T.C

İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ONAY SAYFASI

Yüksek lisans öğrencisi Rabia Savaş'ın "Double Hausdorff Toplanabilme Metodu" konulu tez çalışması jürimiz tarafından Matematik Yüksek Lisans Tezi olarak (oybirliği ile BAŞARILI / BAŞARISIZ bulunmuştır.

	Adı Soyadı	İmza
Tez Danışmanı :	Doç. Dr. Hamdullah ŞEVLİ	
Jüri Üyesi :	Prof. Dr. Vatan Karakaya	
Jüri Üyesi :	Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK	

Hazırlamış olduğum tez özgün bir çalışma olup YÖK ve İTİCÜ Lisansüstü Yönetmeliklerine uygun olarak hazırlanmıştır. Ayrıca, bu çalışmayı yaparken bilimsel etik kurallarına tamamıyla uyduğumu; yararlandığım tüm kaynakları gösterdiğimi ve hiçbir kaynaktan yaptığım ayrıntılı alıntı olmadığını beyan ederim. Bu tezin ihtiva ettiği tüm hususlar şahsi görüşüm olup İstanbul Ticaret Üniversitesi'nin resmi görüşünü yansıtmamaktadır.

T.C.
İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

DOUBLE HAUSDORFF TOPLANABİLME METODU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Rabia SAVAŞ
DANIŞMAN: Doç. Dr. Hamdullah ŞEVLİ

İstanbul, Haziran 2014

T.C.
İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

DOUBLE HAUSDORFF TOPLANABİLME METODU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Rabia SAVAŞ
DANIŞMAN: Doç. Dr. Hamdullah ŞEVLİ

İstanbul, Haziran 2014

ÖZET

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde konuya hazırlayıcı nitelikteki bilgilere ve konu ile ilgili olarak daha önceden yapılmış çalışmalara kısaca değinilmiş, ikinci bölümde ise daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde ise bir ve iki değişkenli aralık fonksiyonları, aralık fonksiyonların integralleri, sınırlı salınımlı fonksiyonlar, sınırlı salınımlı fonksiyonların sürekliliği ve Riemann Stieltjes İntegrallerinin tanım ve teoremlerine yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise,

$$\mu = (\mu_n) \in \omega \ ve \ \Delta, \Delta\mu_k = \mu_k - \mu_{k+1}, \Delta^n(\mu_k) = \Delta\left(\Delta^{n-1}\mu_k\right)$$

ile tanımlanan fark operatörü olmak üzere

$$h_{nk} := \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \Delta^{n-k}\mu_k & , 0 \leq k \leq n \text{ ise} \\ 0 & , k > n \text{ ise} \end{cases} \quad (k, n \in \mathbb{N})$$

ile tanımlanan $(H, \mu) := (H, \mu_n) := (h_{nk})$ Hausdorff matrisi ve bu matris yardımıyla tanımlanan Hausdorff dönüşümü ele alınmıştır. Hausdorff dönüşümünün özel durumları olan Euler, Hölder, Cesáro matris dönüşümleri için sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca,

$$h_{nk}^{(\alpha)} := \begin{cases} \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n-k \end{pmatrix} \Delta^{n-k}\mu_k & , 0 \leq k \leq n. \text{ ise} \\ 0 & , k > n \text{ ise} \end{cases} \quad \left(k, n \in \mathbb{N}^0\right)$$

ile tanımlanan $H^{(\alpha)} := \left(h_{nk}^{(\alpha)}\right) := \left(H^{(\alpha)}, \mu_n^{\alpha}\right)$ genelleştirilmiş $E - J$ Hausdorff matrisi ele alınmıştır. Hausdorff dönüşümünün regülerlik şartları verilmiştir.

Son bölümde ise double $E - J$ matrisleri tanımlanarak bir double sonsuz serinin double $E - J$ matris dönüşüm dizisinin toplanabilirlik özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler : Cesáro matrisi, Hausdorff dönüşümleri, Konservatif matris, Mutlak toplanabilme, $E - J$ Hausdorff matrisi, Sonsuz Seriler, Double Seriler.

ABSTRACT

This study consists of five chapters. The first chapter contains basic definitions and refers to pertinent known results from the literature. The second chapter contains basic definitions, theorems, and properties of certain summability methods that will be used in later chapters.

In the third chapter contains definitions, theorems of functions of Intervals, integrals of functions of intervals, function of bounded variation, continuity properties of functions of bounded variation, Riemann Stieltjes İntegrals.

In the fourth chapter, let (μ_n) be a real sequence, and let Δ be the forward difference operator defined by

$$\mu = (\mu_n) \in \omega \ ve \ \Delta, \Delta\mu_k = \mu_k - \mu_{k+1}, \Delta^n (\mu_k) = \Delta \left(\Delta^{n-1}\mu_k\right)$$

Then the infinite matrix $(H, \mu) := (H, \mu_n) := (h_{nk})$ is defined by

$$h_{nk} := \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \Delta^{n-k}\mu_k & , 0 \le k \le n \text{ ise} \\ 0 & , k > n \text{ ise} \end{cases} \quad (k, n \in \mathbb{N})$$

and the associated matrix method is called Hausdorff transformation. Specifically, Euler, Holder, Cesàro results were obtained for matrix inversion. Also,

$H^{(\alpha)} := \left(h_{nk}^{(\alpha)}\right) := \left(H^{(\alpha)}, \mu_n^\alpha\right)$ is defined by

$$h_{nk}^{(\alpha)} := \begin{cases} \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n-k \end{pmatrix} \Delta^{n-k}\mu_k & , 0 \le k \le n \text{ ise} \\ 0 & , k > n \text{ ise} \end{cases} \quad \left(k, n \in \mathbb{N}^0\right)$$

and the associated matrix method is called a generalized $E - J$ Hausdorff matrix also regularity of Hausdorff transformation theorems and definitions were provided.

In the last chapter, Double $E - J$ by defining matrix of a double infinite series summability of double series of $E - J$ transformation matrix properties were investigated.

Key words: Cesáro matrix, Hausdorff transformations, Conservative matrix, Absolute summability, $E - J$ **Hausdorff matrix**, **Infinite series, Double series.**

ÖNSÖZ

Hausdorff matrisleri ilk olarak Hurwitz ve Silverman (1917) tarafından $(C, 1)$ Cesáro matrisleri ile yer değiştirilebilen alt üçgensel matrisler olarak tanımlanmıştır. Hausdorff sonlu aralıkta moment problemi çözme işlemi sırasında bu problemi yeniden ele almış ve Hausdorff matrisleri adını taşıyan bu matrislerle ilgili önemli bir çok özelliği elde etmiştir. Hausdorff matrisleri birbirinden bağımsız olarak Endl (1960) ve Jakimovski (1959) tarafından genelleştirilmiştir. Bu matrisler literatürde $E-J$ matrisleri olarakta gösterilmektedir. Hausdorff matrisleri için birçok sonuç ispat edilmiş olsa da, $E-J$ genellemesi için literatürde bir çok açık problem bulunmaktadır.

Bu çalışmada, double $E-J$ matrislerini tanımlayarak double sonsuz serinin double $E-J$ matrisi dönüşüm dizisinin toplanabilirlik özelliklerini inceleyeceğiz. Bunun sonucunda Savaş ve Şevli (2009), Savaş ve Rhoades (2009a) ve Savaş ve Rhoades (2009b) tarafından elde edilen sonuçların genelleştirilmesi hedeflenmektedir.

Bu konuyu bana veren ve çalışmalarım sürecinde karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen hocam, Sayın Doç. Dr. Hamdullah ŞEVLİ'ye teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca bilgi ve tecrübelerinden herzaman yararlanacağım, tezim hakkındaki tavsiye ve yönlendirmelerinden dolayı kıymetli hocam ve babam Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ'a ve biricik annem Dr. Asuman SAVAŞ'a sonsuz teşekkürü bir borç bilirim, Tezimin gerçekleşmesinde YAPKO tarafından desteklenen proje de maddi destek veren İstanbul Ticaret Üniversitesi'ne de ayrıca teşekkür ederim.

Rabia SAVAŞ

GÖSTERİMLER

- $\mathbb{R}$, Reel sayılar.
- $\mathbb{N}$, Doğal sayılar.
- $\mathbb{C}$, Kompleks sayılar.
- ω, Reel veya kompleks değerli diziler uzayı.
- l_∞, Reel veya kompleks değerli sınırlı diziler uzayı.
- c, Reel veya kompleks değerli yakınsak diziler uzayı.
- c_0, Reel veya kompleks değerli sıfıra yakınsak diziler uzayı.
- BV, Reel veya kompleks değerli sınırlı salınımlı diziler uzayı.
- (X,Y), X den Y ye olan matrislerin sınıfı.
- $\sum a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi
- (s_n), $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi
- $x_n = O(1)$, (x_n) dizisi sınırlı
- $x_n = o(1)$, (x_n) sıfır dizisi
- $x_n \asymp y_n$, (x_n/y_n) ve (y_n/x_n) nin her ikiside sınırlı
- $\Gamma(x)$, Gamma Fonksiyonu
- $B(x,y)$, Beta fonksiyonu
- $V_a^b f$, f, $[a,b]$ aralığındaki total salınımı

İçindekiler

Bölüm 1

GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

$\sum a_n$, kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan sonsuz bir seri ve $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ sonsuz bir matris olsun. (s_n) dizisinin $A-$ dönüşüm dizisi (t_n) ile gösterilsin. Yani,

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k \tag{1.1}$$

olsun. Bu durumda A matrisi diziden diziye bir dönüşüm tanımlar. Eğer (t_n) bir s limitine yakınsıyorsa, o zaman (s_n) dizisi veya $\sum a_n$ serisi s değerine A toplanabilirdir denir.

(t_n) , (1.1) deki gibi tanımlanmak üzere, eğer (t_n) sınırlı-salınımlı bir dizi ise yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta t_{n-1}| < \infty$$

ise $\sum a_n$ serisi mutlak $A-$toplanabilirdir veya kısaca $|A|-$toplanabilirdir denir. Burada Δ, $\Delta t_{n-1} = t_{n-1} - t_n$ ile tanımlı fark operatörüdür.

T alt üçgensel sonsuz bir matris olmak üzere, $x_n = \sum\limits_{v=0}^{n} t_{nv} s_v$ olmak üzere, eğer,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |x_n - x_{n-1}|^k < \infty$$

şartı sağlanıyorsa $\sum a_n$ serisi $k-$ ıncı mertebeden mutlak $A-$toplanabilirdir veya kısaca $|A|_k$, $k \geq 1$ toplanabilirdir denir (Flett, 1957).

A, (s_n) dizisini (t_n) dizisine dönüştüren diziden diziye bir dönüşüm olsun. Eğer (s_n) mutlak yakınsak olduğunda (t_n) mutlak yakınsak oluyorsa A dönüşümü mutlak konservatif olarak adlandırılır. Eğer (s_n) in mutlak yakınsaklığı (t_n) in aynı limite mutlak yakınsaklığını gerektiriyorsa A 'ya mutlak regülerdir denir (Das,1970). $k-$ıncı kuvvetten mutlak konservatiflik kavramını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

A, (s_n) dizisini (t_n) dizisine dönüştüren diziden-diziye bir dönüşüm olmak üzere $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left| s_n - s_{n-1} \right|^k < \infty$$

olması

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left| t_n - t_{n-1} \right|^k < \infty$$

olmasını gerektiriyorsa A 'ya $k-$ıncı kuvvetten mutlak konservatiftir denir.

$\mu = (\mu_n) \in \omega$ ve Δ, $\Delta\mu_k = \mu_k - \mu_{k+1}$, $\Delta^n(\mu_k) = \Delta(\Delta^{n-1}\mu_k)$ ile tanımlanan fark operatörü olmak üzere

$$h_{nk} := \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \Delta^{n-k}\mu_k & , 0 \leq k \leq n \text{ ise} \\ 0 & , k > n \text{ ise} \end{cases} \quad (k, n \in \mathbb{N})$$

ile tanımlanan $(H, \mu) := (H, \mu_n) := (h_{nk})$ matrisine Hausdorff matrisi denir. Bu matris yardımıyla tanımlanan dönüşüme de Hausdorff metodu denir (Hausdorff, 1921).

Hausdorff matrisi köşegen elemanları $h_{nn} = \mu_n$ olan bir alt üçgensel matristir. Hausdorff matrisinde her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu_n = 1$ alınırsa I birim matrisi elde edilir. Knoop ve Lorentz (1949) ve Morley (1950) 'den bir konservatif Hausdorff dönüşümünün mutlak konservatif olduğu bilinmektedir. Das (1970), $k \geq 1$ olmak üzere bir konservatif Hausdorff dönüşümünün $k-$ıncı kuvvetten mutlak konservatif olduğunu ispatlayarak bu sonucu genelleştirmiştir. Birbirinden bağımsız olarak Endl (1960) ve Jakimovski (1959), genelleştirilmiş Hausdorff matrisini aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

β bir reel sayı, $\{\mu_n\}$ bir reel dizi ve Δ, $\Delta\mu_k = \mu_k - \mu_{k+1}$, $\Delta^n(\mu_k) = \Delta(\Delta^{n-1}\mu_k)$ ile tanımlanan fark operatörü olmak üzere

$$h_{nk} := \begin{cases} \begin{pmatrix} n+\beta \\ n-k \end{pmatrix} \Delta^{n-k}\mu_k^{(\beta)} & 0 \leq k \leq n \text{ ise} \\ 0 & k > n \text{ ise} \end{cases} \quad (k, n \in \mathbb{N})$$

elemanları ile tanımlanan sonsuz matrise genelleştirilmiş Hausdorff matrisi denir ve $(H^{(\beta)}, \mu_n^{(\beta)})$ veya kısaca $\left(H^{\beta}, \mu\right)$ ile gösterilir. Burada $\mu_n^{(\beta)}$, $\chi(t) \in BV[0,1]$ olmak üzere

$$\mu_n^{(\beta)} = \int_0^1 t^{n+\beta} d\chi(t)$$

ile tanımlıdır.

Savaş ve Şevli (2009) tarafından Hausdorff matrisi yerine genelleştirilmiş Hausdorff matrisi alınarak yeni bir teorem ispatlandı ve Das 'ın (1970) teoremi sonuç olarak elde edildi. Bu teorem kullanılarak Hausdorff dönüşümünün özel durumları olan Euler, Hölder, Cesáro matris dönüşümleri için sonuçlar elde edildi.

$j > m$ veya $k > n$ için $a_{mnjk} = 0$ ise bir double sonsuz $A = (a_{mnjk})$ matrisine üçgenseldir denir. (s_{mn}) double dizinin A dönüşümünün $mn-$inci terimi

$$T_{mn} = \sum_{\mu=0}^{n}\sum_{v=0}^{m} a_{mn\mu v} s_{\mu v}$$

ile tanımlıdır. Herhangi bir (u_{mn}) double dizisi için Δ_{11},

$$\Delta_{11} u_{mn} = u_{mn} - u_{m+1,n} - u_{m,n+1} + u_{m+1,n+1}$$

ve herhangi bir dört indisli v_{mnij} dizisi için Δ_{11}, Δ_{ij}, Δ_{0j} ve Δ_{i0},

$$\Delta_{11} v_{mnij} = v_{mnij} - v_{m+1,n,i,j} - v_{m,n+1,i,j} + v_{m+1,n+1,i,j}$$

$$\Delta_{ij} v_{mnij} = v_{mnij} - v_{m,n,i+1,j} - v_{m,n,i,j+1} + v_{m,n,i+1,j+1}$$

$$\Delta_{0j} v_{mnij} = v_{mnij} - v_{m,n,i,j+1}$$

$$\Delta_{i0} v_{mnij} = v_{mnij} - v_{m,n,i+1,j}$$

ile tanımlıdırlar.

$\sum\sum b_{mn}$ sonsuz double serisi (s_{mn}) kısmi toplamlar dizisi ile verilmiş olsun. Eğer

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left|\Delta_{11} T_{m-1,n-1}\right|^{k} < \infty$$

ise $\sum\sum b_{mn}$ serisine $|A|_k$, $k \geq 1$ toplanabilirdir denir.

Das(1970), $k \geq 1$ olmak üzere bir konservatif Hausdorff dönüşümünün $k-$ıncı kuvvetten mutlak konservatif olduğunu ispatlamıştır. Bu sonuç Savaş ve Şevli ($2009a$) tarafından $E - J$ matrislerine ve yine bu sonuç Savaş ve Rhoades ($2009b$) tarafından Double Hausdorff matrislerine genelleştirilmiştir. Bu çalışmanın amacı ise, elde edilen bu sonuçları Double $E - J$ matrislerine genişletmektir.

Bölüm 2

TEMEL TANIM ve TEOREMLER

2.1 Temel Kavramlar

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Lineer Uzay)

X boş olmayan bir cümle ve K reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.

$$+ : X \times X \to X$$

$$\bullet : K \times X \to X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X cümlesine K cismi üzerinde bir lineer uzay denir. Her $\lambda, \mu \in K$ ve $x, y, z \in X$ için,

(L_1) $x + y = y + x$

(L_2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

(L_3) $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

(L_4) Her $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

(L_5) $1.x = x$

(L_6) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$

(L_7) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$

(L_8) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu) x$

Tanım 2.1.2 (Lineer Alt Uzay)

X, K cismi üzerinde bir lineer uzay ve M, X in boş olmayan bir alt cümlesi olsun. Eğer her $\lambda, \mu \in K$ ve $x, y \in M$ için $\lambda x + \mu y \in M$ oluyorsa M 'ye X 'in bir lineer alt uzayı denir.

Tanım 2.1.3 (Normlu Lineer Uzay)

X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$||.|| : X \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in K$ için,

(N_1) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(N_2) $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||$

(N_3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, ||.||)$ ikilisine normlu lineer uzay veya kısaca normlu uzay denir.

Tanım 2.1.4 (Dizinin Limiti)

(a_n) bir reel sayı dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_\varepsilon$ olduğunda $|a_n - a| < \varepsilon$ veya $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ olacak şekilde ε 'na bağlı bir n_ε sayısı bulunabiliyorsa (a_n) dizisinin limiti a dır (veya a ya yakınsaktır) denir ve

$$\lim a_n = a \quad veya \quad (a_n) \longrightarrow a$$

şeklinde gösterilir. Bu tanım daha kısa olarak,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ öyle ki } \forall n > n_\varepsilon \text{ için } |a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim a_n = a$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 2.1.5 (Fonksiyon Limiti)

Boş olmayan $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $c \in \mathbb{R}$ sayısı ve $x_0 \in A'$ noktası verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve $a \leq x \leq b$ için $0 < |x - x_0| < \delta$ iken $|f(x) - c| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa f nin x_0 noktasındaki limiti c dir denir ve $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$ veya $x \longrightarrow x_0$ iken $f(x) \longrightarrow c$ şeklinde yazılır. Bu tanımı daha kısa olarak,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \delta > 0 \text{ öyle ki } a \leq x \leq b \text{ için } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ için } |f(x) - c| < \varepsilon$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 2.1.6 (Genel Limit Tanımı)

A, x elemanlarının genel bir sınıfı ve $f(x)$, A üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. A kümesi üzerinde geçişme özelliğine sahip bir R bağıntısının var olduğu kabul edilsin.

$$\lim_{x} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \text{ için } \exists\delta > 0 \text{ vardır öyle ki eğer } xR\delta \text{ ise } |f(x) - a| < \varepsilon$$

dur.

Tanım 2.1.7 (Dizi Uzayları)

$$\omega := \left\{x = (x_k) \mid x : \mathbb{N}^0 \to K, k \to x_k := x(k)\right\}$$

kümesi

$$((x_k), (y_k)) \to (x_k + y_k)$$

ve

$$(\lambda, (x_k)) \to (\lambda x_k)$$

ile tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte K üzerinde lineer uzaydır. ω lineer uzayı ve ω 'nin her bir lineer alt uzayı dizi uzayı olarak adlandırılır. c_0, c ve ℓ_∞, sırasıyla, sıfır diziler dizi uzayı, yakınsak diziler dizi uzayı ve sınırlı diziler dizi uzayı olarak adlandırılırlar.

c_0, c ve ℓ_∞ dizi uzayları

$$||x|| = \sup_k |x_k|$$

normu ile birlikte birer normlu uzay oluştururlar. Çalışmamızda kullanacağımız diğer bazı dizi uzayları ve normları aşağıda verilmiştir:

$$\gamma := \left\{x = (x_k) \in \omega : \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k \text{ mevcut}\right\}$$

yakınsak seri teşkil eden bütün dizilerin dizi uzayıdır ve $||x||_\gamma := \sup_k \left|\sum_{k=0}^{n} x_k\right|$ normu ile birlikte bir normlu uzaydır.

$$\ell := \ell^1 := \left\{x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < \infty\right\}$$

mutlak yakınsak seri teşkil eden bütün dizilerin dizi uzayıdır ve $||x||_1 := \sum_{k=0}^{n} |x_k|$ normu ile birlikte bir normlu uzaydır.

$$\ell^2 := \left\{x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\right\}$$

dizi uzayı $||x||_2 := \left(\sum\limits_{k=0}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}$ normu ile birlikte bir normlu uzaydır.

$$\ell^p := \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

dizi uzayı $1 \leq p < \infty$ için $||x||_p := \left(\sum\limits_{k=0}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$ normu ile birlikte bir normlu uzay, $0 < p < 1$ için $||x|| := \sum\limits_{k=0}^{n} |x_k|^p$ normu ile birlikte bir p-normlu uzaydır.

$$BV := \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum |x_k - x_{k+1}| < \infty \right\}$$

sınırlı salınımlı dizilerin dizi uzayıdır ve $||x||_{BV} := |x_0| + \sum\limits_{k} |x_k - x_{k+1}|$ normu ile birlikte bir normlu uzaydır. Ayrıca BV_0 dizi uzayı, $BV_0 := BV \cap c_0$ ile tanımlıdır.

Bu dizi uzayları arasında, $\ell^1 \subset \gamma \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty \subset \omega$ ve $\ell^1 \subset BV_0 \subset BV \subset c$ kapsam bağıntıları vardır.

Tanım 2.1.8 (Lineer Operatör)

X ve Y lineer uzaylar ve $T : X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere her $x_1, x_2 \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için,

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T(x_1) + \mu T(x_2)$$

şartı sağlanırsa T 'ye bir lineer operatör veya lineer dönüşüm denir. $Y = \mathbb{R}$ veya $Y = \mathbb{C}$ olması durumunda ise T 'ye bir lineer fonksiyonel denir.

Tanım 2.1.9 (Sınırlı Lineer Operatör)

$T : X \to Y$ bir lineer operatör olmak üzere $\forall x \in X$ için,

$$||T(x)||_Y \leq M \, ||x||_X$$

olacak şekilde bir M sabiti varsa T 'ye sınırlı lineer operatör denir. Bir sınırlı lineer operatörün normu

$$||T|| = \sup_{x \neq \theta} \frac{||T(x)||}{||x||} < \infty$$

olarak tanımlanır.

$f : X \to \mathbb{C}$ sınırlı lineer fonksiyonelinin normu

$$||f|| = \sup \left\{ |f(x)| \, / \, ||x|| : x \neq \theta \right\}$$

olarak verilir.

ℓ^p den ℓ^q ya bir $A=(a_{nk})$ $(n,k=0,1,2,...)$ matris dönüşümünün normu ise

$$\left\|Ax\right\|_q=\left(\sum_n\left|\sum_k a_{nk}x_k\right|^q\right)^{1/q}$$

olmak üzere

$$\left\|A\right\|_{p,q}=\sup\left(\left\|Ax\right\|_q:\left\|x\right\|_p\leq 1\right)$$

şeklinde tanımlanır.

X normlu uzayını Y normlu uzayına dönüştüren tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi $B(X,Y)$ ile gösterilir. $B(X,Y)$ bir normlu uzaydır. $X=Y$ olması durumunda sadece $B(X)$ notasyonu kullanılır. Yani, $B(X)$, X bir normlu uzay olmak üzere X 'den X 'e tanımlı tüm sınırlı lineer operatörlerin normlu lineer uzayıdır.

Tanım 2.1.10 (Matris Dönüşümü)

$X\neq\emptyset$, $Y\neq\emptyset$, ω uzayının herhangi iki alt kümesi ve

$$A=(a_{nk})\ ;(n,k=0,1,2,...)$$

kompleks sayılardan oluşan bir sonsuz matris olsun. Bir $x=(x_k)\in X$ dizisinin Ax dönüşüm dizisi her $n\in\mathbb{N}^0$ için

$$A_n(x):=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}x_k$$

yakınsak serisi ile verilen $(A_n(x))\in Y$ dizisidir. A 'ya X 'den Y içine bir matris dönüşümü ve Ax 'e de x 'in $A-$dönüşüm dizisi denir. (X,Y) ile X 'den Y içine olan bütün matrislerin sınıfı, (X,Y,P) ile de X 'den Y içine limiti koruyan, yani $\lim A_n(x)=\lim x_n$ olan bütün A matrislerinin sınıfı gösterilir. Burada $(X,Y,P)\subset(X,Y)$ dir.

Tanım 2.1.11 (Konservatif Matris)

$A=(a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. Eğer A matrisi yakınsak her diziyi yakınsak diziye dönüştürüyorsa, A matrisine konservatif matris denir ve $A\in(c,c)$ şeklinde gösterilir (Maddox,1970).

Teorem 2.1.1 (Silverman-Toeplitz)

$A=(a_{nk})$ matrisinin konservatif olması için gerek ve yeter şartlar,

(i) $\sup\limits_n\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_{nk}|<\infty$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}a_{nk}=a_k$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk} = a$

olmasıdır.

Tanım 2.1.12 (Regüler Matris)

$A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi verilmiş olsun. Eğer A matrisi yakınsak her diziyi yakınsak diziye limiti koruyarak dönüştürüyorsa, A matrisine regüler matris denir ve $A \in (c, c, P)$ şeklinde gösterilir (Maddox, 1970).

Teorem 2.1.2

Bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartlar,

(i) $\sup\limits_{n}\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1$

(iii) Her k için $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$

olmasıdır.

