T.C.
İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİMDALI
MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

HARMONİK TASVİRLERDE DİSTORSİYON (BÜKÜLME) TEOREMLERİ

Yüksek Lisans Tezi

Nilgün TURHAN
1260Y55103

Danışman: Prof. Dr. Yasemin KAHRAMANER

T.C.

İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

ONAY SAYFASI

Yüksek lisans öğrencisi Nilgün TURHAN' ın " Harmonik Tasvirlerde Distorsiyon (Bükülme) Teoremleri " konulu tez çalışması jürimiz tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak (oybirliği / oy çokluğu ile) başarılı bulunmuştur.

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Yasemin Kahramaner

Jüri Üyesi: Prof. Dr. İsmail Kömbe

Jüri Üyesi: Y. Doç. Dr. Yaşar Polatoglu

Hazırlamış olduğum tez özgün bir çalışma olup YÖK ve İTİCU Lisansüstü Yönetmeliklerine uygun olarak hazırlanmıştır. Ayrıca bu çalışmayı yaparken, bilimsel etik kurallarına tamamıyla uyduğumu; yararlandığım tüm kaynakları gösterdiğimi ve hiçbir kaynaktan yaptığım ayrıntılı alıntı olmadığını beyan ederim. Bu tezin ihtiva ettiği tüm hususlar şahsi görüşüm olup İstanbul Ticaret Üniversitesinin resmi görüşünü yansıtmamaktadır.

Nilgün TURHAN

ÖZET

Son yıllarda, çok uygulama alanı olması nedeniyle yalınkat fonksiyonlar teorisine ilgi artmıştır. Yalınkat fonksiyonların, harmonik dönüşümlere genelleştirilip genelleştirilemeyeceği ilgi çekmektedir.

Yalınkat fonksiyonlar teorisinde incelenen fonksiyonların katsayı sınırlarını ve modülünün alt ve üst sınırlarını bulma problemi, harmonik dönüşümler teorisindeki katsayı eşitsizliklerini bulmaya ve klasik distorsiyon teoremlerinin kesin formlarını elde etmeye yönlendirir.

Bu çalışmadaki amacımız Koebe distorsiyon teoremlerini ve bu teoremlerin harmonik dönüşümlerle ilişkisini incelemektir.

Bir diğer amacımız ise, bu konuda çalışan araştırmacılara yol gösterici bir kaynak oluşturmaktır.

ABSTRACT

In recent years, theory of univalent functions has gained much popularity reason of the it has many applications.The matter of, generalization of univalent functions to harmonic mappings is possible or not get attract attention.

At univalent functions theory upper limits and inferior limits of modulus of functions and coefficients of functions leads to finding coefficient inequality at harmonic mappings and the forms of classical distortion theories.

The aim of this research is to analyze the Koebe distortion theorems and the correlation of this theorems with harmonic mappings.

Another aim of this research is to compose an instructive guide for people who is studying in this area.

KEYWORDS: Analytic functions, univalent function, conformal mappings, harmonic mappings, harmonic univalent functions, classical distortion theorems.

ANAHTAR KELİMELER: Analitik fonksiyonlar, yalınkat fonksiyonlar, konform dönüşümler, harmonik dönüşümler, harmonik yalınkat fonksiyonlar, klasik distorsiyon teoremler.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR

$\mathscr{A}$	analitik fonksiyonlar sınıfı
$\hat{\mathbb{C}}$	Riemann küresel sınıfı
D	birim dairesi
Σ	Δ da normalleştirilmiş yalınkat fonksiyonlar
Σ_0	$b = 0$ olmak üzere Σ da fonksiyonlar
$\partial\Delta$	birim çember
∂D	birim çember
$\mathscr{F}$	yön-koruyan harmonik dönüşümün ailesi
$\prec$	subordinasyon
$\mathscr{P}$	pozitif reel kısım fonksiyonları
S	D de normalleştirilmiş yalınkat fonksiyonlar
S_H	normal ailesi
$\chi(C, z)$	sarım sayısı
Δ	birim çemberin dışı

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No:

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren tez danışmanım ve hocam Prof. Dr. Yasemin KAHRAMANER'e sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Her konuda sabırla yardımcı olan eşim Doç. Dr. Vedat TURHAN'a, sevgili kızlarım İrem ve Ceren'e, maddi ve manevi her türlü desteği veren anneme, en içten teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisi kompleks analizin bir dalıdır. Analitik fonksiyonların geometrik özellikleridir. Geometri ile kompleks analiz arasındaki ilginç bir ilişkiyi karakterize eden bir alandır.

Kökeni 19. yüzyıla dayanmakta fakat sürekli yeni uygulamalar ortaya çıkmaktadır. G.F.B. Riemann kompleks değişkenli genel fonksiyonlar teorisinin temelini atmıştır. O zamana kadar sadece matematiksel fizikte kullanılan potansiyel teorisi onun tarafından teorik matematiğe uygulanmıştır. Bu doğrultuda, fonksiyonlar teorisini, $z = x + iy$ nin bir analitik fonksiyonu $w = u + iv$ için geçerli olması gereken $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \Delta u = 0$ kısmi türevli denklemi kullanmıştır. F. Klein ile H. Poincare, 1880' den kısa bir süre sonra otomorf fonksiyonlar teorisini geliştirerek G. F.B. Riemann'ın kendi adını taşıyan yüzeyler üzerinde tasarlamış olduğu cebirsel eğrilerin sistematik olarak standartlaştırılması fikrini ortaya atmışlardır.

Standardizasyon konusunda son zamanlarda yapılan araştırmalar büyük ölçüde H. Poincare'nin çalışmasıyla bağdaşmakta olup D. Hilbert (1900), W.F. Osgood, T. Broden ve A. M. Johanson tarafından gerçekleştirilmiştir. 1907' de H. Poincare ile Leipzig' den P. Koebe önemli genellemeler yapmıştır. (P. Koebe Atti del IV Congr., Roma, 1908, Roma, 1909, Cilt II, s.25) 1901 yılında D. Hilbert tarafından sağlam temellere oturtulan Dirichlet Prensibi, Leipzig' den P. Koebe ve Göttingen' den R. Courant tarafından, genel standartlaştırma prensibinin yeni ispatlarının türetilmesinde başlangıç noktası olarak kullanılmıştır.

1920' li yılların ilk yarısına kadar diferansiyel geometriciler tarafından çalışılmış, ancak 1980' li yılların ortalarında harmonik dönüşümler kompleks analizciler arasında ilgi çekmeye başlamıştır. 1984 yılında Louis De Branges tarafından normalize edilmiş yalınkat fonksiyonlar için Bieberbach kestirimi ispatlandıktan sonra harmonik dönüşümlere genişletilip genişletilemeyeceği sorusunun cevabının olumlu olduğunu, 1984 yılında Clunie Terry, Sheil-Small tarafından yapılan çalışma ile gösterilmiştir. Bu çalışmada analitik yalınkat dönüşümler için elde edilen klasik distorsiyon teoremler ve katsayı tahminlerinin, harmonik dönüşümlerde benzer bir yapıya sahip olduğu ortaya konulmuştur.

1980’ li yıllarda Walter Hengartner ve Glenn Schober yaptıkları birçok çalışma sayesinde verilen bölge üzerine resmedilen ve belirlenmiş dilatasyona sahip harmonik dönüşümlerin varlığını engelleyen gizemli bir olgu keşfetmişlerdir.

Konform dönüşümlerin bazı özellikleri harmonik dönüşümlerle yapılan genelleştirmelerde önemli rol oynar. Diğer taraftan harmonik dönüşümler için elde edilen sonuçların bazıları, konform dönüşümler için elde edilen sonuçlar tam olarak benzemezler.

Bu çalışmanın amacı harmonik yalınkat dönüşümlerin başlangıç noktası olan analitik yalınkat fonksiyonların özelliklerine dikkati çekmek ve harmonik yalınkat dönüşümlerle analitik yalınkat fonksiyon özellikleri arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktır.

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, analitik fonksiyonlarda limit, limit özellikleri ve teoremleri, düzgün süreklilik, diferansiyellenebilme, kompleks türev ve temel özellikleri, zincir kuralı, bir açık cümle üzerindeki analitik fonksiyonlar, Cauchy-Riemann denklemleri, kompleks diferansiyel operatörler, özellikleri ve ters tasvir verilmektedir.

İkinci bölümde, yalınkat fonksiyonlar ve bazı temel özellikleri, Riemann dönüşüm teoremi, green analitik formülü, klasik distorsiyon teoeremleri, bazı reel kısma haiz fonksiyonlar ve subordinasyon, yıldızıl ve konveks fonksiyonlar ve konvekse yakın fonksiyonlar verilmektedir.

Üçüncü bölümde, harmonik dönüşümler, bazı temel durumlar, argument prensibi, konform dönüşümler, harmonik dönüşüm teorisine genel bakış ve genel özellikleri, harmonik fonksiyonların kritik noktaları, Lewy teoremi, Heinz lemması, Rado teoremi, yüksek boyutlarda karşı örnekler, yaklaşım teoremi, katsayı tahminleri, harmonik fonksiyonlar için Schwarz lemması, harmonik yalınkat fonksiyonlar, normalleştirme, normal aileler ve harmonik Koebe fonksiyonu verilmektedir.

BÖLÜM 1
ANALİTİK FONKSİYONLAR

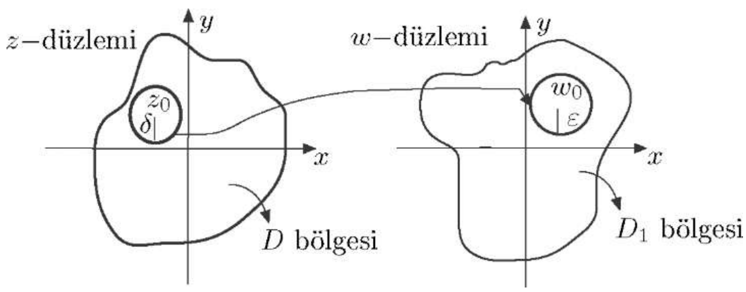
1.1 Limit ve süreklilik

$w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesinde tanımlanmış olsun. Bu fonksiyon basit bağlantılı D bölgesini w-düzleminde basit bağlantılı bir D_1 bölgesine resmetsin. $z_0 \in D$ için $z \to z_0$ olduğunda $w = f(z)$ fonksiyonunun limiti şu şekilde tanımlanır: $\varepsilon > 0$ sayısına $|z - z_0| < \delta$ olduğu müddetçe $|f(z) - L| < \varepsilon$ eşitsizliği daima gerçekleşecek şekilde $\delta > 0$ sayısı karşılık getirilebilirse $f(z)$ fonksiyonunun limiti L dir denir ve $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ şeklinde yazılır.

Geometrik (topolojik) şekilde anlamı: z_0 noktasının resmi $w_0 = f(z_0)$ olduğu kabul edildiğinde

$$|f(z) - L| < \varepsilon \Rightarrow |w - L| < \varepsilon \Rightarrow |w_0 - L| < \varepsilon$$

oldukları gözönüne alınırsa



Şekil 1.1

limitin geometrik anlamı z-düzlemindeki bir D bölgesinde z_0 merkezli δ yarıçaplı bir açık civarı w-düzleminde D_1 bölgesinde w_0 merkezli ε yarıçaplı bir açık civarına karşılık getirilebilmesidir.

1.2 Limit Teoremleri

Teorem 1.2.1 $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış ve $z_0 \in D$ olmak üzere $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L_1$, $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = L_2$ limitleri var olsum. Bu halde

(i) $\lim\limits_{z \to z_0} \left(f(z) + g(z) \right) = L_1 + L_2$

(ii) $\lim\limits_{z \to z_0} \left(f(z) - g(z) \right) = L_1 - L_2$

(iii) $\lim\limits_{z \to z_0} \left(f(z).g(z) \right) = L_1.L_2$

(iv) $\lim\limits_{z \to z_0} \left(\dfrac{f(z)}{g(z)} \right) = \dfrac{L_1}{L_2}, \left(g(z) \neq 0, L_2 \neq 0 \right)$

(v) $\lim\limits_{z \to z_0} \left(\dfrac{1}{f(z)} \right) = \dfrac{1}{L_1}, \left(f(z) \neq 0, L_1 \neq 0 \right)$ şeklindedir.

1.3 Düzgün süreklilik

$w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı, kapalı, sınırlı bir D bölgesinde tanımlanmış iki reel değişkenli, tek değerli bir fonksiyon olsun. O halde f fonksiyonu tanımlandığı bu bölgede **düzgün süreklidir,** yani; süreklilik tanımındaki δ sayısı bölge içindeki z_0 noktalarından bağımsızdır.

1.4 Diferansiyellenebilme ve kompleks türev

$w = f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin basit bağlantılı bir D bölgesinde tanımlanmış, sürekli, tek değişkenli bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \left(\Delta z = \Delta x + i \Delta y \right)$$

limiti varsa, bu limit değerine f fonksiyonun **türevi** adı verilir ve

$$f'(z)=\frac{df}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)}{h}$$

ile ifade edilir. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu z noktasında **diferansiyellenebilirdir** denir.

1.5 Türev üzerine temel teoremler:

$f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları aynı basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış, türevlenebilir olsunlar. Bu halde;

(i) $\left(f(z)\pm g(z)\right)'=f'(z)\pm g'(z)$

(ii) $\left(f(z)g(z)\right)'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$,

(iii) $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{\left(g(z)\right)^2}$, $\left(g(z)\neq 0\right)$.

1.6 Zincir Kuralı

Kompleks bileşke fonksiyonların diferansiyellebilmesi için zincir kuralı mevcuttur. f fonksiyonunun z_0 noktasında ve g nin $f(z_0)$ noktasında türeve sahip olduğu kabul edilsin. Bu halde $F(z)=g(f(z))$ fonksiyonu da

$$F'(z_0)=g'(f(z_0))f'(z_0)$$

şeklinde türeve sahiptir.

$W=F(z)$ olmak üzere, $w=f(z)$ ve $W=g(w)$ yazılırsa, zincir kuralı

$$\frac{dW}{dz}=\frac{dW}{dw}.\frac{dw}{dz}$$

biçiminde ifade edilir.

1.7 Bir açık cümle üzerindeki analitik fonksiyonlar

z kompleks değişkenli bir f fonksiyonu açık bir cümle üzerindeki her noktada bir türeve sahipse, fonksiyona **analitiktir** denir.

Bir f fonksiyonu açık olmayan bir S cümlesinde analitik ise, S yi içeren bir açık cümlede analitiktir. Özel olarak, f fonksiyonu bir z_0 noktasının bir komşuluğunda analitik ise, z_0 noktasında analitiktir. Örneğin; $f(z)=1/z$ fonksiyonu sonlu düzlemde sıfırdan farklı her noktada analitiktir. Fakat $f(z)=|z|^2$ fonksiyonu türevi olan yalnızca $z=0$ noktası dışında, bu noktanın her komşuluğunda da analitik olmadığından analitik değildir.

Sonlu bir bölgenin her noktasında analitik bir fonksiyon tam bir fonksiyondur. Bir polinomun her yerde türevi olduğundan, her polinom bir tam fonksiyondur.

Bir f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik olmasın, fakat z_0 ın her komşuluğundaki noktalarda analitik ise z_0 a **singüler nokta** veya f **nin singülaritesi** denir. Örneğin $f(z)=1/z$ fonksiyonunun $z=0$ noktası bir singüler noktasıdır. $f(z)=|z|^2$ fonksiyonu analitik olmadığından singüler noktası yoktur.

Öte yandan iki fonksiyonun toplamı ve çarpımlarının türevleri, türevi olan yerlerde vardır. İki fonksiyon bir D bölgesinde analitik ise, toplamları ve çarpımları da D bölgesinde analitiktir. Benzer şekilde bölümleri, paydanın sıfırdan farklı olduğu noktada analitiktir.

Zincir kuralından da bir bileşke fonkisyonunun türevi için, iki analitik fonksiyonun bileşkesinin analitik olduğunu bulabiliriz.

Teorem 1.7.1 : Bir D bölgesinin her yerinde $f'(z)=0$ ise $f(z)$ D bölgesinde sabittir.

İspat: Teoremin ispatı sayfa 10 da verilecektir.

1.8 Cauchy- Riemann Denklemleri

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesinde tanımlanmış bir fonksiyon; $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonları da birinci mertebeden kısmi türevleri var olan, sürekli fonksiyonlar olsun. Bu halde $f(z)$ nin D bölgesinde analitik olması için gerek ve yeter şart D bölgesinin bütün noktalarında

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

denklemlerini gerçeklemesidir. Verilen denklem takımına **Cauchy-Riemann Denklemleri** adı verilmektedir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $f(z)$, D bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun, yani türevlenebilen bir fonksiyondur. Bu halde türev tanımından ;

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$\Delta z\to 0$ için $\Delta x\to 0$ ve $\Delta y\to 0$ olmalıdır.

1.Durum: $\Delta y=0,\Delta x\to 0$ için

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

2.Durum: $\Delta x=0,\Delta y\to 0$ için

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)+iv(x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{i\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y}$$

$$=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

$f(z)$ fonksiyonun türevinin tekliğinden de

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

eşitlikleri gerçeklenir.

$(\Leftarrow)$ $f(z)$ fonksiyonu Cauchy-Riemann Denklemleri'ni gerçekleyen bir fonksiyon olsun. O halde ortalama değer teoremini kullanarak;

$$\begin{aligned}
\Delta u &= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) \\
&= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) + u(x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y) \\
&= \left[u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y)\right] + \left[u(x, y+\Delta y) - u(x,y)\right] \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon_1\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon_2\right)\Delta y = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.Benzer şekilde ;

$$\begin{aligned}
\Delta v &= v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) \\
&= v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) + v(x, y+\Delta y) - v(x, y+\Delta y) \\
&= \left[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y+\Delta y)\right] + \left[v(x, y+\Delta y) - v(x,y)\right] \\
&= \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \mu_1\right)\Delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu_2\right)\Delta y = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \mu_1 \Delta x + \mu_2 \Delta y
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Ayrıca $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\mu_1$, $\mu = \varepsilon_2 + i\mu_2$ yazalım. Bu halde

$$\begin{aligned}
\Delta w = \Delta u + i\Delta v &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + \varepsilon\Delta x + \mu\Delta y \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + \varepsilon\Delta x + \mu\Delta y \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(\Delta x + i\Delta y) + \varepsilon\Delta x + \mu\Delta y \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(\Delta x + i\Delta y) + \varepsilon\Delta x + \mu\Delta y \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + \varepsilon\Delta x + \mu\Delta y
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanı $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ile bölünüp $\Delta z \to 0$ $(\Delta x \to 0, \Delta y \to 0)$ için limit alınırsa ($\Delta z \to 0$ için $\varepsilon \to 0$ ve $\mu \to 0$) ;

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

elde edilir. Bu da $w=f(z)$ fonksiyonunun türevinin mevcut ve tek olduğunu yani analitik olduğunu gösterir.

1.9 Kompleks diferansiyel operatörler

$$\Delta=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}=2\frac{\partial}{\partial z}(del) \text{ ve } \overline{\Delta}=\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}=2\frac{\partial}{\partial z}(delbar)$$

ifadelerine **kompleks diferansiyel operatörler** adı verilmektedir.

Gradyant : $F(x,y)$ fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesinde tanımlanmış, sürekli ve sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun. Bu halde ;

$$gradF=\Delta F=\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)F=\frac{\partial F}{\partial x}+i\frac{\partial F}{\partial y}$$

eşitliğine $F(x,y)$ **fonksiyonunun gradyantı** denir.

Geometrik olarak ; $F(x,y)=c$ fonksiyonu düzlemde bir eğri gösteriyorsa, $gradF$, (x,y) noktasında bu eğriye çizilen normalin doğrultusunu vermektedir. $A(x,y)=P(x,y)+iQ(x,y)$ kompleks fonksiyonunun gradyantı ise;

$$gradA=\nabla A=\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P+iQ)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

şeklindedir.

Diverjans : $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ fonksiyonları basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış, sürekli ve sürekli kısmı türevlere sahip fonksiyonlar olsun. Bu halde $A(x,y)=P(x,y)+iQ(x,y)$ şeklinde kompleks fonksiyonun diverjansı;

$$divA=\operatorname{Re}\left(\overline{\Delta}A\right)=\operatorname{Re}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P+iQ)\right]=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$$

şeklindedir.

Rotasyonel : $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ fonksiyonları basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış, sürekli ve sürekli kısmı türevlere sahip fonksiyonlar olsun. Bu halde $A(x,y)=P(x,y)+iQ(x,y)$ şeklinde kompleks fonksiyonun rotasyoneli;

$$rotA = \operatorname{Im}\left(\overline{\Delta}A\right) = \operatorname{Im}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(P + iQ\right)\right] = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

şeklindedir.

1.10 Kompleks diferansiyel operatörlerin bazı özellikleri

A_1, A_2, A, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, ve Q_3 differansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

(1) $grad\left(A_1 + A_2\right) = gradA_1 + gradA_2$

(2) $div\left(A_1 + A_2\right) = divA_1 + divA_2$

(3) $rot\left(A_1 + A_2\right) = rotA_1 + rotA_2$

(4) $grad\left(A_1 A_2\right) = A_2 gradA_1 + A_1 gradA_2$

(5) $A\left(x, y\right)$ fonksiyonu reel ise $rot\left(gradA\right) = 0$ dır.

(6) $rot\left(gradA\right) = 0$ ise $\operatorname{Im} A$ fonksiyonu harmoniktir.

(7) $A\left(x, y\right)$ fonksiyonu sadece sanal kısımdan oluşuyorsa $div\left(gradA\right) = 0$ dır.

(8) $div\left(gradA\right) = 0$ ise $\operatorname{Re} A$ fonksiyonu harmoniktir.

Şimdi teorem 1.7.1 in ispatını vermek uygun olacaktır.

İspat : İspatı yapmak için

$$f\left(z\right) = u\left(x, y\right) + iv\left(x, y\right)$$

yazarız. $f'\left(z\right) = 0$ farzedilirse $u_x + iv_x = 0$, bu eşitlik için Cauchy-Riemann Denklemleri kullanılırsa $v_y - iu_y = 0$ dır. Sonuç olarak; D nin her noktasında $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ dır. u_x ve u_y; $gradu$ vektörünün x ve y bileşenleri, u nun bu doğrultudaki doğrultu türevleridir. u_x ve u_y nin daima sıfır olması $gradu$ nun sıfır olması demektir, böylece u nun her doğrultu türevi sıfırdır. Sonuçta, u, D içinde uzanan doğru parçası boyunca sabittir ve D içindeki herhangi iki noktayı birleştiren ucuca eklenmiş sonlu sayıda doğru parçası olduğundan, bu noktaların değerleri aynı olmak zorundadır. O halde D de $u\left(x, y\right) = a$ olacak şekilde a reel sabiti vardır.

Benzer şekilde $v(x,y)=b$ elde edilebilir, bunun ardından D içinde her noktada $f(z)=a+ib$ elde edilir.

1.11 Ters tasvirler

Bildiğimiz üzere birçok elamanter fonksiyonun tersi de analitik olmaktadadır. Örneğin ; $w=e^z$ fonksiyonunun tersi; $z=re^{i\theta}$ olmak üzere

$$z=\log w=\log r+i\theta$$

fonksiyonudur ve θ nın bölgesi $w=0$ noktasını içermeyen herhangi basit bağlantılı bir bölgede, bu fonksiyonu tek değerli ve analitik yapacak şekilde belirlenebilir. Üstelik

$$\frac{dz}{dw}=\frac{1}{w}=\frac{1}{e^z}=\frac{1}{dw/dz} \text{ dir.}$$

Şimdi ise analitik fonksiyonların terslerine karşılık gelen özellikleri göz önüne almak gerekecektir.

Teorem 1.11.1 $f'(z_0)\neq 0$ olacak şekilde bir $z=z_0$ noktasında analitik olan bir f fonksiyonu olsun ve $f(z_0)=w_0$ olsun. O halde $w=f(z)$ fonksiyonunun w-düzlemi içinde bir w_0 komşuluğu vardır, öyle ki bu w_0 komşuluğunda $z=F(w)$ tek değerli, analitik $F(w_0)=z_0$ ve $w=f(F(w))$ olacak şekilde tek bir F ters fonksiyonu vardır. Ayrıca;

$$F'(w)=\frac{1}{f'(z)} \text{ dir.}$$

İspat: $w=f(z)$ eşitliği $u=u(x,y)$ ve $v=v(x,y)$ biçiminde yazılabilir. $z_0=x_0+iy_0$ noktasında w analitik olduğu için bu noktanın komşuluğunda da analitiktir. Bu komşulukta u ve v fonksiyonlarıyla bunların kısmi türevleride süreklidirler.

u ve v fonksiyonlarıyla bunların kısmi türevlerinin sürekli olması koşuluna ek bir koşul da u ve v fonksiyonlarına ait

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

jakobiyeninin (x_0, y_0) noktasında sıfırdan farklı olmasıdır ki koşul altında, birlikte sağlanan $u = u(x,y)$ ve $v = v(x,y)$ denklemlerinde x ve y nin u ve v nin sürekli fonksiyonları olarak çözümü tektir. Cauchy-Riemann koşullarının ışığında, bu determinantın değeri

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2$$

olarak yazılabilir ve varsayım gereğince z_0 noktasında sıfırdan farklıdır. Gerçekten; z_0 da f analitik olup $f'(z_0) \neq 0$ olduğundan z_0 noktasının, f' nün hiçbir sıfır yerini kapsamayan bir komşuluğu vardır. O halde; $w_0 = u_0 + iv_0$ noktasının $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ fonksiyonları $u = u(x,y)$ ve $v = v(x,y)$ eşitliklerini sağlayacak ve $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$ olacak şekilde bir komşuluğunda $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ sürekli fonksiyon çiftinden bir ve yalnız bir tane vardır. F sürekli bir fonksiyon olmak üzere $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ eşitlikleri kompleks biçimde $z = F(w)$ olarak yazılabilir. Bunun türevinin var olduğunu göstermek için

$$\frac{\Delta z}{\Delta w} = \frac{1}{\Delta w / \Delta z}$$

yazarız. w, z nin analitik bir fonksiyonu olduğundan, Δw sıfıra yaklaşırken Δz de sıfıra yaklaşır ve karşıtı da doğrudur. Böylece;

$$\frac{dz}{dw} = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta w / \Delta z} = \frac{1}{dw/dz}$$

yazılır. $F'(w)$, w_0 ın bir komşuluğunda var olduğundan, F fonksiyonu burada analitiktir.

Kullandığımız elamanter fonksiyonların terslerine ait türev alma formüllerini bulmak için son eşitlik kullanılabilir. $w = e^z$ fonksiyonu kullanılarak; $z = 0$ ise $w_0 = e^0 = 1$ ve $f'(0) = 1 \neq 0$ dır. Teoreme göre, bu noktalara karşılık gelen bir tek ters fonksiyon vardır. Çok değerli olan

$$z = \log w = \log r + i(\theta + 2k\pi) \quad (r > 0, -\pi < \theta < \pi)$$

fonksiyonunun, e^z fonksiyonunun bir tersi olduğunu biliyoruz. Fakat teoremde ifade edildiği gibi $F(w_0) = z_0$ ise $\log 1 = 0$ dır. $w = 1$ için $\theta = 0$ ve $r = 1$ olduğundan $\log w$ yı veren yukarıdaki formülde $k = 0$ çıkar. O halde burada belirtilen tek ters fonksiyon

$$F(w) = \log r + i\theta \quad (r > 0, -\pi < \theta < \pi)$$

olur.

BÖLÜM 2
YALINKAT FONKSİYONLAR

H , $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ da bir bölge ve f fonksiyonu H da birebir , meromorf ise bu fonksiyona **yalınkat fonksiyon** denir. $f(z)$ fonksiyonunun H da bir yalınkat fonksiyon olması için yalnız ve ancak $f(z)$ fonksiyonunun en çok bir kutbu hariç analitik ve

$$f(z_1) \neq f(z_2) \ (z_1 ,\ z_2 \in H ,\ z_1 \neq z_2)$$

olmasına bağlıdır. Ayrıca $f(z)$, H da yalınkat ise H ın her alt bölgesinde yalınkattır. En basit örnek Moebius dönüşümleri

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \ (a,b,c,d \in \mathbb{C} ,\ ad-bc \neq 0) \text{ dir.}$$

2.1 Yalınkat Fonksiyonların Bazı Temel Özellikleri

$f(z)$ fonksiyonu H da yalınkat olsun.

1) g , G de yalınkat ve $f(H) = \{f(z) : z \in H\} \subset G$ ise o zaman $g(f(z))$ bileşkesi H da yalınkattır. $\dfrac{1}{f(z)}$ yalınkat olması için yalnız ve ancak $f(z)$ fonksiyonu yalınkat olmasıdır.

2) Bir analitik fonksiyonun bir nokta komşuluğunda birebir olması için yalnız ve ancak türevinin bu noktada sıfır olmamasıdır (Ahlfors, 1973 s.131). Yani $z \in H$ için $f'(z) \neq 0$ dır. Bunun aksi geçerli değildir; örneğin $\exp(2\pi z)$ fonksiyonu $|z| < 1$ de yalınkat değildir. $f(z)$, z_0 da bir kutbu varsa $\dfrac{1}{f(z)}$ analitik ve z_0 yöresinde

yalınkattır ve bu nedenle z_0 noktasında türevi sıfırdan farklıdır. z_0 basit bir kutup olmak zorundadır.

3) Fonksiyon, küresel metrikte sürekli ve $H \subset \hat{\mathbb{C}}$ yi $f(H) \subset \hat{\mathbb{C}}$ üzerine birebir dönüştürür. Fonksiyonun tersi de meromorf olduğundan dolayı f, H ın $f(H)$ üzerine bir homomorfizmadır. Bu nedenle tüm topolojik değişmezler, yalınkat dönüşümler altında korunur. Aşağıdaki topolojik olaylarda sık sık kullanılır: $z_k \in H$ olmak üzere (z_k) dizisi ∂H a yakınsarsa (O, H da limit noktalarına sahip değildir.) $(f(z_k))$ görüntü dizisi de $\partial f(H)$ a yakınsar. (Ahlfors, 1973 s.225)

4) Eğer $C:\ z(t), \alpha \le t \le \beta$ Jordan eğrisi H da düzgün ise ($z'(t) \ne 0$ ve sürekli) $f(C):\ f(z(t)), \alpha \le t \le \beta$ $f(H)$ da bir düzgün Jordan eğrisidir. Açık değişikliklerle $z_0 = \infty$ veya $f(z_0) = \infty$ pozitif reel eksen ve $f(z_0)$ ise ($z_0 = z(t_0)$) noktasında $f(C)$ ye teğet doğrusu arasındaki açı $\arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)$ ile verilir. z_0 dan geçen iki eğri arasındaki açı, görüntü eğrileri arasındaki açı ile aynıdır. Böylece bir yalınkat dönüşüm, bir konform homomorfizmadır.

5) f in kutbunu içermeyen H ın bir kompakt alt kümesi $A \subset \mathbb{C}$, olsun. O zaman görüntünün alanı, $d\Omega$ alan elemanı olmak üzere

$$Alan f(A) = \iint_A |f'(z)|^2 \, d\Omega \text{ dır.}$$

Bu bir Lebesgue integralidir; A Jordan ölçülebilir ise aynısı, $f(A)$ için de doğrudur ve integral bir Riemann integrali olur. Bundan sonra basit bağlantılı bölgeler üzerinde çalışacağız (Ahlfors, 1973 s.139). Birim daire ve birim çemberin dışı için sırasıyla

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \text{ ve } \Delta = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z| > 1\}$$

gösterimlerini ortaya koyarız. ∂, sınır sembolü olmak üzere birim çemberi $\{|z| = 1\}$, ∂D veya $\partial\Delta$ ile göstereceğiz. Tüm konunun başlangıç noktası olan aşağıdaki teoremi inceleyelim:

2.2 Riemann Dönüşüm Teoremi :

$G \underset{\neq}{\subset} \mathbb{C}$ bir basit bağlantılı bölge ve $w_0 \in G$ $\;0 \leq \alpha < 2\pi$ olsun. O zaman D bölgesini G üzerine dönüştüren ve $f(0) = w_0$, $\arg f'(0) = \alpha$ sağlayan bir tek $f(z)$ yalınkat fonksiyon vardır.

Riemann Dönüşüm teoremi, uygun bir şekilde normalleştirilmiş yalınkat fonksiyonlarda **- analitik objeler -** ile basit bağlantılı bölgeler **- geometrik objeler -** birbirinin yerini tutar. $|f'(0)|$ için mümkün olmadığını gerçekleyebiliriz.

Şimdi teoremin tekliği kısmının bir uygulamasını verelim:
$f(z) = a_1 z + ...(a_1 \in \mathbb{R})$ D bölgesinde yalınkat ve $f(D)$ reel eksene göre simetrik olsun.

$$\bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})} = a_1 z + \bar{a}_2 z^2 + \ldots$$

$\bar{f}(D) = f(D)$ den dolayı $\bar{f}(z) \equiv f(z)$ sonucuna varırız. Bundan dolayı a_n katsayıları reeldir.

Yansıma ilkesi (Alfors, 1973 s.227) ∂G bir analitik Jordan eğrisi tarafından sınırlandırılırsa, dönüşüm $\bar{D}$ de analitik olur.

D birim dairesinde yalınkat ve analitik olan

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \quad (|z| < 1)$$

fonksiyonlarının sınıfı S olsun. $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ ile normalize ederiz. Riemann Dönüşüm teoreminin fonksiyonu, S ye ait olması gerekmez fakat $r = r_0(G, w_0)$, w_0 noktasına göre G bölgesinin '' **iç dönüşüm yarıçapı** " (tek olarak belirtilen) olduğu zaman,

$$w_0 + r_0 e^{i\alpha} f(z), \; f \in S$$

olarak yazabiliriz.

Normalleştirmenin sebebi gereksiz parametreleri gidererek sonuçların açıklamasını kolaylaştırmaktır. Ayrıca, S uzayı kompakt olmasına rağmen D deki tüm yalınkat ve analitik fonksiyonların uzayı için bu doğru değildir.

Örnek 2.2.1 : $f_0(z)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-1\right]$ olarak da yazılabileceğimiz

$$f_0(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^n \quad (|z|<1)$$

Koebe fonksiyonunu göz önüne alalım.

$\frac{1+z}{1-z}$, D bölgesini $\{\operatorname{Re} w>0\}$ yarı-düzlem üzerine yalınkat olarak dönüştürür.

