$$\leq |b_2| x^2 \left[1 + \frac{6}{4{,}5} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{n}(9j)(j+1)\right]^{-1} 6^n\right]$$

$$\leq |b_2| x^2 \left[1 + \frac{3}{10} + \frac{1}{8} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

$$= \frac{22}{15} |b_2| x^2$$

ve

$$2C_0 x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{j=i}^{n}(3j+2)(3j+3)\right]^{-1} |x|^{3(n-i)}$$

$$= 2C_0 x^2 \left[\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{j=i}^{n}(3j+2)(3j+3)\right]^{-1} |x|^{3(n-i)}\right]$$

$$\leq 2C_0 x^2 \left[\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{j=i}^{n} 9 \left(j + \frac{2}{3}\right)\right]^{-1} 6^{n-i}\right]$$

$$= 2C_0 x^2 \left[\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-i} \left[\prod_{j=i}^{n} (j + \frac{2}{3})^2\right]^{-1} + \left[(n + \frac{2}{3})^2\right]^{-1}\right]\right]$$

$$\leq\ 2C_0\,x^2\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\ \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-i}\left[\prod_{j=i}^{n}\ (j+\frac{2}{3})^2\right]^{-1}+\frac{1}{\mathrm{n}^2}\right]\right]$$

$$\leq\ 2C_0\,x^2\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\ \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{2}{\mathrm{n}^4}+\frac{1}{\mathrm{n}^2}\right]\right]$$

$$=\ 2C_0\,(\frac{7}{18}+\frac{2}{9}\zeta(4)+\frac{1}{9}\zeta(2))x^2$$

elde edilir.

Burada $\zeta(x)$ Riemann $\zeta -$ fonksiyonudur.

Sonuç olarak $|x| < \rho$ için

$$|y(x)-y_h\,(x)| \leq \left[\frac{22}{15}\ |b_2| +\ \left(\frac{7}{9}+\frac{4}{9}\zeta(4)+\frac{2}{9}\zeta(2)\right)C_0\right]x^2$$

elde edilir (Jung, 2008).

Sonuç 5.1.

Varsayalım ki ρ ve ρ_0, $\rho < \min\{\sqrt[3]{6}, \rho_0\}$ olacak şekilde pozitif sabitler olsun. Eğer $y: (-\rho, \rho) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu yakınsaklık yarıçapı ρ_0 olan olan (5.12) kuvvet serisiyle gösterilebiliyorsa, o halde Airy denkleminin bir $y_h: (-\rho, \rho) \to \mathbb{C}$ çözümü vardır öyle ki $x \to 0$ iken,

$$|y(x)-y_h\,(x)| = O(x^2)$$

olur (Jung, 2008).

Örnek 5.1.

$y(x) = e^x$ fonksiyonu ele alınsın. Bu fonksiyon x in kuvvet serisine açılabilir. Her $m \in \{0,1,2,\dots\}$ için $b_m = \frac{1}{m!}$ alınırsa ve $0 < \rho < \sqrt[3]{6}$ olacak şekilde ρ sabiti seçilirse (5.12) den, herhangi $m \in \mathbb{N}$ için

$$a_0 = 1 \text{ ve } a_m = \frac{1}{m!} - \frac{1}{(m-1)!}$$

elde edilir.

Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in (-\rho, \rho)$ için

$$|\sum_{m=1}^{n} a_m x^m | = \left|\sum_{m=1}^{n}(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(m-1)!})x^m \right| = \left|\frac{x^n}{n!} - 1 + (1-x)\sum_{m=0}^{n-1}\frac{x^m}{m!}\right|$$

$$\leq \max_{n\in\mathbb{N}} \frac{(\sqrt[3]{6})^n}{n!} + 1 + (1+\sqrt[3]{6})\, e^{\sqrt[3]{6}} = (1+\sqrt[3]{6})(1+e^{\sqrt[3]{6}})$$

Sonuç 5.1 den , Airy denkleminin bir $y_h: (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$ çözümü vardır öyle ki her $x \in (-\rho, \rho)$

için

$$|e^x - y_h(x)| \leq \left[\frac{11}{15} + \frac{2\pi^4 + 15\pi^2 + 315}{405}(1+\sqrt[3]{6})(1+e^{\sqrt[3]{6}})\right] x^2 < 34x^2$$

sağlanır. Burada $y_h(x)$,

$$y_h(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{n}(3j-1)(3j)\right]^{-1} x^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{n}(3j+1)(3j)\right]^{-1} x^{3n+1}$$

şeklindedir (Jung, 2008).

5.2. Legendre Denklemi

$$(1-x^2)y''(x)-2xy'(x)+p(p+1)y(x)=0 \tag{5.13}$$

diferansiyel denklemine p. mertebeden Legendre denklemi denir. Burada p, verilmiş bir pozitif reel sayıdır. Bu denklemin bir çözümüne Legendre fonksiyonu denir. Legendre denklemi fizik ve mühendislikte özellikle de küresel simetri gösteren sınır değer problemlerinde kullanılır.

Soon- Mo Jung (2007) çalışmasında

$$(1-x^2)y''(x)-2xy'(x)+p(p+1)y(x)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m\, x^m \tag{5.14}$$

şeklindeki homojen olmayan Legendre diferansiyel denkleminin genel çözümünü incelemiştir. Daha sonra şöyle bir sonuç elde etmiştir:

$\rho < 1$ olmak üzere $y:(-\rho,\rho)\to\mathbb{C}$ analitik fonksiyonu her $x\in(-\rho,\rho)$ için

$$\left|(1-x^2)y''(x)-2xy'(x)+p(p+1)y(x)\right|\le\varepsilon$$

eşitsizliğini sağlıyorsa,

$$|y(x)-y_h(x)|\le C\,\frac{x^2}{1-x^2}$$

olacak şekilde bir $C>0$ sabiti ve $y_h:(-\rho,\rho)\to\mathbb{C}$ Legendre fonksiyonu vardır.

5.2.1. Homojen Legendre Denklemi

(5.13) denklemini göz önüne alalım.

$x=\mp 1$, (5.13) denkleminin aykırı noktalarıdır. Bunların dışındaki tüm noktalar, özellikle $x=0$ adi noktadır. Legendre denkleminin $x=0$ civarındaki çözümleri önemlidir. Bu nokta civarındaki çözümler , $|x|<1$ aralığında yakınsak kuvvet serisi açılımına sahiplerdir. Bu çözümleri elde etmek için

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, c_k x^{k-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}$$

değerlerini (5.13) de yerine koyalım. Gerekli işlemlerden sonra

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)c_{k+2} - \;[(p-k)(p+k+1)]c_k]\, x^k = 0$$

bulunur.

Buradan ;

$$c_{k+2} = \frac{(k-p)(k+p+1)}{(k+2)(k+1)}\, c_k$$

indirgeme bağıntısı bulunur. Bu bağıntıdan c_k katsayıları elde edilir.

Bu katsayılar yerine konulursa,

$$y(x) = c_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\prod_{j=1}^{k}(2k-2j-p)(2k-2j+p+1)\right] +$$

$$c_1\left[x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\prod_{j=1}^{k}(2k-2j-p+1)(2k-2j+p+2)\right] \qquad (5.15)$$

5.2.2. Homojen Olmayan Legendre Denklemi

(5.14) denklemini göz önüne alalım. $y_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ olmak üzere bulunan değerler (5.14) denkleminde yerine koyulursa;

$$\sum_{m=0}^{\infty}[(m+2)(m+1)c_{m+2} - \;[(p-m)(p+m+1)]c_m]\, x^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\, x^m$$

elde edilir. Buradan ,

$$m = 0 \text{ için } \; c_2 = \frac{a_0}{2!} - \frac{p(p+1)}{2!}\, c_0$$

$$m = 1 \;\text{ için }\; c_3 = \frac{a_1}{3!} + \frac{2-p(p+1)}{2!}\, c_1$$

$c_0 = \; c_1 = 0$ alınırsa,

$$m = 2 \text{ için} \quad c_4 = \frac{a_2}{4.3} + \frac{3.2 - p(p+1)}{4!}\, a_0$$

$$m = 3 \text{ için} \quad c_5 = \frac{a_3}{5.4} + \frac{4.3 - p(p+1)}{5!}\, a_1$$

$m \in \{2,3,\dots\}$ ve $\left[\frac{m}{2}\right]$, $m/2$ yi geçmeyen en büyük tamsayıyı göstermek üzere

$$c_m = \frac{1}{m!} \sum_{i=1}^{[m/2]} (m-2i)!\, a_{m-2i} \prod_{j=1}^{i-1} (m-2j-p)(m-2j+p+1) \tag{5.16}$$

bulunur. Bazı işlemler yardımıyla $m \in \{2,3,\dots\}$ için,

$$c_{m+2} = \frac{1}{(m+2)(m+1)} a_m + \frac{(m-p)(m+p+1)}{(m+2)(m+1)} c_m \tag{5.17}$$

elde edilir (Jung, 2007).

Teorem 5.3.

Varsayalım ki ρ bir reel sayı ve $\sum_{m=0}^{\infty} a_m\, x^m$ serisinin yakınsaklık yarıçapı $\rho_0 > 0$ olsun. Varsayalım ki ρ_1 ;

$$\rho_1 = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| > 0 \tag{5.18}$$

şeklinde tanımlanan pozitif bir tam sayı ve ρ ,

$$\rho = min\{1, \rho_0, \rho_1\}$$

özelliğini sağlayan pozitif tamsayı olsun.