Tanım 2.1.13

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, sonsuz bir seri ve bu serinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun. Ayrıca $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ sonsuz matrisi verilsin. (s_n) dizisinin $A-$dönüşüm dizisini (t_n) ile gösterelim. Yani,

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k \tag{2.1}$$

olsun. Bu durumda A, diziden-diziye bir dönüşüm tanımlanır. Eğer (t_n), bir s limitine yaklaşıyorsa, o zaman (s_n) dizisi veya $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s 'ye A toplanabilirdir denir. Bu çalışma boyunca aksi belirtilmedikçe $\sum a_n$ ile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ sonsuz serisi ve (s_n) ile de bu serinin kısmi toplamlar dizisi gösterilecektir.

Teorem 2.1.3

$A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olmak üzere (t_n), (2.1) deki gibi tanımlansın. Eğer A regüler ise ve $\sum a_n$ sonlu bir s limitine yakınsıyorsa, $t_n \to s$ dir (Zygmund, 1979).

Tanım 2.1.14 (Alt Üçgensel Matris)

$k, n \in \mathbb{N}^0$ olmak üzere $k > n$ için $a_{nk} = 0$ elemanları ile tanımlanan $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisine alt üçgensel matris denir (Boos, 2000).

Tanım 2.1.15 (Diagonal Matris)

$$d_{n,k} = \begin{cases} d_n & , k = n \text{ ise} \\ 0 & , k \neq n \text{ ise} \end{cases} \quad (k, n \in \mathbb{N})$$

ile tanımlanan $D = (d_{n,k})$ matrisine diagonal matris denir (Boos, 2000).

Tanım 2.1.16 (Normal Matris)

$T = (t_{nv})$ sonsuz bir matris olsun. $T = (t_{nv})$ matrisi alt üçgensel bir matris ve her $n \in \mathbb{N}^0$ için $t_{nn} \neq 0$ ise yani T matrisinin köşegen elemanları sıfırdan farklı ise T matrisine normal matris denir (Boos, 2000).

Tanım 2.1.17 (Birim Matris Dönüşümü)

$I = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ sonsuz bir matris olsun. $k, n \in \mathbb{N}^0$ olmak üzere, eğer $n = k$ için $a_{nk} = 1$ ve $n \neq k$ için $a_{nk} = 0$ ise I matrisine sonsuz birim matris denir. (s_n) kısmi toplamlar dizisi ile verilen $\sum a_n$ sonsuz serisinin sonsuz birim matris yardımıyla tanımlanan $I-$ dönüşüm dizisi $I_n(x) = s_n$ olur.

Tanım 2.1.18 (Abel Yakınsaklık)

$(a_n)_0^{\infty}$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{x \to 1^-} (1 - x) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = L$$

limiti varsa $(a_n)_0^{\infty}$ dizisi L 'ye Abel Yakınsaktır denir ve (A) yakınsak şeklinde yazılır. $\sum a_n$ sonsuz bir seri ve (s_n) bu serinin kısmi toplamlar dizisi olsun. Eğer $(s_n)_0^{\infty}$ dizisi L 'ye (A) yakınsak ise $\sum a_n$ serisi L 'ye (A) yakınsaktır (Powell ve Shah, 1988).

Tanım 2.1.19

$f(x)$ ve $g(x)$ iki fonksiyon ve x_0 bir sabit nokta olsun. $g(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasının bir açık aralığında pozitif ve sürekli olduğunu varsayalım.

(i) Eğer x_0 noktasının açık aralığında $|f(x)| < Kg(x)$ olacak şekilde bir K sabiti varsa, $x \to x_0$ iken $f(x) = O(g(x))$ dir.

(ii) Eğer $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ iken $x \to x_0$ iken $f(x) = o(g(x))$ dir (Powell ve Shah, 1988).

Tanım 2.1.20 (Cauchy Çarpımı)

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ve $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ serileri verilsin. $k = 0, 1, ...$ için $c_k = \sum\limits_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$ olmak üzere $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ serisine bu serilerin Cauchy çarpımı denir. Eğer $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = A$ ve $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = B$ ise ve bu serilerin biri mutlak yakınsaksa bu taktirde $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k = AB$ dir (Boos, 2000).

Tanım 2.1.21 (Gamma Fonksiyonu)

$\Gamma(x)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu $\mathrm{Re}(x) > 0$ olmak üzere,

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dx$$

ile tanımlanır. Gamma fonksiyonu özel olarak n bir pozitif tam sayı ise, o zaman

$$\Gamma(n+1) = n! \ , \ n = 1, 2, ...$$

olur. Ayrıca $\mathrm{Re}(z) > 0$ olmak üzere,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

özelliği de sağlanmaktadır (Wade R.William, 2004).

Tanım 2.1.22 (Beta Fonksiyonu)

$B(x, y)$ ile gösterilen Beta fonksiyonu $\mathrm{Re}(x), \mathrm{Re}(y) > 0$ olmak üzere,

$$B(x, y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

ile tanımlanır (Wade R.William, 2004).

Teorem 2.1.4

$x, y \in (0, \infty)$ ise,

$$\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

dir (Wade R.William, 2004).

Tanım 2.1.23 (Binom Katsayıları)

$\beta \in \mathbb{R}$ ve $\nu \in \mathbb{N}^0$ için binom katsayıları,

$$\begin{pmatrix} \beta \\ v \end{pmatrix} := \begin{cases} \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-v+1)}{v!} & , v \neq 0 \text{ ise} \\ 1 & , v = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

(a) $\begin{pmatrix} \beta \\ v \end{pmatrix} = \frac{\beta!}{v!(\beta-\nu)!} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta - \nu \end{pmatrix}$ $(\beta, v \in \mathbb{N}^0$ ile $0 \leq \nu \leq \beta)$

(b) $\begin{pmatrix} \beta \\ \nu \end{pmatrix} = 0$ $(\beta, \nu \in \mathbb{N}^0$ ile $\nu > \beta)$

(c) $\begin{pmatrix} \beta \\ \nu - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta + 1 \\ \nu \end{pmatrix}$ $(\beta \in \mathbb{R}$ ve $\nu \in \mathbb{N})$

(d) $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m - v \\ n - v \end{pmatrix}$ $(0 \leq v \leq n \leq m)$

(e) $\begin{pmatrix} n + \beta \\ n \end{pmatrix} = \sum_{\nu=0}^{n} \begin{pmatrix} \nu + \beta - 1 \\ \nu \end{pmatrix}$ $(n \in \mathbb{N}^0$ ve $\beta \in \mathbb{R})$

(f) $\sum_{\nu=k}^{n} \begin{pmatrix} n - v + \gamma - 1 \\ n - v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v - k + \delta - 1 \\ v - k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n - k + \gamma + \delta - 1 \\ n - k \end{pmatrix}$

$(n, k \in \mathbb{N}^0$ ile $k \leq n$ ve $\gamma, \delta \in \mathbb{R})$

(a) , (b) , (c) ve (d) durumları binom katsayılarının tanımlarından çıkıyor.

(e) Herhangi bir $\beta \in \mathbb{R}$ için N den $N+1$ e tümevarım adımları ile bu durumu ispatlayabiliriz. $n = 1$ ve $n = 0$ için doğrudur. Şimdi $n = N$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$\sum_{v=0}^{N} \begin{pmatrix} v + \beta - 1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N + \beta \\ N \end{pmatrix}$$

dir. $n = N + 1$ için,

$$\sum_{v=0}^{N+1} \begin{pmatrix} v + \beta - 1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N + \beta + 1 \\ N + 1 \end{pmatrix}$$

olur. Çünkü,

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{N+1} \begin{pmatrix} v + \beta - 1 \\ v \end{pmatrix} &= \sum_{v=0}^{N} \begin{pmatrix} v + \beta - 1 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N + \beta \\ N + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} N + \beta \\ N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N + \beta \\ N + 1 \end{pmatrix} \quad [\textit{tümevarım hipotezi}] \\ &= \begin{pmatrix} N + 1 + \beta \\ N + 1 \end{pmatrix} \quad [\textit{hipotez } (c)] \end{aligned}$$

dir.

(*f*) $|t| < 1$ için,

$$\sum_n \binom{n+\gamma-1}{n} t^n = \frac{1}{(1-t)^\gamma}$$

ve

$$\sum_n \binom{n+\delta-1}{n} t^n = \frac{1}{(1-t)^\delta}$$

yakınsak kuvvet serilerini gözönüne alalım. Bu serilerin cauchy çarpımları alındığında kesinlikle yakınsak olur.

$$\sum_n \binom{n+\gamma-1}{n} t^n = b_n$$

ve

$$\sum_n \binom{n+\delta-1}{n} t^n = a_n$$

olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-t)^{\gamma+\delta}} &= \sum_n \left(\sum_{v=0}^{n} a_v b_{n-v}\right) \\
&= \sum_n \left(\sum_{v=0}^{n} \binom{v+\delta-1}{v} t^v \binom{n-v+\gamma-1}{n-v} t^{n-v}\right) \\
&= \sum_n \left(\sum_{v=0}^{n} \binom{v+\delta-1}{v} \binom{n-v+\gamma-1}{n-v}\right) t^n \\
&= \sum_n \binom{n+\gamma+\delta-1}{n} t^n \quad (|t|<1)
\end{aligned}$$

Katsayıların karşılaştırması ile

$$\sum_{v=0}^{n} \binom{v+\delta-1}{v} \binom{n-v+\gamma-1}{n-v} = \binom{n+\gamma+\delta-1}{n}$$

dır. n yerine $n-k$ yazarsak,

$$\begin{aligned}
\binom{n-k+\gamma+\delta-1}{n-k} &= \sum_{v=0}^{n-k} \binom{v+\delta-1}{v} \binom{n-k-v+\gamma-1}{n-k-v} \\
&= \sum_{v=k}^{n} \binom{v-k+\delta-1}{v-k} \binom{n-v+\gamma-1}{n-v}
\end{aligned}$$

olur. O halde,

$$\binom{n-k+\gamma+\delta-1}{n-k} = \sum_{v=k}^{n} \binom{v-k+\delta-1}{v-k} \binom{n-v+\gamma-1}{n-v}$$

olur (Boos, 2000).■

Tanım 2.1.24 (Cesáro Toplanabilme Metodu)

$$c_{nk} := \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , k \leq n \text{ ise} \\ 0 & , k > n \text{ ise} \end{cases} \quad (k, n \in \mathbb{N})$$

elemanları ile tanımlı alt üçgensel sonsuz matrise Cesáro matrisi denir ve $(C, 1)$ ile gösterilir. $\sum a_n, (s_n)$ kısmi toplamlar dizisi ile verilen sonsuz bir seri olsun.

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^{n} s_v \tag{2.2}$$

ile tanımlanan diziden-diziye dönüşüme, (s_n) dizisinin Cesáro ortalaması denir. Eğer $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$ ise, $\sum a_n$ serisi s değerine $(C, 1)$ toplanabilirdir denir (Boss, 2000).

Teorem 2.1.5

$(C, 1)$ Cesáro metodu regülerdir (Boos, 2000).

Tanım 2.1.25 ((C, α) Toplanabilme Metodu)

$k, n \in \mathbb{N}^0$, $E_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n)}{n!}$, $E_0^\alpha = 1$ ve $\alpha > -1$ olmak üzere,

$$c_{nv}^{(\alpha)} := \begin{cases} \frac{E_{n-v}^{\alpha-1}}{E_n^\alpha} & , v \leq n \text{ ise} \\ 0 & , v > n \text{ ise} \end{cases}$$

elemanları ile tanımlanan matrise $\alpha-$ıncı mertebeden Cesáro matrisi denir ve (C, α) ile gösterilir. σ_n^α ile (s_n) dizisinin $\alpha-$ıncı $(\alpha > -1)$ mertebeden Cesáro ortalamasının $n-$inci terimini gösterelim. Yani,

$$\sigma_n^\alpha = \frac{1}{E_n^\alpha} \sum_{v=0}^{n} E_{n-v}^{\alpha-1} s_v \tag{2.3}$$

olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^\alpha = s$ ise, $\sum a_n$ serisi s değerine (C, α) toplanabilirdir denir. $\alpha = 1$ özel durumunda $(C, 1)$ elde edilir. $(C, 1)$, birinci mertebeden Cesáro ortalamasıdır. Ayrıca $(C, 0) = I$ dır (Boos, 2000).

Teorem 2.1.6

(C, α) Cesáro matrisi $\alpha \geq 0$ ise regülerdir, fakat $\alpha < 0$ ise konservatif veya regüler değildir (Boos, 2000).

Tanım 2.1.26 (Nörlund Toplanabilme Metodu)

$P_n := p_0 + p_1 + p_2 + ... + p_n \neq 0 \ \ (n \in \mathbb{N}^0)$ olmak üzere $p = \{p_n\} \in \omega$ olsun.

$$p_{nk} := \begin{cases} \frac{p_{n-k}}{P_n} & , k \leq n \text{ ise} \\ 0 & , k > n \text{ ise} \end{cases} \quad (k, n \in \mathbb{N}^0)$$

ile tanımlanan $(N,p) := (N,p_n) := (p_{nk})$ matrisine Nörlund matrisi denir.

$$t_n = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}s_v \tag{2.4}$$

ile verilen dönüşüme (N,p_n) Nörlund ortalaması denir. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = s$ ise, $\sum a_n$ serisi s değerine (N,p_n) toplanabilirdir denir (Hardy, 1949).

Teorem 2.1.7

$p_0 > 0$ ve $p_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ olsun.

(a) (N,p_n) Nörlund metodunun konservatif olması için gerek ve yeter şart $(p_n/P_n) \in c$ olmasıdır.

(b) (N,p_n) Nörlund metodunun regüler olması için gerek ve yeter şart $(p_n/P_n) \in c_0$ olmasıdır (Boos, 2000).

Tanım 2.1.27 (Riesz Toplanabilme Metodu)

$p_0 > 0$, $p_k \geq 0$ $(k \in \mathbb{N})$ ve $P_n := \sum\limits_{k=0}^{n} p_k$ $(n \in \mathbb{N}^0)$ olmak üzere $p = (p_k)$ reel bir dizi olsun.

$$r_{nk} := \begin{cases} \frac{p_k}{P_n} & , k \leq n \text{ ise} \\ 0 & , k > n \text{ ise} \end{cases} \quad (k, n \in \mathbb{N}^0)$$

elemanlar ile tanımlanan $(R,p_n) := \left(\overline{N}, p_n\right) := (r_{nk})$ matrisine Riesz matrisi veya ağırlıklı ortalama matrisi denir.

$$T_n = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} p_v s_v \tag{2.5}$$

ile verilen diziden-diziye dönüşüme (R,p_n) Riesz ortalaması veya $\left(\overline{N},p_n\right)$ ağırlıklı ortalama dizisi denir. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = s$ ise, $\sum a_n$ serisi s değerine (R,p_n) veya $\left(\overline{N},p_n\right)$ toplanabilirdir denir (Hardy, 1949).

(N,p_n) ve $\left(\overline{N},p_n\right)$ ortalamalarında her n için $p_n = 1$ alınırsa $(C,1)$ ortalaması elde edilir. En basit dönüşüm olan I birim dönüşümü bir Nörlund ortalaması olarak ifade edilebilir. Fakat Riesz ortalamasından birim dönüşümü elde edilemez.

Eğer (N,p_n) Nörlund metodunda $\alpha \in \mathbb{R}$, $-\alpha \notin \mathbb{N}$ olmak üzere

$$p_n = E_n^{\alpha-1} = \begin{pmatrix} n+\alpha-1 \\ n \end{pmatrix}$$

alınırsa $(N,p_n) = (C,\alpha)$ olur. Burada E_n^{α}, $|x| < 1$ için $(1-x)^{-\alpha-1}$ kuvvet serisinin açılımındaki x^n in katsayısıdır. Yani (C,α) metodu Nörlund metodunun özel bir durumudur.

Teorem 2.1.8

(a) (R, p_n) Riesz matrisi konservatiftir.

(b) (R, p_n) Riesz matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart $n \to \infty$ iken $P_n \to \infty$ olmasıdır (Boos, 2000).

Tanım 2.1.28 (Hölder Metodu)

$(C, 1)$ birinci mertebeden Cesáro metodu ve $\alpha \in \mathbb{N}^0$ olsun. $\alpha \geq 1$ olmak üzere $H_\alpha := (C, 1)^\alpha$ yani $H_0 := I$ ve $H_\alpha := (C, 1)\, H_{\alpha-1}$ matrisine $\alpha-$ıncı mertebeden Hölder matrisi denir. Bu matris yardımıyla tanımlanan dönüşüme de Hölder Metodu denir. Buradaki iki matrisin çarpımı bilinen matris çarpımıdır. Birinci Hölder ortalaması $(C, 1)$ dönüşümüdür (Petersen, 1966).

Cesáro matrisleri özel Nörlund matrisleri olmasına karşın Hölder matrisleri için $H_1 = (C, 1)$ hariç böyle bir durum yoktur.

Tanım 2.1.29 (Hausdorff Metodu)

$\mu = (\mu_n) \in \omega$ ve Δ, $\Delta\mu_k = \mu_k - \mu_{k+1}$, $\Delta^n(\mu_k) = \Delta(\Delta^{n-1}\mu_k)$ ile tanımlanan fark operatörü olmak üzere

$$h_{nk} := \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \Delta^{n-k}\mu & , 0 \leq k \leq n \text{ ise} \\ 0 & , k > n \text{ ise} \end{cases} \quad \left(k, n \in \mathbb{N}^0\right)$$

ile tanımlanan $(H, \mu) := (H, \mu_n) := (h_{nk})$ matrisine Hausdorff matrisi denir. Bu matris yardımıyla tanımlanan dönüşüme Hausdorff metodu denir (Hausdorff, 1921).

Hausdorff matrisi köşegen elemanları $h_{nn} = \mu_n$ olan bir alt üçgensel matristir. Hausdorff matrisinde her $n \in \mathbb{N}^0$ için $\mu_n = 1$ alınırsa I birim matrisi elde edilir. Eğer Hausdorf matrisinde her bir $\alpha \in \mathbb{R}$, $-\alpha \notin \mathbb{N}$ için $\mu_n = \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix}^{-1}$ alınırsa (C, α) Cesáro metodu elde edilir. Yani (C, α) metodu Hausdorff metodunun özel bir durumudur.

Hausdorff matrisinde $\alpha \in \mathbb{N}^0$ için $(\mu_n) = (1/(n+1)^\alpha)$ alınırsa Hölder matrisi elde edilir. Yani herhangi bir $\alpha \in \mathbb{N}^0$ için $H_\alpha = (H, 1/(n+1)^\alpha)$ olur. Herhangi bir $\alpha \in \mathbb{C}$ için Hölder matrisi Hausdorff matrisi yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

Teorem 2.1.9

Herhangi bir $\alpha \in \mathbb{C}$ için $H_\alpha = (H, 1/(n+1)^\alpha)$ matrisi $\alpha-$ıncı mertebeden Hölder matrisi ve ilişkili matris metodu da $\alpha-$ıncı mertebeden Hölder metodu olarak adlandırılır (Boos, 2000).

Teorem 2.1.10

Herhangi bir $\alpha \geq 0$ için H_α Hölder matrisi regülerdir (Boos, 2000).

Teorem 2.1.11

Her bir $\alpha > -1$ için (C, α) Cesáro ve H_α Hölder metotları denktirler (Boos, 2000).

Tanım 2.1.30 (**$(E, 1)$ Euler Metodu**)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisi, küçük x değerleri için yakınsak ve orjin ile $x = 1$ noktasını içeren açık ve bağlantılı bir bölgede tek değişkenli analitik bir $f(x)$ fonksiyonu tanımlasın. Eğer $f(1) = s$ ise s 'ye $\sum a_n$ serisinin **E** toplamı denir.

Doğal olarak s değeri seçilen bölgeye bağlı olabilir. Kabul edelim ki, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi küçük x değerleri için yakınsak ve

$$x = \frac{y}{1-y} \quad \text{ve} \quad y = \frac{x}{1+x}$$

olsun. $x = 1$ için $y = \frac{1}{2}$ her iki ifade de geçerlidir. Buradan,

$$\begin{aligned}
x.f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + ... \\
&= a_0 \frac{y}{1-y} + a_1 \frac{y^2}{(1-y)^2} + a_2 \frac{y^3}{(1-y)^3} + ... \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} a_p \sum_{m=0}^{\infty} \binom{p+m}{m} y^{p+m+1} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} a_p \sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{n-p} y^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} y^{n+1} \sum_{p=0}^{n} a_p \binom{n}{n-p} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} y^{n+1} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a_p
\end{aligned}$$

olur. Böylece, küçük y değerleri için,

$$b_0 = a_0 \quad ve \quad b_n = a_0 + a_1 \binom{n}{1} + a_2 \binom{n}{2} + ... + a_n \tag{2.6}$$

olmak üzere

$$x \; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \; y^{n+1}$$

elde edilir.

Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \, y^{n+1}$ serisi $y = \frac{1}{2}$ için yakınsak ve serinin toplamı s ise

$$\frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{8}b_2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} b_n = s$$

olur. s 'ye $\sum a_n$ serisinin $(E, 1)$ toplamı denir.

Tanım 2.1.31 ((E, q) Euler Metodu)

$q > 0$ için

$$a_m^{(q)} = \frac{1}{(q+1)^{m+1}} \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} q^{m-n} a_n$$

olmak üzere, eğer

$$\sum a_m^{(q)} = A$$

ise $\sum a_n$ serisi A değerine (E, q) toplanabilirdir denir (Hardy, 1949).

$q = 1$ için $(E, 1)$ ve $q = 0$ için bilinen yakınsaklık kavramı elde edilir.

Teorem 2.1.12

(E, q) metodu regülerdir (Hardy,1949).

Tanım 2.1.32

(σ^n), (2.2) deki gibi tanımlanmak üzere, eğer (σ_n) sınırlı salınımlı bir dizi ($(\sigma_n) \in BV$) ise yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n - \sigma_{n-1}| < \infty$$

ise, $\sum a_n$ serisi mutlak Cesáro toplanabilirdir veya kısaca $|C, 1|$ toplanabilirdir denir (Fekete, 1911).

Tanım 2.1.33

(α_n^{α}), (2.3) deki gibi tanımlanmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sigma_n^{\alpha} - \sigma_{n-1}^{\alpha}\right| < \infty$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|C, \alpha|$ toplanabilirdir denir (Fekete, 1911).

Tanım 2.1.34

(σ_n^α), (2.3) deki gibi tanımlansın. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left|\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha\right|^k < \infty \tag{2.7}$$

ise $\sum a_n$ serisi $|C,\alpha|_k$ toplanabilirdir denir (Flett, 1957).

τ_n^α, $\{na_n\}$ dizisinin $\alpha-$ıncı $(\alpha > -1)$ mertebeden Cesáro ortalamasının $n-$inci terimini göstersin. Yani,

$$\tau_n^\alpha = \frac{1}{E_n^\alpha} \sum_{v=1}^{n} E_{n-v}^{\alpha-1} v a_v$$

olsun. Ayrıca Kogbetliantz (1925) tarafından

$$\tau_n^\alpha = n(\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha)$$

olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla (2.7) şartı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left|\tau_n^\alpha\right|^k < \infty \tag{2.8}$$

şartına denktir. $k = 1$ özel durumunda Tanım 2.1.34 de verilen $|C,\alpha|$ toplanabilme metodu elde edilir.

Tanım 2.1.35

(σ_n), (2.2) deki gibi tanımlansın. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left|\sigma_n - \sigma_{n-1}\right|^k < \infty$$

ise $\sum a_n$ serisi $|C,1|_k$ toplanabilirdir denir. $k = 1$ özel durumunda Tanım 2.1.32 de verilen $|C,1|$ toplanabilme metodu elde edilir.

Teorem 2.1.13 (Hölder Eşitsizliği)

$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ ve $b_1, b_2, ..., b_n \geq 0$ olsun. Bu taktirde,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q}$$

olur (Maddox, 1970).

Teorem 2.1.14 (Minkowski Eşitsizliği)

$p \geq 1$, $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ ve $b_1, b_2, ..., b_n \geq 0$ olsun. Bu taktirde,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{1/p}$$

olur (Maddox, 1970).

2.2 Double Diziler

Bu kısımda, double dizi uzayları ile double dizilerdeki yakınsaklık kavramları hakkında bilgiler verilecektir. Double dizilerde birden fazla yakınsaklık çeşidi vardır.

Tanım 2.2.1 (Double Dizi)

K, reel ve kompleks sayıların bir cismi olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0 \longrightarrow K \\ (m,n) & \longrightarrow & f(m,n) = x_{mn} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna bir double indisli dizi denir (Boos, 2000).

Bundan sonraki kısımlarda double indisli dizi yerine kısaca double dizi veya sadece dizi ifadesi kullanlacaktır. Herhangi bir $x = (x_{mn})$ double dizisinin x_{mn} elemanları,

$$\begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0n} & \dots \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & \dots \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_{m0} & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

şeklinde bir tablo olarak düşünülebilir. Ω ile kompleks veya reel terimli bütün double dizilerin cümlesini gösterilecektir. Buna göre;

$$\Omega = \left\{ x = (x_{mn}) : x : \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0 \longrightarrow K, \ \ (m,n) \to x_{mn} := x((m,n)) \right\}$$

olup bu cümle $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $x_{mn} \in \mathbb{C}$, $\forall \alpha \in K$ ve $\forall x, y \in \Omega$ için,

$$x + y = (x_{mn} + y_{mn}) \text{ ve } \alpha x = (\alpha x_{mn})$$

işlemleri altında bir lineer uzaydır (Boos, 2000)

Tanım 2.2.2 (Double Dizilerde Sınırlılık)

$x = (x_{mn})$ kompleks terimli bir dizi, $\exists m_0 \in \mathbb{N}^0$ olmak üzere

$$\sup_{m \geq m_0, n \in \mathbb{N}^0} |x_{mn}| < \infty$$

oluyorsa x dizisine sınırlıdır denir (Boos, 2000).

Bütün sınırlı double dizilerin cümlesi,

$$M_u = \left\{ x = (x_{mn}) \in \Omega : ||x||_\infty = \sup_{m,n \in \mathbb{N}} |x_{mn}| < \infty \right\}$$

şeklinde olup, bu uzay $||\cdot||_\infty$ normu ile bir banach uzayı teşkil eder.

Tanım 2.2.3 (P-Yakınsaklık)

$x = (x_{mn})$ kompleks terimli bir dizi ve $l \in \mathbb{C}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > k_0$ olduğunda,

$$|x_{mn} - l| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $k_0 = k_0(\varepsilon)$ doğal sayısı bulunabiliyorsa, $x = (x_{mn})$ dizisi, l sayısına Pringsheim anlamında yakınsak ve l değerine de x dizisinin Pringsheim limiti denir. Pringsheim anlamında yakınsak bir $x = (x_{mn})$ dizisine kısaca $P-$yakınsak dizi denir ve limiti de

$$P - \lim x_{mn} = l$$

ile gösterilir (Altay, 2002).

