T.C.
İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# ORTALAMA İLE TANIMLANAN BAZI BANACH UZAYLARINDA GEOMETRİK ÖZELLİKLER

Ruken Çelik

Danışman
Doç. Dr. Necip Şimşek

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
İSTANBUL – 2015

# AKADEMİK VE ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

Tarih

İmza

**Ruken Çelik**

# İÇİNDEKİLER

# ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

**ORTALAMA İLE TANIMLI BAZI BANACH UZAYLARINDA GEOMETRİK ÖZELLİKLER**

**Ruken Çelik**

**İstanbul Ticaret Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Necip Şimşek**

**2015, 58 sayfa**

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde tez ile ilgili genel bilgi verilmiştir.

İkinci bölümünde konu ile ilgili literatür özeti verilmiştir.

Üçüncü bölümünde daha sonra kullanılmak üzere fonksiyonel analizdeki temel tanım ve teoremler ile bazı geometrik kavramlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde Banach uzaylarında ortalama özelliği verilmiştir.

Beşinci bölümde de la Vallee-Poussin ortalaması ile tanımlı dizi uzaylarının bazı topolojik ve geometrik özellikleri verilmiştir. Ayrıca ortalama ile tanımladığımız yeni dizi uzayının bazı geometrik özellikleri verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Banach-Saks operatör Banach-Saks özelliği, convex block Banach-Saks özelliği, de la Vallee-Poussin ortalama.

# ABSTRACT

**M.Sc. Thesis**

**GEOMETRIC PROPERTIES IN SOME BANACH SPACES WHICH ARE DEFINED BY AVERAGING**

**Ruken Çelik**

**İstanbul Commerce University**
**Graduate School of Applied and Natural Sciences**
**Department of Mathematics**

**Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Necip Şimşek**

**2015, 58 pages**

In first chapter of this study which has five chapter, general information about of study is given.

In second chapter abstract of the literature of subject is given.

In third chapter basic definitions, theorems and some geometric notions are given which are used in study.

In fourth chapter averaging property in Banach spaces is given.

In fifth chapter some topological and geometric properties of sequence spaces which are defined by de la Vallee-Poussin mean are given. Furthermore, some geometric properties of new sequence which is defined by averaging are given.

**Keywords:**Banach-Saks property, Banach-Saks operator, convex block Banach-Saks property, de la Vallee-Poussin mean.

# TEŞEKKÜR

Bu araştırmada karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmama yardımcı olan, literatür araştırmalarımda beni yönlendiren, sabır ve güler yüzlülüğünü hiçbir zaman esirgemeyen, her anlamda bana destek olan değerli Danışman Hocam Doç. Dr. Necip Şimşek'e teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Ruken ÇELİK

İSTANBUL, 2015

# SİMGELER VE KISALTMALAR

| | |
|---|---|
| $N$ | Doğal Sayılar |
| $R$ | Reel Sayılar |
| $\rho$ | Konveks Modül |
| $ces_p$ | Cesaro Dizi Uzayı |
| $ces\,(p)$ | Genelleştirilmiş Cesaro Dizi Uzayı |
| $co(C)$ | $C$ Kümesinin Konveks Kabuğu |
| $\overline{co}(C)$ | $C$ Kümesinin Kapalı Konveks Kabuğu |
| $B(X)$ | $X$ zayının Kapalı Birim Küresi |
| $S(X)$ | $X$ Uzayının Birim Küresi |
| $X_\rho$ | Modüler Uzay |
| $\overset{w}{\rightarrow}$ | Zayıf Yakınsama |
| $X^*$ | Dual Uzay |
| $\delta(\varepsilon)$ | Konekslik Modülü |
| $\pi_i$ | Koordinat Dönüşümü |

# 1. GİRİŞ

Bu çalışmada, ilk olarak literatüre dair kısa bir bilgi verilmiştir.

Sonrasında, çalışmada kullanılan fonksiyonel analize ait bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Özel olarak, bazı geometrik özellikler ve bunlarla ilgili önemli birkaç örneğe de yer verilmiştir.

Daha sonra Banach uzaylarında ortalama özelliğine değinilmiştir. Banach-Saks özelliğinin tanımı ile birlikte diğer bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Son bölümde ise ilk olarak, de la Vallee-Poussin ortalaması ile tanımlı dizi uzaylarının bazı geometrik özelliklerine değinilmiştir. Bu ortalama ile tanımlanan $V(\lambda,p)$ uzayının $h(x)$ paranormuna göre tam paranormlu bir uzay olduğu gösterilmiştir. Ayrıca $V(\lambda,p)$ uzayının $p_k = p$ özel durumu için $V_p(\lambda)$ uzayına indirgendiği gösterilmiştir. Ayrıca bu uzayın $\|x\|_{V_p(\lambda)}$ normuna göre bir Banach uzayı olduğu ve $p$-tipinde Banach-Saks özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir. Daha sonra $V_\rho(\lambda,p)$ modular uzayının Luxemburg normuna göre bir Banach uzayı olduğu ve Kadec-Klee özelliğine sahip olduğu verilmiştir [33].
İkinci olarak da, ortalama ile tanımlı $V_{\lambda,p}$ yeni paranormlu dizi uzayı inşa edilerek, bu uzayın $h(x)$ paranormuna göre tam paranormlu bir uzay olduğu gösterilmiştir. $V_{\lambda,p}$ uzayının $p_k = p$ özel durumu için $V_\lambda^p$ uzayına indirgendiği gösterilmiştir. $V_\lambda^p$ uzayının Banach uzayı olduğu ve konveks block Banach-Saks özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şartın $V_\lambda^p$ uzayının refleksif olması gerektiği ispat edilmiştir. Ayrıca $V_{\rho(\lambda,p)}$ modular uzayının Luxemburg normuna göre bir Banach uzayı olduğu ve Kadec-Klee özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir. $T : V_\lambda^p \to V_\lambda^p$ zayıf kompakt olması için gerek ve yeter şartın $T : V_\lambda^p \to V_\lambda^p$ operatörünün konveks block Banach-Saks özelliğine sahip olması gerektiği ispat edilmiştir.

# 2. LİTERATÜR ÖZETİ

Dizi uzaylarının topolojik özelliklerinden farklı olarak geometrik özellikleri de son zamanlarda geniş bir çalışma alanına sahip olmuştur. Fonksiyonel analizin anlaşılmasında güçlük çekilen bazı kavramlara bu sayede açıklık getirilmiştir. Bu çalışmalardan bazıları aşağıda verilmektedir.

Toplanabilme teorisinde, de la Vallee-Poussin ortalaması ilk olarak $(V,\lambda)$-toplanabilirliği tanımlamak için Leindler tarafından kullanılmıştır [18]. Malkovsky ve Savaş genelleştirilmiş de la Vallee-Poussin ortalamalarından doğan yeni dizi uzayları tanımlamışlardır [24]. Ayrıca bu dizi uzayları birçok yazar tarafından çalışılmıştır [11] ve [28].

İlk olarak Cesaro dizi uzayını normla birlikte 1970 yılında Shue tanımlamıştır [31]. Birçok özelliği ile Cesaro dizi uzayları $(ces_p)$, birçok yazar tarafından çalışılmıştır. $(ces_p)$ nin Kadec-Klee ve yerel rotund olma özelliklerine sahip olduğunu 1996 yılında Liu, Wu ve Lee göstermişlerdir [20]. $ces_p$ nin $p$-tipte Banach-Saks özelliğini 1997 yılında Cui, Hudzik ve Pluciennik çalışmışlardır [7]. Normlu Cesaro dizi uzaylarını paranormlu dizi uzaylarına 2003 yılında Sanhan ve Suantai genelleştirmişlerdir ve genelleştirilmiş Cesaro dizi uzayları üzerinde *k-NUC* özelliğini çalışarak diğer geometrik özelliklere ilişkin sonuçlar elde etmişlerdir [27]. Lacunary içerikli yeni bir dizi uzayı tanımlayıp bu uzayı Luxemburg normu ile donatarak bu uzay üzerinde Kadec-Klee ve rotund olma gibi geometrik özellikleri 2007 yılında V. Karakaya incelemiştir [14]. $l(p)$-tipte yeni bir dizi uzayı tanımlayarak bu uzayın bazı topolojik özellikleri ile $p$-tipte Banach-Saks ve Gurarii konvekslik modülü ile ilgili geometrik özelliklerini 2009 yılında Savaş, Karakaya ve Şimşek incelemişlerdir [15]. $V_\rho(\lambda,p)$ modular uzayının Kadec-Klee özelliğine sahip olduğunu 2010 yılında Simsek. Savas ve Karakaya ispatlamıştır. Ayrıca $V_\rho(\lambda,p)$ modular uzayının Luxemburg normuna göre bir Banach uzayı olduğunu ve $V_\rho(\lambda)$ uzayının $p$-tipinde Banach-Saks özelliğine sahip olduğunu ispatlamışlardır [32].

$L_p[0,1]$ uzayındaki her sınırlı dizinin aritmetik ortalaması kuvvetli yakınsayan bir altdizisinin olduğunu Banach ve Saks göstermişlerdir [3]. $C[0,1]$ dizi uzayının bu özelliğe sahip olmadğını Schrier göstermiştir [29]. Yukarıdaki sonuçlar bize şu soruyu dikkatle ele almamızı önermektedir. "$X$ Banach uzayı Banach-Saks özelliğine sahiptir ne demektir" yani $X$ deki her sınırlı dizinin, aritmetik ortalaması kuvvetli yakınsayan bir alt diziye sahip olması ne ifade eder?

$X$ düzgün konveks ise $X$ uzayının Banach-Saks özelliğine sahip olduğunu 1938 yılında Kakutani göstermiştir [13]. Bir $X$ Banach uzayı Banach-Saks özelliğine sahip ise $X$ refleksiftir ifadesini 1963 yılında Nishiura ve Waterman ispatlamışlardır [25]. Bir refleksif Banach uzayının Banach-Saks özelliğine sahip olmadığı örneğini 1972 yılında Baernstein vermiştir [2]. Düzgün konveks olmayan Baernstein dual uzayının Banach-Saks özelliğine sahip olduğunu 1978 yılında Seifert göstermiştir [30]. Bir $X$ Banach uzayının konveks block Banach-Saks özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart $X$ uzayının refleksif olmasıdır ifadesini 2002 yılında Cho göstermiştir. Ayrıca Cho $T$ operatörünün zayıf kompakt olması için gerek ve yeter şartın $T$ operatörünün konveks block Banach-Saks operatör olduğunu ispatlamıştır [6].

# 3. TEMEL KAVRAMLAR

## 3.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde bazı tanım ve teoremler ile birlikte bazı geometrik kavramlar verilmiştir.

**Tanım 3.1.1 (Metrik uzay)**

$X$, boştan farklı bir cümle olmak üzere;

*(M1)* $\forall x, y \in X, d(x, y) \in R^{+} \cup \{0\}$

*(M2)* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

*(M3)* $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$

*(M4)* $\forall x, y, z \in X, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

aksiyomlarını sağlayan

$$d : X \times X \rightarrow R^{+}$$

fonksiyonuna $X$ için bir metrik, $(X, d)$ ikilisine de metrik uzay denir [17].

**Tanım 3.1.2 (Yakınsak dizi)**

$X = (X, d)$ bir metrik uzay olmak üzere $(x_n)$, $X$ uzayında bir dizi olsun.