$f_0(z)\in S$ ve $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$ aralığı boyunca kesik düzlemdir.

$$e^{i\beta}f_0\left(e^{i\beta}z\right)=\frac{z}{\left(1-e^{i\beta}z\right)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{i(n-1)\beta}z^n$$

fonksiyonları S ye ait olup Koebe fonksiyonlarının rotasyonları olarak adlandırılırlar. Bir çok açıdan Koebe fonksiyonu S deki en geniş fonksiyondur. $\infty\in G$ olmak üzere $G\subset\hat{\mathbb{C}}$ basit bağlantılı bölgesine $G=\hat{\mathbb{C}}\setminus\{a\}$ durumu hariç, birden fazla nokta içeren bağlantılı kompakt küme $E=\hat{\mathbb{C}}\setminus G$ süreklidir. $w^*=\frac{1}{w-c}$ $(c\in E)$ dönüşümü, G bölgesini $G^*\underset{\neq}{\subset}\mathbb{C}$ bölgesi içine dönüştürür. Öyle ki Riemann Dönüşüm teoremini uygulayabiliriz. ∞ sabit kaldığında $D=\{|z|<1\}$ yerine standart bölge olan $\Delta=\{|z|>1\}$ yı alırız ve Δ yı, G üzerine yalınkat olarak dönüştüren tek bir

$$g(z)=bz+b_0+b_1z^{-1}+\ldots \quad (|z|>1, b>0) \qquad \textbf{(1)}$$

fonksiyonu vardır. Bu Δ da yalınkat olan

$$g(z)=z+b_0+b_1z^{-1}+\ldots \quad (|z|>1) \qquad \textbf{(2)}$$

fonksiyonların sınıfını Σ ile gösterelim. Başka bir deyişle $g(z)$ de $b=1$ normalleştirmesi yaptık. Görüntü bölgesinin tümleyenini

$$E=E(g)=\mathbb{C}\setminus g(\Delta)$$

ile gösterelim. $f(z)=z+a_2z^2+\ldots\in S$ ise o zaman

$$g(z)=\frac{1}{f\left(z^{-1}\right)}=\frac{z}{1+a_2z^{-1}+\ldots}=z-a_2+\ldots\in\Sigma \quad (|z|>1) \text{ dır.}$$

$|z|>1$ ve $g(z)\neq 0$ dır. Çünkü S deki bir fonksiyonun kutbu yoktur. Tersine olarak $g\in\Sigma$ ve $c\in E(g)$ ise o zaman

$$f(z)=\frac{1}{g\left(z^{-1}\right)-c}=\frac{z}{1+\left(b_0-c\right)z+\ldots}=z+\left(c-b_0\right)z^2+\ldots\quad\left(|z|<1\right)$$

fonksiyonu S ye aittir. c yi tümleyeninde seçmek zorundayız. Çünkü aksi takdirde c, $f(z)$ in bir kutbu olur. Σ sınıfı, S den daha genel olup ∞ değeri, $f\in S$ için her zaman ihmal edilir. Diğer türlü $g\in\Sigma$ için kaldırılan değerler hakkında varsayım yapılamaz.

$g\in\Sigma$ nın $g(z)=z+b_0+b_1z^{-1}+\ldots\;\left(|z|>1\right)$ açılımında b_0 katsayısı $E(g)$ nin **konform merkezi** olarak yazılır.

$$b_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g\left(re^{i\vartheta}\right)d\vartheta\quad\left(r>1\right)$$

den dolayı **(3)** b_0 ın $E(g)$ nin konveks gövdesine ait olduğu kolayca bulunur. Görüntü bölgesinin dönüşümü altında değişmez kalan problemler için özellikle $b_0=0$ normalleştirilmesini sık sık yapmak daha uygundur.

$$g(z)=z+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}\ldots\left(|z|>1\right)$$

formundaki yalınkat fonksiyonlar sınıfını Σ_0 ile tanımlayalım. $z\in\Delta$ için $g(z)\neq 0$ olduğu, $g(z)$ fonksiyonu için sağlanmadığı vurgulanmalıdır.

$w\notin C$ noktasına göre kapalı parçalı düzgün C eğrisinin dolanım sayısı (veya indisi)

$$\chi(C,w)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{\omega-w}d\omega\quad\textbf{(4)}$$

ile tanımlanmıştır. Dolanım sayısı, $\mathbb{C}\setminus C$ nin her bileşeninde sabit ve sınırsız elemanında sıfır olur. (Ahlfors, 1973 s.116)

Lemma 2.2.1: $f(z)$, $\overline{D}$ da analitik ve ∂D de içine fonksiyon olsun. O zaman $f(z)$, D bölgesinde yalınkat ve D bölgesini $J=f(\partial D)$ Jordan (kapalı) eğrisinin iç bölgesi üzerine dönüştürür.

İspat: $w\notin J$ ise o zaman, argüman prensibiyle (Ahlfors, 1973 s.151), $f(z)-w$ nin sıfırlarının sayısı $\chi(J,w)$ ile verilir ve J, parçalı düzgün Jordan eğrisi ise o zaman J nin iç bölgesinde $\chi(J,w)=\pm 1$ ve dış bölgesinde $\chi(J,w)=0$ dır. Buradan $f(z)$, D bölgesinin iç bölgesinde değeri yoktur ve iç bölgenin her bir değeri tam olarak bir kere varsayılır. $f(D)$, açık olduğundan J üzerinde değer almadığı varsayılır.

Teorem 2.2.2: $g(z)=z+b_0+b_1z^{-1}+\dots$ fonksiyonu $1<|z|<\infty$ de analitik olsun. $|z|\to 1$ iken $g(z)$ in bütün limit noktalarda A kümesi sınırlı, iç noktaları yoksa, $\mathbb{C}$ bağlantısız değil ise, o zaman $g\in\Sigma$ ve $g(\Delta)=\hat{\mathbb{C}}\setminus A$ dır.

Bu açıklama belki A ,$\mathbb{C}$ ile bağlantısız değilse varsayımı "üst üste gelme" hariç varsayımıdır.

İspat: Δ da $g(z)-w$ nin sıfırlarının sayısı $n(w)$ olmak üzere, $w\notin A$ için $n(w)=1$ ve $w\in A$ için $n(w)=0$ olduğunu göstermeliyiz.

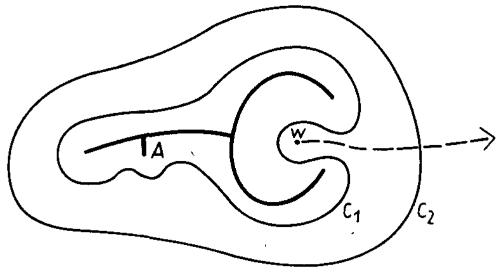
Önce $w\notin A$ olsun. A yı kesmeyen w den ∞ a bir B eğrisi vardır. Çünkü A sınırlı ve $\mathbb{C}$ bağlantısız değildir. (Şekil 2.1) $1<r_1<r_2<\infty$ ve $C_j : g(r_je^{it})$, $0\le t\le 2\pi$ $(j=1,2)$ olsun. A nın tanımı ile $g(z)\notin B$ olan çok küçük r_1 seçebiliriz. Buradan $1<|z|\le r_1$ için $g(z)\ne w$ olur. Böylece w , $\mathbb{C}\setminus C_1$ in sınırsız bileşeninde yer alır. Öyle ki $\chi(C_1,w)=0$ olur. r_2 yi $|z|\ge r_2$ için $g(z)\ne w$ olacak şekilde seçersek o zaman $n(w)$ $\{r_1<|z|<r_2\}$ de $g(z)-w$ nin sıfırlarının sayısına eşittir. $g(z)$, $1<|z|<\infty$ da analitik olduğundan dolayı o zaman rezidü teoremi uygulandığında ve yerine konulduğunda

$$n(w)=\chi(C_2,w)-\chi(C_1,w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{d\omega}{\omega-w}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_2}\frac{f'(z)}{f(z)-w}dz=1$$

olduğu argüman prensibinden elde edilir.

Şimdi $n(w_0)\ne 0$ olmak üzere $w_0\in A$ olduğunu varsayalım. O zaman $g(z_0)=w_0$ olmak üzere $z_0\in\Delta$ olur. $r_0>1$ olmak üzere $R=\{1<|z|<r_0\}$, D_0 ile kesişmeyen z_0 etrafında küçük D_0 dairesi alalım. O zaman $g(R)\cap g(D_0)\subset A$ dır. Çünkü diğer türlü R ve D_0 ın her ikisinde de olan bir $w\notin A$ noktası olmaktadır. Teoremin ilk kısmı ile çelişir. Böylece A nın $g(R)\cap g(D_0)$ açık kümesinin iç

noktası yoktur ve boştur. Fakat bu mümkün değildir. Çünkü $w_0 \in g(D_0)$ ve $w_0 \in A \subset \overline{g(R)}$ dir.



Şekil 2.1

Örnek 2.2.3: $g(z) = z + b_0 + e^{2i\beta} z^{-1}$ olsun. $g\left(e^{i\vartheta}\right) = b_0 + 2e^{i\beta} \cos(\vartheta - \beta)$ olduğundan dolayı $\{g(z) : |z| = 1\}$ nin, $\left[b_0 - 2e^{i\beta}, b_0 + 2e^{i\beta}\right]$ aralığında olduğunu görürüz. Bundan dolayı Teorem 2.2.2, $g \in \Sigma$ ve $E(g)$ nin bu aralıkta olduğunu gösterir.

Örnek 2.2.4: $\rho = \dfrac{1}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} > 1$ ve $0 < \alpha < \pi$ olsun. O zaman $1 \le |z| < \infty$ da

$$g(z) = \rho z \frac{z + \rho}{\rho z + 1} = z + \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) + \ldots \qquad \textbf{(5)}$$

analitiktir. $g\left(e^{i\vartheta}\right) = \rho \exp\left[2i \arg\left(e^{i\vartheta} + \rho\right)\right]$ bulunur. Geometrik hususlar $\dfrac{-\pi + \alpha}{2} \le \vartheta \le \dfrac{\pi + \alpha}{2}$ olmak üzere $\dfrac{-\alpha}{2}$ den $\dfrac{\alpha}{2}$ ye $\arg\left(e^{i\vartheta} + \rho\right)$ artan ve o zaman tümleyen aralığında $\dfrac{\alpha}{2}$ den $\dfrac{-\alpha}{2}$ ye tekrar azalan olduğunu gösterir. Buradan Teorem 2.2.2 gösterir ki $g(z)$, Σ a aittir ve Δ yı

$$\{g(z) : |z| = 1\} = \left\{\rho e^{it} : -\alpha \le t \le \alpha\right\} \qquad \textbf{(6)}$$

dairesel yayı boyunca kesik düzlem üzerine dönüşür.

$$g(z) = \rho z \frac{z + \rho}{\rho z + 1} = z + \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) + \ldots$$

ile $g(z) - \left(\rho - \rho^{-1}\right) \in \Sigma_0$ fakat 0 değeri ihmal edilemez.

Örnek 2.2.5: $f(z) = \dfrac{z}{1 - 2z\cos\alpha + z^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} z^n \quad (0 < \alpha < \pi)$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Örnek 2.2.3 den $\dfrac{1}{f\left(z^{-1}\right)} = z - 2\cos\alpha + z^{-1} \in \Sigma$ dır ve

$|z| > 1$ için $\dfrac{1}{f\left(z^{-1}\right)} \neq 0$ dır. Buradan $f \in S$ ve

$$\mathbb{C} \setminus f(D) = \left(-\infty, -\frac{1}{4\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right] \cup \left[\frac{1}{4\sin^2 \frac{\alpha}{2}}, +\infty \right) \text{ dir.}$$

2.3 Green Analitik Formülü :

C parçalı düzgün eğrisi $H \subset \mathbb{C}$ bölgesi ile ilgili sıfıra eş değer olsun. $h(w)$, H da analitikse o zaman

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \overline{h(w)} h'(w)\, dw = \frac{1}{\pi} \iint_H \chi(C, w) \left| h'(w) \right|^2 d\Omega \quad \textbf{(7)}$$

olur. C nin sıfıra eşdeğer olması varsayımının anlamı ∂H ın bazı komşuluğunda dolanım sayısı, $w \notin H$ için $\chi(C, w) = 0$ demektir. H ı biraz değiştirerek $h(w)$ nin $\overline{H}$ da analitik olduğunu bu nedenle varsayabiliriz. Aslında $\chi(C, w)$ nin, $z \in C$ için tanımsız olması önemli değildir. Çünkü C parçalı düzgündür ve böylece alanı sıfırdır.

İspat: **(7)** nin sağ tarafını yazabiliriz.

$$\frac{1}{\pi} \iint_H \left| h'(w) \right|^2 \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - w} \right) d_w \Omega = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{1}{\pi} \iint_H \frac{\left| h'(w) \right|^2}{z - w} d_w \Omega \right) dz \quad \textbf{(8)}$$

$D_0 = \left\{ \left| z - z_0 \right| < r \right\}$ $\overline{D_0} \subset H$ ile herhangi bir daire ise o zaman $z \in D_0$ için ,

$$\iint_H \frac{\left| h'(w) \right|^2}{z - w} d\Omega = \iint_{H \setminus D_0} \frac{\left| h'(w) \right|^2}{z - w} d\Omega - \iint_{D_0} \overline{h'(w)} \frac{h'(w) - h'(z)}{w - z} d\Omega + h'(z) \iint_{D_0} \frac{\overline{h'(w)}}{z - w} d\Omega \quad \textbf{(9)}$$

olur. Cauchy integral formülü ve integral teoremini kullanarak son integralin eşleniğinin

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{h'\left(z_0 + \rho e^{i\vartheta}\right)}{\overline{z} - \overline{z}_0 - \rho e^{-i\vartheta}} \rho\, d\rho\, d\vartheta = 2\pi \int_0^{|z - z_0|} \frac{\rho}{\overline{z} - \overline{z}_0} h'\left(z_0 + \frac{\rho^2}{\overline{z} - \overline{z}_0} \right) d\rho = \pi\left(h(z) - h(z_0) \right)$$

e eşit olduğunu gösterebiliriz. **(9)** daki ikinci ve üçüncü integraller $z \in D_0$ da analitiklerdir.

$$\frac{1}{\pi}\iint_H \frac{\left|h'(w)\right|^2}{z-w}d\Omega - \overline{h(z)}h'(z) \quad \textbf{(10)}$$

fonksiyonu D_0 da analitik ve dolasıyla H da analitiktir çünkü D_0 keyfi idi. Buradan **(8)** ve Cauchy integral teoreminden **(7)** bulunur (Ahlfors, 1973 s.145).

Jordan Eğri Teoremini kullanarak şu sonuca varırız:

Sonuç 2.3.1: $g \in \Sigma$ olsun. $H(r)$, $C(r): g\left(re^{i\vartheta}\right)$ $0 \le \vartheta \le 2\pi$ nin iç bölgesi olsun. $h(w)$ bir $r_0 > 1$ için $H(r_0)$ da analitik ise o zaman

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(r)} \overline{h(w)}h'(w)\,dw = \frac{1}{\pi}\iint_{H(r)} \left|h'(w)\right|^2 d\Omega \quad (1 < r < r_0) \quad \textbf{(11)}$$

Gerçekten w, $C(r)$ nin iç bölgesinde ise $\chi\left(C(\rho), w\right)$ süreklidir ve buradan $r \le \rho < \infty$ için sabittir. **(2)** den büyük ρ için $\chi\left(C(\rho), w\right) = 1$ olduğundan dolayı $\chi\left(C(r), w\right) = 1$ elde ederiz. Dış bölgesinde $\chi\left(C(r), w\right) = 0$ olur.

2.4 Klasik Distorsiyon Teoremleri

Yalınkat fonksiyonlar için ilk kesin sonuçların oluşturulduğu teoremler grubudur (Koebe, 1907; Gronwall, 1914/15; Bieberbach, 1916a,b). Σ sınıfında

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \quad (|z| > 1) \quad \textbf{(1)}$$

yi kullanacağız ve görüntü bölgesinin tümleyenini $E = E(g)$ ile göstereceğiz. Bizim varsayımlarımız alan teoremine dayanmaktadır:

Teorem 2.4.1 $g \in \Sigma$ olsun.

$$\text{AlanE} = \pi\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n\left|b_n\right|^2\right) \quad \textbf{(2)}.$$

Alan, E kompakt kümesinin iki boyutlu Lebesgue ölçümüdür.

$$H(r) = \mathbb{C} \setminus \left\{g(z) : |z| \ge r\right\} \quad (r > 1)$$

olsun. Bu küme $C(r): g\left(re^{it}\right),\ 0 \le t \le 2\pi$ analitik Jordan eğrisi ile sınırlıdır.

Buradan E, $H(r)$ artan kümelerinin kesişimidir.

$$AlanE = \lim_{r \to 1} AlanH(r) \quad \textbf{(3)}$$

elde ederiz. Tanım olarak **(3)** alırsak Lebesgue teoresine ihtiyacımız olmaz.

İspat: $h(w) = w$ olmak üzere Analitik Green formülü uygulanarak

$$\frac{1}{\pi} AlanH(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} re^{it} g'\left(re^{it}\right) \overline{g\left(re^{it}\right)} dt$$

elde ederiz. $g(z)$ in, $g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \quad \left(|z| > 1\right)$ açılımını kullanarak **(4)**

$$\frac{1}{\pi} AlanH(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(re^{it} - \sum_{n=1}^{\infty} nb_n r^{-n} e^{-\text{int}} \right) \left(re^{-it} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n} e^{\text{int}} \right) dt = r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n \left|b_n\right|^2 r^{-2n}$$

sonucuna varırız. Düzgün yakınsadığından terim terim integral alabiliriz. Alan negatif olmadığından

$$\sum_{n=1}^{m} n \left|b_n\right|^2 r^{-2n} \le r^2 \ \left(m = 1, 2, \ldots; r > 1\right)$$

bulunur. Önce $r \to 1$ alırsak ve $m \to \infty$ olursa $\sum n \left|b_n\right|^2$ serisi yakınsaktır. Buradan $\sum_{n=1}^{m} n \left|b_n\right|^2 r^{-2n} \le r^2$ de $r \to 1 - 0$ için limit alabiliriz ve **(3)** den **(2)** yi elde ederiz. **(2)** eşitliği $AlanE \le \pi$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan $AlanE \ge 0$ ve bu yüzden

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left|b_n\right|^2 \le 1 \quad \textbf{(5)}$$

dir ve ancak eşitlik hali ancak ve ancak $AlanE = 0$ olduğunda geçerlidir. (Örnek 2.2.3)

Sonuç 2.4.2 $g \in \Sigma$ olsun. $\left|b_1\right| \le 1$ ancak ve ancak

$$g(z) = z + b_0 + e^{2i\beta} z^{-1} \quad \left(b_0 \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{R}\right).$$

Verilen eşitsizlikte eşitliğin geçerli olduğu fonksiyon **extremal fonksiyon** olarak adlandırılmaktadır.

Lemma 2.4.3 $g \in \Sigma$ ve $w \in E$ olsun. O zaman

$$g^*(z) = \sqrt{g\left(z^2\right) - w} = z + \frac{1}{2}\left(b_0 - w\right) z^{-1} + \ldots \ \left(|z| > 1\right) \ (6)$$

Σ da tek fonksiyondur. $f \in S$ ise $\sqrt{f\left(z^2\right)}$ S de bir tek fonksiyondur.

İspat: $z^{-2}\left(g\left(z^2\right)-w\right)$ çift fonksiyonu analitik ve basit bağlantılı Δ bölgesinde sıfırdan farklıdır. Bundan dolayı tek fonksiyon

$$g*(z)=z\left[z^{-2}\left(g\left(z^2\right)-w\right)\right]^{1/2}$$

$$=z\left[1+\left(b_0-w\right)z^{-2}+\ldots\right]^{1/2}$$

$$=z+\ldots \qquad 1<|z|<\infty \text{ da analitiktir.}$$

∞ da $g*(z)=\sqrt{g\left(z^2\right)-w}=z+\dfrac{1}{2}\left(b_0-w\right)z^{-1}+\ldots$ açılımına sahiptir.

$g*\left(z_2\right)=g*\left(z_1\right)$ ise $g\left(z_2^2\right)=g\left(z_1^2\right)$ ve $g(z)$ yalınkat olduğundan $z_2=\pm z_1$ bulunur. $g*\left(-z_1\right)=-g*\left(z_1\right)\neq g*\left(z_1\right)$ olduğundan negatif işaretlisini almıyoruz. Bundan dolayı $g*(z)$, Δ bölgesinde yalınkattır. İkinci kısım aynı yolla ispatlanır.

Teorem 2.4.4 $g\in\Sigma$ olsun. O zaman $E\subset\left\{\left|w-b_0\right|\leq 2\right\}$ ancak ve ancak E, 4 uzunluğunda bir doğru parçasıdır.

İspat: $g(z)=z+b_0+e^{2i\beta}z^{-1}\ \left(b_0\in\mathbb{C},\beta\in\mathbb{R}\right)$ fonksiyonuna uygulandığında $w\in E$ için $\dfrac{1}{2}\left|b_0-w\right|\leq 1$ olduğu Sonuç 2.4.2 den görülür. **(6)** eşitliği sağlanırsa bir $\beta\in\mathbb{R}$ için

$$g*(z)=\sqrt{g\left(z^2\right)-w}=z-e^{i\beta}z^{-1}$$

ve sonuç olarak

$$g(z)=z+\left(w-2e^{i\beta}\right)+e^{2i\beta}z^{-1} \qquad \textbf{(7)}$$

dir. $g\left(e^{i\vartheta}\right)=b_0+2e^{i\beta}\cos\left(\vartheta-\beta\right)$ olduğundan dolayı $\left\{g(z):|z|=1\right\}$, $\left[b_0-2e^{i\beta},b_0+2e^{i\beta}\right]$ aralığında olduğu elde edilir.

Sonuç 2.4.5 $g\in\Sigma_0$ ise $|z|>1$ için $|g(z)|\leq 2|z|$.

İspat: $|\zeta|\to 1$ için $g(\zeta)$ nin bütün limit noktaları E de olduğundan dolayı ve $g(\zeta)/\zeta$, ∞ da analitiktir. Maksimum prensibi

$$\left|\frac{g(z)}{z}\right| \le \limsup_{|\zeta|\to 1}\left|\frac{g(\zeta)}{\zeta}\right| = \max_{w\in E}|w| \le 2 \;\left(|z|>1\right)$$

olduğunu gösterir.

Teorem 2.4.6 $f \in S$ olsun.

$$|a_2| \le 2,\; \left|a_3 - a_2^2\right| \le 1 \text{ ve } |a_2| = 2 \quad \textbf{(8)}$$

durumu ancak ve ancak $f(z)$ Koebe fonksiyonun bir rotasyonu ise geçerlidir. Ayrıca $f(z)$ tek ise $|a_3| \le 1$ dir. Eşitlik ise

$$f(z) = z\left(1 - e^{2i\beta}z^2\right)^{-1} \;\left(\beta \in \mathbb{R}\right)$$

elde edilir.

İspat: Fonksiyon

$$g(\zeta) = 1/f\left(\zeta^{-1}\right) = \zeta - a_2 + \left(a_2^2 - a_3\right)\zeta^{-1} + \ldots \in \Sigma \;\left(|\zeta|>1\right) \quad \textbf{(9)}$$

ve $g(\zeta) \ne 0$ dır. $g(\zeta) \in \Sigma$ olduğundan dolayı $\left|a_3 - a_2^2\right| \le 1$ ve $|a_2| \le 2$ bulunur.(Teorem 2.4.4 ve Sonuç 2.4.2) $|a_2| = 2$ ise **(7)** ($w=0$ olmak üzere) den bir $\beta \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{1}{f(z)} = z^{-1} - 2e^{i\beta} + e^{2i\beta}z = z^{-1}\left(1 - e^{i\beta}z\right)^2.$$

elde edilir. $f(z)$ tek ise $a_2 = 0$ ve bu nedenle Sonuç 2.4.2 ve **(9)** dan $|a_3| \le 1$ dir.

Sadece $|f''(0)|/2 = |a_2| \le 2$ olduğunu ispatlamış olduk. Bu bilgiyi sıfır noktasından keyfi bir $z_0 \in D$ noktasına dönüştürebilir. Fonksiyon

$$f\left(\frac{\zeta + z_0}{1 + \overline{z_0}\zeta}\right) = f(z_0) + \left(1 - |z_0|^2\right)f'(z_0)\zeta +$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(1 - |z_0|^2\right)^2 f''(z_0) - 2\overline{z_0}\left(1 - |z_0|^2\right)f'(z_0)\right]\zeta^2 + \ldots$$

D bölgesinde analitik ve yalınkattır. Böylece buna karşılık gelen normalleştirilmiş fonksiyon

$$h(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta + z_0}{1 + \overline{z_0}\zeta}\right) - f(z_0)}{\left(1 - |z_0|^2\right)f'(z_0)} = \zeta + \left[\frac{1}{2}\left(1 - |z_0|^2\right)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \overline{z_0}\right]\zeta^2 + \ldots \in S \quad \textbf{(10)}.$$

z_0 a bağlı f in dönüşümüne $h(\zeta)$ **Koebe Dönüşümü** denir. Teorem 2.4.6 den $h(\zeta)$ nın $\left|\frac{1}{2}\left(1-|z_0|^2\right)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}-\overline{z_0}\right|\leq 2$ olup $2|z_0|\big/\left(1-|z_0|^2\right)$ ile çarparsak ve z_0 yerine z koyarsak

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right|\leq\frac{4|z|}{1-|z|^2}\left(|z|<1\right)$$

elde ederiz.

Lemma 2.4.7 $f\in S$ ise o zaman $\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right|\leq\frac{4|z|}{1-|z|^2}\left(|z|<1\right)$.

Koebe Distortion Teoremi sonucunu çıkarırız.

Teorem 2.4.8 $f\in S$ ise o zaman $z\in D$ için ,

$$\frac{1-|z|}{\left(1+|z|\right)^3}\leq\left|f'(z)\right|\leq\frac{1+|z|}{\left(1-|z|\right)^3}\ \textbf{(11)},$$

$$\frac{|z|}{\left(1+|z|\right)^2}\leq\left|f(z)\right|\leq\frac{1+|z|}{\left(1-|z|\right)^2}\ \textbf{(12)},$$

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\leq\left|z.\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leq\frac{1+|z|}{1-|z|}\ \textbf{(13)}.$$

Her bir durumdaki eşitlik ancak ve ancak f Koebe fonksiyonunun bir uygun rotasyonu ise geçerlidir.

(11) in ispatı: Lemma 2.4.7 ile

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\log\left[\left(1-r^2\right)f'\left(re^{i\vartheta}\right)\right]\right|=\left|-\frac{2r}{1-r^2}+e^{i\vartheta}\frac{f''\left(re^{i\vartheta}\right)}{f'\left(re^{i\vartheta}\right)}\right|\leq\frac{4}{1-r^2}\quad\textbf{(14)}.$$

$f'(0)=1$ ve $\vartheta=\arg z$ olmak üzere

$$\left|\log\left(1-|z|^2\right)f'(z)\right|\leq\int_0^{|z|}\left|\frac{\partial}{\partial r}\log\left[\left(1-r^2\right)f'\left(re^{i\vartheta}\right)\right]\right|dr\leq 2\log\frac{1+|z|}{1-|z|}\quad\textbf{(15)}$$

sonucunu çıkarırız. İfadeyi mutlak değerden kurtarırsak

$$-2\log\frac{1+|z|}{1-|z|}\leq\log\left(1-|z|^2\right)\left|f'(z)\right|\leq 2\log\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

elde ederiz ki **(11)** bulunur. **(11)** eşitsizliklerinin birinde bir $z = z_1$ için eşitlik sağlanırsa o zaman **(15)** olarak gösterilir ki $0 \le r \le 1$, $z = rz_1$ için **(14)** de eşitliği elde edilir. $r = 0$ alınırsa $\left|f''(0)\right| = 4$ elde ederiz ve Teorem 2.4.6 f in Koebe fonksiyonun bir rotasyonu olduğunu gösterir. Diğer taraftan açıktır ki, her verilen $z \in D$ ve Koebe fonksiyonun uygun bir rotasyonu için **(11)**, **(12)** ve **(13)** de eşitlikler sağlanır.

(12) in ispatı: $f(0) = 0$ olduğundan dolayı

$$\frac{1-|z|}{\left(1+|z|\right)^3} \le \left|f'(z)\right| \le \frac{1+|z|}{\left(1-|z|\right)^3}$$

ın üst tahminden

$$\left|f(z)\right| \le \int_0^{|z|} \left|f'\left(re^{i\vartheta}\right)\right| dr \le \int_0^{|z|} \frac{1+r}{(1-r)^3} dr = \frac{|z|}{\left(1-|z|\right)^2}$$

elde ederiz. **(12)** alt tahmini kadar basit değildir. Verilen $0 \le r \le 1$ den, sıfıra yakın $f(z_0)$ $\left(|z_0| = r\right)$ noktası için ispatlamak yeterlidir. Fonksiyon yalınkat olduğundan dolayı $\left[0, f(z_0)\right]$ doğru parçasının R önceki görüntüsü $\left\{|z| \le r\right\}$ de bir yaydır. Buradan **(11)** den

$$\left|f(z_0)\right| = \int_{f(R)} |dw| = \int_R \left|f'(z)\right| |dz| \ge \int_R \frac{1-|z|}{\left(1+|z|\right)^3} |dz| \ge \int_R \frac{1-|z|}{\left(1+|z|\right)^3} d|z| = \frac{r}{(1+r)^2}$$

bulunur. **(11)** in integrali alınırsa **(12)** elde edileceğinden **(12)** eşitsizliğindeki eşitlik durumu yalnızca Koebe fonksiyonunun bir uygun rotasyonu için sağlanır.

(13) ün ispatı: (10) Koebe dönüşümünü gözönüne alalım. $\zeta = -z_0$ alarak

$$\left| z_0 \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \right| = \frac{1}{1-|z_0|^2} \left| \frac{z_0}{h(-z_0)} \right|$$

olduğunu görürüz. Çünkü $f(0) = 0$ dır. Buradan **(12)** den **(13)** ü elde ederiz.

Sonuç 2.4.8 $f(z)$, D bölgesinde analitik ve yalınkat ve $F = f(D)$ olsun. O zaman

$$\frac{1}{4}\left(1-|z|^2\right)\left|f'(z)\right| \le dist\left(f(z), \partial F\right) \le \left(1-|z|^2\right)\left|f'(z)\right| \; \left(|z| < 1\right) \quad \textbf{(16)}$$

dir. Bu eşitsizlikler en iyi ihtimallerdir. Özellikle $f \in S$ ise

$$\frac{1}{4} \leq dist\left(0, \partial F\right) \leq 1 \quad \textbf{(17)}$$

olur.

İspat: İlk olarak **(17)** yi ispatlayalım. $f\left(z\right)$ D bölgesinde yalınkat olduğundan dolayı **(12)** den

$$dist\left(0, \partial F\right) = \liminf_{|z| \to 1} \left|f\left(z\right)\right| \geq \lim_{|z| \to 1} \frac{|z|}{\left(1+|z|\right)^2} = \frac{1}{4}$$

Diğer taraftan, D bölgesinde $z^{-1} f\left(z\right) = 1 + \ldots \neq 0$ ve analitik olduğundan dolayı minimum prensibi

$$dist\left(0, \partial F\right) = \liminf_{|z| \to 1} \left|f\left(z\right)\right| = \liminf_{|z| \to 1} \left|\frac{f\left(z\right)}{z}\right| \leq 1$$

olduğunu gösterir. Şimdi **(10)** da tanımlanan $h\left(\zeta\right)$ Koebe dönüşümüne **(17)** yi uygulayalım. Hatta f normalleştirilmemiş ise $h\left(\zeta\right) \in S$ dir.

$$dist\left(f\left(z_0\right), \partial F\right) = dist\left[0, \partial h\left(D\right)\right]\left(1 - \left|z_0\right|^2\right)\left|f'\left(z_0\right)\right|$$

olduğundan dolayı **(16)** yı hemen elde ederiz. Sırasıyla Koebe fonksiyonu ve özdeş fonksiyon için eşitlik vardır.

2.5 Bazı Pozitif Reel Kısma Haiz Fonksiyonlar ve Subordinasyon

$f\left(z\right)$ ve $g\left(z\right)$, $D = \left\{|z| < 1\right\}$ bölgesinde analitik olsun.

$$f\left(z\right) = g\left(\varphi\left(z\right)\right) \quad \left(|z| < 1\right) \quad \textbf{(1)}$$

olacak şekilde $\left|\varphi\left(z\right)\right| < 1$ ve $\varphi\left(0\right) = 0$ olmak üzere D bölgesinde bir $\varphi\left(z\right)$ analitik fonksiyonu (yalınkat olması gerekmez.) var ise $f\left(z\right)$**,** $g\left(z\right)$ **e subordinedir** denir ve subordinasyon $f\left(z\right) \prec g\left(z\right)$ ile tanımlanır. $|z| < 1$ **(1)** dir. Bazı temel özellikleri kanıtlarız (Littlewood, 1925).

$f(z) \prec g(z)$ alalım. $\varphi(0)=0$ ve $\varphi(D)\subset D$ olduğundan dolayı **(1)** den $f(0)=g(0)$ ve $f(D)\subset g(D)$ elde edilir. Ayrıca Schwarz Lemmasından $|\varphi(z)| \le |z|$ ve bu yüzden

$$\{f(z):|z|<r\} \subset \{g(z):|z|<r\} \quad (0<r<1) \quad \textbf{(2)}$$

bulunur. Buradan

$$\max_{|z|\le r} |f(z)| \le \max_{|z|\le r} |g(z)| \quad (0\le r<1) \quad \textbf{(3)}.$$

Çünkü (Ahlfors, s.136)

$$\left(1-|z|^2\right)|\varphi'(z)| \le 1-|\varphi(z)|^2 .$$

$$\left(1-|z|^2\right)|f'(z)| = \left(1-|z|^2\right)|\varphi'||g'(\varphi)| \le \left(1-|\varphi|^2\right)|g'(\varphi)|$$

olur. $|\varphi(z)| \le |z|$ eşitsizliğini yine kullanarak

$$\max_{|z|\le r}\left(1-|z|^2\right)|f'(z)| \le \max_{|z|\le r}\left(1-|z|^2\right)|g'(z)| \quad (0\le r<1) \textbf{(4)}$$

elde ederiz. Özellikle $|f'(0)| \le |g'(0)|$.

Lemma 2.5.1 $g(z)$, D bölgesinde yalınkat olsun. O zaman $f(0)=g(0)$ ve $f(D)\subset g(D)$ ancak ve ancak $f(z)\prec g(z)$.

İspat: $g(z)$, D bölgesinde yalınkat olduğu için $g^{-1}(w)$ ters fonksiyon $g(D)$ de analitiktir. $f(D)\subset g(D)$ ise o zaman $\varphi(z)=g^{-1}(f(z))$ D bölgesinde analitiktir ve $f(z)=g(\varphi(z))$ $|z|<1$ ve $|\varphi(z)|<1$ i sağlar. Ayrıca $f(0)=g(0)$ olması $\varphi(0)=0$ olmasını gerektirir. Tersi zaten kanıtlanmıştır.

Lemma 2.5.1 ile $\{f(z):|z|<r\}\subset\{g(z):|z|<r\}$ birlikte alınırsa faydalı Subordinasyon Prensibini elde ederiz: Eğer $g(z)$, D bölgesinde yalınkat ise o zaman $f(0)=g(0)$ ve $f(D)\subset g(D)$ $D_r=\{|z|<r\}, 0<r<1$ olmak üzere $f(D_r)\subset g(D_r)$ olmasını gerektirir.

Subordinasyonun biraz daha zayıf versiyonu Robertson (1970a,b) (Sheil-Small (1973) açıkladı) tarafından tanıtıldı. Eğer

$$|f(z)| \le |g(\varphi(z))|, |\varphi(z)| \le |z| \quad (|z|<1) \quad \textbf{(5)}$$

sağlayan $\varphi(z)$ var ise $f(z)$, $g(z)$ e kuazi-subordine olduğunu söyleriz.

Özellikle **(5)** bu eşitsizliği $|z|<1$ için $|f(z)| \le |g(z)|$ olmak üzere $f(z) \prec g(z)$ ise geçerlidir. $\omega(z)$ ve $\varphi(z)$ D bölgesinde analitik ve $|\omega(z)| \le 1$, $|\varphi(z)| \le |z|$ olduğunda

$$f(z) = \omega(z) g(\varphi(z)) \ (|z|<1) \quad \textbf{(6)}$$

formunda **(5)** şeklinde yazabiliriz.

Teorem 2.5.2 $0<\lambda<\infty$ olsun. $f(z)$, $g(z)$ e kuazi-subordine ise o zaman

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\vartheta}\right)\right|^{\lambda} d\vartheta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|g\left(re^{i\vartheta}\right)\right|^{\lambda} d\vartheta \ (0 \le r < 1) \ .$$

Yalnızca Littlewood (1925)'un basit sonucunu ispatlayacağız. $\lambda \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$|g(z)|^{\lambda} \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|g\left(re^{it}\right)\right|^{\lambda} \operatorname{Re}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z} dt \ (|z|<r<1)$$

olduğu $g(z)^{\lambda}$ e uygulanan Poisson integral formülünden elde edilir.