Pringsheim anlamında yakınsak dizilerin cümlesi,

$$C_p = \{x = (x_{mn}) \in \Omega \mid \exists l \in \mathbb{C}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq k_0 \ni |x_{mn} - l| < \varepsilon\}$$

biçiminde ifade edilir. C_p cümlesi çift dizilerin koordinatsal toplamı ve skalerle çarpma işlemleri altında bir lineer uzay olup,

$$||x||_{c_p} = \lim_{k_0 \to \infty} \sup_{m,n \geq k_0} |x_{mn}|$$

yarı normlu ile bir tam uzay teşkil eder (Móricz, 1991).

Pringsheim anlamında yakınsak bir çift dizi, sınırlı olmak zorunda değildir. Pringsheim anlamında l noktasına yakınsak ve sınırlı bir $x = (x_{mn})$ dizisine, l noktasına Pringsheim anlamında sınırlı yakınsak dizi denir. Bu şekildeki dizilerin cümlesi,

$$C_{bp} = \left\{x = (x_m) \in C_p : ||x||_\infty = \sup_{m,n \geq 0} |x_{mn}| < \infty\right\} = C_p \cap M_u$$

ile gösterilir (Móricz, 1991).

Tanım 2.2.4 (Regüler Yakınsaklık)

Pringsheim anlamında l noktasına yakınsak ve $\lim_m x_{mn}$, $(n \in \mathbb{N})$ ile $\lim_n x_{mn}$, $(m \in \mathbb{N})$ limitleri mevcut olan x dizisine, l noktasına regüler yakınsaktır denir. Regüler yakınsak bir $x = (x_{mn})$ dizisi için $\lim_n \lim_m x_{mn}$ ve $\lim_m \lim_n x_{mn}$ limitleri mevcut ve Pringsheim limitine eşittir.

Regüler yakınsak dizilerinin cümlesi

$$C_r = \{x = (x_{mn}) \in C_p : \forall m \in \mathbb{N} \text{ için } (x_{mn})_m \in c \text{ ve } \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } (x_{mn})_n \in c\}$$

şeklindedir. Regüler yakınsaklığın Pringsheim anlamında yakınsaklıktan farkı, bir çift dizinin yakınsaklığının dizinin sınırlılığını gerektirmesidir (Altay, 2002).

Tanım 2.2.5 (P- Cauchy)

Verilen her $\varepsilon > 0$ için $m, n, p, q > k_0$ olduğunda

$$|x_{mn} - x_{pq}| < \varepsilon$$

kalacak şekilde bir $k_0 = k_0(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa, $x = (x_{mn})$ kompleks terimli dizisine bir $P-$Cauchy dizisi denir.

Kompleks terimli bir $x = (x_{mn})$ dizisinin P-yakınsak olması için gerek ve yeter şart $P-$Cauchy dizisi bulunmasıdır (Altay, 2002).

Tanım 2.2.6 (Alt Dizi)

$$f : \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0 \to K$$
$$(m, n) \to f(m, n) = x_{mn}$$

dizisi verilmiş olsun.

$$i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$m \to i(m) = i_m$$

ve

$$j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \to j(n) = j_n$$

artan fonksiyonlar (diziler) olmak üzere,

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$(m, n) \to h(m, n) = (i_m, j_n)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda,

$$f \circ h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$$
$$(m, n) \to f \circ h(m, n) = x_{i_m j_n}$$

bileşke fonksiyonuna (x_{mn}) dizisinin bir alt dizisi denir (Altay, 2002).

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesinin sonsuz çoklukta (i_m, j_n) dizisi bulunabileceğinden, bir (x_{mn}) dizisinin sonsuz çoklukta alt dizisi vardır. Burada alt dizi, orjinal diziden satır ve sütunları atmakla elde edilir. $(x_{i_m j_n})$ alt dizisinin her teriminin (x_{mn}) dizisinin bir terimi olduğu açıktır.

Yakınsak bir çift dizinin her alt dizisi de yakınsaktır.

Tanım 2.2.7 (Monoton Dizi)

$m \leq m'$ ve $n \leq n'$ olduğunda $s_{mn} \leq s_{m'n'}$ oluyorsa, (s_{mn}) dizisine monoton artan, $m \geq m'$ ve $n \geq n'$ olduğunda $s_{mn} \geq s_{m'n'}$ oluyorsa, (s_{mn}) dizisine monoton azalandır denir (Iyer, 1985).

Monoton çift diziler hakkında teoremler, monoton tek diziler hakkındaki teoremlere aynı yapıya sahiptir.

Artan bir çift dizi üstten sınırlı ise limiti supremumuna, azalan bir çift dizi alttan sınırlı ise limiti infimumuna eşittir.

Tanım 2.2.8 (Double Seri)

(x_{mn}) double dizisi verilmiş olsun. Şimdi,

$$s_{mn} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} x_{ij}$$

şeklinde tanımlanan (s_{mn}) dizisini gözönüne alalım. Bu durumda, $((x_{mn}), (s_{mn}))$ ikilisine bir double seri denir. x_{mn} terimine serinin genel terimi, (s_{mn}) dizisine de serinin kısmi toplamlar dizisi denir. Eğer (s_{mn}) kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına $\upsilon-$yakınsak ($\upsilon \in \{P, r\}$), yani

$$\upsilon - \lim_{mn} \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = s$$

ise, $((x_{mn}), (s_{mn}))$ serisi $\upsilon-$yakınsak ve serinin $\upsilon-$toplamı s 'dir denir.

Yakınsak olmayan seriye ıraksak seri denir.

Genel terimi x_{mn} ve toplamı s olan yakınsak seri

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} x_{mn} = s$$

şeklinde gösterilir. Seri ister yakınsak ister ıraksak olsun genel terimi x_{mn} olan seri

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} x_{mn}$$

ile gösterilir (Altay, 2002).

Bölüm 3

RIEMANN STİELTJES INTEGRALLERİ VE SINIRLI - SALINIMLI UZAYLAR

3.1 Sınırlı Salınımlı Fonksiyonlar

Tanım 3.1.1 (Bir Aralığın Bölüntüsü)

(i) $[a, b]$ kapalı aralığı verilsin. n pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

şartını sağlayan x_0 , x_1 , x_2 , ..., x_n noktaları yardımı ile $[a, b]$ aralığını,

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$$

alt aralıklara bölelim. $\sigma = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$ kümesine $[a, b]$ aralığının bir bölüntüsü, parçalanışı veya bölüntü kümesi denir.

(ii) $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $[x_{i-1}, x_i]$ aralığının uzunluğu $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ile gösterilir. $\sigma = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$ bölüntüsü ile oluşturulan,

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$$

alt aralıklarının uzunluğu sırasıyla,

$$\Delta x_1, \Delta x_2 , ..., \Delta x_n$$

olur. Bu uzunlukların en büyüğüne yani $|x_i - x_{i-1}|$ in maksimumuna σ bölüntüsünün normu denir ve $|\sigma|$ ile gösterilir.

(iii) Eğer,

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n = \frac{b-a}{n}$$

ise σ kümesine $[a, b]$ aralığının düzgün bölüntüsü denir.

Bu tanımdan da anlaşılacağı gibi $[a, b]$ aralığının sonsuz sayıda alt bölüntüsü bulunabilir. Aynı şey düzgün bölüntü için de geçerlidir. Ancak, belirli bir n sayısı için düzgün bölüntünün bir tane olduğunu unutmamak gerekir.

Örnek 3.1.1

(i) $[0, 5]$ aralığını gözönüne alalım. $\sigma = \{0, 1, 3, 4, 5\}$ bölüntü kümesi ile bu aralık,

$$[0, 1], [1, 3], [3, 4], [4, 5]$$

şeklinde alt aralıklara ayrılır. Burada sırasıyla,

$$\Delta x_1 = 1,\ \Delta x_2 = 2,\ \Delta x_3 = 1,\ \Delta x_4 = 1$$

yazılır. Buna göre σ bölüntüsünün normu $|\sigma| = 2$ olur. Aralıkların uzunlukları eşit olmadığından bu bölüntü düzgün değildir.

(ii) $[0, 5]$ aralığını 4 eşit alt aralığa bölelim. Bu durumda her bir alt aralığın uzunluğu $\Delta x_i = \frac{5-0}{4} = \frac{5}{4}$ olacaktır. Bölüntü kümesi $\sigma = \left\{0, \frac{5}{4}, 2.\frac{5}{4}, 3.\frac{5}{4}, 5\right\}$ olur. Bu bir düzgün bölüntüdür. Bu bölüntünün normu $|\sigma| = \frac{5}{4}$ dür.

(iii) $[1, 3]$ aralığını uzunluğu $\frac{2}{n}$ olan, n eşit alt aralığa bölersek, bölüntü kümesi $\sigma = \left\{1, 1 + \frac{2}{n}, 1 + 2.\frac{2}{n}\ , ..., 1 + n.\frac{2}{n} = 3\right\}$ olarak yazılır. Bu verilen aralık için düzgün bir bölüntüdür. $|\sigma| = \frac{2}{n}$ dir.

Tanım 3.1.2 (Riemann Toplamı)

f, $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı sınırlı bir fonksiyon ve

$$\sigma = \{a = x_0, x_1\ , ..., x_n = b\}$$

bu aralığın bir bölüntüsü olsun. Ayrıca,

$$x_0 \leq x_1' \leq x_1\ ,\ x_1 \leq x_2' \leq x_2\ , ...,\ x_{i-1} \leq x_i' \leq x_i\ , ...,\ x_{n-1} \leq x_n' \leq x_n$$

olmak üzere $x_1', x_2', ..., x_i', ..., x_n'$ noktalarını gözönüne alalım. Bu durumda,

$$R_n(f, \sigma) = f(x_1').\Delta x_1 + f(x_2').\Delta x_2 + f(x_3').\Delta x_3 + ... + f(x_n').\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i').\Delta x_i \tag{3.1}$$

toplamına f fonksiyonun $[a, b]$ kapalı aralığındaki Riemann toplamı denir. $x_1', x_2', ..., x_n'$ noktaları değiştiği zaman bazı fonksiyonlar için $f(x_1'), f(x_2'), f(x_3'), ..., f(x_n')$ değerleri de değişebileceğinden (3.1) toplamıda değişebilir. Bu toplamı $R_n(f, \sigma)$ ile gösterilmesinin nedeni bu toplamın σ bölüntüsüne ve f fonksiyonuna bağlı olarak değiştiğini vurgulamaktır.

Örnek 3.1.2

$[1,2]$ kapalı aralığında $f(x)=x^2$ fonksiyonunu gözönüne alalım.

$$\sigma=\left\{1,1+\frac{1}{n},1+\frac{2}{n},...,2\right\}$$

bu aralığın düzgün bir bölüntüsü olsun. $R_n\left(f,\sigma\right)$ toplamını

$$x_1'=1,\ x_2'=1+\frac{1}{n},\ x_3'=1+\frac{2}{n}\ ,...,\ x_n'=\frac{2n-1}{n}$$

için elde edelim.

Verilenlerden,

$$\Delta x_1=\Delta x_2=...=\Delta x_n=\frac{1}{n}$$

ve

$$f(x_1')=1,\ f(x_2')=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\ ,...,\ f(x_n')=\left(\frac{2n-1}{n}\right)^2$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}R_n\left(f,\sigma\right)&=f(x_1').\Delta x_1+f(x_2').\Delta x_2+f(x_3').\Delta x_3+...+f(x_n').\Delta x_n\\&=1.\frac{1}{n}+\left(\frac{n+1}{n}\right)^2.\frac{1}{n}+...+\left(\frac{2n-1}{n}\right)^2.\frac{1}{n}\end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 3.1.3 (Riemann İntegrali)

f, $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon ve

$$\sigma=\{x_0,x_1,...,x_n\}$$

bu aralığın bir bölüntüsü olsun. Ayrıca,

$$x_i'\in[x_{i-1},x_i]$$

olmak üzere $x_1',x_2',...,x_i',...,x_n'$ noktalarını gözönüne alalım. Bu durumda,

$$\lim_{|\sigma|\to 0}R_n\left(f,\sigma\right)=\lim_{|\sigma|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i').(\Delta x_i)$$

yazılabilir. Eğer bu gösterimin limiti varsa f fonksiyonunun $[a,b]$ kapalı aralığında Riemann anlamında integrallenebilirdir denir ve $\int\limits_a^b f(x)dx$ ile gösterilir. Bu semboldeki a ya integralin alt sınırı, b ye integralin üst sınırı denir. Bu tanıma göre,

$$\forall\varepsilon>0 \text{ için } \exists\delta>0 \text{ öyle ki } |\sigma|<\delta \text{ için } \left|\sum_{i=1}^{n}f(x_i').(\Delta x_i)-\int\limits_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon$$

veya

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\sigma|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i').(\Delta x_i)$$

olur. Buradaki limit x_i' noktasına bağlı olarak değişmez. σ nın normu $|\sigma| \to 0$ olduğunda bölüntü kümesinin eleman sayısı sınırsız artarken her i için $(x_i - x_{i-1})$ sıfıra doğru gider. Yani,

$$|\sigma| \to 0 \Leftrightarrow n \to +\infty \text{ ve her } i \text{ için } (x_i - x_{i-1}) \to 0$$

şeklinde yazarız. $|\sigma| \to 0$ olması halinde keyfi bir bölüntü düzgün bir bölüntüye yaklaşır (Hildebrandt, 1963).

Tanım 3.1.4 (Merdiven Fonksiyonu)

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir merdiven fonksiyonudur. $\Leftrightarrow$ $[a,b]$ nin öyle bir σ parçalanması vardır ki f fonksiyonu $[a,b]$ nin her açık alt aralığı üzerinde sabittir.

$[a,b]$ üzerinde tanımlı merdiven fonksiyonlarının kümesi $M[a,b]$ ile gösterilir (Balcı, 2003).

Tanım 3.1.5 (Üst ve Alt Darboux Toplamı)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. $[a,b]$ aralığının $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ bölüntüsü için,

$$M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$
$$m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

olsun.

$$\ddot{U}(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \quad ve \quad A(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

toplamlarına sırası ile f fonksiyonunun σ bölüntüsüne karşılık gelen Üst Darboux Toplamı ve Alt Darboux Toplamı adı verilir. Burada,

$$\inf \ddot{U}(f,\sigma) = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx \text{ ve } \sup A(f,\sigma) = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$$

dır (Balcı, 2003).

Tanım 3.1.6 (Üst ve Alt Darboux İntegralleri)

f, $[a,b]$ üzerinde tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon olsun.

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \inf_{s \geq f} \left\{ \int_a^b s(x)dx : s \in M[a,b] \right\}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{t \leq f} \left\{ \int_a^b t(x)dx : t \in M[a,b] \right\}$$

sayılarına sırası ile , Üst Darboux İntegrali ve Alt Darboux İntegrali denir.

Şu halde f fonksiyonunun Üst Darboux İntegrali, $s \geq f$ olmak üzere $\int_a^b s(x)dx$ integralinin en büyük alt sınırı, Alt Darboux İntegrali ise $t \leq f$ olmak üzere $\int_a^b t(x)dx$ integralinin en küçük üst sınırıdır. Bu integraller için,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

olduğu açıktır. O halde,

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. Eğer

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx = I$$

ise f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilirdir denir ve bu fonksiyonun bu integrali

$$\int_a^b f(x)dx$$

ile gösterilir (Balcı, 2003).

Teorem 3.1.1 (Riemann Şartı)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\ddot{U}(f,\sigma) - A(f,\sigma) < \varepsilon$$

olacak şekilde $[a,b]$ nin bir σ bölüntüsünün var olmasıdır (Balcı, 2003).

Teorem 3.1.2

$[a,b]$ aralığında sürekli her fonksiyon bu aralıkta integrallenebilirdir.

Teorem 3.1.3

$[a,b]$ üzerinde parçalı sürekli ve sınırlı her fonksiyon $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirdir.

Teorem 3.1.4

$[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu monoton artan(veya azalan) ise f, fonksiyonu $[a,b]$ de Riemann anlamında integrallenebilirdir.

Teorem 3.1.5

f ve g, $[a,b]$ de Riemann anlamında integrallenebilen fonksiyonlar olsun.

(a) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ise αf ve βg fonksiyonları da $[a,b]$ de integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

olur.

(b) $f \geq 0$ ise $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ dır.

(c) f^2 integrallenebilirdir.

(d) $f \geq 0$ ise $\sqrt{f}$ integrallenebilirdir.

(e) $|f|$ integrallenebilirdir ve $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$ dir.

(f) $f.g$ integrallenebilirdir (Balcı, 2003).

Tanım 3.1.7 (Sınırlı Salınımlı Fonksiyonlar)

f, $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer

$$g(\sigma) = \sum_{\sigma} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

bölüntü fonksiyonu σ ya göre sınırlı ise f fonksiyonuna $[a,b]$ üzerinde sınırlı salınımlıdır denir. σ ya göre $g(\sigma)$ nın en küçük üst sınırına ise f nin $[a,b]$ aralığındaki total salınımı denir (Hildebrandt, 1963).

Yani,

f fonksiyonu sınırlı salınımlıdır $\Leftrightarrow$ $[a,b]$ nin her σ parçalanması için

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M$$

kalacak şekilde en az bir M sayısı vardır. $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı salınımlı ise supremum $[a,b]$ nin tüm σ bölüntüsü üzerinden alınmak üzere,

$$V_a^b\, f = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

genişletilmiş reel sayısına f nin $[a,b]$ aralığındaki total salınımı adı verilir. $V_a^b\, f$ sonlu ise f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı salınımlıdır. Bunuınla beraber,

σ nın

$$g(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

fonksiyonunun σ 'ya göre monotonluk özelliği vardır. Sonuç olarak , eğer $\sigma_1 \geq \sigma_2$ olacak şekilde σ_1 altbölüntüsü σ_2 bölüntüsünün tüm noktalarını kapsarsa ,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\ \sigma_\varepsilon > 0 \text{ öyle ki } \sigma \geq \sigma_\varepsilon \text{ için } \ V_a^b\, f - \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon$$

olur.

Şimdi yukarıdaki ifadenin ortak özelliklerini çıkarmak için limit tanımının örneklerini incelersek öncelikle limit kavramının sadece fonksiyonlar için geçerli olduğuna dikkat etmek gerekir. Bir dizi, tamsayıların bir fonksiyonudur, integralde ve salınımda yaklaşan toplamlar temel aralığının altbölüntülerinin fonksiyonlarıdırlar. İkincisi, bu tanımların herbirinde bir çeşit sıra içerilmektedir. Diziler için tamsayıların sırası, x fonksiyonu için $|x - x_0|$ uzaklığı ile verilir. Riemann İntegrali için sıra $|\sigma|$ ile verilir ve total salınım için $\sigma_1 \geq \sigma_2$ sırası $\sigma_2 \subset \sigma_1$ kapsamı ile verilir.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c \equiv \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\ x_\varepsilon > 0 \text{ için } \ |x - x_0| < |x_\varepsilon - x_0| \ \text{ öyle ki } \ |f(x) - c| < \varepsilon$$

ve

$$\lim_{|\sigma| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i').(x_i - x_{i-1}) \ = \ \int_a^b f(x)dx \equiv \ \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \sigma_\varepsilon > 0 \ \ |\sigma| < |\sigma_\varepsilon|$$

öyle ki $\left| \sum_{\sigma} f(x_i').(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx \right| \ < \ \varepsilon$

olur.

Örnek 3.1.3

f, $[a,b]$ aralığında sabit ise f, $[a,b]$ üzerinde sınırlı salınımlıdır. $[a,b]$ aralığında $f(x) = c$ sabit fonksiyonu göz önüne alalım. $[a,b]$ aralığının her bölüntüsü için,

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = 0$$

dır. (Gordon, 2002).

Teorem 3.1.6

Eğer f, $[a,b]$ aralığı üzerinde artan ise f, $[a,b]$ aralığında sınırlı salınımlı ve $V_a^b\ f = f(b) - f(a)$ şeklinde yazılır.

$[a,b]$ aralığının bir bölüntüsü $\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ olsun.

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f\,(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(b) - f(a)$$

toplamını göz önüne alalım. Bu toplamın teleskobik durumundan, $[a,b]$ aralığının her bölüntüsü için aynıdır. Böylece,

$$V_a^b f = f(b) - f(a) < \infty$$

olur. Böylece, f, $[a,b]$ aralığında sınırlı salınımlıdır.

Benzer şekilde f, $[a,b]$ aralığında azalan ise $V_a^b f = f(a) - f(b)$ olur (Gordon, 2002).

Örnek 3.1.4

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \text{ irrasyonel ise} \\ 1 & , x \text{ rasyonel ise} \end{cases}$$

ile tanımlanan f fonksiyonu herhangi bir aralık için sınırlı salınımlı değildir.

$n > 0$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olsun. $[a,b]$ aralığı $\mathbb{R}$ de kapalı bir aralık olsun. $[a,b]$ nin bir bölüntüsü $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_{n+2}\}$ alalım. Öyle ki,

$$V_a^b f \geq \sum_{i=1}^{n+2} |f(x_i) - f\,(x_{i-1})|$$

dir. $x_0 = a$ ile tanımlansın. Biz iki reel sayı arasında bir rasyonel sayı ve bir irrasyonel sayının olduğunu biliyoruz. x_1 'i a ile b arasında bir irrasyonel sayı olarak alalım. x_2 'yi, x_1 ve b arasında bir rasyonel sayı olarak alalım. Bu şekilde devam edersek, x_{2i+1} 'i, x_{2i} ve b arasında irrasyonel sayı ve x_{2i} 'yi x_{2i-1} ve b arasında rasyonel sayı olarak alalım. Sonuç olarak, $x_{n+2} = b$ dir. Böylece, a ile başlayan ve daha sonra b ile bitenekadar rasyonel ve irrasyonel sayılar arasındaki dönüşümlü bir bölüm oluşturduk. Şimdi, f nin $[a,b]$ aralığı üzerindeki bildiğimiz salınımı,

$$\sum_{i=1}^{n+2} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

toplamını göz önüne alalım. Böylece,

$$\begin{aligned}
V_a^b f &\geq \sum_{i=1}^{n+2} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\
&\geq \sum_{i=2}^{n+1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\
&= |f(x_2) - f(x_1)| + ... + |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \\
&= |1 - 0| + |0 - 1| + ... + |1 - 0| \\
&= 1 + 1 + ... + 1 \\
&= n
\end{aligned}$$

Böylece, $V_a^b f$ isteğe bağlı olarak büyük, bu yüzden $V_a^b f = \infty$ dur (Gordon, 2002).

Teorem 3.1.7 (Sınırlı Salınımlı Fonksiyonların Cebirsel Özellikleri)

$[a, b]$ aralığı üzerinde f ve g sınırlı salınımlı fonksiyonlar olsun. Bu taktirde,

1. f, $[a, b]$ üzerinde sınırlıdır.
2. f, $[a, b]$ nin her kapalı alt aralığında sınırlı salınımlıdır.
3. k bir sabit olmak üzere kf, $[a, b]$ üzerinde sınırlı salınımlıdır.
4. $f + g$ ve $f - g$, $[a, b]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlıdır.
5. fg, $[a, b]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlıdır.
6. Eğer $\frac{1}{g}$, $[a, b]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlı ise $\frac{f}{g}$, $[a, b]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlıdır (Gordon, 2002)

Örnek 3.1.5

Eğer $f : [a, b] \to \mathbb{R}, (a, b)$ nin her kapalı alt aralığında sınırlı salınımlı ise, $[a, b]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlı olabileceği anlamı çıkmaz.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & , x \neq 1 \text{ ise} \\ 0 & , x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon $(0, 1)$ aralığı üzerinde ve $(0, 1)$ in her kapalı altaralığı üzerinde artandır. Eğer $f, (0, 1)$ aralığı üzerinde artan ise f, $(0, 1)$ aralığı üzerinde sınırlı salınımıdır. Oysa, $x = 1$ köşe asimptotu olduğundan 1 'e yakın bölüm noktaları seçerek istediğimiz kadar büyük $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ toplamını oluşturabiliriz. Böylece, $V_0^1 f = \infty$ ve f, $[0, 1]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlı değildir (Gordon, 2002).

Örnek 3.1.6

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & , x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & , x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanan f fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlı değildir. $[0,1]$ aralığının bir bölüntüsünü alalım. Genelliği kaybetmeksizin bölüm noktalarının sayısının çift olduğunu varsayalım. Dolayısıyla n çifttir. Aşağıdaki gibi bölüntü,

$$x_n = 1,\ x_{(n-(2k+1)} = \frac{1}{k+3},\ x_{(n-2k)} = \frac{2}{2k+3},\ k = 1, 2, ... \text{ için } x_0 = 0.$$

olsun. O halde,

$$\begin{aligned} V_0^1 f &\geq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\geq \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} |f(x_{2i+1}) - f(x_{2i})| \end{aligned}$$

dir. Bu demektir ki, toplamdan her diğer aralığı kaldırırız. Kalan aralıklarda, bu fonksiyonu bazı uygun özelliklere sahiptir. Şimdi, düşünülen aralıkların formu $\left[\frac{1}{k+3}, \frac{2}{2k+3}\right]$ dir. Ayrıca dikkat edelim ki, $\left|f(\frac{2}{2k+3})\right| = \sqrt[3]{\frac{2}{2k+3}}$ ve $f(\frac{1}{k+3}) = 0$ dır. $\sqrt[3]{x}$ artan bir fonksiyon, f artan veya azalan olduğu zaman, $\sin(\frac{\pi}{2})$ etkileyen olduğundan tek bileşendir. Sinüs fonksiyonunun nasıl davrandığını bilerek $\left[\frac{1}{k+3}, \frac{2}{2k+3}\right]$ formunun her aralığı üzerinde f nin monoton olduğunu görebiliriz. Böylece,

$$\begin{aligned} V_0^1 f &\geq \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} |f(x_{2i}) - f(x_{2i-1})| \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left| f(\frac{1}{k+3}) - f(\frac{2}{2k+3}) \right| \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left| \sqrt[3]{\frac{2}{2k+3}} \right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2k+3}} \end{aligned}$$

için dikkat edelim ki her terim bir öncekinden küçüktür. Çünkü k artarken payda büyür. Bu yüzden,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2k+3}} &\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k+3}} \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \end{aligned}$$

bu $p-$serisi, $p = \frac{1}{3}$ için ıraksaktır. Yeterince büyük n ler seçersek, $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2k+3}}$ toplamını büyük yapmak anlamına gelir. Böylece $V(f,[0,1]) = \infty$ dur. Dolayısıyla, fonksiyon sürekli olmasına rağmen $[0,1]$ aralığında sınırlı salınımlı değildir (Gordon, 2002).