O halde $y_h(x)$ Legendre fonksiyonu olmak üzere, (5.14) diferansiyel denkleminin her $y: (-\rho, \rho) \to \mathbb{C}$ çözümü

$$y(x) = y_h(x) + \sum_{m=2}^{\infty} c_m\, x^m \tag{5.19}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada bazı c_0 ve c_1 sabitleri için $y_h(x)$, (5.15) şeklindedir (Jung, 2009b).

İspat

(5.19) şeklinde tanımlanan her bir $y: (-\rho, \rho) \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun homojen olmayan (5.14) denkleminin çözümü olduğu gösterilecektir. Burada $y_h(x)$ Legendre fonksiyonudur ve c_m (5.16) da verilmiştir.

Bu nedenle,

$y_p(x) = \sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m$ in (5.14) denklemini sağladığını görmemiz yeterlidir.

$(1 - x^2)y_p''(x) - 2xy_p'(x) + p(p+1)y_p(x) =$

$= 2c_2 + 6c_3 x + \sum_{m=2}^{\infty}[(m+2)(m+1)c_{m+2} - [(m-p)(m+p+1)]c_m]\, x^m$

$= a_0 + a_1 x + \sum_{m=2}^{\infty} a_m\, x^m$

Buradan her $m \in \{2,3,\dots\}$ için;

$$a_0 = 2c_2$$

$$a_1 = 6c_3$$

$$(m+2)(m+1)c_{m+2} - [(m-p)(m+p+1)]c_m = a_m$$

elde edilir.

Kabulden dolayı $y_p(x) = \sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m$ in yakınsaklık yarıçapı ρ_1 dir. Oran testi kullanılarak $y_h(x)$ in yakınsaklık yarıçapının 1 olduğu görülür. Bu nedenle $y(x), (-\rho, \rho)$ üzerinde tanımlıdır (Jung, 2009b).

Sonuç 5.2.

Teorem 5.3 ün ifadesi geçerli olmak üzere, herhangi $x \in (-\rho, \rho)$ için;

$\sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m = \frac{x^m}{m!} \sum_{i=1}^{[m/2]} (m-2i)!\, a_{m-2i} \prod_{j=1}^{i-1} (m-2j-p)(m-2j+p+1)$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} x^{2i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m x^m}{(m+2i)(m+1)} \prod_{j=1}^{i-1} \left\{1 - \frac{p(p+1)}{(m+2i-2j+1)(m+2i-2j)}\right\}$$

eşitliği sağlanır (Jung, 2009b).

İspat

$$\frac{(m-2i)!}{m!} = \frac{1}{m(m-2i+1)} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{(m-2j+1)(m-2j)}$$

eşitliğinin sağlandığı aşikardır.

Buradan ;

$$\sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m = \frac{x^m}{m!} \sum_{i=1}^{[m/2]} (m-2i)!\, a_{m-2i} \prod_{j=1}^{i-1} (m-2j-p)(m-2j+p+1)$$

$$= \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{[m/2]} x^m \frac{a_{m-2i}}{m(m-2i+1)} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{(m-2j-p)(m-2j+p+1)}{(m-2j+1)(m-2j)}$$

elde edilir. Buradan;

$$\sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{[m/2]} x^m \frac{a_{m-2i}}{m(m-2i+1)} \prod_{j=1}^{i-1} \left\{1 - \frac{p(p+1)}{(m-2j+1)(m-2j)}\right\}$$

ve

$$\alpha_{mi} = \frac{a_{m-2i}}{m(m-2i+1)} \prod_{j=1}^{i-1} \left\{1 - \frac{p(p+1)}{(m-2j+1)(m-2j)}\right\}$$

olarak alınırsa

$$\sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{[m/2]} \alpha_{mi}\, x^m$$

olur.

$\sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m$ serisi $x \in (-\rho, \rho)$ aralığında mutlak yakınsaktır. Bu nedenle sağdaki serinin terimlerini toplamı değiştirmeden alt alta sıralayabiliriz.

$$\begin{aligned}\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{[m/2]} \alpha_{mi}\, x^m &= \alpha_{21}x^2 + \alpha_{31}x^3 \\ &+ \alpha_{41}x^4 + \alpha_{42}x^4 \\ &+ \alpha_{51}x^5 + \alpha_{52}x^5 \\ &+ \alpha_{61}x^6 + \alpha_{62}x^6 + \alpha_{63}x^6 \\ &\quad . \qquad . \qquad . \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} \alpha_{m1}\, x^m + \sum_{m=4}^{\infty} \alpha_{m2}\, x^m + \sum_{m=6}^{\infty} \alpha_{m3}\, x^m + \ldots\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=2i}^{\infty} \alpha_{mi}\, x^m$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=2i}^{\infty} \frac{a_{m-2i}\, x^m}{m(m-2i+1)} \prod_{j=1}^{i-1} \left\{1 - \frac{p(p+1)}{(m-2j+1)(m-2j)}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} x^{2i} \sum_{m=2i}^{\infty} \frac{a_{m-2i}\, x^{m-2i}}{m(m-2i+1)} \prod_{j=1}^{i-1} \left\{1 - \frac{p(p+1)}{(m-2j+1)(m-2j)}\right\}$$

Buradan da m yerine $(m-2i)$ yazarak sonuca ulaşılır (Jung, 2009b).

5.2.3. Legendre Fonksiyonlarının Yaklaşım Özelliği

Bu bölümde Legendre fonksiyonlarının yaklaşım özelliği incelenecektir. Daha özel olarak (5.18) özelliğini sağlayan bir analitik fonksiyonun Legendre fonksiyonu ile yaklaştırılabileceği incelenecektir.

$y(x)$ fonksiyonu

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \tag{5.20}$$

şeklinde kuvvet serisine açılabilen ve yakınsaklık yarıçapı $\rho_0 > 0$ olan bir fonksiyon olsun. O halde

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + p(p+1)y(x)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} [(m+2)(m+1)b_{m+2} - [(m-p)(p+m+1)]b_m]\, x^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m\, x^m \tag{5.21}$$

burada her $m \in \{0,1,2,\dots\}$ için ;

$$a_m = (m+2)(m+1)b_{m+2} - [(m-p)(p+m+1)]b_m \tag{5.22}$$

olur.

Bazı uzun hesaplamalardan sonra aşağıdaki Lemma ispatlanmıştır.

Lemma 5.2.

a_m , b_m ve c_m (5.16) ve (5.22) gibi tanımlanmak üzere, her $m \in \{0,1,2 \dots\}$ için

$$c_m = b_m - \frac{b_{m-2[m/2]}}{m!} \prod_{j=1}^{[m/2]} (m-2j-p)\,(m-2j+p+1)$$

eşitliği sağlanır (Jung, 2009b).

İspat

Bu eşitliğin doğruluğu tüm çift ve tek tamsayılar için ayrı ayrı ispatlanacaktır.

$m = 2$ için,

$$c_2 = \frac{1}{2}\, a_0 = b_2 + \frac{p(p+1)}{2} b_0$$

eşitliği doğrudur.

Şimdi bu eşitliğin $k \geq 2$ olacak şekilde tüm çift tamsayılar için geçerli olduğunu kabul edelim.

(5.17) eşitliğini kullanarak

$$c_{k+2} = \frac{1}{(k+2)(k+1)} a_k + \frac{(k-p)(k+p+1)}{(k+2)(k+1)} c_k$$

$$= \frac{a_k}{(k+2)(k+1)} + \frac{(k-p)(k+p+1)}{(k+2)(k+1)} \left[b_k - \frac{b_{k-2[k/2]}}{k!} \prod_{j=1}^{[k/2]} (k-2j-p)\,(k-2j+p+1) \right]$$

elde edilir.

(5.22) bağıntısından,

$$= b_{k+2} - \frac{b_{k-2[k/2]}}{(k+2)!} \prod_{j=0}^{[k/2]} (k-2j-p)\,(k-2j+p+1)$$

$$= b_{k+2} - \frac{b_{k+2-2[(k+2)/2]}}{(k+2)!} \prod_{j=0}^{[k/2]} (k+2-2(j+1)-p)\,(k+2-2(j+1)+p+1)$$

bulunur.

$k = j + 1$ dönüşümü yapılırsa,

$= b_{k+2} - \frac{b_{k+2-2[(k+2)/2]}}{(k+2)!} \prod_{j=1}^{[k/2]+1} (k + 2 - 2j - p)\,(k + 2 - 2j + p + 1)$

elde edilir. Bu da bağıntının $k + 2$ için doğru olduğunu gösterir.

Aynı yöntemle $k \geq 3$ olacak şekilde tüm tek terimler için bu formül ispatlanabilir (Jung, 2009b).

Teorem 5.4.

Varsayalım ki ρ ve ρ_0, $\rho < \rho_0$ olacak şekilde pozitif sabitler olsunlar.

$y: (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu yakınsaklık yarıçapı ρ_0 olan (5.20) formunda kuvvet serisine açılabilsin. Varsayalım ki ρ_1 (5.18) özelliğini sağlayan pozitif bir sayı olsun.

b_m ve c_m Lemma 5.2 deki gibi ve $y(x)$ (5.20) deki gibi verilmiş olsun.