Genel durumda ya $|g(z)|^{\lambda}$ alt harmonik (Ahlfors, 1973 s.237), ya da bir $g(z)$ in olası sıfırları için Blaschke çarpımı kullanılır (Golusin, 1957 s.324 veya Hille, 1969 s.422). Dolayısıyla $0<\rho<r$ için

$$\int_0^{2\pi} \left|f\left(\rho e^{i\vartheta}\right)\right|^{\lambda} d\vartheta \le \int_0^{2\pi} \left|g\left(\varphi\left(\rho e^{i\vartheta}\right)\right)\right|^{\lambda} d\vartheta$$

$$\le \int_0^{2\pi} \left|g\left(re^{it}\right)\right|^{\lambda} \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{re^{it}+\varphi\left(\rho e^{i\vartheta}\right)}{re^{it}-\varphi\left(\rho e^{i\vartheta}\right)} d\vartheta\right] dt = \int_0^{2\pi} \left|g\left(re^{it}\right)\right|^{\lambda} dt$$

$\rho \to r$ yazılırsa $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\vartheta}\right)\right|^{\lambda} d\vartheta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|g\left(re^{i\vartheta}\right)\right|^{\lambda} d\vartheta$ elde ederiz.

Bu teoremin katsayı sonuçlarının bir grup ispatına uygulanışı Rogosinski (1943) ve Robertson'a (1970a,b) aittir.

Teorem 2.5.3 $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$, $g(z) = b_0 + b_1 z + \ldots$ kuazi-subordine olsun. O zaman $\sum_{\upsilon=0}^{n} |a_{\upsilon}|^2 \le \sum_{\upsilon=0}^{n} |b_{\upsilon}|^2 \ (n = 0,1,\ldots)$ **(7)**.

İspat: **(6)** dan

$$\sum_{\upsilon=0}^{n} a_\upsilon z^\upsilon + \sum_{\upsilon=n+1}^{\infty} a_\upsilon z^\upsilon - \omega(z) \sum_{\upsilon=n+1}^{\infty} b_\upsilon \varphi(z)^\upsilon = \omega(z) \sum_{\upsilon=0}^{n} b_\upsilon \varphi(z)^\upsilon$$

yazabiliriz. Sol taraftaki son iki toplamdaki noktalar $\mu \geq n+1$ ile yalnız z^μ kuvvetleri olan noktalardır. Sağ taraftaki fonksiyon $\sum_{\upsilon=0}^{n} b_\upsilon z^\upsilon$ na kuazi-subordinedir. Parseval formülünü ve sonra Teorem 2.5.2 uygularsak ($\lambda = 2$ olmak üzere)

$$\sum_{\upsilon=0}^{n} |a_\upsilon|^2 r^{2\upsilon} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \omega\left(re^{i\vartheta}\right) \sum_{\upsilon=0}^{n} b_\upsilon \varphi\left(re^{i\vartheta}\right)^\upsilon \right|^2 d\vartheta$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\upsilon=0}^{n} b_\upsilon r^\upsilon e^{i\upsilon\vartheta} \right|^2 d\vartheta = \sum_{\upsilon=0}^{n} |b_\upsilon|^2 r^{2\upsilon}$$

elde ederiz. $r \to 1$ iken $\sum_{\upsilon=0}^{n} |a_\upsilon|^2 \leq \sum_{\upsilon=0}^{n} |b_\upsilon|^2$ **(7)** bulunur.

Sonuç 2.5.4 $u(z) = 1 + u_1 z + \ldots$ ve $\upsilon(z) = 1 + \upsilon_1 z + \ldots$ D bölgesinde analitik olsun. $\operatorname{Re}\dfrac{u(z)}{\upsilon(z)} > 0$ $(|z| < 1)$ ise o zaman

$$|u_{n+1} - \upsilon_{n+1}|^2 \leq 4 + 4\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} u_k \bar{\upsilon}_k \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

İspat: $\operatorname{Re} w > 0$ için $|(w-1)/(w+1)| < 1$ olduğundan dolayı Schwarz lemmasını kullanarak $|(u(z) - \upsilon(z))/(u(z) + \upsilon(z))| \leq |z|$ elde ederiz. Bundan dolayı $\varphi(z) \equiv z$ ve

$$f(z) = z^{-1}\left(u(z) - \upsilon(z)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(u_{k+1} - \upsilon_{k+1}\right) z^k,$$

$$g(z) = u(z) + \upsilon(z) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(u_k + \upsilon_k\right) z^k$$

olmak üzere Teorem 2.5.3 e uygulayabiliriz ve varsayım kolayca $\sum_{\upsilon=0}^{n} |a_\upsilon|^2 \leq \sum_{\upsilon=0}^{n} |b_\upsilon|^2$ den bulunur.

Teorem 2.5.5 $f(z) = a_1 z + \ldots$, $g(z) = b_1 z + \ldots$ $(b_1 \neq 0)$ kuazi-subordine olsun. Yeterince küçük z için

$$\sqrt{z^{-1} g(z)} = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} c_\upsilon z^\upsilon \quad \textbf{(8)}$$

ise o zaman

$$|a_n| \leq \sum_{\upsilon=0}^{n-1} |c_\upsilon|^2 \quad (n=1,2,\ldots).$$

İspat: $\sqrt{z^{-1}g(z)} = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} c_\upsilon z^\upsilon$ ve $f(z) = \omega(z) g(\varphi(z))$ den küçük z için

$$f(z) = \omega(z)\varphi(z)\left(\sum_{\upsilon=0}^{\infty} c_\upsilon \varphi(z)^\upsilon\right)^2$$

$$= \omega\varphi\left[\sum_{\upsilon=0}^{n-1} c_\upsilon \varphi^\upsilon\right]^2 + 2\omega\varphi\sum_{\upsilon=0}^{n-1} c_\upsilon \varphi^\upsilon \sum_{\upsilon=n}^{\infty} c_\upsilon \varphi^\upsilon + \omega\varphi\left[\sum_{\upsilon=n}^{\infty} c_\upsilon \varphi^\upsilon\right]^2$$

Sağ taraftaki son iki terim sadece $\mu \geq n+1$ olmak üzere z^μ kuvvetlerini içerir. Buradan ilk terim onun n inci katsayı olarak a_n dir. $|z|<1$ de analitik olduğundan dolayı

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \omega(z)\varphi(z)\left(\sum_{\upsilon=0}^{n-1} c_\upsilon \varphi(z)^\upsilon\right)^2 e^{-in\vartheta} d\vartheta \quad \left(z = re^{i\vartheta}, 0<r<1\right)$$

bulunur. Teorem 2.5.2 den ($\lambda = 1$ olmak üzere)

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \left|\sum_{\upsilon=0}^{n-1} c_\upsilon \varphi(z)^\upsilon\right|^2 d\vartheta \leq \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \left|\sum_{\upsilon=0}^{n-1} c_\upsilon z^\upsilon\right|^2 d\vartheta = r^{-n}\sum_{\upsilon=0}^{n-1} |c_\upsilon|^2 r^{2\upsilon}$$

olduğu sonucunu çıkar ve varsayım $r \to 1-0$ alırsak bulunur.

Sonuç 2.5.6 $g \in S$ ve

$$\sqrt{g(z^2)} = z + \sum_{\upsilon=1}^{\infty} b_{2\upsilon+1}^* z^{2\upsilon+1} \quad (|z|<1) \quad \textbf{(9)}$$

tek yalınkat fonksiyon düşünelim. $f(z) = a_1 z + \ldots$, $g(z)$ kuazi-subordine ise o zaman

$$|a_n| \leq 1 + \sum_{\upsilon=1}^{n-1} |b_{2\upsilon+1}^*|^2 \quad (n=1,2,\ldots) \quad \textbf{(10)} \text{ dir.}$$

Özellikle $|b_{2k+1}^*| \leq 1$ $(k=1,2,\ldots)$ ise $|a_n| \leq n$ $(n=1,2,\ldots)$ dir.

Robertson varsayımı, $g \in S$, $f(z) \prec g(z)$ ise $|a_n| \leq n$ olduğu genelleştirilmiş Bieberbach varsayımı anlamına geldiği $|a_n| \leq 1 + \sum_{\upsilon=1}^{n-1} |b_{2\upsilon+1}^*|^2$ dan bulunur. Subordinasyonla ilgili sonuçlar için örneğin Golusin (ch. 8&8), Littlewood (ch. 2), Lewandowski (1970), T. H. MacGregor (1967,1972), Robertson (1961, 1970a,b), Robinson (1947), Rogosinski (1943) ve Shell-Small (1973) e bakınız.

$$p(0)=1,\ \operatorname{Re} p(z)>0 \quad (|z|<1)$$

olmak üzere D bölgesinde analitik $p(z)$ fonksiyonların sınıfı $\mathcal{P}$ ile ifade edelim. $p(z)\in\mathcal{P}$ ancak ve ancak $p(z)\prec(1+z)/(1-z)$ olduğu Lemma 2.5.1 den bulunur. **(2)** ve **(4)** den dolayı,

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\le|p(z)|\le\frac{1+|z|}{1-|z|},\quad |p'(z)|\le\frac{2}{(1-|z|)^2}\quad (|z|<1)\ \textbf{(11)}$$

gerektirir. $\mathcal{P}$ sınıfı normaldir ve bu nedenle kompakttır. Katsayıların karakterizasyonu (Caratheodory, 1907) ve Stieltjes integralinin (olasılık ölçümleri) koşulları bir temsili formül (Herglotz, 1911) elde ederiz.

Teorem 2.5.7 $p(z)=1+c_1z+\ldots$ D bölgesinde analitik olsun. O zaman aşağıdaki üç koşul denktir:

(i) $p(z)\in\mathcal{P}$

(ii) $p(z)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)$, $\gamma(2\pi)-\gamma(0)=1$ olduğu gibi ;$(0\le t\le 2\pi)$ artan bir $\gamma(t)$ fonksiyonu vardır.

(iii) $c_0=2$, $c_{-k}=\overline{c_k}$ $(k\ge1)$ koşulunu kabul ettiğimizde $m=1,2,\ldots$ için

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}c_k\lambda_k\overline{\lambda_l}\ge0\ \ (\lambda_0,\ldots,\lambda_m\in\mathbb{C})\ .$$

İspat: $p\in\mathcal{P}$ olsun. Schwarz formülü (Ahlfors, 1973 s.167), $|z|<r<1$ için $\gamma(0,r)=0$, $\gamma(2\pi,r)=1$ koşullarını sağlayan

$$\gamma(t,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t \operatorname{Re} p\left(re^{i\tau}\right)d\tau$$

$0\le t\le 2\pi$ artan olmak üzere

$$p(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}\operatorname{Re} p\left(re^{it}\right)dt=\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}d\gamma(t,r)\ \ \textbf{(12)}$$

olduğunu gösterir. Çünkü $p(0)=1$ dir. Helly seçme teoremi (Natanson, 1954 s.223 veya Feller, 1971 s.267) ile $\gamma(t,r_n)$, onun bütün sürekli noktalarında bir artan $\gamma(t)$ fonksiyonuna yakınsar. $r_n \to 1$ $(n \to \infty)$ ile bir (r_n) dizisi bulabiliriz ki buradan (ii) yi elde etmek için **(12)** de limit alabiliriz. (ii) koşulu sağlansın. O zaman katsayılar

$$c_k = 2\int_0^{2\pi} e^{-ikt} d\gamma(t) \quad (k=1,2,\ldots) \; \textbf{(13)}$$

şeklinde açıklanabilir ve koşulumuz ile $k \le 0$ için de sağlanır. Bundan dolayı

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{m} \lambda_k e^{-ikt} \right|^2 d\gamma(t) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{m} \lambda_k \overline{\lambda_l} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-l)t} d\gamma(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{m} c_{k-l} \lambda_k \overline{\lambda_l}$$

ve (iii) bulunur çünkü $d\gamma(t) \ge 0$ dır.

(iii) koşulu sağlansın. $k=0,\ldots,m$ için $\lambda_k = z^k$ $(|z|<1)$ seçelim ve o zaman $m \to \infty$ olsun.

$$0 \le \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{k-l} z^k \overline{z}^l = 2\sum_{k=0}^{\infty} |z|^{2k} + 2\,\mathrm{Re} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l+1}^{\infty} c_{k-l} z^{k-l} |z|^{2l} = 2\left(1-|z|^2\right)^{-1} \mathrm{Re}\, p(z)$$

böylece $p \in \mathscr{P}$ elde ederiz.

Sonuç 2.5.8 $p(z) = 1 + c_1 z + \ldots \in \mathscr{P}$ olsun. O zaman

$$|c_n| \le 2 \quad (n=1,2,\ldots),$$

ve eşitlik ancak ve ancak bir α ve $\gamma_1,\ldots,\gamma_n \ge 0$ için $\gamma_1 + \ldots + \gamma_n = 1$ olmak üzere

$$p(z) = \sum_{\upsilon=1}^{n} \gamma_\upsilon \frac{e^{i\alpha + 2\pi i \upsilon/n} + z}{e^{i\alpha + 2\pi i \upsilon/n} - z} \quad \textbf{(14)}$$

sağlanır.

İspat: (13) olmak üzere

$$|c_n| = 2\left| \int_0^{2\pi} e^{-int} d\gamma(t) \right| \le 2\int_0^{2\pi} d\gamma(t) = 2,$$

ve eşitlik yalnız ve ancak $\gamma(t)$ bir α için $\alpha + 2\pi\upsilon/n$ formundaki noktalarda $\gamma_\upsilon \ge 0$ artan değerleri hariç sabittir. Buradan $p(z)$ (ii) temsili formülüyle **(14)** şeklindedir.

2.6 Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonlar

2.6.1 Yıldızıl Fonksiyonlar: $f(z)$ yalınkat $F=f(D)$ görüntü bölgesi sıfıra göre yıldızıl ise o zaman D bölgesinde $f(z)=a_1z+\ldots$ fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. Yani

$$w\in F\,,\ 0\le t\le 1\ \Rightarrow\ tw\in F\quad \textbf{(1)}\ \text{dir.}$$

Teorem 2.6.2 $f(z)$ analitik fonksiyonunun D bölgesinde yıldızıl olması ancak ve ancak $p(z)=z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ nin $\mathscr{P}$ ye ait olmasıyla mümkündür.

İspat: $(\Rightarrow)$ $f(z)$ D bölgesinde yıldızıl olsun. Subordinasyon prensibi ve **(1)** den

$$\{tf(z):|z|<r\}\subset\{f(z):|z|<r\}\quad (0\le t\le 1\ ;\ 0<r<1)$$

bulunur. Buradan son bölge yine yıldızıldır. Geometrik sebepler, $\arg f\left(re^{i\vartheta}\right)$, $0\le\vartheta\le 2\pi$ de artan olduğunu gösterir. Bundan dolayı

$$\operatorname{Re}\left[re^{i\vartheta}\frac{f'\left(re^{i\vartheta}\right)}{f\left(re^{i\vartheta}\right)}\right]=\frac{\partial}{\partial\vartheta}\operatorname{Im}\left[\log f\left(re^{i\vartheta}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial\vartheta}\arg f\left(re^{i\vartheta}\right)\ge 0\quad \textbf{(2)}$$

Çünkü $f(0)=0$, $f'(0)\ne 0$ ve bu nedenle $p(0)=1$ olduğundan $p\in\mathscr{P}$ çıkar.

$(\Leftarrow)$ Diğer taraftan $p(z)=z\dfrac{f'(z)}{f(z)}\in\mathscr{P}$ olsun. O zaman $0<|z|<1$ için $f(z)\ne 0$ çünkü aksi halde $p(z)$ bir kutba sahiptir. Eğer a_m, $f(z)$ in sıfıra eşit olmayan katsayısı ise $m=p(0)=1$ elde ederiz, buradan $f(0)=0$, $f'(0)\ne 0$ dır. $\arg f\left(re^{i\vartheta}\right)$ $0\le\vartheta\le 2\pi$ de artan ve toplam artış

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\arg f\left(re^{i\vartheta}\right)d\vartheta=\operatorname{Re}\left[\frac{1}{i}\int_{|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right]=2\pi\quad (0<r<1)$$

olduğu **(2)** den bulunur.

Geometrik sebeplerden bu nedenle $f(z)$, $|z|=r$ bölgesine bir yıldızıl analitik eğri üzerine birebir dönüştürür. Bundan dolayı $f(z)$, Lemma 2.2.1 den

$|z|<r$ de yalınkat ve $\{f(z):|z|<r\}$ her $r<1$ için yıldızıldır. $f(z)$nin D bölgesinde yıldızıl olduğu bulunur.

Yıldızıl fonksiyonların sınıfı için bir temsili formül elde ederiz.

Teorem 2.6.3 $f(z)=a_1z+\ldots$ fonksiyon D bölgesinde yıldızıl olması ancak ve ancak $\gamma(2\pi)-\gamma(0)=1$ olmak üzere bir $\gamma(t)$ artan fonksiyon için

$$f(z)=a_1z\exp\left[2\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)\right] \quad (|z|<1)$$ **(3)** dir.

İspat: $f(z)$ yıldızıl olsun. Teorem 2.6.2 ve Teorem 2.5.7 den $\gamma(t)$ fonksiyonu istenen özelliklere sahip olduğunda

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)$$

yazabiliriz. Buradan

$$\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{1}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{2e^{-it}}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)$$

ve integrasyon uygulandığında

$$\log\frac{f(z)}{z}-\log f'(0)=-2\int_0^{2\pi}\log\left(1-e^{-it}z\right)d\gamma(t)$$

(3) den çıkar. Tersi bu argümanın tersi ile ispatlandı.

2.6.4 Konveks Fonksiyonlar: $f(z)=a_1z+\ldots$ fonksiyonu yalınkat ve $f(D)$ görüntü bölgesi konveks ise D bölgesinde **konveks fonksiyondur** denir (Study, 1913). Örneğin $\frac{z}{1-z}$ ve $\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonları konvekstir.

Teorem 2.6.5 $f(z)$ analitik fonksiyonunun D bölgesinde konveks olması ancak ve ancak

$$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$ **(4)**

$\mathscr{P}$ ye ait olmasıyla mümkündür. Ayrıca $f(z)$ konveks ise o zaman

$$\operatorname{Re}\left[\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}-\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right]\geq 0 \quad (|z|<1,|\zeta|<1)$$ **(5)**.

Bu eşitsizliği Sheil-Small (1969) ve Suffridge (1970) e aittir ve dolayı

$$\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2}, \ \operatorname{Re}\frac{f(z)}{a_1 z} > \frac{1}{2} \quad (|z|<1) \quad \textbf{(6)}$$

(Marx 1932/33, Strohhacker 1933) elde edilir. İlk eşitsizlik $\zeta = 0$ özel durumudur; ikinci eşitsizlik z nin kuvvetlerine göre olan kuvvet serilerinde z nin katsayıları gözönüne alınarak elde edilir. $z^{-1} f(z) \prec a_1 (1-z)^{-1}$ olarak ifade edilebilir ve bu nedenle

$$|a_1|\frac{|z|}{1+|z|} \le |f(z)| \le |a_1|\frac{|z|}{1-|z|} \quad (|z|<1) \quad \textbf{(7)}$$

elde edilir.

İspat: **a)** $f(z)$ konveks olsun. $C(r) = \{f(z) : |z| = r\}$ eğrisinin $0<r<1$ için konveks olduğunu gösteririz. $|z_1| \le |z_2| < r$ ise o zaman

$$tf\left(\frac{z_1}{z_2} z\right) + (1-t) f(z) \in f(D) \quad (|z|<1; 0 \le t \le 1)$$

ve subordinasyon prensibi

$$tf(z_1) + (1-t) f(z_2) \in \{f(z) : |z| < r\}$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\{f(z) : |z| < r\}$ ve bu nedenle $C(r)$, konvekstir.

b) Eğer $f(z)$, D bölgesinde konveks ve bu nedenle yalınkat ise

$$g(z,\zeta) = \frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta}$$

fonksiyonu $|\zeta| < 1$, $|z| < 1$ de analitiktir. Çünkü

$$\lim_{\zeta \to z} g(z,\zeta) = 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} \quad (|z|<1) \quad \textbf{(8)}$$

olur. $C(r)$ **a)** kısmından konveks olduğundan dolayı $\arg\left[f\left(re^{it}\right) - f\left(re^{i\vartheta}\right)\right]$ $t \in (\vartheta, \vartheta + 2\pi)$ de artandır ve bu nedenle

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} = \frac{\partial}{\partial t}\arg\left[f\left(re^{it}\right) - f\left(re^{i\vartheta}\right)\right] \ge 0 \quad \left(z = re^{it} \ne \zeta = re^{i\vartheta}\right).$$

$|z|=|\zeta|=r$, $z\neq\zeta$ için $\operatorname{Re}\left[(z+\zeta)/(z-\zeta)\right]=0$ olduğundan dolayı süreklilikten $z=\zeta$ için

$$\operatorname{Re} g(z,\zeta)\geq 0 \quad (|z|=|\zeta|=r<1) \quad \textbf{(9)}$$

olduğu sonucuna varılır. Maksimum prensibini uygulayarak $|z|<r$ ve böylece $|\zeta|<r$ $\operatorname{Re} g(z,\zeta)\geq 0$ olduğu elde edilir. $r\to 1$ olursa bu eşitsizlik

$$|z|<1 \quad |\zeta|<1 \text{ için } 1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\in\mathscr{P} \;,$$

$$\lim_{\zeta\to z} g(z,\zeta)=1+z\frac{f''(z)}{f'(z)} \text{ ve } \operatorname{Re}\left[\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}-\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right]\geq 0$$

kolayca bulunur.

c) Tersine olarak $1+z\dfrac{f''(z)}{f'(z)}\in\mathscr{P}$ kabul edelim. $C(r)$ nin normalinin açısı $\Theta(\vartheta)=\vartheta+\arg f'\left(re^{i\vartheta}\right)$ ve

$$\Theta'(\vartheta)=1+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\operatorname{Im}\log f'\left(re^{i\vartheta}\right)=1+\operatorname{Re}\left[re^{i\vartheta}\frac{f''\left(re^{i\vartheta}\right)}{f'\left(re^{i\vartheta}\right)}\right]>0$$

olduğunu görürüz.

Toplam artışın 2π olduğunu integrasyon alarak görürüz. Buradan geometrik sebepler $f(z)$, $|z|=r$ yi her $r<1$ için $C(r)$ konveks eğrisi üzerine birebir dönüştürür. $f(D)$ konvekstir ve bu nedenle $f(z)$, D bölgesinde konveks olduğunu buluruz.

Sonuç 2.6.6: $f(z)$ fonksiyonu D bölgesinde konveks olması için ancak ve ancak $zf'(z)$ in D bölgesinde yıldızıl olmasıyla mümkündür.

Bu Teorem 2.6.2 ve 2.6.5 nin bir sonucudur. Çünkü

$$z\frac{d}{dz}\left[zf'(z)\right]/\left[zf'(z)\right]=1+z\,f''(z)/f'(z).$$

Kesin katsayı tahminleri elde ettik. (Löwner 1917, Privalov 1924)

Teorem 2.6.7 : $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ D bölgesinde yıldızıl ise o zaman

$$|a_n|\leq n \quad (n=2,3,\ldots).$$

$f(z)$ bir yıldızıl tek fonksiyon veya bir konveks fonksiyon ise o zaman

$$|a_n| \le 1 \quad (n = 2,3,\ldots).$$

Eşitsizlik ancak ve ancak sırasıyla,

$$f(z) = \frac{z}{\left(1-e^{i\beta}z\right)^2},\; f(z) = \frac{z}{1-e^{2i\beta}z^2},\; f(z) = \frac{z}{1-e^{i\beta}z} \quad (\beta \in \mathbb{R}) \quad \textbf{(10)}$$

için geçerlidir.

$\sqrt{f(z^2)}$ yine tek fonksiyon olduğu için yıldızıldır, Sonuç 2.5.6 $f(z) \prec g(z)$ ve $g(z) = z + \ldots$ D bölgesinde yıldızıl ise o zaman $|a_n| \le n$ olduğunu gösterir. (Rogosinski 1943)

İspat : Eğer $f(z)$, yıldızıl ise o zaman Teorem 2.6.2 den

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in \mathscr{P}$$

dir. $zf'(z) = f(z)\,p(z)$ de katsayıları karşılaştırırsak, yine

$$a_n = \frac{1}{n-1}\sum_{\upsilon=1}^{n-1} c_{n-\upsilon} a_\upsilon \quad (n = 2,3,\ldots)$$

formülü ve bu yüzden Sonuç 2.5.8 den

$$|a_n| \le \frac{2}{n-1}\sum_{\upsilon=1}^{n-1} |a_\upsilon| \quad (n = 2,3,\ldots) \quad \textbf{(11)}$$

elde ederiz. Çünkü $f(z)$ tek ise ve $|a_n| \le n$ ve $|a_n| \le 1$ olduğu da $a_1 = 1$ alındığını gösterir ve sırasıyla $|a_2| = 2$ veya $|a_3| = 1$ de başka mutlak eşitsizliklere sahip ve o zaman $f(z)$ Teorem 2.4.6 ile **(10)** formundan olmak zorundadır. Konveks durumu Sonuç 2.6.6 ile yıldızıl durumuna indirgenir.

Birim çemberin “DIŞ” durumuna dönelim.

$$g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots \quad (|z| > 1) \quad \textbf{(12)}$$

olsun. $g(z)$, Δ da yalınkat ve eğer görüntü kümesinin E kompakt tümleyeni sıfıra göre yıldızıl ise o zaman $g(z)$, $\Delta = \{|z| > 1\}$ de yıldızıl deriz. E konveks bölgede ise $g(z)$ de Δ da konvekstir. Örneğin $g(z) = z + z^{-1}$ fonksiyonu konvekstir ve birçok problemde extremal fonksiyon olarak ortaya çıkar.

Teorem 2.6. 8:

$$\operatorname{Re} z\frac{g'(z)}{g(z)}>0 \quad (|z|>1) \quad \textbf{(13)}$$

ancak ve ancak $g(z)$ fonksiyonunun Δ da yıldızıl olmasıyla mümkündür .

$$\operatorname{Re}\left[1+z\frac{g''(z)}{g'(z)}\right]>0 \quad (|z|>1) \quad \textbf{(14)}$$

ancak ve ancak konvekstir ve $g(z)$ konveks ise o zaman

$$\operatorname{Re}\left[\frac{2zg'(z)}{g(z)-g(\zeta)}-\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right]\geq 0 \quad (|z|>1,|\zeta|>1) \quad \textbf{(15)} \text{ dir.}$$

Her konveks fonksiyon yıldızıl değildir. Çünkü $0\notin E$ olabilir. h konveks fonksiyonu olmak üzere her $g(z)=zh'(z)$ fonksiyonu **(13)** ve **(14)** den yıldızıldır. Tersi burada yanlıştır çünkü yalnızca **(12)** de $b_0=0$ için bu yıldızıl fonksiyonları elde ederiz. $\dfrac{1}{g(\zeta^{-1})}$ $|\zeta|<1$ de yıldızıl ise yalnız ve ancak $g(z)$ fonksiyonu $|z|>1$ de yıldızıldır. Bu geometrik hususlardan açıktır.

Buradan ilk varsayım Teorem 2.6.2 ye eşdeğerdir. Konveks durumu daha zordur çünkü $|z|>1$ de $g(z)$ konveks ise $|\zeta|<1$ de $\dfrac{1}{g(\zeta^{-1})}$ nin konveks olması gerekmez, tersi doğru değildir.

İspat: $g(z)$, Δ da konveks olsun. E bir doğru parçası ise o zaman **(14)** ve **(15)** doğrudan gerçeklenir (Örnek 2.2.3 bölüm 2.1). Buradan E nin, C konveks eğrisi tarafından sınırlandırılan bir doğru parçası olmadığını varsayabiliriz. $h(s)$ yalınkat fonksiyonu ile $|s|<1$ bölgesini C nin iç bölgesi üzerine dönüştürelim. Teorem 2.6.5 nin ispatının **(a)** kısmı ile $C_k=\{h(s):|s|=1-1/k\}$ $(k=1,2,...)$ eğrileri yine konvekstir. $g_k(z)$, Δ yı C_k nın dış bölgesi üzerine dönüştürür öyle ki $g_k(\infty)=\infty$ ve $g'(\infty)>0$ dır. C_k eğrileri C ye yakınsadığından dolayı $\{1<|z|<\infty\}$ da lokal düzgün olarak, $k\to\infty$ iken $g_k(z)\to g(z)$ olduğu Caratheodory çekirdek teoreminden kolayca bulunur.

Teorem 2.6.5 nin ispatının **(b)** kısmındaki gibi g_k için **(15)** i kanıtlarız. ($|z| = |\zeta| = 1$ den başlanıyor.) $k \to \infty$ alırsak g için **(15)** i elde ederiz ve **(14)**, **(15)** in $\zeta = z$ özel durumudur. Tersi Teorem 2.6.5 nin ispatı gibi bulunur. **(6)** eşitsizlikleri, farklı bir eşitsizlik ile değiştirilir. (Grötzsch 1935/36, Golusin 1938).

Sonuç 2.6.9 : $g(z) = z + \ldots$ Δ da konveks ise o zaman

$$\left|g'(z) - 1\right| \le |z|^{-2} \quad (|z| > 1) \quad \textbf{(16)} \ .$$

İspat: Her $z \in \Delta$ için

$$\frac{2zg'(z)}{g(z) - g(\zeta)} + \frac{\zeta + z}{\zeta - z} = 1 - 2z\left(g'(z) - 1\right)\zeta^{-1} + \ldots \quad \left|\zeta^{-1}\right| < 1$$

nin bir pozitif reel kısmı olduğu **(15)** den bulunur.

Buradan Sonuç 2.5.8 ile $\left|z\left(g'(z) - 1\right)\right| \le 1 \quad (|z| > 1)$ ve Schwarz lemmasından **(16)** bulunur. Çünkü $g'(z) - 1 = -b_1 z^{-2} - \ldots$ ∞ da iki katlı bir sıfırı bulunur.

Teorem 2.6.10 : $g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots$ Δ da yıldızıl ise o zaman

$$|b_n| \le \frac{2}{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad \textbf{(17)}.$$

Bu Clunie'nin tahmini,

$$g(z) = z\left(1 + z^{-(n+1)}\right)^{2/(n+1)} = z + \frac{2}{n+1} z^{-n} + \ldots \quad \textbf{(18)}$$

fonksiyonunun en iyi ihtimal olduğunu gösterir.

Bu durumda E, 0 dan $4^{1/(n+1)}$ uzunluğundaki eşit aralıklı $n+1$ ışından oluşur. Rotasyonlardan ayrı tek extremal fonksiyonlar olduğu gösterilebilir.(Holland 1972).

İspat : $u(z) = g'\left(z^{-1}\right) = 1 - \sum_{\upsilon=1}^{\infty} (\upsilon - 1) b_{\upsilon-1} z^{\upsilon}$

$$v(z) = zg\left(z^{-1}\right) = 1 + \sum_{\upsilon=1}^{\infty} b_{\upsilon-1} z^{\upsilon} \quad (|z| < 1)$$

olmak üzere Sonuç 2.5.4 e uygularız ve

$$(n+1)^2 |b_n|^2 \le 4\left(1 - \sum_{\upsilon=1}^{n-1} \upsilon |b_\upsilon|^2\right) \le 4 \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad \textbf{(19)}$$

elde ederiz.

Not : Teorem 2.6.7 ile bu teoremi karşılaştırarak kayda değer bir fark görürüz: Katsayıları oldukça küçük ve extremal fonksiyon her n için bir farkdır.

$$\limsup_{n\to\infty} n\left|b_n\right| \leq 2\left(1-\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\upsilon\left|b_\upsilon\right|^2\right)^{1/2} \leq 2\left(\pi^{-1} alanE\right)^{1/2} \quad \textbf{(20)}$$

olduğu alan teoremi ve **(19)** dan kolayca bulunur. $g \in \Sigma$ yıldızıl fonksiyonları için

$$\limsup_{n\to\infty} n\left|b_n\right| < 2 \quad \textbf{(21)}$$

sonucunu çıkarırız.

2 nin en iyi ihtimal olduğu ispatlanabilir. (Pommerenke 1963a) **(20)** den

$$alanE = 0 \Rightarrow nb_n \to 0 \quad \left(n\to\infty\right) \quad \textbf{(22)}$$

olduğu sonucuna da varırız.

Böylece $\limsup n\left|b_n\right|$ maksimumu için problemin çözümü yok ve fonksiyonlar $alanE = 0$ olmak üzere bu fonksiyoneli minimize ederiz. Yalnız sınırlı sayıda bir katsayı içeren extremal problemler ile çarpıcı bir tezat oluşturur.

Polya ve Schoenberg (1958) varsayımlarından daha ileri bir sonuca varırız. Ruscheweyh ve Sheil-Small (1973) tarafından son zamanlarda kanıtlanmıştır: Eğer $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları D bölgesinde konveks ise o zaman onların

$$f * g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n \quad \left(|z|<1\right)$$

Hadamard çarpımı da konvekstir.

Yıldızıl ve konveks fonksiyonlarda geniş bir literatür den daha yakın makaleleri listeleriz: Brannan ve Kirwan (1969), Clunie ve Keogh (1960), Hummel (1967, 1972), London ve Thomas (1970), Pommerenke (1962, 1963a,b), Sheil-Small (1969, 1970), Twomey (1970, 1971).

2.7 Konvekse Yakın Fonksiyonlar

$f(z) = a_1 z + \ldots \left(|z|<1\right)$ fonksiyonuna,

$$\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{g(z)} > 0 \quad \left(|z|<1\right) \quad \textbf{(1)}$$

olmak üzere bir $g(z) = b_1 z + \ldots$ yıldızıl fonksiyonu var ise **konvekse yakın fonksiyon** denir. Konvekse yakın fonksiyonlar Kaplan (1952) tarafından tanıtıldı ; bu ismin seçilmesinin nedeni $\operatorname{Re} z\dfrac{f'(z)}{g(z)} > 0$ eşitsizliği Sonuç 2.6.6 ile $h(z)$ konveks olduğundan

$$\operatorname{Re}\frac{f'(z)}{h'(z)} > 0 \text{ veya } \left|\arg\frac{f'(z)}{h'(z)}\right| < \frac{\pi}{2} \quad \textbf{(2)}$$

ye eşit olmasıdır. Pek çok ilginç yalınkat fonksiyonlar, konvekse yakın fonksiyon olduğunu göreceğiz. Her yıldızıl fonksiyon konvekse yakın olduğu Teorem 2.6.2 ve **(1)** den açıktır.

Teorem 2.7.1 Her konvekse yakın fonksiyon yalınkattır.

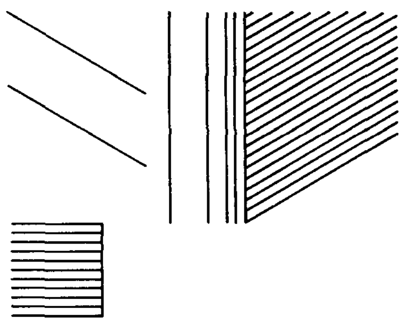
İspat: Tanımın $\operatorname{Re}\dfrac{f'(z)}{h'(z)} > 0$ formunu kullanırsak $h^{-1}(w)$ ters fonksiyonu $H = h(D)$ konveks bölgesinde analitiktir ve

$$\varphi(w) = f\left(h^{-1}(w)\right) \quad \operatorname{Re}\varphi'(w) = \operatorname{Re}\frac{f'(z)}{h'(z)} > 0 \quad \left(w = h(z) \in H\right) \text{ sağlar.}$$

Bundan dolayı w_1 ve $w_2 \in H$ için,

$$\operatorname{Re}\frac{\varphi(w_2) - \varphi(w_1)}{w_2 - w_1} = \int_0^1 \operatorname{Re}\varphi'\left(w_1 + t(w_2 - w_1)\right)dt > 0$$

böylece $\varphi(w)$ H da yalınkat ve bu nedenle $f(z) = \varphi(h(z))$ D bölgesinde yalınkattır. Lewandowski (1958, 1960) konvekse yakın fonksiyonların bir geometrik karakterizasyonunu vermiştir. Bu geometrik formda konvekse yakın fonksiyonlar Biernacki (1936) tarafından çalışılmıştır; o "doğrusal olarak erişilebilir" adını kullanmıştır. (Şekil 2.2.)