3.2 Aralık Fonksiyonları

$[a,b] \equiv a \leq x \leq b$ temel sonlu aralığının X ile ifade edildiğini varsayalım. $a \leq c \leq x \leq d \leq b$ ile tanımlanan $[c,d]$ alt aralığını da I ile ifade edelim. $I = [c,d]$ aralığı $c \leq x \leq d$ kapalı aralıklar ile gösterilmesine rağmen, I aralığının kapalı, açık yada yarı açık olması önemsizdir.

Bir aralık fonksiyonunu yada $f\,(I)$ aralık fonksiyonunun, $[a,b]$ aralığının bütün alt aralıkları için bir çok değerli olabilir. Şimdi aralık fonksiyonu için bazı özelliklerinden bahsedeceğiz. $g(x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde sınırlı nokta fonksiyonu olsun. Verilen $g(x)$ için aşağıdaki aralık fonksiyonları ortaya çıkar.

(1) $c \leq x \leq d$ için $f\,(I) = g(x)$

(2a) $x \in [c,d]$ için $f(I) = \sup g(x)$

(2b) $x \in [c,d]$ için $f(I) = \inf g(x)$

(3) $f(I) = g(d) - g(c)$

(4) $f(I) = |g(d) - g(c)|$

(5) $f(I) = [c,d]$ aralığı üzerinde,

$$g(x)\ fonksiyonunun\ salınımı = \sup\left[|g(x_1) - g(x_2)| : x_1, x_2 \in [c,d]\right] = \omega\,(g; I) = I$$

da kapsanan bütün I' ler için (4) integral fonksiyonunun supremumudur.

(6) $x \in [c,d]$ için $f(I) = g(x)(d-c) = g(x)l\,(I)$

(6a) $f(I) = (\sup g(x) \in [c,d])(d-c) = M(d-c)$

(6b) $f(I) = (\inf g(x) \in [c,d])(d-c) = m(d-c)$

(6c) $f(I) = g(c)(d-c)$ veya $f(I) = g(d)(d-c)$

(7) $f(I) = (g(d) - g(c))\,/\,(d-c)$ türevleri ile bağlantılıdır (Hildebrandt, 1963).

Tanım 3.2.1 (Toplamsal, Üstten Toplansal, Alttan Toplamsal)

Sonlu sayıda alt aralıkları $I_1, I_2, ..., I_k$, dolayısıyla $I = I_1 + I_2 + ... + I_k$ olan herhangi bir I aralığının her bölüntüsü için $f(I) = \sum_{i=1}^{k} f(I_i)$ ise aralıkların tek değerli fonksiyonuna toplamsaldır denir. Aynı şartlar altında $f(I) \leq \sum_{i=1}^{k} f(I_i)$ ise $f(I)$ tek değerli fonksiyonuna üsten yarı toplamsaldır denir. Eğer $f(I) \geq \sum_{i=1}^{k} f(I_i)$ ise $f(I)$ tek değerli fonksiyonunun alttan yarı toplamsal olduğu söylenir. Eğer $f(I)$ toplamsal ise $|f(I)|$ üstten toplamsaldır. Belirsiz Riemann İntegrali, aralıkların bir toplamsal fonksiyonudur. Örnek (6a) alttan yarı toplamsal ve (6b) üstten yarı toplamsaldır. Eğer $f(I)$, $[a,b]$ nin aralıkların toplamsal fonksiyonu ise $f(I)$, $g(x) = f[a,x]$ nokta fonksiyonu tarafından tanımlanır. Çünkü,

$$f[c,d] = f[a,d] - f[a,c] = g(d) - g(c)$$

dir (Hildebrandt, 1963).

Tanım 3.2.2 (Aralık Fonksiyonunun İntegrali)

$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ olmak üzere $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ kümesi $[a,b]$ aralığının bir bölüntüsü olsun. Bu bölüntüyü $I : [x_{i-1} \leq x \leq x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ aralıkları ile gösterirsek σ yı $\sigma = \{I_1, I_2, ..., I_n\}$ şeklinde de yazabiliriz.

Eğer $\forall x_i \in \sigma_2 \Rightarrow x_i \in \sigma_1$ ise yani $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$ ise σ_1, σ_2 den daha ince veya σ_1 'e σ_2 nin incelmesi denir. Bölüntüyü aralıklar kümesi olarak düşünürsek; eğer σ_1 in her aralığı σ_2 deki bazı aralıkların bir alt aralığı ise σ_1, σ_2 den daha incedir denir. Bu durumda $\sigma_1 \supseteq \sigma_2$ ise $\sigma_1 \geq \sigma_2 \Leftrightarrow \sigma_1$, σ_2 den daha incedir şeklinde gösterilecektir.

Örnek 3.2.1

$[0,1]$ aralığının $\sigma_1 = \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\right\}$ ve $\sigma_2 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ parçalanmaları için $\sigma_2 \subset \sigma_1$ olduğundan σ_1, σ_2 nin bir incelmesidir ve $|\sigma_1| = \frac{1}{6} < \frac{1}{3} = |\sigma_2|$ dir. Gerçekten de,

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\right\} \\
&= \left\{\left[0, \frac{1}{6}\right], \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right], \left[\frac{5}{6}, 1\right]\right\} \\
&= \{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\} \\ &= \left\{\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right\} \\ &= \{I_1, I_2, I_3\}\end{aligned}$$

olup, $\forall x_i \in \sigma_2 \Rightarrow x_i \in \sigma_1$ ise $\sigma_2 \subset \sigma_1$ ve $\forall J_i \in \sigma_1 \Rightarrow J_i \subset I_i \in \sigma_2$ dir. Gerçekten de, $J_1 \subset I_1,\ J_2 \subset I_1,\ J_3 \subset I_2,\ J_4 \subset I_2,\ J_5 \subset I_3,\ J_6 \subset I_3$ olduğu açıktır.

Bir boyutlu uzaylar için genellikle σ 'yı alt bölümlerin noktaları tarafından verildiğini kabul etmek daha uygundur. Hem σ_1, hemde σ_2 deki lineer sırada düzenlenmiş bölünmüş noktaların tümü $\sigma_1 + \sigma_2$ ile gösterilecektir.

Tanım 3.2.3

R, A kümesi üzerinde bir bağıntısı olsun. Eğer R bağıntısı geçişken ve compositive ise yani herhangi iki $x_1, x_2 \in A$ için $x_3 R x_1$ ve $x_3 R x_2$ olacak şekilde bir x_3 elemanı varsa A kümesine yönlendirilmiş küme denir. İki farklı yolla $[a, b]$ aralığının bölüntüsü üzerinde bir yönlendirilmiş küme oluşturmak mümkündür.

(a) Bir metrik veya norm tanımlayarak:

$|\sigma| = \max |x_i - x_{i-1}|$ veya $|\sigma|$, I_i ' lerin uzunluklarının maksimumu olmak üzere R bağıntısı,

$$\sigma_1 R \sigma_2 \equiv |\sigma_1| \leq |\sigma_2|$$

şeklinde tanımlanabilir.

(b) Küme kapsamı ile:

Eğer $\sigma_1 \supseteq \sigma_2$ ise yani , σ_1 , σ_2 den daha ince ise R bağıntısı,

$$\sigma_1 R \sigma_2 \equiv \sigma_1 \geq \sigma_2$$

şeklinde tanımlanabilir.

Herhangi bir $f(I)$ aralık fonksiyonu ve $[a, b]$ nin bir σ bölüntüsü için,

$$\sigma = \{I_1, I_2, ..., I_n\}$$

olmak üzere, $g(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} f(I_i)$ fonksiyonu verilsin. Yukarıda verilen sıralı bölüntülerinin iki farklı metodu ile aralık fonksiyonlarının integrali iki şekilde tanımlanmaktadır.

Eğer,

$$\lim_{|\sigma| \to 0} g(\sigma) = \lim_{|\sigma| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(I_i)$$

limiti varsa, $[a,b]$ aralığı üzerindeki $f(I)$ aralık fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerindeki bir norm integraline sahiptir denir ve $N\int_a^b f(dI)$ integrali ile gösterilir (Hildebrandt, 1963).

Eğer,

$$\lim_{|\sigma|} g(\sigma) = \lim_{|\sigma|} \sum_i f(I_i)$$

limiti ard arda gelen alt bölüntüler anlamında varsa $[a,b]$ aralığı üzerindeki $f(I)$ fonksiyonuna bir $\sigma-$integraline sahiptir denir ve $\sigma \int_a^b f(dI)$ integrali ile gösterilir (Hildebrandt, 1963).

$\int_a^b g(x)dx$ Riemann İntegrali, $(6) : f(I) = g(x)(d-c)$, $c \leq x \leq d$ aralık fonksiyonuna dayanan bir norm integralidir ve $\int_a^{\bar{b}} g(x)dx$ ve $\int_{\bar{a}}^b g(x)dx$ şeklinde verilen alt ve üst darboux integralleri sırasıyla $(6a) : f(I) = (\sup g(x) \in [c,d])(d-c) = M(d-c)$ ve $(6b) : f(I) = (\inf g(x) \in [c,d])(d-c) = m(d-c)$ deki aralık fonksiyonlarına dayanan bir $\sigma-$integralidir. Açıkcası $f(I)$ toplamsal ise her σ için,

$$\sum_{|\sigma| \to 0} f(I) = f(X)$$

olur. Dolayısıyla, $\int_a^b f(dI)$ vardır ve $f(X)$ değerini alır.

Dikkat edilmelidir ki, eğer $[a,b]$ aralığı üzerinde $g(x)$ bir nokta fonksiyonu ve

$$f(I) = |g(d) - g(c)|$$

ise $f(I)$ üstten yarı toplamsaldır. Öyle ki, Eğer $g(x)$ sınırlı salınımlı bir fonksiyon ise g nin total salınımı $\sigma \int_a^b f(dI)$ dır. Sonuç olarak, $V_a^b g(x) = \int_a^b |dg|$ dir. Ayrıca,

$$F(I) = |g(d) - g(c)| = \left|\Delta_c^d g\right|$$

aralık fonksiyonu üst yarı toplamsal olduğundan $g(\sigma)$ 'nin $\sigma-$limiti var olduğundan total salınım ortaya çıkar. Yani, total salınım $\left|\Delta_c^d g\right|$ aralık fonksiyonunun $\sigma-$integralidir. Dolayısıyla $\sigma-$integralinin özellikleri uygulanır. Sonuç olarak $[a,b]$ aralığında g 'nin total salınımını $\int_a^b |df|$ gösterimi ile gösterilir.

$[a,b]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlı herhangi bir fonksiyon

$$|f(x) - f(a)| \leq v(x) \leq \int_a^b |df|$$

olduğundan sınırlıdır. Monoton azalmayan (artmayan) fonksiyonlar açıkca sınırlı salınımlıdır ve $\int_a^b |df| = |f(b) - f(a)|$ dır. Sonuç olarak, $\sum_i a_i \; f_i(x)$ monoton azalmayan fonksiyonun herhangi bir lineer bileşeni sınırlı salınımlıdır.

Teorem 3.2.1

$[a,b]$ doğrusal aralığı üzerinde sınırlı salınımlı her fonksiyon iki monoton azalmayan fonksiyonun farkı olarak yazılabilir (Hildebrandt, 1963).

İspat.

$[a,x]$ 'deki herhangi bir σ için, $\left(x'_{i-1}, x'_i\right)$, $\Delta f \geq 0$ olacak şekilde σ'nın aralıkları olmak üzere,

$$P(\sigma; a, x) = \sum_i \left(f(x'_i) - f(x'_{i-1})\right)$$

olduğunu varsayalım. $\left(x''_{i-1}, x''_i\right)$, $\Delta f \leq 0$ olacak şekilde σ'nın aralıkları olmak üzere,

$$N(\sigma; a, x) = -\sum_i \left(f(x''_i) - f(x''_{i-1})\right)$$

olsun. $P(\sigma; a, x)$ ve $N(\sigma; a, x)$ 'ın her ikiside σ 'ya göre monoton azalmayandır ve eğer f, $[a,b]$ üzerinde sınırlı salınımlı ise σ 'ya göre limit alırsak $P(\sigma; a, x)$ ve $N(\sigma; a, x)$ için σ 'ya göre üst sınırları vardır. Bunlar $P(a,x)$ ve $N(a,x)$ dir. Şimdi her σ için,

$$P(\sigma; a, x) - N(\sigma; a, x) = f(x) - f(a)$$

ve

$$P(\sigma; a, x) + N(\sigma; a, x) = \sum_\sigma |\Delta f|$$

buluruz. σ 'ya göre limit alırsak,

$$P(a,x) - N(a,x) = f(x) - f(a)$$

ve

$$P(a,x) + N(a,x) = \int_a^x |df|$$

çıkar ve $P(a,x) = p(x)$ ve $N(a,x) = n(x)$ dir.

Sonuç olarak,

$$\int_a^x |df| = p(x) + n(x)$$

olmak üzere,

$$f(x) - f(a) = p(x) - n(x)$$

formulasyonuna sınırlı salınımlı fonksiyonların Jordan ayrışımı denir. $p(x)$ ve $n(x)$ fonksiyonlarına, $f(x)$ fonksiyonunun pozitif ve negatif salınımı denir. Yukarıdaki yaklaşım bir fonksiyonun sınırlı salınımını verildiği için $p(x)$ ve $n(x)$ fonksiyonlarının diğer bir tanımınıda verir. π, $[a,x]$ 'in $I_i = \left[x_i', x_i''\right]$, $i = 1, 2, ..., m$ olmak üzere ayrık alt aralıklarının sonlu sayısını göstersin. $[a,x]$ 'in alt aralıklarının mümkün olan bütün π kümesi için,

$$p(x) = \sup \sum_i \left(f(x_i') - f(x_i'')\right)$$

ve

$$n(x) = -\inf \sum_i \left(f(x_i') - f(x_i'')\right)$$

dir. ■

Teorem 3.2.2

$f(x)$ in $[a,b]$ aralığında sınırlı salınımlı olması için gerek ve yeter şart $[a,b]$ nin örtüşmeyen aralıkların sonlu kümeleri $\pi = (I_1, I_2, ..., I_m)$ nin bir fonksiyonu olarak,

$$G(\pi) = \sum_i (f(x_i') - f(x_i''))$$

sınırlı olmasıdır. f 'nin $[a,b]$ aralığında total salınımı,

$$\sup G(\pi) - \inf G(\pi)$$

dir. Burada, $\sup G(\pi)$, $G(\pi)$ 'nin $[a,b]$ aralığı üzerinde pozitif salınımı ve $\inf G(\pi)$, $G(\pi)$ 'nin negatif salınımıdır. Jordan ayrışımının $p(x)$ ve $n(x)$ fonksiyonları aşağıdaki özelliklerle açıklanır (Hildebrandt, 1963).

f, $[a,b]$ aralığında sınırlı salınımlı ve eğer

$$f(x) = p_1(x) - n_1(x),\ p_1(a) = n_1(a) = 0$$

ve $p_1(x)$ ve $n_1(x)$ monoton azalmayan ise, bu taktirde $p_1(x) - p(x)$ ve $n_1(x) - n(x)$ in her ikiside $[a,b]$ üzerinde pozitif veya sıfır monoton azalmayan fonksiyondur.

$[a,b]$ nin her alt aralığı için $\Delta n_1 \geq \Delta n$ ve $\Delta p_1 \geq \Delta p$ denktir. $[a,b]$ nin her $[c,d]$ aralığı ve her $\varepsilon > 0$ için,

$$p(d) - p(c) - \varepsilon \leq \sum_\pi \Delta f \leq p(d) - p(c)$$

olacak şekilde $[c,d]$ nin ayrık aralıklarının bir π kümesi vardır. O halde,

$$f(x) - f(a) = p_1(x) - n_1(x)$$

olduğundan,

$$\sum_{\pi} \Delta f = \sum_{\pi} \Delta p_1 - \sum_{\pi} \Delta n_1 \leq \sum_{\pi} \Delta p_1 \leq p_1(d) - p_1(c)$$

dir. Sonuç olarak, her $\varepsilon > 0$ için,

$$p_1(d) - p_1(c) \geq p(d) - p(c) - \varepsilon$$

veya her $[c,d]$ aralığı için $\Delta p_1 \geq \Delta p$ olur. Benzer şekilde $\Delta n_1 \geq \Delta n$ dir (Hildebrandt, 1963).

Teorem 3.2.3

Eğer $f(x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde sınırlı salınmlı ise $p(a) = 0$ ve her $[c,d]$ aralığı için $\Delta p \geq \Delta f$ olacak şekilde $p(x)$ minimal monoton azalmayan fonksiyondur ve $n(x)$, $-f(x)$ 'e göre aynı özelliğe sahiptir. Her $[c,d]$ aralığı için eğer $\Delta p_1 \geq \Delta f$ ise bütün aralıklar için $\Delta n_1 = \Delta(p_1 - f) \geq 0$ öyleki $n_1(x)$ monoton azalmayan ve $f(x) - f(a) = p_1(x) - n_1(x)$ dir. Sonuç olarak $\Delta p_1 \geq \Delta p$ dir (Hildebrandt, 1963).

Teorem 3.2.4

$[a,b]$ aralığında sınırlı salınımlı her fonksiyon Riemann anlamında integrallenebilirdir.

İspat.

f sınırlı salınımlı olsun. f fonksiyonu monoton artan iki fonksiyonun farkı şeklinde yazılabilir. $f = g - h$ olsun. $[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu monoton artan(veya azalan) ise f fonksiyonu $[a,b]$ de Riemann anlamında integrallenebilir olduğundan g ve h fonksiyonları integrallenebilirdir. O halde $g - h$ integrallenebilirdir. Dolayısıyla f integrallenebilirdir (Balcı, 2003).

3.3 Sınırlı Salınımlı Fonksiyonların Sürekliliği

Tanım 3.3.1

Bir monoton fonksiyonun süreksizliği birinci çeşittir. Yani, her x için $f(x+0)$ ve $f(x-0)$ vardır ve en fazla sayılabilir sayıdadır. Dolayısıyla, herhangi bir sınırlı salınımlı fonksiyon $f(x+0)$ ve $f(x-0)$ limitlerinin var olduğu sayılabilir sayıda noktalar hariç süreklidir. Ayrıca,

$$v(x) = \int_a^x |df|$$

total salınım fonksiyonu bir aralık fonksiyonunun bir integrali olduğu için $|\Delta f|$ nin süreksizliğini yansıtır. Yani, eğer $\sigma\int_a^b f(dI)$ varsa, $[a,b]$ aralığındaki her x noktası ve $d>0$ için,

$$\lim_{d\to 0}(f[x-d,x]-\sigma\int_{x-d}^{x} f(dI)) = \lim_{d\to 0}(f[x,x+d]-\sigma\int_{x}^{x+d} f(dI)) = 0$$

olduğundan,

$$v(x+0)-v(x) = |f(x+0)-f(x)|$$

ve

$$v(x)-v(x-0) = |f(x)-f(x-0)|$$

elde ederiz. Eğer $f(x)$ sürekli sınırlı salınımlı bir fonksiyon ise $v(x)$, $p(x)$ ve $n(x)$ süreklidir.

$f(x)$ sınırlı salınımlı ise Teorem 3.1.7 'nin (3) özelliğinden tüm c sabitleri için $c.f(x)$ de sınırlı salınımlıdır ve

$$\int_a^b |dcf| = |c|\int_a^b |df|$$

olduğu açıktır. Ayrıca f ve g sınırlı salınımlı ise Teorem 3.1.7 'nin (4) özelliğinden $f+g$ sınırlı salınımlıdır ve

$$\int_a^b |d(f+g)| \le \int_a^b |df| + \int_a^b |dg|$$

dır.

Bu ifadeler ile $[a,b]$ aralığındaki sınırlı salınımlı fonksiyonların uzayının lineer olduğunu görürüz (Hildebrandt, 1963).

Teorem 3.3.1

Eğer $f_1(x)$ ve $f_2(x)$, $[a,b]$ aralığında sınırlı salınımlı iseler $f_1(x).\ f_2(x)$ de aynı özelliğe sahiptir.

$$\int_a^b |d(f_1.f_2)| \le M_1\int_a^b |df_2| + M_2\int_a^b |df_1|$$

dir. Burada $M_i = \sup\{[|f_i(x)|\,, x\in[a,b]]\,, i=1,2.\}$ dir (Hildebrandt,1963).

Teorem 3.3.2

Eğer $f(x)$, $[a,b]$ aralığında sınırlı salınımlı fonksiyon ise $[a,b]$ aralığındaki $|f(x)|$ de ayrıca sınırlı salınımlı fonksiyondur ve

$$\int_a^b |df| \leq \int_a^b |d(|f|)|$$

dir (Hildebrandt, 1963).

Teorem 3.3.3

Eğer $||f|| = |f(a)| + \int_a^b |df|$ yazarsak, sınırlı salınımlı fonksiyon uzayların bir normlu uzay olur. f_1 ve f_2 fonksiyonları arasındaki uzaklık,

$$\delta(f_1, f_2) = |f_1(a) - f_2(a)| + \int_a^b |d(f_1 - f_2)|$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu tanım altında metrik ve norm özelliklerinin sağlandığı kolayca gösterilebilir.

$$\lim_n ||f_n - f|| = \lim_n (|f_n(a) - f(a)| + \int_a^b |d(f_n - f)| = 0$$

ifadesine denk olan $\lim_n f_n = f$ şartı yoluyla norm sınırlı salınımlı fonksiyon uzayının topolojisini verir. Bu norma göre yakınsaklık daha kuvvetli bir yakınsaklık tipidir. İlk olarak,

$\lim_n ||f_n - f|| = 0$ olmasının $\lim_n f_n(a) = f(a)$ yı gerektirdiği açıktır. Bu taktirde,

$$|f_n(x) - f(x) - f_n(a) - f(a)| \leq |f_n(a) - f(a)| + \int_a^x |d(f_n - f)| \leq ||f_n - f||$$

eşitsizliğinden $[a,b]$ aralığı üzerinde bu limit düzgün süreklidir.

$$\left| \int_a^x |df_n| - \int_a^x |df| \right| \leq \int_a^x |d(f_n - f)| \leq \int_a^b |d(f_n - f)|$$

eşitsizliğinden $[a,b]$ üzerinde

$$\lim_n \int_a^x |df_n| = \int_a^x |df|$$

limitinin düzgün olduğu çıkar. Bununla beraber, $\lim\limits_{n} \int\limits_{a}^{x} |d(f_n - f)| = 0$ limitine sahip olmaksızın $[a, b]$ aralığı üzerinde $\lim\limits_{n} f_n(x) = f(x)$ ve $\lim\limits_{n} \int\limits_{a}^{x} |df_n| = \int\limits_{a}^{x} |df|$ limitinin düzgün olduğunu görmek mümkündür. Çünkü $[0, 1]$ aralığı üzerinde $(m-1)/n < x \leq m/n$, $m = 1, 2, ..., n$ için $f_n(x) = m/n$ ve $f_n(0) = 0$ alırsak $f_n(x)$ monoton azalmayandır ve $\int\limits_{a}^{b} |df| = f_n(x)$ ve $\lim\limits_{n} f_n(x) = x$ $[0, 1]$ aralığında düzgündür. Fakat her n için $\int\limits_{a}^{b} |d(f_n - f)| = 1$ dir (Hildebrandt, 1963).

Teorem 3.3.4

$[a, b]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlı fonksiyonların $f_n(x)$ dizisi için $\lim ||f_m - f_n|| = 0$ olursa bu taktirde,

$$\lim_{n} ||f - f_n|| = 0$$

olacak şekilde sınırlı salınımlı bir $f(x)$ fonksiyonu vardır. Yani tanımlanan norma göre sınırlı salınımlı fonksiyonların uzayı tamdır.

Sınırlı salınımlı fonksiyonların uzayında yakınsaklık çeşitli şekillerde tanımlanabilir. Aşağıda bunlar verilecektir :

1. Norm Yakınsaklık :

   $$\lim_{n} ||f_n - f|| = \lim_{n}(|f_n(a) - f(a)| + \int_{a}^{b} |d(f_n - f)|) = 0$$

   dır.

2. Düzgün Yakınsaklık : $[a, b]$ aralığı üzerinde düzgün olarak $\lim\limits_{n} f_n(x) = f(x)$ ve $[a, b]$ aralığı üzerinde düzgün olarak $\lim\limits_{n} \int\limits_{a}^{x} |df_n| = \int\limits_{a}^{x} |df|$ dir. Sınırlı salınımlı $f_n(x)$ fonksiyon dizisinin $f(x)$ e düzgün yakınsaklığı $f(x)$ in sınırlı salınımlı olmasını gerektirmez. Örneğin,

   $$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \text{ ise} \\ x. \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & , \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

   şeklinde tanımlanan $f_n(x)$ fonksiyonlarının her biri $[0, 1]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlı ve $f(x) = x. \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. Fakat, $f(x)$, $[0, 1]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlı değildir.

3. $[a, b]$ aralığındaki her x için düzgün olarak $\lim\limits_{n} f_n(x) = f(x)$ dir ve

   $$\lim_{n \to \infty} \int_{a}^{b} |df_n| = \int_{a}^{b} |df|$$

dir. Dolayısıyla $[a,b]$ aralığındaki her x için

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x |df_n| = \int_a^x |df|$$

dir.

4. $[a,b]$ aralığndaki her x için $\lim_n f_n(x) = f(x)$; $\int_a^b |df_n|$, n 'ye göre sınırlıdır (Hildebrandt, 1963).

3.4 Riemann Stieltjes İntegralleri

Riemann Stieltjes integrali, Riemann integralinin önemli bir genelleştirilmesidir. $f(x)$ ve $g(x)$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ kapalı aralığında tanımlı sınırlı fonksiyonlar olsun.