Eğer , $\rho < min\{1, \rho_0, \rho_1\}$ ise, o halde $y_h: (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$ olacak şekilde bir Legendre fonksiyonu mevcuttur ayrıca $C > 0$ ve her $x \in (-\rho, \rho)$ için

$$|y(x) - y_h(x)| \leq C \frac{x^2}{1-x^2}$$

olur (Jung, 2009b).

İspat

$y(x)$, yakınsaklık yarıçapı $\rho < \rho_0$ olacak şekilde kuvvet serisine açılsın.O halde,

$$(1 - x^2) \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) b_m x^{m-2} - 2x \sum_{m=1}^{\infty} m b_m x^{m-1} + p(p+1) \sum_{m=0}^{\infty} m b_m x^m$$

yazılabilir ki bu da yakınsaklık yarıçapı ρ_0 olan bir kuvvet serisidir.

Buradan (5.21) ve (5.22) kullanılarak, her $x \in (-\rho_0, \rho_0)$ için

$$(1 - x^2) \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) b_m x^{m-2} - 2x \sum_{m=1}^{\infty} m b_m x^{m-1} + p(p+1) \sum_{m=0}^{\infty} m b_m x^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

yazılabilir.

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$$

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m\, b_m x^{m-1}$$

$$y''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) b_m x^{m-2}$$

olduğundan her $x \in (-\rho, \rho)$ için

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + p(p+1)y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

elde edilir ki burada $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ serisinin yakınsaklık yarıçapı ρ_0 dır.

$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ kuvvet serisi yakınsaklık aralığında mutlak yakınsaktır. Bu aralık $[-\rho, \rho]$ aralığını içerir. $\sum_{m=0}^{\infty} |a_m x^m|$ kuvvet serisi $[-\rho, \rho]$ aralığında süreklidir.

O halde her $n \geq 0$ tamsayıları ve her $x \in (-\rho, \rho)$ için bir C_1 sabiti mevcuttur öyle ki ;

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_m x^m| \leq C_1 \tag{5.23}$$

olur .

Her $m \in \{0,1,2 \ldots\}$ için $\left\{\frac{1}{(m+2i)(m+1)}\right\}$ pozitif sayıların azalan bir dizisidir.

Buradan her $x \in (-\rho, \rho)$ ve i$\in \{0,1,2 \ldots\}$ için,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|a_m x^m|}{(m+2i)(m+1)} \leq \frac{C_1}{2i} \tag{5.24}$$

yazılabilir. Öte yandan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{p(p+1)}{(m+2k+1)(m+2k)}\right| = \frac{|p(p+1)|}{(m+3)(m+2)} + \frac{|p(p+1)|}{(m+5)(m+4)} + \ldots$$

$$\leq \frac{|p(p+1)|}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

şeklindedir.

Herhangi $m \geq 0$ tamsayısı için

$$\left|\prod_{k=1}^{\infty} \left\{1 - \frac{p(p+1)}{(m+2k+)(m+2k)}\right\}\right|$$

sonsuz çarpımı yakınsaktır.

$k = i - j \geq 1$ değişimi yapılırsa, her $i \geq 1$ ve $m \geq 0$ için

$$\left|\prod_{j=1}^{i-1}\left\{1 - \frac{p(p+1)}{(m+2i-2j+1)(m+2i-2j)}\right\}\right| \leq C_2 \tag{5.25}$$

olacak şekilde bir $C_2 > 0$ sabiti vardır.

Sonuç 5.2 den her $x \in (-\rho, \rho)$ için

$$\left|\sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m\right| \leq C_2 \sum_{j=1}^{\infty} |x|^{2i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|a_m x^m|}{(m+2i)(m+1)} \tag{5.26}$$

(5.24) ve (5.26) kullanılarak, her $x \in (-\rho, \rho)$ için

$$\left|\sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m\right| \leq C_1 C_2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x|^{2i}}{2i} \leq \frac{C_1 C_2}{2} \frac{x^2}{1-x^2} \tag{5.27}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar (Jung, 2009b).

Sonuç 5.3.

Varsayalım ki ρ ve ρ_0

$$\rho < \rho_0$$

olacak şekilde pozitif sabitler olsunlar.

$y: (-\rho, \rho) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu yakınsaklık yarıçapı ρ_0 olan (5.20) formunda kuvvet serisine açılabilsin. Varsayalım ki ρ_1 (5.18) özelliğini sağlayan pozitif bir sayı olsun.

b_m ve c_m Lemma 5.2 deki gibi ve $y(x)$ (5.20) deki gibi verilmiş olsun.

Eğer, $\rho < min\{1, \rho_0, \rho_1\}$ ise, o halde $y_h: (-\rho, \rho) \to \mathbb{C}$ olacak şekilde bir Legendre fonksiyonu mevcuttur öyle ki $x \to 0$ iken,

$$|y(x) - y_h(x)| \leq O(x^2)$$

olur (Jung, 2009b).

Örnek 5.2.

Legendre diferansiyel denkleminde $p = 1$ alalım.

$0 < \rho < 1$ olmak üzere verilen bir ρ sabiti için, (5.20) şeklinde kuvvet serisine açılabilen $y: (-\rho, \rho) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu göz önüne alınsın.

$$b_m = \begin{cases} 0\,, & m \in \{0,1\} \\ \frac{1}{10^m}\,, & m \geq 2 \end{cases}$$

şeklinde alınsın.

Kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının ρ_0 =10 olduğu görülür. $b_0 = b_1 = 0$ olduğundan Lemma 5.2 den her bir $m \in \{2,3,\dots\}$ için $c_m = b_m$ olduğu görülür.

(5.18) eşitliğindeki gibi bir pozitif ρ_1 sabiti vardır öyle ki

$$\rho_1 = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_k}{b_{k+1}}\right| = 10$$

olur.

(5.22) bağıntısından

$$a_0 = 2\, b_2 = \frac{1}{50} \text{ ve } a_1 = 6\, b_3 = \frac{3}{500}$$

elde edilir. (5.23) eşitsizliğindeki C_1 sabitini bulabilmek için $p = 1$ alınırsa , (5.22) bağıntısından her $x \in (-\rho, \rho)$ için,

$$\sum_{m=0}^{\infty}|a_m x^m| \leq \frac{1}{50} + \frac{3}{500}|x| + \sum_{m=2}^{\infty}\frac{-(m-2)(m+1)+100(m-1)(m+2)}{10^{m+2}}|x|^m$$

$$\leq \frac{1}{50} + \frac{3}{500} + \sum_{m=2}^{\infty}\frac{m^2+m-2}{10^m}$$

$$\leq \frac{1}{50} + \frac{3}{500} + \frac{5}{4}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{5^m}$$

$$= \frac{177}{2000} = C_1$$

(5.25) deki C_2 sabiti 1 seçilecektir çünkü , $i \geq 1$ ve $m \geq 0$ tamsayıları için

$$\left|\prod_{j=1}^{i-1}\left\{1-\frac{2}{(m+2i-2j+1)(m+2i-2j)}\right\}\right| \leq 1 = C_2$$

olacaktır. $\rho < min\{1, \rho_0, \rho_1\} = 1$ olacağından, (5.27) den $p = 1$ olacak şekilde bir $y_h: (-\rho, \rho) \to \mathbb{C}$ Legendre fonksiyonu mevcuttur öyle ki $x \in (-\rho, \rho)$ için

$$|y(x) - y_h(x)| \leq \frac{177}{2000}\frac{x^2}{1-x^2}$$

olur (Jung, 2009b).

5.3. Hermite Diferansiyel Denklemi

Hermite diferansiyel denklemi; kuantum mekaniği, olasılık teorisi istatistiksel mekanik ve Laplace denkleminin parabolik koordinatlarındaki çözümlerinde önemli rol oynar.

Jung (2009a) çalışmasında her $x \in (-\rho, \rho)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, yakınsaklık yarıçapı $\rho > 0$ ve a_m ler kuvvet serisinin katsayıları olmak üzere

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2\lambda y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \quad (5.28)$$

formundaki homojen olmayan Hermite diferansiyel denkleminin çözümünü incelemiştir.

5.3.1. Homojen Hermite Diferansiyel Denklemi

Bu bölümde

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2\lambda y(x) = 0 \quad (5.29)$$

formundaki homojen Hermite diferansiyel denkleminin çözümü ile ilgilenilecektir.

Bu çözümleri elde edebilmek için;

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (5.30)$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

değerleri (5.29) denkleminde yerine yazılsın.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + 2\lambda \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \mathrm{c_n}\, \mathrm{x}^{\mathrm{n}} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2nc_n x^n + 2\lambda \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \mathrm{c_n}\, \mathrm{x}^{\mathrm{n}} = 0$$

Buradan her $n \in \{0,1,2,3,\dots\}$ için,

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - 2(n-\lambda)c_n = 0$$

indirgeme bağıntısı elde edilir. Buradan da tüm c_n katsayıları bulunup (5.30) da yerine konulursa α_1 ve α_2 keyfi sabitler olmak üzere (5.29) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = \alpha_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(2n)!} x^{2n} \prod_{j=0}^{n-1}(\lambda - 2j) + \alpha_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \prod_{j=0}^{n-1}[\lambda - (2j+1)]$$

(5.31)

olarak bulunur.