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $(x_n)$ dizisi yakınsaktır denir [17].

**Tanım 3.1.3 (Cauchy dizisi)**

$X=(X,d)$ bir metrik uzay olmak üzere $(x_n)$, $X$ uzayında bir dizi olsun. $\forall\varepsilon>0$ ve her $m,n>N$ için $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ olacak şekilde bir $N=N(\varepsilon)$ varsa $(x_n)$ dizisi Cauchy dizisi olarak adlandırılır [17].

**Tanım 3.1.4 (Tam metrik uzay)**

$(X,d)$ bir metrik uzay olsun. Eğer $X$ uzayında her bir Cauchy dizisi $X$ uzayında bir noktaya yakınsıyorsa $X$ uzayına tam metrik uzay denir [21].

**Tanım 3.1.5 (Lineer uzay)**

$X$ boş olmayan bir cümle ve $K$, reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+:X\times X\to X$$
$$\cdot:K\times X\to X$$

ikili işlemleri aşağıda verilen özellikleri sağlıyorsa $X$ cümlesine $K$ üzerinde bir lineer (vektör) uzay adı verilir [21].

Her $\alpha,\beta\in K$ ve $x,y,z\in X$ için

*(L1)* $x+y=y+x$

*(L2)* $x+(y+z)=(x+y)+z$

*(L3)* $x+\theta=x$ olacak şekilde $\theta\in X$ vardır.

*(L4)* Her bir $x\in X$ için $x+(-x)=\theta$ olacak şekilde $(-x)\in X$ vardır.

*(L5)* $1.x=x$

*(L6)* $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

*(L7)* $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

*(L8)* $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$

**Tanım 3.1.6 (Lineer alt uzay)**

$X$ bir lineer uzay ve $M$ de $X$ uzayının bir alt cümlesi olsun. $x, y \in M$ ve $\alpha, \beta$ skaler olmak üzere $\alpha x + \beta y \in M$ ise $M$ uzayına $X$ uzayının bir lineer alt uzayı denir [21].

**Tanım 3.1.7 (Normlu lineer uzay)**

$X$, $K$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\| . \| : X \to R$$

fonksiyonu

*(N1)* $\| x \| \geq 0$

*(N2)* $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

*(N3)* $\| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|, \lambda \in K$

*(N4)* $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (Üçgen Eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa $\| . \|$ fonksiyonuna $X$ uzayı üzerinde bir norm ve $(X, \| . \|)$ çiftine de normlu lineer uzay denir [21].

Her normlu lineer uzay $d(x, y) = \| x - y \|$ metriği ile üretilir ve norm tarafından üretilen metrik olarak adlandırılır.

**Tanım 3.1.8 (Yakınsak dizi)**

Normlu bir $X$ uzayında bir $(x_n)$ dizisi alalım. Eğer $X$ uzayı

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x \| = 0$$

olacak şekilde bir $x$ elemanı içeriyor ise $(x_n)$ dizisi yakınsaktır denir. [17].

**Tanım 3.1.11 (Banach uzayı)**

Bir $(X,\|.\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi $X$ uzayı içinde bir limite sahip ise, bu $(X,\|.\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir [21].

**Tanım 3.1.9 (Paranormlu uzay)**

$X$, $K$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $g: X \to R$ fonksiyonu, $\lambda \in K$ ve $x, y \in X$ için

*i.* $g(\theta)=0$,

*ii.* $g(x)=g(-x)$,

*iii.* $g(x+y) \leq g(x)+g(y)$,

*iv.* $\lambda \to \lambda_0$ ve $g(x-x_0) \to 0$ iken $g(\lambda x-\lambda_0 x_0) \to 0$

şartlarını sağlıyorsa $g$ fonksiyonuna bir paranorm ve $(X,g)$ ikilisine de paranormlu uzay denir [24].

**Tanım 3.1.10 (Tam paranormlu uzay)**

Bir $(X,g)$ paranormlu uzayında alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa $(X,g)$ uzayına tam paranormlu uzay denir [21].

**Tanım 3.1.12 (Klasik dizi uzayları)**

Kompleks ve reel değerli tüm $x=(x_k)$ dizilerinin cümlesi $\omega$ olarak gösterilmek üzere;

$x=(x_k)$, $y=(y_k) \in \omega$ ve $\alpha$ bir sabit olsun.

$$x+y=(x_k+y_k) \text{ ve } \alpha x=(\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında $\omega$ bir lineer uzaydır. Literatürde yer alan bazı iyi bilinen dizi uzayları aşağıda verilmiştir.

$$l_\infty = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sup_{k \in N} |x_k| < \infty \right\}$$

$$c = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \lim_{k \to \infty} x_k = l, l \in R \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \lim_{k \to \infty} x_k = 0 \right\}$$

$$l_1 = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty \right\}$$

$$l_p = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

$$cs = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \lim_{n \to \infty} \left| \sum_{k=1}^{n} |x_k| \right| = 0 \right\}$$

$$bs = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sup \left| \sum_{k=1}^{n} |x_k| \right| < 0 \right\}$$

Bu uzaylar sırasıyla sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak, mutlak yakınsak, $p$-yakınsak, yakınsak seriler ve sınırlı seriler uzayı olarak adlandırılır. Bu uzaylardan $l_\infty, c, c_0$ uzayları $\|x\| = \sup_k |x_k|$ normu altında birer Banach uzaylarıdır. Aynı şekilde $l_1$ ve $l_p$ uzayları sırasıyla $\|x\|_1 = \sum_k |x_k|$ ve $\|x\|_p = \left( \sum_k |x_k|^p \right)^{1/p}$ normları ile birer Banach uzayıdır. Bu uzaylar arasında ise

$$l_1 \subset l_p \subset l_q \subset c_0 \subset c \subset l_\infty \quad (1 < p < q < \infty)$$

şeklinde bir kapsama bağıntısı olup, aşağıda verildiği gibi bir norm eşitsizliği geçerlidir [21].

$$\|x\|_1 \geq \|x\|_p \geq \|x\|_q \geq \|x\|_\infty$$

**Tanım 3.1.13 (Lineer fonksiyonel)**

$X$ bir lineer uzay olmak üzere $f:X\rightarrow C$ dönüşümüne bir fonksiyonel denir. Eğer her $x,y\in X$ için $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$ eşitsizliği gerçekleniyor ise $f$ fonksiyoneline alttoplamsal, $f(x+y)=f(x)+f(y)$ eşitliği gerçekleniyor ise $f$ fonksiyoneline toplamsaldır denir. Eğer her $x\in X$ ve her $\lambda$ skaleri için $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ ise $f$ fonksiyoneline homojendir denir. Homojen ve alt toplamsal olan bir fonksiyonele alt lineer, toplamsal ve homojen olan bir fonksiyonele ise lineer fonksiyonel denir. Her $x\in X$ için $|f(x)|\leq K.\|x\|$ olacak şekilde bir $K>0$ ve reel sayısı varsa $f:X\rightarrow C$ dönüşümüne sınırlı lineer fonksiyonel adı verilir.

Sınırlı bir lineer fonksiyonelin normu ise

$$\|f\|=\sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [21].

**Tanım 3.1.14 (Sürekli dual uzay)**

$X$ normlu bir uzay olsun. $X$ uzayı üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan $B(X,R)$ cümlesi

$$\|f\|=\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|x\|}=\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}|f(x)|$$

normu ile bir Banach uzayı oluşturur. Bu uzaya $X$ uzayının dual uzayı denir ve $X^*$ ile gösterilir [21].

**Tanım 3.1.15 (İkinci dual)**

$X^*$, $X$ Banach uzayının duali olmak üzere $B(X^*,R)$ uzayına $X$ uzayının ikinci duali denir ve $X^{**}$ ile gösterilir. $X^{**}$ uzayı da bir Banach uzayıdır [21].

**Tanım 3.1.16 (Kuvvetli yakınsaklık)**

$X$ bir normlu lineer uzay ve $(x_n) \in X$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $(x_n)$ dizisi $x$ noktasına kuvvetli yakınsak olarak adlandırılır [17].

**Tanım 3.1.17 (Zayıf yakınsaklık)**

$X$ bir normlu lineer uzay ve $(x_n) \in X$ olmak üzere her $f \in X^*$ için $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $(x_n)$ dizisi $x$ noktasına zayıf yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{w} x$ şeklinde gösterilir [17].

**Tanım 3.1.18 (Operatör ve lineer operatör)**

Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

$L$ ve $L'$ aynı bir $F$ cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T : L \to L'$ operatörü $(\alpha \in F)$ olmak üzere

*(i)* $T(x+y) = T(x) + T(y)$

*(ii)* $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

şartlarını sağlıyorsa $T$ operatörüne lineer operatör denir [4].

**Tanım 3.1.19 (Sınırlı lineer operatör ve operatör normu)**

$N$ ve $N'$ normlu uzay ve $T : N \to N'$ lineer operatör olsun. Her $x \in N$ için

$$\|T(x)\|' \leq K\|x\|$$

olacak şekilde bir $K \geq 0$ reel sayısı varsa $T$ operatörüne sınırlı (lineer) operatör denir.

$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in N, x \neq \theta\right\}$ ile tanımlanan $\|T\|$ ye ise $T$ operatörünün normu denir [4].

### 3.2. Banach Uzaylarında Temel Geometrik Kavramlar

Bu bölümde Banach uzaylarının geometrisinde kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

**Tanım 3.2.1 (Konveks uzay)**

$C$, $X$ lineer uzayının alt kümesi olsun. $x, y \in C$ ve her $\lambda \in [0,1]$ skaleri için $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$ ise $C$ kümesi konveks küme olarak adlandırılır [1].

**Tanım 3.2.2 (Konvekslik modülü)**

$X$ Banach uzayının konvekslik modülü $\delta_x : [0,2] \to [0,1]$ olmak üzere;

$$\delta_x(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\| \le 1, \|y\| \le 1, \|x-y\| \ge \varepsilon\right\}$$

şeklinde tanımlanır [7].

**Tanım 3.2.3 (Düzgün konveks uzay)**

Her bir $\varepsilon \in (0,2]$ için $x, y \in X$ olmak üzere

$$\left.\begin{array}{l} \|x\| \le 1 \\ \|y\| \le 1 \\ \|x-y\| > \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \le \delta$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa $X$ Banach uzayı düzgün konvekstir denir [8].

**Yardımcı Önerme 3.2.1**

$X$ düzgün konvekstir $\Leftrightarrow \delta(\varepsilon) > 0$.

**Örnek 3.2.1** $x_1, x_2 \in R^2$ olmak üzere;

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$$
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

normları ile $l_2^1$ ve $l_2^\infty$ uzayları elde edilir. Bu uzayların her birinin birim yuvarı kareseldir ve her biri için $\varepsilon \in [0,2]$ olmak üzere $\delta(\varepsilon) = 0$ dir. Dolayısıyla düzgün konveks uzay değillerdir.

**Örnek 3.2.2** $l_p \ (2 \leq p \leq \infty)$ uzayları için

$$\delta_{l_p}(\varepsilon) = \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}, \varepsilon \in (0,2) \text{ [1].}$$

Bunu görmek için $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon \in (0,2)$ ve $x, y \in l_p$ alalım. $\delta_{l_p}(\varepsilon) \geq 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|$ olduğunda

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = 1 - \left[\left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$
$$\leq 1 - \delta_{l_p}(\varepsilon)$$

ifadesini gerektiren [1, (2.7) den].

$$\|x + y\|^p \leq 2^p - \|x - y\|^p$$

ifadesi elde edilir.