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

$[a,b]$ kapalı aralığının bir parçalanışı olsun. $[a,b]$ nin herhangi bir $\sigma = \{I_1, I_2, ..., I_n\}$ ayrışımı için $I_k = (x_{k-1}, x_k)$ içinde herhangi bir $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$ noktası seçip,

$$S(f,g,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\left(g(x_k) - g(x_{k-1})\right)$$

toplamını oluşturalım.

$$\lambda = \max\left(x_{k-1}, x_k\right) \to 0$$

olduğunda, $S(f,g,\sigma)$ toplamı $[a,b]$ kapalı aralığının parçalanışlarından ve z_k ların seçiminden bağımsız olarak

$$\lim_{|\sigma|\to 0} S(f,g,\sigma)$$

var ise o zaman bu limite $f(x)$ fonksiyonunun $g(x)$ e göre Riemann-Stieltjes integrali denir ve

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

sembolüyle gösterilir. f fonksiyonuna integrallenen, g fonksiyonuna integralleyen denir.

$$\lim_{|\sigma|\to 0} S(f,g,\sigma) = \int_a^b f dg$$

ifadesi, her bir $\varepsilon > 0$ için, $|\sigma| < \delta$ olan tüm ayrışımlar için ve $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$ nın tüm seçimleri için

$$\left|\int_a^b f dg - \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\left(g(x_k) - g(x_{k-1})\right)\right| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ var olması anlamına gelir (Apostol, 1973).

Teorem 3.4.1

Eğer f, $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir ve g, $[a,b]$ üzerinde sürekli ise o zaman f, $[a,b]$ üzerinde g 'ye göre Stieltjes integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f g'$$

olur.

$\int_a^b f dg$ Riemann-Stieltjes integralinin varlığı için g 'nin $[a,b]$ üzerinde sınırlı değişimli bir fonksiyon olması durumuna genişletilebilir. Eğer $g \in BV[a,b]$ ise o zaman $g = g_1 - g_2$ olur. Burada g_1 ve g_2, $[a,b]$ üzerinde artmayan fonksiyondur ve g_1 ve g_2 sürekli olup g de süreklidir. Yine, eğer $\int_a^b f dg_1$ ve $\int_a^b f dg_2$ var ise o zaman $\int_a^b f dg$ vardır ve

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f dg_1 - \int_a^b f dg_2$$

dir.

Teorem 3.4.2

$[a,b]$ üzerinde tanımlı $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları için $N\int_a^b f dg$ integrali varsa $\sigma\int_a^b f dg$ integralide vardır (Hildebrand, 1963).

Şimdi $C[a,b]$ üzerinde her sınırlı doğrusal fonksiyonelin bir $g \in BV[a,b]$ fonksiyonuna göre bir Riemann-Stieltjes integrali olarak temsil edilebileceğini gösterelim.

Teorem 3.4.3

Eğer F, $C[a,b]$ üzerinde sınırlı doğrusal bir fonksiyonel ise o zaman öyle bir $g \in BV[a,b]$ fonksiyonu vardır ki,

$$F(f) = \int_a^b f dg \ , \forall f \in C[a,b]$$

ve

$$||F|| = V_a^b(g)$$

olur (Riesz, 1909).

Teorem 3.4.4

$[a, b]$ aralığında sınırlı salınımlı her $g(x)$ fonksiyonu için $\int_a^b f dg$ Riemann-Stieltjes integrali varsa $f(x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde süreklidir (Hildebrand, 1963).

3.5 İki Değişkenli Aralık Fonksiyonları

J, $a_1 \leq x_1 \leq b_1$, $a_2 \leq x_2 \leq b_2$ temel dikdörtgenini veya $[a_1, b_1; a_2, b_2]$ aralığını göstersin. $a_1 \leq c_1 < d_1 \leq b_1$, $a_2 \leq c_2 < d_2 \leq b_2$ olmak üzere herhangi alt dikdörtgeni veya kenarları J ninkine paralel olan J nin alt aralıklarını $I = [c_1, d_1; c_2, d_2]$ ile gösterelim. $F(I)$ aralık fonksiyonu J nin her I aralığına bir veya daha fazla sayıda sonlu reel sayıları karşılık getirir. Genel olarak herhangi bir I için $F(I)$ nın değerleri I nın iç noktalarına veya I nın sınırına bağlı olacaktır. Bir boyutlu durumlara paralel olan aralık fonksiyonlarına bazı örnekler vereceğiz.

(1) $F(I) = (d_1 - c_1)(d_2 - c_2)$; yani I nın alanı

(2) $F(I) = (f(d_1) - f(c_1))(g(d_2) - g(c_1))$, burada $f(x_1)$ ve $g(x_2)$, sırasıyla $[a_1, b_1]$ ve $[a_2, b_2]$ üzerinde tanımlı fonksiyonlardır.

(3) $F(I) = f(d_1, d_2) - f(c_1, c_2)$; $f(x_1, x_2)$, J üzerinde bir fonksiyondur.

(4) $F(I) = f(d_1, d_2) - f(c_1, d_2) - f(d_1, c_2) + f(c_1, c_2) = \Delta_{c_1}^{d_1} \Delta_{c_2}^{d_2} f(x_1, x_2)$, $f(x_1, x_2)$, J üzerinde bir fonksiyondur.

(5) $F(I) = \sup \left[\left| f(x_1'', x_2'') - f(x_1', x_2') \right| : (x_1', x_2') \in I \text{ ve } (x_1'', x_2'') \in I \right]$ yani, I üzerinde f nokta fonksiyonunun $\omega(f; I)$ salınımıdır (Hildebrandt, 1963).

Tanım 3.5.1 (Toplamsal, Üstten Toplansal, Alttan Toplamsal)

$F(I)$ aralık fonksiyonu verilsin. Eğer $F(I)$ tek değerli ve bir I aralığının herhangi σ nın alt aralıkları $I_1, I_2, ..., I_n$ aralıklarından oluşuyorsa $F(I)$ 'ya toplamsaldır denir ve $F(I) = \sum_{i=1}^{n} F(I_i)$ şeklinde yazılır. Aynı şartlar altında $F(I) \leq \sum_{i=1}^{n} F(I_i)$ ise $F(I)$ tek değerli fonksiyonuna üsten yarı toplamsaldır denir. Eğer $F(I) \geq \sum_{i=1}^{n} F(I_i)$ ise $F(I)$ tek değerli fonksiyonunun alttan yarı toplamsal olduğu söylenir. Eğer $F(I)$ toplamsal ise $|F(I)|$ üstten toplamsaldır.

$F(I)$ aralık fonksiyonunun toplamsal olduğunu göstermek için bir ağ tipinin alt bölüntüsü üzerindeki toplamsallığın sağlanması açıkca yeterlidir. Çünkü σ aralıklarının kenarlarını I nın sınırına genişleterek herhangi bir alt aralığı üzerine bir ağ ekleyebiliriz ve dahasonra σ yı oluşturan ağın bölünmüş aralıkları $I_1, I_2, ..., I_n$ ni tekrar oluşturabiliriz. Eğer $f(x_1, x_2)$, J üzerinde bir nokta fonksiyonu ise

$$F(I) = \Delta_{c_1}^{d_1} \Delta_{c_2}^{d_2} f = f(d_1, d_2) - f(c_1, d_2) - f(d_1, c_2) + f(c_1, d_1)$$

toplamsaldır. Tersine eğer $F(I)$ toplamsal ise $f(x_1, x_2) = F[a_1, x_1; a_2, x_2]$ nokta fonksiyonu $F(I) = \Delta_{c_1}^{d_1} \Delta_{c_2}^{d_2} f(x_1, x_2)$ anlamında $F(I)$ yı belirler (Hildebrandt, 1963).

Tanım 3.5.2

Tek değişkenli fonksiyonlardan iki yada daha fazla değişkenli fonksiyonlara geçerken, yani;

$f(x_1, x_2)$, $J = [a_1, b_1; a_2, b_2]$ aralığı veya dikdörtgeni üzerinde tanımlarsa, aralık fonksiyonunun seçimi ve sınırlı salınımlı fonksiyonun tanımı araştırmaların bakış açısına göre farklı formlarda ele alınmıştır. Eğer $I = [c_1, d_1; c_2, d_2]$ dikdörtgen ise

$$F(I) = |f(d_1, d_2) - f(c_1, c_2)| = |\Delta_{12} f|$$

birinci fark dizisi mümkündür. Yakından ilişkilendirdiğimizde bu I aralığı üzerinde f nin salınım fonksiyonudur. Yani ,

$$\omega(f; I) = \sup \left[\left| f(x_1^{''}, x_2^{''}) - f(x_1^{'}, x_2^{'}) \right| : (x_1^{'}, x_2^{'}) \in I \ \text{ ve } (x_1^{''}, x_2^{''}) \in I \right]$$

dır. İkinci olasılık, çift katlı fark, I nın bütün dört köşesini içerir. Yani,

$$F(I) = f(d_1, d_2) - f(c_1, d_2) - f(d_1, c_2) + f(c_1, c_2) = |\Delta_1 \Delta_2 f(I)| = |\Delta_2 \Delta_1 f(I)|$$

dır.

Tanım 3.5.3 (İki Boyutlu Sınırlı Salınımlı Fonksiyonlar)

Eğer $\sum\limits_{\sigma} F(I) = \sum\limits_{\sigma} |\Delta_1 \Delta_2 f(I)|$ toplamı J nin σ aralığına göre sınırlı ise

$$J = [a_1, b_1; a_2, b_2]$$

dikdörtgeni üzerinde $f(x_1, x_2)$ fonksiyonu J üzerinde sınırlı salınımlıdır. Burada eğer $I = [c_1, d_1; c_2, d_2]$ ise

$$F(I) = |\Delta_1 \Delta_2 f(I)| = |f(d_1, d_2) - f(c_1, d_2) - f(d_1, c_2) + f(c_1, c_2)|$$

dir. $\Delta_1 \Delta_2 f(I)$ aralık fonksiyonu toplamsal olduğundan $F(I) = |\Delta_1 \Delta_2 f(I)|$ aralık fonksiyonu J üzerinde üstten yarı toplamsaldır.

Her I için eğer $\Delta_1 \Delta_2 f(I) \geq 0$ ise $f(x_1, x_2)$ fonksiyonu "positively monotonely monoton" dur denir. $f(x_1, a_2)$ ve $f(a_1, x_2)$ fonksiyonları sırasıyla x_1 ve x_2 için monoton azalmayandır. $v(x_1, x_2)$ fonksiyonu "positively monotonely monoton" dur. Ayrıca bütün I lar için,

$$V(I) \pm \Delta_1 \Delta_2 f(I) = \int\limits_I |d_1 d_2 f| \pm \Delta_1 \Delta_2 f(I) \geq 0$$

olduğundan aralıkların fonksiyonu toplamsaldır. Bütün I lar için,

$$P(I) = \frac{1}{2}\left(V(I) + \Delta_1\Delta_2 f(I)\right)$$

ve

$$N(I) = \frac{1}{2}\left(V(I) - \Delta_1\Delta_2 f(I)\right)$$

aralık fonksiyonları toplamsal ve pozitiftir. Sonuç olarak,

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left[v(x_1, x_2) + \left(f\left(x_1, x_2\right) - f(a_1, x_2) - f(x_1, a_2) + f(a_1, a_2)\right)\right]$$

ve

$$n(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left[v(x_1, x_2) - \left(f\left(x_1, x_2\right) - f(a_1, x_2) - f(x_1, a_2) + f(a_1, a_2)\right)\right]$$

iki "positively monotonely monoton" fonksiyonları ortaya çıkar.

$p(x_1, x_2)$ ve $n(x_1, x_2)$ fonksiyonları $G(I) = \Delta_1\Delta_2 f(I)$ için $P(I)$ ve $N(I)$ da yapıldığı gibi $f\left(x_1, x_2\right) - f(x_1, a_2) - f(a_1, x_2) + f(a_1, a_2)$ fonksiyonlarının Jordan parçalanmasını etkiler.

Eğer $f(x_1, x_2)$, J üzerinde sınırlı salınımlı ve $f(x_1, a_2)$ ve $f(a_1, x_2)$ sırasıyla x_1 ve x_2 için sınırlı salınımlı ise bu taktirde $f(x_1, x_2)$, her bir x_2 için x_1 de, her bir x_1 için x_2 de sınırlı salınımlıdır (Hildebrandt, 1963).

3.6 İki Değişkenli Sınırlı Salınımlı Fonksiyonların Sürekliliği

İlk önce J üzerinde tanımlanan aralık fonksiyonunun süreklilik özelliklerini, bütün I lar için $F(I) \geq 0$ olmak üzere aralıklar üzerinde toplamsallığı göz önüne alalım. Eğer I_1, I_2 yi içerirse $F(I_1) \geq F(I_2)$ olur. Sonuç olarak, eğer $\lim\limits_{n} I_n = I$ olmak üzere I_n, I_{n+1} 'i kapsayacak şekilde I_n aralıklarının bir monoton dizisi varsa $\lim\limits_{n} F(I_n)$ vardır. Özellikle, eğer I, bir tek noktaya indirgenirse $\lim\limits_{n} F(I_n)$ vardır. Eğer biz kapsam yoluyla (x_1, x_2) bir sabit noktasını kapsayan aralıklara yönelirsek o zaman $\lim\limits_{I} F(I_n)$ vardır. Bütün (x_1, x_2) noktalarını içeren bütün I lar için,

$$\lim_{I} F(I_n) = \inf F(I)$$

dır. $F(I)$ pozitif ve toplamsal olduğundan dolayı herhangi bir $\varepsilon > 0$ için öyle ki $\lim\limits_{I \to (x_1, x_2)} F(I) > \varepsilon$ için (x_1, x_2) noktalarının sayısı sonludur. Eğer $\varepsilon = \frac{1}{n}$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

Teorem 3.6.1

Eğer $F(I)$, J üzerinde aralıkların bir pozitif değerli toplamsal fonksiyonu ise bu taktirde $\lim\limits_{I\to(x_1,x_2)} F(I) > 0$ olacak şekilde ki noktaların kümesi sayılabilirdir.

Bu teoremin sonucu, $\lim\limits_{I\to(x_1,x_2)} F(I) = 0$ şartıyla bir (x_1, x_2) noktasında $F(I)$ nın sürekliliğini tanımlarsak noktaların bir sayılabilir kümesinin dışında I nın bir fonksiyonu olarak $F(I)$ nın sürekli olduğunu ifade edebiliriz. Aralıklar kapsam tarafından yönlendirilmiştir.

(x_1, x_2) noktalarının, I aralığının sınırında olduğunu varsayabiliriz. Özellikle, içerilen bütün I nın en alt köşesi veya diğer üç köşesinin herhangi biri olarak sabitlenebilir. Eğer, $f(x_1, x_2) = F[a_1, x_1; a_2, x_2]$ nokta fonksiyonunu göz önüne alırsak ve I, $x_1' > x_1$ ve $x_2' > x_2$ olmak üzere $[x_1, x_1'; x_2, x_2']$ aralık ise, bu taktirde

$$F(I) = f(x_1', x_2') - f(x_1, x_2') - f(x_1', x_2) + f(x_1, x_2)$$

ve

$$\lim_{(x_1',x_2')\to(x_1+0,x_2+0)} F(I)$$

var olacaktır. $f(x_1, x_2)$ monotonely monoton olduğundan sırasıyla x_1 ve x_2 için $f(x_1, x_2 + 0)$ ve $f(x_1 + 0, x_2)$ vardır. Sonuç olarak,

$$\lim_{(x_1',x_2')\to(x_1+0,x_2+0)} f(x_1', x_2')$$

vardır. Aynı şekilde diğer $(x_1 - 0, x_2 + 0)$, $(x_1 + 0, x_2 - 0)$ ve $(x_1 - 0, x_2 - 0)$ üç çeyrek daireye ait limitler vardır. Sonuç olarak aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.6.2

Eğer $f(x_1, x_2)$, J üzerinde "positively monotonely monoton" ise bu taktirde J nin her (x_1, x_2) noktası için $f(x_1+0, x_2+0)$, $f(x_1-0, x_2+0)$, $f(x_1+0, x_2-0)$, $f(x_1-0, x_2-0)$ dört çeyrek daireye ait limitler vardır. Herhangi "positively monotonely monoton" fonksiyonu pozitif toplamsal aralık fonksiyonunun ortaya çıkmasına sebep olur.

3.7 İki Değişkenli Sınırlı Salınımlı Fonksiyonların Uzayı : BV2

Aşağıdaki ifadeler tek değişkenlilerdeki gibi ispatlanabilir.

(*i*) $\int\limits_J |cd_1d_2f| = |c| \int\limits_J |d_1d_2f|$ ile BV2 uzayı lineerdir ve $\int\limits_J |d_1d_2(f_1 + f_2)| \leq \int\limits_J |d_1d_2f_1| + \int\limits_J |d_1d_2f|$ dir.

(ii) $f(a_1,x_2)$ ve $f(x_1,a_2)$ sırasıyla x_1 ve x_2 ye göre sınırlı salınımlı olacak şekilde BV2 fonksiyonları alt uzayı olsun. Bu taktirde bu uzay lineerdir ve

$$||f|| = |f(a_1,a_2)| + \int_{a_1}^{b_1} |d_1 f(x_1,a_2)| + \int_{a_2}^{b_2} |d_2 f(a_1,x_2)| + \int_J |d_1 d_2 f|$$

normuna göre normlu uzaydır. $\lim_n ||f_n|| = 0$ olması J üzerinde düzgün olarak $\lim_n f(x_1,x_2) = 0$, J üzerinde x_1 'e göre düzgün olarak $\lim_n \int_{a_1}^{x_1} |d_1 f_n(x_1,a_1)| = 0$, x_2 'ye göre düzgün olarak $\lim_n \int_{a_2}^{x_2} |d_2 f_n(a_1,x_2)| = 0$ ve (x_1,x_2) ye göre düzgün olarak $\lim_n \int_{(a_1,a_2)}^{(x_1,x_2)} |d_2 f_n(a_1,x_2)| = 0$ olmasını gerektirir. Fakat bu şartlar $\lim_n ||f|| = 0$ olması için yeterli değildir.

(iii) Eğer $f_n(x_1,x_2) \in$ BV2 ve J üzerinde $\lim_n f_n(x_1,x_2) = f(x_1,x_2)$ ise bu taktirde $\int_J |d_1 d_2 f| \leq \underline{\lim}_n \int_J |d_1 d_2 f_n|$ dir (Hildebrandt, 1963).

3.8 İki Değişkenli Riemann Stieltjes İntegralleri

İki değişkenli Riemann Stieltjes İntegralleri, bir $J = [a,a';b,b']$ aralığı üzerinde tanımlanan $f(x,y)$ ve $g(x,y)$ gibi iki değişenli fonksiyonlara dayanan aralık fonksiyonunun integralidir. Burada

$$F(I) = f(x',y')\Delta_1\Delta_2 g(I)$$

dır. Ayrıca (x',y') bu aralığın herhangi bir noktasıdır ve

$$\Delta_1\Delta_2 g(I) = g(x_1,y_1) - g(x_1,y_2) - g(x_2,y_1) + g(x_2,y_2)$$

dir.

Bu şekilde bir $F(I), G(I)$ aralıkların toplamsal fonksiyonu olmak üzere $f(x',y')\,G(I)$ formundadır. Eğer $g(x,y)$ fonksiyonuna $h_1(x)+h_2(x)$ fonksiyonunu eklersek açıkcası $\Delta_1\Delta_2 g(I)$ değeri değişmez. Eğer $g(x,y)$,

$$\overline{g}(x,y) = g(x,y) - g(x,b) - g(a,y) + g(a,b)$$

ile değiştirilirse bu taktirde her I aralığı için

$$f(x',y')\Delta_1\Delta_2 g(I) = f(x',y')\Delta_1\Delta_2\overline{g}(I)$$

dır. Dolayısıyla integral özelliklerinden her x, y için $g(x,b) = g(a,y) = 0$ olduğunu elde edebiliriz.

Eğer $J = G(\sigma) = \sum\limits_{\sigma} F(I)$ nın σ altbölüntüsünün limitinin fonksiyonuna dayanan aralıkların integralinin tanımı bazı değişkenlerle değiştirilebilir.

İki değişkenli Riemann Stieltjes İntegralleri genel olarak $\int\limits_{j} f d_1 d_2 g$ şeklinde gösterilir. Örneğin, J üzerinde $f(x,y) = 1$ alınırsa, bu taktirde $\Delta_1 \Delta_2 g(J)$ değeri ile integrallerin açıkca var olduğu görülür. Eğer $g(x,y) = xy$ alınırsa, $\Delta_1 \Delta_2 g(I) = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$ double Riemann İntegralleri, eğer $g(x,y) = h_1(x) h_2(y)$ alınırsa $\Delta_1 \Delta_2 g(I) = (h_1(x_2) - h_1(x_1))(h_2(y_2) - h_2(y_1))$ double Riemann Stieltjes İntegralleri görülür (Hildebrant, 1963).

3.9 Sınırlı Salınımlı Fonksiyonlara Göre Riemann-Stieltjes İntegralleri

İki değişkenli Riemann Stieltjes integrallerinde alınan $g(x,y)$ fonksiyonu fonksiyonların herhangi bir özel sınıfına dahil değildir. $g(x,y)$ fonksiyonu J üzerinde sınırlı salınımlı fonksiyon olarak kabul edersek integrallerin ek özelliklerini elde ederiz. $g(x,y)$, $x = a$ veya $x = b$ için integrallerin ne varlığı ne de değeri etkilenmediğinden her x ve y için $g(a,y) = g(x,b)$ olacak şekilde $g(x,y)$ fonksiyonu normalleştirilmiş olarak alınacaktır. $\int\limits_{I} |d_1 d_2 g|$ ile belirlenen aralıkların fonksiyonunu $v(I)$ ile ve karşılık gelen $\int\limits_{(a,b)}^{(x,y)} |d_1 d_2 g|$ nokta fonksiyonunu $v(x,y)$ ile göstereceğiz.

Clarkson ve Adams (1933) tarafından sınırlı salınımlı $f(x,y)$ fonksiyonlarının çalışılması doğal olarak double stieltjes integrallerinin göz önüne alınmasına yol açtı. Riemann Stieltjes integrali,

$$\int_a^b f(x) d\phi(x) \tag{3.2}$$

sembolüyle tanımlanmıştır.

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \left[\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})\right], (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b,\ x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$$

verilen toplam (3.2) sembolüyle tanımlanır. Eğer altbölüntüsünün normu sıfıra yaklaştığı zaman, eğer bu toplam sonlu limite yaklaşıyorsa (3.2) limit olarak tanımlanır. Aksi halde, verilen bir $\phi(x)$ olmak üzere her sürekli $f(x)$ sınırlı salınımlı fonksiyonu için (3.2) in var olmasını sağlayan bir yeter koşul verilir. Pollard (1920) bu durumun aynı zamanda gerekli olduğunu göstermiştir. İki değişkenli fonksiyonlar için

Varsayalım ki, $f(x,y)$ ve $\phi(x,y)$, $R(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d)$ dikdörtgeni üzerinde tanımlı olsun. R, dikdörtgenin altbölümlerine,

$$x = x_i,\ y = y_i, (a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b) \text{ ve } c = y_0 < y_1 < ... < y_n = d$$

doğruların ağı tarafından bölünmüş olsun.

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \ , \ y_{i-1} \leq \eta_i \leq y_i \ \ (i = 1, 2, 3, ..., m \ ; \ j = 1, 2, 3, ..., n)$$

ξ_i, η_i eşitsizlikleri sağlayan herhangi bir sayı olsun.

$\forall i, j$ için,

$$\Delta_{11}\phi\left(x_i, y_i\right) = \phi\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right) - \phi\left(x_{i-1}, y_i\right) - \phi(x_i, y_{i-1}) + \phi\left(x_i, y_i\right)$$

olsun. Eğer,

$$S = \sum_{i,j=1}^{m,n} f(\xi_i, \eta_i).\Delta_{11}\phi\left(x_i, y_i\right)$$

toplamı altbölümlerin normu sıfıra yaklaşırken sonlu limite yaklaşıyorsa ϕ ye göre f nin integrali vardır denir. Bu limit sınırlı integral olarak isimlendirilir ve

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) d_x d_y \phi\left(x, y\right) \tag{3.3}$$

sembolüyle gösterilir. Yukarıdaki S toplamı S^* ile değiştirilirse,

$$S^* = \sum_{i,j=1}^{m,n} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}).\Delta_{11}\phi\left(x_i, y_i\right)$$

ξ_{ij}, η_{ij} aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan herhangi bir sayı olmak üzere

$$x_{i-1} \leq \xi_{ij} \leq x_i \ , \ y_{i-1} \leq \eta_{ij} \leq y_i \ \ (i = 1, 2, 3, ..., m \ ; \ j = 1, 2, 3, ..., n)$$

için bu limit var olduğunda sınırsız integral olarak isimlendirilir ve

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) d_x d_y \phi\left(x, y\right) \tag{3.4}$$

sembolüyle gösterilir. Açık bir şekilde (3.4) ün varlığı hem (3.3) ün varlığını hemde (3.2) eşitliğini ifade eder. Öte yandan (3.3) nin varlığı (3.4) ün varlığını gerektirmez (Ustina, 1969).

Bölüm 4

HAUSDORFF METODU

Hausdorff matrisleri ilk olarak Hurwitz ve Silverman (1917) tarafından $(C,1)$ Cesaro matrisleri ile yer değiştirebilen alt üçgensel matrisler olarak tanımlanmıştır. Daha sonra Hausdorff (1921) sonlu aralıkta moment problemi çözme işlemi sırasında bu problemi yeniden ele almış ve bu matrislerle ilgili bir çok özelliği göstermiştir. Bu matrisler Hausdorff matrisleri olarak adlandırılmaktadır.

Tanım 4.1 (Fark Operatörü)

Herhangi bir $x = (x_n) \in \omega$ dizisi ve $n \in \mathbb{N}^0$ için,

$$\Delta^0 x_n := x_n$$

$$\Delta x_n = x_n - x_{n+1}$$

ve $n \geq 1$ için,

$$\Delta^n x_n = \Delta(\Delta^{n-1} x_n) = \Delta^{n-1} x_n - \Delta^{n-1} x_{n+1}$$

şeklinde tanımlanan Δ operatörüne fark operatörü denir (Boos, 2000).

Hausdorff matrislerinde esas rolü aşağıda tanımlanan $\delta = (\delta_{nv})$ fark matrisi taşımaktadır.