Şekil 2.2. Bazı özel sınıfar

Teorem 2.7.2 : $f(z)=a_1z+\ldots$ D bölgesinde analitik ve yalınkat olsun. O zaman $f(z)$ konvekse yakındır ancak ve ancak $\mathbb{C}/f(D)$ karşılık gelen yarı açık ayrık olmak üzere kapalı yarı doğruların birleşimidir.

Bu teoremin yalnızca ispatını göstereceğiz. İlk olarak $f(D)$ geometrik koşulları sağlansın. Böyle bir sonlu sayıda yarı doğruların tümleyeninden ile $f(D)$ ye yaklaşabiliriz. Daha sonra bu durumda **(1)** i ispatlarız. Caratheodory Kernel teoremi genel durum için **(1)** i verir.

Tersine olarak **(1)** sağlansın.

$$f(z,t)=f(z)+tg(z)\ \left(z\in D,0\le t<\infty\right)$$

tanımlarız (Bielecki ve Lewandowski 1962). O zaman **(1)** den

$$\mathrm{Re}\left[z\frac{\partial}{\partial z}f(z,t)\Big/\frac{\partial}{\partial t}f(z,t)\right]=\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{g(z)}+t\,\mathrm{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)}>0$$

ve çünkü $g(z)$ yıldızıldır. Böylece $f(z,t)$ kolayca belirlenebilir normalleştirme hariç bir Löwner zinciridir. $f(z,t)$, $z\in D$ bölgesinde yalınkattır ve

$$f(z)\prec f(z)+tg(z)\prec f(z)+t'g(z)\ \left(0<t<t'<\infty\right)\textbf{(3)}$$

olur.

Şimdi $f(z)$ ve $g(z)$ $\overline{D}$ da sürekli olduğunu ayrıca varsayalım; genel durum bir limit prosedüründen elde edilebilir.

$$L(\vartheta)=\left\{f\left(e^{i\vartheta}\right)+tg\left(e^{i\vartheta}\right):0\le t<\infty\right\}\ \left(0<\vartheta<2\pi\right)\textbf{(4)}$$

kapalı yarı doğruları gözönüne alalım.

(3) den $f(D)$ bölgesi $\partial f(D,t)$ $\left(0\le t<\infty\right)$ kesişimi değildir. $L(\vartheta)$ bu sınırların birleşimi tarafından içerildiğinden $L(\vartheta)\subset\mathbb{C}/f(D)$ olduğu sonucuna varıyoruz.

Varsayalım ki $L(\vartheta_1)$, $L(\vartheta_2)$ $\left(\vartheta_1\ne\vartheta_2\right)$ kesişsin. Yani kesim noktası hiçbirinin bitiş noktası değildir. Süreklilik ile

$$f(z_1,t_1)=f(z_1)+t_1g(z_1)=f(z_2)+t_2g(z_2)=f(z_2,t_2)$$

olacak şekilde $t_1,t_2>0$ ve $|z_1|=|z_2|=r<1$ olmak üzere z_1, z_2 farklı noktalar vardır.

Çünkü $f(z,t_1)$ $z \in D$ bölgesinde yalınkattır. $t_1 \neq t_2$ olmak zorundadır. $t_1 < t_2$ olduğunu söyleyebiliriz. Fakat bu mümkün değildir. Çünkü **(3)** den $\{f(z,t_j) : |z| = r\}$ $(j = 1,2)$ eğrilerin kesişimi yoktur. Böylece $\partial f(D)$ nin her noktasından $\mathbb{C}/f(D)$ de bulunan bir yarı doğru oluşturabiliriz ve bu yarı doğrular kesişmez. Son olarak $\mathbb{C}/f(D)$ nin kalan kısmı, yarı doğruları tarafından doldurulur.

Şimdi Bierberbach varsayımı konvekse yakın fonksiyonlar için geçerli olduğunu ispatlayacağız (Reade 1955).

Teorem 2.7.3 : $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ D bölgesinde konvekse yakın ise o zaman

$$|a_n| \leq n \quad (n = 2,3,\dots) \text{ dir.}$$

İspat: $g(z) = b_1 z + \dots$ yıldızıl fonksiyon olsun. $a_1 = 1$ normalleştirmesine rağmen $b_1 = 1$ olduğunu varsayamayız. $z\dfrac{f'(z)}{g(z)} = c_0 + c_1 z + \dots$ alarak

$$na_n = c_0 b_n + \sum_{\upsilon=1}^{n-1} c_{n-\upsilon} b_\upsilon \quad (n = 2,3,\dots) \quad \textbf{(5)}$$

vardır.

$\operatorname{Re}\left[zf'(z)/g(z)\right] > 0$ olduğundan dolayı $\upsilon \geq 1$ için $|c_\upsilon| \leq 2\operatorname{Re} c_0 \leq 2|c_0|$ olduğu Sonuç 2.5.8 den kolayca görülür. Ayrıca Teorem 2.6.7 den $|b_\upsilon| \leq \upsilon |b_1|$'dir. $c_0 b_1 = 1$, olduğundan **(5)** den

$$n|a_n| \leq n + 2\sum_{\upsilon=1}^{n-1} \upsilon = n^2$$

çıkar.

Örnek olarak, konvekse yakın fonksiyonların bir alt sınıfını düşünürsek $g(z) = \dfrac{z}{(1-z^2)}$ seçimi özel olarak basit geometrik bir yorumu verir.

(1) konvekse yakın fonksiyonların tanımından

$$\operatorname{Re}\left[(1-z^2)f'(z)\right] > 0 \quad (|z| < 1) \quad \textbf{(6)}$$

olur. Şimdi katsayıları reel olan ve $\mathbb{R}$ ye simetrik bölgelere sahip olan fonksiyonlara kısıtlayalım. Bu $f(z)$ yalınkat fonksiyonu **(6)** yı sağlarsa ancak ve ancak $f(D)$ imajiner eksene paralel her doğru ile ya kesişmiyor ya da bir aralıkta kesişiyorsa

$f(z)$ yalınkat fonksiyonu **(6)** yı sağladığı ispatlanabilir. (Brujin 1941, Grunsky 1971) Dolayısıyla bu tür fonksiyonlar imajiner eksenin doğrultusunda konveks denir. $\frac{z}{(1-z^2)}$ fonksiyonu bu sınıfa Robertson (1936) a aittir.

$f(z)$, D bölgesinde analitiktir fakat yalınkat olması gerekmez. O zaman genellikle $f(z)$,

$$\operatorname{Im} f(z)=0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} z=0 \quad \textbf{(7)}$$

ise reel tiptedir. Rogonsinski (1932). Tüm katsayıları reeldir. Tersine olarak reel katsayılı her yalınkat fonksiyon reel tiptedir. Çünkü $\operatorname{Im} f(z)=0$ ise $f(z)=\overline{f(z)}=f(\bar{z})$ olması gerektirir ve buradan da $z=\bar{z}$ yani $\operatorname{Im} z=0$ çıkar.

Teorem 2.7.4 : $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ $(|z|<1)$ reel katsayılara sahip olsun. O zaman aşağıdaki üç koşul eşittir:

(i) $f(z)$ reel tiptedir.

(ii) Fonksiyon $\left(1-z^2\right)\frac{f(z)}{z}=1+a_2z+\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_{n+1}-a_{n-1}\right)z^n$ D bölgesinde pozitif reel kısma sahiptir.

(iii) Bunlar $f(z)=\int_0^{\pi}\frac{z}{1-2z\cos t+z^2}d\gamma(t)$ $\gamma(\pi)-\gamma(0)=1$ olacak şekilde bir $(0\le t\le\pi)$ bir artan fonksiyonu $\gamma(t)$ vardır.

İspat: $f(z)$ reel tipte olsun. $f'(0)=1>0$ olduğundan dolayı $\operatorname{Im} z\ge 0$ için **(7)** den $\operatorname{Im} f(z)\ge 0$ çıkar. Dolayısıyla $z=re^{i\vartheta}$ $0\le \upsilon\le\pi$ için,

$$\operatorname{Re}\left[\left(r^2-z^2\right)\frac{f(z)}{z}\right]=2\sin\vartheta.\operatorname{Im} f\left(re^{i\vartheta}\right)\ge 0 \quad \textbf{(8)}$$

ve aynısı $\pi\le\vartheta\le 2\pi$ aralığı için de geçerlidir. Dolayısıyla **(8)**, maksimum prensibinden $|z|<r$ için geçerlidir ve $r\to 1-0$ olursa **(ii)** bulunur. Ayrıca Herglotz temsili formülü uygulanırsa **(ii)** sağlanır. (Teorem 2.5.7) $f(z)=\overline{f(\bar{z})}$ ni kullanarak **(iii)** kolayca bulunur. Sonuç olarak **(iii)** uygulanırsa $\operatorname{Im} z>0$ için $\operatorname{Im} f(z)>0$ ve buradan **(i)** çıkar.

$zf'(z)$ reel tipte ise ancak ve ancak reel katsayılı $f(z)=z+\ldots$ fonksiyonu imajiner eksen doğrultusunda konvekstir. **(6)** ve teorem 2.7.4 den bu sonuca varıyoruz; sonuç 2.6.6 karşılaştır;

Örnek 2.7.5 : $f(z)=\dfrac{\left(1+z^2\right)z}{\left(1-z^2\right)^2}=z+3z^3+5z^5+\ldots$ fonksiyon teorem 2.7.4 teki (ii) den reel tiptedir. Bu fonksiyon D bölgesinde yalınkat değildir. Çünkü o $\left|a_3-a_2^2\right|\leq 1$ bağıntısını sağlamaz (Teorem 2.4.6).

Sonuç 2.7.6 : $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ reel tipte ise o zaman

$$\left|a_{n+1}-a_{n-1}\right|\leq 2,\ \left|a_n\right|\leq n \quad (n=2,3,\ldots) \quad \textbf{(9)} \text{ dir.}$$

Bu sonuç Rogonsinski (1932) ve Dieudonne (1931) nin sonucu, Sonuç 2.5.8 ve **(ii)** den ortaya çıkar. $\left|a_n\right|\leq n$ tahmini $\left|a_2\right|\leq 2$ ve $a_1=1$ den başlayan tümevarım ile kanıtlanmıştır. Koebe fonksiyonu gösterir ki **(9)** eşitsizliği en iyi tahmindir.

Konvekse yakın fonksiyonlardan bahseden bazı makaleler: Brannan, Clunie ve Kirwan (1973), Clunie ve Pommerenke (1966), Krzyz (1962, 1963), Pommerenke (1965), Robertson (1936, 1965, 1966), Ruscheweyh ve Sheil-Small (1973), Thomas (1967). Konvekse yakın fonksiyonların bir genelleştirmesini Bazilevic (1955) tanıttı. Örneğin Thomas (1968), Zamorski (1962).

BÖLÜM 3
HARMONİK DÖNÜŞÜMLER

Bir reel değerli $u(x,y)$ fonksiyonu Laplace denklemini

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

sağlıyorsa harmoniktir. İki değişkenli fonksiyonların harmonik olması durumunda xy düzleminde bir D bölgesinden, uv düzleminde bir Ω bölgesine $u = u(x,y)$ den $v = v(x,y)$ ye bir birebir dönüşümü, bir harmonik dönüşümdür. $w = f(z) = u(z) + iv(z)$ yazılır ve $z = x + iy$, $w = u + iv$ kompleks gösterimi kullanmak daha uygun olur. Böylece kompleks değerli harmonik fonksiyon yalnız ve ancak D bölgesinde yalınkat (veya 1-1) yani D bölgesinde tüm z_1 ve z_2 noktaları için $z_1 \neq z_2$ iken $f(z_1) \neq f(z_2)$ ise bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinin harmonik dönüşümüdür. Burada $\mathbb{C}$ kompleks düzlemi gösterir. Bu kitaptaki "harmonik dönüşüm" terimi her zaman bir yalınkat kompleks değerli harmonik fonksiyon anlamına gelecektir.

Bir kompleks değerli fonksiyon $f = u + iv$, her $z \in D$ noktasında bir $f'(z)$ türevine sahip ise bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitiktir. Cauchy-Riemann denklemleri

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

dir. Diğer taraftan f kısmi türevleri sürekli ve Cauchy-Riemann denklemlerini sağlıyorsa, buradan f D bölgesinde analitiktir. (Analitik fonksiyonlar hakkında bilgi edinmek için Ahlfors (1979) a bakınız.) Her analitik fonksiyonun harmonik olduğu sonucu Cauchy-Riemann denklemlerinden (ve daha yüksek türevlerinin varlığından) çıkar. Cauchy-Riemann denklemlerini sağlayan bir (u,v) fonksiyon çiftine eşlenik denir ve v ye u nun bir harmonik eşleniği denir. Bu nedenle $-u$, v nin harmonik eşleniğidir. Daha açık olarak, eşlenik fonksiyonu yalnızca eklenecek bir sabit farkıyla belirleyebiliriz. Çok bağlantılı bir bölgede eşlenik fonksiyonun tek değerli olması gerekmez.

Açılar korunduğundan bir analitik yalınkat fonksiyona konform dönüşüm denir. Jakobiyeni sıfır olmayan ve sürekli birinci kısmi türevleri olan bütün fonksiyonlar arasında analitik fonksiyonları belirleyen açıları koruma özelliğidir. Çünkü bu durum Cauchy-Riemann denklemlerinin sağlanmasını gerektirir.

Burada amaç reel ve imajiner kısımlarının eşlenik olması gerekmeyen kompleks değerli harmonik yalınkat fonksiyonları çalışmaktır. Analitiklik terkedilince, ciddi sorunlar ortaya çıkar. Analitik fonksiyonların bileşimi altında korunmuş, ancak harmonik fonksiyonlar değildirler. Bir analitik fonksiyonun bir harmonik fonksiyonu harmoniktir fakat bir harmonik fonksiyonun bir analitik fonksiyonu harmonik olması gerekmez. Analitik fonksiyonlar bir cebir formundadır, ancak harmonik fonksiyonlar değildir. Hatta tersi veya bir harmonik fonksiyonların harmonik olması gerekmez. Bir harmonik dönüşümün tersinin harmonik olması gerekmez. Harmonik dönüşümlerin sınır davranışları konform dönüşümlere göre çok daha kompleks olabilir. Konform dönüşümlerin klasik teorisinin çoğunun harmonik dönüşümler üzerine taşınabileceği yine de gösterilecektir.

Bir $f = u + iv$ fonksiyonun Jakobiyeni

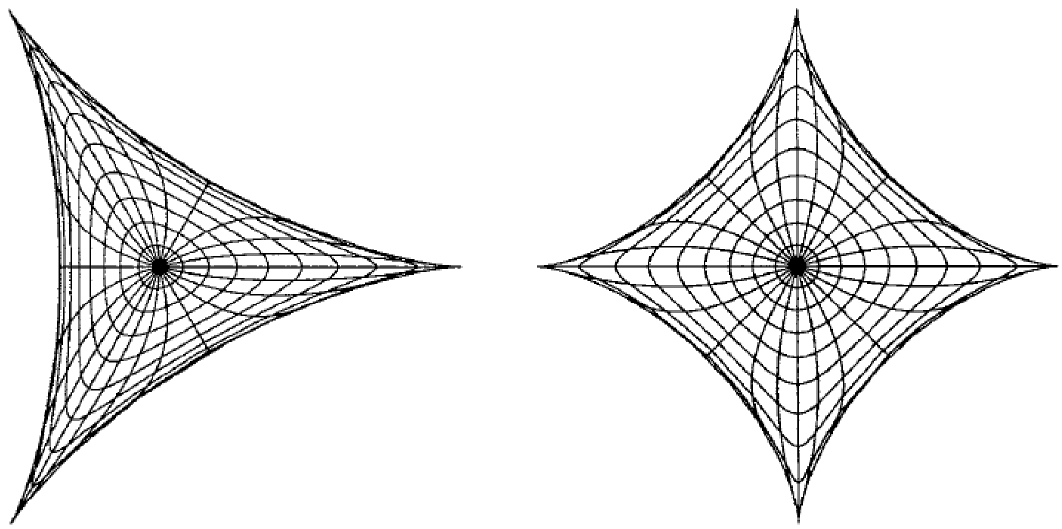
$$J_f(z) = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$$

olup indisler kısmi türevleri gösterir. f analitikse, onun Jakobiyeni

$$J_f(z) = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2$$

şeklindedir. $J_f(z) \neq 0$ olması yalnız ve ancak f, z de lokal olarak yalınkat olduğunda f, analitik fonksiyonlar için klasik bir sonuçtur. Hans Lewy 1936 da harmonik dönüşümler için bunun doğru olduğunu göstermiştir. Lewy teoremi ışığında, harmonik dönüşümler ya $J_f(z) > 0$ yön koruyan veya f yalınkat olduğunda D bölgesi boyunca $J_f(z) < 0$ ise yönü tersine çevirendir. Eğer yön-koruyansa o zaman $\overline{f}$ yönü tersine çevirir. Konform dönüşümler yön koruyandır. Konform olması gerekmeyen $|\alpha| \neq |\beta|$ olmak üzere $f(z) = \alpha z + \gamma + \beta \overline{z}$ afin dönüşümleri, harmonik dönüşümlerin en basit örneklerdir. $\gamma = 0$ olmak üzere Afin dönüşümler lineer dönüşümlerdir. Afin dönüşümlü harmonik dönüşümlerin her birleşimi yine bir harmonik dönüşümdür: f harmonikse o zaman $\alpha f+\gamma+\beta\overline{f}$ harmoniktir.

Diğer önemli bir alıştırma D açık birim dairesinin $f(z)=z+\frac{1}{2}\overline{z}^{2}$ fonksiyonu ile $|w|=\frac{3}{2}$ çemberinde çizili 3 yapraklı bir hiposikloidin iç bölgesi üzerine, dönüşümüdür. Onun yalınkatlığını doğrulamak için D bölgesinde bazı z_1 ve z_2 noktaları için $f(z_1)=f(z_2)$ varsayalım. O zaman $\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)=2(z_2-z_1)$.



(a) $n = 2$ (b) $n = 3$

Şekil 3.1 $f(z)=z+\frac{1}{n}\overline{z}^{n}$ dönüşümün görüntüsü

Ancak $z_1=z_2$ olmadıkça bu mümkün değildir. Çünkü $\left|z_1+z_2\right|<2$ dir. Aynı argüman $f(z)=z+\frac{1}{n}\overline{z}^{n}$ her $n\geq 2$ için yalınkat olduğunu gösterir.

$f(z)=z+\frac{1}{n}\overline{z}^{n}$ dönüşümü altında dairenin görüntüsü, Mathematica ile hesaplanmıştır. $n=2$ ve $n=3$ durumları için şekil 3.1 de gösterilir. Şekildeki eğriler radyal kesimleri için ve eşit aralıklı iç içe dairelerin görüntüsüdür. Genel olarak, bu dönüşüm altında dairenin görüntüsü, $|w|=\frac{n+1}{n}$ dairesinde $n+1$ iç içe çizilmiş yaprakcığın bir hiposikloidi ile sınırlıdır.

Düzlemde, basit bağlantılı bölgelerin harmonik dönüşümlerini incelerken, tanım bölgesi olarak birim daireyi alarak genellik bozulmaz. Daha kesin olarak $\Delta \neq \mathbb{C}$ olmak üzere bir Ω bölgesinin üzerine bir basit bağlantılı $\Delta \subset \mathbb{C}$ bölgesine f harmonik dönüşüm olduğunu farzedelim. Riemann dönüşüm teoremi Δ nın $\mathbb{D}$ üzerine φ bir konform dönüşümün varlığını sağlamaktadır. Bu nedenle $F = f \circ \varphi$ bileşimi Ω üzerine $\mathbb{D}$ nin bir harmonik dönüşümüdür. Orjinal dönüşüm φ nin tersi ψ olduğu zaman $f = F \circ \psi$ dir.

3.1 Bazı Temel Durumlar

İki basit diferansiyel operatör kompleks analizde yaygın ve çok pratik görünür. $z = x + iy$ de $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ ve $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ dır. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ eşitliği bir kompleks değerli $f(z)$ fonksiyonu için Cauchy-Riemann eşitliklerini yazmanın sadece diğer yoludur. Direk hesaplama f in Laplasyeninin $\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$ olduğunu gösterir. Bu nedenle sürekli ikinci kısmi türevleri olan f fonksiyonları için yalnız ve ancak $\frac{\partial f}{\partial z}$ analitik ise f in harmonik olduğu açıktır. Eğer f analitikse, o zaman $\frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$ adi türevdir. $\frac{\partial f}{\partial z}$ ve $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ operatörleri lineerdir ve diferansiyel operatörlerin genel özelliklerine sahiptir. Örneğin çarpım ve bölüm kurallarını alırsak

$$\frac{\partial}{\partial z}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial z} + g\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{g}\right) = g^{-2}\left(g\frac{\partial f}{\partial z} - f\frac{\partial g}{\partial z}\right)$$

ve $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ için aynıdır. Özel özellik

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

iki türeve bağlar.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

differansiyeli

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

olarak yazılabilir, bu nedenle $\frac{\partial f}{\partial z}$ ve $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ gösterimine motive ediliyor. $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$ ve $f_{\bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ gösterimi genellikle daha uygundur.

Bileşke fonksiyonların diferansiyeli için zincir kuralı şimdi elde edilebilir. $h = f \circ g$ den $w = f(z)$, $z = g(\zeta)$ ise o zaman $w = h(\zeta)$ dir.

$$dz = \frac{\partial g}{\partial \zeta}d\zeta + \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}d\bar{\zeta} \text{ ve } d\bar{z} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \zeta}d\zeta + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\zeta}}d\bar{\zeta} = \overline{\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}}d\zeta + \overline{\frac{\partial g}{\partial \zeta}}d\bar{\zeta}$$

bulduğumuzu yerine koyarsak

$$dh = \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial \zeta}d\zeta + \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}d\bar{\zeta}\right) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\left(\overline{\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}}d\zeta + \overline{\frac{\partial g}{\partial \zeta}}d\bar{\zeta}\right).$$

Böylece

$$\frac{\partial h}{\partial \zeta} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \zeta} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\overline{\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}} \text{ ve } \frac{\partial h}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\overline{\frac{\partial g}{\partial \zeta}}.$$

Bir $f = u + iv$ fonksiyonunun Jakobiyeni $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$. Sonuç olarak, $|f_z(z)| > |f_{\bar{z}}(z)|$ de f lokal yalınkat, yön-koruyan ve $|f_z(z)| < |f_{\bar{z}}(z)|$ olduğu zaman yönü tersine çevirendir. $J_f(z) > 0$ da $f_z(z) \neq 0$ olduğuna dikkat edelim. $w = f(z)$ yön-koruyan dönüşümleri için

$$\left(|f_z| - |f_{\bar{z}}|\right)|dz| \leq |dw| \leq \left(|f_z| + |f_{\bar{z}}|\right)|dz|$$

olduğunu görürüz. Bu kesin eşitsizlikler büyük ve küçük eksenlerin oranı olarak

$$D_f = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}$$

ile f in geometrik yorumu, bir sonsuz elips üzerine bir sonsuz daire dönüşümüdür. $D_f = D_f(z)$ ye z noktasında f **in dilatasyonu** denir. Açıktır ki $1 \leq D_f(z) < \infty$ dur. Bir yön-koruyan homeomorfizm f , eğer K sabit ve $1 \leq K < \infty$ olmak üzere , verilen bölge de $D_f(z) \le K$ ise **kuazikonform** veya K**-kuazikonform** denir. 1-kuazikonform dönüşümleri sadece konform dönüşümlerdir.

Genellikle $\mu_f = \dfrac{f_{\bar{z}}}{f_z}$ oranını dikkate alırsak, f in kompleks dilatasyonu denilmesi daha uygundur. Böylece f, yön-koruyan ise $0 \le |\mu_f(z)| < 1$ dir. $D_f(z) \le K$ ise yalnız ve ancak $|\mu_f(z)| \le \dfrac{(K-1)}{(K+1)}$ olduğu gözlenebilir. Bu bir yön-koruyan homeomorfizm kuazikonfomdur yalnız ve ancak μ_f kompleks dilatasyonun $|\mu_f(z)| \le k < 1$ belirli bölgede 1 den uzakta sınırlıdır. f dönüşümü yalnız ve ancak $\mu_f = 0$ olduğunda konformdur. Lehto ile Virtanen (1973) ve Ahlfors (1979) un kitapları kuazikonform dönüşümlerin genel teorisi için tavsiye edilir.

Harmonik dönüşümler teorisinde, ikinci kompleks dilatasyonu olarak bilinen, $\upsilon_f = \dfrac{\overline{f_{\bar{z}}}}{f_z}$ miktarı, μ_f birinci kompleks dilatasyonundan daha uygun olduğu ortaya çıkıyor. $|\upsilon_f| = |\mu_f|$ için f kuazikonformdur yalnız ve ancak $|\upsilon_f(z)| \le k < 1$ olduğu tekrar açıktır.

Şimdi f sürekli ikinci kısmi türevlerine sahip $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlanan bir kompleks değerli fonksiyon olsun. f in, $J_f(z) > 0$ Jakobiyeni ile D bölgesinde lokal olarak yalınkat olduğunu varsayalım. $\omega = \upsilon_f = \dfrac{\overline{f_{\bar{z}}}}{f_z}$ ikinci kompleks dilatasyonu olsun, sonra D bölgesinde $|\omega(z)| < 1$ dir. $\bar{z}$ ne bağlı $\overline{f_{\bar{z}}} = \omega f_z$ eşitliğinin türevi alınırsa $\overline{f_{z\bar{z}}} = f_{z\bar{z}}\omega + f_z\omega_{\bar{z}}$ bulunur.

Şimdi f, D bölgesinde harmonik ise $f_{z\bar{z}} = \dfrac{1}{4}\Delta f = 0$ dır. Böylece D bölgesinde $\omega_{\bar{z}} = 0$ olup ω analitiktir. Diğer taraftan, ω analitik ise o zaman $\overline{f_{z\bar{z}}} = f_{z\bar{z}}\omega$. Fakat $|\omega(z)| < 1$ oduğundan f harmoniktir ve $f_{z\bar{z}} = 0$ sonucu ortaya çıkar. Böylece ω analitikse yalnız ve ancak f harmoniktir. Özellikle bir yön-koruyan harmonik dönüşümün f dilatasyonu ω nin modülü birden küçüktür, her zaman bir analitik fonksiyondur. Bu ω fonksiyonu f in **analitik dilatasyonu** olacaktır, ya da sadece **dilatasyon** denir. $\omega(z)\equiv 0$ olması yalnız ve ancak f in analitik olduğuna dikkat edelim.

Analitik dilatasyonunun bazı güzel özellikleri vardır. Örneğin f in, analitik dilatasyonu ω olmak üzere bir yön-koruyan harmonik dönüşüm ise ve $|\beta|<|\alpha|$ olmak üzere $A(w)=\alpha w+\gamma+\beta\overline{w}$ afin dönüşümü ise o zaman $F=A\circ f$ bileşkesi $\dfrac{\overline{F_{\bar z}}}{F_z}=\dfrac{\overline{\alpha}\omega+\overline{\beta}}{\beta\omega+\alpha}$ analitik dilatasyonu ile bir yön-koruyan harmonik dönüşümdür.

$$F_z = A_w f_z + A_{\bar w}\overline{f_{\bar z}} = \alpha f_z + \beta\overline{f_{\bar z}}$$

$$F_{\bar z} = A_w f_{\bar z} + A_{\bar w}\overline{f_z} = \alpha f_{\bar z} + \beta\overline{f_z}$$

ispatı için zincir kuralı kullanılır. Böylece ,

$$\frac{\overline{F_{\bar z}}}{F_z}=\frac{\overline{\alpha}\,\overline{f_{\bar z}}+\overline{\beta}f_z}{\beta\overline{f_{\bar z}}+\alpha f_{\bar z}}=\frac{\overline{\alpha}\omega+\overline{\beta}}{\beta\omega+\alpha}.$$

f, ω analitik dilatasyonu ile Ω bölgesi üzerine bir D basit bağlantılı bölgesine bir yön-koruyan harmonik dönüşüm olsun. ψ, D bölgesi üzerine konform olarak bir Δ bölgesine dönüşüm olsun. O zaman $F=f\circ\psi$ bileşkesi Ω üzerine harmonik olarak Δ dönüşümdür, ve $\omega\circ\psi$ analitik dilatasyona sahiptir. Bunu görmek için basit olarak $F_\zeta = f_z\psi'$ ve $F_{\bar\zeta} = f_{\bar z}\overline{\psi'}$ hesaplamasında zincir kuralı kullanılır. Böylece F in analitik dilatasyonu

$$\frac{\overline{F_{\bar\zeta}(\zeta)}}{F_\zeta(\zeta)}=\frac{\overline{f_{\bar z}(\psi(\zeta))}}{f_z(\psi(\zeta))}=\omega(\psi(\zeta)).$$

Benzer şekilde, ilk kompleks dilatasyon $\mu=\dfrac{f_{\bar z}}{f_z}$ bir gerçek değişmez özelliği gösterir. f, $F=\varphi\circ f$ ve φ bir konform dönüşümü izlemektedir, sonra F, aynı kompleks dilatasyon μ ye sahiptir. Gerçekten, zincir kuralı $F_z=\varphi' f_z$ ve $F_{\bar z}=\varphi' f_{\bar z}$ böylece $\dfrac{F_{\bar z}}{F_z}=\dfrac{f_{\bar z}}{f_z}$ olduğunu verir.

Bir $D\subset\mathbb{C}$ basit bağlantılı bölgesinde bir kompleks değerli harmonik f fonksiyonu, h ve g, D bölgesinde analitik olmak üzere, $f=h+\overline{g}$ gösterimine sahiptir; bu gösterimde eklenecek sabit kadar tektir. İspatı için h, D bölgesinde analitik verildiğinde f_z analitikse f harmonik ve $h' = f_z$ olduğunu hatırlarız. Şimdi $g = \overline{f} - \overline{h}$ alalım ve h ın tanımı gereği, D bölgesinde $g_{\bar{z}} = \overline{f_z} - \overline{h_z} = 0$ olduğu gözlenir. Böylece g, D bölgesinde analitiktir. Gösterimin tekliği bir fonksiyonun hem analitik ve hem de analitik olmayan sabiti olmak zorunda olduğu gerçeğine bağlıdır. (Bir analitik olmayan fonksiyon bir analitik fonksiyonun konjugeti olarak tanımlandı.) f gerçek değerli ise bir eklenen imajiner sabite benzersiz olduğu kadar, f in analitik tamlaması $2h$ olduğunda gösterim $f = h + \overline{h} = 2\operatorname{Re}\{2h\}$ a indirgenir. Çarpma bağlantılı bölgede $f = h + \overline{g}$ gösterimi lokal olarak geçerlidir, fakat tek değerli global uzantısı olmayabilir.

$\mathbb{D}$ birim dairesinin bir f harmonik dönüşümü için, $g(0) = 0$ olduğundan dolayı eklenen sabit seçimi uygundur. $f = h + \overline{g}$ gösterimi o zaman tektir ve f **in kanonik gösterimi** denir.

3.2 Argüman Prensibi

İlk olarak analitik fonksiyonlar için klasik argüman prensibini ve onun mükemmel ispatını hatırlatalım. D bölgesi, “saat yönünün tersi” veya pozitif doğrultuda olan C Jordan eğrisi ile sınırlandırılmış bir bölge olsun. f, C bölgesinde $f(z) \neq 0$ olmak üzere, $\overline{D}$ bölgesinde sürekli ve D bölgesinde analitik olsun. Orijin etrafında $f(C)$ görüntü bölgesinin sarım sayısı, toplam 2π C etrafında z bir kere döndüğünde $f(z)$ in argümanındaki değişiklik her sıfır katı kadar sayılmak üzere $I = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\Delta_C \arg f(z)$ dir. D bölgesinde N, f in sıfırların toplam sayısı olsun. Argüman prensibi $N = I$ olduğunu idda eder.

Alışılmış ispat, $\frac{f'}{f}$ in rezidüsü n olan bir basit kutbu ve aynı zamanda f in n katlı bir sıfıra sahip olduğu yorumuyla başlar, bu yüzden rezidü teoremi

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\Delta_C \log f(z) = I$$

verir. (Aslında, $f'(z)$ türevinden dolayı C üzerinde tanımlı olması gerekli değildir, integrasyonunun eğrisi biraz daralmıştır.) $\overline{D}$ bölgesinde sürekli ve D bölgesinde analitik olan bir f fonksiyonu C yi yön-korunmak üzere Ω bölgesini sınırlayan bir Γ Jordan eğrisi üzerine taşıyorsa, o zaman D bölgesini yalınkat olarak Ω üzerine dönüştürür. Başka bir deyişle sınır üzerindeki yalınkatlığı, içininde yalınkat olduğu anlamına gelir.

f sabit olmayan kompleks değerli harmonik fonksiyon, ω, $|\omega(z)|<1$ olan analitik bir fonksiyon olmak üzere D, bölgesinde $\overline{f_{\bar{z}}}=\omega f_z$ Beltrami denklemini sağlarsa, yön-koruyan olarak sınıflandırılacaktır. Jakobiyen $J_f=|f_z|^2-|f_{\bar{z}}|^2$ olduğundan özel olarak $f_z(z)\neq 0$ olduğu zaman $J_f(z)>0$ olduğu anlamına gelir. D bölgesinde bir z_0 noktasında $f(z_0)=0$ ise sıfırının mertebesi $f=h+\overline{g}$ kanonik gösterimi cinsinden tanımlanabilir. $a_n\neq 0$, $b_m\neq 0$ ve $m\geq 1$, $n\geq 1$ olmak üzere

$$h(z)=a_0+\sum_{k=n}^{\infty}a_k(z-z_0)^k \qquad g(z)=b_0+\sum_{k=m}^{\infty}b_k(z-z_0)^k$$

olarak h ve g nin kuvvet serileri açılımlarını yazarız. (Burada f in analitik olmadığı varsayılır.) Aslında, $b_0=-\overline{a_0}$ dır. Çünkü $f(z_0)=0$ dır. f in yön-koruyan özelliği $|\omega(z)|<1$ olmak üzere $g'=\omega h'$ eşdeğer formuna gider. Buradan $|b_n|<|a_n|$ ve $m>n$ veya $m=n$ olduğu elde edilir. Her iki durumda da f in, z_0 da n katlı bir sıfıra sahip olduğunu söyleyeceğiz. Yapısal formülün hemen bir sonucu olarak bir yön-koruyan harmonik fonksiyonun sıfırlarının ayrık olduğu anlaşılabilir. Gerçekten $f(z_0)=0$ ise o zaman $0<|z-z_0|<\delta$ için

$$\psi(z)=\left(\frac{\overline{b_m}}{a_n}\right)\left(\overline{z}-\overline{z_0}\right)^m(z-z_0)^{-n}+\ldots$$

olmak üzere

$$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=a_n(z-z_0)^n\{1+\psi(z)\}$$

yazılması mümkündür. Fakat z_0 yeterince yakın z için $|\psi(z)|<1$ olduğu açıktır, $m\geq n$ olduğundan dolayı ve $m=n$ ise $\left|\frac{b_n}{a_n}\right|<1$ dir. Bundan dolayı z_0 a yakın başka bir yerde $f(z) \neq 0$ ve f in sıfırları ayrıktır. Yön-koruyan hipotezinin gerekli olduğu gözlenir, çünkü bir harmonik fonksiyonun sıfırları her zaman ayrık değildir. Örneğin, $f(z) = z + \bar{z} = 2x$ fonksiyonu imajiner eksende her noktada boştur.

Şimdi harmonik fonksiyonlar için argüman prensibi analitik fonksiyonlar için klasik sonucun bir direk genelleştirilmesi olarak formüle edilebilir.