**Tanım 3.2.4 (Refleksif uzay)**

$X$ normlu bir uzay olmak üzere $X^{**} = X$ ise $X$ uzayına refleksif uzay denir [21].

**Tanım 3.2.5 (Kadec-Klee özelliği)**

$X$ Banach uzayının birim küresindeki herhangi bir dizi için zayıf yakınsaklık ve norm yakınsaklık eşdeğer ise $X$ Kadec-Klee özelliğine sahiptir denir [32].

**Tanım 3.2.6 (Banach-Saks özelliği)**

$X$ Banach uzayındaki her sınırlı $(x_n)$ dizisi,

$$t_k(z)=\frac{1}{k}(z_1+z_2+\dots+z_k)$$

şeklinde tanımlanmak üzere $(t_k(z))$, $X$ de norm yakınsak olacak şekilde $z=(z_n)$ alt dizisine sahip ise $X$ uzayı Banach-Saks özelliğine sahiptir denir [9].

**Tanım 3.2.7 (p-tipte Banach-Saks özelliği)**

$1<p<\infty$ olmak üzere $C>0$ ve her $n\in N$ için her sıfıra zayıf yakınsak $(x_k)$ dizisi

$$\left\|\sum_{l=0}^{n} x_{kl}\right\|<C(n+1)^{\frac{1}{p}}$$

olacak şekilde bir $(x_{kl})$ alt dizisine sahip ise Banach uzayı $p$-tipte Banach-Saks özelliğine sahiptir denir [16].

**Teorem 3.2.1** Banach-saks özelliğine sahip her Banach uzayı refleksiftir fakat tersi doğru değildir [9].

**Teorem 3.2.2** Herhangi düzgün konveks bir Banach uzayı Banach-Saks özelliğine sahiptir [13].

+

**Tanım 3.2.8 (Konveks kabuk ve kapalı konveks kabuk)**

$C$, $X$ uzayının keyfi bir alt uzayı (konveks olması gerekmiyor) olsun. $X$ uzayında $C$ nin konveks kabuğu; $X$ uzayındaki bütün konveks alt kümelerin kesişimidir ve $co(C)$ ile gösterilir. Yani;

$$co(C) = \cap\{D \subseteq X : C \subseteq D, D\, konvekstir\}$$

O halde $co(C)$, $C$ yi içeren en küçük tek konveks kümedir. Açıkça

$$co(C) = \left\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n : x_i \in C, \alpha_i \geq 0 \text{ ve} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\right\}$$

$= C$ nin elemanlarının bütün konveks kombinasyonlarının uzayı

olarak yazılır.

$C$ nin konveks kabuğunun kapanışı $\overline{co(C)}$ ile gösterilir. Böylece

$$\overline{co(C)} = \overline{\left\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n : x_i \in C, \alpha_i \geq 0 \text{ ve} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\right\}}$$

elde edilir.

$X$ uzayındaki $C$ nin kapalı konveks kabuğu; $X$ uzayındaki bütün kapalı konveks alt kümelerin kesişimidir ve $\overline{co}(C)$ ile gösterilir. Yani;

$$\overline{co}(C) = \cap\{D \subseteq X : C \subseteq D, D\, kapali\ ve\, konveks\}\ [1].$$

**Tanım 3.2.9 (Zayıf kompakt)**

$C$, $X$ normlu uzayının bir alt kümesi olsun. $C$ kümesi, üzerindeki zayıf topolojiye göre kompakt ise $C$ kümesine zayıf kompakt olarak adlandırılır [1].

**Tanım 3.2.10 (Sonsuz reel matris)**

$C$, $X$ lineer uzayının boş olmayan bir konveks alt kümesi ve $T : C \to C$ bir dönüşüm olsun. $A = [a_{i,j}]$;

*(A1)* $A$ matrisi, girişleri negatif olamayan altüçgensel bir matris (her $n,i \in N$ için $a_{n,i} \geq 0$ ve her $i > n$ için $a_{n,i} = 0$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

*(A2)* her bir dizinin toplamı 1 dir, yani her $n \in N$ için $\sum_{i=}^{n} a_{n,i} = 1$,

*(A3)* her $i \in N$ için $\lim_{n\to\infty} a_{n,i} = 0$

şartlarını sağlıyorsa $A = [a_{i,j}]$ sonsuz reel matris olarak adlandırılır [1].

**Tanım 3.2.11 (Zayıf kapalılık )**

$C$, bir $X$ Banach uzayının bir alt kümesi olsun. $C$ kümesi zayıf topolojiye göre kapalı ise $C$ kümesi zayıf kapalı olarak adlandırılır [1].

Bu çalışmada $l^0$ ile bütün reel $x = (x(i))_{i=1}^{\infty}$ dizilerinin uzayını göstereceğiz. Ayrıca; $(X, \|.\|)$ (ksaca $X = (X, \|.\|)$) bir lineer normlu uzay ve $S(X)$ ve $B(X)$ $X$ uzayında sırasıyla birim küre ve birim yuvarı gösterecektir.

**Tanım 3.2.12 (Köthe dizi uzayı ve sıralı sürekli uzay)**

$l^0$ uzayının bir altuzayı $X$ Banach uzayı aşağıdaki şartları sağlıyor ise Köthe dizi uzayı olarak adlandırılır;

*(i)* $\forall i \in N$ için $|x(i)| \leq |y(i)|$ olacak şekilde herhangi bir $x \in l^0$ ve $y \in X$ için $x \in X$ ve $\|x\| \leq \|y\|$ elde ederiz.

*(ii)* $\forall i \in N$ için $x(i) > 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır.

Her bir $i \in N$ ve $x_n(i) \to 0\,(n \to \infty)$ için $x_n(i) \leq |x(i)|$ olacak şekilde $X$ uzayındaki herhangi bir $(x_n)$ dizisi için $\|x_n\| \to 0$ sağlanıyor ise $x \in X$ sıralı sürekli olarak adlandırılır. Eğer $X$ uzayındaki bütün diziler sıralı sürekli ise $X$ Köthe dizi uzayı sıralı sürekli olarak adlandırılır. Bir $x \in X$ in sıralı sürekli olması için gerek ve yeter şart $(n \to \infty)$ için $\|(0,0,...,0,x(n+1),x(n+2),...)\| \to 0$ şartının sağlanmasıdır [19].

**Tanım 3.2.13 (Modüler)**

Bir reel vektör uzayı *X* için, bir $\rho : X \to [0,\infty]$ fonksiyoneli aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu $\rho$ fonksiyoneli modular olarak adlandırılır;

*i.* $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

*ii.* $\rho(\alpha x) = \rho(x)$, her $\alpha \in F$ ve $|\alpha| = 1$ için,

*iii.* $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, her $x, y \in X$, her $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ için,

Ek olarak, eğer aşağıdaki şart sağlanıyorsa $\rho$ konveks modüler olarak adlandırılır;

*iv.* $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)$ eşitsizliği $x, y \in X$ her $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ için sağlanır [32].

**Tanım 3.2.14 (Luxemburg normu ve Amemiya normu)**

$\rho$, $X$ uzayında bir modular olsun.

$$X_\rho = \{x \in X : \rho(\lambda x) \to 0, \lambda \to 0^+ \text{ için}\},$$

$$X_\rho^* = \{x \in X : \rho(\lambda x) < 0, \text{bazı } \lambda > 0 \text{ için}\}$$

$X_\rho \subseteq X_\rho{}^*$ olduğu aşikardır. $\rho$, $x \in X_\rho$ için bir konveks modular ise

$$\|x\|_L = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$$

ve

$$\|x\|_A = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda}(1 + \rho(\lambda x))$$

$\rho$, $X$ üzerinde bir konveks modular ise $X_\rho = X_\rho^*$ ve $X_\rho$ bir Banach uzayı olduğunda $\|x\|_L$ ve $\|x\|_A$ $X_\rho$ üzerinde birer normdur.

$\|.\|_L$ ve $\|.\|_A$ normları sırasıyla Luxemburg normu ve Amemiya normu (Orlicz normu) olarak adlandırılır [26].

Ek olarak bütün $x \in X_\rho$ için

$$\|x\|_L \leq \|x\|_A \leq 2\|x\|_L$$

denkliği sağlanır.

**Tanım 3.2.15 (Modüler yakınsaklık)**

$n \to \infty$ için $\rho(\lambda(x_n - x)) \to 0$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ var ise $X_\rho$ nun bir $(x_n)$ dizisi, $x \in X_\rho$ ya modüler yakınsaktır denir [32].

**Önerme 3.2.1** $(x_n) \subset X_\rho$ olsun. $\|x_n\|_L \to 0$ olması için gerek ve yeter şart $n \to \infty$ için $\rho(\lambda(x_n)) \to 0$ olmasıdır.

İspat. [26].

Çalışmanın bundan sonraki kısmında $p_k > 1$ için $p = (p_k)$ dizisini pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi ve $H = \sup_k p_k$ ve $M = \max\{1, H\}$ olarak kabul edeceğiz. Tüm bunların yanında, aşağıdaki eşitsizliklere de ihtiyacımız olacaktır;

$t_k = \dfrac{p_k}{M} \leq 1$ ve $H = \sup_k p_k$ için $K = \max\{1, 2^{H-1}\}$ olduğunda

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq K\left(|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}\right) \quad (3.1)$$

$$|a_k + b_k|^{t_k} \leq |a_k|^{t_k} + |b_k|^{t_k} \quad (3.2)$$

# 4. BANACH UZAYLARINDA ORTALAMA ÖZELLİĞİ

Bu bölümde Banach uzaylarında ortalama özelliğine değinilmiş, bazı geometrik kavramlar verilmiş ve bu kavramlara ilişkin bazı sonuçlar incelenmiştir. Baş kısımda da vermiş olduğumuz, bu kısıma ait literatür akışını tekrar hatırlatmak istiyoruz: $X$ düzgün konveks ise $X$ uzayının Banach-Saks özelliğine sahip olduğunu 1938 yılında Kakutani göstermiştir [13]. Bir $X$ Banach uzayı Banach-Saks özelliğine sahip ise $X$ in refleksif olduğunu 1963 yılında Nishiura ve. Waterman ispatlamıştır [25]. Refleksif bir Banach uzayının Banach-Saks özelliğine sahip olmadığı örneğini 1972 yılında Baernstein vermiştir [2]. Düzgün konveks olmayan bir Baernstein dual uzayının Banach-Saks özelliğine sahip olduğunu 1978 yılında Seifert göstermiştir [30]. Bir $X$ Banach uzayının konveks block Banach-Saks özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şartın $X$ in refleksif olduğunu 2002 yılında K. Cho göstermiştir. Ayrıca K. Cho $T$ operatörünün zayıf kompakt olması için gerek ve yeter şartın $T$ operatörünün konveks block Banach-Saks operator olduğunu ispatlamıştır [6].

Bu geometrik özelliklerin birbirleri ile ilişkilerini aşağıdaki içerme tablosundan da açıkça görülebilir.