5.3.2. Homojen Olmayan Hermite Denklemi

(5.28) denklemi göz önüne alınsın.

$$y_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

$$y_p{}'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m \, x^{m-1}$$

$$y_p{}''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m \, x^{m-2}$$

değerleri (5.28) denkleminde yerine konulursa,

$$(m+2)(m+1)c_{m+2} - 2(m-\lambda)c_m = a_m \tag{5.32}$$

bağıntısı bulunur.

$m = 0$ için $a_0 = 2.1c_2 - 2(-\lambda)c_0$

$m = 1$ için $a_1 = 3.2\, c_3 - 2(1-\lambda)c_1$

$c_0 = c_1 = 0$ olarak alınırsa,

$$c_2 = \frac{a_0}{2.1}$$

$$c_3 = \frac{a_1}{3.2}$$

$$c_4 = \frac{a_2}{4.3} + \frac{2(2-\lambda)}{4.3.2}$$

$$c_5 = \frac{a_3}{5.4} + \frac{2(3-\lambda)a_1}{5.4.3.2}$$

Bu şekilde devam edilirse her $x \in (-\rho, \rho)$ ve $m \in \{0,1,2,\dots\}$ için (5.28) denkleminin genel çözümü

$$y_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sum_{i=1}^{n} (-2)^{n-i} (2i-2)!\, a_{2i-2} \prod_{j=i}^{n-1} (\lambda - 2j)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{i=1}^{n} (-2)^{n-i} (2i-1)!\, a_{2i-1} \prod_{j=i}^{n-1} [\lambda - (2j+1)] \qquad (5.33)$$

olarak bulunur Jung (2009a).

Teorem 5.5.

Varsayalım ki $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı ρ olsun. Burada ρ pozitif bir reel sayı veya sonsuz olabilir. Homojen olmayan (5.28) denkleminin her $y: (-\rho, \rho) \to \mathbb{C}$ çözümü her $x \in (-\rho, \rho)$ için

$$y(x) =$$

$$y_h(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sum_{i=1}^{n} (-2)^{n-i} (2i-2)!\, a_{2i-2} \prod_{j=i}^{n-1} (\lambda - 2j) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{i=1}^{n} (-2)^{n-i} (2i-1)!\, a_{2i-1} \prod_{j=i}^{n-1} [\lambda - (2j+1)] \qquad (5.34)$$

şeklindedir, burada $y_h(x)$ (5.29) denkleminin çözümüdür (Jung, 2009a).

İspat

(5.28) diferansiyel denkleminin her katsayısı $x = 0$ da analitik olduğundan , (5.28) in her çözümü x in kuvvet serisine açılabilir**.**(5.34) de verilen $y: (-\rho, \rho) \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna bakılırsa $y_h(x)$ Hermite denkleminin (5.29) çözümüdür. Öncelikle $y(x) - y_h(x)$ şeklinde tanımlanan $y_p(x)$ fonksiyonunun homojen olmayan Hermite denklemini sağladığı görülecektir.

$$y_p''(x) - 2x y_p'(x) + 2\lambda y_p(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} \sum_{i=1}^{n} (-2)^{n-i} (2i-2)!\, a_{2i-2} \prod_{j=i}^{n-1} (\lambda - 2j)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\sum_{i=1}^{n}(-2)^{n-i}(2i-1)!\,a_{2i-1}\prod_{j=i}^{n-1}[\lambda-(2j+1)]$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^{2n}}{(2n-1)!}\sum_{i=1}^{n}(-2)^{n-i}(2i-2)!\,a_{2i-2}\prod_{j=i}^{n-1}(\lambda-2j)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{(2n)!}\sum_{i=1}^{n}(-2)^{n-i}(2i-1)!\,a_{2i-1}\prod_{j=i}^{n-1}[\lambda-(2j+1)]$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\lambda\, x^{2n}}{(2n)!}\sum_{i=1}^{n}(-2)^{n-i}(2i-2)!\,a_{2i-2}\prod_{j=i}^{n-1}(\lambda-2j)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\lambda\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{i=1}^{n}(-2)^{n-i}(2i-1)!\,a_{2i-1}\prod_{j=i}^{n-1}[\lambda-(2j+1)] \tag{5.35}$$

(5.35) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terim üç terim halinde yazılabilir.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}\sum_{i=1}^{n}(-2)^{n-i}(2i-2)!\,a_{2i-2}\prod_{j=i}^{n-1}(\lambda-2j)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\sum_{i=1}^{n+1}(-2)^{n+1-i}(2i-2)!\,a_{2i-2}\prod_{j=i}^{n}(\lambda-2j)$$

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\sum_{i=1}^{n+1}(-2)^{n+1-i}(2i-2)!\,a_{2i-2}\prod_{j=i}^{n}(\lambda-2j)$$

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\left[\sum_{i=1}^{n}(-2)^{n+1-i}(2i-2)!\,a_{2i-2}\prod_{j=i}^{n}(\lambda-2j)+(2n)!\,a_{2n}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}(4n-2\lambda)\sum_{i=1}^{n}(-2)^{n-i}(2i-2)!\,a_{2i-2}\prod_{j=i}^{n-1}(\lambda-2j)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^{2n}}{(2n-1)!}\sum_{i=1}^{n}(-2)^{n-i}(2i-2)!\,a_{2i-2}\prod_{j=i}^{n-1}(\lambda-2j)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\lambda x^{2n}}{(2n)!}\sum_{i=1}^{n}(-2)^{n-i}(2i-2)!\,a_{2i-2}\prod_{j=i}^{n-1}(\lambda-2j)$$

Benzer şekilde (5.34) eşitliğinin ikinci terimi de değiştirilebilir.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\sum_{i=1}^{n}(-2)^{n-i}(2i-1)!\,a_{2i-1}\prod_{j=i}^{n-1}[\lambda-(2j+1)]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}\,x^{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{(2n)!}\sum_{i=1}^{n}(-2)^{n-i}(2i-1)!\,a_{2i-1}\prod_{j=i}^{n-1}[\lambda-(2j+1)]$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\lambda x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{i=1}^{n}(-2)^{n-i}(2i-1)!\,a_{2i-1}\prod_{j=i}^{n-1}[\lambda-(2j+1)]$$

Bu değerler (5.34) de yerine yazıldığında

$$y_p''(x) - 2xy_p'(x) + 2\lambda y_p(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}\, x^{2n+1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

olur ki buradan $y_p(x)$ in homojen olmayan (5.28) denkleminin özel bir çözümü olduğu görülür. O halde (5.28) denkleminin her çözümü homojen denklemin çözümü $y_h(x)$ ve homojen olmayan denklemin özel çözümü $y_p(x)$ in toplamı şeklinde ifade edilebilir (Jung, 2009a).

5.3.3. Hermite Fonksiyonlarının Yaklaşım Özelliği

Bu bölümde sınırlı bir bölgede bir analitik fonksiyon Hermite fonksiyonu tarafından yaklaştırıldığında ortaya çıkan hata sınırı incelenecektir.

Teorem 5.6.

λ, 1 den küçük olmayan reel bir sabit olsun. Varsayalım ki ρ ve ρ_0 , $\rho_0 > \rho$ olacak şekilde pozitif sabitler olsunlar. Eğer $y: (-\rho, \rho) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu yakınsaklık yarıçapı ρ_0 olan

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m\, x^m \qquad (5.36)$$

formunda seriye açılabiliyorsa, o halde her $x \in (-\rho, \rho)$ ve $C > 0$ olmak üzere

$$|y(x) - y_h(x)| \leq Cx^2 e^{x^2}$$

olacak şekilde bir $y_h: (-\rho, \rho) \to \mathbb{C}$ Hermite fonksiyonu mevcuttur.

Burada C ; ρ , λ ve y ye bağlıdır (Jung, 2009a).

İspat

Varsayalım ki $y(x)$ yakınsaklık yarıçapı $\rho_0 > \rho$ olan (5.36) kuvvet serisine açılabilsin. O halde,

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)b_m\, x^{m-2} - 2x\sum_{m=1}^{\infty} mb_m\, x^{m-1} + 2\lambda\sum_{m=0}^{\infty} b_m\, x^m$$

ifadesi de yakısaklık yarıçapı ρ_0 olan bir kuvvet serisidir. Bu kuvvet serisi her $x \in (-\rho_0, \rho_0)$ için $\sum_{m=0}^{\infty} a_m\, x^m$ olarak gösterilirse,

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)b_m\, x^{m-2} - 2x\sum_{m=1}^{\infty} mb_m\, x^{m-1} + 2\lambda\sum_{m=0}^{\infty} b_m\, x^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\, x^m$$

yazılır. Burada a_m katsayıları $m \in \{0,1,2,\dots\}$ için

$$a_m = (m+2)(m+1)b_{m+2} - 2(m-\lambda)b_m$$

şeklindedir.

$\sum_{m=0}^{\infty} a_m\, x^m$ kuvvet serisi yakınsaklık aralığında mutlak yakınsak olduğundan, ki bu aralık $[-\rho,\rho]$ aralığını içerir , $\sum_{m=0}^{\infty}|a_m x^m|$ kuvvet serisi $[-\rho,\rho]$ aralığında süreklidir.