3.3 Konform Dönüşümler

Harmonik dönüşümlerin teorisinin çoğunlukla klasik konform dönüşüm teorisinin çok özel bir durumundan etkilenmiştir. Teoremlerin ispatları ve daha fazla bilgi için Nehari (1949), Ahlfors (1973), Pommerenke (1975) ve Duren (1983) in çalışmalarına bakılabilir.

Bölge açık bağlantılı küme olarak tanımlanır. Bir bölgenin genişletilmiş $\hat{\mathbb{C}}$ kompleks düzlemine göre tümleyeni bağlantılı ise bu bölgeye basit bağlantılı denir. Tümleyeni iki bileşenden oluşan bölgeye çift bağlantılı denir.

Bir f fonksiyonu Ω dan Δ ya $(\Omega \subset \mathbb{C})$ konform dönüşüm olabilmesi için f nin Ω da analitik ve tümüyle yalınkat ve (örneğin bire bir) Ω yı Dye dönüştürmesi $f(\Omega) = D$ olmasını gerektirir. Bir f analitik fonksiyonunun Ω da lokal yalınkat olduğunun söylenebilmesi için Ω nın her noktasınındaki komşuluklarında yalınkat olması gerekir. Lokal yalınkat olması için gerek ve yeter şart Ω da $f'(z) \neq 0$ olmalıdır.

Ünlü Riemann dönüşüm teorimi her basit bağlantılı $\Omega \subset \mathbb{C}$ $\Omega \neq \mathbb{C}$ bölgesinde keyfi belirlenmiş $\zeta \in \Omega$ noktası için $f'(\zeta) > 0$ ve $f(\zeta) = 0$ şartıyla $\mathbb{D}$ birim çember üzerine tek konform dönüşümün f olduğunu kabul ettiğini belirtir. Çünkü ters fonksiyonu analitik olmak zorundadır. Bu D, Ω üzerine konform olarak dönüştürülebilir, demekle aynı şeydir. Caratheodory genişleme teoremi (özel bir durumda); bir Ω Jordan bölgesinin D Jordan bölgesi üzerine dönüşümü $\overline{\Omega}$ nın $\overline{D}$ üzerine bir homeomorfizmasına genişletilebilir. Bu son teorem kuazikonform dönüşümlerine genelleştirilebilir.

Riemann teoreminin modern ispatı normal ailelere dayanır. Eğer $\mathcal{F}$ fonksiyonlarının her dizisinin Ω da lokal düzgün yakınsak alt dizileri varsa Ω bölgesinde tanımlı f fonksiyonların $\mathcal{F}$ sınıfına **normal aile denir.** Heine-Borel teoreminde görüldüğü gibi, lokal düzgün yakınsaklık, Ω nın her kompakt alt kümesine üzerindeki düzgün yakınsaklıkla aynıdır. $\mathcal{F}$ in bir normal aile olması yalnız ve ancak $\mathcal{F}$ deki her fonksiyon dizisi Ω nın her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsak alt dizilere sahip olmasıyla gösterilebilir. Montel'in teoremine göre analitik fonksiyon ailesi ancak ve ancak lokal sınırlı ise normaldir. İspat temel olarak Arzela_Ascoli teoremini kullanır. Rudin (1976) ki o da bir ailenin normal olabilmesi için onun eş sürekli ve sınırlı olması ile olanaklıdır. Cauchy integral formülünün bir uygulaması gösterir ki analitik fonksiyonların bir $\mathcal{F}$ ailesi lokal sınırlı ise o zaman $\mathcal{F}'= \{ f' : f \in \mathcal{F}\}$ ve eş süreklilik izler.

Kompleks analizin standart bir sonucu analitik fonksiyonlarının dizisinin lokal düzgün, limiti yine analitiktir deriz. Analitik yalınkat fonksiyonlarının bir dizisinin lokal düzgün limiti ya yalınkat ya da sabittir.

Cartheordory yakınsaklık teoremi (Duren, s.76 bak.) bir analitik yalınkat fonksiyonlarının bir dizisinin lokal düzgün yakınsaklılığı dizileri sırasının yakınsaklık kavramı ile ilişkilendirir. $\{D_n\}$ kompleks düzlemdeki bölgeler dizisi orijin içeren en geniş D bölgesi olarak tanımlanan D_n bölgelerinin kesişimi içinde bir nokta ise $\{D_n\}$ dizisinin çekirdeği orjin içeren en geniş D bölgesi olarak tanımlanır ve sonlu sayıda D_n bölgelerinin D nin her kompakt alt kümesi olma özelliğine sahip olur. Eğer orijin kesişimin noktası içinde değilse çekirdek $D=\{0\}$ şeklinde tanımlanır. Her iki durumda da eğer her alt dizi aynı çekirdeğe sahip ise $\{D_n\}$ dizisi eş çekirdeğine yakınsaktır. $(D_n \to D)$ Şimdi f_n, D_n bölgesindeki birim daire $\mathbb{D}$ nin konform dönüşümü olsun. $f_n(0)=0$ ve $f_n'(0)>0$ dır. $\{D_n\}$ nin çekirdeği D olsun. Caratheodory genişleme teoremi, f_n, f e $\mathbb{D}$ de lokal düzgün olarak yakınsaması ancak ve ancak $D_n \to D \neq \mathbb{C}$ olduğunu söyler. Yakınsama durumunda iki olasılık vardır. Eğer $D=\{0\}$ ise o zaman $f=0$ dır. $D \neq \{0\}$ ise o zaman D basit bağlantılı bölgedir ve f, D bölgesini konform olarak $\mathbb{D}$ ye dönüştürür.

S sınıfı, $\mathbb{D}$ deki bütün analitik yalınkat fonksiyonlardan oluşur, yani $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ olarak normalize edilmiştir. Her $f \in S$ fonksiyonu $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$, $(|z|<1)$ şeklindeki kuvvet serisinin açılımına sahiptir. Koebe fonksiyonu

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+\ldots \in S$$

dir ve birim daireyi negatif reel x eksende $-\infty$ dan $-\frac{1}{4}$ e kadar ki kısım hariç tüm kompleks düzleme dönüştürür. Koebe bir çeyrek teoremi $|w|<\frac{1}{4}$ dairesinin S deki her fonksiyonun dizisini içerir. Bierbach'ın teoremi her $f \in S$ fonksiyonu için $|a_2|\le 2$ olduğunu belirtir. Sadece $f(z)=e^{-i\theta}k\left(e^{i\theta}z\right)$ fonksiyonları ile eşitlik sağlanır. Koebe fonksiyonunun rotasyonları, Bierberbach teoremi Koebe'nin bir çeyrek teoreminin ve diğer geometrik bilgilerin varlığı için kolay bir ispatını verir. Bu Koebe'nin distorsiyon teoremine götürür ki bu keskin sınırları sağlar. Her $f \in S$ için

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\le |f'(z)|\le \frac{1+r}{(1-r)^3}, \qquad r=|z|<1.$$

Yine eşitlik Koebe fonksiyonunun uygun rotasyonları için sağlanır. Koebe'nin bükülme (distorsiyon) teoremi $f \in S$ için

$$\frac{r}{(1+r)^2}\le |f(z)|\le \frac{r}{(1-r)^2}, \qquad r=|z|<1$$

büyüme teoremine dönüşür. Bierberbach'nın teoremi $f \in S$ teki her fonksiyonun katsayıların $|a_n|\le n$ her $n=2,3,\ldots$ tahmini şeklinde genişletilebilir. Bu Bierberbach'ın konjektürü olarak bilinir ve Branges tarafından 1984 te ispatlanmıştır. Klasik çizgilerde bir ispat ispat için Fitz Gerald (1985) ve Pommerenke (1975) ye bakınız.

3.4 Harmonik Dönüşümlerin Genel Özellikleri

Bu bölümde, konform dönüşümlerin iyi bilinen tüm özelliklerini genelleştirerek, harmonik dönüşümlerin bir kaç temel özelliğini geliştireceğiz. Kritik noktalar üzerine bir ön tartışma, Jakobiyeni sıfır olmayan bir lokal yalınkat harmonik fonksiyonlardan söz eden Lewy'nin teoreminin bir ispatına gider. Daha sonra birim daireyi yalınkat olarak bütün düzlem üzerine dönüştüren harmonik fonksiyon yoktur diyen Rado'nun teoremi gelir.

3.5 Harmonik Fonksiyonların Kritik Noktaları

$u = u(x, y)$ düzlemin bir bölgesinde sürekli birinci kısmi türevleri olan bir reel değerli fonksiyon olsun. u nun bir kritik noktası $\frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y}$ her ikisinin de sıfır olduğu noktadır. Kritik olmayan noktalara **regüler noktalar** denir. Geometrik olarak açıktır ki bir harmonik fonksiyonlar için kritik kümeler, her zaman ayrıktır.

Teorem 3.5.1: Bir sabit olmayan harmonik fonksiyonunun bütün kritik noktaları izoledir.

İspat: u nun kritik noktaları $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ olduğunda kesindir. Fakat u harmonikse, $\frac{\partial u}{\partial z}$ analitiktir ve bu yüzden onun sıfırları $\frac{\partial u}{\partial z} \equiv 0$ olduğu sürece izoledir.

Sonraki teorem bir kritik nokta civarındaki bir harmonik fonksiyonun sabite eşit değerler dizisini bir bütün olarak düşünmeyi bilmek önemli olacaktır.

Teorem 3.5.2: Kritik bir z_0 noktasında yapısını bilmek bakımından kümesi önemlidir. Sabit olmayan harmonik fonksiyonun aldığı sabit değerler kümesi z_0 da eşit açılı olarak kesişen lokal iki veya daha fazla analitik yaydan oluşur.

İspat: $u = u(z)$, z_0 kritik noktasının bir komşuluğunda harmonik olsun. Bir harmonik fonksiyonun kritik noktaları izole olduğundan, u nun bütün diğer kritik noktalar hariç yeteri kadar küçük z_0 civarında bir Δ dairesel yayı seçebiliriz.

$f = u + iv$, Δ da u nun bir analitik tümleyeni olsun. $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ z_0 da orada da sıfır olduğundan Cauchy-Riemann eşitliklerinden, z_0 da $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ her ikisi de sıfırdır. Böylece $f'(z_0) = 0$ $z_0 = 0$ olduğunda $f(z_0) = 0$ olup kolaylık için $z_0 = 0$ olsun. O halde, orjin civarında f, bir $m \geq 2$ tamsayısı için $f(z) = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \ldots$, $a_m \neq 0$ formuna sahiptir. $u(z) = \mathrm{Re}\{f(z)\} = 0$ olan noktalar kümesi imajiner eksenin f altında f in ters görüntü kümesidir. $f(z)$ den dolayı "orjin civarında z^m nin katı bir sabit gibi davranır." u nun sabite eşit olduğu değerler kümesi belirtilen özelliği sağlar. Orjinin bir komşuluğunda $\psi(z) = a_m + a_{m+1} z + a_{m+2} z^2 + \ldots \neq 0$ olarak $f(z) = z^m \psi(z)$ yazarız. Orjin civarında yalınkat ve analitik olan $\varphi(z) = z\left[\psi(z)\right]^{1/m} = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$, $c_1 = a_m^{1/m}$ formundaki fonksiyon $f(z)$ in m inci köküdür.

O zaman f, $f(z) = \left[\varphi(z)\right]^m$ lokal yapıya sahiptir ve $f(z)$, $\dfrac{\pi}{m}$ eşit açılı orjinden geçen ve orada kesişen bir m doğruların sisteminde $\varphi(z)$ noktası sistemde olduğu zaman kesin olarak sadece imajinerdir. Fakat φ, $\varphi(0) = 0$ ve lokal yalınkattır, bu yüzden doğruların bu sistemin ters görüntü kümesi, eşit açılı $\dfrac{\pi}{m}$ ile orada kesişen orjin sayesinde geçen m analitik yayların lokal olarak bir sistemidir. Bu, teoremin varsayımları u harmonik fonksiyonunun aldığı sabit değerler kümesinin lokal yapısıdır.

z_0, u nun bir regüler noktası ise o zaman $f'(z_0) \neq 0$ ve f, z_0 civarında lokal yalınkattır. Açıktır ki u nun aldığı sabit değerler kümesi z_0 dan geçen lokal bir tek analitik yaydır. Özel olarak harmonik fonksiyonlarının aldığı sabit değerler kümesi regüler bir noktada sınırlandırılamaz.

3.6 Lewy Teoremi

Ters dönüşüm teoremine göre, Jakobiyeni sıfır olmayan ile $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 'e bir c' dönüşümü lokal olarak tersidir. (Örnek için Rudin (1976) sf.221 bak.) Genel olarak Jakobiyeni'nin sıfır olmaması lokal tersine çevirmek için gerekli değildir. Örnek için, $x \to x^3$ birincil fonksiyonu $\mathbb{R}^1$ üzerine $\mathbb{R}^1$ e yalınkat olarak dönüştürür, yani Jakobiyeni orjinde sıfırdır. f analitik fonksiyonlar için $f'(z_0) \neq 0$ koşulu z_0 da lokal yalınkatlık için gerekli ve yeterli olduğu iyi bilinmektedir. Analitik fonksiyonlar için Jakobiyeni $J_f(z) = |f'(z)|^2$ dir. Lokal yalınkat analitik fonksiyonunun herhangi bir noktada sıfır olması gerekmez. Hans Lewy'nin bir teoremi aynı prensibin düzlemde harmonik fonksiyonlar için daha genel olarak geçerli olduğunu söyler.

Lewy teoremi: f kompleks değerli harmonik fonksiyon ise, yani bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde lokal yalınkat ise, o zaman onun Jakobiyeni $J_f(z)$ bütün $z \in D$ için sıfırdan farklıdır.

İspat: $f = u + iv$ yazalım ve bir $z_0 \in D$ noktası için $J_f(z_0) = 0$ olduğunu varsayalım. Bunun anlamı $\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}$ matrisinin z_0 da determinantının sıfıra eşit olmasıdır. Bu yüzden lineer homojen denklem sistemi

$$\begin{aligned} au_x + bv_x &= 0 \\ au_y + bv_y &= 0 \end{aligned}$$

$(a,b) \neq (0,0)$ sıfırdan farklı bir çözümü vardır. Diğer bir deyişle $\psi = au + bv$ reel değerli harmonik fonksiyon z_0 da kritik bir noktaya sahiptir. $f(z_0) = 0$ olduğunu varsayalım. z_0 civarında aldığı sabit değerler kümesini gözönüne alalım. Önceki bölümde görüldüğü gibi sabit değerler kümesi z_0 da kesişen eşit açılı lokal olarak ayrık iki ya da daha fazla yaylardan oluşur. Diğer taraftan f, bu değerler kümesini $au + bv = 0$ doğrusu üzerine dönüştürür. Fakat f, z_0 da lokal olarak yalınkattır, böylece bir lineer doğru parçası üzerine kesişen birkaç yayın birleşiminden oluşan kümeyi doğru parçası üzerine taşıyamaz. Böylece, $J_f\left(z_0\right)=0$ varsayımı bir çelişkiye götürür.

Lipman Bers (1951) bir makalesinde görülen bu ispat, uygulaması Lewy'nin orjinal argümanından basittir. Ancak temel fikir, farklı bir amaç için: şu anda Helmut Kneser tarafından daha önce kullanılmıştır. Teoremin ispatı şimdi Rado-Kneser-Choquet teoremi olarak bilinir.

3.7 Heinz Lemması

Şimdi birim dairenin kendi üzerine harmonik dönüşümlerinin temel bir özelliğine dönelim. Bu noktada Heinz Lemmasının ilkel bir versiyonunu kurmak uygun olacaktır.

Heinz'in Lemması: f, $f\left(0\right)=0$ olmak üzere birim daireyi harmonik olarak kendi üzerine dönüştürsün. O zaman bir mutlak sabit $c>0$ için $\left|f_z\left(0\right)\right|^2+\left|f_{\bar{z}}\left(0\right)\right|^2\geq c$.

Erhard Heinz, 1952 de bu lemmayı keşfetti ve belli minimal yüzeylerin tahmin Gauss eğriliğini tahmin etmek için uyguladı. Onun nispeten basit ispatı $c=0{,}1788\ldots$ sabitini elde etmeyi sağlar. Daha sonra J.C.C. Nitsche (1958,1959,1963), H.L. de Varies (1962,1969), ve Heinz (1959), sabitin düzeltilmiş değerleri üzerine farklı ispatlar verdiler. Kesin değeri $c=\dfrac{27}{4\pi^2}=0{,}6839$ olarak tahmin ettiler ve sonunda R.R. Hall (1982/83) ile doğrulandı. Ancak zaten lemmanın ilkel formu önemli uygulamalara sahip ve kanıtlamak nispeten kolay olduğundan, Heinz' in orjinal ispatının bir versiyonu şimdi ortaya konulacaktır.

Bir başka açıklama Heinz' in lemmasını koymaya yardımcı olabilir.

$$\left|f_z\right|^2+\left|f_{\bar{z}}\right|^2=\frac{1}{2}\left(u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2\right),$$

$f=u+iv$ dönüşümü altında distorsiyonun bir ölçümü olarak gözlenebilir. Lewy'nin teoremi, $\left|f_z\right|^2-\left|f_{\bar{z}}\right|^2$ Jakobiyeni, dairede kesinlikle pozitif olduğunu söyler, fakat bu bile Heinz' in lemmasının hipotezleri altında orjinde mutlak pozitif alt sınırı olmadığını belirtir. Böylece, distorsiyon teoremi en doğal haliyle yanlıştır ve Heinz lemması yararlı bir alternatiftir.

Heinz Lemmasının Kanıtı: Aşağıdaki ispat yaklaşımı, f in $\mathbb{D}$ nin bir homeomorfizmasını, kendi üzerine dönüştürdüğünü varsaymak yeterlidir. $0<r<1$ için $D_r \subset \mathbb{D}$, $|w|<r$ dairesinin f altında ters görüntü kümesi olsun, ve φ, $\varphi(0)=0$ olmak üzere $\mathbb{D}$'nin D_r üzerine bir konform dönüşümü olsun. O zaman $g=\frac{1}{r}f\circ\varphi$ $g(0)=0$ olmak üzere $\mathbb{D}$ yi harmonik olarak kendi üzerine dönüştürür. ($f(0)=0$ dan dolayı) ve g, D nin kapanışına homeomorfik olarak uzanır. Fakat $g_z(0)=\frac{1}{r}f_z(0)\varphi'(0)$ ve $g_{\bar z}(0)=\frac{1}{r}f_{\bar z}(0)\overline{\varphi'(0)}$, yani bu $|g_z(0)|^2+|g_{\bar z}(0)|^2\geq c$ olduğunu gösterebilir, istenen eşitsizlik, $|f_z(0)|^2+|f_{\bar z}(0)|^2\geq c$, $r\to 1$ e gider. Çünkü Schwarz lemması $|\varphi'(0)|\leq 1$ verir.

Tahmin edilen açıklamanın simetrisi açısından, bu da f in yön-koruyan olduğu genelleştirilmesini kaybetmediğini varsayalım. Bu varsayımlar altında f in bir Poisson temsilinin olduğu açıktır:

$$f\left(e^{it}\right)=e^{i\theta(t)} \text{ olmak üzere } f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{\left|e^{it}-z\right|^2}f\left(e^{it}\right)dt$$

ve $\theta(t)$ sürekli ve $\theta(2\pi)-\theta(0)=2\pi$ ile $[0,2\pi]$ aralığında kesinlikle artandır. Standart rotasyonda, $a_1=f_z(0)$, $b_1=f_{\bar z}(0)$ için $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_nz^n+\overline{b_nz}^n\right)$ açılımına sahiptir. Poisson çekirdeği $\frac{1-|z|^2}{\left|e^{it}-z\right|^2}=\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right\}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\mathrm{int}}z^n+e^{\mathrm{int}}z^{-n}\right)$ dir.

Poisson temsili formülleri $a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-\mathrm{int}}e^{i\theta(t)}dt$, $b_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-\mathrm{int}}e^{-i\theta(t)}dt$ dir. Şimdi kısmi integrasyon ile

$$2\pi na_n=\int_0^{2\pi}e^{-\mathrm{int}}e^{i\theta(t)}d\theta(t),\quad 2\pi nb_n=-\int_0^{2\pi}e^{-\mathrm{int}}e^{-i\theta(t)}d\theta(t)$$

verir. Öte yandan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{it}\right)\right|^2dt=1$$

olduğu Parseval'in bağıntısından çıkar. Böylece, bu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)\leq 1-c$, $c>0$ gösterilmesi gerekmektedir.

$|a_n|\leq \frac{1}{n}$ ve $|b_n|\leq \frac{1}{n}$ bu önemsiz açık tahminleri amaç için yeterince iyi değildir. Bunun yerine, a_n ve b_n için olan formülleri $|a_n|^2+|b_n|^2$ için bir düzeltilmiş olan tahminlerle birleştirmek uygun olacaktır. Kısa bir hesaplama aşağıdaki ifadeye gider.

$$
\begin{aligned}
2\pi^2 n^2\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos n(s-t)\cos\left[\theta(s)-\theta(t)\right]d\theta(s)\,d\theta(t) \\
&\leq \int_0^{2\pi} d\theta(t)\int_0^{2\pi}\left|ds\sin\left[\theta(s)-\theta(t)\right]\right| \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta(t)\int_0^{2\pi}\left|d\sin\theta\right| = 8\pi
\end{aligned}
$$

Bu tahmini uygulayarak,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)\leq \frac{4}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{4}{\pi} \text{ çıkar.}$$

$c=1-\frac{2\pi}{3}+\frac{4}{\pi}=0{,}1778\ldots$ olmak üzere istenilen eşitsizlik bulunur. Heinz' nin eşitsizliği şimdi Parseval' in bağıntısından elde edilir.

3.8 Rado Teoremi

α ve β kompleks sabitler olmak üzere $f(z)=\alpha z+\beta$ formunun bu onun bütün $\mathbb{C}$ kompleks düzleminin kendi üzerine yalnızca dönüştürdüğü konform olarak dönüşümleri bilinmektedir. Sonsuzda bir esas tekil noktası olmayan f için hızlı bir ispatı Picard teoreminde kullanılmıştır. Böylece f polinomu, düzlemde yalınkat ise birinci dereceden olmalıdır. Aşağıdaki teorem harmonik dönüşümlerin sonucunu verir.

Teorem 3.8.1: $\mathbb{C}$ yi kendi üzerine dönüştüren harmonik dönüşüm, α , β , γ kompleks sabitler ve $|\alpha|\neq|\beta|$ olmak üzere $f(z)=\alpha z+\gamma+\beta\bar{z}$ afin dönüşümleridir.

İspat: f in genel olarak yön-koruyan olduğu varsayımını bozmaksızın ve $\mathbb{C}$ yi $\mathbb{C}$ üzerine harmonik dönüşümü $f = h + \overline{g}$ olsun. Bunun anlamı $|g'(z)| < |h'(z)|$ olduğu veya bütün $z \in \mathbb{C}$ için $\left|\dfrac{g'(z)}{h'(z)}\right| < 1$ olmasıdır. Bu nedenle Liouville'nin teoremi ile $|b| < 1$ olmak üzere b bir kompleks sabiti için $\dfrac{g'(z)}{h'(z)} \equiv b$ dir. İntegrali alınırsa c sabit olmak üzere $g(z) = bh(z) + c$ yi verir.

Böylece f, $f = h + \overline{c} + \overline{bh} = F \circ h$ formuna sahiptir. Burada F bir tersine olarak afin dönüşümüdür. Buradan , $\mathbb{C}$ yi $\mathbb{C}$ üzerine yalınkat olarak $h = F^{-1} \circ f$ dönüştürdüğü çıkar. Fakat h, analitiktir yani α ve β kompleks sabitler için $h(z) = \alpha z + \beta$ formuna sahip olmalıdır. Bu f in bir afin dönüşümü olduğunu gösterir.

Gerçekten ispat düzlemi düzleme dönüştüren harmonik dönüşümler afin dönüşümlerdir.

Bir başka deyişle uygun bir alt bölge üzerine düzlemin harmonik dönüşümü yoktur. Özellikle, $\mathbb{C}$ yi yalınkat olarak $\mathbb{D}$ birim daire üzerine dönüştüren, bir harmonik fonksiyon yoktur. Liouville'nin teoreminden de elde edildiği bir gerçektir.

Tersine olarak $\mathbb{D}$ yi yalınkat olarak $\mathbb{C}$ üzerine dönüştüren analitik fonksiyon olmadığı kolayca görülebilir. Gerçekten bu tür bir dönüşümün tersi, analitik ve $\mathbb{C}$ de sınırlı, böylece sabit olacaktır. Bu argüman harmonik dönüşümlere uygulanamaz, çünkü tersi harmonik olması gerekmez. Bununla birlikte sonuç harmonik dönüşümlere uzanır.

Rado Teoremi: $\mathbb{C}$ üzerine D nin hiçbir harmonik dönüşümü yoktur.

İspat: Sonraki argüman aslında Rado'nun teoreminin daha güçlü bir nicel formunu verir. f nin, $\mathbb{D}$ bölgesini R yarıçaplı bir Δ_R dairesini içeren bir $\Omega \subset \mathbb{C}$ bölgesini üzerine harmonik olarak dönüştürdüğünü farzedelim. $\Delta_R = \{w \in \mathbb{C} : |w| < R\}$ ve $f(0) = 0$ olduğunu genelliği bozmaksızın varsayalım. $f(D_R) = \Delta_R$ olmak üzere $\mathbb{D}$ nin alt bölgesini D_R ile ifade edelim. $\varphi(0) = 0$ olmak üzere $\mathbb{D}$ yi konform olarak

D_R üzerine dönüştüren bir konform dönüşümü φ olsun. O zaman $F = \frac{1}{R} f \circ \varphi$, $F(0) = 0$ olmak üzere $\mathbb{D}$ yi $\mathbb{D}$ üzerine harmonik olarak dönüştürür, yani Heinz lemması c bir mutlak sabit olduğunda $\left|F_\zeta(0)\right|^2 + \left|F_{\bar\zeta}(0)\right|^2 \geq c > 0$ olduğunu söyler. Fakat bir hesaplama

$$F_\zeta(0) = \frac{1}{R} f_z(0)\varphi'(0) \quad ; \quad F_{\bar\zeta}(0) = \frac{1}{R} f_{\bar z}(0)\overline{\varphi'(0)}$$

verir. Schwarz lemmasından $\left|\varphi'(0)\right| \leq 1$ olduğundan dolayı,

$cR^2 \leq \left|f_z(0)\right|^2 + \left|f_{\bar z}(0)\right|^2$ dır . Özel olarak f in dizisi orjin merkezli keyfi büyük yarıçaplı daireler içermez.

Sonuç 3.8.2: Bütün düzleme harmonik olarak dönüşen düzlemin bir alt bölgesi yoktur.

İspat: Varsayalım ki basit bağlantılı $\Omega \neq \mathbb{C}$ bölgesini $\mathbb{C}$ üzerine bir f harmonik dönüşümü vardır. Riemann dönüşüm teoreminden $\mathbb{D}$yi Ω üzerine dönüştüren φ konform dönüşümü vardır. Böylece, $f \circ \varphi$ bileşkesi, Rado'nun teoremini çiğneyerek, $\mathbb{D}$ bölgesini harmonik olarak $\mathbb{C}$ üzerine dönüştürür. Tibor Rado (1926) 1927 de Rado'nun teoreminin bir özel durumunu ispatladı. Genel teoremin kanıtları hem minimal yüzeyler ve hem de harmonik dönüşümler arasında ilişkilerini istismar edilerek Bars (1951) ve Nitsche (1958,1959,1963) tarafından daha sonra verildi. Nitsche'nin yaklaşımı Heinz'nin lemması ile yakın olarak bir bağlantı sergiler; aslında onun ispatının bir sonucu olarak Heinz'nin sabitinin düzeltilmiş bir değerini elde etmiştir. Heinz'nin lemmasından Rado'nun teoreminin önceki türevi Harold Shapiro tarafından yaratıcısı olarak gösterilmiştir.

Rado'nun teoreminin yüksek boyutlar için geçerli olup olmadığı bilinmemektedir. Özel olarak Shapiro, $\mathbb{R}^3$ te birim topunu bütün $\mathbb{R}^3$ uzayı üzerine dönüştüren bir yalınkat harmonik dönüşümü var olup olmadığını sormuştur. Hatta bu bir açık problem olarak kalmıştır.

3.9 Yaklaşım Teoremi

Caratheodory yakınsama teoremi önemli uygulamaları ile analitik fonksiyonların geometrik teoresinde bir merkezi sonuçtur. Bu Riemann dönüşüm fonksiyonların karşılık gelen dizisinin analitik yakınsamasıyla basit bağlantılı bölgesinin bir dizinin geometrik yakınsamaya bağlar. Caratheodory teoremi harmonik dönüşümler için geçerli değildir, gerçekten sık sık komplikasyonlara yol açar. Bu noktadaki önemli sorun aynı aralığı ile harmonik dönüşümünün zenginliğidir. Öte yandan basit örnekler bilinen (ortak) aralığıyla harmonik dönüşümlerinin bir dizisi küçük aralığıyla bir harmonik dönüşüme lokal olarak düzgün yakınsama olabilir. Bununla birlikte, Caratheodory yakınsama teoreminin "yarısı" biri için bir temsilcisi gibi bazı eylemler olduğu Clunie ve Sheil-Small (1984) görev yaptığı özel bir yaklaşım teoeremi vardır. Bu ifade edilenden önce bazı terminolojiyi tanıtmak gerekir.

$\mathbb{D}$ dairesinde f_0 harmonik bir fonksiyonu bu f, $\omega(0)=0$ ve $|\omega(z)|<1$ özellikleri ile $\mathbb{D}$ de yalınkat ve bir ω fonksiyon analitik için $f_0(z)=f(\omega(z))$ formuna sahip ise f bir harmonik fonksiyona bağımlı olduğu söylendi. f, $\mathbb{D}$ nin bir harmonik dönüşümü (bir yalınkat harmonik fonksiyon) ise ve Ω $f(0)\in\Omega\subset f(\mathbb{D})$ olduğu gibi bir basit bağlantılı bölgesidir, o zaman f e bağlı Ω üzerine D nin f_0 bir harmonik dönüşümü vardır. Ayrıca, bu f_0 dönüşümü dairesinin rotasyon kadar benzersizdir. Bunu görmek için, biz $\omega(0)=0$ ve $\omega'(0)>0$ ile $f^{-1}(\Omega)$ üzerine $\mathbb{D}$ nin konform dönüşüm olması için ω seçmek ve Riemann dönüşüm teoremine başvurulur. $f_0=f\circ\omega$ bağlı fonksiyon o zaman Ω üzerine $\mathbb{D}$ nin bir harmonik dönüşümüdür ve bu $\omega'(0)>0$ normalizasyonuyla benzersiz eşleştirilir. Bu şartlar altında, biz $\Omega\subset f(\mathbb{D})$ bölgesine uyan, f e bağlı harmonik dönüşümüne f diyeceğiz.

D_n bölgelerinin bir dizisi Caratheodory yakınsama teoreminin tablosunda olduğu gibi $\{D_n\}$ nin her alt dizisi onun çekirdeği gibi D ye sahipse $\mathbb{D}$ bir bölgeye yakınsaması olduğu söylendi.

Yaklaşım Teoremi: f, $\mathbb{D}$ de bir yalınkat harmonik fonksiyon ve $\{\Omega_n\}$, $f(\mathbb{D})$ e yakınsayan olduğu $f(0) \in \Omega_n \subset f(\mathbb{D})$ özelliğiyle bir basit bağlantılı bölgeler dizisi olsun. O zaman f_n subordine fonksiyonların karşılık gelen dizisi, $\mathbb{D}$ de, lokal olarak düzgün, f e yakınsar.

İspat: Alt fonksiyonlar, ω_n ler daha önce tanımlanan analitik yalınkat fonksiyonlar olduğuna göre $f_n(z) = f(\omega_n(z))$ formuna sahiptir. Hipotez $\Omega_n \to f(\mathbb{D})$ nın $\omega_n(z) \to z$ gerektirdiği görülmektedir. Böylece bu aşağıdaki Caratheodory yakınsama teoreminden, $\mathbb{D}$ de, $\omega_n(z) \to z$ lokal olarak düzgün olduğu çıkar. Buradan $f_n(z) \to f(z)$ lokal olarak düzgündür.

Yaklaşım teoreminin çoğu uygulamalarında, Ω_n bölgeleri, onların $f(\mathbb{D})$ birleşimine monoton olarak genişletmek için seçilebilir. Ω_n, düzgün sınırlı bir Jordan bölgesi alınırsa buna karşılık gelen f_n fonksiyonu kapalı daireye bir düzgün genişlemeye sahip olacaktır.

Teorem 3.9.1: $f = h + \overline{g}$ harmonik ve birim dairede lokal olarak yalınkat olsun. O zaman f yalınkat ve konveks yalnız ve ancak α nın her seçimi için $(0 \le \alpha < 2\pi)$, $e^{i\alpha}h - e^{-i\alpha}g$ analitik fonksiyonunun yalınkat ve değerler dizisi CHD dir.

Sonuç 3.9.2: $f = h + \overline{g}$ bir konveks harmonik dönüşümü ise o zaman $h + e^{i\beta}g$ fonksiyonu her β, $0 \le \beta < 2\pi$ için yalınkattır.

Doğrudan doğruya $|w(z)| < 1$ ile tanımlanan bir dilatasyonu olan f harmonik fonksiyonu lokal yalınkat, verilen analitik yalınkat fonksiyonundan oluşturulabilir. Gerçekten f in Jakobiyeni

$$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 = \left(1 - |w(z)|^2\right)|h'(z)|^2 > 0$$

dan dolayı $h - g$ nin tekliğinden

$$\left(1 - w(z)\right)h'(z) = h'(z) - g'(z) \neq 0 \text{ dır.}$$

İlk örnekteki gibi $h - g$, özdeş dönüşüm olarak ve $\omega(z) = z$ dilatasyonu olarak alınır. Bu yüzden

$$h(z)-g(z)=z \quad \text{ve} \quad \frac{g'(z)}{h'(z)}=z \text{ dir.}$$

İlk denklemin türevi

$$h'(z)-g'(z)=1$$

$$zh'(z)-g'(z)=0$$

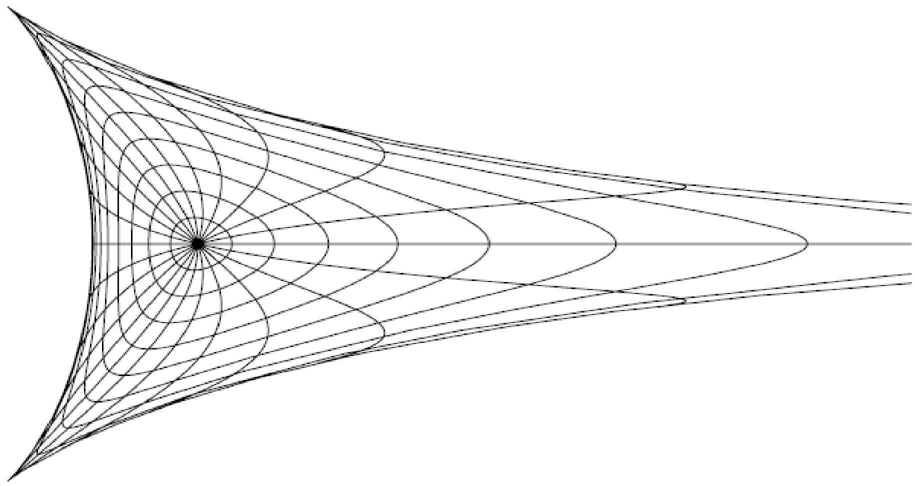
lineer denklem çiftini verir. Tek çözümü olarak

$$h'(z)=\frac{1}{1-z} \quad g'(z)=\frac{z}{1-z} \text{ dir.}$$

Şimdi integrasyon alınırsa $h(0)=g(0)=0$ normalizasyonu altında

$$h(z)=\log\frac{1}{1-z}, \qquad g(z)=-z+\log\frac{1}{1-z}$$

ifadeleri elde edilir.