Düzgün konvenks $\overset{\text{Kakutani}}{\Rightarrow}$ Banach-Saks özelliği

Banach-Saks özelliği $\overset{\text{Nishiura ve Waterman}}{\Rightarrow}$ Refleksif

Refleksif $\overset{\text{Baernstein}}{\nRightarrow}$ Banach-Saks özelliği

Düzgün Konveks olmama $\overset{\text{Seifert}}{\Rightarrow}$ Banach-Saks özelliği

**Tanım 4.1 (Banach-Saks özelliği)**

$X$ bir Banach uzayı olmak üzere; bu uzaydaki her sınırlı dizinin aritmetik ortalamalarının dizisi, norma göre yakınsak bir alt dizi barındırıyorsa; bu $X$ uzayına Banach-Saks özelliğine sahiptir denir [6].

**Tanım 4.2 (Konveks block Banach-Saks özelliği)**

$X$ bir Banach uzayı olmak üzere; bu uzaydaki her sınırlı dizinin aritmetik ortalamalarının dizisi, norma göre yakınsak konveks blok bir alt diziyi barındırıyorsa; bu $X$ uzayına konveks blok Banach-Saks özelliğine sahiptir denir [6].

**Teorem 4.1** Bir $X$ Banach uzayının konveks block Banach-Saks özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart $X$ uzayının refleksif olmasıdır [6].

Teorem 4.1 ispatından önce, ispatta kullanılacak bazı tanım ve teoremleri verelim.

**Yardımcı Teorem 4.1** $(x_n)$ zayıf yakınsak bir dizi olsun. O halde $(x_n)$ dizisinin kuvvetli yakınsak bir konveks block $(y_n)$ dizisi vardır [6].

**İspat** $(x_n) \to x$ zayıf yakınsamasını kabul edelim. O halde her $s \in N$ için

$$x \in \overline{co}^{w}\{x_n\}_{n\geq s} = \overline{co}^{\|\cdot\|}\{x_n\}_{n\geq s}$$

olduğundan $s=1$ için $co\{x_n\}_{n\geq 1}$ içinde $\|y_1 - x\| < \frac{1}{2}$ olacak şekilde $y_1 = \sum_{j=1}^{p_1} a_j x_j$ konveks kombinasyonu vardır.

$$x \in \overline{co}^{w}\{x_n\}_{n\geq p_1+1} = \overline{co}^{\|\cdot\|}\{x_n\}_{n\geq p_1+1}$$

olduğundan $co\{x_n\}_{n\geq p_1+1}$ içinde $\|y_2 - x\| < \frac{1}{2^2}$ olacak şekilde $y_2 = \sum_{j=p_1+1}^{p_2} a_j x_j$ konveks kombinasyonu vardır. Bu şekilde devam edilirse, $\|y_n - x\| < \frac{1}{2^n}$ olacak şekilde $(x_n)$ in bir $(y_n)$ konveks block dizisini elde ederiz. Bu da $(y_n)$ dizisinin $x$ e kuvvetli yakınsadığı anlamına gelir.

**Tanım 4.3 (*R*-matris)**

Bir reel sonsuz $A=(\alpha_{ij})$ matrisinin bir $R$-matris olarak adlandırılması için gerek ve yeter şart

*i.* $i\to\infty$ ise $\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\not\to 0$

*ii.* her $j\in N$ için $\lim_{i\to\infty}\alpha_{ij}=0$

Bir $A=(\alpha_{ij})$ matrisinin herhangi bir girişi negatif değilse bu matris pozitif olarak adlandırılır.

**Teorem 4.2** $X$ Banach uzayının refleksif olması için gerek ve yeter şart $X$ uzayının $B_x$ birim yuvarının zayıf kompakt olmasıdır [10].

Sıradaki teoremi [30] da görülebilir.

**Teorem 4.3** $K$, $X$ Banach uzayının zayıf kapalı, sınırlı ve konveks bir altkümesi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

*i.* $K$ zayıf kompaktır;

*ii.* verilen bir $(x_n)\subseteq K$ için öyle bir $A=(\alpha_{ij})$ pozitif $R$-matrisi vardır ki $\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}x_j\right\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi kuvvetli yakınsar;

*iii.* verilen bir $(x_n)\subseteq K$ için öyle bir $A=(\alpha_{ij})$ pozitif $R$-matrisi vardır ki $\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}x_j\right\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi zayıf yakınsar

**Teorem 4.1 in İspatı** $X$ Banach uzayının konveks block Banach-Saks özelliğine sahip olduğunu kabul edelim. $X$ uzayının $B_x$ birim yuvarında bir $\{x_n\}$ dizisi seçelim. O halde $\{x_n\}$ dizisinin bir konveks block $\{y_n\}$ dizisi vardır öyle ki

$y_n = \sum_{p_{n-1}+1}^{p_n} \alpha_j x_j, 0 \le \alpha_j \le 1$ ve $\{p_n\}$ artan dizisi için $\sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} a_j = 1$ olduğunda $\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \right)$ dizisi kuvvetli yakınsar.

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i}\alpha_j, & 1 \le j \le p_i \\ 0, & \text{diger durumlar} \end{cases}$$

ile bir reel sonsuz $A = (a_{ij})$ matrisi tanımlansın. O halde

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} = \sum_{j=1}^{p_i} \frac{1}{i} \alpha_j = \frac{1}{i} \left[ \sum_{j=1}^{p_1} \alpha_j + ... + \sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_i} \alpha_j \right] = 1$$

ve $0 \le \alpha_j \le 1$ için

$$0 \le \lim_{i\to\infty} \alpha_{ij} \le \lim_{i\to\infty} \frac{1}{i} = 0$$

elde edilir. O halde $A = (a_{ij})$ pozitif bir $R$-matrisidir.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} x_j &= \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_j x_j \\ &= \frac{1}{i} \left[ \sum_{j=1}^{p_1} \alpha_j x_j + ... + \sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_i} \alpha_j x_j \right] = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} y_j \end{aligned}$$

olduğundan $\left( \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} x_j \right)_{i=1}^{\infty}$ dizisi kuvvetli yakınsar. Sonuç olarak, Teorem 4.3 den $B_x$ zayıf kompaktır ve $X$ refleksiftir.

Tersine $X$ uzayı refleksif ve $(x_n)$ sınırlı bir dizi olsun. O halde $(x_n)$ dizisinin zayıf yakınsak bir $(x_{n_k})$ altdizisi vardır. Yardımcı Teorem 4.1 den $(x_{n_k})$ nın kuvvetli yakınsayan bir konveks block $(y_n)$ dizisi vardır. O halde $(y_n)$dizisinin aritmetik ortalaması kuvvetli yakınsar. Bu da ispatı tamamlar.

$X$ veya $Y$ uzaylarından herhangi biri konveks block Banach-Saks özelliğine sahip ise $T : X \to Y$ sınırlı operatörü bir konveks block Banach-Saks operatördür. $T$ operatörü zayıf kompakt kümelere bağlı sınırlı kümeleri içeriyorsa $T:X\rightarrow Y$ operatörü zayıf kompaktır. $X$ veya $Y$ uzaylarından herhangi biri refleksif ise $T:X\rightarrow Y$ sınırlı operatörü zayıf kompaktır. Teorem 4.1 i düşünülerek, sınırlı bir $T$ operatörü zayıf kompakt ise, $T$ bir konveks block Banach-Saks operatördür varsayımı yapılabilir [6].

**Teorem 4.4** $T:X\rightarrow Y$ operatörünün zayıf kompakt olması için gerek ve yeter şart $T:X\rightarrow Y$ operatörünün bir konveks block Banach-Saks olmasıdır [6].

**İspat** $T:X\rightarrow Y$ operatörü zayıf kompakt bir operatör ve $(x_n)$, $B_x$ .yuvarında bir dizi olsun. O halde $(Tx_n)$dizisinin zayıf yakınsayan bir $(Tx_{n_k})$ altdizisi vardır. Yardımcı Teorem 4.1 den $(Tx_{n_k})$ altdizisinin $Y$ uzayında kuvvetli yakınsayan bir konveks block $(y_n)$ dizisi bulunabilir.

$T:X\rightarrow Y$ bir konveks block Banach-Saks operatör ve $(x_n)$, $X$ uzayında sınırlı bir dizi olsun. O halde $(Tx_n)$ in bir konveks block $(y_n)$ dizisi vardır öyle ki $y_n=\sum\limits_{p_{n-1}+1}^{p_n}\alpha_j Tx_j$ , $0\leq\alpha_j\leq 1$ ve artan $\{p_n\}$ dizisi için $\sum\limits_{j=p_{n-1}+1}^{p_n}\alpha_j=1$ durumunda $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)$ dizisi kuvvetli yakınsaktır.

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}\frac{1}{i}\alpha_j, & 1\leq j\leq p_i\\ 0, & \text{diger durumlar}\end{cases}$$

ile bir reel sonsuz $A=(\alpha_{ij})$ matrisi tanımlansın. O halde

$$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}=\sum_{j=1}^{p_i}\frac{1}{i}\alpha_j=\frac{1}{i}\left[\sum_{j=1}^{p_1}\alpha_j+\dots+\sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_1}\alpha_j\right]=1$$

ve $0\leq\alpha_j\leq 1$ için

$$0\leq\lim_{i\to\infty}\alpha_{ij}\leq\lim_{i\to\infty}\frac{1}{i}=0$$

elde edilir. O halde $A=(\alpha_{ij})$ bir pozitif $R$-matrisidir.

$$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}Tx_j=\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{p_i}\alpha_jTx_j$$
$$=\frac{1}{i}\left[\sum_{j=1}^{p_1}\alpha_jTx_j+\dots+\sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_i}\alpha_jTx_j\right]=\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}y_j$$

olduğundan $\left(\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}x_j\right)_{i=1}^{\infty}$ kuvvetli yakınsar. Teorem 4.3 den, $TB_x$ zayıf kompakt ve $T:X\to Y$ zayıf kompaktır.

# 5. ORTALAMA İLE TANIMLI BAZI BANACH UZAYLARI

## 5.1 De La Vallee-Poussin Ortalaması ile Tanımlı Dizi Uzaylarının Bazı Geometrik Özellikleri

Bu bölümde de la Vallee-Poussin ortalaması ile tanımlı $V(\lambda,p)$ paranormlu dizi uzayın, $V(\lambda,p)$ paranormlu dizi uzayının özel bir durumu için elde edilen $V_p(\lambda)$ uzayın ve modular uzayın bazı geometrik ve topolojik özellikleri incelenmiştir.

$\Lambda=(\lambda_k)$ pozitif reel sayıların sonsuza giden (ıraksak) azalmayan bir dizisi ve $\lambda_1=1$, $\lambda_{k+1}\le\lambda_k+1$ olsun.

Genelleştirilmiş $x=(x_k)$ de la Vallee-Poussin ortalama dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır;

$k=1,2,...$ için $I_k=[k-\lambda_k+1,k]$ olduğunda

$$t_k(x)=\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}x_j \quad [27].$$

$$[V,\lambda]_0=\left\{x\in l^0:\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_j|=0\right\}$$

$$[V,\lambda]=\left\{x\in l^0:x-le\in[V,l]_0\text{ , for some } l\in C\right\}$$

ve

$$[V,\lambda]_\infty=\left\{x\in l^0:\sup_k\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_j|<\infty\right\}$$

sırasıyla, sıfıra kuvvetli toplanabilir, kuvvetli toplanabilir ve kuvvetli sınırlı dizi uzayları de la Vallee-Poussin metoduyla yazılır.