Her $x \in (-\rho,\rho)$ için

$$\sum_{m=0}^{\infty}|a_m x^m| \le K \tag{5.37}$$

olacak şekilde $K > 0$ sabiti mevcuttur. Burada K sabiti λ, ρ ve y ye bağlıdır.

Öte yandan

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\sum_{i=1}^{n}(-2)^{n-i}(2i-2)!\, a_{2i-2}\prod_{j=i}^{n-1}(\lambda-2j)\right|$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(2i-2)!}{(2n)!}!\,|a_{2i-2}|\prod_{j=i}^{n-1}|4j-2\lambda|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}\sum_{i=1}^{n} \frac{4^{n-i}|a_{2i-2}|}{(2n)(2n-1)(2n-2)\dots(2i)(2i-1)}\,\frac{(n-1)!}{(i-1)!}\prod_{j=i}^{n-1}\left|i-\frac{\lambda}{2j}\right|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}\sum_{i=1}^{n} \frac{2^{n-i}|a_{2i-2}|}{(2n)(2n-1)(2n-3)\dots(2i+1)(2i-1)}\prod_{j=i}^{n-1}\left|i-\frac{\lambda}{2j}\right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}\sum_{i=1}^{n} \frac{|a_{2i-2}|}{(2n)[(n-1/2)(n-3/2)\dots(i+1/2)](2i-1)}\prod_{j=i}^{n-1}\left|i-\frac{\lambda}{2j}\right|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)!}{n!2(2i-1)} |a_{2i-2}| \prod_{j=i}^{n-1} \left|i - \frac{\lambda}{2j}\right|$$

$$\leq C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)!}{2(2i-1)} |a_{2i-2}|$$

olur ki burada C_0, her $i, n \in \mathbb{N}$ için

$$\prod_{j=i}^{n-1} \left|i - \frac{\lambda}{2j}\right| \leq C_0 \tag{5.38}$$

özelliğini sağlayan bir sabittir. Buradan;

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sum_{i=1}^{n} (-2)^{n-i} (2i-2)!\, a_{2i-2} \prod_{j=i}^{n-1} (\lambda - 2j)\right|$$

$$\leq C_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(i-1)!}{2(2i-1)} |a_{2i-2}| \sum_{n=i}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$= C_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^2}{2i(2i-1)} |a_{2i-2}| x^{2i-2} \sum_{n=i}^{\infty} \frac{(x^2)^{n-i}}{(n-i)!} \cdot \frac{i!}{n(n-1)\dots(n-i+1)}$$

$$\leq C_0 x^2 e^{x^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2(i+1)(2i+1)} |a_{2i}| x^{2i}$$

$$\leq \frac{C_0}{2} x^2 e^{x^2} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{2m}| |x|^{2m}$$

$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ kuvvet serisi yakınsaklık aralığında mutlak yakınsak olduğundan,

$C_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(i-1)!}{2(2i-1)} |a_{2i-2}| \sum_{n=i}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ mutlak yakınsaktır.

Benzer şekilde,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{i=1}^{n} (-2)^{n-i} (2i-1)!\, a_{2i-1} \prod_{j=i}^{n-1} [\lambda - (2j+1)]\right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x|^{2n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{(2i-1)!}{(2n+1)!} |a_{2i-1}|\, 4^{n-i} \frac{(n-1)!}{(i-1)!} \prod_{j=i}^{n-1} \left|1 - \frac{\lambda-1}{2j}\right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |x|^{2n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{n-i}\, |a_{2i-1}|}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-3)\dots(2i+1)} \prod_{j=i}^{n-1} \left|1 - \frac{\lambda-1}{2j}\right|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} |x|^{2n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_{2i-1}|}{(2n+1)(2n)[(n-1/2)(n-3/2)\dots(i+1/2)]} \prod_{j=i}^{n-1} \left|1 - \frac{\lambda-1}{2j}\right|$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty} |x|^{2n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)!\, |a_{2i-1}|}{(4n+2)\,.n!} \prod_{j=i}^{n-1} \left|1 - \frac{\lambda-1}{2j}\right|$$

$$\leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(4n+2).n!} \sum_{i=1}^{n} (i-1)!\ |a_{2i-1}|$$

$$= \frac{C_1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} (i-1)!\ |a_{2i-1}| \sum_{n=\mathrm{i}}^{\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(n+1/2).n!}$$

$$\leq \frac{C_1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} x^2 |a_{2i-1}|\, |x|^{2i-1} \sum_{n=i}^{\infty} \frac{(i-1)!\, |x|^{2n+2i}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{C_1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} x^2 \frac{1}{(i+1)i} |a_{2i-1}|\, |x|^{2i-1} \sum_{n=i}^{\infty} \frac{(x^2)^{n-i}}{(n-i)!} \frac{(i+1)!}{(n+1)\, n\, (n-1)\ldots(n-i+1)}$$

$$\leq \frac{C_1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} x^2 e^{x^2} \frac{1}{(i+1)i} |a_{2i-1}||x|^{2i-1}$$

$$\leq \frac{C_1}{6} x^2 e^{x^2} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{2m+1}||x|^{2m+1}$$

Pozitif C_1 sabiti her $i, n \in \mathbb{N}$ için

$$\prod_{j=i}^{n-1} \left|1 - \frac{\lambda-1}{2j}\right| \leq C_1 \tag{5.39}$$

eşitsizliğini sağlar.

$C_2 = max\{C_0/2, C_0/6\}$olarak tanımlanırsa her $x \in (-\rho, \rho)$ için

$$|y(x) - y_h(x)| \leq \frac{C_0}{2} x^2 e^{x^2} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{2m}||x|^{2m} + \frac{C_1}{6} x^2 e^{x^2} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{2m+1}||x|^{2m+1}$$

$$\leq C_2\, x^2 e^{x^2} \sum_{m=0}^{\infty} |a_m||x|^m$$

$$\leq C_2 K\, x^2 e^{x^2}$$

olur ki bu da ispatı tamamlar (Jung, 2009a).

Sonuç 5.4.

λ, 1 den küçük olmayan reel bir sabit olsun. Varsayalım ki ρ ve ρ_0 , $\rho_0 > \rho$ olacak şekilde pozitif sabitler olsunlar. Eğer $y: (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu yakınsaklık yarıçapı ρ_0 olan (5.36) formunda seriye açılabiliyorsa , $x \rightarrow 0$ iken

$$|y(x) - y_h(x)| = O(x^2)$$

olacak şekilde bir $y_h: (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$ Hermite fonksiyonu mevcuttur (Jung, 2009a).

Örnek 5.3.

$y(x) = e^{x^3}$ fonksiyonu göz önüne alınsın.

$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{3m}}{m!}$ şeklinde kuvvet serisine açılabilir. Teorem 5.6 da $\lambda = 1$ alınırsa ve her $k \in \{0,1,2,\dots\}$ için $b_{3k} = \frac{1}{k!}$ ve $b_{3k+1} = b_{3k+2} = 0$ dır.

$$a_m = (m+2)(m+1)b_{m+2} - 2(m-\lambda)b_m$$

bağıntısından herhangi $k \in \{0,1,2,\dots\}$ için ;

$$a_{3k} = \frac{-6k+2}{k!} \ , \ a_{3k+1} = \frac{9k+6}{k!} \ , a_{3k+2} = 0 \text{ bulunur.}$$

Buradan her $x \in (-\rho, \rho)$ için;

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_m x^m| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_{3k} x^{3k}| + \sum_{k=0}^{\infty} |a_{3k+1} x^{3k+1}| + \sum_{k=0}^{\infty} |a_{3k+2} x^{3k+2}|$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{-6k+2}{k!} x^{3k} \right| + \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{9k+6}{k!} x^{3k+1} \right|$$

$$\leq (9|x|^4 + 6|x|^3 + 6|x| + 2)e^{|x|^3}$$

$$\leq (9\rho^4 + 6\rho^3 + 6\rho + 2)e^{\rho^3}$$

bulunur.

$K = (9\rho^4 + 6\rho^3 + 6\rho + 2)e^{\rho^3}$ alınır ve (5.38) ve (5.39) da $C_0 = C_1 = 0$ alınırsa

Teorem 5.6 dan bir $y_h : (-\rho, \rho) \to \mathbb{C}$ Hermite fonksiyonu bulunabilir öyle ki herhangi $x \in (-\rho, \rho)$ için

$$\left| e^{x^3} - y_h(x) \right| \leq \left(\frac{9}{2}\rho^4 + 3\rho^3 + 3\rho + 1 \right) e^{\rho^3} x^2 \, e^{x^2}$$

sağlanır.

Burada $y_h(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{(2n)!} \prod_{j=1}^{n-1}(2j-1)$ şeklindedir.

Bu nedenle de $|x| \to 0$ iken

$$\left| e^{x^3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{(2n)!} \prod_{j=1}^{n-1}(2j-1) \right| = O(|x|^6 e^{|x|^3 + e^{|x|^2}})$$

özelliği sağlanır Jung (2009a).

5.4. Chebyshev Diferansiyel Denklemi

Her $x \in (-1,1)$ ve α pozitif tam sayı olmak üzere,

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \alpha^2 y(x) = 0 \qquad (5.40)$$

formundaki denkleme, Chebyshev diferansiyel denklemi denir. Bu denklemin her bir çözümü Chebyshev fonksiyonudur. Bu denklem fizik ve mühendislikte büyük rol oynar.

Jung (2011b) çalışmasında,

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \alpha^2 y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \qquad (5.41)$$

formundaki homojen olmayan Chebyshev diferansiyel denkleminin gelen çözümünü incelemiştir.

5.4.1. Homojen Chebyshev Denklemi

Bu bölümde (5.40) formundaki homojen Chebyshev diferansiyel denkleminin çözümü ile ilgilenilecektir.

Bu çözümleri elde edebilmek için,

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n$$

değerleri (5.40) denkleminde yerine yazılsın.

$$(1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2} x^n - x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1} x^n + \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$2c_2 + 6c_3 x - c_1 x + \alpha^2 c_0 + \alpha^2 c_1 x$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - nc_n + \alpha^2 c_n]x^n = 0$$

$$(2c_{2+}\alpha^2 c_0) + [(\alpha^2-1)c_1 + 6a_3]x + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2} + (\alpha^2 - n^2)c_n]x^n = 0$$

Buradan aşağıdaki indirgeme bağıntılarına ulaşılır.

$$2c_{2+}\alpha^2 c_0 = 0$$

$$(\alpha^2-1)c_1 + 6c_3 = 0$$

Her $n = 2,3,4,\ldots$ için,

$$c_{n+2} = \frac{n^2-\alpha^2}{(n+2)(n+1)}c_n$$

bağıntıları elde edilir. Buradan (5.40) denkleminin çözümü,

$$y(x) = c_0\left[1 - \frac{\alpha^2}{2!}x^2 + \frac{(\alpha-2)\alpha^2(\alpha+2)}{4!}x^4 - \cdots\right]$$

$$+c_1 x\left[1 - \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{3!}x^2 + \frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha+3)}{5!}x^4 - \cdots\right] \qquad (5.42)$$

şeklinde bulunur.

5.4.2. Homojen Olmayan Chebyshev Denklemi

Bu bölümde (5.41) formundaki homojen olmayan Chebyshev denkleminin çözümü incelenecektir.

$$y_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

$$y_p{}'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m\, x^{m-1}$$

$$y_p{}''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m\, x^{m-2}$$

değerleri (5.41) denkleminde yerine konulursa,

$$(2c_{2+}\alpha^2 c_0) + [(\alpha^2-1)c_1 + 6a_3]x$$

$$+\sum_{m=2}^{\infty}[(m+2)(m+1)c_{m+2} + (\alpha^2 - m^2)c_m]x^m$$

$$= a_{0+}\, a_1 x + \sum_{m=2}^{\infty} a_m x^m$$

bağıntısı elde edilir.

Buradan her $m \in \{0,1,2,\dots\}$ için

$$(m+2)(m+1)c_{m+2} - (m^2 - \alpha^2)c_m = a_m \tag{5.43}$$

indirgeme bağıntısı elde edilir.

Kolaylık açısından $c_0 = c_1 = 0$ alınarak sırasıyla değerler bulunursa,

$$m = 0 \text{ için } c_2 = \frac{a_0}{2}$$

$$m = 1 \text{ için } c_3 = \frac{a_1}{3.2}$$

$$m = 2 \text{ için } c_4 = \frac{a_2}{4.3} + \frac{(2^2 - n^2)}{4.3.2} a_0$$

$$m = 3 \text{ için } c_5 = \frac{a_3}{5.4} + \frac{(3^2 - n^2)}{5.4.3.2} a_2$$

Bu şekilde devam edilirse uzun işlemler sonrasında katsayılar için genel terimlere ulaşılır.

Her $m \in \mathbb{N}$ için,

$$c_{2m} = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{a_{2i}}{2i+1} \prod_{j=i+1}^{m-1} \frac{(2j)^2 - \alpha^2}{2j(2j+1)}$$

$$\tag{5.44}$$

$$c_{2m+1} = \frac{1}{2m+1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{a_{2i+1}}{2i+2} \prod_{j=i+1}^{m-1} \frac{(2j+1)^2 - \alpha^2}{(2j+1)(2j+2)}$$

bağıntıları elde edilir (Jung, 2011b).

Teorem 5.7.

Varsayalım ki α pozitif bir tamsayı ve $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $\rho > 0$ olsun. $\rho_0 = \min\{1, \rho\}$ olmak üzere,(5.41) Chebyshev denkleminin her $y: (-\rho_0, \rho_0) \to \mathbb{C}$ çözümü

$$y(x) = y_h(x) + \sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m \tag{5.45}$$

şeklindedir, burada $y_h(x)$ Chebyshev fonksiyonu ve c_m katsayıları (5.44) deki gibidir (Jung, 2011b).

İspat

$j \in \mathbb{N}$ için, $|(2j)^2 - \alpha^2| > 2j(2j+1)$ olduğu açıktır.

Buradan $2j < \alpha$ için,

$$j < \frac{-1+\sqrt{1+8\alpha^2}}{8} < \frac{\sqrt{8\alpha^2}}{8} \tag{5.46}$$

olduğu görülür. Buradan, $\alpha_e = \left[\alpha/\sqrt{8}\right]$ olmak üzere $1 \leq j \leq \alpha_e$ eşitsizliği sağlanır.

Eğer $m > \alpha_e$ ise,

$$|c_{2m}| \leq \frac{1}{2m}\sum_{i=0}^{\alpha_e-1}\frac{|a_{2i}|}{2i+1}\left(\prod_{j=i+1}^{\alpha_e}\frac{|(2j)^2-\alpha^2|}{2j(2j+1)}\right)\left(\prod_{j=\alpha_e+1}^{m-1}\frac{|(2j)^2-\alpha^2|}{2j(2j+1)}\right)$$
$$+\frac{1}{2m}\sum_{i=\alpha_e}^{m-1}\frac{|a_{2i}|}{2i+1}\prod_{j=i+1}^{m-1}\frac{|(2j)^2-\alpha^2|}{2j(2j+1)}$$

$$\leq \frac{1}{2m}\sum_{i=0}^{\alpha_e-1}\frac{(2i)!(\alpha^2-4)^{\alpha_e-i}}{(2\alpha_e+1)!}|a_{2i}| + \frac{1}{2m}\sum_{i=\alpha_e}^{m-1}\frac{|a_{2i}|}{2\alpha_e+1}$$

$$\leq \frac{max_{0\leq i\leq \alpha_e}\big((2i)!/(2\alpha_e+1)!\big)(\alpha^2-4)^{\alpha_e-i}}{2m}\sum_{i=0}^{m-1}|a_{2i}|$$

Şimdi $1 \leq m \leq \alpha_e$ olduğunu varsayalım. $\alpha \geq 3$ için,

$$|c_{2m}| \leq \frac{1}{2m}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{|a_{2i}|}{2i+1}\prod_{j=i+1}^{m-1}\frac{|(2j)^2-\alpha^2|}{2j(2j+1)}$$

$$\leq \frac{1}{2m}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{|a_{2i}|}{2i+1}\prod_{j=i+1}^{m-1}\frac{|\alpha^2-4|}{2j(2j+1)}$$

$$=\frac{1}{2m}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(2i)!(\alpha^2-4)^{m-1-i}}{(2m-1)!}|a_{2i}|$$

$$\leq \frac{max_{0\leq i\leq m-1}\big((2i)!/(2m-1)!\big)(\alpha^2-4)^{m-1-i}}{2m}\sum_{i=0}^{m-1}|a_{2i}|$$

elde edilir. Bu iki eşitsizlikten her $m \in \mathbb{N}$ için

$$|c_{2m}| \leq \frac{M_e}{2m}\sum_{i=0}^{m-1}|a_{2i}| \tag{5.47}$$

elde edilir. Burada M_e ,

$$M_e = max_{0\le i\le l\le \alpha_e} \frac{(2i)!}{(2l+1)!}(\alpha^2-4)^{l-i} \tag{5.48}$$

şeklindedir.

Diğer taraftan, eğer $j \in \mathbb{N}$ ve $|(2j+1)^2-\alpha^2| > (2j+1)(2j+2)$ ise $2j+1<\alpha$ için,

$$j < \frac{\sqrt{8\alpha^2+1}-5}{8} < \frac{\sqrt{8\alpha^2}-4}{8} < \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \tag{5.49}$$

olur.

Buradan $\alpha_0 = [\alpha/\sqrt{8}-1/2]$ olmak üzere, $1 \le j \le \alpha_0$ elde edilir.

$m > \alpha_0$ ise (5.44) den,

$$|c_{2m+1}| \le \frac{1}{2m+1}\sum_{i=0}^{\alpha_0-1}\frac{|a_{2i+1}|}{2i+2}\left(\prod_{j=i+1}^{\alpha_0}\frac{|(2j+1)^2-\alpha^2|}{(2j+1)(2j+2)}\right)\left(\prod_{j=\alpha_0+1}^{m-1}\frac{|(2j+1)^2-\alpha^2|}{(2j+1)(2j+2)}\right)$$

$$+\frac{1}{2m+1}\sum_{i=\alpha_0}^{m-1}\frac{|a_{2i+1}|}{2i+2}\prod_{j=i+1}^{m-1}\frac{|(2j+1)^2-\alpha^2|}{(2j+1)(2j+2)}$$

$$\le \frac{1}{2m+1}\sum_{i=0}^{\alpha_0-1}\frac{(2i+1)!(\alpha^2-9)^{\alpha_0-i}}{(2\alpha_0+2)!}|a_{2i+1}| + \frac{1}{2m+1}\sum_{i=\alpha_0}^{m-1}\frac{|a_{2i+1}|}{2\alpha_0+2}$$

$$\le \frac{max_{0\le i\le\alpha_0}\left((2i+1)!/(2\alpha_0+2)!\right)(\alpha^2-9)^{\alpha_0-i}}{2m+1}\sum_{i=0}^{m-1}|a_{2i+1}|$$

Eğer $1 \le m \le \alpha_0$ ise , $\alpha \ge 5$ için , (5.44) den

$$|c_{2m+1}| \le \frac{1}{2m+1}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{|a_{2i+1}|}{2i+2}\prod_{j=i+1}^{m-1}\frac{|(2j+1)^2-\alpha^2|}{(2j+1)(2j+2)}$$

$$\le \frac{1}{2m+1}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{|a_{2i+1}|}{2i+2}\prod_{j=i+1}^{m-1}\frac{\alpha^2-9}{(2j+1)(2j+2)}$$

elde edilir. $j < \alpha_0$ olduğundan $2j+1 < 2n/\sqrt{8} < n$ eşitsizliği sağlanır.

Buradan,

$$|c_{2m+1}| \le \frac{1}{2m+1}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(2i+1)!(\alpha^2-9)^{m-1-i}}{(2m)!}|a_{2i+1}|$$
$$\le \frac{max_{0\le i\le m-1}\left((2i+1)!/(2m)!\right)(\alpha^2-9)^{m-1-i}}{2m+1}\sum_{i=0}^{m-1}|a_{2i+1}|$$

Bu eşitsizliklerden her $m \in \mathbb{N}$ için,

$$|c_{2m+1}| \leq \frac{M_0}{2m+1} \sum_{i=0}^{m-1} |a_{2i+1}| \tag{5.50}$$

elde edilir ki burada M_0 ,

$$M_0 = max_{0\leq i\leq l\leq \alpha_0} \frac{(2i+1)!}{(2l+2)!} (\alpha^2 - 9)^{l-i} \tag{5.51}$$

şeklindedir.

ρ_1 , ρ_0 dan küçük keyfi bir pozitif sayı olsun. (5.47) ve (5.50) den herhangi $x \in [-\rho_1, \rho_1]$ için,

$$\left|\sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |c_{2m}|\, |x|^{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} |c_{2m+1}|\, |x|^{2m+1}$$

$$\leq M_e \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|x|^{2m}}{2m} \sum_{i=0}^{m-1} |a_{2i}| + M_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|x|^{2m+1}}{2m+1} \sum_{i=0}^{m-1} |a_{2i+1}|$$

$$= M_e \sum_{m=0}^{\infty} |a_{2m}| |x|^{2m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x|^{2i}}{2(m+i)} + M_0 \sum_{m=0}^{\infty} |a_{2m+1}| |x|^{2m+1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x|^{2i}}{2(m+i)+1}$$

elde edilir.

$0 < \rho_1 < \rho_0 \leq 1$ olduğundan,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x|^{2i}}{2(m+i)} \leq \frac{1}{2m+2} \frac{|x|^2}{1-|x|^2} \quad , \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x|^{2i}}{2(m+i)+1} \leq \frac{1}{2m+3} \frac{|x|^2}{1-|x|^2} \tag{5.52}$$

elde edilir.

Buradan her $x \in [-\rho_1, \rho_1]$ için,

$$\left|\sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m\right| \leq M_e \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|a_{2m} x^{2m}|}{2m+2} \frac{|x|^2}{1-|x|^2} + M_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|a_{2m+1} x^{2m+1}|}{2m+3} \frac{|x|^2}{1-|x|^2}$$

$$\leq M_e \frac{|x|^2}{1-|x|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|a_m x^m|}{m+2} \tag{5.53}$$

sağlanır.

ρ_1 , $0 < \rho_1 < \rho_0$ eşitsizliğini sağladığından, (5.53) eşitsizliği her $x \in (-\rho_0, \rho_0)$ için sağlanır. Ayrıca $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ kuvvet serisi $(-\rho, \rho)$ aralığında mutlak yakınsaktır. Bu nedenle her $x \in (-\rho_0, \rho_0)$ için,

$$\left|\sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m\right| < \infty \tag{5.54}$$

sağlanır.

Bu nedenle $\sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m$ kuvvet serisi her bir $x \in (-\rho_0, \rho_0)$ için yakınsaktır.

Şimdi $\sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m$ kuvvet serisinin homojen olmayan (5.41) Chebyshev diferansiyel denklemini her $x \in (-\rho_0, \rho_0)$ için sağladığını göreceğiz.(5.41) eşitliğinde $y(x)$ yerine

$$\sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m = \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m} x^{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m+1} x^{2m+1}$$

yazılırsa, her $x \in (-\rho_0, \rho_0)$ için,

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \alpha^2 y(x)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}(2m+2)(2m+1)c_{m+2}x^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty}(2m+3)(2m+2)c_{2m+3}x^{2m+1}$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty} 2m(2m-1)c_{2m}x^{2m} - \sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)(2m)c_{2m+1}x^{2m+1}$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty} 2mc_{2m}x^{2m} - \sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)c_{2m+1}x^{2m+1}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^2 c_{2m}x^{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^2 c_{2m+1}x^{2m+1}$$

$$=2c_2 + 6c_3x + \sum_{m=1}^{\infty}[(2m+2)(2m+1)c_{2m+2} + (\alpha^2 - (2m)^2)c_{2m}]x^{2m}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}[(2m+3)(2m+2)c_{2m+3} + (\alpha^2 - (2m+1)^2)c_{2m+1}]x^{2m+1}$$

$$=2c_2 + 6c_3x + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m}x^{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m+1}x^{2m+1}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \qquad (5.55)$$

sağlanır.

O halde, $\sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m$ homojen olmayan Chebyshev denkleminin (5.41), özel bir çözümüdür. Bu nedenle (5.41) in her $y: (-\rho_0, \rho_0) \to \mathbb{C}$ çözümü,

$$y(x) = y_h(x) + \sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m \qquad (5.56)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $y_h(x)$ Chebyshev fonksiyonudur (Jung, 2011b).

5.4.3. Chebyshev Fonksiyonlarının Yaklaşım Özelliği

Bu bölümde $K \geq 0$ ve $\rho > 0$ sabitler olmak üzere tüm $y: (-\rho, \rho) \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının kümesi C_K ile gösterilecektir ve aşağıdaki özelliklerin sağlandığı kabul edilecektir.

(a) $y(x)$ yakınsaklık yarıçapı en az ρ olan $\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$ kuvvet serisine açılabilir,

(b) Herhangi $x \in (-\rho, \rho)$ için

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_m x^m| \leq K \left|\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m\right|$$

özelliği sağlanır. Burada , $m \in \mathbb{N}_0$ ve $b_0 = b_1 = 0$ olmak üzere

$$a_m = (m+2)(m+1)b_{m+2} - (m^2 - \alpha^2)b_m \tag{5.57}$$

şeklindedir.

Bu bölümde Chebyshev diferansiyel denkleminin Hyers Ulam kararlılığı incelecektir (Jung, 2011b).

Teorem 5.8.

α pozitif bir tamsayı olsun. Varsayalım ki herbir $y \in C_K$ fonksiyonu her $x \in (-\rho, \rho)$ ve bazı $\varepsilon > 0$ için,

$$|(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + \alpha^2 y(x)| \leq \varepsilon \tag{5.58}$$

özelliğini sağlasın. $\rho_0 = \min\{1, \rho\}$ olsun. O halde her $x \in (-\rho_0, \rho_0)$ ve M_e (5.48)deki gibi tanımlanmak üzere

$$|y(x) - y_h(x)| \leq \frac{KM_e\varepsilon}{2} \frac{x^2}{1 - x^2} \tag{5.59}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $y_h: (-\rho_0, \rho_0) \to \mathbb{C}$ Chebyshev fonksiyonu mevcuttur (Jung, 2011b).

İspat

(5.55) den her $x \in (-\rho, \rho)$ için

$$(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + \alpha^2 y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \qquad (5.60)$$

eşitliği sağlanmaktadır. (b) ve (5.58) kullanılarak

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_m x^m| \leq K \left|\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m\right| \leq K\varepsilon \qquad (5.61)$$

elde edilir.

Teorem 5.7 ve (5.60) dan $y(x)$, her $x \in (-\rho_0, \rho_0)$ için $y_h(x) + \sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m$

şeklinde yazılabilir ki burada y_h Chebyshev fonksiyonu ve c_m (5.44) deki gibidir.

(5.53) ve (5.61) den her $x \in (-\rho_0, \rho_0)$ için,

$$|y(x) - y_h(x)| = \left|\sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m\right| \leq M_e \frac{x^2}{1-x^2} \frac{K\varepsilon}{2} \qquad (5.62)$$

elde edilir.

Eğer ρ, 1 den küçük alınırsa, yani $\rho_0 = \rho < 1$ için Teorem 5.8, (5.40) Chebyshev diferansiyel denkleminin Hyers Ulam kararlılığını gerektirir(Jung, 2011b).

Sonuç 5.5.

α pozitif bir tamsayı olsun. Varsayalım ki $y \in C_K$ fonksiyonu her $x \in (-\rho, \rho)$ ve bazı $\varepsilon > 0$ için ,(5.58) eşitsizliğini sağlasın. $\rho_0 = \min\{1, \rho\}$ olsun.

Bu taktirde $x \to 0$ iken,

$$|y(x) - y_h(x)| = O(x^2) \qquad (5.63)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $y_h: (-\rho_0, \rho_0) \to \mathbb{C}$ Chebyshev fonksiyonu mevcuttur (Jung ,2011b).

6. SONUÇ

Ulam'ın 1940 yılında ortaya attığı bir problem sonrasında gelişen fonksiyonel denklemlerde kararlılık teorisinin, diferansiyel denklemlere uygulanmasıyla yeni bir çalışma alanı ortaya çıkmıştır. Hyers Ulam kararlılık teorisi olarak adlandırılan bu teori yıllar içinde çeşitli diferansiyel denklemlere uygulanmış olup, kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması ise literatürde en yeni çalışma alanları arasındadır.

Bu çalışmada Hyers Ulam kararlılık teorisinin, kuvvet serisi metodunu kullanarak bazı ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlere uygulanışı incelenmiştir. Bu çalışma sırasında diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını incelerken, kuvvet serisi metodunu her diferansiyel denkleme ayrı ayrı uyarlamanın uzun hesaplamalar yapmayı gerektirdiği görülmüştür. Bu nedenle birçok diferansiyel denkleme uygulanabilen bir kuvvet serisi metodu geliştirmeye yönelik çalışmalar literatürde son zamanlarda büyük önem kazanmıştır.

Ayrıca kuvvet serisi metoduyla ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin homojen olmayan çözümlerini bulabilmek oldukça uzun hesaplamalar yapmayı gerektirir. Bu çözümleri bulmayı kolaylaştırmak amacıyla sembolik hesaplama yapabilen programlama dilleri kullanılırsa birçok denklem kolaylıkla incelenebilir.

Bu çalışmada yapılan incelemelerin, ilerde diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılık teorisi alanında yapılacak çalışmalara temel teşkil etmesi amaçlanmaktadır.

KAYNAKÇA

Abdollahpour, M.R., Najati, A., 2011. Stability of linear differential equations of third order, ***Appl. Math. Lett.*** **24**, 1827-1830.

Alsina,C., Ger,R., 1998. On some inequalities and stability results related to the exponential function, ***J. Inequal. Appl.*** **2**, 373-380.

Boyce,W.E., Diprima, R.C., ***Elementary Differential Equations,*** Wiley, Newyork,1996.

Cimpean, D.S., Popa, D. , 2010. On the stability of the linear differential equation of higher order with constant coefficients, ***Appl. Math*.*Comput,*** **217,** 4141–4146

Çağlıyan,M., Çelik N., Doğan S., ***Adi Diferansiyel Denklemler***,Nobel,2007

Engin T., Çengel Y.A., ***Mühendisler İçin Diferansiyel Denklemler***, Sakarya Üniversitesi, 2008.

Hyers, D.H., 1941. On the stability of the linear functional equation, ***Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*** **27**, 222-224.

Hyers, D.H., Rassias, Th.M., 1992. Approximate homomorphisms, ***Aequationes Math.*** **44**, 125-153.

Gordji M. E., Cho Y.J, Ghaemi M.B., Alizadeh B, 2011.Stability of the second order partial differential equations, ***J.Ineq.and Appl.,***81

Jung, S.-M., 2004. Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order, ***Appl. Math. Lett.*** **17**, 1135-1140.n

Jung, S.-M., 2005. Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order, III, ***J. Math. Anal. Appl.*** **311**, 139-146.

Jung, S.-M., 2006. Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order, II, ***Appl. Math. Lett.*** **19**, 854-858.

Jung, S.-M., 2006. Hyers-Ulam stability of a system of first order linear differential equations with constant coefficients, ***J. Math. Anal. Appl.*** **320**, 549-561.

Jung, S.-M., Lee, K.-S., 2006. Hyers-Ulam-Rassias stability of a linear differential equation. ***Int. J. Pure Appl. Math.***, 29

Jung, S.-M., 2007. Legendre's differential equation and its Hyers-Ulam stability, ,***Abst.Appl.Anal.,***14

Jung,S.-M., 2008. Approximation of analytic functions by Airy functions, ***Integr.Transf.Spec.F,***19(12),885-891

Jung, S.-M., 2009. Approximation of analytic functions by Hermite functions, ***Bull.Sci.Math.,***133,756-764

Jung, S.-M., 2009. Approximation of analytic functions by Legendre functions, ***Nonlinear Anal.,*** 71 (12) ,e103-e108

Jung, S.-M., 2009. Hyers-Ulam stability of linear partial differential equations of first order, ***Appl. Math. Lett,***22,70-74

Jung, S.-M., 2009.An approximation property of exponential functions, ***Acta Math. Hungar.,***124,155-163

Jung, S.-M., 2011. Approximation of analytic functions by Bessel's functions of fractional order ***, Abst.Appl.Anal,***13

Jung, S.-M., Rassias, Th.M, 2011. Approximation of analytic functions by Chebyshev functions***, Abst.Appl.Anal,***10

Jung, S.-M., 2011. Approximation of analytic functions by Laguerre functions***, Appl. Math***.***Comput*** ,**218,** 832-835

Jung, S.-M., 2012. Approximation of analytic functions by special functions***, Ann. Funct. Anal.***, **3**, 92-99.

Jung, S.-M., Şevgin, S., Şevli, H. , 2013. On the perturbation of Volterra integro-differential equations, ***Appl. Math. Lett.*** **26**, 665-669.

Jung, S.-M., Şevli, H., Şevgin, S., 2013. An approximation property of Gaussian functions, ***Electron. J. Diff. Equ.,*** **03,** 1-8.

Jung, S.-M., Şevli, H. , 2013. Power series method and approximate linear differential equations of second order, ***Advances in Difference Equations.*** **76**, 1-9.

Karakaya, R., 2010, Fuzzy normlu lineer uzaylarda ikinci dereceden fonksiyonel denklemlerin kararlılığı, Yayınlanmış yüksek lisans tezi, Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Li,Y., Shen,Y.2010. Hyers–Ulam stability of linear differential equations of second order, ***Appl. Math. Lett.,23,***306-309

Lungu N., Popa D., 2012, Hyers–Ulam stability of a first order partial differential equation, ***J.Math.Anal.Appl***., **385**, 86-91

Miura, T., Takahasi, S.-E., Choda, H., 2001. On the Hyers-Ulam stability of real continuous function valued differentiable map, ***Tokyo J. Math.*** **24**, 467-476.

Miura, T., 2002. On the Hyers-Ulam stability of a differentiable map, ***Sci. Math. Japon.*** **55**, 17-24.

Miura, T., Miyajima, S., Takahasi, S.-E., 2003. A characterization of Hyers-Ulam stability of first order linear differential operators, ***J. Math. Anal. Appl.*** **286**, 136-146.

Miura, T., Jung, S.-M., Takahasi, S.-E., 2004. Hyers-Ulam-Rassias stability of the Banach space valued linear differential equations $y'=\lambda y$, ***J. Korean Math. Soc.*** **41,** 995-1005.

Obloza, M., 1993. Hyers stability of the linear differential equation, ***Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat.*** **13,** 259-270.

Obloza, M., 1997. Connections between Hyers and Lyapunov stability of the ordinary differential equations, ***Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat.*** **14,** 141-146.

Popa, D., Raşa, I., 2011. On the Hyers-Ulam stability of the linear differential equations, ***J. Math. Anal. Appl.***, **381**, 530-537.

Rassias, Th.M., 1978. On the stability of the linear mapping in Banach spaces, ***Proc. Arner. Math. Soc.*** **72**, 297-300.

Rassias, Th.M., 2000. On the stability of functional equations and a problem of Ulam, ***Acta Appl. Math.*** **62**, 23-130.

Rezaei, H., Jung, S.-M., Rassias, Th.M., 2013. Laplace transform and Hyers–Ulam stability of linear differential equations, ***J. Math. Anal. Appl.*** **403**, 244-251.

Ross, CC., ***Differential Equations - An Introduction with Mathematica*****.** Springer, New York ,1995.

Sasser,J.E., History Of Ordinary Differential Equations The First Hundred Years**,** In: ***Proceedings of The Midwest Mathematics History Conferences,*** *Miami University, Oxford, Ohio*. 1992.

Takahasi, S.-E., Miura, T., Miyajima, S., 2002. On the Hyers-Ulam stability of the Banach space-valued differential equation $y' = \lambda y$, ***Bull. Korean Math. Soc.*** **39**, 309-315.

Ulam, S.M., 1964. ***Problems in Modern Mathematics***, Chapter VI, Wiley, New York.

Wang, G., Zhou, M., Sun, L., 2008. Hyers-Ulam stability of linear equations of first order, ***Appl. Math. Lett.*** **21**, 1024-1028.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında İstanbul'un Bakırköy ilçesinde doğdu. 2007 yılında İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yüksek öğrenimine başladı. 2011 yılında bölüm birincisi olarak mezun olup aynı yıl İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisans eğitimine başladı. Halen bu çalışmalarına devam etmekte ve öğretmenlik yapmaktadır.