Şekil 3.2. $\omega(z)=z$ dilatasyonu ile eşdeğer dönüşümün kesimi

$f=h+\overline{g}$ harmonik fonksiyonu veya $w=f(z)=-\overline{z}-2\log|1-z|$ fonksiyonu yatay yönde bir konveks bölgesi üzerine yalınkat olarak daireye dönüşür. Mathematica ile çizilen gerçek aralığı radyal yayları ve eş merkezli dairelerin görüntüsü de şekil 3.2. de gösterilmektedir.

Alıştırma $\omega(z)=z$ nin yerine $\omega(z)=z^2$ olarak belirlenmiş dilatasyona değiştirilebilir. Lineer denklemleri, $h(z)=s(z)$ ve $g(z)=-z+s(z)$ normalize edilen ve

$$s(z)=\frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$$

olmak üzere çözümler ile şu hale gelir.

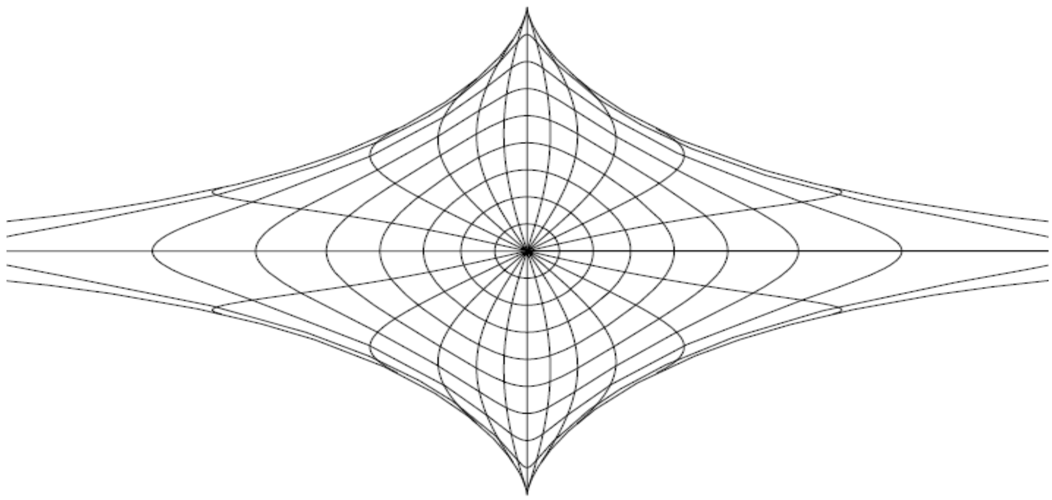
$$h'(z)-g'(z)=1$$

$$z^2h'(z)-g'(z)=0\,.$$

Bu $-\frac{\pi}{4}<\mathrm{Im}\{w\}<\frac{\pi}{4}$ $\left(\left|\mathrm{Im}\{w\}\right|<1\right)$ yatay şeridi üzerine birim dairenin bir konform dönüşümüdür. Böylece kesimin yapısı

$$f(z)=-\overline{z}+2\,\mathrm{Re}\{s(z)\}=-\overline{z}+\log\left|\frac{1+z}{1-z}\right|$$

formunun $f=h+\overline{g}$ bir harmonik dönüşümünü üretir. Onun görüntüsü şekil 3.3. de gösterilmektedir.



Şekil 3.3. $w(z)=z^2$ dilatasyonu ile eşdeğer dönüşümün kesmesi

İkinci bir örnek olarak $\mathrm{Re}\{w\}>-\frac{1}{2}$ yarı-düzlem üzerine $\mathbb{D}$ birim dairesinin

$$w=l(z)=\frac{z}{1-z}$$

konform dönüşümünü düşünelim. Bir $h+\overline{g}$ lokal yalınkat harmonik fonksiyonu $\mathbb{D}$ yi dikey doğrultuda konveks bir bölge üzerine yalınkat olarak dönüştürür, ancak ve ancak $h+g$ de aynı özelliklere sahip olmalıdır. $h+g=l$ alırsak ve $h+\overline{g}$ nin lokal yalınkatlığı garanti olmak üzere $\omega(z)=-z$ dilatasyonunu seçelim.

$$h'(z)+g'(z)=l'(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$$

$$zh'(z)+g'(z)=0$$

lineer sistemden

$$h'(z)=\frac{1}{(1-z)^3} \quad , \quad g'(z)=-\frac{1}{(1-z)^3}$$

sonucu çıkar. İntegrali alınırsa,

$$h(z)=\frac{1}{2}\left[l(z)+k(z)\right] \quad , \quad g(z)=\frac{1}{2}\left[l(z)-k(z)\right] .$$

Burada $k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonudur. $-\frac{1}{4}$ den $-\infty$ a kadar negatif reel eksen boyunca kesik kompleks düzlem üzerine konform olarak $\mathbb{D}$ dairesi dönüşür. $L=h+\overline{g}$ harmonik fonksiyonu $\mathbb{D}$ yi yalınkat olarak dikey doğrultuda konveks bir bölgeye dönüştürür. L nin,

$$L(z)=\operatorname{Re}\{l(z)\}+i\operatorname{Im}\{k(z)\}$$

formuna sahip olduğu görülür.

Biz, L nin değerler dizisini $\operatorname{Re}\{w\}>-\frac{1}{2}$ tam yarı-düzlem olduğunu iddia ederiz. Bunu görmek için, $\zeta=l(z)$ dönüşümünü yapalım, bu yüzden $k(z)=\zeta(1+\zeta)$ dır. Daha sonra, $\zeta=\xi+i\eta$ gösterimi ile L harmonik dönüşümü

$$L(z)=\xi+i(1+2\xi)\eta \, , \; z=l^{-1}(\zeta)=\frac{\zeta}{1+\zeta}$$

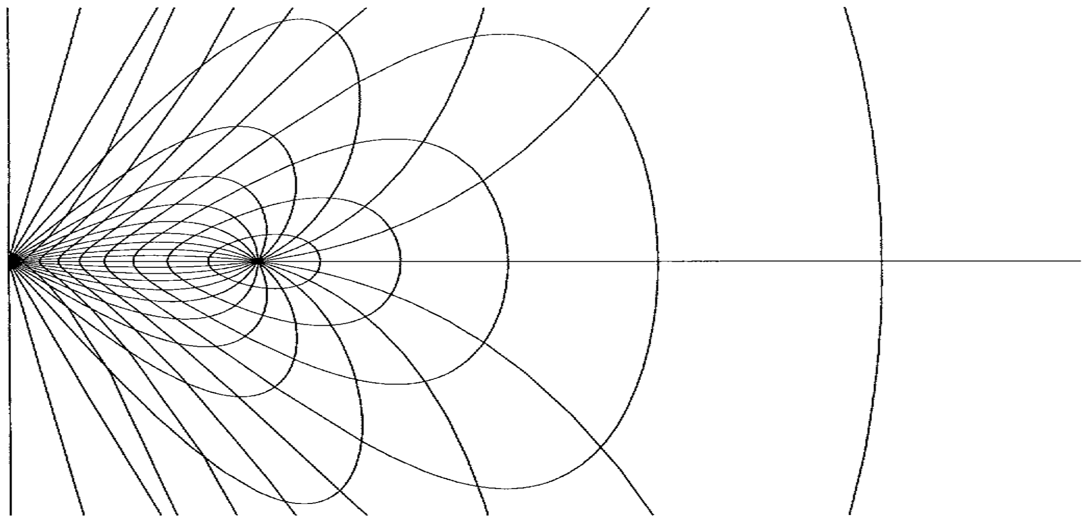
şeklini alır. Bu gösterir ki $L\circ l^{-1}$ her dikey doğrultuyu monoton olarak

$$\zeta=\xi_0+i\eta \, , \quad \zeta_0>-\frac{1}{2}, \quad -\infty<\eta<\infty$$

kendi üzerine dönüştürür. Bu doğrular $z=1$ noktasında $\mathbb{T}$ birim çemberine içten teğet $|z|<1$ diskinde çemberlere karşılık gelmektedir. Özellikle, $w=L(z)$ dönüşümü, $\mathbb{D}$ yi $\operatorname{Re}\{w\}>-\frac{1}{2}$ yarı-düzlem üzerine yalınkat olarak gönderir.

$L=\operatorname{Re}\{l\}+i\operatorname{Im}\{k\}$ harmonik dönüşümü altında, sınır dönüşümleri oldukça tuhaftır. k, $\mathbb{D}$ yi reel eksenin negatif kısmı çıkarılmış tüm düzlem üzerine konform olarak dönüştürürken l, $\mathbb{D}$ yi reel $\operatorname{Re}\{w\} > -\frac{1}{2}$ üzerine konform olarak $\mathbb{T}$ de her $z \neq 1$ noktası için $\operatorname{Im}\{k(z)\} = 0$ ve $\operatorname{Re}\{l(z)\} = -\frac{1}{2}$ olduğuna dikkat edelim. Sonuç olarak, birim çemberde her $z \neq 1$ noktası için $L(z) = -\frac{1}{2}$ dir. Şekil 3.4 te görüldüğü gibi radyal yayların ve merkezleri aynı çemberlerin L altında görüntüleri alışılmadık bir durum sergiler.

Bu örnek harmonik dönüşümlerin sınır davranışlarının konform dönüşümlerden radikal olarak farklı olabileceğini göstermektedir. Caratheodory genişleme teoremine göre bir konform dönüşüm iki Jordan eğrisi arasında her zaman kapanışlarının bir homeomorfizmini verir. Aslında, Caratheodory'nin teoremi burada kuazikonform dönüşümlerin genelleştirilmesidir. $\mathbb{D}$ de dilatasyonu $|\omega(z)| \leq c < 1$ sağlamalıdır. (Lehto ve Virtanen (1973), bak. Kısım I Bölüm 8)



Şekil 3.4 : $\omega(z) = -z$ dilatasyonu olmak üzere yarı-düzlem dönüşümün dikey kesimi

Bir üçüncü örnek olarak, $\operatorname{Im}\{w\} < \frac{\pi}{4}$ yatay şerit üzerine $\mathbb{D}$ nin

$$w = s(z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$$

konform dönüşümünü düşünün ve $\omega(z) = z$ birinci dilatasyonu alın. O zaman uygun eşitlikler

$$h(z) - g(z) = s(z) \text{ ve } zh'(z) - g'(z) = 0,$$

normalize edilen çözümleri ile

$$h(z)=\frac{1}{2}\left[l(z)+s(z)\right],\quad g(z)=\frac{1}{2}\left[l(z)-s(z)\right] \text{ dir.}$$

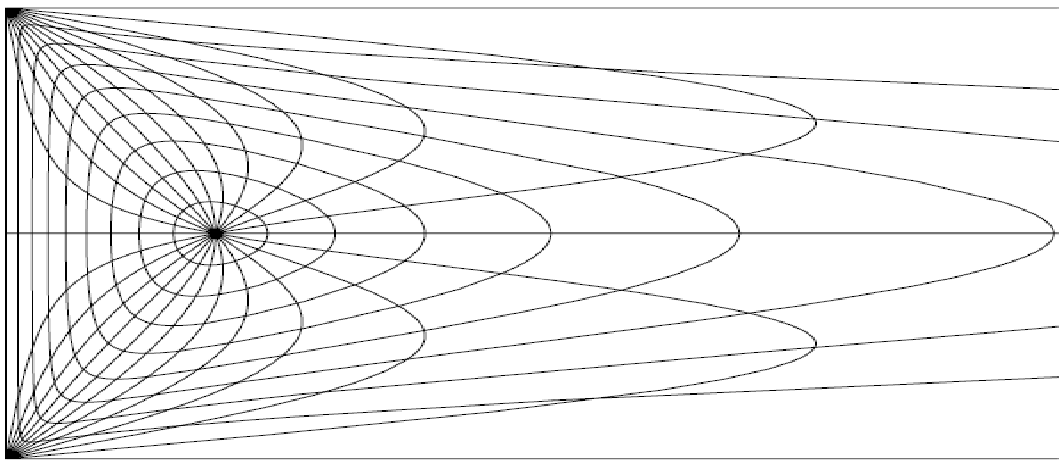
Böylece harmonik dönüşüm $f=h+\overline{g}$, $f(z)=\operatorname{Re}\{l(z)\}+i\operatorname{Im}\{s(z)\}$ dir.

$$f\left(e^{i\theta}\right)=\begin{cases}-\frac{1}{2}+i\frac{\pi}{4}, & 0<\theta<\pi\\ -\frac{1}{2}-i\frac{\pi}{4}, & \pi<\theta<2\pi\end{cases}$$

olduğu gözlenir. Özellikle, f, alt ve üst yarım dairelerde tek noktalara yığılır. Aslında f in, daireyi

$$\left\{w:\operatorname{Re}\{w\}>-\frac{1}{2},\left|\operatorname{Im}\{w\}\right|<\frac{\pi}{4}\right\}$$

yarım şerit üzerine kesin olarak dönüştürdüğü kanıtlanabilir.



Şekil 3.5. $w(z)=z$ dilatasyonu ile şerit dönüşümünün kesimi

Görüntüsü şekil 3.5. de gösterildi. Bütün üst yarı düzlemde radyal yaylar yarı şeritin üst köşesinde son bulan yaylara dönüştürülmüştür ve alt yarı düzlem için de benzer dir.

Sonuç olarak bu son örnek $\omega(z)=z^2$ dilatasyonu ile değiştirilebilir. h ve g için bulunan normalleştirilmiş sonuçlar $h=\frac{1}{2}(q+s)$ ve $g=\frac{1}{2}(q-s)$ dir. Burada

$$q(z)=\frac{z}{1-z^2}=\sqrt{k\left(z^2\right)}$$

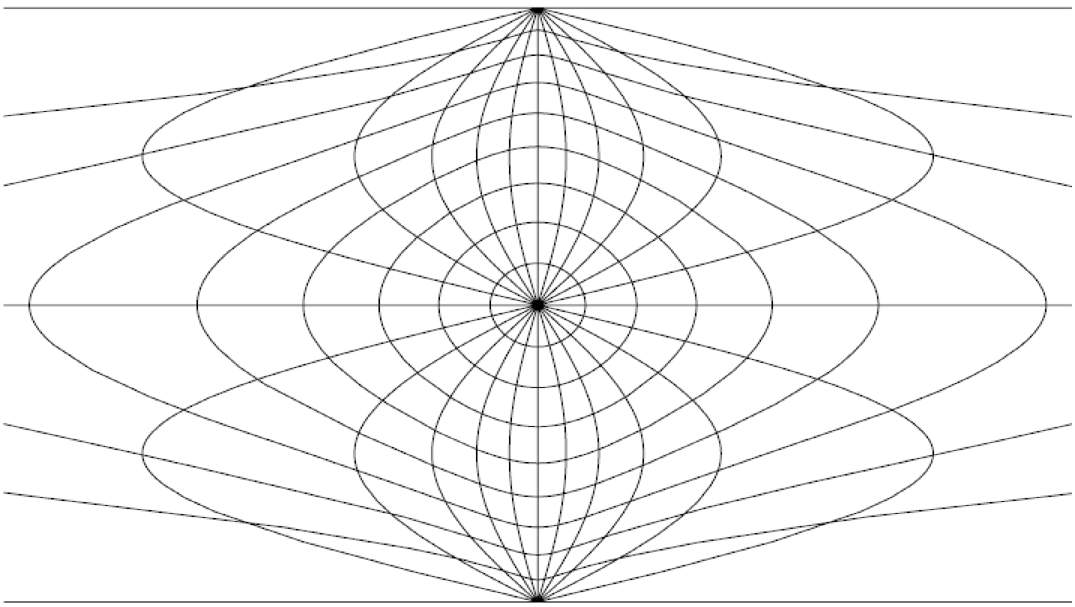
olur ve $\mathbb{D}$ yi konform olarak $\mp\frac{i}{2}$ den ∞ a kadar çıkarılmış tüm düzlem üzerine konform olarak dönüştürür. $f = h + \overline{g}$ e karşılık gelen harmonik dönüşüm,

$$f(z) = \mathrm{Re}\{q(z)\} + i\,\mathrm{Im}\{s(z)\}$$

$\mathbb{D}$ yi $\left|\mathrm{Im}\{z\}\right| < \frac{\pi}{4}$ tüm şerit üzerine dönüştürdüğü gösterilebilir.

Göze çarpan geometrik özellikleri olmamasına rağmen birim çemberin alt ve üst yarımları bir kez daha $\mp\frac{\pi}{4}$ tek noktalarına gider. Dönüşümün etkisi şekil 3.6. de gösterilmiştir.

Paul Greiner (1995, to app.), kesim yapısıyla ilgili daha fazla örnek çözmüştür ve bu bölümdeki şekillerde gösterilen radyal doğrular ve ortak merkezli çemberlerin grafik görüntülerini Mathematica'ya uygulanarak gösterildi. Driver ve Duren (1999), hipergeometrik fonksiyonların cinsinden integrallerin hesaplaması, düzgün çokgenler üzerine Schwarz-Christoffel dönüşümlerinin harmonik kesimlerini çalıştılar. Dorff ve Szynal (to app.) kompleks eliptik integrallerin kesimlerini hesapladı.



Şekil 3.6 : $\omega(z) = z^2$ dilatasyonu olmak üzere şerit dönüşümün kesimi

Kesim yapısının açık örnekleri neredeyse sınırsız görünüyor; mevcut bölüm yalnızca basit bir örnek verir. "Harmonik Koebe fonksiyonu" oluşturmak için aşağıdaki Clunie ve Sheil-Small uygulanacaktır.

Son olarak kesim yapısının fikri Rado-Kneser-Choquet teoreminin diğer bir kanıtına yol açar. $\Omega \in \mathbb{C}$, Γ ile sınırlı sınırlandırılmış bir konveks bölge olsun. $w = \varphi\left(e^{it}\right)$ Γ üzerine $\mathbb{T}$ birim çemberin bir yön-koruyan homeomorfizmi ve $f(z)$, birim dairenin harmonik uzanımı olsun. $f = h + \overline{g}$, α bir reel parametre olmak üzere f in kanonik birleşimi olarak analitik fonksiyonu

$$\phi_\alpha(z) = e^{i\alpha}h(z) - e^{-i\alpha}g(z) = e^{i\alpha}f(z) - 2\operatorname{Re}\left(e^{-i\alpha}g(z)\right)$$

düşünelim. f, konveks değerli bir bölgenin altında ve ϕ_α bir açık dönüşüm olduğundan dolayı reel eksen doğrultusunda, konveks olan ϕ_α, C_α Jordan eğrisi ile sınırlandırılmış bir bölgenin $\mathbb{T}$ nın görüntüsü olduğu geometrik olarak açıktır. Ayrıca e^{it} gibi bir nokta $\mathbb{T}$ etrafında bir kez dolaştığında, onun görüntüsü $\phi_\alpha\left(e^{it}\right)$ aynı yönde C_α etrafında bir kez dolaşır. Böylece analitik fonksiyonlar için argüman prensibi ϕ_α $\mathbb{D}$ de yalınkat olduğunu gösterir. Özellikle

$$z \in \mathbb{D} \text{ için } \phi'(z) = e^{i\alpha}h'(z) - e^{-i\alpha}g'(z) \neq 0.$$

α keyfi bir reel sayı olduğu zaman, $|h'(z)| \mp |g'(z)| \neq 0$, böylece $\mathbb{D}$ de $|\omega(z)| \neq 1$ dir. Fakat f sınır yakınında yön-koruyandır. Bu yüzden $|\omega(z)| < 1$ $\mathbb{D}$ bölgesindedir. Şimdi harmonik fonksiyonlar için argüman prensibini f in tümüyle yalınkat olduğu sonucuna gider ve Kneser ve Choquet'un ispatlarındaki gibidir. O sadece verilen ispat oldukça tam olmadığı dikkat edilmelidir. Çünkü g, $\mathbb{D}$ kapanışında sürekli olmadığı gösterilmiştir. Sorunu çözmenin bir yolu da küçük bir çemberle $\mathbb{T}$ yi değiştirmektir.

Teorem 3.9.3: Birim daireyi kendi üzerine dönüştüren her harmonik dönüşümün katsayıları arasındaki eşitsizlik

$$|a_1|^2 + \frac{3\sqrt{3}}{\pi}|a_0|^2 + |b_1|^2 \geq \frac{27}{4\pi^2}$$

($\frac{27}{4\pi^2}$ e bağlı mümkün olan en iyi alttır.).

İspat: Yön-koruyan dönüşümlerde genellik bozulmaz. O zaman kanonik katsayılar a_n ve b_n, $\theta(t + 2\pi) = \theta(t) + 2\pi$ olmak üzere $\theta(t)$ sürekli azalmayan fonksiyonlarda, $e^{i\theta(t)}$ sınırlı fonksiyonunun Fourier katsayıları olarak kabul edilebilirler. Parseval eşitsizliğinin bir uygulaması

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\left[\theta(s+t)-\theta(s-t)\right]}ds = \left|a_0\right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|a_n\right|^2 + \left|b_n\right|^2\right)e^{2\text{int}} \quad (\text{keyfi } t \in \mathbb{R} \text{ için})$$

ifadesidir. Reel kısmı alınarak, şu formülü elde ederiz:

$$J(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\theta(s+t)-\theta(s-t)}{2}\right)ds \text{ den}$$

$$1-2J(t) = \left|a_0\right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|a_n\right|^2 + \left|b_n\right|^2\right)\cos nt \,.$$

Şimdi hatta $0 \le t \le \frac{\pi}{6}$ aralığında $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+t\right)$ değerlerine sahip $\frac{\pi}{3}$ periyodu ile $N(t)$ fonksiyonunu alalım.

$$M(t) = \cos^2 t - N(t) \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

olsun. O zaman

$$M(t) = \begin{cases} \cos^2 t - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}+t\right) & 0 \le t \le \frac{\pi}{6}, \\ \cos^2 t - \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-t\right) & \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{3}, \\ 0 & \frac{\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

Fourier açılımının temelinde

$$N(t) = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-1}\cos 6nt$$

ve daha önce elde edilen $1-2J(t)$ için formül hesaplarsak

$$\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/2} M(t)\left(1-2J(t)\right)dt = \left|a_1\right|^2 + \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\left|a_0\right|^2 + \left|b_1\right|^2 - \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-1}\left(\left|a_{3n}\right|^2 + \left|b_{3n}\right|^2\right)$$

$$\le \left|a_1\right|^2 + \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\left|a_0\right|^2 + \left|b_1\right|^2 .$$

$$\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/2} M(t)dt = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$$

olduğundan dolayı

$$\frac{16}{\pi}\int_0^{\pi/2} M(t)J(t)dt \le \frac{3\sqrt{3}}{\pi} - \frac{27}{4\pi^2} \qquad (*)$$

olarak gösterilmektedir. Bu aşağıdaki lemmalar yardımı ile elde edilecektir.

Lemma 3.9.4: $t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n = \pi$ olmak üzere negatif olmayan sayılar $t_1, t_2, ..., t_n$ olsun. O zaman $J(t_1) + J(t_2) + ... + J(t_n) \le \frac{9}{4}$.

Lemma 3.9.5: $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ aralığında artan olmayan ve negatif olmayan $P(t)$ sürekli bir fonksiyon ise, o zaman

$$\int_0^{\pi/2} P(t).J(t)dt \le \frac{9}{4\pi}\int_0^{\pi/2} tP(t)dt.$$

Lemmaların ispatlarını erteleyelim. Böylece teoremin ispatını tamamlamak ve bize gerekli (*) eşitsizliğini elde etmek için bunları kullanalım. Lemma 3.9.5 doğrudan geçerli değildir. Çünkü $M(t)$ sürekli ve negatif olmayan fonksiyon olmasına rağmen monoton değildir. Aslında $M(t)$, $M(0) = \frac{3}{4}$ den $M\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e yükselir. O zaman $M\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ a düşer. Strateji

$$M_1(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & 0 \le t \le \frac{\pi}{6}, \\ M(t), & \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

olduğunda $M(t) = M_1(t) + M_2(t)$ yazmaktır. O zaman $M_1(t)$ artmayacaktır, ve lemma 3.9.5

$$\frac{4\pi}{9}\int_0^{\pi/2} M_1(t)J(t)dt \le \int_0^{\pi/2} tM_1(t)dt = \frac{\pi^2}{96} + \frac{\sqrt{3}\pi}{16} - \frac{3}{16}$$

verir. Diğer taraftan, $0 \le t \le \frac{\pi}{6}$ için $M(t) = M\left(\frac{\pi}{6} - t\right)$ den dolayı

$$\int_0^{\pi/2} M_2(t)J(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} tM_2(t)\left[J(t) + J\left(\frac{\pi}{6} - t\right)\right]dt$$

bir basit manipülasyonu verir. Fakat tanımdan $M_2(t) \geq 0$ ve lemma 3.9.4, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ için

$$J(t) + J\left(\frac{\pi}{6} - t\right) \leq \frac{3}{8} \quad (6J(t) + 6J\left(\frac{\pi}{6} - t\right) \text{ gözönüne alalım}),$$

buradan

$$\int_0^{\pi/2} M_2(t)J(t)\,dt \leq \frac{3}{16}\int_0^{\pi/6} M_2(t)\,dt = \frac{3}{16}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8}\right)$$

bulunur. M_1 ve M_2 için iki integral eşitsizlikliği eklenirse, istenen (*) eşitsizlik elde edilir. Bu da teoremin ispatıdır.

Lemma 3.9.6: Toplamları π den büyük olmayan $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitif sayılar alalım. O zaman yalnız $n = 3$ ve $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{\pi}{3}$ için eşitlikler olmak üzere,

$$\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + ... + \sin^2 x_n \leq \frac{9}{4}.$$

İspat : $2 < \frac{9}{4}$ sınır olmak üzere açık olarak $n \leq 2$ için eşitsizlik sağlanır. Buradan $n \geq 3$ varsayabiliriz.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \ldots + \sin^2 x_n$$

fonksiyonunu alalım. $a_1 + \ldots + a_n = \pi$ ve bütün $a_j \geq 0$ olmak üzere $(a_1, \ldots, a_n)$ bir noktasında maksimum değerine ulaşırız. Her sıfırdan farklı a_i ve a_j koordinat çiftinin toplamı $a_i + a_j \geq \frac{\pi}{2}$ olmalıdır , $\sin(a+b)$ açılımı ile kolayca ispatlanır ki basit eşitsizliğin görünüşüde

$$\sin^2 a + \sin^2 b \leq \sin^2(a+b), \; a > 0, \; b > 0, \; a + b < \frac{\pi}{2} \text{ dir.}$$

Gerçekten, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_1 + a_2 < \frac{\pi}{2}$ ise o zaman

$$F(0, a_1 + a_2, a_3, \ldots, a_n) > F(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n),$$

bir maksimum noktası olarak $(a_1, a_2, ..., a_n)$ nin seçimi ile çelişir. $a_1 + ... + a_n = \pi$ den dolayı en çok dört a_j nin sıfırdan farklı olduğu bulunur. Buradan $n \leq 4$ kabul etmeliyiz. Fakat $n=4$ ve bütün $a_j \neq 0$ ise her koordinatların çiftinin toplamı $\frac{\pi}{2}$ olmalıdır ve buradan $j=1,2,3,4$ için $a_j = \frac{\pi}{4}$ dür. Fakat

$$F\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=2<\frac{9}{4}=F\left(0,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$$

den dolayı bu mümkün değildir. Bu nedenle $n=3$ kabul etmeliyiz ve sınırlı $x_1+x_2+x_3=\pi$ yerleştirerek bir Lagrange çarpanı kullanarak basit hesaplamayla ispat tamamlanır. Kritik noktalar $n=3$ olduğu zaman analizi kolaydır.

İspat : İddia, $J(t_k)$ için ifadelerde integralinin aralıklarla kaydırmaktır. Buradan lemma 3.9.6 integralinin toplamına uygulanacak. $y_1(s)=s$, $y_2(s)=s+t_1+t_2$ ve

$$y_k(s)=s+t_1+2t_2+...+2t_{k-1}+t_k\,,\quad k=3,...,n$$

ile $y_k(s)$ lineer fonksiyonlar tanımlanır. O zaman

$$y_k(s)-t_k=y_{k-1}(s)+t_{k-1}\;,\quad k=2,...,n$$

$$\alpha_k(s)=\theta\left(y_k(s)+t_k\right)-\theta\left(y_{k-1}(s)-t_{k-1}\right)$$

yerleştirirsek ve

$$J(t_k)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\left(\frac{\alpha_k(s)}{2}\right)ds\;,\quad k=1,...,n$$

olduğu gözlenir. Fakat $\alpha_k(s)\geq 0$ ve $(y_n+t_n)-(y_1-t_1)=2(t_1+\ldots+t_n)=2\pi$ ve $\theta(t+2\pi)=\theta(t)+2\pi$ den dolayı

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=\theta(y_1+t_1)-\theta(y_1-t_1)+\sum_{k=2}^{n}\left[\theta(y_k+t_k)-\theta(y_{k-1}-t_{k-1})\right]$$

$$=\theta(y_n+t_n)-\theta(y_1-t_1)=2\pi$$

Böylece lemma 3.9.6 $\sum_{k=1}^{n}\sin^2\left(\alpha_k(s)/2\right)\leq\frac{9}{4}$ ü verir ve istenilen eşitsizlik integral ile bulunur.

İspat : $J^*(t)=J(t)-\frac{9t}{4\pi}$ ve $I(P)=\int_0^{\pi/2}P(t)J^*(t)\,dt$ fonksiyoneli tanımlayalım. $I(P)\leq 0$ ispatlanmalıdır.

$$P_1(t)=\begin{cases} P(t)-P\left(\frac{\pi}{2}-t\right), & 0\le t\le \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \frac{\pi}{4}\le t\le \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

alalım. O zaman $0\le P_1(t)\le P(t)$ ve $P_1(t)$ yine artan değildir. Buradan

$$I(P)=I(P_1)+\int_0^{\pi/4} P\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\left[J^*(t)+J^*\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]dt$$

ifadesi çıkar. Fakat lemma 1 , $I(P)\le I(P_1)$ gösterilir ki

$$2J^*(t)+2J^*\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=2J(t)+2J\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-\frac{9}{4}\le 0,\quad 0\le t\le \frac{\pi}{2}$$

verir. Şimdi süreci tekrarladık.

$$P_2(t)=\begin{cases} P_1(t)-P_1\left(\frac{\pi}{2}-t\right), & 0\le t\le \frac{\pi}{8}, \\ 0, & \frac{\pi}{8}\le t\le \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

alalım, $0\le P_2(t)\le P_1(t)$, $P_2(t)$ artan değildir ve

$$I(P_1)=I(P_2)+\int_0^{\pi/8} P_1\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\left[J^*(t)+J^*\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]dt \text{ dir.}$$

Lemma 3.9.4 den $4J^*(t)+4J^*\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\le 0$, böylece $I(P_1)\le I(P_2)$ dir.

Tümevarımdan

$$P_n(t)=\begin{cases} P_{n-1}(t)-P_{n-1}\left(\frac{\pi}{2^n}-t\right), & 0\le t\le \frac{\pi}{2^{n+1}}, \\ 0, & \frac{\pi}{2^{n+1}}\le t\le \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

olarak tanımlanıyor. Tümevarım argümanı $0\le P_n(t)\le P_{n-1}(t)$ olarak gösterilir ki $I(P_{n-1})\le I(P_n)$ olduğu benzer şekilde bulunur. Özellikle $n=1,2,...$ için $0\le P_n(t)\le P(t)$ dır. Diğer taraftan, açıktır ki $t\to 0$ iken $J(t)\to 0$, buradan

$$n\to\infty \text{ iken } I(P_n)=\int_0^{\pi/2^n} P_n(t)J^*(t)\,dt\to 0.$$

$I(P)\le I(P_n)$ den dolayı $I(P)\le 0$ bulunur.

3.10 Katsayı Tahminleri

Varyasyon yöntemler, analitik yalınkat fonksiyonların sınıflarında çözülen extremal problemler için güçlü ve köklüdür (Duren 1983, ch 9 ve 10). Harmonik dönüşümlerin genel sınıfları için gelen varyasyon teknikler henüz mevcut değildir. Duren ve Schober (1987) tarafından bu tür bir yöntem geliştirilmiştir.

Bu yöntem, dairenin kendi üzerine harmonik dönüşümlerine özelleştirildiğinde en etkilisidir. Bir f fonksiyonu, $\mathbb{D}$ birim dairesinin kendi üzerine bir yön-koruyan harmonik dönüşümü yalnız ve ancak birim çemberin kendi üzerine dönüştüren

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{\left|e^{it}-z\right|^2} e^{i\theta(t)} dt$$

sürekli yön-koruyan dönüşüm, bir Poisson integral gösterimi varsa mümkündür. Burada $e^{it} \to e^{i\theta(t)}$ birim dairenin kendi üzerine sürekli yön-koruyan zayıf bir homeomorfizmidir. Bunun anlamı $t \to \theta(t)$ fonksiyonu, sürekli ve azalan olmayan bir fonksiyondur. $[0, 2\pi]$ aralığını dönüşümü, 2π genişlikli bir aralığa dönüştürür. Fakat tam olarak monoton olması gerekmez, aralıklar sabit olabilir.

Kolaylık için, $\mathscr{F}$, $\mathbb{D}$ üzerine $\mathbb{D}$ nin yön koruyan harmonik dönüşümünün ailesi olarak tanımlansın. ϕ, $\mathscr{F}$ de bir sürekli lineer fonksiyoneli veya daha genel olarak bir Frechet diferansiyeli olmak üzere bir sürekli fonksiyonel olsun. Süreklilik, lokal düzgün yakınsamasının topolojisiyle ilgilidir. Böylece $\mathscr{F}$ de fonksiyonların $\{f_n\}$ dizisi bir $g \in \mathscr{F}$ fonksiyonuna $\mathbb{D}$ nin kompakt alt kümelerinde düzgün olarak yakınsıyorsa $\phi(f_n) \to \phi(g)$ dir. Şimdi $\mathscr{F}$ ailesi üzerinde f fonksiyonlar dizisini maksimuma çıkaran $\operatorname{Re}\{\phi(f)\}$ nin extremal problemini düşünelim. Hatta $\mathscr{F}$ de ϕ, sınırlı ise extremal fonksiyon olmayabilir, $\operatorname{Re}\{\phi(f)\}$ nin supremumu $\mathscr{F}$ de elde edilmesi gerekmez. Ancak $\mathscr{F}$ in kapanışı, azalan olmayan $\theta(t)$ fonksiyonu süreksizlikleri atlamasına izin verildiğinde yukarıda gösterildiği gibi Poisson integral gösterimi olan bütün f fonksiyonlarından oluşur. $e^{it} \to e^{i\theta(t)}$ karşılık gelen fonksiyona bir **dairesel dönüşümü** denir. Onun Poisson integrali, alan doğru parçası veya bir nokta olduğu dejenere durumları hariç harmonik ve yalınkat olacaktır. Fakat genellikle birim dairesini daire içine çizilmiş bir çokgen bölge üzerine dönüştürecektir. Bu nedenle bir çember dönüşümünün Poisson integrali ile $f \in \mathscr{F}$ elde edildiği için $\mathrm{Re}\{\phi\}$ nin supremumu olduğu sonucuna varılır.

$\theta(t)$ extremal fonksiyona karşılık gelen $e^{i\theta^*(t)}$, f^* Poisson integraline karşılık gelen olmak üzere bir çember dönüşümü olduğundan, bir $\theta^*(t)=\theta(t)+\varepsilon\eta(t)$ varyasyonuna tabi tutulabilir. O zaman f in extremal karakterinin $\mathrm{Re}\{\phi(f^*)\} \le \mathrm{Re}\{\phi(f)\}$ olduğunu söyleriz ve bu bilgi (bütün kabul edilen varyasyonlar ile ilgili) genellikle $\theta(t)$ fonksiyonu ve bunun için f extremal fonksiyonunu belirlemek yeterlidir. Pratikte, varyasyonun iki tipi uygulandı, biri $\theta(t)$ nın sıçrama noktaları arasında bir aralığa, diğeri $\theta(t)$ nın sabit olmadığı bir aralığa uygulandı. Detaylar tekniktir ve burada devam edilmeyecektir.

Bu method,

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ , \ g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

olduğunda bir $f=h+\overline{g}\in\mathscr{F}$ fonksiyonunun a_n ve b_n katsayıları için kesin sınırlar elde edilmesine Duren ve Schober (1987) tarafından başarıyla uygulandı. İlk adım, f in Poisson integral gösteriminde ortaya çıkan $\theta(t)$ fonksiyonun terimlerinde a_n ve b_n lineer fonksiyonelleri için belirgin formüller elde edilmesidir.

$$\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}=\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}+\frac{e^{-it}+\overline{z}}{e^{-it}-\overline{z}}\right\}$$

formunda yazılan Poisson çekirdeği ve genişleyen geometrik seriler içinde,

$$\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\mathrm{int}}z^n+e^{\mathrm{int}}z^{-n}\right)$$

buradan

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i[\theta(t)-nt]}dt, \quad n=0,1,2,\ldots$$

$$\overline{b_n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i[\theta(t)+nt]}dt, \quad n=0,1,2,\ldots$$

olduğunu görürüz. Böylece katsayı problemleri maksimuma çıkarmaya

$$\operatorname{Re}\{a_n\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left[\theta(t) - nt\right] dt\,,\quad n = 0,1,2,\ldots \quad \text{ve}$$

$$\operatorname{Re}\{b_n\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left[\theta(t) + nt\right] dt\,,\quad n = 0,1,2,\ldots$$

çember dönüşümün olduğu bütün $\theta(t)$ fonksiyonları arasında dairesel dönüşümler oluşturur.

Şimdi $\operatorname{Re}\{a_n\}$, bir kabul edilebilen $\theta(t)$ fonksiyon için maksimize edilirse, $\theta^* = \theta + \varepsilon\eta$ bir varyasyonu tanıtırız ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\theta^* = \theta + \varepsilon\eta$ bütün kabul edilen varyasyonlar için

$$\int_0^{2\pi} \eta(t)\sin\left[\theta(t) - nt\right] \geq 0$$

olduğu

$$\cos\left[\theta^*(t) - nt\right] = \cos\left[\theta(t) - nt\right] - \varepsilon\eta(t)\sin\left[\theta(t) - nt\right] + O\left(\varepsilon^2\right)$$

Taylor açılımından sonuçlandırmak için $\operatorname{Re}\{a_n^*\} \leq \operatorname{Re}\{a_n\}$ eşitsizliğini kullanırız. Bu bilgi $\theta(t)$ extremal fonksiyonları karakterize etmek için varyasyonların açık formu gözönüne alınarak mümkündür. b_n için problemin benzer bir işlemi $\theta(t)$ extremal fonksiyonları için

$$\int_0^{2\pi} \eta(t)\sin\left[\theta(t) + nt\right] \geq 0$$

varyasyonel bilgiye yol açar.

a_n ve b_n için iki extremal problem esas olarak farklıdır. Birincisi maksimize edilen $\operatorname{Re}\{a_n\}$ nin problemini dikkate alalım. $n = 0$ için kesin sonuç genellikle $f(z) \equiv 1$ tek extremal fonksiyon olmak üzere $\operatorname{Re}\{a_0\} < 1$ olur. $\theta(2\pi) = 2\pi$ ve $0 \leq t \leq 2\pi$ için $\theta(t) \equiv 0$ ile oluşturuldu. Böylece $\operatorname{Re}\{a_1\} \leq 1$ ve yalnız extremal fonksiyon $f(z) = z$ birim dönüşümüdür. $n \geq 2$ için bir çok extremal fonksiyonlar vardır. Fakat seçilen $0 \leq t \leq 2\pi/n$ için $\theta(t) = nt$ ve $2\pi/n \leq t \leq 2\pi$ için $\theta(t) = 2\pi$ ile örnek için $\operatorname{Re}\{a_n\}$ maksimize edebiliriz. Kesin sınır

$$|a_n| \le \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots \text{ dir.}$$

f extremal fonksiyonlar her zaman $\mathscr{F}$ ailesine ait ve yalınkat olarak birim daireyi kendi üzerine dönüşür. $\theta(t)$ fonksiyonları parçalı lineerdir, uzunlukları olan $(\mathrm{mod}\,2\pi)$ sabit aralıklarına bağlı $d\theta/dt = n$ olduğunda artan aralıklar olmak üzere, $2\pi/n$ nin tamsayı katıdır.

Diğer taraftan, b_n katsayıları kesin sınırlara sahip olarak

$$|b_n| \le \frac{n+1}{n\pi} \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

bütün $f \in \mathscr{F}$ için "**extremal fonksiyonlar**" daireyi birim çember içine çizilen bir düzgün $(n+1)$-genin üzerine dönüştüğünde bulunmaktadır.

$|a_n| \le \frac{1}{n}$ eşitsizliği Duren ve Schober in varyasyonel yönteme başvurmaksızın basit hesaplarla da ispatlanabilir. Aşağıdaki argüman Sook Heui Jun (1992) a aittir.

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(t)} e^{-\mathrm{int}} dt$$

formülü ile başlar ve kısmi integrasyon ile

$$2\pi a_n = \left[-\frac{1}{in} e^{-\mathrm{int}} e^{i\theta(t)} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{int}} e^{i\theta(t)} d\theta(t)$$

elde edilir. Fakat ilk terim periyodik olarak sıfırlanır, bu yüzden kendi üzerine birim dairenin bütün yön koruyan harmonik dönüşümler için $|a_n| \le \frac{1}{n}$ olduğu anlamına gelen

$$2\pi n |a_n| = \left| \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{int}} e^{i\theta(t)} d\theta(t) \right| \le \int_0^{2\pi} d\theta(t) = 2\pi \text{ dir.}$$

Eşitliğinin durumlarının dikkatli analizi ile extremal fonksiyonlar için yeniden tanımlanabilirdi.

3.11 Harmonik Fonksiyonlar için Schwarz Lemması

Bu bölümün amacı, dairede kompleks değerli harmonik fonksiyonları için Schwarz lemmasına uygun bir benzerlik geliştirmektedir. İspatı subordinasyon kavramından arasında Schwarz lemmasına geçerek bulunur. Analitik fonksiyonlar için özel bir eşitsizlik kullanılacaktır. Klasik Schwarz lemması uygun olarak açıklanabilir.

Schwarz Lemması : f , $\mathbb{D}$ birim dairesinde $\left|f\left(z\right)\right|<1$ ve $f\left(0\right)=0$ olmak üzere, analitik olsun. O zaman f , $\left|\alpha\right|=1$ olmak üzere bir $\alpha\in\mathbb{C}$ için $f\left(z\right)=\alpha z$ formuna sahip olmadıkça $\mathbb{D}$ de bütün $z\neq 0$ a kısıtlı eşitsizliği olmak üzere $\left|f\left(z\right)\right|\leq\left|z\right|$. Yine $\left|\alpha\right|=1$ olmak üzere, $f\left(z\right)=\alpha z$ için yalnız eşitlik olmak üzere $\left|f'\left(0\right)\right|\leq 1$ dir.

Schwarz lemması subordinasyon teorisine tabi olarak uygulanır. $\mathbb{D}$ de bir f , analitik fonksiyonu, $f\left(0\right)=g\left(0\right)$ ve $f(\mathbb{D})\subset g(\mathbb{D})$ ise ($f\prec g$ yazılır.) g bir analitik yalınkat fonksiyonuna subordine olduğunu söyleriz. Bu $w=g^{-1}\circ f$ bir Schwarz fonksiyonu: w, $w\left(0\right)=0$ ve $\left|w\left(z\right)\right|<1$ olmak üzere $\mathbb{D}$ de analitik olduğu anlamına gelir. Daha çok genel olarak, w bir Schwarz fonksiyon olduğunda, $f=g\circ w$ ise f in, bir g (yalınkat olması gerekli değil.) analitik fonksiyonuna subordine olduğu söylenir. Aşağıdaki sonuç gösterir ki bu bakış açısı oldukça yararlıdır.

Lemma 3.11.1 : F , $\left|\operatorname{Re}\left\{F\left(z\right)\right\}\right|<1$ ve $F\left(0\right)=0$ özellikleri sağlasın ve $\mathbb{D}$ de analitik olsun. O zaman eşitsizlikler ,

$$\left|\operatorname{Re}\left\{F\left(z\right)\right\}\right|<\frac{4}{\pi}\tan^{-1}\left|z\right| \ , \quad \left|\operatorname{Im}\left\{F\left(z\right)\right\}\right|<\frac{2}{\pi}\log\frac{1+\left|z\right|}{1-\left|z\right|}$$

$\mathbb{D}$ de her z noktası için, sağlanır. $0<\left|z\right|<1$ için $\left|z\right|<\frac{4}{\pi}\tan^{-1}\left|z\right|$ olduğunu not edebiliriz. Schwarz lemması güçlü bir hipotez altında daha iyi bir sınır verir.

İspat : $G\left(z\right)=\frac{2i}{\pi}\log\frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu, $\mathbb{D}$ yi $\left|\operatorname{Re}\left\{w\right\}\right|<1$ düşey şerit üzerine konform olarak dönüştürür. Böylece $F\prec G$ ve bir w Schwarz fonksiyonu için $F=G\circ w$ dir. Buradan

$$\operatorname{Re}\{F(z)\} = -\frac{2}{\pi}\arg\left\{\frac{1+w(z)}{1-w(z)}\right\}$$

bulunur. Şimdi gözlemlenen lineer kesirli $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ dönüşümü $\rho = 2r/(1-r)^2$ yarıçapı ve $w_0 = (1+r^2)/(1-r^2)$ merkezi olmak üzere $|w-w_0| = \rho$ çember üzerine $|z| = r < 1$ çemberini taşıyabiliriz. Bundan dolayı

$$\left|\arg\left\{\frac{1+z}{1-z}\right\}\right| \le \tan^{-1}\left(\frac{2r}{1-r^2}\right) = 2\tan^{-1} r$$

ve Schwarz lemması, α uygun tek birim modülü sabit olduğunda $F(z) = G(\alpha z)$ için yalnız oluşturulan eşitlik olmak üzere,

$$\left|\operatorname{Re}\{F(z)\}\right| \le \frac{4}{\pi}\tan^{-1}|z|$$

verir. $\operatorname{Im}\{F(z)\}$ için eşitsizlik benzer şekilde ispatlanır. Şimdi Schwarz lemmasının bir harmonik versiyonun kısa bir adımını vereceğiz. Takip eden keskin eşitsizlik Heinz (1959)'e bağlıdır.

Teorem 3.11.2 : $f(0) = 0$ ve $|f(z)| < 1$ olmak üzere f, $\mathbb{D}$ de bir kompleks değerli harmonik fonksiyon olsun. O zaman $|f(z)| \le \frac{4}{\pi}\tan^{-1}|z|$ ve bu eşitsizlik $\mathbb{D}$ de her z noktası için kesindir. Ayrıca sınır $f(0) = 0$ olmak üzere kendi üzerine $\mathbb{D}$ nin f yalınkat harmonik dönüşümleri için (fakat yalnızca orijinde elde edilir) her yerde kesindir.

İspat : θ sabiti için F, $F(0) = 0$ ve

$$\operatorname{Re}\{F(z)\} = \operatorname{Re}\{e^{-i\theta} f(z)\}$$

olmak üzere $\mathbb{D}$ de analitik fonksiyon olsun. O zaman $\left|\operatorname{Re}\{F(z)\}\right| < 1$, bu yüzden lemma 3.9.5

$$\left|\operatorname{Re}\{e^{-i\theta} f(z)\}\right| \le \frac{4}{\pi}\tan^{-1}|z|$$

olduğunu gösterir. Fakat bu eşitsizlik bütün θ lar için geçerlidir, buradan

$$|f(z)| \le \frac{4}{\pi}\tan^{-1}|z|$$

bulunur. $\mathbb{D}$ nin yalnız bir çapla ilgili doğru parçasına özgü değerlerinin

$$f(z)=\frac{2\beta}{\pi}\arg\left\{\frac{1+\alpha z}{1-\alpha z}\right\},\quad |\alpha|=|\beta|=1,$$

formunda olan fonksiyonlar için eşitlik, ortaya çıkan ispatın bir analizi oluşturulabilir. Rotasyona bağlı, basamak fonksiyonu

$$\theta(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le \pi\\ \pi, & \pi\le t\le 2\pi\end{cases}$$

olmak üzere $e^{i\theta(t)}$ nın Poisson integralleri vardır.

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta(t)}dt=0,$$

ve $\theta(0)=0$, $\theta(2\pi)=2\pi$ olmak üzere sürekli bir artan fonksiyon $\theta(t)$ ile dairenin belirlenmiş bir noktası z olduğunda, $\frac{4}{\pi}\tan^{-1}|z|$ e yaklaşan keyfi $|f(z)|$ ve $f(0)=0$ olmak üzere, $\mathbb{D}$ nin $\mathbb{D}$ üzerine bir yalınkat harmonik dönüşümü bir Poisson integrali ile ortaya koyulabilir. Sınır bu nedenle dairenin kendi üzerine harmonik dönüşümleri için keskindir.

3.12 Harmonik Yalınkat Fonksiyonlar

Normalleştirme

Bu bölümün amacı, yalınkat analitik fonksiyonların genelleştirmesi olarak yalınkat harmonik fonksiyonları çalışmaktır. Başlangıç noktası, bir g analitik fonksiyonunun eşleniği ve bir h analitik fonksiyonunun toplamı olarak $\mathbb{D}$ birim dairesinde bir f harmonik fonksiyonunun

$$f=h+\overline{g},\qquad g(0)=0,$$

kanonik gösterimidir. $g(0)=0$ olduğu toplama ile gösterim tektir. h ve g nin kuvvet seri açılımları

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \quad \text{ve} \quad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n$$

ile tanımlanır. f, bir diğer bölge üzerine $\mathbb{D}$ nin bir yön-koruyan harmonik dönüşümüdür. O zaman Lewy teoreminden, Jakobiyeni kesinlikle pozitiftir. Eşdeğer olarak, $|g'(z)| < |h'(z)|$ eşitsizliği bütün $z \in \mathbb{D}$ için sağlanır. Bu özellikle $h'(z) \neq 0$ olduğunu gösterir. Buradan $h(0) = 0$ ve $h'(0) = 1$ olduğu varsayımı genelliği bozmaz. $a_1 = 1$ ve $a_0 = b_0 = 0$ olmak üzere dairenin bütün yön-koruyan harmonik dönüşümlerinin sınıfı, S_H ile ifade edelim. Böylece S_H analitik yalınkat fonksiyonlarının standart sınıfı S yi içerir. Bir $f \in S_H$ fonksiyonunun h analitik kısmına rağmen lokal olarak yalınkattır. O, yalınkat olmasının gerekmediği açıktır.

S_H, normal bir ailedir: S_H da her fonksiyonlarının dizisinin $\mathbb{D}$ de düzgün lokal olarak yakınsayan bir alt dizisi vardır. Diğer taraftan, S_H bir kompakt aile değildir; o, lokal olarak düzgün limitlere geçiş altında korunmaz. Fonksiyonun limitinin $\mathbb{D}$ de harmonik olması şarttır, fakat yalınkat olması gerekmez. Bunu görmek için,

$$f_n(z) = z + \frac{n}{n+1}\bar{z}$$

ile tanımlanan sadece $f_n \in S_H$ afin dönüşümlerinin dizisini düşünürsek, o zaman $f_n(z) \to f(z) = 2x$ ($z = x + iy$ olduğunda) $\mathbb{D}$ de lokal olarak düzgün, fakat f yalınkat değildir (ne de sabittir).

Daha başka bir normalleştirme vardır. Ancak hangi bir kompakt normal aile üretiminde başarılıdır. Bu basitçe $b_1 = 0$ yapmak için, uygun bir afin dönüşüm ile verilen harmonik dönüşümü bulma fikridir. Özel olarak her $f \in S_H$, $|b_1| = |a_1| = 1$ özelliğine sahiptir, ve

$$\varphi(w) = \frac{w - \overline{b_1 w}}{1 - |b_1|^2}$$

fonksiyonu bir yön-koruyan afin dönüşümdür.

$$f_0 = \varphi \circ f = h_0 + \overline{g_0}$$

toplamı bu nedenle $h_0(0) = g_0(0) = 0$, $h_0'(0) = 1$ ve $g_0'(0) = 0$ özelliklerine sahip olduğu kolayca görülür ki bir yön-koruyan harmonik dönüşümdür. Böylece $f_0 \in S_H$

ve $g_0'(0)=0$ olacak şekilde ek özelliği vardır. $g_0'(0)=0$ olmak üzere $f\in S_H$ fonksiyonlarının sınıfı S_H^0 ile ifade edilecektir.

S_H^0 da $f=h+\overline{g}$ ise o zaman $g_0'(0)=0$ ve $\left|g'(z)/h'(z)\right|<1$ böylece $\left|g'(z)\right|\leq|z|\left|h'(z)\right|$ olduğu klasik Schwarz lemmasından bulunur. $w=\overline{f_{\bar{z}}}/f_z$ dilatasyonun şartlarında, $f\in S_H^0$ ise $\left|w(z)\right|\leq|z|$ olduğu söylenir.

Gelecek bölümde S_H^0 bir kompakt normal aile olduğu gösterilecektir. Bu özellik analitik yalınkat fonksiyonlarının S ailesinin bir genelleştirilmesi "doğru" olarak S_H a göre daha umut verici görünen S_H^0 dır.

$f\rightarrow f_0=\varphi\circ f$ dönüşümü $f_0\in S_H^0$ ı $f\in S_H$ a taşır ki

$$f=f_0+\overline{b_1 f_0}$$

olmak üzere tersinirdir. Böylece $|b_1|<1$ olmak üzere b_1 in belirtilen her değeri için φ standart afin dönüşümü altında bir $f_0\in S_H^0$ verilen fonksiyonu için karşılığı olan $g'(0)=b_1$ olmak üzere $f\in S_H$ fonksiyonu tektir.

3.13 Normal Aileler

Önceki bölümün terminolojisinde harmonik dönüşümleri için extremal problemleri üzerine çalışmalarda önemli etkileri olduğu bir teorem belirtilebilir.

Teorem 3.13.1: S_H ailesi normaldir. S_H^0 ailesi normal ve kompaktır.

Bu sonuç Clunie ve Sheil-Small (1984)'a aittir ve onların ispatı buraya uyarlanmıştır. Hemen bir sonucu, lokal düzgün yakınsaklığın topolojisine göre sürekli olduğu (reel değerli) fonksiyonelinin herhangi bir maksimizasyon problemi için, S_H^0 da bir extremal fonksiyonunun varlığıdır.

Teoremin ispatı kolay değildir. Analitik fonksiyonlarının ailelerinin normalliği için Montel'in kriteri harmonik fonksiyonlarının aileleri için de geçerli olduğu üzerine kurulacaktır. Ortak bir Ω bölgesinde tanımlı fonksiyonların bir $\mathscr{F}$ ailesi Ω nun her noktasının bir yakın komşuluğunda düzgün olarak sınırlandırıldığını varsayalım. Daha doğrusu, Ω da her z_0 noktasına, bütün $z \in V$ noktaları için ve her $f \in \mathscr{F}$ için $|f(z)| \le M$ olduğu gibi z_0 nın bir V komşuluğu ve $M > 0$ bir sayı karşılığı vardır. Eşit bir şekilde, $\mathscr{F}$ de fonksiyonlar Ω nun her kompakt alt kümelerinde düzgün olarak sınırlıdırlar. Montel' in teoremi analitik fonksiyonlarının bir normal ailesi olması yalnız ve ancak lokal olarak sınırlı olduğunu söyler. Aslında ispat, ilke harmonik fonksiyonların ailelerine genişletilmiş olduğundan aynıdır. Bir $\mathscr{F}$ ailesi gibi lokal olarak sınırlı ise o zaman Poisson formülü ile

$$\mathscr{F}' = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} : f \in \mathscr{F} \right\} \cup \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} : f \in \mathscr{F} \right\}$$

lokal olarak sınırlı ailesi de elde edilmiştir. Bu, $\mathscr{F}$ Ω nın keyfi bir alt kümesine kıstlandığında eşsüreklidir. Böylece $\mathscr{F}$ in normalliği bir köşegenleştirme argümenti ve Arzela-Ascoli teoreminden bulunur (Duren s. 7 veya Ahlfors s. 219).

S_H nın normali ispatına, onun lokal sınırlılığını kurmak bu nedenle yeterli olur.

$$M_\infty(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

notasyonu olmak üzere

$$M_\infty(r,f) \le 2M_\infty(r,f_0)$$

olduğu $f = f_0 + \overline{b_1 f_0}$ dan bulunur. Böylece S_H^0 lokal olarak sınırlı olduğunu göstermeye yeterlidir. İspat aşağıda belirtildiği gibi, kuazikonform dönüşümler için, Schwarz lemmasının bir formuna dayanır.

Lemma 3.11.2: G, $G(0) = 0$ olmak üzere kendi içine birim dairesinin bir K-kuazikonform dönüşümü olsun. O zaman $\varphi_K(r) = \mu^{-1}\left(\dfrac{\mu(r)}{K}\right)$ olduğunda $|G(z)| \le \varphi_K(|z|)$ dir ve $\mu(r)$ 0 dan r'ye yarıçap parçası ve birim çember ile sınırlı bölge halkasının modülüdür. Her $K > 1$ sabiti için, $\varphi_K(r)$ sınırı 0 dan 1 e r olmak üzere artar.

Bir halka bölgenin modülü (çifte bağlantılı bölge) $M = r_2/r_1$ modülü olduğunda $\mu = 1/2\pi \log M$ dir. Burada Grötzsch halkasının modülü ile uğraşıyoruz ve $\mu(r)$,

$$\mathscr{K}(k)=\int_0^{\pi/2}\left\{1-k^2\sin^2\theta\right\}^{-1/2}d\theta \quad 0<k<1$$

eliptik integralinin koşullarında ifade edilebilir. Bir dikdörtgen üzerine üst yarı-düzleminin bir Schwarz-Christoffel dönüşümünün yardımı ile

$$\mu(r)=\frac{1}{4}\frac{\mathscr{K}(r')}{\mathscr{K}(r)}\ ,\ r'=\sqrt{1-r^2}$$

bulundu (Neheri 1975 s.293). Bütün mesele 1 den az lokal olarak bir düzgün sınırının varlığıdır.

Lemma, Hersch ve Pfluger (1952)' in sonucudur. İspat için, kitap kuazikonform dönüşümlerinde literatürüne başvuruldu. (Örneğin Lehto ve Virtanen (1973)'e bak. s. 63)

İspat: $f=h+\overline{g}\in S_H^0$ olsun. O zaman klasik Schwarz lemması ile $|g'(z)|\le|z||h'(z)|$. Buradan $0<R<1$ olmak üzere her sabit R için $w=f(Rz)$ dönüşümü $K=(1+R)/(1-R)$ olmak üzere $\mathbb{D}$ de K-kuazikonformdur. Şimdi $F(0)=0$ ve $F'(0)>0$ şartları ile normalleştiren $f(\mathbb{D})$ aralığı üzerine $\mathbb{D}$ nin F konform dönüşüm olması için f nin konformla ilişkisini tanımlamalı. $G(z)=F^{-1}(f(Rz))$ olsun. O zaman G yine K-kuazikonform olup ve $G(0)=0$ olmak üzere kendi içine daireye dönüşür. Bütün $z\in D$ için $|G(z)|\le\varphi_K(|z|)$ lemmasıdır. Bu eşitsizlik

$$\left|F^{-1}(f(z))\right|\le\varphi_K\left(\frac{|z|}{R}\right),\quad |z|\le R=\frac{K-1}{K+1}$$

olarak yeniden yazılabilir. Diğer taraftan, yalınkat analitik fonksiyonlar için büyüme teoremi

$$|F(z)|\le\frac{|F'(0)||z|}{\left(1-|z|^2\right)},\quad |z|<1$$

olduğunu söyler. Bu nedenle

$$|f(z)|=\left|F\left(F^{-1}(f(z))\right)\right|\le\frac{|F'(0)\varphi_K(r/R)|}{\left[1-\varphi_K(r/R)\right]^2},\quad |z|\le r<R\,.$$

$F'(0)$ tahmin etmek amacıyla; w_0, F tarafından ihmal edilen herhangi bir değer olduğu zaman, $|F'(0)| \leq 4|w_0|$ formunda Koebe 1-çeyrek teoremine başvururuz. Fakat o, c bir pozitif mutlak sabit olduğunda $|w| < R$ dairesini içeren alanın, birim dairenin herhangi bir harmonik dönüşümü için

$$cR^2 \leq |f_z(0)|^2 + |f_{\bar{z}}(0)|^2$$

olup Rado teoreminin ispatında gösterildi. Bundan dolayı her $f \in S_H^0$ fonksiyonu için $f_z(0) = 1$ ve $f_{\bar{z}}(0) = 0$ dır, bu f $|w_0| = 1/\sqrt{c}$ modülünün bir değerini ihmal ettiğini gösterir. $|F'(0)| \leq 4/\sqrt{c}$ bulunur. S_H^0 lokal olarak sınırlı ve bu nedenle normal olduğunda ispatı tamamlıyor. Daha evvel ki yorum gibi S_H normal olarak bulunur.

S_H^0 kompakt olduğunu göstermek kalır. Bunun için $f_n = h_n + \overline{g_n} \in S_H^0$ ve $\mathbb{D}$ nin kompakt alt kümelerinde düzgün olarak $f_n \to f$ olduğunu varsayalım. O zaman f harmonik ve buradan bir $f = h + \overline{g}$ kanonik gösterime sahiptir. Kolayca görülür ki $h_n \to h$ ve $g_n \to g$ lokal olarak düzgün ve $g'(0) = 0$ ve $h'(0) = 1$ dir. Özellikle h sabit değil ve buradan $\mathbb{D}$ de Hurtwitz teoremi ile $h'(z) \neq 0$ dır. Ancak Schwarz lemması $|g'(z)| \leq |z||h'(z)|$ ve daire boyunca

$$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 \geq \left(1 - |z|^2\right)|h'(z)|^2 > 0$$

Jakobiyenini verir. Başka bir deyişle, f $\mathbb{D}$ de lokal olarak yalınkattır. Çünkü $\mathbb{D}$ nin kompakt alt kümelerinde yalınkat fonksiyonlarının düzgün limiti olup f, $\mathbb{D}$ de yalınkat olduğu argüman prensibinden bulunur. Buradan f limit fonksiyonu yine S_H^0 a aittir ve S_H^0 bir kompakt ailesi olduğunu gösterir. İspatı bitirir.

3.14 Harmonik Koebe Fonksiyonu

$$k(z) = z(1-z)^{-2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots$$

klasik (analitik) Koebe fonksiyonu $-\frac{1}{4}$ den ∞ a negatif reel eksen boyunca bir yarı-doğrunun çıkarıldığı kompleks düzlem üzerine konform olarak birim daireye dönüşür. Analitik yalınkat fonksiyonlarının sınıfı S üstünde birçok extremal problemler için extremal fonksiyonun rolü oynadığı görülecektir. Harmonik Koebe fonksiyonu şimdi oluşturmak için harmonik yalınkat fonksiyonlarının S_H^0 sınıfı için Koebe fonksiyonu olası analoglarıdır. Daireye $-\frac{1}{6}$ dan ∞ a negatif reel eksen boyunca çıkarılmış bütün düzlemin üzerine harmonik olarak dönüştürecektir. Onun çiziminde extremal elemanlar S de Koebe fonksiyonu olmasına S_H^0 da benzer rol oynadığını görülür, fakat bu henüz tam olarak teyit edilmemiştir.

Harmonik Koebe fonksiyonunun çizimi Clunie ve Sheil-Small (1984) sebebiyle ve (CHD) yatay yönde de konveks bölgeler üzerine dönüşümler hakkında onların genel sonuşlarında yine merkezlidir.bu teoreme göre, lokal olarak bir yalınkat harmonik fonksiyon $f = h + \overline{g}$, yalınkat ve aralığı CHD olması yalnız va ancak $h - g$ analitik fonksiyonu aynı özellikleri taşır.

$k(z) = z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yalınkat ve onun aralığı yatay yönde de konveks olduğunu şimdi görelim. Teoremin görümünde, lokal olarak bir yalınkat harmonik dönüşüm $f = h + \overline{g}$, $h - g = k$ ise aynı özelliklere sahip olacaktır. f in lokal yalınkat olma durumu $g'(z) = zh'(z)$ olması sağlandı. Başka bir deyişle, f in dilatasyonu $w(z) = z$ olarak belirtildi. Sonra türevlemek, iki koşul

$$\begin{aligned} h'(z) - g'(z) &= k'(z) \\ zh'(z) - g'(z) &= 0 \end{aligned}$$

lineer denklemler çiftine düşürür. $k'(z) = (1+z)(1-z)^{-3}$ olduğunu not etmek, bu nedenle

$$h'(z) = \frac{(1+z)}{(1-z)^4}, \quad g'(z) = \frac{z(1+z)}{(1-z)^4}$$

formülleri elde edilir. Şimdi integralleri alınırsa $h(0) = g(0) = 0$ varsayımı altında

$$h(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} \qquad g(z) = \frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$$

verir.

Sonuç olarak elde edilen $K = h + \overline{g}$ fonksiyonu yukarıda gösterildiği gibi h ve g olmak üzere harmonik Koebe fonksiyonu olarak bilinmektedir. K yalınkat ve aslında $K \in S_H^0$ olduğu ve dairede yön-koruyan olduğu çizimden açıktır. K nın aralığı yatay yönde konveks ve reel eksene göre simetrik olduğu da açıktır. K nın gerçek aralığı ne kadar olduğu açık değildir.

K nın aralığını belirlemek için bir ilk denemede, birim çemberin görüntüsünü bulmak için çalışılabilir. Aşikar formüller gösterir ki K, $z = 1$ her sınır noktası hariç davrandığını gösterir. Ortaya çıkan hesaplamalar, ancak çemberde her $e^{it} \neq 1$ noktası için $K\left(e^{it}\right) = -\frac{1}{6}$ dır. Ekonomik olarak görmek için

$$K = h + \overline{g} = (h - g) + 2\operatorname{Re}\{g\} = k + 2\operatorname{Re}\{g\}$$

veya

$$K(z) = \operatorname{Re}\left\{\frac{z + \frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3}\right\} + i\operatorname{Im}\left\{\frac{z}{(1-z)^2}\right\}$$

yazılır. k analitik Koebe fonksiyonundan dolayı birim daireyi reel eksen boyunca bir yarık düzleme dönüştürür. Geometrik olarak açıktır ki $z \neq 1$, $|z| = 1$ birim çemberinde $\operatorname{Im}\{k(z)\} = 0$ dır. Kolayca anlaşılır fakat hesaplama $z \neq 1$, $|z| = 1$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z + \frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3}\right\} \equiv -\frac{1}{6}$$

olduğunu gösterir. Böylece $z = 1$ noktası hariç birim çemberinde $K(z) \equiv -\frac{1}{6}$ olduğunu doğruluyor.

Ancak $\operatorname{Re}\{\zeta\} > 0$ sağ yarı-düzlem üzerine $\mathbb{D}$ ye dönüşür ki

$$\zeta = \frac{1+z}{1-z} = \xi + i\eta$$

araya koyarsak yol gösterir. Hesaplamalar

$$K(z) = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{6}\left(\zeta^3 - 1\right)\right\} + i\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{4}\left(\zeta^2 - 1\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\xi^3-3\xi\eta^2-1\right)+i\frac{1}{2}\xi\eta\,,\quad \xi>0$$

olduğunu gösterir. Şimdi $(z\neq 1)$ birim çember üzerinde her z noktası imajiner eksende bir ζ noktası üzerine taşımaktadır. Buradan $K(z)=-\frac{1}{6}$ ve $\xi=0$ olduğu gözlemlenir.

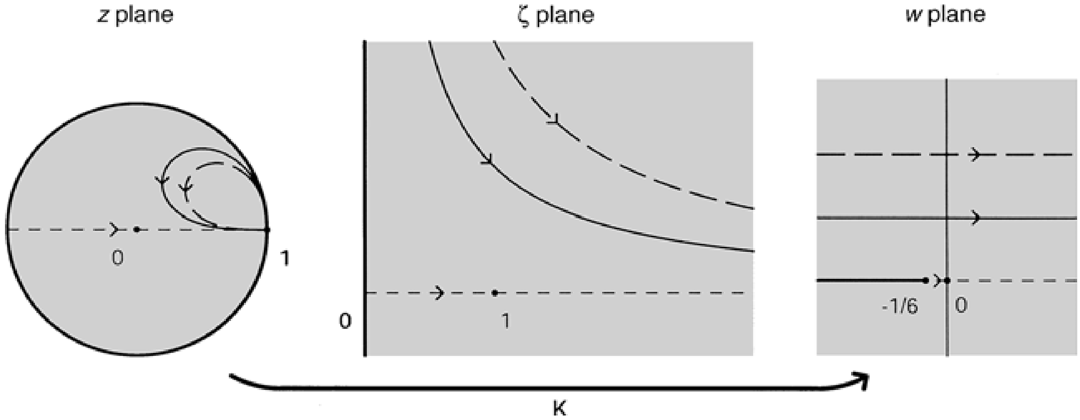
$$\{\zeta=\xi+i\eta:\xi>0,\eta=0\}$$

pozitif reel eksen $\left(-\frac{1}{6},\infty\right)$ reel aralığa monoton olarak dönüştürüldüğü daha sonra gözlemlenir. Sonuç olarak, bir $c\neq 0$ reel sabiti olduğunda her $\xi\eta=c$ hiperbolü $\left\{w=u+i\frac{c}{2}:-\infty<u<\infty\right\}$ tümü doğru olur ki

$$\left\{w=u+i\frac{c}{2}:u=\frac{1}{6}\left(\xi^3-3c^2\xi^{-1}-1\right),\xi>0\right\}$$

kümesine yalınkat olarak taşımaktadır. Direk olarak ispatlanır ki K, $\left(-\infty,-\frac{1}{6}\right]$ reel aralığın tüm negatif düzlem üzerine dönüşür ve dairede yalınkattır. Argüman şekil 3.7. ile gösterilir. K nın etkisi şekil 3.8 de resmedilmektedir.