Özel olarak $k=1,2,...$ için $\lambda_k = k$ alırsak $[V,\lambda]_0$, $[V,\lambda]$ and $[V,\lambda]_\infty$ dizi uzayları sırasıyla, $w_0, w$ ve $w_\infty$ uzaylarına indirgenebilir [22].

Sıradaki paranormlu dizi uzayı Savaş, Şimşek ve Karakaya tarafından [35] de tanımlanmıştır:

$$V(\lambda,p):=\left\{(x_j)\in l^0 : \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_j|\right)^{p_k} < \infty\right\}$$

$(\lambda_k)$ ve $(p_k)$ dizilerinin özel durumlarına denk olarak $V(\lambda,p)$ uzayı bazı özel dizi uzaylarına indirgenir. Örnek olarak; $\lambda_k = k$ alırsak $ces(p)$ dizi uzayına, her $k\in N$ için $\lambda_k = k$ ve $p_k = p$ alırsak $ces_p$ dizi uzayına indirgenir [30].

Şimdi ise $V(\lambda,p)$ uzayının topolojik özellikleri incelenmiştir [32].

**Teorem 5.1.1 a)** $V(\lambda,p)$ uzayı

$$h(x):=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_j|\right)^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}} \tag{5.1}$$

ile tanımlanan paranorma göre bir tam paranormlu uzaydır.

**b)** $p_k = p$ alınırsa, $V(\lambda,p)$ uzayı

$$V_p(\lambda):=\left\{x=(x_j)\in l^0 : \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_j|\right)^{p} < \infty\right\}$$

ile tanımlanan $V_p(\lambda)$ uzayına indirgenir ve $V_p(\lambda)$ uzayı

$$\| x \|_{V_p(\lambda)} := \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_j|\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}, \ (1<p<\infty).$$

normu ile bir tam normlu uzaydır.

**İspat a)** (5.1) eşitsizliğinden koordinata göre toplama ve çarpma işlemleri ile $V(\lambda,p)$ uzayının lineerliği aşağıdaki gibi verilir. Çünkü $x,y\in V(\lambda,p)$ için sıradaki eştsizlik sağlanır:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left|x_j+y_j\right|\right)^p\right)^{\frac{1}{M}}\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left|x_j\right|\right)^p\right)^{\frac{1}{M}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left|y_j\right|\right)^p\right)^{\frac{1}{M}}\qquad(5.2)$$

ve herhangi bir $\alpha\in R$ için [23]

$$|\alpha|^{p_k}\le\max\left\{1,|\alpha|^M\right\}\qquad(5.3)$$

elde edilir.

Her $x\in V(\lambda,p)$ için $h(\theta)=0$ ve $h(x)=h(-x)$ olduğu açıktır. (5.2) ve (5.3) eşitsizlikleri $h$ nin toplamsallığını verir ve

$$h(\alpha x)=\max\{1,|\alpha|\}h(x)$$

elde edilir.

$(x^m)$, $h(x^m-x)\to 0$ olacak şekilde $V(\lambda,p)$ uzayının elemanlarının herhangi bir dizisi ve $(\alpha_n)$ de $\alpha_n\to\alpha$ olacak şekilde skalerlerin herhangi bir dizisi olsun. O halde

$$h(x^m)\le h(x^m-x)+h(x)$$

eşitsizliğinden ve $h$ nin alttoplamsallığından $\left(h(x^m)\right)_{m\in N}$ ifadesi sınırlıdır ve böylece

$$\begin{aligned}h(\alpha_m x^m-\alpha x)&=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left|\alpha_m x_j^m-\alpha x_j\right|\right)^p\right)^{\frac{1}{M}}\\&\le|\alpha_m-\alpha|h(x^m)+|\alpha|h(x^m-x)\end{aligned}$$

yazılır. Eşitsizliğin son kısmında; $m \to \infty$ için limit alınırsa $h(\alpha_m x^m - \alpha x)$ nin sıfıra gittiği elde edilir. Bu skaler çarpımın sürekliliğidir. Böylece $h$, $V(\lambda,p)$ uzayında paranormdur.

İspatı tamamlamak için geriye $V(\lambda,p)$ uzayının tamlığını göstermek kalır. Bunun için ise; $(x^n)$, $x = x_j^n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n, ...)$ için $V(\lambda,p)$ uzayında herhangi bir Cauchy dizisi verilsin. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için ve her $m,n \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$h(x^n - x^m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı vardır. $h$ nin tanımını kullanarak, her $m,n \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} \left| x_j^n - x_j^m \right| \right)^{p_k} \right) < \varepsilon^M$$

elde edilir. Her $m,n \geq n_0(\varepsilon)$ ve sabit $j \in N$ için $\left| x_j^n - x_j^m \right| < \varepsilon$ elde edilir. Böylece $(x_j^n)$ dizisinin $R$ de bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir.

Reel sayılar kümesinin tamlığından, her $n \geq n_0(\varepsilon)$ ve $m \to \infty$ için $x_j^m \to x_j$ elde edilir. Şimdi

$$\left( \sum_{k=1}^{r} \left( \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} \left| x_j^n - x_j^m \right| \right)^{p_k} \right) < \varepsilon^M$$

yazılır. $r$ üzerinden limit alındığında $n \geq n_0(\varepsilon)$ için $h(x^n - x) < \varepsilon$ elde edilir. Böylece $(x^n)$, $V(\lambda,p)$ uzayında bir Cauchy dizisi olur.

Geriye x in $V(\lambda,p)$ uzayının elemanı olduğunu göstermek kalır. $x = x^n - x^n + x$ eşitliğinden

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} \left| x_j \right| \right)^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} \left| x_j^n - x_j \right| \right)^{p_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} \left| x_j^n \right| \right)^{p_k}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $x \in V(\lambda, p)$ dir

**b)** (a) da $p_k = p$ alarak, (b) nin ispatı kolayca gösterilebilir.

Yine [32] de Şimşek, Karakaya ve Savaş $V(\lambda, p)$ modular uzayını inşa edip, Luxemburg normunun $V_p(\lambda)$ uzayının alışılmış normuna denk olmasından $V_p(\lambda)$ uzayının $p$-tipinde Banach-Saks özelliğine sahip olduğunu göstermişlerdir.

$V_\rho(\lambda, p)$ genelleştirilmiş modüler uzayı

$$\rho(x) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} |x_j| \right)^{p_k} \right)$$

modüleri için

$$V_\rho(\lambda, p) = \{x \in l^0 : \rho(\lambda x) < 0, \textit{bazı } \lambda > 0 \textit{ için}\}$$

ile ifade edilir. Buradan $\rho : V_\rho(\lambda, p) \to [0, \infty]$ fonksiyonunun $V_\rho(\lambda, p)$ uzayında bir modüler olduğu görülür.

$V_\rho(\lambda, p)$ dizi uzayı üzerinde Luxemburg normu her $x \in V_\rho(\lambda, p)$ için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\| x \|_L = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

ya da denk olarak

$$\| x \|_L = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} |x_j| \right)^{p_k} \right) \leq 1 \right\}$$

Benzer şekilde $x \in V_\rho(\lambda, p)$ dizi uzayında Amemiya normu her $x \in V_\rho(\lambda, p)$ için aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\| x \|_A = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} (1 + \rho(\lambda x))$$

$V_\rho(\lambda,p)$ uzayında $\rho$ modülerinin bazı temel özellikleri verilmiştir. Aynı zamanda $V_\rho(\lambda,p)$ uzayında modüler $\rho$ ile Luxemburg normu arasındaki bazı ilişkiler de verilmiştir [32].

**Önerme 5.1.1** $\rho$ fonksiyoneli $V_\rho(\lambda,p)$ uzayında bir konveks modülerdir.

**Önerme 5.1.2** Herhangi bir $x \in V_\rho(\lambda,p)$ için

i. $\|x\|_L \leq 1$ ise $\rho(x) \leq \|x\|_L$;

ii. $\|x\|_L = 1$ olması için gerek ve yeter şart $\rho(x) = 1$.

**Önerme 5.1.3** Herhangi bir $x \in V_\rho(\lambda,p)$ için

i. $0 < a < 1$ ve $\|x\|_L > a$ ise $\rho(x) > a^H$

ii. $a \geq 1$ ve $\|x\|_L < a$ ise $\rho(x) < a^H$

elde edilir.

Yukarıda verilen üç önermenin ispatı da standard teknikler kullanılarak benzer yolla [27] ve [12] de ispat edilmiştir.

**Önerme 5.1.4** $(x_n)$, $V_\rho(\lambda,p)$ uzayında bir dizi olsun.

i. $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|_L = 1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n) = 1$;

ii. $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n) = 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|_L = 0$ [26].

**İspat.** (i) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|_L = 1$ ve $\varepsilon \in (0,1)$ olsun. O halde $n \geq n_0$ için $1-\varepsilon < \|x_n\|_L < 1+\varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0$ vardır. Her $n \geq n_0$ için $(1-\varepsilon)^H < \|x_n\|_L < (1+\varepsilon)^H$ olduğundan, Önerme 5.1.3 (i) ve (ii) den $\rho(x_n) \geq (1-\varepsilon)^H$ ve $\rho(x_n) \leq (1-\varepsilon)^H$ eşitsizlikleri elde edilir. Böylece $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n) = 1$.

(ii) $\| x_n \|_L \nrightarrow 0$ olduğu kabul edilsin. O halde $\varepsilon \in (0,1)$ ve $k \in N$ için $\| x_{n_k} \|_L > \varepsilon$ olacak şekilde $(x_n)$ dizisinin bir $(x_{n_k})$ altdizisi vardır. Önerme 5.1.3 (i) den, her $k \in N$ için $\rho(x_{n_k}) > \varepsilon^H$ elde edilir. Bu $n \to \infty$ için $\rho(x_{n_k}) \nrightarrow 0$ olmasını gerektirir. Böylece $\rho(x_n) \nrightarrow 0$ elde edilir, bu da ispatı tamamlar.

Çalışmanın devamında, Karakaya, Savaş ve Şimşek $V_\rho(\lambda,p)$ modüler uzayını kurup, bu uzayın Kadec-Klee özelliğine ve $p$-tipinde Banach-Saks özelliğine sahip olduğunu götermişlerdir [32].

**Teorem 5.1.2** $V_\rho(\lambda,p)$ uzayı

$$\| x \|_L = \inf\left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

ile tanımlanan Luxemburg normuna göre bir Banach uzayıdır.

**İspat** $V_\rho(\lambda,p)$ uzayındaki her Cauchy dizisinin Luxemburg normuna göre yakınsak olduğu gösterilecektir

$(x^n(j))$, $V_\rho(\lambda,p)$ uzayında bir Cauchy dizisi ve $\varepsilon \in (0,1)$ olsun. Böylece her $m,n \geq n_0$ için $\| x_n - x_m \|_L < \varepsilon^M$ olacak şekilde bir $n_0$ vardır. Önerme 5.1.2 (i) ile her $m,n \geq n_0$ için

$$\rho(x^n - x^m) < \| x^n - x^m \|_L < \varepsilon^M \tag{5.4}$$

elde edilir. $m,n \geq n_0$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} \left| x^n(j) - x^m(j) \right| \right)^{p_k} < \varepsilon^M$$

olur. Bu son eşitsizlik bize sabit $j \in N$ ve her $m,n \geq n_0$ için

$$\left| x^n(j) - x^m(j) \right| < \varepsilon$$

eşitsizliğini verir. Böylece $\left(x^n(j)\right)$ dizisinin $R$ de bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir. $R$ nin tamlığından $m \to \infty$ için $x^m(j) \to x(j)$ elde edilir. Buradan her $n \geq n_0$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left| x^n(j)-x(j)\right|\right)^{p_k} < \varepsilon$$

elde edilir.