Tanım 4.2 (Fark Matrisi)

$n, v \in \mathbb{N}^0$ için,

$$\delta_{nv} := \begin{cases} (-1)^v \begin{pmatrix} n \\ v \end{pmatrix} & , 0 \leq v \leq n \text{ ise} \\ 0 & , v > n \text{ ise} \end{cases}$$

elemanları ile tanımlanan

$$\delta = (\delta_{nv}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & -3 & 3 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

altüçgensel matrisine fark matrisi denir (Boos, 2000).

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sonsuz bir seri ve bu serinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun. Δ operatörü, (s_n) dizisine $m-$defa uygulanırsa,

$$\Delta^m s_n = \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} s_{n+v}$$

elde edilir. $n = 0$ için,

$$\Delta^m s_0 = \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} s_v$$

olur. Dolayısıyla,

$$t_m = \Delta^m s_0 = \delta s_m = \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} s_v$$

yazılır.

Teorem 4.1

$\delta\delta = I$ dır. Dolayısıyla, $t = \delta s \Rightarrow s = \delta t$ dir.

İspat.

$$\begin{aligned}
\Delta^m t_0 &= \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} t_n = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} s_p \\
&= \sum_{p=0}^{m} (-1)^p s_p \sum_{n=p}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} \binom{n}{p} \\
&= \sum_{p=0}^{m} (-1)^p s_p \sum_{n=p}^{m} (-1)^n \binom{m}{p} \binom{m-p}{n-p} ; [(f)\ den] \\
&= \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} s_p \sum_{n=p}^{m} (-1)^n \binom{m-p}{n-p} \\
&= \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} s_p \sum_{n=0}^{m-p} (-1)^{n+p} \binom{m-p}{n} \\
&= \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} s_p \sum_{q=0}^{m-p} (-1)^{q+p} \binom{m-p}{q} \\
&= \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} s_p \sum_{q=0}^{m-p} (-1)^q \binom{m-p}{q}
\end{aligned}$$

olur. İçteki toplam

$$\sum_{q=0}^{m-p} (-1)^q \binom{m-p}{q}$$

toplamı $p = m$ olduğunda $\sum\limits_{q=0}^{0} (-1)^q \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} = (-1)^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ olur. $p \neq m$ olduğunda bu toplam sıfır oluyor. O halde,

$$\Delta^m t_0 = \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} s_m.1 = s_m$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\Delta^m t_0 = \delta t_m = s_m$, ayrıca $\Delta^m s_0 = \delta s_m = t_m$ olduğundan $\delta\delta = I$ elde ederiz.

Örneğin, $(E, 1)$ Euler metodunda

$$x = -\frac{y}{1-y} \quad , \quad y = \frac{-x}{1-x} \text{ ve } s(x) = \sum s_n \ x^n \ , \ t(x) = \sum t_n \ x^n$$

alınarak (2.6) da a_n yerine $(-1)^n \, s_n$ ve b_n yerine t_n yazılırsa

$$(1-x) \ s(x) = t\,(y)$$

elde edilir. Teorem 4.1 den,

$$(1-x) \ t(x) = s(y)$$

olur.

(E, q) Euler ve $(C, 1)$ Cesaro dönüşümleri δ fark matrisi ile ifade edilebilir.

(s_n) dizisinin (E, q) Euler ortalaması (t_m) olsun. Yani,

$$t_m = \frac{1}{(q+1)^m} \sum_{n=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \ q^{m-n} \ s_n$$

olsun. Hardy (1949) sayfa 181 den,

$$\Delta^n t_0 = \frac{1}{(q+1)^n} \Delta^n s_0$$

dir. $\Delta^n s_0 = u_n$ ve $\Delta^n t_0 = \upsilon_n$ yazılırsa $u_n = \delta s_n$ ve $t_n = \delta \upsilon_n$ elde edilir. μ ile $t'_m = \mu_m s_m$ şeklinde diagonal dönüşümü olmak üzere u_n nin μ dönüşümü υ_n, yani $\upsilon_n = \mu u_n$ olsun.

$$t_n = \delta \upsilon_n \Rightarrow t_n = \delta \mu u_n = \delta \mu \delta s_n$$

olur. $\lambda = \delta \mu \delta$ denirse, $\mu_n = (q+1)^{-n}$ olmak üzere $t_n = \lambda s_n$ elde edilir.

$s = (s_n)$ dizisinin $(C, 1)$ ortalaması (t_m) ile gösterilsin, yani,

$$t_m = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} s_n$$

olsun.

$$\begin{aligned}
\Delta^n t_0 &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} t_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{(k+1)} \sum_{l=0}^{k} s_l \\
&= \sum_{l=0}^{n} s_l \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

yazılır.

$$\phi_l = \sum_{k=l}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$$

denirse

$$\Delta^n t_0 = \sum_{l=0}^{n} \phi_l s_l$$

olur.

$$\begin{aligned}
\phi_l &= \sum_{k=l}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} \binom{n}{n} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{n}{n-1} + \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} \binom{n}{n-2} + ... + \frac{(-1)^l}{l+1} \binom{n}{l} \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{n}{1} + \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} \binom{n}{2} + ... + \frac{(-1)^l}{l+1} \binom{n}{n-l} \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} \left[1 - \frac{n+1}{n} \binom{n}{1} + \frac{n+1}{n-1} \binom{n}{2} - ...\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} \left[1 - \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} - ...\right]
\end{aligned}$$

$p = n - l + 1$ inci terime kadar devam eder. $(1-x)^{n+1}$ in açılımındaki ilk p terimin katsayıları toplamı $(1-x)^n$ nin açılımının $p-$inci katsayısına eşit olduğundan,

$$\phi_l = \frac{(-1)^l}{n+1} \binom{n}{l}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\Delta^n t_0 &= \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l}{n+1} \binom{n}{l} s_l \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} s_l
\end{aligned}$$

olup

$$\Delta^n t_0 = \frac{1}{n+1} \Delta^n s_0$$

sonucuna varılır.

Yine μ diagonal matrisi olmak üzere $\Delta^n s_0$ ın μ diagonal dönüşümü $\Delta^n t_0$ ise

$$\mu_n = \frac{1}{n+1}$$

olur. Yine $\lambda = \delta\mu\delta$ olmak üzere

$$t_n = \delta\Delta^n t_0 \Rightarrow t_n = \delta\mu\Delta^n s_0 = \delta\mu\delta s_n = \lambda s_n$$

elde edilir.

Şimdi $\lambda = \delta\mu\delta$ matrisi artık tanımlanabilir.

Tanım 4.3 (Hausdorff Dönüşümü)

$$\mu_{mv} := \begin{cases} \mu_{mm} = \mu_m & , m = 0, 1, 2 ... \text{ ise} \\ \mu_{mv} = 0 & , m \neq v \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $\mu = (\mu_{mv})$ herhangi bir diagonal matris olsun. $s = (s_n)$ ve $t = (t_n)$ için

$$t = (\delta\mu\delta)\, s = \lambda s$$

dönüşümüne Hausdorff dönüşümü ve bu dönüşümün matrisine bir Hausdorff matrisi denir. Bu matris (H, μ) veya kısaca $\mathbf{H}$ ile gösterilir.

(E, q) Euler dönüşümü, köşegen elemanları $\mu_n = \frac{1}{(q+1)^n}$ ile verilen bir diagonal matris μ olmak üzere $\delta\mu\delta$ şeklinde bir Hausdorff dönüşümüdür.

Yine $(C, 1)$ Cesaro dönüşümü , $\mu_n = \frac{1}{n+1}$ diagonal matrisine karşılık gelen bir Hausdorff dönüşümüdür.

Tanım 4.4

Herhangi iki $\mathbf{H}$ dönüşümü değişmelidir.

İspat.

H ve H' herhangi iki hausdorff dönüşümü yani $H = \delta\mu\delta$ ve $H' = \delta\mu'\delta$ olsun.

$HH' = \delta\mu\delta\delta\mu'\delta = \delta\mu\mu'\delta = \delta\mu'\mu\delta = H'H.$

H dönüşümünün katsayıları μ_n ler şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned} t_m &= \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} s_n = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} \Delta^n t_0 \\ &= \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} \mu_n \Delta^n s_0 \\ &= \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} \mu_n \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} s_p \\ &= \sum_{p=0}^{m} s_p (-1)^p \sum_{n=p}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} \binom{n}{p} \mu_n \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} \phi_{m,p} &= (-1)^p \sum_{n=p}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} \binom{n}{p} \mu_n \\ &= (-1)^p \binom{m}{p} \sum_{n=p}^{m} (-1)^n \binom{m-p}{n-p} \mu_n \\ &= \binom{m}{p} \sum_{k=0}^{m-p} (-1)^k \binom{m-p}{k} \mu_{p+k} \\ &= \binom{m}{p} \Delta^{m-p} \mu_p \end{aligned}$$

olduğundan,

$$t_m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \Delta^{m-n} \mu_n s_n$$

olur. O halde Hausdorff matrisi aşağıdaki şekilde de tanımlanabilir.

$$h_{mn} := \begin{cases} \binom{m}{n} \Delta^{m-n} \mu_n & , n \leq m. \text{ ise} \\ 0 & , n > m \text{ ise} \end{cases} \tag{4.1}$$

ile tanımlanan $H = (h_{mn})$ matrisine Hausdorff matrisi denir (Hardy, 1949).

Tanım 4.5 (Moment Dizisi)

$\mu = (\mu_n)$ reel bir dizi ve $\Phi \in BV\,[0,1]$ yani, $\Phi : [0,1] \to K$ sınırlı salınımlı bir fonksiyon olsun. Eğer her bir $n \in \mathbb{N}^0$ için μ_n 'ler $\Phi\,(x)$ fonksiyonunun momentleri yani

$$\mu_n = \int_0^1 x^n d\Phi(x) \tag{4.2}$$

ise (μ_n) dizisine bir moment dizisi denir.

Burada $\Phi(0) = 0$ ve x^0 fonksiyonu sıfır noktasında sürekli yani,

$$\mu_0 = \int_0^1 d\Phi(x)$$

olarak kabul edilmiştir. $\Phi\,(+0)$, Φ 'nin sıfırda sağdan limitini göstermek üzere yani,

$$\Phi\,(0+) := \lim_{t\to 0, t>0} \Phi(t)$$

ile tanımlanmak üzere eğer $\Phi(1) = 1$ ve $\Phi(x)$, orjinde sürekli olacak şekilde

$$\Phi(+0) = \Phi(0) = 0$$

ise $\mu = (\mu_n)$ dizisine regüler moment dizisi denir.

Moment dizilerinin toplamı ve farkları da moment dizisidir.

Tanım 4.6 (Total Monoton Dizi)

(μ_n) reel terimli bir dizi olsun. Δ fark operatörü olmak üzere her $m, n \in \mathbb{N}^0$ için $\Delta^m \mu_n \geq 0$ oluyorsa (μ_n) dizisine total monoton dizi denir (Hardy, 1949).

Total monoton iki dizinin toplamı ve çarpımı da total monotondur.

Teorem 4.2

$\Phi(x)$ fonksiyonu artan ise (4.2) ile verilen (μ_n) moment dizisi total monotondur. Yani,

$$\mu_{n,p} = \Delta^p \mu_n = \int x^n (1-x)^p d\Phi \geq 0$$

dır.

İspat.

Δ operatörü (μ_n) dizisine $p-$ defa uygulanırsa $n, p \in \mathbb{N}^0$ için,

$$\Delta^p \mu_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} \mu_{n+k}$$

olduğu elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned}\Delta^p \mu_n &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} \int_0^1 x^{n+k} d\Phi(x) \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} x^{n+k} d\Phi(x) \\ &= \int_0^1 x^n \left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} x^k \right) d\Phi(x) \\ &= \int_0^1 x^n (1-x)^p \, d\Phi(x) \geq 0\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Buradan $\Delta^p \mu_n \geq 0$ olup (μ_n) total monotondur.

Teorem 4.3

$\Phi(x)$ fonksiyonu artan ise (4.2) ile verilen (μ_n) moment dizisi iki total monoton dizinin farkı olarak yazılabilir (Hardy, 1949).

Φ fonksiyonunun süreksizlik noktaları sayılabilir ise

$$\int_0^1 x^n d\Phi(x)$$

integralinin değeri değişmez. Bu durumda her $0 < x < 1$ için,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \{ \Phi(x-0) + \Phi(x+0) \}$$

olduğu kabul edilir ve $\Phi(x)$ 'in tüm süreksizlikleri normaldir denir. Burada $h > 0$ olmak üzere soldan ve sağdan limitler,

$$\Phi(x-0) = \lim_{h \to 0} \Phi(x-h)$$

ve

$$\Phi(x+0) = \lim_{h \to 0} \Phi(x+h)$$

ile gösterilmektedir.

Teorem 4.4

Φ_1 ve Φ_2 orjinde sıfır olan normal süreksizliğe sahip sınırlı salınımlı fonksiyonlar olmak üzere ,

$$\mu_n = \int_0^1 x^n d\Phi_1(x) = \int_0^1 x^n d\Phi_2(x)$$

ise her $x \in [0,1]$ için $\Phi_1(x) = \Phi_2(x)$ dir (Hardy, 1949).

Teorem 4.5

Eğer (μ_n) total monoton ise

$$\mu_n = \int_0^1 x^n d\Phi(x)$$

olacak şekilde artan ve sınırlı bir Φ fonksiyonu vardır (Hardy, 1949).

Bu teoremden ve $[a, b]$ doğrusal aralığı üzerinde sınırlı salınımlı her fonksiyon iki monoton azalmayan fonksiyonun farkı olarak yazılabildiğinden, sınırlı ve artan bir Φ fonksiyonu sınırlı salınımlı olduğundan total monoton bir (μ_n) dizisi bir moment dizisidir.

Teorem 4.6 (Hausdorff Teoremi)

Eğer (μ_n) total monoton (α_n) ve (β_n) dizilerinin farkı ise (μ_n) bir moment dizisidir (Hardy, 1949).

Hausdorff Teoremi ve Teorem 4.3 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1

Bir (μ_n) dizisinin moment dizisi olması için gerek ve yeter şart (μ_n) nin total monoton (α_n) ve (β_n) dizilerinin farkı olarak yazılmasıdır.

Hausdorff matrisleri moment dizileri yardımıyla da tanımlanabilir. μ diagonal matrisinin köşegen elemanları $\mu_n = \int_0^1 x^n d\Phi$ moment dizileri olarak alınsın. $H = \delta\mu\delta$ Hausdorff matrisi $\delta = (\delta_{jn})$, $\mu = \left(\mu_{mj}\right)$ ve $H = (h_{mn})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} h_{mn} &= \delta(\mu\delta) = \delta \sum_{j=0}^{\infty} \mu_{mj}\delta_{jn} \\ &= \delta \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \mu_{mj}\delta_{jn} + \mu_{mm}\delta_{mn} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \mu_{mj}\delta_{jn} \right\} \\ &= \delta\{\mu_m \delta_{mn}\} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{mi}\mu_{in}\delta_{in} \end{aligned}$$

olduğundan Hausdorff matrisinin terimleri,

$$h_{mn} := \begin{cases} \sum\limits_{k=n}^{m} \delta_{mk}\mu_k\delta_{kn} & , n \leq m \text{ ise} \\ 0 & , n > m \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde bulunur. $n \leq m$ ise,

$$\begin{aligned}
h_{mn} &= \sum_{k=n}^{m} \delta_{mk} \mu_k \delta_{kn} \\
&= \sum_{k=n}^{m} \delta_{mk} \int_0^1 x^k d\phi\left(x\right) \delta_{kn} \\
&= \int_0^1 \sum_{k=n}^{m} (-1)^k \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} (-1)^n \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} x^k d\phi\left(x\right) \\
&= \int_0^1 \sum_{k=n}^{m} (-1)^{k+n} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} x^k d\phi\left(x\right) \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{m-n} (-1)^{(k+n)+n} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-n \\ (k+n)-n \end{pmatrix} x^k d\phi\left(x\right); \\
&\left(\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-n \\ k-n \end{pmatrix}, (0 \leq n \leq k \leq m) \right) \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \left[\sum_{k=0}^{m-n} (-1)^{k+2n} \begin{pmatrix} m-n \\ k \end{pmatrix} x^{k+n} d\phi\left(x\right) \right] \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \left[\sum_{k=0}^{m-n} (-1)^{k} \begin{pmatrix} m-n \\ k \end{pmatrix} x^{k+n} d\phi\left(x\right) \right] \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} x^n \left[\sum_{k=0}^{m-n} (-1)^{k} \begin{pmatrix} m-n \\ k \end{pmatrix} x^{k} d\phi\left(x\right) \right] \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} x^n \left(1-x\right)^{m-n} d\phi\left(x\right)
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$h_{mn} := \begin{cases} \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} x^n \left(1-x\right)^{m-n} d\phi\left(x\right) & , n \leq m \text{ ise} \\ 0 & , n > m \text{ ise} \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 4.7

(C, α) Cesáro metodu, $\alpha > 0$ olmak üzere $\Phi(x) = \alpha \int\limits_0^x (1-t)^{\alpha-1} dt$ fonksiyonuna karşılık gelen bir Hausdorff metodudur.Bu durumda momentler ise her $m \in \mathbb{N}^0$

için,

$$\mu_m = \int_0^1 x^m d\Phi(x) = \begin{pmatrix} m+\alpha \\ m \end{pmatrix}^{-1}$$

ile verilir (Boos, 2000).

İspat.

$n \leq m$ ise,

$$h_{mn} = \int_0^1 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} x^n (1-x)^{m-n} d\phi(x)$$

ve

$$d\phi(x) = \alpha (1-x)^{\alpha-1} dx$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} h_{mn} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} x^n (1-x)^{m-n} \alpha (1-x)^{\alpha-1} dx \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} x^n (1-x)^{m-n+\alpha-1} dx \end{aligned}$$

olur. Beta fonksiyonu,

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

olduğundan,

$$B(n+1, m-n+\alpha) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n+\alpha)}{\Gamma(m+\alpha-1)}$$

olur ki,

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} x^n (1-x)^{m-n+\alpha-1} dx = B(n+1, m-n+\alpha) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n+\alpha)}{\Gamma(m+\alpha-1)}$$

olur. O halde,

$$h_{mn} = \alpha \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n+\alpha)}{\Gamma(m+\alpha-1)}$$

olur. $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\Gamma(n+1) = n!$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$ olduğundan,

$$h_{mn} = \frac{\alpha m! \Gamma(m-n+\alpha)}{(m-n)!\Gamma(m+\alpha+1)} = E_m^\alpha = \begin{pmatrix} m+\alpha \\ m \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha+1)}$$

olur. Momentler ise,

$$\begin{aligned}
\mu_m &= \int\limits_0^1 x^m d\Phi(x) \\
&= \int\limits_0^1 x^m \alpha(1-x)^{\alpha-1}dx = \alpha \int\limits_0^1 x^m (1-x)^{\alpha-1}dx \\
&= \alpha.B(m+1,\alpha) = \alpha \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(m+1+\alpha)} \\
&= \alpha m! \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(m+1+\alpha)} = \frac{1}{\left(\begin{array}{c} m+\alpha \\ m \end{array}\right)}
\end{aligned}$$

olur.

Tanım 4.7 (Hausdorff Matrisinin Regülerlik Şartları)

μ_n reel olmak üzere $H = (h_{mn})$ Hausdorff matrisi (4.1) deki gibi tanımlansın.

$$t_m = \sum h_{mn} s_n$$

olsun. Eğer her n için $s_n = 1$ ise bu taktirde,

$$u_n = \Delta^n s_0 = \begin{cases} 1 & , n = 0 \text{ ise} \\ 0 & , n > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\upsilon_n = \mu_n u_n = \begin{cases} \mu_0 & , n = 0 \text{ ise} \\ 0 & , n > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. Dolayısyla her n için

$$t_n = \Delta^n \upsilon_0 = \mu_0$$

ve böylece

$$\sum_{n=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array}\right) \Delta^{m-n}\mu_n = \mu_0$$

elde edilir. Teorem 2.1.2 ile verilen Regülerlik şartları Hausdorff matrisleri için

(i) $\sup\limits_m \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array}\right) |\Delta^{m-n}\mu_n| < \infty$ ...(4.3)

(ii) $\mu_0 = 1$ ... (4.4)

(iii) Her $n = 0, 1, 2, ...$ için $\lim\limits_{m\to\infty} \left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array}\right) \Delta^{m-n}\mu_n = 0$ ...(4.5) biçimini alır (Hardy, 1949).

Eğer μ_n total monoton ise yani, $\Delta^{m-n}\mu_n \geq 0$ ise o zaman

$$\sum_{n=0}^{m}\left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array}\right)\left|\Delta^{m-n}\mu_n\right| = \sum_{n=0}^{m}\left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array}\right)\Delta^{m-n}\mu_n = \mu_0$$

olur.

Teorem 4.8

μ_n reel dizisinin (4.3) şartını sağlaması için gerek ve yeter şart α_n ve β_n total monoton diziler olmak üzere μ_n nin

$$\mu_n = \alpha_n - \beta_n$$

şeklinde yazılabilmesidir (Hardy, 1949).

Teorem 4.8 kullanılarak regülerlik şartları aşağıdaki şekilde de verilebilir.

Teorem 4.9

(H, μ) Hausdorff matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartlar,

(i) (μ_n) iki total monoton dizinin farkı olarak yazılabilir.

(ii) $\mu_0 = 1$

(iii) $\Delta^m \mu_0 \to 0$

olmasıdır (Hardy, 1949).

Teorem 4.10

Her bir $\mu = (\mu_n) \in \omega$ dizisi için aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) (H, μ) konservatiftir.

(b) μ total olarak monoton olan iki dizinin farkı ile temsil edilebilirdir.

(c) μ bir moment dizisidir.

$\Phi(x) \in BV[0,1]$ olmak üzere (μ_n) bir moment dizisi ise (H, μ) Hausdorff matrisinin elemanları

$$h_{nk} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\int_0^1 t^k (1-t)^{n-k}\, d\Phi(t) \qquad (4.3)$$

olarak yazılırlar (Boos, 2000).

Teorem 4.11

Her bir $\mu = (\mu_n) \in \omega$ dizisi için aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) (H, μ) regülerdir.

(b) μ, $\Phi(1) - \Phi(0) = 1$ ve $\Phi(0) = \Phi(0+)$ şartını sağlayan $\Phi \in BV([0,1])$ fonksiyonu ile elde edilen yani regüler olan bir moment dizisidir.

Kabul edelim ki, Φ artan, $\Phi(1) = 1$ ve $\Phi(0) = \Phi(+0) = 0$ olsun. μ_n total monoton ve (H, μ) Hausdorff metodu regüler olsun. Pozitif bir (s_n) dizisinin Hausdorff ortalaması

$$t_m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \Delta^{m-n} \mu_n s_n$$

olsun.

Eğer $s_n \geq 0$, $k > 1$ ise ozaman her n için $s_n = 0$ olmadıkça yada bu dönüşüm özdeşlik dönüşümüne indirgenmedikçe,

$$\sum t_m^k < \left(\int x^{-\frac{1}{k}} d\Phi \right)^k \sum s_n^k = H(k) \sum s_n^k$$

eşitsizliği sağlanır (Hardy, 1949).

Tanım 4.8 (Genelleştirilmiş $E - J$ Hausdorff Matrisleri)

Hausdorff matrisinin önemli genelleştirmelerinden biri olan Endl (1960) ve Jakimovski (1959) genelleştirmesi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır. $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$h_{nk}^{(\alpha)} := \begin{cases} \binom{n+\alpha}{n-k} \Delta^{n-k} \mu_k & , 0 \leq k \leq n \text{ ise} \\ 0 & , k > n \text{ ise} \end{cases} \quad \left(k, n \in \mathbb{N}^0\right)$$

ile tanımlanan $H^{(\alpha)} := \left(h_{nk}^{(\alpha)}\right) := \left(H^{(\alpha)}, \mu_n^\alpha\right)$ alt üçgensel matrisine genelleştirilmiş $E - J$ Hausdorff matrisi denir. Burada μ_n^α, $\Phi(x) \in BV[0,1]$ olmak üzere

$$\mu_n = \int_0^1 t^{n+\alpha} d\Phi(t)$$

şeklinde tanımlı bir moment fonksiyonunu göstermektedir. Genelleştirilmiş $E - J$ Hausdorff matrisleri $\alpha = 0$ için Hausdorff matrislerinin özel bir halidir.

$$\delta_{nk}^{(\alpha)} = (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k}$$

şeklinde tanımlı bir alt üçgensel matris ve μ, diagonali μ_n lerden oluşan diagonal bir matris olmak üzere, her genelleştirilmiş $E - J$ Hausdorff matrisi,

$$H^{(\alpha)} = \delta^{(\alpha)} \mu \delta^{(\alpha)}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $\delta^{(\alpha)}$ matrisinin tersi yine kendisidir.

Teorem 4.12

$H_\mu^{(\alpha)}$ genelleştirilmiş $E-J$ Hausdorff matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter koşul $\forall n \in \mathbb{N}^0$ için $\mu_n^\alpha \neq 0$ olmasıdır. $\alpha, \beta > 0$, $\alpha \neq \beta$ olmak üzere $H_\mu^{(\alpha)}$ ve $H_\mu^{(\beta)}$ genelleştirilmiş $E-J$ Hausdorff matrislerinin kesişimi sıfır matris ve birim matristir. Dolayısıyla $\alpha > 0$ için $H_\mu^{(\alpha)}$ matrisler topluluğu sayılamaz çoklukta genelleştirilmiş $E-J$ Hausdorff matrislerine sahiptir. Ayrıca genelleştirilmiş $E-J$ Hausdorff matrisleri aşağıdaki özelliklere sahiptirler.

1. $H_\mu^{(\alpha)} + H_\lambda^{(\alpha)} = H_{\mu+\lambda}^{(\alpha)}$
2. $H_\mu^{(\alpha)} H_\lambda^{(\alpha)} = H_{\mu\lambda}^{(\alpha)}$
3. $H_\beta^{(\alpha)}\left(H_\mu^{(\alpha)} + H_\lambda^{(\alpha)}\right) = H_{\beta\mu}^{(\alpha)} + H_{\beta\lambda}^{(\alpha)}$

Teorem 4.13

$H^{(\alpha)}$, genelleştirilmiş $E-J$ Hausdorff matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul

$$\mu_n^{(\alpha)} = \int_0^1 t^{n+\alpha} d\chi(t)$$

şeklinde tanımlı olmak üzere,

1. $\chi(t) \in BV[0,1]$
2. $\chi(1) - \chi(0+) = 1$

olmasıdır (Endl, 1958).

Tanım 4.9 (Genelleştirilmiş $E-J$ Cesáro Matrisi)

$$c_{nk} := \begin{cases} \frac{1}{n+\alpha+1} & , k \leq n \text{ ise} \\ 0 & , k > n \text{ ise} \end{cases}$$

elemanları ile tanımlı alt üçgen matrise, birinci mertebeden genelleştirilmiş $E-J$ Cesáro matrisi denir ve $\left(C^{(\alpha)}, 1\right)$ ile gösterilir. Bu matris için $\chi(t) \in BV[0,1]$ yoğunluk fonksiyonu $\chi(t) = t$ şeklinde tanımlıdır.

Böyle birinci mertebeden genelleştirilmiş $E-J$ Cesáro matrisi için moment fonksiyonu,

$$\mu_n^{(\alpha)} = \int_0^1 t^{n+\alpha} dt = \frac{1}{n+\alpha+1}$$

olacaktır.

$H^{(\alpha)}$, genelleştirilmiş $E - J$ Hausdorff matrisinin, Hausdorff matrislerinden en büyük farkı ise, satır toplamlarının limitinin μ_0 değerine yakınsamamasıdır. Bu durumu bir örnekle gösterelim. Birinci mertebeden genelleştirilmiş $E - J$ Cesáro matrisini ele alalım. $\{t_n\}$, $\left(C^{(\alpha)}, 1\right)$ matrisinin n. satır toplamını göstermek üzere,

$$t_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+\alpha+1} = \frac{n+1}{n+\alpha+1} \to 1 \text{ , } n \to \infty$$

olacaktır. Fakat,

$$\mu_0 = \int_0^1 t^{\alpha} dt = \frac{1}{\alpha+1}$$

dır.

Teorem 4.14

$\alpha \geq 0$ olmak üzere, birinci mertebeden genelleştirilmiş $E - J$ Cesáro matrisiyle değişmeli olan, satır sonlu matrislerin sınıfı, genelleştirilmiş $E - J$ Hausdorff matrisleridir (Rhoades, 2009).

Teorem 4.15

$\alpha > 0$ ve $H^{(\alpha)}$ konservatif matris olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = \Phi(1) - \Phi(0)$$

dır (Rhoades, 2009).

Teorem 4.16

$H^{(\alpha)}$ genelleştirilmiş $E - J$ Hausdorff matrislerinin konservatif olması için gerek ve yeter koşul,

$$\int_0^1 |d\chi(t)| < \infty$$

olacak şekilde $\chi(t) \in BV[0,1]$ olmasıdır (Rhoades, 2009).

Teorem 4.17

$\alpha > 0$ ve $H^{(\alpha)}$ genelleştirilmiş $E - J$ Hausdorff matrisinin her bir sütununun toplamı sabittir (Rhoades, 2009).

Bölüm 5

DOUBLE HAUSDORFF METODU

σ_n^α, bir (s_n) dizisinin (C,α) Cesaro matris dönüşümünün n.terimini göstersin. Flett (1957) aşağıdaki tanımı verdi. Eğer,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left|\sigma_{n-1}^{\alpha} - \sigma_n^{\alpha}\right|^k < \infty \tag{5.1}$$

ise kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisine $k \geq 1$ mertebeden mutlak (C,α) toplanabilir denir. Ayrıca Flett, aşağıdaki teoremi ispatladı.

Eğer $\sum a_n$ serisi $|C,\alpha|_k$ toplanabilir ise her $r \geq k \geq 1$, $\alpha > -1$, $\beta > \alpha + \frac{1}{k} - \frac{1}{r}$ için $|C,\beta|_r$ toplanabilirdir. Eğer $r = k$ alırsak $|C,\alpha|_k$ toplanabilir olan $\sum a_n$ serisi aynı zamanda $k \geq 1$, $\beta > \alpha > -1$ için $|C,\beta|_k$ toplanabilirdir. $\sum a_n$, kısmi toplamı (s_n) olan sonsuz seri olsun. $k \geq 1$ için,

$$A_k = \left\{ (s_n)_{n=0}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left|a_n\right|^k < \infty \ ; \ a_n = s_n - s_{n-1} \right\} \tag{5.2}$$

olsun.

$T : A_k \to A_k$ ise $T \in B(A_k)$ yazılır. Eğer (C,α) ve (C,β) yi içeren kapsam durumlarında $\alpha = 0$ ise her bir $\beta > 0$ için $(C,\beta) \in B(A_k)$ elde edilir.

1970 yılında, (5.1) ve (5.2) formüllerini kullanarak, Das (1970) k.kuvvetten mutlak konservatif kavramını tanımladı. Eğer $k \geq 1$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left|s_n - s_{n-1}\right|^k < \infty \tag{5.3}$$

olması

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left|t_n - t_{n-1}\right|^k < \infty \tag{5.4}$$

olmasını gerektiriyorsa A 'ya $k-$ıncı kuvvetten mutlak konservatif denir (Das, 1970). A_k uzayının tanımını kullanarak bu tanımı aşağıdaki gibi değişik şekilde yazabiliriz.

Eğer A, A_k 'dan A_k 'ya bir dönüşüm, yani; $A \in B(A_k)$ ise bu taktirde A 'ya k. kuvvetten mutlak konservatiftir denir (Şevli, 2005). $k = 1$ için (5.3), (s_n) nin yakınsaklığını garantiler. Dikkat edilmelidir ki, $k > 1$ olduğunda (5.3) ün sağlanması (s_n) nin yakınsaklığını gerektirmez. Örneğin;

$$s_n = \sum_{v=1}^{n} \frac{1}{v \log(v+1)}$$

alırsak (5.3) şartını sağlamasına rağmen (s_n) ıraksaktır. Böylece (s_n) in limiti olmadığından $k > 1$ olduğunda $k-$ıncı kuvvetten mutlak regülerlik kavramını tanımlayamayız.

Das 'da (1970) belirtildiğine göre Knopp ve Lorentz (1949) ile Marley'den (1950) bir konservatif Hausdorff dönüşümünün mutlak konservatif olduğu bilinmektedir. Aşağıdaki teorem bu sonucu genelleştirir.

Teorem 5.1

$k \geq 1$ olsun. Konservatif bir Hausdorff dönüşümü $k-$ıncı kuvvetten mutlak konservatiftir (Das, 1970).

Euler, Hölder ve (C, α) metotları Hausdorff metodunun özel durumları olduklarından aşağıdaki sonuçlar Teorem 5.1 'den elde edilir.

Sonuç 5.1

$0 < \alpha \leq 1$ ve $q = (1-\alpha) / \alpha$ olsun. Bu durumda her bir (E, q) Euler metodu A_k 'dan A_k 'ya bir dönüşümdür. Yani, $(E, q) \in B(A_k)$ (Şevli, 2005).

Sonuç 5.1 den her Euler dönüşümünün $k-$ıncı kuvvetten mutlak konservatif olduğu sonucu çıkar.

Sonuç 5.2

$\alpha > 0$ olmak üzere Hölder metodu A_k 'dan A_k 'ya bir dönüşümdür. Yani $H_\alpha \in B\left(A_k\right)$ (Şevli, 2005).

Sonuç 5.2 den $\alpha > 0$ için Hölder metodunun $k-$ıncı kuvvetten mutlak konservatif olduğu sonucu elde edilir.

Sonuç 5.3

$\alpha > 0$ olmak üzere $(C, \alpha) \in B(A_k)$ (Şevli, 2005).

Teorem 5.1 den (H, μ) Hausdorff dönüşümü konservatif ise $(H, \mu) \in B(A_k)$ olur (Savaş ve Şevli, 2009). Birbirinden bağımsız olarak Endl (1960) ve Jakimovski (1959), genelleştirilmiş Hausdorff matrisini aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

β bir reel sayı , (μ_n) bir reel dizi ve Δ, $\Delta\mu_k = \mu_k - \mu_{k+1}$, $\Delta^n\left(\mu_k\right) = \Delta\left(\Delta^{n-1}\mu_k\right)$ ile tanımlanan fark operatörü olmak üzere,

$$h_{nk}^{(\beta)} := \begin{cases} \begin{pmatrix} n+\beta \\ n-k \end{pmatrix} \Delta^{n-k}\mu_k^{(\beta)} & , 0 \leq k \leq n \text{ ise} \\ 0 & , k > n \text{ ise} \end{cases}$$

elemanları ile tanımlanan sonsuz matrisine genelleştirilmiş Hausdorff matrisi denir ve $\left(H^{(\beta)}, \mu_n^{(\beta)}\right)$ veya kısaca $\left(H^{\beta}, \mu\right)$ ile gösterilir. Burada $\mu_n^{(\beta)}$, $\chi(t) \in BV\,[0,1]$ olmak üzere

$$\mu_n^{(\beta)} = \int_0^1 t^{n+\beta} d\chi(t)$$

şeklinde tanımlı moment fonksiyonunu göstermektedir. Biz burada sadece negatif olmayan β ları ele alacağız. $\beta = 0$ durumunda verilen Hausdorff matrisi elde edilir.

Teorem 5.2

$\left(H^{\beta}, \mu\right)$ genelleştirilmiş Hausdorff dönüşümü konservatif ise $k-$ıncı kuvvetten mutlak konservatiftir. Yani $\left(H^{\beta}, \mu\right) \in B(A_k)$ olur (Şevli, 2005).

Kısmi toplamlar dizisi $s_{mn} = \sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{j=0}^{n} a_{ij}$ olan reel veya komplex değerli sonsuz double serisi $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{mn}$ olsun. Herhangi bir (u_{mn}) double dizisi için,

$$\Delta_{11}u_{mn} = u_{mn} - u_{m+1,n} - u_{m,n+1} + u_{m+1,n+1}$$

tanımlayalım.

A_k^2 ile, her $k \geq 1$ için,

$$A_k^2 = \left\{ (s_{mn})_{m,n=0}^{\infty} : \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left|a_{mn}\right|^k < \infty \ ; \ a_{mn} = \Delta_{11}s_{m-1,n-1} \right\}$$

ile tanımlanan dizi uzayını göstereceğiz.

$T = (t_{mnij} : m, n, i, j = 0, 1, ...)$ dört boyutlu matris olsun. Eğer,

$$t_{mn} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} t_{mnij}s_{ij} \qquad (m, n = 0, 1, ...)$$

olmak üzere $k \geq 1$ için $T \in B(A_k^2)$, yani;

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left|\Delta_{11}s_{m-1,n-1}\right|^k < \infty$$

olması,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left|\Delta_{11}t_{m-1,n-1}\right|^k < \infty$$

olmasını gerektiriyorsa T 'ye $k-$ıncı mertebeden mutlak konservatiftir denir.

Double dizilerin Hausdorff dönüşümleri Adams (1933) tarafından geliştirilmiştir. Daha sonra bu konuda Ramanujan (1955) ve Ustina (1967) tarafından çalışmalar yapılmıştır.

$\{\mu_{ij}\}$ herhangi bir reel ve kompleks dizi ve

$$\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j}\mu_{ij} = \sum_{s=0}^{m-i}\sum_{t=0}^{n-j}(-1)^{i+j}\binom{m-i}{s}\binom{n-j}{t}\mu_{i+s,j+t}$$

olmak üzere bir double hausdorff matrisi,

$$h_{mnij} = \binom{m}{i}\binom{n}{j}\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j}\mu_{ij}$$

terimlerine sahiptir.

Her double hausdorff matrisi için H ın konservatif olması için gerek ve yeterşart,

$$\int_0^1\int_0^1 |d\chi(s,t)| < \infty$$

ve

$$\mu_{mn} = \int_0^1\int_0^1 s^m t^n d\chi(s,t)$$

olacak şekilde $\chi(s,t) \in BV[0,1]\times[0,1]$ var olmasıdır. Savaş ve Rhoades (2010), Das (1970) 'ın sonuçlarını double hausdorff toplanabilme metoduna bir genişlemesi olarak aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

Lemma 5.1

(t_{mn}) ve (τ_{mn}) ile sırasıyla (s_{mn}) ve (mna_{mn}) double dizilerinin (H,μ_{mn}) dönüşümü gösterilsin. Bu taktirde,

$$\tau_{mn} = mn\Delta_{11}t_{m-1,n-1}$$

dir (Savaş ve Rhoades, 2010).

İspat.

H nın tanımından ve

$$\binom{m}{i}i = m\binom{m-1}{i-1}$$

özelliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\tau_{mn} &= mn\left[\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m-1}{i-1}\binom{n-1}{j-1}\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j}\mu_{ij}\Delta_{11}s_{i-1,j-1}\right] \\
&= mn[\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m-1}{i-1}\binom{n-1}{j-1}\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j}\mu_{ij}s_{i-1,j-1} - \\
&\quad -\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m-1}{i-1}\binom{n-1}{j-1}\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j}\mu_{ij}s_{i,j-1} - \\
&\quad -\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m-1}{i-1}\binom{n-1}{j-1}\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j}\mu_{ij}s_{i-1,j} + \\
&\quad +\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m-1}{i-1}\binom{n-1}{j-1}\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j}\mu_{ij}s_{ij}] \\
&= mn[\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{v=0}^{n-1}\binom{m-1}{\mu}\binom{n-1}{v}\Delta_1^{m-\mu-1}\Delta_2^{n-v-1}\mu_{\mu+1,v+1}s_{\mu v} - \\
&\quad -\sum_{i=0}^{m}\sum_{v=0}^{n-1}\binom{m-1}{i-1}\binom{n-1}{v}\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-v-1}\mu_{i,v+1}s_{iv} - \\
&\quad -\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{m-1}{\mu}\binom{n-1}{j-1}\Delta_1^{m-\mu-1}\Delta_2^{n-j}\mu_{\mu+1,j}s_{\mu j} + \\
&\quad +\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m-1}{i-1}\binom{n-1}{j-1}\Delta_1^{m-\mu-1}\Delta_2^{n-v-1}\mu_{ij}s_{ij} \\
&= mn\left[I_1+I_2+I_3+I_4\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left[\binom{m}{i}-\binom{m-1}{i}\right]\binom{n-1}{j}\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j-1}\mu_{i,j+1}s_{ij} = \\
&= -\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{n-1}{j}\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j-1}\mu_{i,j+1}s_{ij} + \\
&\quad +\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m-1}{i}\binom{n-1}{j}\times \\
&\quad \times(\Delta_1^{m-i-1}\Delta_2^{n-j-i}\mu_{i,j+1} - \Delta_1^{m-i-1}\Delta_2^{n-j-1}\mu_{i+1,j+1})s_{ij}
\end{aligned}$$

bulunur ve

$$\begin{aligned} I_1+I_2 &= -\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{n-1}{j}\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j-1}\mu_{i,j+1}s_{ij}+ \\ &\quad +\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m-1}{i}\binom{n-1}{j}\Delta_1^{m-i-1}\Delta_2^{n-j-1}\mu_{i,j+1}s_{ij} \\ &= I_{21}+I_{22} \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde,

$$I_3=-\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m-1}{\mu}\left[\binom{n}{j}-\binom{n-1}{j}\right]\Delta_1^{m-\mu-1}\Delta_2^{n-j}\mu_{\mu+1,j}s_{ij}=I_{31}+I_{32}$$

dir. İlaveten,

$$\begin{aligned} I_4 &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left[\binom{m}{i}-\binom{m-1}{i}\right]\left[\binom{n}{j}-\binom{n-1}{j}\right]\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j}\mu_{ij}s_{ij} \\ &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j}\mu_{ij}s_{ij}- \\ &\quad -\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{n-1}{j}\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j}\mu_{ij}s_{ij}- \\ &\quad -\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m-1}{i}\binom{n}{j}\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j}\mu_{ij}s_{ij}+ \\ &\quad +\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{n-1}{j}\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j}\mu_{ij}s_{ij} \\ &= I_{41}+I_{42}+I_{43}+I_{44} \end{aligned}$$

dir ve $I_{41}=t_{mn}$ olduğu görülür. Ayrıca,

$$I_{42}=-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{n-1}{j}\left(\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j-1}\mu_{ij}-\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j-1}\mu_{i,j+1}\right)s_{ij}=I_{421}+I_{422}$$

dir. $I_{21}+I_{422}=0$ olduğundan $I_{42}=-t_{m,n-1}$ dir ve

$$I_{43}=-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m-1}{i}\binom{n}{j}\left(\Delta_1^{m-i-1}\Delta_2^{n-j}\mu_{ij}-\Delta_1^{m-i-1}\Delta_2^{n-j}\mu_{i+1,j}\right)s_{ij}=I_{431}+I_{432}$$

dir. Fark ediyoruz ki,

$$I_{431}=-t_{m-1,n}\ \text{ ve } I_{31}+I_{432}$$

dır. Şimdi,

$$
\begin{aligned}
I_{22}+I_{32}+I_{44} &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left(\begin{array}{c} m-1 \\ i \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} n-1 \\ j \end{array}\right)\Delta_1^{m-i-1}\Delta_2^{n-j-1}\mu_{i,j+1}+ \\
&\quad +\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left(\begin{array}{c} m-1 \\ i \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} n-1 \\ j \end{array}\right)\times \\
&\quad \times\left(\Delta_1^{m-i-1}\Delta_2^{n-j-1}\mu_{i+1,j}-\Delta_1^{m-i-1}\Delta_2^{n-j-1}\mu_{i+1,j+1}\right)s_{ij}+ \\
&\quad +\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left(\begin{array}{c} m-1 \\ i \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} n-1 \\ j \end{array}\right)\times \\
&\quad \times[\Delta_1^{m-i-1}\Delta_2^{n-j-1}\mu_{ij}-\Delta_1^{m-i-1}\Delta_2^{n-j-1}\mu_{i+1,j}- \\
&\quad -\Delta_1^{m-i-1}\Delta_2^{n-j-1}\mu_{i,j+1}+\Delta_1^{m-i-1}\Delta_2^{n-j-1}\mu_{i+1,j+1}]s_{ij} \\
&= t_{m-1,n-1}
\end{aligned}
$$

göz önüne alalım. Sonuç olarak,

$$\tau_{mn}=mn\left[t_{mn}-t_{m,n-1}-t_{m-1,n}+t_{m-1,n-1}\right]$$

dir. Böylece lemmanın ispatı tamamlanır. ■

Teorem 5.3

H, konservatif bir double hausdorff matrisi olsun. Bu taktirde $H\in B(A_k^2)$ olur (Savaş ve Rhoades, 2010).

Amacımız bu teoremi çift $E-J$ toplanabilme için ispatlamaktır.

Elemanları,

$$\delta_{mnij}^{(\alpha,\beta)}=\begin{cases}(-1)^{i+j}\left(\begin{array}{c} m+\alpha \\ m-i \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} n+\beta \\ n-j \end{array}\right) & ,\ i\leq m\ ,\ j\leq n \text{ ise} \\ 0 & ,\text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ile tanımlanan $\delta^{(\alpha,\beta)}=\left(\delta_{mnij}^{(\alpha,\beta)}\right)$ matrisine fark matrisi denir. Burada α ve β reel sayılardır.

Teorem 5.4

Fark matrisi $\delta^{(\alpha,\beta)}=\left(\delta_{mnij}^{(\alpha,\beta)}\right)$ kendi kendisinin tersidir.

$$a_{mnkl}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\delta_{mnij}^{(\alpha,\beta)}\delta_{ijkl}^{(\alpha,\beta)}$$

olsun. Böylece, $A=\delta^{(\alpha,\beta)}\delta^{(\alpha,\beta)}$ olur. Herhangi bir (u_{kl}) double dizisi olsun. Buradan,

$$\sum_{i=k}^{m}\sum_{j=l}^{n}(-1)^{i+j}\begin{pmatrix} m-k \\ m-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-l \\ n-j \end{pmatrix}=\begin{cases} (-1)^{k+l} & ,m=k\ ,n=l \text{ ise} \\ 0 & ,\text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}a_{mnkl}u_{kl} \\
=\ & \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\delta_{mnij}^{(\alpha,\beta)}\delta_{ijkl}^{(\alpha,\beta)}u_{kl} \\
=\ & \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(-1)^{k+l}u_{kl}\sum_{i=k}^{m}\sum_{j=l}^{n}(-1)^{i+j}\begin{pmatrix} m+\alpha \\ m-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+\beta \\ n-j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i+\alpha \\ i-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j+\beta \\ j-l \end{pmatrix} \\
=\ & \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(-1)^{k+l}u_{kl}\begin{pmatrix} m+\alpha \\ m-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+\beta \\ n-l \end{pmatrix}\sum_{i=k}^{m}\sum_{j=l}^{n}(-1)^{i+j}\begin{pmatrix} m-k \\ m-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-l \\ n-j \end{pmatrix} \\
=\ & u_{kl}
\end{aligned}$$

ispat biter.

$\left(\mu_{mn}^{(\alpha,\beta)}\right)$ dizisi verilsin. $\mu^{(\alpha,\beta)}=\left(\mu_{mnij}^{(\alpha,\beta)}\right)$ diagonal (köşegensel) matris olsun. Bu matrisin sadece sıfırdan farklı terimleri $\mu_{mn}^{(\alpha,\beta)}=\mu_{mnmn}^{(\alpha,\beta)}$ dur.

$$H^{(\alpha,\beta)}=\delta^{(\alpha,\beta)}\mu^{(\alpha,\beta)}\delta^{(\alpha,\beta)}$$

dönüşüm matrisine $\left(\mu_{mn}^{(\alpha,\beta)}\right)$ dizisine karşı gelen genelleştirilmiş $E-J$ double hausdorff matrisi denir.

$H^{(\alpha,\beta)}=\left(h_{mnij}^{(\alpha,\beta)}\right)$ matrisine $\left(\mu_{mn}^{(\alpha,\beta)}\right)$ dizisine karşı gelen genelleştirilmiş bir $E-J$ double hausdorff matrisi olması için gerek ve yeter şart elemanlarının

$$h_{mnij}^{(\alpha,\beta)}=\begin{pmatrix} m+\alpha \\ m-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+\beta \\ n-j \end{pmatrix}\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j}\mu_{ij}^{(\alpha,\beta)}$$

şeklinde olmasıdır. Burada,

$$\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j}\mu_{ij}^{(\alpha,\beta)}:=\sum_{r=0}^{m-i}\sum_{s=0}^{n-j}(-1)^{r+s}\begin{pmatrix} m-i \\ r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-j \\ s \end{pmatrix}\mu_{i+r,j+s}^{(\alpha,\beta)}$$

dir.

İspat.

$H^{(\alpha,\beta)}=\delta^{(\alpha,\beta)}\mu^{(\alpha,\beta)}\delta^{(\alpha,\beta)}$ double $E-J$ Hausdorff matrisi olsun. Bunu (s_{mn})

double dizisine uygularsak,

$$\begin{aligned}
t_{mn} &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} h_{mnij}^{(\alpha,\beta)} s_{ij} \\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n} \delta_{mnrs}^{(\alpha,\beta)} \mu_{rs}^{(\alpha,\beta)} \delta_{rsij}^{(\alpha,\beta)} s_{ij} \\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n} (-1)^{r+s} \binom{m+\alpha}{m-r}\binom{n+\beta}{n-s} \mu_{rs}^{(\alpha,\beta)} (-1)^{i+j} \binom{r+\alpha}{r-i}\binom{s+\beta}{s-j} s_{ij} \\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} \binom{m+\alpha}{m-i}\binom{n+\beta}{n-j} \sum_{r=i}^{m}\sum_{s=j}^{n} (-1)^{r+s} \binom{m-i}{m-r}\binom{n-j}{n-s} \mu_{rs}^{(\alpha,\beta)} s_{ij} \\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \binom{m+\alpha}{m-i}\binom{n+\beta}{n-j} \sum_{r=0}^{m-i}\sum_{s=0}^{n-j} (-1)^{r+s} \binom{m-i}{r}\binom{n-j}{s} \mu_{i+r,j+s}^{(\alpha,\beta)} s_{ij}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece,

$$h_{mnij}^{(\alpha,\beta)} = \binom{m+\alpha}{m-i}\binom{n+\beta}{n-j} \sum_{r=0}^{m-i}\sum_{s=0}^{n-j} (-1)^{r+s} \binom{m-i}{r}\binom{n-j}{s} \mu_{i+r,j+s}^{(\alpha,\beta)}$$

dir. $E-J$ double hausdorff matrisi için $H^{(\alpha,\beta)}$ nin konservatif olması için gerek ve yeter şart

$$\int_0^1\int_0^1 |d\chi(s,t)| < \infty$$

ve

$$\mu_{mn}^{(\alpha,\beta)} = \int_0^1\int_0^1 s^{m+\alpha} t^{n+\beta} d\chi(s,t)$$

olacak şekilde bir $\chi(s,t) \in BV\,[0,1]\times[0,1]$ fonksiyonunun var olmasıdır.

Teorem 5.5

$\chi(s,t) \in BV\,[0,1]\times[0,1]$ birim karede sınırlı salınımlı olsun. Bir (s_{mn}) dizisinin karşı gelen $E-J$ duble hausdorff dönüşümü,

$$t_{mn} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \binom{m+\alpha}{m-i}\binom{n+\beta}{n-j} s_{ij} \int_0^1\int_0^1 s^{i+\alpha}(1-s)^{m-i} t^{j+\beta}(1-t)^{n-j} d\chi(s,t)$$

şeklinde yazılabilir. Bu dönüşüm yakınsaklığı korur.
İspat.