Halen K nın, $z=1$ için hariç tek bir $w=-\frac{1}{6}$ noktasına, $\left(-\infty,-\frac{1}{6}\right]$ tüm aralığa sınırlandırılmış olan görüntüye sahip tüm birim çemberi nasıl taşıdığı açıklanmak zorundadır. Oldukça açıktır ki açıklanması 1 noktası yanında K nın davranışında uzanması gerekir. Fakat z gibi 1 e teğet olmadığı gözetilip, $K(z)$ sonsuza yatkın olur. Bunu görmek için, $\xi>0$,



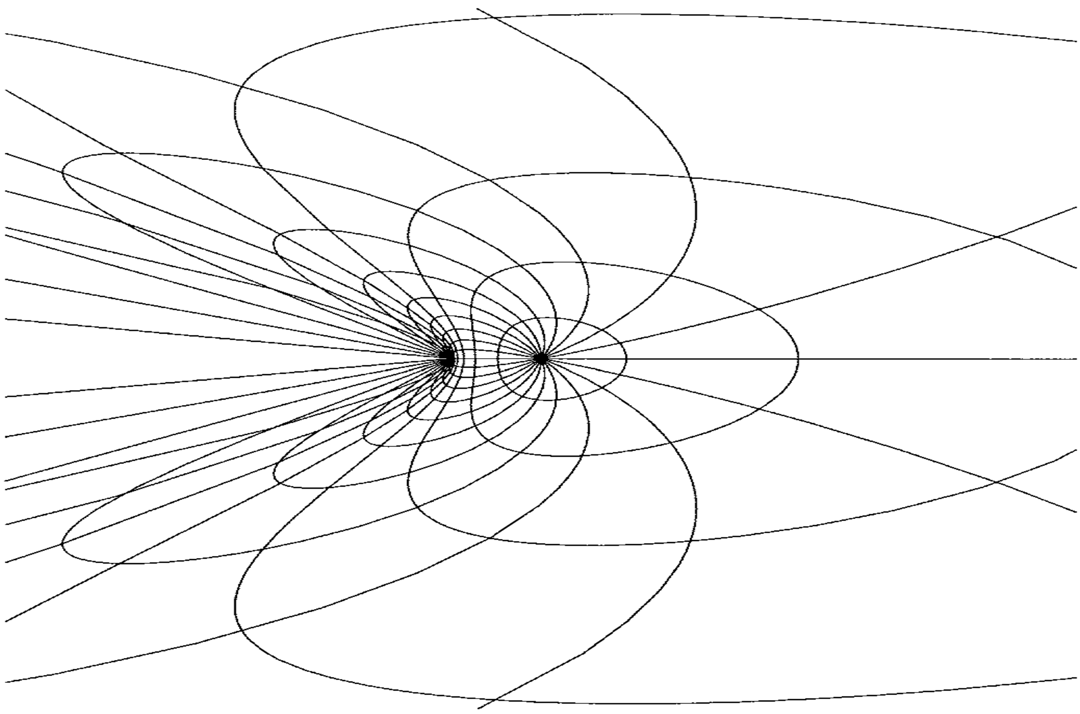
Şekil 3.7 Harmonik Koebe fonksiyonunun aralığı

$\eta = c\xi$ ışınla ilgili olarak eğri üzerinde $K(z)$ nin davranışını gözönüne alırız. $\xi \to +\infty$ iken, aşikardır ki $K(z) \to \infty$. Ancak $z \to 1$ iken $c \neq 0$ bir reel sabit olduğunda ζ düzleminde tanjanta ait eğri ile ilgili olarak eğri $\eta = c/\sqrt{\xi}\,(\xi > 0)$. $\xi \to 0$ iken

$$K(z) = \frac{1}{6}\left(\xi^3 - 3c^2 - 1\right) + i\frac{c}{2}\sqrt{\xi} \to -\frac{1}{6}\left(3c^2 + 1\right)$$

bulunur. Reel doğru üstünde c aralıkları gibi bu hesaplar "kayıp" sınır noktalarının bütünü içindir. $c > 0$ ise o zaman sınır noktası ile ilgili üzerinden yaklaşmaktadır; oysa $c < 0$ ise aşağıdan yaklaşmaktadır.

Alışılmış sınır davranışı noktalara sınır yayının harmonik Koebe fonksiyon dönüşümü ile gösterildi, aslında harmoniğin tipik, kesme çizimi ile üretilen dönüşümüdür.



Şekil 3.8. Harmonik Koebe fonksiyonu

Örneğin harmonik yarı-düzlem $L = \mathrm{Re}\{l\} + i\,\mathrm{Im}\{k\}$ dönüşümü $\mathrm{Re}\{w\} > -\frac{1}{2}$ yarı düzlem üzerine daireye dönüşür fakat $z = 1$ noktası hariç sonsuza gider ki $-\frac{1}{2}$ noktasına tüm sınırı gönderir. Bu tür davranışı, sınır fonksiyon bir yay üstünde sabit olduğunda, yalnızca sınırla ilgili yay üstünde birim modüllere sahip dilatasyon olduğu zaman meydana gelebilir.

3.15 Janowski Konvekse Yakın Harmonik Fonksiyonlar

Özet

$\Omega^* \subset \mathbb{C}$ bölgesi üzerine $\mathbb{D} = \{z \mid z < 1\}$ açık birim dairesinde bir harmonik dönüşüm olsun. $w = f(z)$, $\mathbb{D}$ bölgesinde yalınkat olarak Ω^* ya dönüştüren bir kompleks değerli harmonik fonksiyondur. $h(z)$ ve $g(z)$ $\mathbb{D}$ bölgesinde analitik, $h(0) = g(0) = 0$ ve f in sırasıyla analitik kısmı ve analitik olmayan kısmı olup, $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ kanonik gösterimi vardır. f yön-koruyan ve $\mathbb{D}$ bölgesinde lokal olarak yalınkat olması için ancak ve ancak $\mathbb{D}$ bölgesinde $J_f > 0$ dır. İkinci kompleks dilatasyonu, $|w(z)| < 1$ ile $\mathbb{D}$ bölgesinde f analitik olduğu zaman

$$w(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)} \text{ dir.}$$

Bu çalışmada $w(z) = \dfrac{g'(z)}{h'(z)} \Rightarrow w(0) = b_1$ olduğu analitik dilatasyon fonksiyonun en genel durumunda uygulanan kesme metodu ile $\mathbb{D}$ açık birim dairesinde Janowski harmonik konvekse yakın fonksiyonlar için büyüme ve distorsiyon teoremlerini elde ederiz. Bu durumda ikinci dilatasyon, $\phi(z)$ Schwarz fonksiyonu olduğunda $w(z) = \dfrac{\phi(z) + b_1}{1 + \overline{b_1}\phi(z)}$ dir.

I. Giriş

Her $z \in \mathbb{D}$ için $|\phi(z)| < 1$, $\phi(0) = 0$ koşullarını sağlayan ve $\mathbb{D}$ bölgesinde analitik olan $\phi(z)$ fonksiyonlarının ailesi olarak Ω olsun ve $\mathbb{D}$ bölgesinde analitik olan $\varphi(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots$ fonksiyonlar sınıfı A ile tanımlansın. $p(z) = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonlarının sınıfını $\mathcal{P}\,(A, B)$ olarak alalım ve $\phi(z) \in \Omega$ olmak üzere $p(z) = \dfrac{1 + A\phi(z)}{1 + B\phi(z)}$ $(-1 \le B < A < 1)$ fonksiyonlarının ancak ve ancak $p(z)$, $\mathscr{P}$ (A,B) sınıfına aittir. $\mathscr{P}$ (A,B) sınıfı W. Janowski tarafından tanımlanmıştır. $\varphi_1(z)$ ve $\varphi_2(z)$, A ya ait elemanlar olsun. Eğer Ω ya ait bir $\phi(z)$ fonksiyonu $\varphi_1(z)=\varphi_2(\phi(z))$ eşitliğini sağlıyorsa o zaman $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ e subordinedir denir ve $\varphi_1(z)\prec\varphi_2(z)$ ile gösteririz. Eğer $\varphi_1(z)\prec\varphi_2(z)$ ise o zaman $\varphi_1(\mathbb{D})\subset\varphi_2(\mathbb{D})$ (J.Clunie ve Sheil-Small, 1984 , P. Duren, 1983) dır.

$\phi(z)\in A$ olsun ve $1+z\dfrac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}<\dfrac{1+Az}{1+Bz}$, $-1\leq B<A\leq 1$ koşulunu sağlasın. O zaman $\varphi(z)$ e **Janowski konveks fonksiyonu** deriz ve Janowski konveks fonksiyonların sınıfı $C(A,B)$ olarak tanımlanır. $s(z)\in C(A,B)$ olmak üzere $\operatorname{Re}\left(\dfrac{\varphi'(z)}{s'(z)}\right)>0 \quad (1.1)$ koşulunu sağlayan ve $\varphi(z)\in A$ fonksiyonlar sınıfı $K(A,B)$ ye Janowski konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı denir.

$\mathscr{U}$, kompleks düzlemde bir basit bağlantılı bölge olsun. $h(z)=z+a_2z^2+\ldots$ ve $g(z)=b_1z+b_2z^2+\ldots$ $\mathscr{U}$ bölgesinde analitik bir harmonik fonksiyonun $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ olarak temsil edilir ve sırasıyla f in analitik kısmı ve analitik olmayan kısmı olmak üzere $h(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$ ve $g(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots$ $\mathbb{D}$ bölgesinde analitik fonksiyonlar olsun. $J_f(z)=|h'(z)|^2-|g'(z)|^2>0$ ise $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ e, $\mathbb{D}$ bölgesinde **yön-koruyan harmonik yalınkat fonksiyon** denilir. $|b_1|<1$, $a_1=1$, $a_0=b_0=0$ koşullarını sağlayan bütün yön-koruyan harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı S_H ile ve $a_0=b_0=b_1=0$, $a_1=1$ koşullarını sağlayan bütün yön koruyan harmonik fonksiyonların sınıfı S_H^0 olarak tanımlanır. Kolaylık sağlamak için $J_f(z)>0$ ise yön koruyan f fonksiyonlarını, $J_f(z)<0$ ise yön koruyan $\overline{f}$ fonksiyonlarını inceleyeceğiz. $w(z)=\dfrac{g'(z)}{h'(z)}$ harmonik fonksiyonların ikinci analitik dilatasyonu olarak tanımlanır. f lokal olarak yalınkat ve yön_koruyan ise, o zaman bütün $z\in\mathbb{D}$ için $|w(z)|<1$ olduğunu belirtelim.

Bu şekilde belirlenmiş dilatasyonu olan harmonik dönüşümlerin ortaya konması için etkili bir yöntem Clunie ve Sheil_Small (1984) tarafından tanıtılan kesme methodudur. Aşağıdaki teoremde bu method üzerinde durulmaktadır. $\Omega^{**} \subset \mathbb{C}$ bölgesinin bağlantılı(veya boş) ise yatay doğrultuda konvekstir denir.

Teorem 3.15.1: $\left(P.Duren\left[1983\right]\right)$ $f\left(z\right)=h\left(z\right)+\overline{g\left(z\right)}$, açık birim diskinde lokal olarak yalınkat ve harmonik olsun. O zaman f yalınkat ve onun aralığı yatay yönde konveks olması için ancak ve ancak $\varphi\left(z\right)=h\left(z\right)-g\left(z\right)$ şeklindeki analitik fonksiyonu aynı özelliklere sahip olmasıdır.

Genel olarak Teorem 3.15.1 in uygulamasında belirlenmiş dilatasyon ile yön-koruyan harmonik dönüşümler yapılır. Yatay yönde bir bölge içerisine birim diskin konform dönüşümü ve $\mathbb{D}$ bölgesinde $\left|w\left(z\right)\right|<1$ ile keyfi $w\left(z\right)$ analitik fonksiyonuyla başlar. Fakat bu makalede kesme methodunun uygulanmasında (Garanti Teorem 3.15.1 in altında) en genel durumda analitik ikinci dilatasyon fonksiyonu $w\left(z\right)=\dfrac{g'\left(z\right)}{h'\left(z\right)} \Rightarrow w\left(0\right)=b_1$.

Bu durumda Schwarz lemması kullanılarak

$$\phi\left(z\right)=\frac{w\left(z\right)-w\left(0\right)}{1-\overline{w\left(0\right)}.w\left(z\right)} \quad \left(1.2\right)$$

formunda ikinci dilatasyonu elde ederiz.

Wilfred Kaplan (1952) tarafından ilk kez tanımlanan konvekse yakın fonksiyonların geometrik özellikleri kadar harmonik kesme methodu kullanılarak konvekse yakın harmonik fonksiyonların araştırması gerçekleştirilebilir olduğu ile ayrıca ilgilidir.

Hemen hemen yukarıda adı geçen method kullanılarak, Janowski konvekse yakın harmonik dönüşümlere uygun distorsiyon ve büyüme teoremleri ile bu çalışmada ele alırız. Janowski konvekse yakın harmonik fonksiyonların sınıfı $S_H K\left(A,B\right)$ ile belirtilir.

II. Temel Sonuçlar

Lemma 3.15.2: $f\left(z\right)=h\left(z\right)+\overline{g\left(z\right)} \in S_H$ ve $w\left(z\right)=\dfrac{g'\left(z\right)}{h'\left(z\right)}$ f in ikinci analitik dilatasyonu olsun. O zaman

$$\frac{|b_1|-r}{1-|b_1|r} \le |w(z)| \le \frac{|b_1|+r}{1+|b_1|r} \quad (2.1)$$

$$\frac{(1-|b_1|)(1-r)}{1+|b_1|r} \le (1-|w(z)|) \le \frac{(1-|b_1|)(1+r)}{1+|b_1|r} \quad (2.2)$$

$$\frac{(1+|b_1|)(1-r)}{1-|b_1|r} \le (1+|w(z)|) \le \frac{(1+|b_1|)(1+r)}{1+|b_1|r} \quad (2.3)$$

$$\frac{(1-|b_1|^2)(1-r^2)}{(1+|b_1|r)^2} \le (1-|w(z)|^2) \le \frac{(1-|b_1|^2)(1-r^2)}{(1-|b_1|r)^2} \, (2.4)$$

İspat: $f(z)=h(z)+\overline{g(z)} \in S_H$, o zaman $w(z)=\dfrac{(b_1z+b_2z^2+\ldots)'}{(z+a_2z^2+\ldots)'}$

$=\dfrac{b_1+2b_2z+\ldots}{1+2a_2z+\ldots} \Rightarrow w(0)=b_1.$ Şimdi $\phi(z)=\dfrac{w(z)-w(0)}{1-\overline{w(0)}.w(z)}=\dfrac{w(z)-b_1}{1-\overline{b_1}.w(z)}$ fonksiyonu

tanımlarız. Schwarz lemmasının şartlarını $\phi(z)=\dfrac{w(z)-b_1}{1-\overline{b_1}.w(z)}$ fonksiyonu sağlarsa, o zaman

$$w(z)=\frac{\phi(z)+b_1}{1+\overline{b_1}\phi(z)} \, (2.5).$$

(2.5) ve subordinasyon prensibi kullanılarak analitik dilatasyonu $\left(\dfrac{z+b_1}{1+\overline{b_1}z}\right)$ dönüşümü, $b_1=\alpha_1+i\alpha_2$ olduğu yerde $\rho(r)=\dfrac{(1-|b_1|^2)r}{1-|b_1|^2r^2}$ yarıçapında merkezi $C(r)=\left(\dfrac{(1-r^2)\alpha_1}{1-|b_1|^2r^2},\dfrac{(1-r^2)\alpha_2}{1-|b_1|^2r^2}\right)$ olan daire üzerine $|z|=r$ ye dönüşür. Böylece tekrar subordinasyon prensibini kullanırsak o zaman 2.2, 2.3, 2.4 ve 2.5 den bazı basit hesaplama ile $\left|w(z)-\dfrac{(1-r^2)b_1}{1-|b_1|^2r^2}\right| \le \dfrac{(1-|b_1|^2)r}{1-|b_1|^2r^2}$ (2.6) yazarız.

Lemma 3.15.3: $s(z)\in K(A,B)$ olsun. O zaman

$$(1-Br)^{\frac{A-B}{B}} \leq |s'(z)| \leq (1+Br)^{\frac{A-B}{B}} \qquad B \neq 0$$

$$e^{-Ar} \leq |s'(z)| \leq e^{Ar} \qquad B = 0 \quad (2.7)$$

İspat: $s(z)=\begin{cases} \int_0^z (1+B\zeta)^{\frac{A-B}{B}} d\zeta & B \neq 0 \\ \int_0^z e^{A\zeta} d\zeta & B=0 \end{cases}$ olduğundan dolayı

$1+z\dfrac{s''(z)}{s'(z)}=\begin{cases} \dfrac{1+Az}{1+Bz} & B \neq 0 \\ 1+Az & B=0 \end{cases}$ fonksiyonu düşünelim. $s(z) \in C(A,B)$ olduğunu gösterir.

Janowski sonucu ve subordinasyon prensibi kullanılarak $\left|\left(1+z\dfrac{s''(z)}{s'(z)}\right)-\dfrac{1-ABr^2}{1-B^2r^2}\right| \leq \dfrac{(A-B)r}{1-B^2r^2}$ (2.8) yazabiliriz. Sonra (2.8)den basit hesaplamalar

$$-\frac{(A-B)r}{1-Br} \leq \operatorname{Re}\left(z\frac{s''(z)}{s'(z)}\right) \leq \frac{(A-B)r}{1+Br} \qquad B \neq 0$$

$$-Ar \leq \operatorname{Re}\left(z\frac{s''(z)}{s'(z)}\right) \leq Ar \qquad B = 0 \quad (2.9)$$

bulunur. Bundan dolayı $r\dfrac{\partial}{\partial r}\log|s'(z)| = \operatorname{Re}\left(z\dfrac{s''(z)}{s'(z)}\right)$ (2.10), o zaman (2.9) eşitsizlikleri

$$-\frac{(A-B)}{1-Br} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|s'(z)| \leq \frac{(A-B)}{1+Br} \qquad B \neq 0$$

$$-A \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|s'(z)| \leq A \qquad B = 0 \quad (2.11)$$

formunda yazabiliriz. O zaman integrali alırsak (2.7) elde ederiz.

Sonuç 3.15.4 : $\varphi(z) \in K(A,B)$ olsun. O zaman

$$\frac{(1-Br)^{\frac{A-B}{B}}(1-r)}{1+r} \leq |\varphi'(z)| \leq \frac{(1+Br)^{\frac{A-B}{B}}(1+r)}{1-r} \qquad B \neq 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{1-r}{e^{Ar}(1+r)} \leq |\varphi'(z)| \leq \frac{(1+r)e^{Ar}}{(1-r)} \qquad B = 0 \quad (2.13)$$

İspat: $\operatorname{Re}\left(z\dfrac{\varphi'(z)}{s'(z)}\right)>0 \Rightarrow z\dfrac{\varphi'(z)}{s'(z)}=p(z)\Rightarrow$

$$\left|\frac{\varphi'(z)}{s'(z)}-\frac{1+r^2}{1-r^2}\right|<\frac{2r}{1-r^2}\Rightarrow |s'(z)|\frac{1-r}{r(1+r)}\le|\varphi'(z)|\le|s'(z)|\frac{1+r}{(1-r)} \;,$$

o zaman kullanılan Lemma 3.15.3 ile (2.12) ve (2.13) elde ederiz.

Sonuç 3.15.5: $\varphi(z)\in K(A,B)$ olsun o zaman

$$\operatorname{Re}\left[(1+Bz)^{-\frac{A-B}{B}}\varphi'(z)\right]>0 \quad B\neq 0 \quad (2.14)$$

$$\operatorname{Re}\left[e^{-Az}.\varphi'(z)\right]>0 \quad B=0 \quad (2.15)$$

İspat: $s(z)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^z(1+B\zeta)^{\frac{A-B}{B}}d\zeta & B\neq 0\\ \displaystyle\int_0^z e^{A\zeta}d\zeta & B=0\end{cases} \Rightarrow 1+z\dfrac{s''(z)}{s'(z)}=\begin{cases}\dfrac{1+Az}{1+Bz} & B\neq 0\\ 1+Az & B=0\end{cases}$

o zaman $K(A,B)$ sınıfının tanımını kullanarak (2.14) ve (2.15) i elde ederiz. Aynı zamanda belirtiriz ki ; eğer A ve B ye özel değerler verirsek $K(A,B)$ nin alt sınıflarının yeni eşitsizliklerini elde ederiz.

I. $A=1$, $B=-1$ için $\operatorname{Re}\left[(1-z)^2\varphi'(z)\right]>0$. Bu eşitsizlik W. Kaplan (1952) tarafından ispatlandı.

II. $A=1-2\alpha$, $B=-1$, $0<\alpha<1$ için $\operatorname{Re}\left[(1-z)^{2(1-\alpha)}\varphi'(z)\right]>0$.

III. $A=1$, $B=0$ için $\operatorname{Re}\left[e^{-z}\varphi'(z)\right]>0$.

IV. $A=1$, $B=-1+\dfrac{1}{m}$, $m>\dfrac{1}{2}$ için $\operatorname{Re}\left[\left(1-\left(-1+\dfrac{1}{m}\right)z\right)^{\frac{2-\frac{1}{m}}{\frac{1}{m}-1}}\varphi'(z)\right]>0.$

V. $A=\alpha$, $B=-\alpha$, $0<\alpha<1$ için $\operatorname{Re}\left[(1-z)^2\varphi'(z)\right]>0.$

Teorem 3.15.6 : $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}\in S_HK(A,B)$ olsun. O zaman

$$\frac{(1+|b_1|r)(1-Br)^{\frac{A-B}{B}}(1-r)}{(1+|b_1|)r(1+r)^2} \le |f_z| \le \frac{(1+|b_1|r)(1+Br)^{\frac{A-B}{B}}(1+r)}{(1-|b_1|)r(1-r)^2} \quad B \neq 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{e^{-Ar}(1+|b_1|r)(1-r)}{(1+|b_1|)r(1+r)^2} \le |f_z| \le \frac{(1+|b_1|r)(1+r)e^{Ar}}{(1-|b_1|)r(1-r)^2} \quad B = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{|w(z)|(1-r)(1-Br)^{\frac{A-B}{B}}}{(1+|b_1|)r(1+r)^2} \le |f_{\bar{z}}| \le \frac{(r+|b_1|)(1+Br)^{\frac{A-B}{B}}(1+r)}{(1-|b_1|)r(1-r)^2} \quad B \neq 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{|w(z)|(1-r)(1+|b_1|r)e^{-Ar}}{(1+|b_1|)r(1+r)^2} \le |f_{\bar{z}}| \le \frac{(|b_1|+r)(1+r)(1+|b_1|)e^{-Ar}}{(1-|b_1|)r(1-r)^2} \quad B = 0 \quad (2.19)$$

İspat: $\varphi(z) \in K(A,B)$ ve $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \in S_H$ olsun. O zaman Kesme methodu kullanılarak

$$\varphi(z) = h(z) - g(z) \Rightarrow \varphi'(z) = h'(z) - g'(z)$$

$$h'(z) = f_z = \frac{\varphi'(z)}{1-w(z)}, \ \overline{f_{\bar{z}}} = g'(z) = \frac{w(z)\varphi'(z)}{1-w(z)} \quad (2.20)$$

Ve

$$\begin{gathered} \frac{|\varphi'(z)|}{1+|w(z)|} \le |f_z| \le \frac{|\varphi'(z)|}{1-|w(z)|} \\ \frac{|w(z)|.|\varphi'(z)|}{1+|w(z)|} \le |f_{\bar{z}}| \le \frac{|w(z)|.|\varphi'(z)|}{1-|w(z)|} \end{gathered} \quad (2.21)$$

Lemma 3.15.2 ve Lemma 3.15.3 ve Teorem 3.15.1, (2.21) eşitsizliklerinde kullanılarak ve sonra basit hesaplamalarda (2.16), (2.17), (2.18) ve (2.19) alınır.

NOT : $b_1 = 0$ alırsak o zaman $S_H^0 K(A,B)$ sınıfı için distorsiyon teoremleri A ve B parametrelerine özel değerler verilerek elde ederiz.

KAYNAKÇA

Kitaplar

Ahlfors , L. V. (1966). Lectures On Quasiconformal Mappings. Princeton, New Jersey: Van Nostrand.

Ahlfors , L. V. (1966). Complex Analysis (2nd. ed.). New York: McGraw-Hill Book Comp .

Ahlfors , L. V. (1973). Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory. New York.: McGraw-Hill Book Comp.

Ahlfors , L. V. (1979). Complex Analysis (3rd. ed.). New York: McGraw-Hill Book Comp.

Duren, P. L. (1983). Univalent Functions. New York: Springer-Verlag.

Duren, P. L. (2004). Harmonic Mappings in the Plane. Vol 156 of Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge UK: Cambridge University press.

Feller, W. (1971). An introduction to probability theory and its applications vol. II. (2nd. ed.). New York: John Wiley & Sons.

Fisher, Stephen. D. (1990). Complex Variables. Wadworth&Brooks/Cole Mathematics Series.

Golusin, G. M. (1957). Geometrische Funktionentheorie. Berlin, Deutsch: Verlag Wiss.

Goodman, A. W. (1983). Univalent Functions. Volume I . Tampa_Florida: Mariner publishing.

Greiner, P. (1995). Boundary properties of planar harmonic mappings, Ph.D. Thesis, University of Michigan.

Hille, E. (1962). Analytic function theory. vol. II. Boston: Ginn & Comp.

Hille, E. (1969). Lectures on ordinary differential equations. Boston: Addison-Wesley Publ. Comp. Reading Mass.

Lehto, O. ve Virtanen, K. I. (1973). Quasiconformal Mappings in the Plane (2nd.

ed.). Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.

Littlewood, J. E. (1944). Lectures on the theory of functions. Oxford: Oxford University Press.

Marsden, Jerrold. E. (1970). Basic complex analysis. New York: W. H. Freeman and Company.

Natanson, I. P. (1954). Theorie der Funktionen einer reellen Veranderlichen. Berlin: Akademie-Verlag.

Nehari, Z. (1975). Conformal Mapping. New York: reprinted by Dover Publications. (McGraw-Hill, New York, 1952.)

Pommerenke, Ch. (1975). Univalent functions. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Rudin, W. (1976). Principles of Mathematical Analysis (Third Edition). New York: McGraw-Hill.

Yaşar Polatoğlu, Metin Bolcal, Arzu Şen, Ayşenur Berberoğlu, Emel Yavuz ve H. Esra Özkan. (2004). Konu ve Problemleriyle Kompleks Fonksiyonlar Teoresi. İstanbul: İKÜ Yaynları. (ISBN:975-6957-47-6).

Süreli Yayınlar

Bazilevic, I. E. (1955). On a case of integrability in quadratures in the Loewner-Kufarev equation.(Russian). Mat. Sb. 37, 471-476.

Bers, L. (1951). Isolated singularities of minimal surfaces. Ann. of Math. 53, 364-386.

Bieberbach, L. (1916a). Über einige Extremalprobleme im Gebiete der konformen Abbildung. Math. Ann. 77, 153-172.

Bieberbach, L. (1916b). Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. S.-B. Preuss. Akad. Wiss., 940-955.

Bielecki, A. ve Lewandowski, Z. (1962). Sur un theoreme concernant les fonctions univalentes lineairement accessibles de M. Biernacki. Ann. Polon, Math. 12, 61-63.

Biernacki, M. (1936). Sur la representation conforme des domaines lineairement accessibles, Prace Mat-Fiz 44, 293-314.

Brannan, D. A. ve Kirwan, W. E. (1969). On some classes of bounded univalent functions. J. London Math. Soc. (2) 1, 431- 443.

Brannan, D. A., Clunie, J. ve Kirwan, W. E. (1973). The coefficient problem for functions of bounded boundary rotation. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI, no. 523.

Cajori, Florian. (2014). Matematik tarihi. (D. İlalan,çev.) Ankara: Odtü yayıncılık. (Orjinal çalışma basım tarihi 1919).

Caratheodory, C. (1907). Über den Variabilitatsbereich der Koeffizienten von Potenzreflien, die gegebene Werte nicht annehmen. Math. Ann. 64, 95-115.

Clunie, J. ve Keogh, F. R. (1960). On starlike and convex functions. J. London Math. Soc. 35, 229-233.

Clunie, J. ve Pommerenke, CH. (1966). On the coefficients of close-to-convex univalent functions. J. London Math. Soc. 41, 161-165.

Clunie, J. and Sheil-Small, T. (1984). Harmonic univalent functions. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I 9, 3–25.

De Brujin, N. G. (1941). Ein Satz uber schlichte Funktionen. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 44, 47-49.

De Vries, H. L. (1962). A remark concerning a lemma of Heinz on harmonic mappings. J. Math. Mech. 11, 469–471.

De Vries, H. L. (1969) Über Koeffizientenprobleme bei Eilinien und über die Heinzsche Konstante. Math. Z. 112, 101–106.

Dieudonne, J. (1931). Sur les fonctions univalentes. C. R. Acad. Sci. Paris 192, 1148-1150.

Dorff, M. and Szynal, J. (to appear.). Harmonic shears of elliptic integrals. Rocky Mountain J. Math.,

Driver, K. ve Duren, P. (1999). Harmonic shears of regular polygons by hypergeometric functions. J. Math. Anal. Appl. 239, 72–84.

Duren, P. ve Schober, G. (1987). A variational method for harmonic mappings onto convex regions. Complex Variables Theory Appl. 9, 153–168.

Duren, P. ve Schober, G. (1989). Linear extremal problems for harmonic mappings of the disk. Proc. Amer. Math. Soc. 106, 967–973.

FitzGerald, C. ve Pommerenke, Ch. (1985). The De Branges theorem on univalent functions. Trans. Amer. Math. Soc. 290, 683–690.

Golusin [Goluzin], G. M. (1938). Some estimates of the coefficients of schlicht functions (Russian). Mat. Sb 3, 321-330.

Greiner, P. (to appear.). Geometric properties of harmonic shears, Computational Methods and Function Theory.

Gronwall, T. H. (1914/15). Some remarks on conformal representation, Ann. of Math. 16, 72-76.

Grötzsch, H. (1935/36). Zur Theorie der Verschiebung bei schlichter conformer Abbildung. Comment. Math. Helv. 8, 382-390.

Grunsky, H. (1971). Zur konformen Abbildung von Gebieten, die in einer Richtung konvex sind. J. Math. Anal. Appl. 34, 685-701.

Hall, R. R. (1982/83). On an inequality of E. Heinz. J. Analyse Math. 42, 185–198.

Heinz, E. (1959). On one-to-one harmonic mappings. Pacific J. Math. **9**, 101–105.

Herglotz, G. (1911). Über Potenzreihen mit positivem, reellen Teil im Einheitskreis. Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig, 501-511.

Hersch, J. and Pfluger, (1952). A.Generalisation du lemme de Schwarz et du principe de la mesure harmonique pour les fonctions pseudo-analytiques, C. R. Acad. Sci. Paris 234, 43–45.

Holland, F. (1972). On the coefficients of starlike functions. Proc. Amer. Math. Soc. 33, 463-470.

Hummel, J. A. (1967). Multivalent starlike functions. J. Analyse Math. 18, 133-160.

Hummel, J. A. (1972). The Marx conjecture for starlike functions. Michigan Math. J. 19, 257-266.

Janowski, W. (1973). Some extremal problems for certain families of analytic functions. I. Ann. Polon. Math. 28, 297-326.

Jun, S. H. (1992). Curvature estimates for minimal surfaces, Proc. Amer. Math. Soc. 114, 527–533.

Kaplan, W. (1952). Close-to-convex schlicht functions, Michigan Math. J. 1, 169-185.

Kneser, H. (1926). Lösung der Aufgabe 41, Jahresber. Deutsch: Math.-Verein. 35, 123–124.

Koebe, P. (1907). Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. KL, 191-210.

Krzyz, J. (1962). The radius of close-to-convexity within the family of univalent functions. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astronom. Phys. 10, 201-204.

Krzyz, J. (1963). On the derivative of close-to-convex functions. Colloq. Math. 10, 139-142.

Lewandowski, Z. (1958). Sur l'identite de certaines classes de fonctions univalentes I. Ann. Univ. Mariae Curie-Sktodowska 12, 131-146.

Lewandowski, Z. (1960) Sur l'identite de certaines classes de fonctions univalentes II. Ann. Univ. Mariae Curie-Sktodowska 14, 19-46.

Lewandowski, Z. (1970). On some problems of M. Biernacki concerning subordinate functions and on some related topics. Ann. Univ. Mariae Curie-Sktodowska Sect. A. 19, (1965), 33-46.

Littlewood, J. E. (1925). On inequalities in the theory of functions. Proc. London Math. Soc. (2) 23, 481-519.

Littlewood, J. E. (1938). On the coefficients of schlicht functions. Quart. J. Math. Oxford Ser. 9, 14-20.

Löwner, K. (1917). Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z|<1$, die durch Funktionen mit nichtverschwindender Ableitung geliefert warden. S.-B. Sachs. Akad. Wiss. 69, 89-106.

London, R. R. ve Thomas, D. K. (1970). An area theorem for starlike functions. Proc. London Math. Soc. 20, 734-748.

MacGregor, T. H. (1967). Majorization by univalent functions. Duke Math. J. 34, 95-102.

MacGregor, T. H. (1972). Applications of extreme-point theory to univalent functions. Michigan Math. J. 19, 361-376.

Marx, A. (1932/33). Untersuchungen iiber schlichte Abbildungen. Math. Ann. 107, 40-67.

Nehari, Z. (1949). The Schwarzian derivative and schlicht functions. Bull. Amer. Math. Soc. 55, 545–551.

Nitsche, J. C. C. (1958). On harmonic mappings. Proc. Amer. Math. Soc. 9, 268-271.

Nitsche, J. C. C. (1959). On the constant of E. Heinz. Rend. Circ. Mat. Palermo 8, 178–181.

Nitsche, J. C. C. (1963). Zum Heinzschen Lemmaüber harmonische Abbildungen. Arch. Math. (Basel) 14, 407–410.

Privalov, I. I. (1924). Sur certaines proprietes metriques des fonctions analytiques. J. Ecole Polytech. 24, 77-112.

Polya, G. ve Schoenberg, I. J. (1958). Remarks on the de la Vallee Poussin means and convex conformal maps of the circle. Pacific J. Math. 8, 295-334.

Pommerenke, CH. (1962) On starlike and convex functions. J. London Math. Soc. 37, 209-224.

Pommerenke, CH. (1963a). On meromorphic starlike functions. Pacific J. Math. 13, 221-235.

Pommerenke, CH. (1963b). On starlike and close-to-convex functions. Proc. London Math. Soc. 13, 290- 304.

Pommerenke, CH. (1965). On close-to-convex analytic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 114, 176-186.

Rado, T. (1926). Über den analytischen Charakter der Minimalflachen, Math. Z. 24, 321–327.

Reade, M. O. (1955). On close-to-convex univalent functions. Michigan Math. J. 3, 59-62.

Robertson, M. S. (1936). On the theory of univalent functions. Ann. of Math. 37, 374-408.

Robertson, M. S. (1961). Applications of the subordination principle to univalent functions. Pacific J.Math. 11, 315-324.

Robertson, M. S. (1965). The generalized Bieberbach conjecture for subordinate functions. Michigan Math. J. 12, 421-429.

Robertson, M. S. (1966). A generalization of the Bieberbach coefficient problem for univalent functions. Michigan Math. J. 13, 185-192.

Robertson, M. S. (1970a). Quasi-subordination and coefficient conjectures. Bull. Amer. Math. Soc. 76,1-9.

Robertson, M. S. (1970b). Quasi-subordinate functions. Mathematical Essays dedicated to A. J. Macintyre. Ohio Univ. Press. 311-330.

Rogosinski, W. W. (1932). Über positive harmonische Entwicklungen und typisch reelle Potenzreihen. Math. Z. 35,93-121.

Rogosinski, W. W. (1943). On the coefficients of subordinate functions. Proc. London Math. Soc. 48, 48-82.

Robinson, R. M. (1947). Univalent majorants. Trans. Amer. Math. Soc. 61, 1-35.

Ruscheweyh, S. ve Sheil-Small, T. (1974). Hadamard products of schlicht functions and the Polya-Schoenberg conjecture. Comment. Math. Helv. 48, 119-135.

Shapiro, H. S. (1977). Research problems in complex analysis (edited by J. M. Anderson, K. F. Barth, and D. A. Brannan). Bull. London Math. Soc. 9, 129–162; Problem No. 7.26, p. 146.

Sheil-Small, T. (1969). On convex univalent functions. J. London Math. Soc. (2) 1, 483-492.

Sheil-Small, T. (1970) Starlike univalent functions. Proc. London Math. Soc. (3) 21, 577-613.

Sheil-Small, T. (1973) On the convolution of analytic functions. J. Reine Angew. Math. 258,137-152.

Strohhacker, E. (1933). Beitrage zur Theorie der schlichten Funktionen. Math. Z. 37, 356-380.

Study, E. (1913). Vorlesungen über ausgewahlte Gegenstande der Geometrie. 2. Heft. Leipzig und Berlin.

Suffridge, T. J. (1970). Some remarks on convex maps of the unit disk. Duke Math. J. 37, 775-777.

Thomas, D. K. (1967). On starlike and close-to-convex functions. J.London Math. Soc. 42,427-435.

Thomas, D. K. (1968). On Bazilevic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 132, 353-361.

Twomey, J. B. (1970). On the derivative of a starlike function. J. London Math. Soc. (2) 2, 99-110.

Twomey, J. B. (1971). On meromorphic starlike functions. J. London Math. Soc. (2) 4, 231-239.

Zamorski, J. (1962). On Bazilevic schlicht functions. Ann. Polon. Math. 12, 83-90.