Geriye $(x(j))$ dizisinin $V_\rho(\lambda,p)$ uzayında olduğunu göstermek kalır. (5.4) eşitsizliğinden her $m,n \geq n_0$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left| x^n(j)-x^m(j)\right|\right)^{p_k} < \varepsilon$$

yazılabilir. Her $j \in N$ için, $x^m(j) \to x(j)$ olur, böylece $m \to \infty$ için

$$\rho\left(x^n - x^m\right) \to \rho\left(x^n - x\right)$$

elde edilir. Her $n \geq n_0$ ve $m \to \infty$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left| x^n(j)-x^m(j)\right|\right)^{p_k} \to \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left| x^n(j)-x(j)\right|\right)^{p_k}$$

(5.4) den her $n \geq n_0$ için $\rho\left(x^n - x\right) < \left\| x^n - x\right\|_L < \varepsilon$ elde edilir. Bunu anlamı $n \to \infty$ için $x_n \to x$ dir. Böylece $(x_n - x) \in V_\rho(\lambda,p)$ olur. $V_\rho(\lambda,p)$ bir lineer uzay olduğundan, $x = x_{n_0} - x_{n_0} + x \in V_\rho(\lambda,p)$ dir. Bu yüzden $V_\rho(\lambda,p)$ dizi uzayı Luxemburg normuna göre bir Banach uzayıdır. Bu da ispatı tamamlar.

**Önerme 5.1.5** $x \in V_\rho(\lambda,p)$ ve $x_n \subseteq V_\rho(\lambda,p)$ olsun. $n \to \infty$ için $\rho(x_n) \to \rho(x)$ ve her $j \in N$ ve $n \to \infty$ için $x_n(j) \to x(j)$ ise $n \to \infty$ için $x_n \to x$ dir.

**İspat** $\varepsilon > 0$ olsun. $\rho(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x(i)|\right)^{p_k} < \infty$ olduğundan $K=\max\{1,2^{H-1}\}$ için

$$\sum_{k=n_o+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x(j)|\right)^{p_k} < \frac{\varepsilon}{6K} \tag{5.5}$$

olacak şekilde bir $j \in N$ vardır.

$n \to \infty$ için

$$\rho(x_n)-\sum_{k=1}^{n_0}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_n(j)|\right)^{p_k} \to \rho(x)-\sum_{k=1}^{n_0}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x(j)|\right)^{p_k}$$

olduğunda her $j \in N$ ve $n \to \infty$ için $x_n(j) \to x(j)$ olduğundan $n \to \infty$ için

$$\left|\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_n(j)|\right)^{p_k} - \sum_{k=n_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x(j)|\right)^{p_k}\right| < \frac{\varepsilon}{3K} \tag{5.6}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in N$ vardır. Ayrıca her $j \in N$ için $x_n(j) \to x(j)$ olduğundan $n \to \infty$ için $\rho(x_n) \to \rho(x)$ elde edilir. Böylece her $n \geq n_0$ için $|x_n(j) \to x(j)| < \varepsilon$ yazılır. Sonuç olarak her $n \geq n_0$ için

$$\sum_{k=1}^{n_0}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_n(j)-x(j)|\right)^{p_k} < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5.7}$$

elde edilir.

(5.5) ve (5.6) ve (5.7) den $n \geq n_0$ için

$$\rho(x_n - x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_n(j) - x(j)|\right)^{p_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n_0}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_n(j) - x(j)|\right)^{p_k} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_n(j) - x(j)|\right)^{p_k}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + K\left[\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_n(j)|\right)^{p_k} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x(j)|\right)^{p_k}\right]$$

$$= \frac{\varepsilon}{3} + K\left[\rho(x_n) - \sum_{k=1}^{n_0}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_n(j)|\right)^{p_k} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x(j)|\right)^{p_k}\right]$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + K\left[\rho(x) - \sum_{k=1}^{n_0}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_n(j)|\right)^{p_k} + \frac{\varepsilon}{3K} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x(j)|\right)^{p_k}\right]$$

$$= \frac{\varepsilon}{3} + K\left[\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x(j)|\right)^{p_k} + \frac{\varepsilon}{3K} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x(j)|\right)^{p_k}\right]$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Bu $n \to \infty$ için $\rho(x_n) \to \rho(x)$ olduğunu gösterir. Böylece Önerme 5.1.4 (ii) den $n \to \infty$ için $\| x_n - x \|_L \to 0$ elde edilir.

**Teorem 5.1.3** $V_\rho(\lambda, p)$ uzayı Kadec-Klee özelliğine sahiptir.

**İspat** $n \to \infty$ için $\| x_n \|_L \to 1$ ve $x_n \xrightarrow{w} x$ olacak şekilde $x \in S(V_\rho(\lambda, p))$ ve $(x_n) \subseteq B(V_\rho(\lambda, p))$ olsun. Önerme 5.1.2 (ii) $\rho(x) = 1$ elde edilir, böylece Önerme 5.1.4 (i) den $n \to \infty$ için $\rho(x_n) \to \rho(x)$ olur. $x_n \xrightarrow{w} x$ ve $\pi_j(x) = x(j)$ ile tanımlanan *i.* koordinat dönüşümü $\pi_j : V_\rho(\lambda, p) \to R$, $V_\rho(\lambda, p)$ üzerinde sürekli lineer bir fonksiyon olduğundan, $n \to \infty$ için $x_n(j) \to x(j)$ olur. Böylece, Önerme 5.1.5 $n \to \infty$ için $x_n \to x$ .

**Teorem 5.1.4** $V_p(\lambda)$ $p$ tipinde Banach-Saks özelliğine sahiptir.

**İspat** Teorem 5.1.1 (b) den $V_p(\lambda)$ uzayının $\| x \|_{V_p(\lambda)}$ normuna göre Banach uzayı olduğu görülür. $(\varepsilon_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \leq \frac{1}{2}$ olacak şekilde pozitif tamsayıların bir dizisi ve $(x_n)$, $B(V_p(\lambda))$ uzayında sıfıra zayıf yakınsayan bir dizi olsun. $b_0 = x_0 = 0$ ve $b_1 = x_{n_1} = x_1$ olsun. O halde

$$\left\| \sum_{i=m_1+1}^{\infty} b_1(i) e^{(i)} \right\|_{V_p(\lambda)} < \varepsilon_1$$

olacak şekilde $m_1 \in N$ vardır. $(x_n)$ dizisinin zayıf yakınsak olması $(x_n) \to 0$ (koordinata göre) gerektirdiğinden $n \geq n_2$ için

$$\left\| \sum_{i=0}^{m_1} x_n(i) e^{(i)} \right\|_{V_p(\lambda)} < \varepsilon_1$$

olacak şakilde $n_2 \in N$ vardır. $b_2 = x_{n_2}$ olsun.

$$\left\| \sum_{i=m_2+1}^{\infty} b_2(i) e^{(i)} \right\|_{V_p(\lambda)} < \varepsilon_2$$

olacak şekilde bir $m_2 > m_1$ vardır. Aslında $(x_n) \to 0$ (koordinata göre) kullanılırsa $n \geq n_3$ için

$$\left\| \sum_{i=0}^{m_2} x_n(i) e^{(i)} \right\|_{V_p(\lambda)} < \varepsilon_2$$

olacak şekilde bir $n_3 > n_2$ vardır.

Bu şekilde devam edildiği takdirde her bir $n \geq n_{j+1}$ için

$$\left\| \sum_{i=0}^{m_j} x_n(i) e^{(i)} \right\|_{V_p(\lambda)} < \varepsilon_j$$

$b_j = x_{n_j}$ için

$$\left\| \sum_{i=m_j+1}^{\infty} b_j(i) e^{(i)} \right\|_{V_p(\lambda)} < \varepsilon_j$$

olacak şekilde $(m_i)$ ve $(n_i)$ artan altdizileri bulunabilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=0}^{n} b_j \right\| &= \left\| \sum_{i=0}^{m_{j-1}} b_j(i) e^{(i)} + \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} b_j(i) e^{(i)} + \sum_{i=m_j+1}^{\infty} b_j(i) e^{(i)} \right\|_{V_p(\lambda)} \\
&\leq \left\| \sum_{j=0}^{n} \left( \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} b_j(i) e^{(i)} \right) \right\|_{V_p(\lambda)} + \left\| \sum_{j=0}^{n} \left( \sum_{i=0}^{m_j-1} b_j(i) e^{(i)} \right) \right\|_{V_p(\lambda)} + \left\| \sum_{j=0}^{n} \left( \sum_{i=m_j+1}^{\infty} b_j(i) e^{(i)} \right) \right\|_{V_p(\lambda)} \\
&\leq \left\| \sum_{j=0}^{n} \left( \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} b_j(i) e^{(i)} \right) \right\|_{V_p(\lambda)} + 2 \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j
\end{aligned}$$

yazılır. Diğer taraftan

$$\| x_n \|_{V_p(\lambda)} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} | x_{nk}(j) | \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ifadesinden $\| x_n \|_{V_p(\lambda)} < 1$ olduğu görülebilir. Bu yüzden $\| x_n \|_{V_p(\lambda)}^p < 1$ olur.

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=0}^{n} \left( \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} b_j(i) e^{(i)} \right) \right\|_{V_p(\lambda)}^p &= \sum_{J=0}^{n} \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} \left( \frac{1}{\lambda_i} \sum_{v \in I_i} |b_j(v)| \right)^P \\
&\leq \sum_{J=0}^{n} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_i} \sum_{v \in I_i} |b_j(v)| \right)^P \\
&\leq (n+1).
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} \left( \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} b_j(i) e^{(i)} \right) \right\|_{V_p(\lambda)} \leq (n+1)^{\frac{1}{p}}$$

yazılır. Her $n \in N$ ve $1 \leq p < \infty$ için $1 \leq (n+1)^{\frac{1}{p}}$ eşitsizliği kullanılarak

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} b_j \right\| \leq (n+1)^{\frac{1}{p}} + 1 \leq 2.(n+1)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir. Böylece $V_p(\lambda)$ uzayı $p$ tipinde Banach-Saks özelliğine sahip olur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

## 5.2 Ortalama İle Tanımlı Yeni Dizi Uzayının Bazı Geometrik Özellikleri

Bu bölümde ortalama ile tanımlı yeni dizi uzayı inşa edilip bu uzayın bazı geometrik özellikleri gösterilmiştir. $x=(x_j)$ pozitif olmak üzere

$$h(x):=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}x_j\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

paranormuna göre tanımlanan yeni dizi uzayı aşağıdaki gibidir:

$$V_{\lambda,p}:=\left\{x=(x_j)\in l^0:\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}x_j\right|^{p_k}<\infty\right\}$$

**Teorem 5.2.1 a)** $V_{\lambda,p}$ uzayı

$$h(x):=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}x_j\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}} \tag{5.8}$$

ile tanımlanan paranorma göre bir tam paranormlu uzaydır.