Her $i \leq m$ ve $j \leq n$ için,

$$\begin{aligned}
h_{mnij}^{(\alpha,\beta)} &= \sum_{k=i}^{m}\sum_{l=j}^{n}\delta_{mnkl}^{(\alpha,\beta)}\mu_{kl}^{(\alpha,\beta)}\delta_{klij}^{(\alpha,\beta)} \\
&= \sum_{k=i}^{m}\sum_{l=j}^{n}\delta_{mnkl}^{(\alpha,\beta)}\int_0^1\int_0^1 s^{k+\alpha}t^{l+\beta}d\chi(s,t)\delta_{klij}^{(\alpha,\beta)} \\
&= \int_0^1\int_0^1\sum_{k=i}^{m}\sum_{l=j}^{n}(-1)^{k+l}\binom{m+\alpha}{m-k}\binom{n+\beta}{n-l}\times \\
&\quad\times(-1)^{i+j}\binom{k+\alpha}{k-i}\binom{l+\beta}{l-j}s^{k+\alpha}t^{l+\beta}d\chi\left(s,t\right) \\
&= \int_0^1\int_0^1\sum_{k=i}^{m}\sum_{l=j}^{n}(-1)^{k+l+i+j}\binom{m+\alpha}{m-i}\binom{n+\beta}{n-j}\times \\
&\quad\times\binom{m-i}{m-k}\binom{n-j}{n-l}s^{k+\alpha}t^{l+\beta}d\chi(s,t) \\
&= \int_0^1\int_0^1\binom{m+\alpha}{m-i}\binom{n+\beta}{n-j}\sum_{k=0}^{m-i}\sum_{l=0}^{n-j}(-1)^{k+l}\times \\
&\quad\times\binom{m-i}{k}\binom{n-j}{l}s^{k+i+\alpha}t^{l+j+\beta}d\chi(s,t) \\
&= \int_0^1\int_0^1\binom{m+\alpha}{m-i}\binom{n+\beta}{n-j}s^{i+\alpha}t^{j+\beta}\times \\
&\quad\times\left(\sum_{k=0}^{m-i}\sum_{l=0}^{n-j}(-1)^{k+l}\binom{m-i}{k}\binom{n-j}{l}s^{k}t^{l}\right)d\chi(s,t) \\
&= \int_0^1\int_0^1\binom{m+\alpha}{m-i}\binom{n+\beta}{n-j}s^{i+\alpha}t^{j+\beta}(1-s)^{m-i}(1-t)^{n-j}d\chi(s,t)
\end{aligned}$$

dir.

$H^{(\alpha,\beta)}$ konservatif double hausdorff matrisi olsun. Bu taktirde, $H^{(\alpha,\beta)} \in B(A_k^2)$ dir (Şevli, R.Savaş, 2014).

Bu teoremi ispatlamak için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 5.2

$k \geq 1$, $n \geq v$ ve $\alpha \geq 0$ için.

$$E_{m+\alpha}^{k-1}E_{m-\mu}^{\mu+\alpha-1} \leq E_{\mu+\alpha}^{k-1}E_{m-\mu}^{\mu+\alpha+k-2} \tag{5.5}$$

dir (Savaş ve Şevli, 2010).

Aşağıdaki lemma Jakimovski ve Ramanujan (1964) nın double versiyonudur.

Lemma 5.3

$0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$, $\alpha \geq 0$ ve $\beta \geq 0$ için,

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m+\alpha}{i}\binom{n+\beta}{j}(1-s)^m(1-t)^n s^{m+\alpha-i}t^{n+\beta-j} \leq 1$$

dir.

Teorem 5.6 'nın İspatı.

(t_{mn}), (s_{mn}) in $\left(H^{(\alpha,\beta)}, \mu^{(\alpha,\beta)}\right)$ dönüşümünü göstersin. Yani,

$$t_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{v=0}^{n} h_{mn\mu v}^{(\alpha,\beta)} s_{\mu v}$$

dir.

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|a_{mn}\right|^k < \infty \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|\Delta_{11}t_{m-1,n-1}\right|^k < \infty \tag{5.6}$$

olduğunu göstereceğiz.

$$t_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{v=0}^{n} b_{\mu v}$$

yazarız. Bu taktirde $b_{mn} = \Delta_{11}t_{m-1,n-1}$ dir. $k \geq 1$ için,

$$E_m^{k-1} = \binom{m+k-1}{m} = \binom{m+k-1}{k-1} = \frac{(m+k-1)!}{m!(k-1)!} = \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m+1)\Gamma(k)}$$

buradan,

$$E_m^{k-1} \approx \frac{m^{k-1}}{\Gamma(k)} \approx m^{k-1}\ ,\ m^{k-1} \approx E_m^{k-1} \approx E_{m+\alpha}^{k-1}$$

dır. Böylece (5.6) eşitsizliği,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}E_{m+\alpha}^{k-1}E_{n+\beta}^{k-1}\left|a_{mn}\right|^k < \infty \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}E_{m+\alpha}^{k-1}E_{n+\beta}^{k-1}\left|b_{mn}\right|^k < \infty \tag{5.7}$$

eşitliğine denktir.

$s \in [0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\phi_{mn}(s,t) = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{v=1}^{n}E_{m-\mu}^{\mu+\alpha-1}E_{n-v}^{v+\beta-1}s^{\mu+\alpha}t^{v+\beta}(1-s)^{m-\mu}(1-t)^{n-v}a_{\mu v} \tag{5.8}$$

tanımlanır. Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
|\phi_{mn}(s,t)|^k &= \left|\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{v=1}^{n} E_{m-\mu}^{\mu+\alpha-1} E_{n-v}^{v+\beta-1} s^{\mu+\alpha} t^{v+\beta} (1-s)^{m-\mu} (1-t)^{n-v} a_{\mu v}\right|^k \\
&\leq \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{v=1}^{n} E_{m-\mu}^{\mu+\alpha-1} E_{n-v}^{v+\beta-1} s^{\mu+\alpha} t^{v+\beta} (1-s)^{m-\mu} (1-t)^{n-v} |a_{\mu v}|^k \\
&\quad \times \left\{\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{v=1}^{n} E_{m-\mu}^{\mu+\alpha-1} E_{n-v}^{v+\beta-1} s^{\mu+\alpha} t^{v+\beta} (1-s)^{m-\mu} (1-t)^{n-v}\right\}^{k-1}
\end{aligned}$$

olur. Lemma 5.3 den,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{v=1}^{n} E_{m-\mu}^{\mu+\alpha-1} E_{n-v}^{v+\beta-1} s^{\mu+\alpha} t^{v+\beta} (1-s)^{m-\mu} (1-t)^{n-v} \\
= & \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{v=1}^{n} \binom{m+\alpha-1}{m-\mu} \binom{n+\beta-1}{n-v} s^{\mu+\alpha} t^{v+\beta} (1-s)^{m-\mu} (1-t)^{n-v} \\
= & \sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{v=0}^{n-1} \binom{m+\alpha-1}{m-\mu-1} \binom{n+\beta-1}{n-v-1} s^{\mu+\alpha+1} t^{v+\beta+1} (1-s)^{m-\mu-1} (1-t)^{n-v-1} \\
= & \ st\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{v=0}^{n-1} \binom{m+\alpha-1}{m-\mu-1} \binom{n+\beta-1}{n-v-1} s^{\mu+\alpha} t^{v+\beta} (1-s)^{m-\mu-1} (1-t)^{n-v-1} \\
= & \ O(st)
\end{aligned}$$

dir. Böylece,

$$|\phi_{mn}(s,t)|^k = O(1)(st)^{k-1}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{v=1}^{n} E_{m-\mu}^{\mu+\alpha-1} E_{n-v}^{v+\beta-1} s^{\mu+\alpha} t^{v+\beta} (1-s)^{m-\mu} (1-t)^{n-v} |a_{\mu v}|^k$$

dır. Lemma 5.2 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}E_{m+\alpha}^{k-1}E_{n+\beta}^{k-1}\left|\phi_{mn}(s,t)\right|^{k}\\
&= O(1)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}E_{m+\alpha}^{k-1}E_{n+\beta}^{k-1}(st)^{k-1}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{v=1}^{n}E_{m-\mu}^{\mu+\alpha-1}E_{n-v}^{v+\beta-1}s^{\mu+\alpha}t^{v+\beta}(1-s)^{m-\mu}(1-t)^{n-v}\left|a_{\mu v}\right|^{k}\\
&= O(1)(st)^{k-1}\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{v=1}^{\infty}s^{\mu+\alpha}t^{v+\beta}\left|a_{\mu v}\right|^{k}\sum_{m=\mu}^{\infty}\sum_{n=v}^{\infty}E_{m+\alpha}^{k-1}E_{n+\beta}^{k-1}E_{m-\mu}^{\mu+\alpha-1}E_{n-v}^{v+\beta-1}(1-s)^{m-\mu}(1-t)^{n-v}\\
&= O(1)(st)^{k-1}\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{v=1}^{\infty}s^{\mu+\alpha}t^{v+\beta}\left|a_{\mu v}\right|^{k}E_{\mu+\alpha}^{k-1}E_{v+\beta}^{k-1}\sum_{m=\mu}^{\infty}\sum_{n=v}^{\infty}E_{m-\mu}^{\mu+\alpha+k-2}E_{n-v}^{v+\beta+k-2}(1-s)^{m-\mu}(1-t)^{n-v}\\
&= O(1)(st)^{k-1}\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{v=1}^{\infty}s^{\mu+\alpha}t^{v+\beta}\left|a_{\mu v}\right|^{k}E_{\mu+\alpha}^{k-1}E_{v+\beta}^{k-1}s^{-\mu-\alpha-k+1}t^{-v-\beta-k+1}\\
&= O(1)\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{v=1}^{\infty}E_{\mu+\alpha}^{k-1}E_{v+\beta}^{k-1}\left|a_{\mu v}\right|^{k}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Savaş ve Rhoades (2010) dan eğer (t_{mn}) ve (τ_{mn}) sırasıyla (s_{mn}) ve (mna_{mn}) nin (H,μ_{mn}) dönüşümü ise bu taktirde,

$$\tau_{mn}=mn\Delta_{11}t_{m-1,n-1}$$

olduğu bilinir. Benzer sonuç , $\left(H^{(\alpha,\beta)},\mu^{(\alpha,\beta)}\right)$ içinde ispatlanabilir. Yani,

$$\tau_{mn}=(m+\alpha)\,(n+\beta)\Delta_{11}t_{m-1,n-1}$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned}
b_{mn} &= \frac{1}{(m+\alpha)\,(n+\beta)}\tau_{mn}\\
&= \frac{1}{(m+\alpha)(n+\beta)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m+\alpha}{m-i}\binom{n+\beta}{n-j}\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j}\mu_{ij}^{(\alpha,\beta)}(i+\alpha)(j+\beta)a_{ij}\\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m+\alpha-1}{m-i}\binom{n+\beta-1}{n-j}\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j}\mu_{ij}^{(\alpha,\beta)}a_{ij}\\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}E_{m-i}^{i+\alpha-1}E_{n-j}^{j+\beta-1}\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j}\mu_{ij}^{(\alpha,\beta)}a_{ij}
\end{aligned}$$

olur. $H^{(\alpha,\beta)}$ konservatif olduğundan $\mu_n^{(\alpha,\beta)}$ bir moment dizisidir. Teorem 5.6 dan,

$$\mu_{mn}^{(\alpha,\beta)}=\int_0^1\int_0^1 s^{m+\alpha}t^{n+\beta}d\chi\,(s,t)$$

ve

$$\Delta_1^{m-i}\Delta_2^{n-j}\mu_{ij}^{(\alpha,\beta)} = \int_0^1\int_0^1 s^{i+\alpha}(1-s)^{m-i}t^{j+\beta}(1-t)^{n-j}d\chi(s,t)$$

dir. (5.8) eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
b_{mn} &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}E_{m-i}^{i+\alpha-1}E_{n-j}^{j+\beta-1}\int_0^1\int_0^1 s^{i+\alpha}(1-s)^{m-i}t^{j+\beta}(1-t)^{n-j}d\chi(s,t)a_{ij} \\
&= \int_0^1\int_0^1\left(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}E_{m-i}^{i+\alpha-1}E_{n-j}^{j+\beta-1}s^{i+\alpha}t^{j+\beta}(1-s)^{m-i}(1-t)^{n-j}a_{ij}\right)d\chi(s,t) \\
&= \int_0^1\int_0^1 \phi_{mn}(s,t)d\chi(s,t)
\end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Buradan, Minkowski eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}E_{m+\alpha}^{k-1}E_{n+\beta}^{k-1}\left|b_{mn}\right|^k\right\}^{1/k} &= \left\{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}E_{m+\alpha}^{k-1}E_{n+\beta}^{k-1}\left|\int_0^1\int_0^1 \phi_{mn}(s,t)d\chi(s,t)\right|^k\right\}^{1/k} \\
&\leq \int_0^1\int_0^1 |d\chi(s,t)|\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}E_{m+\alpha}^{k-1}E_{n+\beta}^{k-1}\left|\phi_{mn}(s,t)\right|^k\right\}^{1/k} \\
&= O(1)\int_0^1\int_0^1 |d\chi(s,t)|\left\{\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}E_{\mu+\alpha}^{k-1}E_{\upsilon+\beta}^{k-1}\left|a_{\mu\upsilon}\right|^k\right\}^{1/k}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece bu teorem tamamlanır.

Eğer $\alpha = 0$ ve $\beta = 0$ alırsak sonuç olarak teorem 5.3 elde edilir. Bir double cesaro matrisi (C, γ, δ) terimleri

$$h_{mnij} = \frac{\begin{pmatrix} m+\gamma-i-1 \\ n-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+\delta-j-1 \\ n-j \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} m+\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+\delta \\ \delta \end{pmatrix}}, \gamma, \delta \geq 0$$

olan sonsuz bir double hausdorff matrisidir. $\left(C^{(\alpha,\beta)}, \gamma, \beta\right)$ nın karşı gelen $E-J$ genelleştirmelerini göstermek için (C, γ, δ) nin

$$\mu_{mn}^{(\alpha,\beta)} = \int_0^1\int_0^1 u^{m+\alpha}\upsilon^{n+\beta}\gamma\delta(1-u)^{\gamma-1}(1-\upsilon)^{\delta-1}dud\upsilon$$

moment dizisi vardır ve burada

$$\chi(u,\upsilon)=\gamma\delta\int_0^u\int_0^\upsilon(1-s)^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}dsdt$$

dir. $i\leq m$ ve $j\leq n$ için,

$$\begin{aligned}
h_{mnij}^{(\alpha,\beta)} &= \int_0^1\int_0^1\binom{m+\alpha}{m-i}\binom{n+\beta}{n-j}u^{i+\alpha}\upsilon^{j+\beta}(1-u)^{m-i}(1-\upsilon)^{n-j}d\chi(u,\upsilon)\\
&= \int_0^1\int_0^1\binom{m+\alpha}{m-i}\binom{n+\beta}{n-j}u^{i+\alpha}\upsilon^{j+\beta}(1-u)^{m-i}(1-\upsilon)^{n-j}\gamma\delta(1-u)^{\gamma-1}(1-\upsilon)^{\delta-1}dud\upsilon\\
&= \gamma\delta\binom{m+\alpha}{m-i}\binom{n+\beta}{n-j}\int_0^1\int_0^1 u^{i+\alpha}(1-u)^{m-i+\gamma-1}\upsilon^{j+\beta}(1-\upsilon)^{n-j+\delta-1}dud\upsilon\\
&= \gamma\delta\binom{m+\alpha}{m-i}\binom{n+\beta}{n-j}B(i+\alpha+1,m-i+\gamma)\ B(j+\beta+1,n-j+\delta)\\
&= \frac{\gamma\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(m-i+\gamma)}{\Gamma(m-i+1)\Gamma(m+\alpha+\gamma+1)}\frac{\delta\Gamma\left(n+\beta+1\right)\Gamma(n-j+\delta)}{\Gamma(n-j+1)\Gamma(n+\beta+\delta+1)}\\
&= \frac{\binom{m+\gamma-i-1}{m-i}\binom{n+\delta-j-1}{n-j}}{\binom{m+\alpha+\gamma}{m+\alpha}\binom{n+\beta+\delta}{n+\beta}}\\
&= \frac{E_{m-i}^{\gamma-1}E_{n-j}^{\delta-1}}{E_{m+\alpha}^{\gamma}E_{n+\beta}^{\delta}}
\end{aligned}$$

dır. Özel olarak için, $\gamma,\delta=1$ seçilirse,

$$\left(C^{(\alpha,\beta)},1,1\right)=\begin{cases}\frac{1}{(m+\alpha+1)(n+\beta+1)} & ,i\leq m \text{ ve } j\leq n\\ 0 & ,\text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

double $E-J$ Hausdorff matrisi elde edilir.

SONUÇ

Her bir $r \geq k \geq 1$, $\alpha > -1$, $\beta > \alpha + 1/k - 1/r$ için $\sum a_n$ serisi $|C,\alpha|_k$ toplanabilir ise aynı zamanda $|C,\beta|_k$ toplanabilirdir (Flett,1957). Bu teoremde $r = k$ seçilirse $k \geq 1$, $\beta > \alpha > -1$ için $\sum a_n \, |C,\alpha|_k$ toplanabilir ise aynı zamanda $|C,\beta|_k$ toplanabilirdir sonucu elde edilir.

Bu içerme teoreminde $\alpha = 0$ alınırsa her bir $\beta > 0$ için $(C,\beta) \in (A_k, A_k)\,, k \geq 1$ olduğu sonucuna varılır.

Das (1970), $k \geq 1$ olmak üzere her konservatif Hausdorff matrisi için $H \in (A_k, A_k)$ olduğunu ispatladı ve sonuç olarak $\beta > 0$ için $(C,\beta) \in (A_k, A_k)$ ifadesini elde etti.

Bu çalışmada, double $E-J$ matrislerini tanımlayarak double sonsuz serinin double $E - J$ matrisi dönüşüm dizisinin toplanabilirlik özelliklerini inceledik. Sonuç olarak, Savaş ve Şevli (2009), Savaş ve Rhoades (2009a) ve Savaş ve Rhoades (2009b) tarafından elde edilen sonuçlar genelleştirildi. Knoop ve Lorentz (1949) ve Morley (1950) 'den bir konservatif Hausdorff dönüşümünün mutlak konservatif olduğu bilinmektedir. Das (1970), $k \geq 1$ olmak üzere bir konservatif Hausdorff dönüşümünün $k-$ıncı kuvvetten mutlak konservatif olduğunu ispatlayarak bu sonucu genelleştirmiştir. Birbirinden bağımsız olarak Endl (1960) ve Jakimovski (1959), genelleştirilmiş Hausdorff matrisini aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

β bir reel sayı, $\{\mu_n\}$ bir reel dizi ve Δ, $\Delta\mu_k = \mu_k - \mu_{k+1}$, $\Delta^n(\mu_k) = \Delta(\Delta^{n-1}\mu_k)$ ile tanımlanan fark operatörü olmak üzere

$$h_{nk} := \begin{cases} \begin{pmatrix} n+\beta \\ n-k \end{pmatrix} \Delta^{n-k}\mu_k^{(\beta)} & 0 \leq k \leq n \text{ ise} \\ 0 & k > n \text{ ise} \end{cases} \quad (k,n \in \mathbb{N})$$

elemanları ile tanımlanan sonsuz matrise genelleştirilmiş Hausdorff matrisi denir ve $(H^{(\beta)}, \mu_n^{(\beta)})$ veya kısaca $\left(H^\beta, \mu\right)$ ile gösterildi. Burada $\mu_n^{(\beta)}$, $\chi(t) \in BV\,[0,1]$ olmak üzere

$$\mu_n^{(\beta)} = \int_0^1 t^{n+\beta} d\chi(t)$$

Savaş ve Şevli (2009) tarafından Hausdorff matrisi yerine genelleştirilmiş Hausdorff matrisi alınarak yeni bir teorem ispatlandı ve Das 'ın (1970) teoremi sonuç olarak elde edildi. Bu teorem kullanılarak Hausdorff dönüşümünün özel durumları olan Euler, Hölder, Cesáro matris dönüşümleri için sonuçlar elde edildi.

Bu çalışmayla elde edilen sonuçlar double $E - J$ matrislerine genişletildi ve bir double cesaro matrisi (C, γ, δ) terimleri

$$h_{mnij} = \frac{\begin{pmatrix} m+\gamma-i-1 \\ n-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+\delta-j-1 \\ n-j \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} m+\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+\delta \\ \delta \end{pmatrix}}, \gamma, \delta \geq 0$$

olan sonsuz bir double hausdorff matrisidir. $\left(C^{(\alpha,\beta)},\gamma,\beta\right)$ nın karşı gelen $E-J$ genelleştirmelerini göstermek için (C,γ,δ) nin

$$\mu_{mn}^{(\alpha,\beta)}=\int_0^1\int_0^1 u^{m+\alpha}\upsilon^{n+\beta}\gamma\delta(1-u)^{\gamma-1}\left(1-\upsilon\right)^{\delta-1}du d\upsilon$$

moment dizisi vardır ve $i\leq m$ ve $j\leq n$ için,

$$h_{mnij}^{(\alpha,\beta)}=\frac{E_{m-i}^{\gamma-1}E_{n-j}^{\delta-1}}{E_{m+\alpha}^{\gamma}E_{n+\beta}^{\delta}}$$

dir. Özel olarak için, $\gamma,\delta=1$ seçilirse,

$$\left(C^{(\alpha,\beta)},1,1\right)=\begin{cases}\frac{1}{(m+\alpha+1)(n+\beta+1)} & ,i\leq m \text{ ve } j\leq n\\ 0 & ,\text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

double $E-J$ Hausdorff matrisini elde ettik.

KAYNAKÇA

Apostol, Tom. M., (1973). *Mathematical Analysis second edition* Apostol, China.

Altay, B., (2002). *Bazı yeni çift dizi uzayları,* Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.

Balcı, M., (2003). *Matematik Analiz 1,* 2 ed. Ankara.

Boos, J., (2000). *Classical and Modern Methods in Summability.Oxford University Pres*, London.

C. R, Adams., (1933). *Hausdorff transformations for double sequences*, Bull.Amer. Math. Soc. 39: 303-312.

Das, G., (1970). A tauberian theorem for absolute summability. Proc. Cambridge. Philos. Soc., 67: 321-326.

Endl, K., (1960). *Untersuchungen über momentenprobleme bei verfahren vom Hausdorffschen typus*. Math.Ann., 139: 403-432.

Fekete, M., (1911). *Zur theorie der divergenten reihen. Math. ės Termezs* Értesitö(Budapest), 29: 719-726.

Flett, T. M., (1957). *On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood an Paley*. Proc. London Math. Soc., 7: 113-141.

Fréchet, (1910) *Extension au cas des integrals multiples d'unde definition de l'integrale due á Stieltjes, Nouvelles Annales de Mathématiques*, (4), vol. 10, pp.241-256.

Gordon, (2002). *Russel A. Real Analysis* : A First Course 2nd edition. Boston, Pearson Education Inc.

Hardy, G. H., (1949). *Divergent Series. Oxford University Press*, London.

Hausdorff, F., (1921). *Summationsmethoden und momentfolgen I.Math.* Z., 9: 74-109.

Hildebrandt, T.H., (1963). *Introduction to the theory of ıntegration, pure and Applied mathematics*, Newyork, London.

Hurwitz, W.A., & Silverman, L.L., (1917). *On the consistency and equivalence of certain definitions of summability*, Trans.Amer.Math.Soc. 18: 1-20.

I. J. Maddox., (1970). *Elements of functional analysis*, 2nd ed.1 Printed in Great Britain at the University Press, Cambridge.

Jakimovski, A., (1959). *The product of summability methods*; part 2. Techical Report 8, Jerusalem.

Jakimovski, A., & Ramanujan, M. S., (1964). *A uniform approximation theorem and its application to moment problems.* Math. Zeitshr., 84: 143-153.

Jakimovski, A., (1960). *The sequence-to-function analogues to Hausdorff transformations. Bull.Res.Council Israel Sect.* F, 8:135-154.

J. A. Clarkson., & C. R. Adams., (1933). *On definitions of bounded variation for functions of two variables,* Transactions of Society, vol. 35 , pp. 824-854.

Knopp, K., & Lorentz, G. G., (1949) .*Beiträge zur absoluten limitierung.* Arch.Math.(Basel), 2:10-16.

Kogbetliantz, E., (1925). *Sur les series absolument sommables par la methode* *des moyennes arithmetiques.* Bull. Sci. Math., 49: 234-256.

Morley, H., (1950). *A theorem on Hausdorff transformations and its application to Cesáro and Hölder means.* J.London Math.Soc., 25:168-173.

Móricz, F., (1991). *Extension of the spaces c and c_0 from single to double sequences*, Acta Math, Hungar,57: 129-136.

Petersen, G. M., (1966). *Reguler Matrix Transformations. McGraw-Hill Publishing Company Limited*, London.

Powell, R.E., & Shah, S. M., (1988). *Summability Theory and Applications. Prentice Hall of India Private Limited*, New Delhi.1-155.

Ramanujan, M.S, (1955) On *Hausdorff transformations for double sequences, Proc. Indian* Acad. Sci.Math. Sci. Section A, 42: 131-135.

Rhoades, B.E. (2009). Hausdorff Matrices, Monograf.

Riesz, F., (1909) *Sur les opérations functionelles linéaires C. R.* Acad, Sci. Paris 149, 974-977.

Savaş, E., & Şevli, H., (2009) *Generalized Hausdorff matrices as bounded operators over A_k.* J.Comput. Anal. Appl., 11:702-710.

Savaş, E., & Rhoades, B.E., (2009). *An inclusion theorem for double Cesáro matrices over the space of absolutely k th-convergent double series.* Appl. Math. Lett.22:1462-1466.

Savaş, E., & Rhoades, B.E., (2009) *Every conservative double Hausdorff matrix is a k-th absolutely summable operator.* Anal.Math.35:249-256.

Savaş, E., & Şevli, H., (2010). *On absolute summability for double triangle matrices.* Math. Slovaca 60: 495-506.

Savaş, E., & Şevli, H., (2013). *Some further extensions of ablosute Cesàro summability for double series*, J. Ineq, and Appl. 2013:144.

Selmanoğulları, T., (2010). *Genelleştirilmiş $E - J$ Hausdorff matrisleri*, Doktora Tezi, Mimarsinan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

S. Pollard., (1920). *The Stieltjes integral and its generalizations, Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 49, pp. 73-138.

Şevli, H., (2005). *Mutlak Toplanabilme Metotları,* Doktora Tezi,Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Van.

Şevli H., & Savaş, R., (2014). *On double Hausdorff Summabılıty Method*, Journal of Inequalities and Applications 2014:240 , doi: 10.1186/1029 - 242x - 2014 - 240.

Ustina F., (1967). *The Hausdorff means for double sequences*, Can. Math.Bull.10 347-352.

V.G, IYER., (1985). *Mathematical Analysis, 3^{rd} Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited*, New Delhi.

Wade R.William, (2004). *An Introduction to Analysis, Pearson Education İnternational*, University of Tennessee.

Zygmund, A.,(1979). *Trigonometric Series. 2. Ed, Cambridge Univ. Press.* London.