**b)** $p_k=p$ alınırsa $V_{\lambda,p}$ uzayı

$$V_{\lambda}^{p}:=\left\{x=(x_j)\in l^0:\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}x_j\right|^{p}<\infty\right\}$$

ile tanımlanan $V_{\lambda}^{p}$ uzayına indirgenir ve $V_{\lambda}^{p}$ uzayı

$$\|x\|_{V_{\lambda}^{p}}:=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}x_j\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}},\ (1<p<\infty)$$

normu ile bir tam normlu uzaydır.

**İspat a)** (2.1) eşitisizliğinden koordinata göre toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile $V_{\lambda,p}$ uzayının lineerliği aşağıdaki gibidir. Çünkü $x, y \in V_{\lambda,p}$ için sıradaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left(x_j + y_j\right)\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}x_j\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}y_j\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}} \tag{5.9}$$

ve herhangi bir $\alpha \in R$ için

$$|\alpha|^{p_k} \leq \max\left\{1, |\alpha|^{M}\right\} \text{ [23]} \tag{5.10}$$

elde edilir.

Her $x \in V_{\lambda,p}$ için $h(\theta) = 0$ and $h(x) = h(-x)$ olduğu açıktır. (5.9) ve (5.10) eşitsizlikleri $h$ nin alttoplamsallığını verir ve

$$h(\alpha x) = \max\left\{1, |\alpha|\right\} h(x).$$

$(x^m)$, $h(x^m - x) \to 0$ ve $(\alpha_n)$, $\alpha_n \to \alpha$ olacak şekilde $V_{\lambda,p}$ uzayının elemanlarının herhangi bir dizisi olsun.

$$h(x^m) \leq h(x^m - x) + h(x)$$

eşitsizliğinden ve *h* nin alttoplamsal olmasından $\left(h(x^m)\right)_{m\in N}$ sınırlıdır ve böylece

$$h\left(\alpha_m x^m-\alpha x\right)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left(\alpha_m x_j^m-\alpha x_j\right)\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left(\alpha_m x_j^m-\alpha x_j^m+\alpha x_j^m-\alpha x_j\right)\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

$$\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left(\alpha_m x_j^m-\alpha x_j^m\right)\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left(\alpha x_j^m-\alpha x_j\right)\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

$$\leq|\alpha_m-\alpha|\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left(x_j^m\right)\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}}_{h\left(x^m\right)}+|\alpha|\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left(x_j^m-x_j\right)\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}}_{h\left(x^m-x\right)}$$

$$\leq|\alpha_m-\alpha|h\left(x^m\right)+|\alpha|h\left(x^m-x\right).$$

elde edilir. Eşitsizliğin son kısmında; $m\to\infty$ için limit alınırsa; $h\left(\alpha_m x^m-\alpha x\right)$ nin sıfıra gittiği elde edilir. Bu, skaler çarpımın sürekliliğidir. Böylece $h$, $V_{\lambda,p}$ .uzayında bir paranormdur.

İspatı tamamlamak için geriye $V_{\lambda,p}$ uzayının tamlığını göstermek kalır. Bunun için ise; $\left(x^n\right)$, $x=x_j^n=\left(x_1^n,x_2^n,x_3^n,...\right)$ olduğunda $V_{\lambda,p}$ uzayında bir Cauchy dizisi seçelim. Verilen bir $\varepsilon>0$ için ve her $m,n\geq n_0(\varepsilon)$ için

$$h\left(x^n-x^m\right)<\frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı vardır. $h$ nin tanımını kullanarak, her $m,n\geq n_0(\varepsilon)$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left(x_j^n-x_j^m\right)\right|^{p_k}<\varepsilon^M$$

elde edilir. Her $m,n\geq n_0(\varepsilon)$ ve $j\in N$ için $\left|x_j^n-x_j^m\right|<\varepsilon$ elde edilir. Böylece $\left(x_j^n\right)$ dizisinin $R$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir.

Reel sayılar kümesinin tamlığından, her $n \geq n_0(\varepsilon)$ ve $m \to \infty$ için $x_j^m \to x_j$ elde edilir. Şimdi

$$\sum_{k=1}^{r} \left| \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} \left( x_j^n - x_j \right) \right|^{p_k} < \varepsilon^M$$

yazılır. $r$ üzerinde limit alınırsa ve $n \geq n_0(\varepsilon)$ değeri için $h\left(x^n - x\right) < \varepsilon$ elde edilmişti. Böylece $\left(x^n\right)$, $V_{\lambda,p}$ uzayında bir Cauchy dizisi olur.

Geriye x elemanının $V_{\lambda,p}$ uzayında olduğunu göstermek kalır. $x = x^n - x^n + x$ den

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} x_j \right|^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} \left( x_j^n - x_j \right) \right|^{p_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} x_j^n \right|^{p_k}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $x \in V_{\lambda,p}$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

**b)** $V_\lambda^p$ uzayı

$$\| x \|_{V_\lambda^p} := \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} x_j \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}, 1 < p < \infty$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

**İspat** $V_\lambda^p$ uzayındaki her Cauchy dizisinin $\| x \|_{V_\lambda^p}$ normuna göre yakınsak olduğu gösterilecektir. $\left(x^n(j)\right)$, $V_\lambda^p$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Böylece her $m,n \geq n_0$ için $\| x_n - x_m \|_{V_\lambda^p} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0$ vardır. Her $m,n \geq n_0$ için

$$\| x^n - x^m \|_{V_\lambda^p} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} \tag{5.11}$$

elde edilir. Her $m,n \geq n_0$ için

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} x^n(j) - x^m(j) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}x^n(j)-x^m(j)\right|^p<\varepsilon$$

yazılır. $j\in N$ sabiti için son eşitsizlik her $m,n\geq n_0$ için

$$\left|x^n(j)-x^m(j)\right|<\varepsilon$$

eşitsizliğini verir. Böylece $\left(x^n(j)\right)$ dizisinin $R$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir. $R$ uzayının tamlığından $m\to\infty$ için $x^m(j)\to x(j)$. Böylece $n\geq n_0$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}x^n(j)-x(j)\right|^p<\varepsilon$$

elde edilir.

İspatı tamamlamak için geriye $\left(x(j)\right)$ dizisinin $V_\lambda^p$ uzayının bir elemanı olduğunu göstermek kalır. (5.11) eşitsizliğinden her $m,n\geq n_0$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}x^n(j)-x^m(j)\right|^p<\varepsilon$$

elde edilir. Sabit $j\in N$ için $x^m(j)\to x(j)$ yazılır, böylece $m\to\infty$ için

$$\left\| x^n-x^m\right\|_{V_\lambda^p}\to\left\| x^n-x\right\|_{V_\lambda^p}$$

elde edilir.

Her $n\geq n_0$ ve $m\to\infty$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}x^n(j)-x^m(j)\right|^p\to\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}x^n(j)-x(j)\right|^p$$

yazılır ve (5.11) eşitsizliğinden her $n\geq n_0$ için $\left\| x_n-x\right\|_{V_\lambda^p}<\varepsilon$ elde edilir. Bunun anlamı $n\to\infty$ için $x_n\to x$. Böylece, $\left(x_n-x\right)\in V_\lambda^p$ elde ederiz. $V_\lambda^p$ lineer bir uzay olduğundan

$$x_k = x_k^m - x_k^m + x_k$$

$$\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k} x_k\right| = \left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left(x_k^m - \left(x_k^m - x_k\right)\right)\right|$$

$$\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k} x_k\right|^p = \left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left(x_k^m - \left(x_k^m - x_k\right)\right)\right|^p$$

$$\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k} x_k\right|^p = \left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k} x_k^m - \frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left(x_k^m - x_k\right)\right|^p$$

$$\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k} x_k\right|^p \le \left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k} x_k^m\right|^p + \left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left(x_k^m - x_k\right)\right|^p$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k} x_k\right|^p \le \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k} x_k^m\right|^p}_{J_m} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left(x_k^m - x_k\right)\right|^p}_{\varepsilon}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k} x_k\right|^p < \infty, x \in V_{\rho(\lambda,p)}.$$

Bu sebeple $V_\lambda^p$ uzayı $\| x \|_{V_\lambda^p}$ normuna göre bir Banach uzayıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Sırada $V_{\lambda,p}$ paranormlu uzayın modüler uzayı inşa edilip bu uzayın geometrik özellikleri incelenmiştir. Yeni modüler uzay

$$\rho(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}\left|x_j\right|\right)^{p_k}\right)$$

paranormuna göre aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$V_{\rho(\lambda,p)} = \left\{x \in l^0 : \rho(\lambda x) < \infty \; bazı\ \lambda > 0 \text{ için}\right\}$$

**Teorem 5.2.2** $V_{\rho(\lambda,p)}$ uzayı

$$\| x \|_{\mathrm{L}} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$$

Luxembug normuna göre bir Banach uzayıdır.

**İspat** $V_{\rho(\lambda,p)}$ uzayındaki her Cauchy dizisinin $\| x \|_{\mathrm{L}}$ Luxemburg normuna göre yakınsak bir dizi olduğu gösterilecektir.

$(x^n(j))$ $V_{\rho(\lambda,p)}$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Böylece $m,n \geq n_0$ için $\| x_n - x_m \|_L < \varepsilon^M$ olacak şekilde $n_0$ vardır. Önerme 5.1.2 (i) ile her $m,n \geq n_0$ için

$$\rho(x^n - x^m) < \| x^n - x^m \|_{\mathrm{L}} < \varepsilon^M \qquad (5.12)$$

elde edilir. $m,n \geq n_0$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} x^n(j) - x^m(j) \right|^{p_k} < \varepsilon$$

olur. $j \in N$ sabiti için son eşitsizlik bize her $m,n \geq n_0$ için

$$\left| x^n(j) - x^m(j) \right| < \varepsilon$$

eşitsizliğini verir. Böylece $(x^n(j))$ dizisinin $R$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir. $R$ uzayının tamlığından, $m \to \infty$ için $x^m(j) \to x(j)$ olur. Bu nedenle her $n \geq n_0$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} x^n(j) - x(j) \right|^{p_k} < \varepsilon$$

elde edilir.

Geriye $(x(j))$ dizisinin $V_{\rho(\lambda,p)}$ uzayında olduğunu göstermek kalır. (5.12) eşitsizliğinden her $m,n \geq n_0$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k} x^n(j) - x^m(j)\right|^{p_k} < \varepsilon$$

yazılabilir. Her $j \in N$ için, $x^m(j) \to x(j)$ olur, böylece $m \to \infty$ için

$$\rho(x^n - x^m) \to \rho(x^n - x)$$

elde edilir. Her $n \geq n_0$ ve $m \to \infty$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k} x^n(j) - x^m(j)\right|^{p_k} \to \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k} x^n(j) - x(j)\right|^{p_k}$$

(5.12) eşitsizliğinden her $n \geq n_0$ için $\rho(x_n - x) < \|x_n - x\|_L < \varepsilon$ elde edilir. Bunun anlamı $n \to \infty$ için $x_n \to x$ dir. Böylece $(x_n - x) \in V_{\rho(\lambda,p)}$ elde edilir. $V_{\rho(\lambda,p)}$ bir lineer uzay olduğundan $x = x_{n_0} - x_{n_0} + x \in V_{\rho(\lambda,p)}$ yazılabilir. Bu yüzden $V_{\rho(\lambda,p)}$ uzayı Luxemburg normuna göre bir Banach uzayıdır. İspat tamamlanır.

**Teorem 5.2.3** $V_{\rho(\lambda,p)}$ uzayı Kadec-Klee özelliğine sahiptir.

**İspat** $n \to \infty$ için $\|x_n\|_L \to 1$ ve $x_n \xrightarrow{w} x$ olacak şekilde $x \in S(V_{\rho(\lambda,p)})$ ve $x_n \subseteq B(V_{\rho(\lambda,p)})$ olsun. Önerme 5.1.2 (ii) den $\rho(x) = 1$ yazılır; böylece Önerme 5.1.4 (i) den $n \to \infty$ için $\rho(x_n) \to \rho(x)$ elde edilir. $x_n \xrightarrow{w} x$ ve $\pi_j(x) = x(j)$ ile tanımlanan $i$. -koordinat dönüşümü $\pi_j : V_\lambda^p \to R$ , $V_{\rho(\lambda,p)}$ uzayında sürekli bir fonksiyondur. $n \to \infty$ ve her $j \in N$ sabiti için $x_n(j) \to x(j)$ elde edilir. Böylece Önerme 5.1.5 dan $n \to \infty$ için $x_n \to x$ elde edilir.

**Teorem 5.2.4** $V_\lambda^p$ Banach uzayının konveks block Banach-Saks özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart $V_\lambda^p$ uzayının refleksif olmasıdır.

**İspat** $V_\lambda^p$ uzayı konveks block Banach-Saks özelliğine sahip olsun. $\{x_n\}$ $V_\lambda^p$ uzayının $B_{V_\lambda^p}$ birim yuvarında bir dizi olsun. Yardımcı Teorem 4.1 den dolayı $\{x_n\}$ dizisinin bir konveks block $\{y_n\}$ dizisi vardır öyle ki $y_n = \sum_{p_{n-1}+1}^{p_n} \alpha_j x_j, 0 \le \alpha_j \le 1$ ve $\{p_n\}$ artan dizisi için $\sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} a_j = 1$ olduğunda $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$ kuvvetli yakınsar.

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i}\alpha_j, \ 1 \le j \le p_i \\ 0, \ \text{diger durumlar} \end{cases}$$

ile bir reel sonsuz $A = (a_{ij})$ matrisi tanımlansın. O halde

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} = \sum_{j=1}^{p_i} \frac{1}{i}\alpha_j = \frac{1}{i}\left[\sum_{j=1}^{p_1}\alpha_j + \dots + \sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_i}\alpha_j\right] = 1$$

ve $0 \le \alpha_j \le 1$ için

$$0 \le \lim_{i\to\infty} \alpha_{ij} \le \lim_{i\to\infty} \frac{1}{i} = 0$$

O halde $A = (a_{ij})$ pozitif bir $R$-matrisidir.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} x_j &= \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{p_i} \alpha_j x_j \\ &= \frac{1}{i}\left[\sum_{j=1}^{p_1}\alpha_j x_j + \dots + \sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_i}\alpha_j x_j\right] = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} y_j \end{aligned}$$

olduğundan $\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} x_j\right)_{i=1}^{\infty}$ kuvvetli yakınsar. Teorem 4.3 den $B_{V_\lambda^p}$ zayıf kompaktır ve $V_\lambda^p$ refleksiftir.

Tersine $V_\lambda^p$ uzayının refleksif olduğunu kabul edelim. $(x_n)$ sınırlı bir dizi olsun. $(x_n)$ dizisinin zayıf yakınsak bir $(x_{n_k})$ altdizisi olur. Yardımcı Teorem 4.1 den $(x_{n_k})$ dizisi kuvvetli yakınsak olacak şekilde bir konveks block $(y_n)$ dizisi vardır. O halde $(y_n)$dizisinin aritmetik ortalaması kuvvetli yakınsar. Bu da ispatı tamamlar.

**Teorem 5.2.5** $T:V_\lambda^p \to V_\lambda^p$ operatörünün zayıf kompakt olması için gerek ve yeter şart $T:V_\lambda^p \to V_\lambda^p$ operatörünün bir konveks block Banach-Saks olmasıdır.

**İspat** $T:V_\lambda^p \to V_\lambda^p$ operatörü zayıf kompakt bir operatör ve $(x_n)$, $B_{V_\lambda^p}$ yuvarında bir dizi olsun. O halde $(Tx_n)$ in zayıf yakınsayan bir $(Tx_{n_k})$ altdizisi vardır. Yardımcı Teorem 4.1 den $(Tx_{n_k})$ nın $Y$ de kuvvetli yakınsayan bir konveks block $(y_n)$ dizisi vardır.

$T:V_\lambda^p \to V_\lambda^p$ bir konveks block Banach-Saks operatör olsun. $(x_n)$, $X$ uzayında sınırlı bir dizi olsun. O halde $(Tx_n)$ dizisinin bir konveks block $(y_n)$ dizisi vardır öyle ki $y_n = \sum_{p_{n-1}+1}^{p_n} \alpha_j T x_j$ , $0 \le \alpha_j \le 1$ , artan $\{p_n\}$ dizisi için ve $\sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} \alpha_j = 1$ durumunda $\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \right)$ kuvvetli yakınsaktır.

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i}\alpha_j, & 1 \le j \le p_i \\ 0, & \text{diger durumlar} \end{cases}$$

ile bir reel sonsuz $A = (\alpha_{ij})$ matrisi tanımlansın. O halde

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} = \sum_{j=1}^{p_i} \frac{1}{i} \alpha_j = \frac{1}{i} \left[ \sum_{j=1}^{p_1} \alpha_j + \dots + \sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_1} \alpha_j \right] = 1$$

ve $0 \le \alpha_j \le 1$ için

$$0 \leq \lim_{i\to\infty} \alpha_{ij} \leq \lim_{i\to\infty} \frac{1}{i} = 0$$

O halde $A = (\alpha_{ij})$ bir pozitif $R$ -matrisidir.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} Tx_j = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_j Tx_j$$
$$= \frac{1}{i}\left[\sum_{j=1}^{p_1} \alpha_j Tx_j + \dots + \sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_i} \alpha_j Tx_j\right] = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} y_j$$

olduğundan $\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} x_j\right)_{i=1}^{\infty}$ kuvvetli yakınsar. Teorem 4.3 den, $TB_{V_\lambda^p}$ zayıf kompakt ve $T : V_\lambda^p \to V_\lambda^p$ operatörü zayıf kompaktır.

# KAYNAKLAR

[1] Agarwal R. P., O'Regan D., Sahu D. R. 2009. Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications, Springer.

[2] Baernstein A., 1972.On Reflexivity and Summability, Studia Math 42, 91-94.

[3] Banach S., Sak S, 1930, Sur la Convergence Forte Dans Les Champs $L^p$ , Studia Math, 2, 51-57.

[4] Bayraktar M., 2006, Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitabevi, Ankara.

[5] Brunel A., 1975 An Ergodic Superproperty of Banach Spaces defined by a Class of Matrices, Proc. Amer. Math. Soc.

[6] Cho K., 2002 Averaging Property in Banach Spaces Bull Korean Math 39, 665-669.

[7] Clarkson J., 1936 Uniformly Convex Spaces, Trans. American Mathematical Society, 40 (3), 396-414.

[8] Cui Y., Hudzik H., Meng C., 1998, On Some Local Geometry of Orlicz Sequence Spaces Equipped With The Luxemburg Norm, Acta Math. Hungar.

[9] Diestel J., 1984, Sequences and Series in Banach Spaces, vol. 92 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, Ny, USA.

[10] Eberlein, W. F., 1947 Weak Compactness in Banach Spaces Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 33, 51-53.

[11] Et M, 2006, Spaces of Cesaro Difference Sequences of Order *r* Defined by a modulus Function in a Locally Konvex Space, Taiwanese J. Math. 10, no.4, 865-879.

[12] Hudzik Y. A., 1998 On the Uniform Opial Property in some Modular Sequence Spaces, Funct. Approx. Comment, 26, 93-102.

[13] Kakutani S., 1938 Weak convergence in Uniformly convex Spaces, Tokohu Math, J., 45, 188-193.

[14] Karakaya V. Some Geometric Properties of Sequences İnvolving Lacunary Sequence, Journal of Inequalities and Applications., vol. (2007), Article ID 81028, 8 pages, doi: 10.1155/2007/81028.

[15] Karakaya V., Simsek N., Hudzik H., Mursalean M., Banach-Saks Type and Gurarii Modulus of Convexity of Some Banach Sequence Spaces, Hundawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis, vol. 2014, Article ID 427382, 9 pages, doi: 10.1155/2014/427382.

[16] Knaust H., 1992, Orlicz Sequences Spaces of Banach Saks type, Archive der Mathematik, vol. 59, 6, 562-565.

[17] Kreyszig E., 1978 Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley&Sons.

[18] Leindler J., Tzafriri L., 1977 Über Die Verallgemeinerte de la Vallee-Poussinche Summierbarkeit Allgemeiner Orthogonalreihen, Acta Math. Acad. Sci Hungar, 16, 3-4.

[19] Lindenstrauss J.,1977 Classical Banach Spaces-I Springer-Verlag, Berlin.

[20] Liu Y. Q., Wu B. E., Lee Y. P., 1996, Method of Sequence Spaces, Gaundong of Science and Techonology Press, (in Chinese).

[21] Maddox I. J., 1988 Element of Functional Analysis, Cambridge University Press.

[22] Maddox I. J., 1968 On Kuttners Theorem, J. London Math. Soc, 43, 285-290.

[23] Maddox I. J., 1968 Paranormed Sequence Spaces Generated by Infinite Matrices Proc. Cambridge Philos. Soc., 64, 335-340.

[24] Malkowsky E., Savaş E., 2000, Some $\lambda$-Sequence Spaces Defined by a Modulus, Archivium Math. Tom, 36, 219-228.

[25] Nishiura T., Watermann D., 1963 Reflexivity and Summability, Studia Math., 23, 53-57.

[26] Orlicz W., 1990 Linear Functional Analysis, World Sci. Publ. Co. Ltd. Springer.

[27] Sanhan W., Suantai S., 2003 Some Geometric Properties of Cesaro Sequence Space, Kyungpook Math J., 43, 191-197.

[28] Savaş E., Savaş R., 2003, $\lambda$-Sequence Spaces defined by OrliczFunctions, Indian J. Pure Appl. Math., 34, (12), 1673-1680.

[29] Schreier J., 1930, Ein Gegen Beispiet Zur Theorie der Schwachen Konvergenz, Studia Math. 2, 58-62.

[30] Seifert C. J. 1978 The Dual of Baernstin' s Space and the Banach-Saks Property, Bull. Acad. Polon. Sci., 26, 237-239.

[31] Shue S., 1970 Cesaro Sequences Spaces, Tamkang J. Math. 1, 143-150.

[32] Simsek N., Savas E., Karakaya V., 2010 Some Geometric and Topological Properties of a New Sequence Space defined by de la Vallee-Poussin Mean, Journal of Computational Analysis and Applications, 12, 768-779.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ruken ÇELİK

Taranmış
Fotoğraf
(3.5cm**x**3cm)

Doğum Yeri ve Yılı : MUŞ, 01/09/1988

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : celik_ruken@hotmail.com

**Eğitim Durumu**

Lise : Bursa Kız Lisesi, 1999

Lisans : İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı