T. C.

İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİMDALI

MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

SINIRLI SINIR ROTASYONLARINA SAHİP ANALİTİK FONKSİYONLAR

Yüksek Lisans Tezi

Asena ÇETİNKAYA

1260Y55202

İstanbul, 2015

T. C.

İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİMDALI

MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

SINIRLI SINIR ROTASYONLARINA SAHİP ANALİTİK FONKSİYONLAR

Yüksek Lisans Tezi

Asena ÇETİNKAYA

1260Y55202

Danışman: Prof. Dr. Yasemin KAHRAMANER

T. C.

İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ONAY SAYFASI

Yüksek lisans öğrencisi Asena ÇETİNKAYA' nın " Sınırlı Sınır Rotasyonlarına Sahip Analitik Fonksiyonlar " konulu tez çalışması jürimiz tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak (oybirliği / ~~oy çokluğu ile~~) başarılı bulunmuştur.

	Adı-Soyadı	**İmza**
Tez Danışmanı:	Prof. Dr. Yasemin Kahramaner	
Jüri Üyesi:	Prof. Dr. İsmail Kömbe	
Jüri Üyesi:	Y. Doç. Dr. Yaşar Polatoğlu	

Hazırlamış olduğum tez özgün bir çalışma olup YÖK ve İTİCÜ Lisansüstü Yönetmeliklerine uygun olarak hazırlanmıştır. Ayrıca bu çalışmayı yaparken, bilimsel etik kurallarına tamamıyla uyduğumu; yararlandığım tüm kaynakları gösterdiğimi ve hiçbir kaynaktan ayrıntılı alıntı olmadığını beyan ederim. Bu tezin ihtiva ettiği tüm hususlar şahsi görüşüm olup İstanbul Ticaret Üniversitesi' nin resmi görüşünü yansıtmamaktadır.

ÖZET

Yalınkat fonksiyonlar teorisi, kompleks değişkenli fonksiyonların en ilginç konularından biridir. Birim dairede normalize yalınkat foksiyonların S sınıfı için extremal problemleri ele alan dikkate değer birçok problem vardır. Metodların çeşitliliği bu problemleri çalışmaya yol açmıştır.

Son yıllarda, yalınkat fonksiyonların harmonik dönüşümlere genelleştirilmesi dikkat çekmektedir. Ayrıca, harmonik dönüşümlerin sınırlı sınır rotasyonlarıyla ilişkileri incelenmektedir.

Bu çalışmanın amacı yalınkat fonksiyonların temel özelliklerini vermek ve harmonik dönüşümlerin sınırlı sınır rotasyonları ile ilişkilerini araştırmaktır.

Anahtar Kelimeler: Yalınkat fonksiyonlar, harmonik dönüşümler, sınırlı sınır rotasyon, yıldızıl fonksiyon, Janowski yıldızıl fonksiyon, konveks fonksiyon.

ABSTRACT

The theory of univalent functions is one of the most interesting topics in complex variable. There are many remarkable theorems dealing with extremal problems for the class S of normalized univalent functions on the unit disc. A variety of methods was lead to study these problems.

In recent years, generalization of univalent functions to the harmonic mappings is get attract attention. Moreover, harmonic mappings related to the bounded bundary rotation is get investigation.

The aim of this research is to give elemantary properties of univalent functions and to investigation of the class harmonic mappings related to the bounded boundary rotation.

Keywords: Univalent functions, harmonic mappings, bounded boundary rotation, starlike function, Janowski starlike function, convex function.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No.

KISALTMALAR

Δ	:	Kapalı birim dairenin dışı
$d_h(a,b)$	:	Hiperbolik metrik ile verilen fonksiyonların uzaklığı
Σ	:	Bir D bölgesinin tümleyeninde normalize, yalınkat fonksiyonların sınıfı
$\{f;z\}$	:	$z \in U$ da $f \in H(U)$ nun Schwarzian türevi
$H(G)$	:	$\mathbb{C}$ nin bir G açık altkümesindeki holomorf fonksiyonlar
$H_u(U)$	:	U birim dairesindeki yalınkat fonksiyonların bir sınıfı
K	:	U da normalize konveks fonksiyonların sınıfı
$K(\alpha)$	:	$\alpha -$ ıncı mertebeden konveks fonksiyonlar
M_α	:	$\alpha -$ konveks fonksiyonların sınıfı
$M_\infty(r,f)$	:	$f \in H(U)$ için ve $0 < r < 1$ için $max_{\lvert z\rvert=r}\lvert f(z)\rvert$
$\mathcal{P}$	:	Caratheodory sınıfı
$r^*(\mathcal{F})$	:	$\mathcal{F}$ in yıldızıllık yarıçapı
$r_c(\mathcal{F})$	:	$\mathcal{F}$ in konvekslik yarıçapı
S	:	D bölgesinde normalize, yalınkat fonksiyonların sınıfı
S^*	:	U da normalize yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$S^*(\alpha)$	:	$\alpha -$ ıncı mertebeden normalize yıldızıl fonksiyonlar
$\widehat{S_\alpha}$	:	α tipinde normalize spirallike fonksiyonların sınıfı
U	:	$U(0,1)$ olan daire (birim daire)
$\mathcal{V}$	:	Schwarz fonksiyonlarının sınıfı

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren tez danışmanım ve hocam Prof. Dr. Yasemin KAHRAMANER' e sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım süresince maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme, kızkardeşim Şayan ÇETİNKAYA, yeğenlerim Berkay ve Artunç' a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarım boyunca desteğini esirsemeyen değerli meslektaşım Mikail ELÇİ' ye en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım.

GİRİŞ

Yalınkat fonksiyonlar teorisi, geometrik fonksiyonlar teorisinin ilgi gören konularından biridir. Tek kompleks değişkenli analitik fonksiyonların başlangıcı Riemman Dönüşüm Teorisi' ne dayanır. 1907 yılında Koebe birim dairede analitik ve yalınkat olan tek kompleks değişkenli fonksiyonları incelemiştir. Bu konuda Gronwall' in 1914 teki alan teoremi ve Bieberbach' ın 1916 daki normalize yalınkat fonksiyonların ikinci sıra katsayı tahminleri temel oluşturmuştur.

Louis De Branges' in 1984 te Bieberbach varsayımını ispatlamasından sonra, matematikçiler tarafından merak edilen normalize yalınkat fonksiyonların harmonik dönüşümlere genelleştirilip genelleştirilemeyeceği sorusu olumlu sonuçlar vermiştir. Bu gelişmenin ardından 1984 yılında Clunie Terry, Sheil-Small tarafından yayınlanan makalede konform dönüşümler için bilinen sonuçların harmonik dönüşümler için analogları ortaya konulmuştur. Bu çalışmanın sonrasında harmonik fonksiyonlar teorisi gelişme sürecine girmiştir.

Yalınkat fonksiyonların S sınıfı için özel altsınıflar, asimtotik tahminler ve sınır katsayılarının hesabı aradan geçen yıllar içinde sağlanmıştır. Analitik yalınkat dönüşümler için klasik bükülme (distortion) teoremleri ve katsayı tahminlerinin harmonik dönüşümlerde de benzer bir yapıda olduğu ortaya konulmuştur.

Sınırlı sınır rotasyonları fonksiyonları fikri 1917' de ilk kez Loewner tarafından ortaya atılmıştır. Konveks fonksiyonlar için sınırlı sınır rotasyonlarının $\mathcal{V}_k$ fonksiyonu 1931' de Paatero tarafından geliştirilmiştir. Daha sonra 1971' de Pinchuk, $2 \leq k \leq 4$ için $\mathcal{V}_k$ deki fonksiyonların konvekse yakın olduğunu ispatlamıştır. Aynı zamanda Pinchuk, $\mathcal{P}_k$ sınıfını ve yıldızıl fonksiyonlar sınıfının genelleşmesi olan $\mathcal{R}_k$ sınıfını tanıtmıştır. Ayrıca $\mathcal{V}_k$ ve $\mathcal{R}_k$ sınfları ile $\mathcal{P}_k$ sınıfı arasındaki ilişkiyi de sağlamıştır. α −mertebeden $\mathcal{V}_k(\alpha)$ ve $\mathcal{R}_k(\alpha)$ sınıfları 1975' te Padmanabhan ve Parvatham tarafından ortaya konulmuş ve $\mathcal{P}_k(\alpha)$ sınıfını tanımlamışlardır. Daha sonra Noor , $\mathcal{P}_k(\alpha)$ sınıfının konveks olduğunu göstermiş ve $\mathcal{P}_k(\alpha)$ için bükülme sonuçlarını vermiştir. $\mathcal{V}_k(\alpha)$ için katsayı sınırı ve konvekslik yarıçapını çalışmıştır.

Bu çalışmanın amacı yalınkat fonksiyonların temel özelliklerini, birim dairede yalınkat fonksiyonların altsınıflarını vermek ve harmonik fonksiyonların sınırlı sınır rotasyonlarıyla ilişkilerini incelemektir.

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, temel topolojik kavramlar ve kompleks düzlemde limit ve diferansiyellenebilme kuralları, analitik fonksiyonların temel tanımları, harmonik fonksiyonların genel özellikleri ve yalınkat fonksiyonların temel tanımları verilmektedir.

İkinci bölümde, kompleks düzlemde yalınkatlık, yalınkat fonksiyonlar teorisinde temel sonuçlar, alan teoremi, S sınıfında büyüme, kapsama ve bükülme sonuçları, yalınkat fonksiyonların maksimum modülü ve S sınıfı için iki noktalı bükülme sonuçları verilmektedir.

Üçüncü bölümde, pozitif reel kısımlı fonksiyonlar, subordinasyon ve Herglotz formülü, Caratheodory sınıfı ve subordinasyon prensibinin uygulamaları, yıldızıl ve konveks fonksiyonlar, yıldızıllık ve $\alpha - ıncı$ mertebeden konvekslik, alfa konvekslik, birim dairede konvekse yakın, spirallike ve $\Phi -$ like fonksiyonlar, harmonik dönüşümlerin sınırlı sınır rotasyonlarıyla ilişkileri ve temel sonuçları verilmektedir.

BÖLÜM 1

ANALİTİK FONKSİYONLAR

Analitik fonksiyonları daha iyi anlayabilmek, tanım bölgelerinden bahsedebilmek için ilk olarak bazı elemanter topolojik tanımlar ile limit ve diferansiyellenebilme kavramlarını vererek başlayacağız.

1.1 Temel Kavramlar

1.1.1 Topolojik Kavramlar

Tanım 1.1.1: X boştan farklı bir cümle ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. d fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, d ye X kümesi üzerinde bir metrik denir ve (X, d) çiftine metrik uzay denir.

***i*)** $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall(x, y \in X)$

***ii*)** $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall(x, y \in X)$

***iii*)** $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall(x, y, z \in X)$

$\forall\, x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$ dır.

Tanım 1.1.2: $N_\delta(y)$ cümlesi tüm $x \in X$ noktaları için $d(x,y) \leq \delta$ koşulunu sağlayan y noktalarının bütün δ komşuluklarının cümlesi olsun. $N \subset X$ cümlesi $N_\delta(y)$ cümlesini içeriyorsa, y nin bir komşuluğudur denir.

Tanım 1.1.3: (X, d) bir metrik uzay olsun. $B(x,r) = \{y \in X\colon\ d(x,y) < r\}$ cümlesine x merkezli, r yarıçaplı açık yuvar denir.

Tanım 1.1.4: (X, d) metrik uzay olsun. Eğer bu uzayın bir alt cümlesi boştan farklı, iki açık alt cümlenin birleşimi olarak gösterilemiyorsa, bu cümleye bağlantılıdır denir.

Tanım 1.1.5: (X, d) bir metrik uzay ve $K \subset X$ olsun. X uzayına ait bir s noktası için s noktasının her $B(s, r)$ komşuluğunda $s \neq y$, $y \in B(s, r)$ olacak şekilde K cümlesinin en az bir elemanı bulunuyorsa, s noktasına X cümlesinin yığılma noktası denir.

Tanım 1.1.6: (X, d) bir metrik uzay ve $K \subset X$ olsun. K cümlesinin her yığılma noktası, K nin bir noktası ise K ye kapalı cümle denir. Bir cümlenin kapanışı, cümleyi içeren en küçük kapalı cümledir ve $\overline{K}$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.7: Bir kümenin bütün x elemanları için $|x| < M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa , kümeye sınırlıdır denir.

Gerçel sayılar için verilen bu tanımlar, kompleks düzlemde nokta kümeleri için de geçerlidir.

Homeomorfizma: X ve Y topolojik uzaylar olsun. $f: X \to Y$ ye bire-bir, örten, sürekli ve açık bir fonksiyon ise X den Y ye bir homeomorfizm denir. Eğer X den Y ye örten bir homeomorfizm varsa X ile Y topolojik uzaylarına homeomorf uzaylar denir.

Bir Dönüşümün Kompaktlığı: X ve Y normlu uzaylar olsun ve $T \in L\,(X, Y)$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer X içindeki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için Y içindeki $\{Tx_n\}$ dizisi yakınsak bir alt dizi içerirse T ye kompakttır denir.

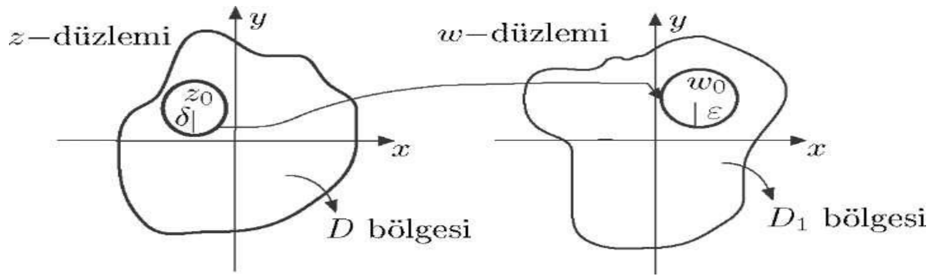
1.1.2 Kompleks Fonksiyonlarda Limit ve Türev

Limitin Tanımı: $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesinde tanımlanmış olsun. Bu fonksiyon basit bağlantılı D bölgesini, w düzleminde basit bağlantılı bir D_1 bölgesine resmetsin. $z_0 \in D$ için $z \to z_0$ olduğunda $w = f(z)$ fonksiyonunun limiti şu şekilde tanımlanır : $\forall\, \varepsilon > 0$ sayısı için $|z - z_0| < \delta$ olduğunda $|f(z) - L| < \varepsilon$ eşitsizliği olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı karşılık getirilebilirse $f(z)$ fonksiyonunun limiti L ' dir denir ve $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ şeklinde yazılır.

Geometrik (topolojik) şekilde anlamı: z_0 noktasının resmi $w_0 = f(z_0)$ olduğu kabul edilirse

$$|f(z) - L| < \varepsilon \implies |w - L| < \varepsilon \implies |w_0 - L| < \varepsilon$$

oldukları göz önüne alınırsa



Şekil 1.1: z deki açık civarın w deki açık civar karşılığı

limitin geometrik anlamı $z-$ düzlemindeki bir D bölgesinde z_0 merkezli δ yarıçaplı bir açık civara $w-$ düzleminde D_1 bölgesinde w_0 merkezli ε yarıçaplı bir açık civarın karşılık getirilebilmesidir.

Teorem 1.1.8: $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları basit bağlantılı bir D bölgesinde tanımlanmış ve $z_0 \in D$ olmak üzere $\lim_{z\to z_0} f(z) = L_1$ ve $\lim_{z\to z_0} g(z) = L_2$ limitleri var olsun. Bu durumda

i) $\lim_{z\to z_0}(\ f(z) + g(z)) = L_1 + L_2$

ii) $\lim_{z\to z_0}(\ f(z) - g(z)) = L_1 - L_2$

iii) $\lim_{z\to z_0}(\ f(z).\, g(z)) = L_1 .\, L_2$

iv) $\lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{L_1}{L_2}$, $\quad (\ g(z) \neq 0,\ L_2 \neq 0)$

v) $\lim_{z\to z_0}\left(\frac{1}{f(z)}\right) = \frac{1}{L_1}$, $\quad (\ f(z) \neq 0, L_1 \neq 0)$

Diferansiyellenebilme ve Kompleks Türev: $w = f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin basit bağlantılı bir D bölgesinde tanımlanmış, sürekli, tek değerli bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

limiti varsa, bu limit değerine f fonksiyonunun türevi denir ve

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)}{h}$$

ile ifade edilir. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu z noktasında diferansiyellenebilirdir denir.

Teorem 1.1.9: $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları basit bağlantılı bir D bölgesinde tanımlanmış, türevlenebilir olsunlar. Bu durumda

***i*)** $\big(f(z) + g(z)\big)' = f'(z) \pm g'(z)$

***ii*)** $\big(f(z)g(z)\big)' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

***iii*)** $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$, $(g(z) \neq 0)$

1.2 Analitik Fonksiyonlarda Temel Tanımlar

Kompleks düzlemin bir D_1 bölgesinin z noktalarını, ikinci bir düzlemin D_2 bölgesinin w noktalarına eşleyen $w = f(z)$ biçimindeki fonksiyonlar, kompleks fonksiyonlardır. D_1 bölgesindeki $z = x + iy$ fonksiyonu, D_2 bölgesindeki $w = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu ile eşlenir.

Analitik fonksiyonlar, kompleks düzlemde açık cümleler ile tanımlı olan kompleks değerli fonksiyonlardır. Kompleks düzlemin Ω ile gösterilen açık cümlesi üzerine tanımlı f fonksiyonu analitik ise, Ω nın her y noktasının bu cümlede yer alan bir $N_\delta(y)$ komşuluğu vardır. $N_\delta(y)$ nin her z elemanı için

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^n , \quad a_n \in \mathbb{C}$$

biçimindeki kuvvet serisi $f(z)$ ye yakınsar.

Burada analitik fonksiyonlar konusu için bazı önemli tanımlar vereceğiz.

Tanım 1.2.1: $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde, açık bağlantılı bir cümleye bölge denir.

Tanım 1.2.2: Başlangıç ve bitim noktaları farklı olan ve kendi kendini kesmeyen bir eğriye basit bağlantılı açık eğri denir.

Eğer başlangıç ve bitim noktaları farklı olan ve kendi kendini kesen bir eğri ise, çok bağlantılı açık eğri denir.

Tanım 1.2.3: Başlangıç ve bitim noktaları aynı olan ve kendi kendini kesmeyen bir eğriye basit bağlantılı eğri denir. Bu eğrinin kapattığı bölgeye basit bağlantılı bölge denir.

Başlangıç ve bitim noktaları aynı olan ve kendi kendini kesen bir eğriye, çok bağlantılı kapalı eğri denir. Bu eğrinin kapattığı bölgeye de bağlantılı kapalı bölge denir.

Tanım 1.2.4: Kompleks düzlemdeki bir yay, bir doğru parçasının sürekli resmidir. $z = z(t)$ fonksiyonu şeklinde $a \leq t \leq b$ aralığının $\mathbb{C}$ içine sürekli bir tasviri olarak ifade edilebilir. $z = z(t)$ şeklinde gösterilen bir yayın uzunluğu

$$|z(t_1) - z(t_0)| + |z(t_2) - z(t_1)| + \cdots + |z(t_n) - z(t_{n-1})|$$

toplamının en küçük üst sınırı olarak tanımlanabilir. Eğer bu en küçük üst sınır sonlu ise yaya rektifiye edilebilirdir denir. Diferansiyellenebilir yaylar rektifiye edilebilirdir. Bir Jordan yayı kendi kendini kesmeyen bir yaydır. Kapalı eğri, bir çemberin veya başlangıç ve bitim noktaları aynı olan bir yayın sürekli resmidir. Jordan eğrisi basit bağlantılı kapalı bir eğridir. Her Jordan eğrisi, düzlemi Jordan eğrisinin içi ve dışı olarak iki bölgeye ayırır. Bir Jordan eğrisinin içine Jordan bölgesi denir.

Tanım 1.2.5: Bir $f(z)$ fonksiyonu bir D bölgesinin bir a noktasında tanımlı değil ise veya süreksiz ise ya da türevi yoksa a ya ayrık tekil nokta denir.

Ne var ki $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ fonksiyonu, $z = 0$ için belirsiz olduğu halde $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ olduğundan $f(0) = 1$ alınabilir. Bu çeşit tekillikler kaldırılabildiğinden yapaydırlar. Bunun dışında iki türlü tekillik daha vardır. Bunlar

***i*) Kutup Noktaları:** Bir $f(z)$ fonksiyonu , a nın komşuluğunda sınırlı değil, fakat $\frac{1}{f(z)}$ holomorf ise, a noktasına kutup denir.

***ii*) Esas Tekil Noktası:** Eğer a noktası hem $f(z)$ hem de $\frac{1}{f(z)}$ in tekil noktası ise a noktasına esas tekil noktası denir.

Tanım 1.2.6: $w = f(z)$ fonksiyonunun bir D bölgesinin her noktasında türevi varsa, $f(z)$ ye bu bölgede holomorf denir.

Teorem 1.2.7 (Liouville Teoremi): Sınırlı bir tam fonksiyon (sonlu düzlemde holomorf fonksiyon) sabittir.

İspat: $|f(z)| < M$ olduğundan Cauchy eşitsizliğine göre $\forall\, n \geq 1$ için $|a_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$ dir. $\rho \to \infty$ için ikinci yan ve dolayısıyla a_n sıfır olur ve $f(z) = a_0$ dır.

Bir fonksiyonun verilen bölgede holomorf olup olmadığını belirlemek için aşağıda verilen Cauchy-Riemann Teoremi gereklidir.

Teorem 1.2.8: $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesinde tanımlanmış bir fonksiyon, $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonları da birinci mertebeden kısmi türevleri olan, sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda $f(z)$ nin D bölgesinde analitik olması için gerek ve yeter koşul D bölgesinin tüm noktalarında

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

denklemlerini gerçekleştirmesidir. Bu denklemlere Cauchy-Riemann Denklemleri denir.

Tanım 1.2.9: Kompleks düzlemin bir D bölgesinde tekil noktalar dışında holomorf olan fonksiyonlara analitik fonksiyonlar denir. Analitik fonksiyonlar, tanımlı olduğu her noktada türevlenebilen fonksiyonlardır.

$u(x,y)$ ve $v(x,y)$ olmak üzere $w = u + iv$ ile gösterilen bir f fonksiyonu analitik ise, reel ve sanal kısımları Cauchy-Riemann Denklemleri' ni sağlar.

1.3 Harmonik Fonksiyonların Genel Özellikleri

Şimdi harmonik fonksiyonların genel özelliklerini vereceğiz.

Tanım 1.3.1: $f = u + iv$ fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesinde analitik ise, reel ve sanal kısımları Laplace diferansiyel denklemini sağlar. $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde sürekli, ikinci kısmi türeve sahip f fonksiyonu

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

denklemini gerçekliyorsa, f ye harmonik fonksiyon denir.

Bir D bölgesinde tanımlı, sürekli ve kompleks değerli $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonunun harmonik olması için D bölgesinde u ve v nin reel değerli harmonik fonksiyonlar olması gerekir. Yani $\Delta(u) = u_{xx} + u_{yy} = 0$ ve $\Delta(v) = v_{xx} + v_{yy} = 0$ Laplace eşitliklerinin sağlanması gerekir. $xy -$ düzlemindeki bir D_1 bölgesinden , $uv -$ düzlemindeki bir D_2 bölgesine tanımlı, bire-bir $f(z)$ tasviri u ve v harmonik iseler harmonik yalınkat tasvir adını alır. $f = u + iv$ fonksiyonunun sürekli kısmi türevleri var ise analitiktir. O halde, her analitik fonksiyon harmoniktir. Fakat kompleks değerli harmonik fonksiyonların analitik olması gerekmez. Örneğin $w = f(z) = -2xy + i(y^2 - x^2)$ fonksiyonu harmonik olmakla beraber hiçbir yerde analitik değildir.

Laplace denkleminin lineer karakterizasyonundan dolayı iki harmonik fonksiyonun toplamı ve bir sabit ile çarpımı yine harmoniktir. Analitik fonksiyonların tersine, iki harmonik fonksiyonun çarpımı veya bileşkesi harmonik olmak zorunda değildir. f analitik ise $1/f$ ve f^{-1} analitik olmasına rağmen, harmonik olmayabilir. En basit harmonik fonksiyon lineer fonksiyondur.

Şimdi harmonik fonksiyonların, analitik fonksiyonlar ile ilişkisini veren teoremi vereceğiz.

Teorem 1.3.2: Basit bağlantılı bir D bölgesinde $f = u + iv$ fonksiyonunun harmonik olması için gerek ve yeter şart h ve g analitik olmak üzere $f = h + \bar{g}$ yazılabilmesidir.

İspat: Eğer u ve v basit bağlantılı bölgede harmonik fonksiyonlar ise, $u = Re\, K$ ve $v = Im\, L$ olacak şekilde K ve L analitik fonksiyonları var olsun. Bu durumda

$$f = u + iv = Re\, K + Im\, L = \frac{K+\bar{K}}{2} + i\,\frac{L-\bar{L}}{2i} = \frac{K+L}{2} + \frac{\overline{K-L}}{2} = h + \bar{g}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

$f = h + \bar{g}$ gösterimine f in kanonik gösterimi denir. Burada h, f in analitik kısmı g, f in co-analitik kısmı olarak adlandırılır. Ayrıca $h' = f_z$ ve $g' = \overline{f_{\bar{z}}}$ fonksiyonları f in tanımlı olduğu bölgede analitiktir.

$f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ harmonik fonksiyonu

$$f(z) = Re\,\{h(z) + g(z)\} + i\, Im\,\{h(z) - g(z)\}$$

olarak da yazılabilir.

h ve g analitik olduğunda $f = h + \bar{g}$ olduğundan, f in kuvvet serileri

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \overline{z^n}$$

şeklinde temsil edilir.

Tanım 1.3.3: Her bir $z \in D$ noktasından geçen iki eğri arasındaki açının yönü ve büyüklüğü korunursa, f in bir D bölgesinden $\mathbb{C}$ ye olan dönüşümüne bu noktada konformdur denir.

Tanım 1.3.4: $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı D bölgesinde analitik olsun. $\forall\, z \in D$ için $f'(z) \neq 0$ ise, f konformdur.

Eğer bir dönüşüm konform ise, bu dönüşümün Jakobiyeni sıfırdan farklıdır. Bir $f = u + iv$ fonksiyonunun Jakobiyeni

$$J_{f(z)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$$

olup $u_x = v_y$ ve $u_y = -v_x$ yazarsak

$$J_{f(z)} = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2$$

şeklindedir. Bu halde analitik fonksiyonlar için aşağıdaki teorem verilebilir;

Teorem 1.3.5: f fonksiyonu analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulunu sağlıyorsa, $w = f(z)$ transformasyonu konformdur.

$w = f(z)$ fonksiyonu $z = x + iy$ ve $w = u + iv$ olmak üzere $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde konform bir fonksiyon olsun. Buna göre

$$du = u_x dx + u_y dy \quad \text{ve} \quad dv = v_x dx + v_y dy$$

yazılabilir. Bu eşitlikler aynı zamanda kompleks formda

$$f_z = \tfrac{1}{2}\left(f_x - if_y\right) \quad \text{ve} \quad f_{\bar{z}} = \tfrac{1}{2}\left(f_x + if_y\right) \tag{1.3.1}$$

olmak üzere

$$dw = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z} \tag{1.3.2}$$

şeklinde ifade edilebilir. (1.3.1) eşitliklerinden hareketle

$$f_z = \tfrac{1}{2}(u_x + v_y) + \tfrac{i}{2}(v_x - u_y) \quad \text{ve} \quad f_{\bar{z}} = \tfrac{1}{2}(u_x - v_y) + \tfrac{i}{2}(v_x + u_y)$$

elde edilir. Bu ise

$$J_f(z) = u_x v_y - u_y v_x = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = \left|h'(z)\right|^2 - |g'(z)|^2$$

olduğunu gösterir.

Bir fonksiyonun jakobiyeni pozitif ise yön koruyan, negatif ise yön değiştiren fonksiyon denir. $f(z)$ fonksiyonu yön koruyan ise

$$(|f_z| - |f_{\bar{z}}|)|dz| \leq |dw| \leq (|f_z| + |f_{\bar{z}}|)|dz| \qquad (1.3.3)$$

yazılır.

Yön koruyan özelliği kullanılarak, bu tip fonksiyonlara ait dilatasyon ve kompleks dilatasyon aşağıdaki gibidir.

i) $D_f = \frac{|f_z|+|f_{\bar{z}}|}{|f_z|-|f_{\bar{z}}|} \geq 1$ ifadesine f in dilatasyonu denir.

ii) $\mu_f = \frac{|f_{\bar{z}}|}{|f_z|}$ ifadesine f in kompleks dilatasyonu denir.

Buradan $d_f = |\mu_f| = \frac{|f_{\bar{z}}|}{|f_z|} < 1$ olduğu görülür. Yön koruyan fonksiyonların dilatasyonları arasında

$$D_f = \frac{1+d_f}{1-d_f} \quad , \quad d_f = \frac{D_f - 1}{D_f + 1}$$

ilişkisi vardır.

Teorem 1.3.6: Harmonik bir tasvirin z noktasının komşuluğunda lokal yalınkat olması için gerek ve yeter şart $J_f(z) \neq 0$ olmasıdır.

Harmonik yalınkat fonksiyonların Jakobiyeni yalınkatlık özelliğinin ortaya konmasında büyük önem taşır. Bir harmonik yalınkat fonksiyon ya yön koruyan ya da yön değiştirendir. Eğer f yön koruyan ise $\overline{f}$ yön değiştiren harmonik olur. Konform fonksiyonlar yön koruyan fonksiyonlardır. Bu çalışmada üzerinde durulan harmonik yalınkat fonksiyon sınıfları, Jakobiyeni pozitif olan fonksiyonlardır.

$f = u + iv$ harmonik ise $f = h + \bar{g}$ kanonik gösterilimi kullanılarak f in Jakobiyeni

$$J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$$

eşitliği ile verilebilir. f yön koruyan ise $|h'(z)| > |g'(z)|$ dir ve

$$\frac{|f_{\bar{z}}|}{|f_z|} = \frac{|g'(z)|}{|h'(z)|} < 1$$

ifadesi sağlanır.

Teorem 1.3.7: $f = h + \bar{g}$ fonksiyonunun lokal yalınkat ve yön koruyan olması için gerek ve yeter şart

$$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 > 0$$

olmasıdır.

Tanım 1.3.8: Bir harmonik f fonksiyonu için $w = \frac{\overline{f_{\bar{z}}}}{f_z} = \frac{g'(z)}{h'(z)}$ ifadesine f in ikinci dilatasyonu denir. Yön koruyan bir harmonik f fonksiyonu için $|w(z)| < 1$ dir.

1.4 Yalınkat Fonksiyonlarda Temel Tanımlar

Bölüm 2 de daha detaylı inceleyeceğimiz yalınkat fonksiyonlar teorisinin temeli 19. yüzyılın başlarına dayanır. Koebe' nin (1907) çalışmalarından, günümüze kadar incelenerek geliştirilmiş bir konudur.

Burada yalınkat fonksiyonlar teorisinde temel sayılan tanımları ve bazı lemmaları vereceğiz.

Tanım 1.4.1: $D \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ve birim daire $U = \{z: |z| < 1\}$ olsun. Eğer f fonksiyonu D de bire-bir ise, f fonksiyonu D de yalınkattır.

Lemma 1.4.2 (Schwarz Lemması): f fonksiyonu U birim dairesinde analitik, $f(0) = 0$ ve $|f(z)| \leq 1$ olsun. Bu halde, $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ eşitsizlikleri sağlanır.

Lemma 1.4.3 (Schwarz -Pick Lemması): $f: U \to U$ holomorf bir fonksiyon olsun. O halde her $z_1, z_2 \in U$ için

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_1)}f(z_2)}\right| \leq \frac{|z_1-z_2|}{|1-\overline{z_1}z_2|}$$

ve her $z \in U$ için

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$$

dir. Poincare metrikte z_1, z_2 noktalarının uzaklığı

$$d(z_1,z_2) = \tanh^{-1}\left(\frac{|z_1-z_2|}{|1-\overline{z_1}\,z_2|}\right)$$

olarak açıklanır. Schwarz - Pick Lemması' na göre Poincare metrikte birim dairenin kendi üzerine holomorf dönüşümü noktaların uzaklığını korur.

Maksimum İlkesi: $\mathbb{C}$ nin bağlantılı, açık bir alt kümesi olan bir D bölgesinde holomorf ve kompleks değerler alan bir f fonksiyonunu alalım. Eğer z_0, kendi etrafındaki belli bir komşuluğundaki tüm z ler için

$$|f(z_0)| \geq |f(z)|$$

özelliğini sağlayan bir nokta ise o zaman f, D üzerinde sabittir.

Teoremin en basit kanıtı, açık gönderim teoremini varsaymakla gerçekleşir. Eğer fonksiyon sabit değilse ve fonksiyonun mutlak değeri yerel bir maksimuma sahipse, o zaman bu yerel maksimum ulaşıldığı nokta etrafındaki, *D* içinde kalan bir açık komşuluk açık gönderim teoremi sayesinde açık bir kümeye gönderilecektir. Bu açık kümede ise, bariz bir şekilde mutlak değeri $f(z_0)$ ' ın mutlak değerinden daha büyük noktalar vardır ve bu bir çelişkidir.

Teoremin hemen arkasından elde edilen bir sonuç ise **minimum ilkesi**dir ve ilke de şu şekilde ifade edilir: Eğer *f*, sınırlı bir *D* bölgesi üzerinde holomorf, bu bölgenin sınırı üzerinde sürekli ise ve f ' nin bu bölge üzerinde sıfırı yoksa, o zaman $|f(z)|$ minimum değerini sınır üzerinde alır.

Argüment Prensibi: D bölgesi basit kapalı C eğrisi ile sınırlı olsun. $f(z)$ rasyonel fonksiyonu C eğrisi üzerinde ve içinde analitik olsun. C eğrisinin üzerinde fonksiyonun sıfırı ve kutbu olmasın. O halde

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = n(0,f) - n(\infty,f)$$

dir. Burada $n(0,f)$ sıfırların sayısı ve $n(\infty,f)$ kutupların sayısıdır.

İspat: $\frac{f'(z)}{f(z)} = d\frac{\log f(z)}{dz}$ olarak yazılabilir. Buradan

$$\log f(z) = log|f(z)| + i\ arg(z)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C} d\ logf(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C}\left(d\ log|f(z)| + i.d\ arg\ f(z)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C} d\ log|f(z)| + \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{C} d\ arg\ f(z)$$

$$= -\frac{i}{2\pi}\oint\limits_{C} d\ log|f(z)| + \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{C} d\arg f(z)$$

$$\oint_{C} d\log f(z) = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{1}{2\pi}\oint_{C} d\arg f(z) = n(0,f) - n(\infty,f)$$

dir. Bu da ispatı tamamlar.

Mobius Dönüşümleri: Mobius dönüşümleri (homografik dönüşümler) genişletilmiş kompleks düzlemde tanımlanır. Bu genişletilmiş kompleks düzlem bir Riemann Küresi olarak düşünülebilir. Her Mobius dönüşümü Riemann küresinin kendisine bir bijektif konform dönüşümüdür.

Bir Mobius dönüşümünün genel biçimi

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

şeklindeki rasyonel bir fonksiyondur. Burada $a,\ b,\ c,\ d$ katsayıları $ad - bc \neq 0$ ifadesini sağlayan kompleks sayılardır.

Bölüm 2 de verdiğimiz Riemann Dönüşüm Teoremi' ndeki normalizasyonlar kullanılarak, analitik ve yalınkat fonksiyonlar sınıfı şu şekilde elde edilmiştir:

Tanım 1.4.3: U birim dairesinde tanımlı $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ normalizasyonları ile verilen analitik ve yalınkat fonksiyonların S sınıfı elde edilmiştir.

S sınıfının ilk örneği

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots$$

şeklide verilen Koebe fonksiyonudur.

De Branges' in 1984' te Bieberbach varsayımını ispatlamasından sonra, normalize yalınkat fonksiyonların harmonik dönüşümlere genelleştirilebileceğini Clunie ve Sheil- Small 1984' te bulmuşlardır. Kompleks değerli harmonik fonksiyonların S_H sınıfını tanımlamışlardır.

Harmonik yalınkat fonksiyonların , normalize analitik fonksiyonlar gibi normalize edilebildiğini şu tanımla göstermişlerdir:

Tanım 1.4.4: U birim dairesinde tanımlı normalize, harmonik ve yalınkat dönüşümlerin S_H sınıfı

$$\{f : U \to \mathbb{C} |\ f(0) = a_0 = 0,\ f_z(0) = a_1 = 1\ \ f\ \ harmonik, yalınkat\}$$

şeklindedir.

Eğer $b_1 = 0$ gerektirmesi ile bu aileyi sınırlandırırsak

$$S_H^0 = \{f \in S_H |\ f_{\bar{z}}(0) = b_1 = 0\}$$

sınıfını elde ederiz. Buradan $S \subset S_H^0 \subset S_H$ olduğu sonucuna varırız.

BÖLÜM 2

YALINKAT FONKSİYONLARIN TEMEL ÖZELLİKLERİ

Yalınkat fonksiyonlar teorisi geometrik fonksiyonlar teorisinin en ilginç konularından biridir. Bunun başlangıcı (Riemann Dönüşüm teorisinin yanı sıra) Koebe' nin 1907 deki çalışmalarına, Gronwall' in 1914/15 teki alan teoremlerinin ispatına ve Bieberbach' ın (1916) normalize yalınkat fonksiyonlarının ikinci sıra katsayı tahminlerine ve bunların sonucuna uzanır. Daha sonra yalınkat fonksiyonlar teorisi kendi başına bir konu haline gelmiştir.

Çalışmamızın ikinci bölümünde büyüme, kapsama ve bükülme teoremlerini içeren birim dairede normalize yalınkat fonksiyonların S sınıfı ile ilgili temel kavramlar ile başlayacağız. Burada sunulan yalınkat fonksiyonlar teorisinin sonuçlarının çoğu klasiktir; fakat nispeten yeni ve eski sonuçlardan biraz farklı görüş açısı sağlayan bazı sonuçlar da vardır.

2.1.Kompleks Düzlemde Yalınkatlık

2.1.1. Yalınkat Fonksiyonlar Teorisinde Temel Sonuçlar

Yalınkat Fonksiyonların Örnekleri

$\mathbb{C}$ kompleks düzlem olsun. Eğer $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ ise

$$U(z_0\,,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

z_0 merkezli r yarıçaplı daire olsun. $U(z_0, r)$ nin kapanışını $\overline{U}(z_0, r)$ ve sınırını $\partial U(z_0, r)$ ile tanımlayacağız. Açık daire $U(0, r)'$ yi U_r ve birim daire $U_1{}'$ i U ile tanımlayacağız.

Eğer G, $\mathbb{C}$ nin açık bir altkümesi ise $\mathbb{C}$ deki değerler ile G deki holomorf fonksiyonlar kümesi $H(G)$ ile tanımlansın. Lokal düzgün yakınsak topoloji ile (veya kompakt altkümelerde düzgün yakınsaklık) $H(G)$ topolojik uzaya dönüşür.

D, $\mathbb{C}$ de bir bölge olsun. Eğer $f \in H(D)$ ve f, D de bire-bir ise $f: D \to \mathbb{C}$ ye yalınkattır. Burada D de yalınkat fonksiyonların $H_u(D)$ sınıfının çalışmalarıyla ilgileneceğiz. İyi biliniyor ki, $H_u(\mathbb{C})$ sınıfı $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ olduğunda sadece $f(z) = az + b$, $(z \in \mathbb{C})$ formundaki fonksiyonları kapsar. Ancak genel bir D bölgesi için $H_u(D)$ diğer fonksiyonların çoğunu kapsar. Her $z \in D$ noktası için $f|_V$ yalınkat olacak şekilde V komşuluğu var ise $f \in H(D)$ fonksiyonu lokal yalınkattır denir. f holomorf olduğundan lokal yalınkatlık $z \in D$ için $f'(z) \neq 0$ şartına eşittir.

Eğer $f \in H(D)$ lokal yalınkat ve $z \in D$ ise $f'(z)$ türevi z de f in lokal geometrik durumunu belirler. $|f'(z)|$ niceliği uzunluk için lokal büyültme faktörünü ve $arg f'(z)$ niceliği lokal rotasyon faktörünü verir. Ayrıca $f: D \subset \mathbb{R}^2$ den $\mathbb{R}^2$ ye dönüşümü düşünülürse, bu dönüşümlerde Jakobien $|f'(z)|^2$ olarak verilir.

Bu yüzden bir lokal yalınkat fonksiyon açıları ve yönü korur. Bu sebepten dolayı yalınkat fonksiyonlarda konform dönüşüm veya konformal eşitlikten söz etmek alışılmıştır.

Bir $D \subset \mathbb{C}$ bögesinde $f'(z) \neq 0$ şartı gereklidir, fakat şüphesiz D üzerinde f in yalınkatlığı için yeterli değildir. Örneğin $f(z) = e^{kz}$ tüm $k \in \mathbb{C}$ ler için U üzerinde lokal yalınkattır, fakat $|k| > \pi$ ise U üzerinde yalınkatlık genel değildir. Genel yalınkatlık için şartlar vermek, lokal yalınkatlık için vermekten daha zordur, burada böyle şartların çoğunu göreceğiz, bunlardan bazıları oldukça dikkate değerdir. Durumlardan en kolay ve kanıtlanmış olanı Noshiro, Warschawski ve Wollf' un bir sonraki kriteridir (Lemma 3.4.1) : Eğer $D \subset \mathbb{C}$ konveks bölgesi üzerinde f holomorf ve $Re\, f'(z) \neq 0$ ise f, D de yalınkattır.

Bir değişkenli yalınkat fonksiyonlar teorisinin en temel sonuçlarından biri Riemann Dönüşüm Teoremidir.

Riemann Dönüşüm Teoremi: $\mathbb{C}$ nin bir altkümesi olan her basit bağlantılı D bölgesi birim daire üzerine konform olarak dönüşür. Eğer $z_0 \in D$ ise $f(z_o) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ olacak şekilde U üzerinde D nin konform dönüşümü tektir.

Tüm kompleks düzlem Liouville teoremi ile U birim dairesi üzerine konform olarak dönüşmeyebilir, buna rağmen bu bölgeler homeomorftur.

Caratheodory sebebiyle, D nin sınırları kapalı bir Jordan eğrisi olduğunda, Riemann Dönüşüm teoreminin daha güçlü sonuçları vardır.

Caratheodory Teoremi: $D \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bölgesi kapalı Jordan eğrisi ile sınırlı olsun. O zaman D nin U üzerine herhangi bir konform dönüşümü, $\overline{D}$ nin homeomorfizmasının $\overline{U}$ üzerine bir uzanımıdır.

Riemann Dönüşümü Teoremi görüşü, yalınkatlık içeren birçok soruya U birim dairesi üzerinde, genel basit bağlantılı bölgeden daha çok çalışma olanağı sağlar. Bu amaç için $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ ile normalize olan $f \in H_u(U)$ fonksiyonlarının S sınıfı ortaya çıkmıştır. Eğer $g,\ U$ dairesinde yalınkat fonksiyon ve $h = \frac{(g-g(0))}{g'(0)}$ ise $h \in S$ dir. S sınıfı hakkındaki çalışmalar U üzerindeki her yalınkat fonksiyon için bilgi sağlar. Benzer olarak, $0 < r < 1$ için normalize olan $f \in H_u(U_r)$ fonksiyonlarını $S(U_r)$ sınıfı olarak düşünebiliriz.

S sınıfında bir f fonksiyonunun Taylor serileri açılımı şu şekildedir:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \quad , \quad z \in U \qquad (2.1.1)$$

Ayrıca normalize edilebilen ve ∞ da bir basit kutbu olan $\Delta = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > 1\}$ üzerinde yalınkat olan φ fonksiyonlarının Σ sınıfını da oluşturabiliriz. ∞ da φ nin Laurent serilerinin açılımı aşağıdaki gibidir:

$$\varphi(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\zeta^n} + \cdots \quad , \quad |\zeta| > 1 \qquad (2.1.2)$$

$\varphi \in \Sigma$ gibi her fonksiyon Δ yı bağlantılı kompakt kümenin tümleyeni üzerine dönüştürür.

$S\ ve\ \Sigma$ sınıfları yakından ilişkilidir.

- $\varphi(\zeta) = \frac{1}{f(1/\zeta)} + \beta$ olduğunda $f \in S$ ve $\beta \in \mathbb{C} \Rightarrow \varphi \in \Sigma$

Gerçekten, f sadece $z = 0$ da sıfır olduğundan φ fonksiyonu Δ

da holomorftur ve açıkça φ , ∞ da (2.1.2) formundaki Laurent serileri açılımına sahiptir.

Tersine olarak

- $f(z) = \frac{1}{\varphi(1/z)-\beta}$ olduğunda $\varphi \in \Sigma$ ve $\beta \in \mathbb{C} \setminus \varphi(\Delta)$ $\Rightarrow f \in S$

Gerçekten, $\beta \notin \varphi(\Delta)$ olduğundan f, U üzerinde holomorftur. Temel olarak görebiliriz ki f yalınkattır ve φ nin normalizasyonu f in normalizesi anlamına gelir.

Bu ilişkileri kullanarak, Σ sınıfı için benzer sonuçlardan S sınıfının özelliklerini tanımlayabiliriz.

Teorem 2.1.1: $f \in S$, $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$, $z \in U$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

i) Eğer $\theta \in \mathbb{R}$ ise

$$e^{-i\theta} f\left(e^{i\theta} z\right) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k\, e^{i(k-1)\theta} z^k, \quad z \in U$$

fonksiyonu S ye aittir ve buna f in rotasyonu denir.

ii) Eğer $r \in (0,1)$ ise

$$\frac{1}{r} f(rz) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k\, r^{k-1} z^k, \quad z \in U$$

ile verilen fonksiyonu S ye aittir ve buna f in dilatasyonu denir.

iii) Varsayalım ki $\omega \notin f(U)$ ve g

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{\omega}} , \quad z \in U$$

olarak tanımlanmışsa $g \in S$ dir ve buna f in dahil edilmeyen değer dönüşümü denir.

$\boldsymbol{iv)}$ Eğer $z_o \in U$ ve g

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z_0 + z}{1 + \overline{z_o}\, z}\right) - f(z_o)}{(1 - |z_o|^2) f'(z_o)}\,, \qquad z \in U$$

olarak tanımlanmışsa $g \in S$ dir ve buna Koebe dönüşümü denir.

$\boldsymbol{v)}$ Eğer $n = 2,3, \ldots,$ ve h

$$h(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z\left(\frac{f(z^n)}{z^n}\right)^{1/n}, \qquad z \in U$$

olarak tanımlanmışsa $h \in S$ ve f in $n.$ dereceden dönüşümü denir. Burada kuvvet fonksiyonlarının

$$\left.\left(\frac{f(z^n)}{z^n}\right)^{1/n}\right|_{z=0} = 1$$

gibi bir dalını seçeriz.

İspat: Diğerleri açık olduğundan (iii) , (iv) ve (v) özelliklerinin ispatını vermek yeterlidir.

$\boldsymbol{iii)}$ $\omega \notin f(U)$ olduğundan g fonksiyonu U da holomorftur ve f in normalize edilebilmesi g nin de normalize edilmesi anlamına gelir. g nin yalınkat olması, f in yalınkat olmasının basit bir sonucudur.

$\boldsymbol{iv)}$ $q(z) = \frac{z + z_0}{1 + z\overline{z_o}}$ Möbius dönüşümleri U üzerinde, U nun konform dönüşümünü verir ve bu yüzden foq , U da yalınkattır. Yapısı itibariyle g normalize edilebildiğinden, $g \in S$ dir.

$\boldsymbol{v)}$ $f \in S$ olduğundan, h fonksiyonu birim dairede iyi tanımlıdır ve

holomorftur. Ayrıca β, 1' in $n.$ kökü ise $h(\beta z) = \beta h(z)$, ($z \in U$) dir. h ın yalınkat olduğunu göstereceğiz. $z_1, z_2 \in U$ olmak üzere $h(z_1) = h(z_2)$ olsun. Böylece $h^n(z_1) = h^n(z_2)$ ve bu yüzden $f(z_1^n) = f(z_2^n)$ dir. f, U da yalınkat olduğundan $\beta \in \mathbb{C}$, $\beta^n = 1$ olacak şekilde $z_2 = \beta z_1$ varlığını çıkarabiliriz. Çünkü

$h(z_1) = \beta h(z_1)$ den

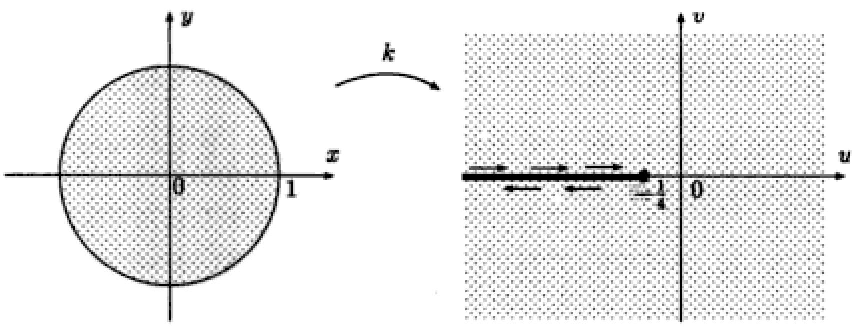
$$h(z_2) = h(\beta z_1) = \beta h(z_1) = \beta h(z_2)$$

eşitliğine sahibiz ve bu yüzden $\beta = 1$ veya $h(z_2) = 0$ dır. Eğer $\beta = 1$ ise $z_2 = z_1$ ve eğer $h(z_2) = 0$ ise, $z_2 = z_1 = 0$ olduğunu çıkarabiliriz. Bu da ispatı tamamlar.

Yalınkat Fonksiyonların Örnekleri: S de en önemli fonksiyon örneklerinden biri Koebe fonksiyonudur.

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}\ , \qquad z \in U$$

Bu fonksiyon U birim dairesini kompleks düzlem üzerine reel eksen boyunca $-\infty$ dan $-1/4$ e kadar negatif yarık hariç konform olarak dönüştürür ve yalınkat fonksiyonlar teorisinde birçok problemde extremal rol oynar.



Şekil 2.1: Koebe fonksiyonu

Koebe fonksiyonunun durumu $\varphi(\zeta) = \zeta - 2 + \frac{1}{\zeta}$ ile verilen $\varphi(\zeta) = \frac{1}{k(1/\zeta)} \in \Sigma$ fonksiyonuna karşılık gelir. Bu fonksiyon Δ yı $[-4,0]$ yarığı boyunca çıkarılmış kompleks düzlemin tamamını oluşturan çift bağlantılı bölge üzerine dönüştürür.

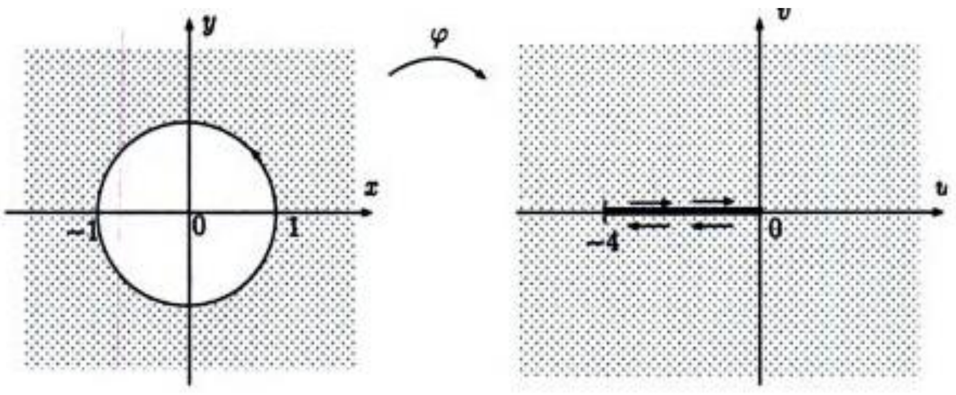
Koebe fonksiyonunun rotasyonu, her $\theta \in \mathbb{R}$ için S sınıfına ait

$$_{\theta}(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2} \,, \qquad z \in U$$

fonksiyonu ile verilir. Birim dairenin görüntüsü ∞ dan $-e^{-i\theta}/_4$ e kadar ışınsal şerit hariç olan kompleks düzlemdir .

$\alpha \in (0,2]$ olduğunda $f(z) = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} - 1\right]$, $z \in U$ fonksiyonuna genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu denir ve S sınıfına aittir.

$f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonu Koebe fonksiyonunun karekök dönüşümüdür. Bu birim dairede biri $i/2$ den ∞ a ve diğeri $-i/2$ den $-\infty$ a uzanan lineer olmayan, iki ışınsal şeritin tümleyeni üzerine dönüşür.



Şekil 2.2: $\varphi(\zeta) = \zeta - 2 + \frac{1}{\zeta}$ fonksiyonu

$f(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonu U birim dairesini sağ yarı düzlem $Re\omega > -1/2$ üzerine dönüştüren lineer kesirli dönüşümdür. Bu normalize edilebildiğinden S ye aittir. Bu fonksiyon konveks görüntüsü olan fonksiyonları oluşturan S nin altsınıfı için birçok problemde extremal rol oynar.

$\alpha \in (-\pi/2\,,\pi/2)$ olduğunda $f(z) = \frac{z}{(1-z)^{2e^{-i\alpha}cos\alpha}}$ fonksiyonu S sınıfındandır. Birim dairenin imajiner kısmı, logaritmik $\alpha -$ spiral yayının tümleyenidir.

$f(z) = \frac{z}{(1-z)^3}$, $z \in U$ fonksiyonu U da holomorftur, fakat $f'(-1/2) = 0$ olduğundan dolayı tüm U dairesinde yalınkat değildir. Ancak bu fonksiyon $U_{1/2}$ dairesinde yalınkattır ve bu f de yalınkat olan 0 merkezli en geniş dairedir.

2.1.2. Alan Teoremi

Konumuz, alan teoremi denilen Σ daki fonksiyonların Laurent serilerinin katsayıları ile ilgili bir teorem ile başlayacaktır. Bu teorem 1914 te Gronwall (1914/15) tarafından ispatlandı ve Σ ve S sınıflarının temel özellikleri üzerine olan çalışmalarında önemli rol taşır.

Teorem 2.1.2: Eğer $\varphi \in \Sigma$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leq 1 \tag{2.1.3}$$

dir.

İspat: $E = E(\varphi)$, $\mathbb{C}$ de bir imajiner bölgenin tümleyeni olsun. $\rho > 1$ sağlansın ve Γ_ρ, ∂U_ρ çemberinin görüntüsü olsun. φ, Δ da yalınkat olduğundan Γ_ρ

$$\omega = \varphi(\rho e^{i\theta}) = \omega(\theta) = u(\theta) + iv(\theta)\,, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ile verilen düzgün pozitif yönlü Jordan eğrisidir.

Eğer E_ρ , Γ_ρ ile çevrilmiş bölge ise $E_\rho \supset E$ dir ve Green teoreminden yararlanarak

$$A_\rho = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_\rho} (udv - vdu) = \frac{1}{2i}\int_{\Gamma_\rho} \overline{w}\, dw = \frac{1}{2i}\int_{\partial U_\rho} \overline{\varphi(\zeta)}\, \varphi'(\zeta) d\zeta$$

şeklinde E_ρ nin A_ρ alanını gösteririz.

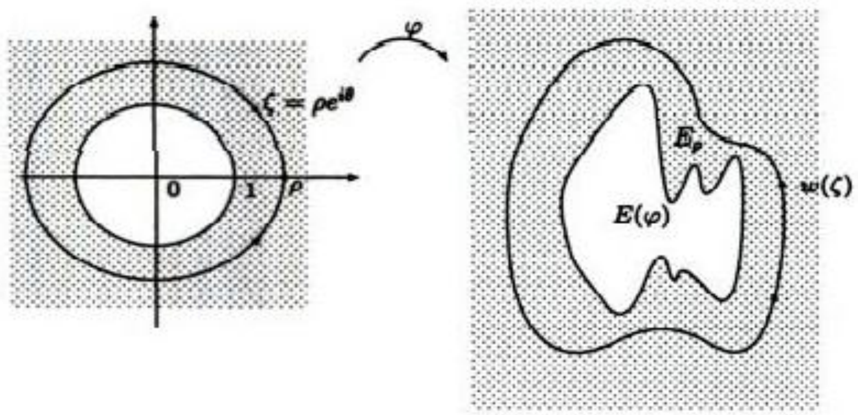
φ nin Laurent serisi açılımı kullanılarak

$$A_\rho = \frac{1}{2i}\int_{|\zeta|=\rho} \left\{\bar{\zeta} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{\alpha_n}}{\overline{\zeta^n}}\right\}\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha_n}{\zeta^{n+1}}\right\} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{|\zeta|=\rho} \left\{ \frac{\rho^2}{\zeta} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{\alpha_n} \zeta^n}{\rho^{2n}} \right\} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha_n}{\zeta^{n+1}} \right\} d\zeta$$

$$= \pi \left(\rho^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|\alpha_n|^2}{\rho^{2n}} \right)$$

elde ederiz.



Şekil 2.3: $E(\varphi)$ = Görüntü bölgesinin tümleyeni

Burada $k = 1$ olduğunda, integralin $2\pi i$ ye eşit olması durumu hariç $\int_{|\zeta|=\rho} \zeta^k d\zeta = 0$ $(k \in \mathbb{Z})$ eşitliğine sahibiz ve ρ sabiti için yukarıdaki seriler düzgün yakınsak olduğundan, terim terim integre edebiliriz. $A_\rho \geq 0$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|\alpha_n|^2}{\rho^{2n}} \leq \rho^2$$

sonucuna varırız ve $\rho \to 1$ alırsak, $\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha|^2$ ifadesine yakınsadığını buluruz.

Yukarıdaki ispat kullanılarak, E_ρ bölgesinde

$$A_\rho = \pi \left(\rho^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|\alpha_n|^2}{\rho^{2n}} \right)$$

formülünü elde ederiz. E_ρ kümeleri $\rho \to 1$ için azalandır ve $E(\varphi) = \bigcap_{\rho>1} E_\rho$ şeklindedir. Bu yüzden $A,\ E(\varphi)$ nin alanı ise

$$A = \pi\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2\right)$$

sonucunu buluruz. Teorem 2.1.2 den dolayı $A \geq 0$ olduğunda, ifadeye eşdeğerdir. Bu alan teoremi terimini açıklar. Ayrıca eşitlik $A = 0$ olduğunda (2.1.3) ü tam olarak sağlar.

Σ sınıfındaki fonksiyonlar için sınır katsayıları alan teoreminin sonuçları ile ilişkilidir.

Sonuç 2.1.3: (2.1.2) ile verilen $\varphi \in \Sigma$ olsun. O halde $|\alpha_1| \leq 1$ dir. $|\alpha_1| = 1$ eşitliği vardır ancak ve ancak $\theta \in \mathbb{R}$ olduğunda $\varphi(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + e^{i\theta}\zeta^{-1}$ dir. Ayrıca $\varphi(\zeta) \neq 0,\ |\zeta| > 1$ ise $|\alpha_0| \leq 2$ dir. Eşitlik ancak ve ancak $\sigma \in \mathbb{R}$ iken $\varphi(\zeta) = \zeta + 2e^{i\sigma} + e^{2i\sigma}\zeta^{-1}$ olursa sağlanır.

İspat: $|\alpha_1| \leq 1$ eşitsizliği (2.1.3) teki sonuca göre açıktır. Ayrıca eğer $|\alpha_1| = 1$ ise (2.1.3) ten dolayı $k \geq 2$ için $\alpha_k = 0$ sonucuna varırız.

$|\zeta| > 1$ için $\varphi(\zeta) \neq 0$ olduğunu farzedelim. $|z| < 1$, $f(z) = \frac{1}{\varphi(1/z)}$ fonksiyonu S de bir fonksiyondur $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$ alırsak, Teorem 2.1.1 (V) den $g \in S$ de vardır. Bu yüzden

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{g(1/\zeta)} = \zeta\left(\frac{\varphi(\zeta^2)}{\zeta^2}\right)^{1/2}, \quad |\zeta| > 1$$

ile tanımlanan ψ fonksiyonu Σ ya aittir. Ayrıca $[\psi(\zeta)]^2 = \varphi(\zeta^2)$, $|\zeta| > 1$ dir. Varsayalım ki

$$\psi(\zeta) = \zeta + \beta_0 + \frac{\beta_1}{\zeta} + \cdots, \qquad |\zeta| > 1$$

Laurent serisi olsun. Buradan

$$[\psi(\zeta)]^2 = \zeta^2 + 2\beta_0\zeta + (\beta_0^2 + 2\beta_1) + \cdots$$

$$\varphi(\zeta^2) = \zeta^2 + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta^2} + \cdots, \qquad |\zeta| > 1$$

dir.

Katsayıları karşılaştırarak, $\beta_0 = 0$ ve $\alpha_0 = 2\beta_1$ olduğunu görürüz. $\psi \in \Sigma$ olduğundan ispatın birinci bölümünden $|\alpha_0/2| \leq 1$, $|\alpha_0| \leq 2$ sonucuna varırız. $|\alpha_0| = 2$ veya $|\beta_1| = 1$ eşitlikleri ancak ve ancak bazı $\sigma \in \mathbb{R}$ ler için $\psi(\zeta) = \zeta + \frac{e^{i\sigma}}{\zeta}$ olduğunda meydana gelir. Buradan

$$\varphi(\zeta^2) = [\psi(\zeta)]^2 = \zeta^2 + \frac{e^{2i\sigma}}{\zeta^2} + 2e^{i\sigma}$$

$$\varphi(\zeta) = \zeta + \frac{e^{2i\sigma}}{\zeta} + 2e^{i\sigma}$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi S sınıfı için bu sonucun olası etkilerini düşünelim. Sonuç 2.1.3 teki birinci durum 1916 da Bieberbach (1916) tarafından elde edilen S deki bir fonksiyonun Taylor serileri açılımında ikinci sıra katsayıları için tahmin elde etmeye yol açar. Bu sonucun başka kanıtı (Ros- Rov, p.160) da bulunan Pick' in teoremlerinin uygulamalarına dayanır.

Teorem 2.1.4: $f \in S$ ve $z \in U$ olmak üzere $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ olarak verilen fonksiyon için

$$|a_2| \leq 2 \qquad (2.1.4)$$

dir. (2.1.4) teki eşitlik ancak ve ancak f, Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu ise meydana gelir.

İspat: $f \in S$ olduğundan $\varphi(\zeta) = \frac{1}{f(1/\zeta)}$, $|\zeta| > 1$ ile tanımlı φ fonksiyonu Σ ye aittir. Ayrıca $|\zeta| > 1$ için $\varphi(\zeta) \neq 0$ dır. Basit hesaplamalar φ nin Laurent serileri olduğunu gösterir

$$\varphi(\zeta) = \zeta - a_2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\zeta^k}, \qquad |\zeta| > 1$$

Sonuç 2.1.3 ten dolayı $|a_2| \leq 2$ dir ve eğer eşitlik oluşursa, bazı $\sigma \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi(\zeta) = \zeta - 2e^{i\sigma} + \frac{e^{2i\sigma}}{\zeta}$$

olur. Bu durumda

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(1/z)} = \frac{z}{(1 - e^{i\sigma}z)^2}, \qquad z \in U$$

dir.

Eğer f, Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu ise, a_2 ikinci katsayısının $|a_2| = 2$ şartını sağladığı açıktır. Bu da ispatı tamamlar.

Bu tahminin temelinde ve Koebe fonksiyonunun rotasyonları için $|a_k| = k$ dır ki, Bieberbach ünlü varsayımını formülize etti.

Bieberbach Varsayımı: Eğer $f \in S$, $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$, $z \in U$ ise $k = 2,3, \ldots$ için $|a_k| \leq k$ dır. $k \geq 2$ için verilen $|a_k| = k$ eşitliği ancak ve ancak f Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu ise sağlanır.

Bu varsayım De Branges (1985) olağanüstü ispatını 1984 te verinceye kadar çözülmeden kalmıştı. S in özel altsınıflarını ve asimtotik tahminler ve genel n için tahminler gibi belli katsayıları içeren sonuçlar aradan geçen yıllar içinde sağlandı.

Bieberbach varsayımının tarihi sürecinin yorumlarıyla ilgilenen okurlar Duren (1983), Pommerenke (1975), Conway (1995), Goluzin (1952), Gong (1999), Hayman (1994), Henrici (1993), Milin (1977), Rosenblum ve Rovnyak (1994) kaynaklarını inceleyebilirler.

2.1.3 S Sınıfında Büyüme, Kapsama ve Bükülme Sonuçları

$|a_2| \leq 2$ tahmini S sınıfındaki fonksiyonlarda önemli teoremlerin bazıları için temeldir. Bu teoremler en azından başlangıç yönleriyle yalınkat fonksiyonlar teorisinin temelini oluşturur. Bu bölümdeki sonuçlar $\mathbb{C}^n$ de U birim dairesinin normalize yalınkat dönüşümlerinin $S(U)$ sınıfının tamamı için daha yüksek boyutlara uzanamayacağını not eder. Bloch fonksiyonları ve Bloch tipteki teoremleri kapsayan ve lineer - invariant ailesi için bükülme teoremleri gibi U da yalınkat olması gerekmeyen fonksiyonlarla ilgili sonuçlar olduğu da söylenebilir.

$1/4$ Koebe Teoemi ile başlayalım.

Teorem 2.1.5: $f \in S$ ise $f(U) \supseteq U_{1/4}$ dir. Bu sonuç Koebe fonksiyonunun rotasyonları için kesindir. Ayrıca $\bigcap_{f\in S} f(U) = U_{1/4}$ dir.

İspat: Burada değer dönüşümlerini ihmal etme üzerine dayalı bir ispat vereceğiz. İkinci ispat (2.1.5) teki daha düşük tahmin kullanılarak verilebilir.

$\omega_0 \in \mathbb{C}$ ise $\omega_0 \notin f(U)$ olacak şekilde $|\omega_0| \geq 1/4$ olduğunu göstermek yeterlidir ve $|\omega_0| = 1/4$ eşitliği f, ancak ve ancak Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu ise sağlanır. Bu amaç için $g: U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu

$$g(z) = \frac{\omega_0 f(z)}{\omega_0 - f(z)}\,, \qquad z \in U$$

ile verilsin. Teorem 2.1.1 (iii) den $g \in S$ dir ve basit hesaplamalar g nin Taylor serileri formunun aşağıdaki gibi olduğunu gösterir:

$$g(z) = z + \left(a_2 + \frac{1}{\omega_0}\right) z^2 + \cdots, \qquad z \in U$$

Teorem 2.1.4 ten şu sonucu çıkarabiliriz:

$$\left|a_2 + \frac{1}{\omega_0}\right| \leq 2$$

ve $|a_2| \leq 2$ olduğundan

$$\left|\frac{1}{\omega_0}\right| \leq \left|a_2 + \frac{1}{\omega_0}\right| + |a_2| \leq 4$$

elde ederiz. Bu yüzden $|\omega_0| \geq 1/4$ olduğu açıklanır.

Diğer taraftan yukarıdaki sonuçlar kullanılarak, eğer ancak ve ancak $|a_2| = 2$ ve $\left|a_2 + \frac{1}{\omega_0}\right| = 2$ ise $|\omega_0| = 1/4$ olduğunu görürüz. Bu durumda f, Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olmalıdır.

$\bigcap_{f\in S} f(U) = U_{1/4}$ olduğunu gösterelim ve $\theta \in \mathbb{R}$ olduğunda

$$k_\theta(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}\,, \qquad z \in U$$

ile verilen Koebe fonksiyonunun rotasyonlarını düşünelim. $\partial U_{1/4}$ çemberinin her noktası $k_\theta(U)$ bölgelerinden birinin bir sınır noktasıdır ve $\bigcap_{\theta\in\mathbb{R}} k_\theta(U) = U_{1/4}$ dir. $\bigcap_{f\in S} f(U) = U_{1/4}$ olduğu sonucunu çıkarmalıyız. Bu da ispatı tamamlar.

Bu yüzden $U_{1/4}$ dairesi, merkezi orjinde olan, S de her fonksiyonun imajiner kısmını içeren en geniş dairedir.

S deki fonksiyonların ikinci sıra katsayısı olan a_2 için Bieberbach (1916) teoreminin çok önemli başka bir sonucu da Teorem 2.1.6 da verilen Koebe distortion (bükülme) teoremidir.

Teorem 2.1.6: $f \in S$ ise her $z \in U$ için aşağıdaki tahminler kesindir:

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \tag{2.1.5}$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \tag{2.1.6}$$

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \le \frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{2.1.7}$$

$z \neq 0$ noktasında verilen bu tahminlerden birinde eşitlik ancak ve ancak f, Koebe fonksiyonunun uygun bir rotasyonu ise oluşur.

İspat:

1. Adım: $z \neq 0$ bu tahminlerin tümünü ispatlamak için yeterlidir. z yerine $|z| = r \in (0,1)$ aralığında değerler yazalım ve f in Koebe dönüşümü g aşağıda verilsin:

$$g(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta+z}{1+\zeta\bar{z}}\right) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)} = \zeta + b_2\zeta^2 + \cdots, \qquad \zeta \in U \tag{2.1.8}$$

Bu fonksiyon S sınıfına aittir ve basit hesaplamalarla

$$b_2 = \frac{1}{2}\left[(1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z}\right]$$

olduğu görülür. Teorem 2.1.4 ten $|b_2| \leq 2$ elde ederiz ve bu yüzden

$$\left[(1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z}\right] \leq 4 \tag{2.1.9}$$

olur. (2.1.9) dan yararlanarak

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

elde ederiz ve özellikle

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq Re\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $f'(z) \neq 0$ ve $f'(0) = 1$ olduğundan dolayı $\log f'(z)|_{z=0} = 0$ olacak şekilde $\log f'(z)$ nin bir analitik dalı vardır. $z = re^{i\theta}$ için

$$\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| = \frac{\partial}{\partial r} Re\{\log f'(z)\} = \frac{1}{r} Re\left[\frac{z f''(z)}{f'(z)}\right]$$

sonucu bulunur. (2.1.9) kullanılarak ve bu eşitlikten

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \frac{2r+4}{1-r^2} \tag{2.1.10}$$

elde edilir. θ yı sabit tutarak, r ye göre integrallersek ve $f'(0) = 1$ yazarsak

$$\log\left[\frac{1-r}{(1+r)^3}\right] \leq \log\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \log\left[\frac{1+r}{(1-r)^3}\right]$$

sonucunu buluruz. Ayrıca bu sınırlar kesindir. Gerçekten bazı $z = re^{i\theta}$ lar için (2.1.6) eşitsizliğinin birinde eşitlik sağlanırsa, $0 \leq \rho \leq r$ ve tüm ρ lar için (2.1.10) eşitsizliğine benzer eşitlik almalıyız. $\rho \to 0$ alırsak

$$4 = \left|\frac{\partial}{\partial \rho}\log\left|f'\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|\right| = \left|Re\left[\frac{e^{i\theta}f''(0)}{f'(0)}\right]\right|$$

elde ederiz. $f'(0) = 1$ olduğundan $\left|Re\left[e^{i\theta}f''(0)\right]\right| = 4$ almalıyız. Bu yüzden $|f''(0)| \geq 4$ dir. Teorem 2.1.4 ten, $|f''(0)| = 4$ sonucuna varırız ve bu yüzden f fonksiyonu, Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olmalıdır.

Tersine olarak $f,$ Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu ise bunu görmek kolaydır ve eşitlik (2.1.6) daki bir ışın boyunca alt ve üst tahminlerinin her birinde sağlanır ve bu ışınlar karşıt yönlerdeki noktalardır.

2. Adım: (2.1.5) teki üst sınırı ispatlayacağız. $0 < r < 1$ ve $z = re^{i\theta}$ olsun. Eğer $[0, z]$, 0 ile z arasında kapalı doğru parçası ise

$$f(z) = \int_{[0,z]} f'(\zeta)d\zeta = \int_0^r f'\left(\rho e^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\rho$$

olur.

(2.1.6) daki üst tahmini kullanarak istenilen

$$|f(z)| \leq \int_0^r \left|f'\left(\rho e^{i\theta}\right)\right| d\rho \leq \int_0^r \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3}\, d\rho = \frac{r}{(1-r)^2}$$

elde ederiz. (2.1.5) te alt sınırı ispatlamak için

$$m(r) = min\{|f(z)|: |z| = r\}$$

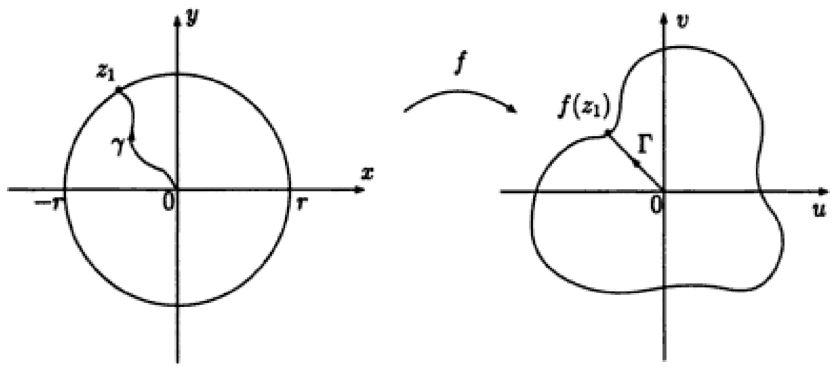
alırız.

$\overline{U_m}(r)$ kapalı dairesinin, $\overline{U_r}$ dairesinin görüntüsünde kapsandığı açıktır. $|z_1| = r,\ z_1 \in U$ olsun, öyle ki $|f(z_1)| = m(r)$ dir. Γ kapalı doğru parçası, $\overline{U_m}(r)$ kapalı dairesinde 0 ile $f(z_1)$ boyunca uzanır. $\gamma,$ Γ nin görüntüsünün tersi olsun (Şekil 2.4 e bak). $\gamma,$ $|z| \leq r$ de bulunan basit bir yaydır ve bunu kullanarak, $f'(\zeta)d\zeta$ nin γ üzerinde sabit argümenti ve (2.1.6) da alt sınırı vardır ki

$$m(r) = |f(z_1)| = \int_\Gamma |d\omega| = \int_\gamma |f'(\zeta)|\,|d\zeta| \geq \int_\gamma \frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3}|d\zeta|$$

$$\geq \int_\gamma \frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3}|d\zeta| = \int_0^r \frac{1-t}{(1+t)^3}dt = \frac{r}{(1+r)^2}$$

elde ederiz. Burada γ üzerinde $|d\zeta| \geq d|\zeta|$ yı kullandık.



Şekil 2.4: $\gamma = f'(\Gamma)$

Bazı $z \neq 0$ için (2.1.5) teki eşitlik, z noktasını 0 ile birleştiren ışın boyunca (2.1.6) daki eşitliği verir. Bu yüzden f , Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olmalıdır. Tersine olarak, f Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu ise zıt yönlerdeki noktalarda iki ışın boyunca (2.1.5) büyüme teoremindeki eşitliği sağladığı açıktır.

3.Adım: Geriye (2.1.7) tahminini ispatlamak kalıyor. Bu amaç için (2.1.8) de verilen $f'in\ g$ Koebe dönüşümü için büyüme teoremini düşünmek yeterlidir.

$$\frac{|\zeta|}{(1+|\zeta|)^2} \leq |g(\zeta)| \leq \frac{|\zeta|}{(1-|\zeta|)^2}$$

ve $\zeta = -z$ yazarsak (2.1.7) ye yol açan

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq \frac{|f(z)|}{(1-|z|^2)|f'(z)|} \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

verir.

Eğer eşitlik bazı $z \in U \setminus \{0\}$ da (2.1.7) yi de sağlarsa, (2.1.8) de verilen g Koebe dönüşümü

$$|g(-z)| = \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \quad \text{veya} \quad |g(-z)| = \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \qquad (2.1.11)$$

sağlar.

(2.1.11) deki eşitlikten de g nin Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olması gerektiğini ve buradan f in de Koebe fonksiyonun bir rotasyonu olduğu sonucuna varırız. Bu sonuç açıktır ve ispatı tamamlar.

Sonuç 2.1.7: S sınıfı $H(U)$ nun bir altsınıfında kompakttır.

İspat: (2.1.5) deki üst sınırdan S in lokal düzgün sınırlı olduğu ve bu yüzden bunun normal bir aile olduğu sonucuna varırız. Geriye S in kapalı olduğunu göstermek kalıyor. Bu amaç için, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi S de bir dizi olsun öyle ki $k\to\infty$ için U üzerinde $f_k\to f$ olacak şekilde lokal düzgündür. Hurwitz teoremine göre f fonksiyonu ne yalınkat ne de sabittir. $f(0)=0$ ve $f'(0)=\lim_{k\to\infty} f_k'(0)=1$ olduğundan, f U da yalınkat olmalıdır ve $f\in S$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

2.1.4 Yalınkat Fonksiyonların Maksimum Modülü

Hayman (1994) ve Krzyz' nin (1955) yardımıyla Teorem 2.1.6 nın bazı ek özelliklerinden söz edelim. Hayman' ın sonucu S sınıfındaki her fonksiyonun maksimum modülünün büyümesini açıklar. Bu teoremde oluşan $\alpha=\alpha(f)$ limiti f in Hayman görüşü olarak bilinir. Hayman tarafından oluşturulan daha güçlü bir sonuç vardır ki buna Hayman' ın regularity teoremi denir. Buna göre eğer $f\in S$ ve $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k,\ z\in U$ ise f Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olmadıkça, $\alpha(f)=\lim_{k\to\infty}|a_k|/k\le 1$ kesin eşitsizliğidir. Bu sonuç Bieberbach varsayımının çalışmalarında önemli bir adımdı, çünkü yeterince geniş k lar için $|a_k|\le k$ olduğunu gösterdi.

Teorem 2.1.8: $f\in S$ ve $M_\infty(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|,\ 0<r<1$ olsun. f , Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu değilse, $\psi(r)=\frac{1}{r}(1-r)^2 M_\infty(r,f)$ fonksiyonu $(0{,}1)$ aralığında kesin azalandır ve bu yüzden limit $r\to1$ için $\alpha=\alpha(f)\in[0{,}1)$ şeklindedir.

İspat: (2.1.7) den $|z|=r\in(0{,}1)$ için

$$\frac{\partial}{\partial r}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| = Re\left[\frac{\partial}{\partial r}\log f\left(re^{i\theta}\right)\right] \leq \left|\frac{f'\left(re^{i\theta}\right)}{f\,\left(re^{i\theta}\right)}\right| \leq \frac{1+r}{r(1-r)}$$

elde ederiz. f, Koebe fonksiyonun bir rotasyonu değil ise Teorem 2.1.6 yukarıda sağlanan kesin eşitsizlik ile gösterilir. $0 < r_1 < r_2 < 1$ iken bu eşitsizliği r_1 den r_2 ye integre edersek

$$\log\left|\frac{f\left(r_2e^{i\theta}\right)}{f\left(r_1e^{i\theta}\right)}\right| < \int_{r_1}^{r_2}\frac{1+r}{r(1-r)}dr = \log\left[\frac{(1-r_1)^2r_2}{(1-r_2)^2r_1}\right]$$

elde ederiz. Bu yüzden $0 < r_1 < r_2 < 1$ ve her $\theta \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{(1-r_2)^2}{r_2}\left|f\left(r_2e^{i\theta}\right)\right| < \frac{(1-r_1)^2}{r_1}\left|f\left(r_1e^{i\theta}\right)\right|$$

dir. Eğer $\left|f\left(r_2e^{i\theta}\right)\right| = M_\infty(r_2, f)$ olacak şekilde $\theta \in \mathbb{R}$ seçersek yukarıdaki eşitsizlik

$$\frac{(1-r_2)^2}{r_2}M_\infty(r_2,f) < \frac{(1-r_1)^2}{r_1}\left|f\left(r_1e^{i\theta}\right)\right| \leq \frac{(1-r_1)^2}{r_1}M_\infty(r_1,f)$$

sağlar. Bu yüzden $f = k_\phi$ (Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu) olmaksızın $\psi(r)$ fonksiyonunun $r \in (0,1)$ için kesin azalan olduğunu ispatladık. (2.1.5) teki üst sınırı kullanarak

$$\alpha = \lim_{r\to 1}\frac{(1-r)^2}{r}M_\infty(r,f) < 1$$

sonucunu buluruz. Şüphesiz, f Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu ise, kolayca $\alpha = 1$ olduğunu görürüz. Bu da ispatı tamamlar.

Krzyz (1955), başka yönden Hayman' ın teoremini sunar. S deki türevlenebilir fonksiyonlar için benzer şekilde sonuçlar ispatladı.

Teorem 2.1.9: $f \in S$ ise f Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olmadığında, $M_\infty(r,f')\,(1-r)^3/(1+r)$ fonksiyonu $r \in (0,1)$ için kesin azalan fonksiyondur. Ayrıca $\beta(f) \in [0,2]$ ve

$$\lim_{r\to 1}M_\infty\,(r,f')(1-r)^3 = \beta(f)$$

limiti var olsun. $\beta(f)=2$ eşitliği ancak ve ancak f Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu ise sağlanır.

İspat: (2.1.9) u göz önünde bulundurursak

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq \frac{2r+4}{1-r^2} = \frac{d}{dr}\log\left[\frac{1+r}{(1-r)^3}\right], \qquad |z| = r \in (0,1)$$

elde ederiz. Ayrıca Teorem 2.1.6 dan f Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu ise eşitlik oluşur. f Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olmadığında, $r \in (0,1)$ için $\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|(1-r)^3/(1+r)$ $(\theta\ sabit)$ fonksiyonu ile $M_\infty(r,f')\,(1-r)^3/(1+r)$ fonksiyonu kesin azalandır.

$$\lim_{r\to 0} M_\infty\,(r,f')(1-r)^3\,/\,(1+r) = 1$$

olduğundan

$$\lim_{r\to 1} M_\infty\,(r,f')\frac{(1-r)^3}{1+r} = \frac{1}{2}\lim_{r\to 1} M_\infty\,(r,f')(1-r)^3 = \frac{1}{2}\beta(f) \leq 1$$

sonucu bulunur.

Açık olarak $\beta(f)=2$ eşitliği f ancak ve ancak Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu ise sağlanır. Bu da ispatı tamamlar.

(2.1.7) deki görüşe göre

$$\left|\frac{f'\left(re^{i\theta}\right)}{f(re^{i\theta})}\right| \leq \frac{1+r}{r(1-r)} = \frac{d}{dr}\log\left[\frac{(1-r)^2}{r}\right]$$

elde ederiz. Bu yüzden f Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olmadığında, $r \in (0,1)$ için $\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|(1-r)^2/r$ $(\theta\ sabit)$ ve $M_\infty(r,f)\,(1-r)^2/r$ kesin azalan fonksiyonları oluşur.

Krzyz' nin (1955) ispatına ek olarak, eğer $f \in S$ ise

$$2\lim_{r\to 1}(1-r)^2\,M_\infty(r,f) = \lim_{r\to 1}(1-r)^3 M_\infty(r,f')$$

olduğunu söyleyebiliriz.

2.1.5 *S* Sınıfı İçin İki Noktalı Bükülme Sonuçları

İyi biliniyor ki, klasik büyüme teoreminde yalınkatlık için gerekli olan fakat yeterli olmayan şartlar (2.1.5) te açıklandı. Blatter (1978), yalınkatlık için yeterli olan büyüme teoreminin versiyonlarının olup olmadığını araştırdı. $\mathbb{C}$ nin otomorfizmi ile sonraki kompozisyonu ve U nun otomorfizmi ile önceki kompozisyonu altında invariant (değişmez) ve hiperbolik uzaklık bakımından açıklanan iki noktalı bükülme teoremini formüle etmeye öncü oldu. Son yıllarda Kim ve Minda (1994), Blatter' in özel bir durumunu içeren teoremlerinin ve klasik bükülme teoreminin bir değişmez versiyonunu içeren teoremlerin bir değişkenli ailesini elde etti. Bu sonuçlar Jenkins' e (1998) kadar uzanır.

U üzerinde hiperbolik metrik ve hiperbolik uzaklık hakkındaki bazı temel unsurlar ile başlayacağız.

Pioncare metriği de denilen U üzerindeki hiperbolik metrik, yay uzunluğu öğesi Riemann metriği olan

$$ds = \frac{|dz|}{1 - |z|^2}$$

dir. $a, b \in U$ olmak üzere γ eğrisinin bütün $\mathbb{C}'$ parçalarında infimum alınırsa

$$d_h(a,b) = inf \int_{\gamma} ds$$

hiperbolik metriğinden uzaklık fonksiyonu ortaya çıkar. Bu

$$d_h(a,b) = arctanh\left|\frac{b-a}{1-\bar{a}b}\right|, \qquad a, b \in U \qquad (2.1.12)$$

formülü ile verilir.

U daki hiperbolik metrik ve hiperbolik uzaklık U nun konform otomorfizmi altında invarianttır. U da hiperbolik metriğin geodezisi, birim dairede ortogonal olan çembersel yaylar ve doğru parçalarıdır.

Kompleks analizde hiperbolik metrik ve invariant metrik ilişkileri hakkında daha fazla detayları okuyucular Ahlfors (1973), Jarnicki ve Pflug (1993), Kobayashi (1970) veya Franzoni ve Vesentini (1980) kaynaklarından araştırabilirler.

İlk olarak Kim ve Minda (1994) tarafından elde edilen bu tipteki en temel sonuç olan invariant bükülme teoremini vereceğiz. Aslında bu teorem klasik büyüme teoremindeki alt tahminleri de içerir. Yalınkatlık için gerek yeter koşulları içerir. Bağlantılı fakat daha zayıf tahmin (Pommerenke, 1992., sonuç.1.5) te ortaya çıktı.

U da f holomorf fonksiyonlarında D_1 operatör invariant diferansiyelini

$$D_1 f(z) = (1 - |z|^2) f'(z), \qquad z \in U$$

olarak tanımlayalım.

Bu operatör $\zeta \in U$ iken $T(\zeta) = (\zeta + z)/(1 + \bar{z}\zeta)$ ile verilen daire otomorfizminde olduğunda $D_1 f(z) = (f \circ T)'(0)$ özelliğine sahiptir.

Teorem 2.1.10: Varsayalım ki $f,\ U$ da yalınkat ve $a, b \in U$ olsun.

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{sinh\big(2d_h(a,b)\big)}{2exp\big(2d_h(a,b)\big)}\, max\{|D_1 f(a)|, |D_1 f(b)|\} \tag{2.1.13}$$

dir.

Eşitliği sağlamak için $a, b \in U,\ a \neq b$ olmak üzere noktalar varolsun ancak ve ancak Φ, $\mathbb{C}$ nin otomorfizmi, k Koebe fonksiyonu ve T birim dairenin otomorfizmi olduğunda $f = \Phi \circ k \circ T$ dir. Tersine olarak, f fonksiyonu U da (2.1.13) ü sağlayan sabit olmayan holomorf bir fonksiyon ise, U da yalınkattır.

İspat: $z \in U$, $T(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}\,z}$ ile verilen daire otomorfizmi T olsun. f in g Koebe dönüşümü olarak da düşünülen

$$g(z) = \frac{f\big(T(z)\big) - f\big(T(0)\big)}{(f \circ T)'(0)} = \frac{f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) - f(a)}{(1 - |a|^2) f'(a\,)}, \qquad z \in U$$

tanımlansın. $g \in S$ ve (2.1.5) ten

$$g(z) \geq \frac{|z|}{(1+|z|)^2} = \frac{sinh\big(2d_h(0,z)\big)}{2exp\big(2d_h(0,z)\big)}, \qquad z \in U$$

elde ederiz.

$z \in U,\ z = \frac{b-a}{1-b\bar{a}}$ ve $T(z) = b$ olsun. Veriler göz önünde bulundurulursa hiperbolik uzaklık T dönüşümü altında invarianttır. Yukarıdaki ilişki

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{sinh\big(2d_h(a,b)\big)}{2exp\big(2d_h(a,b)\big)} |D_1 f(a)|$$

ye eşdeğerdir.

$a\ ve\ b$ nin yerlerini değiştirmek aynı tipteki ikinci bir eşitsizliğe yol açar ve $|f(a) - f(b)|$ de alt sınırların maksimumunu almak (2.1.13) ü verir.

(2.1.13) teki eşitliği sağlayan şartlar altında klasik büyüme teoreminin alt tahminlerindeki eşitlik sadece Koebe fonksiyonlarının rotasyonları için sağlanabilir.

Şimdi (2.1.13) şartının, f in yalınkat olduğu anlamına geldiğini göstereceğiz. $f,\ U$ da sabit olmayan holomorf bir fonksiyon olsun ve varsayalım ki farklı $a, b \in U$ noktaları için $f(a) = f(b)$ olsun. (2.1.13), $f'(a) = f'(b) = 0$ anlamına gelir ve bu yüzden $f,\ a$ nın veya b nin her komşuluğunda yalınkat değildir. Bu yüzden tüm $n \in \mathbb{N}$ ler için $\lim_{n\to\infty} c_n = a,\ \lim_{n\to\infty} d_n = a\ \ ve\ \ f(c_n) = f(d_n)$ olacak şekilde U da farklı noktaların $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizilerini bulabiliriz. Tekrar (2.1.13) ü kullanarak tüm $n \in \mathbb{N}$ ler için $f'(c_n) = 0$ sonucunu buluruz ve bu nedenle f sabit olmalıdır. Ayrıca hipotezler ile çelişkilidir ve o halde f yalınkattır. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi Blatter' in (1978) asıl sonucunu verelim.

Teorem 2.1.11: $f\colon\ U \to \mathbb{C}$ ye yalınkat bir fonksiyon ve $a, b \in U$ olsun. O halde

$$|f(a) - f(b)|^2 \geq \frac{sinh^2\big(2d_h(a,b)\big)}{8cosh\big(4d_h(a,b)\big)} \{|D_1 f(a)|^2 + |D_1 f(b)|^2\}$$

dir. Eşitlik sağlayacak şekilde $a, b \in U$, $a \neq b$ noktaları vardır ancak ve ancak Φ, $\mathbb{C}$ nin otomorfizmi, k Koebe fonksiyonu ve T, U nun otomorfizmi olduğunda f in $f = \Phi \circ k \circ T$ formu vardır. Tersine olarak f, U da yukarıdaki bağıntıları sağlayan sabit olmayan holomorf bir fonksiyon olsun. O halde f, U da yalınkattır.

İspatı vermeyeceğiz, fakat her $f \in S$, $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ ve $z \in U$ için sağlanan aşağıdaki katsayı tahminlerini gerektirdiğini söyleriz.

$$|a_2| \leq 2, \qquad |a_3| \leq 3, \qquad |a_3 - a_2^2| \leq 1$$

1994 te Kim ve Minda (1994), Blatter' in sonucunun ve Teorem 2.1.10' un ortaya çıkan değişkenlerle daha genel bir teoremin özel durumu olduğunu gösterdi. İzin verilen değişkenler dizisi Jenkins' e (1998) kadar uzanır.

Teorem 2.1.12: f, U da yalınkat olsun. Her $a, b \in U$ ve her $p \geq 1$ için

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{sinh\big(2d_h(a,b)\big)}{2\big[2cosh\big(2pd_h(a,b)\big)\big]^{1/p}} [|D_1 f(a)|^p + |D_1 f(b)|^p]^{1/p}$$

dir.

Eşitlik, Teorem 2.1.10 ve 2.1.11 deki gibi aynı şartlar altında sağlanır. Aksine f, U da sabit olmayan holomorf bir fonksiyon ise yukarıdaki eşitsizliği sağlar, o halde f, U da yalınkattır.

$p = 2$ durumu Blatter' in sonucunu ve $p = \infty$ durumu Teorem 2.1.10 u verir. Alt sınır p ile azalır ve bu yüzden Teorem 2.1.10 en zayıf iken bu tipteki en güçlü sonuç $p = 1$ durumudur. Benzer olarak $|f(a) - f(b)|$ için üst tahmin Jenkins (1998) ve Ma ve Minda (1999) tarafından verildi.

Bu bölümde kullanılan temel kaynaklar Duren (1983), Pommerenke (1975) ve Goodman (1983) dir. Burada Ahlfors (1973), Conway (1995), Golusin (1952), Henrici (1993), Hallenbeck ve MacGregor (1984), Jenkins (1965), Hille (1962), Milin (1977), Rosenblum ve Rovnyak (1994), Montel (1933), Schober (1975), Nehari (1952), Gong (1999), Mocanu, Bulboaca ve Salagean (1999) kullanılan diğer kaynaklardır.

BÖLÜM 3

BİRİM DAİREDE YALINKAT FONKSİYONLARIN ALTSINIFLARI

Bu bölümde S in, kendi içinde farklılıklar taşıyan altsınıflarının temel özelliklerini inceleyeceğiz. Bu altsınıflar yıldızıl, konveks, konvekse yakın, alfa-konveks, spirallike ve Φ-like fonksiyonlarıdır. Bu altsınıfların çoğunun analitik ve geometrik karakterleri vardır. Bazı durumlarda bu altsınıflarda büyüme, kapsama ve bükülme teoremleri S sınıfının tamamına göre daha sınırlıdır. Bu sınıflar pozitif reel kısımlı fonksiyonlar ve subordinasyonları ile yakından ilişkilidir.

3.1. Pozitif Reel Kısımlı Fonksiyonlar, Subordinasyon ve Herglotz Formülü

3.1.1. Caratheodory Sınıfı, Subordinasyon

Burada U birim dairesinde pozitif reel kısımlı fonksiyonların temel özelliklerini vereceğiz. Kompleks düzlemde subordinasyonun durumunu da ele alacağız.

$p(0) = 1$ ve $Re\, p(z) > 0,\ z \in U$ olacak şekilde U da p holomorf fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{P}$ olsun.

Bu sınıfa genellikle Caratheodory sınıfı denir.

Örneğin, $z \in U$ için $p(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ ye aittir. Bu fonksiyon sağ yarı düzlemde U nun konform dönüşümünü verir. S sınıfındaki Koebe fonksiyonuna benzer olarak, $\mathcal{P}$ sınıfında temel rol oynar.

$\mathcal{P}$ sınıfının konveks küme olduğunu da söyleyebiliriz ve ilerde $\mathcal{P}$ nin $H(U)$ nun altkümelerinin kompakt altkümesi olduğunu da göreceğiz.

$\mathcal{V}$, Schwarz fonksiyonlarının sınıfı olsun. $\varphi \in \mathcal{V}$ ise ancak ve ancak U dairesinde $\varphi \in H(U)$, $\varphi(0) = 0$ ve $|\varphi(z)| < 1$ dir. Diğer bir deyişle $\mathcal{V}$, Schwarz lemması hipotezini sağlayan U da, holomorf fonksiyonları tam olarak içerir.

Açık olarak, $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{V}$ sınıfları arasında

$$p \in \mathcal{P} \iff p = \frac{1+\varphi}{1-\varphi}, \quad \varphi \in \mathcal{V}$$

olacak şekilde bir bağıntı vardır.

Bu bağıntıdan dolayı $\mathcal{P}$ nin kesin özelliklerinin $\mathcal{V}$ sınıfı için de geçerli olduğunu söyleyebiliriz.

$f, g \in H(U)$ fonksiyonları verilsin. $\varphi \in \mathcal{V}$ için $f = g \circ \varphi$ varsa, f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir ve $f \prec g$ şeklinde gösterilir.

$f \prec g$ ise $f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subseteq g(U)$ dir. Schwarz lemmasından her $r \in (0,1)$ için $|f'(0)| \leq |g'(0)|$ ve $f(U_r) \subseteq g(U_r)$ dir.

Özellikle $f \prec g$ ise

$$\max_{|z|\leq r}|f(z)| \leq \max_{|z|\leq r}|g(z)| , \qquad r \in (0,1)$$

sonucunu buluruz.

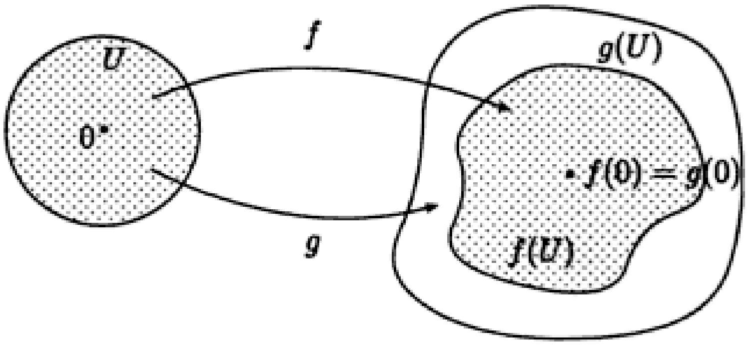
Ayrıca $f \prec g$ ise Schwarz-Pick lemmasını kullanarak

$$\max_{|z|\leq r}(1-|z|^2)|f'(z)| \leq \max_{|z|\leq r}(1-|z|^2)|g'(z)|, \;\; 0 \leq r < 1$$

sonucunu buluruz.

g, U da yalınkat ise $f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subseteq g(U)$ olduğunda $f \prec g$ olduğu açıktır. Gerçekte her $r \in (0,1)$ için $f(U_r) \subseteq g(U_r)$ bu şartlar altında subordinasyon prensibi olarak bilinir.

Bilhassa, birim dairede $p(0) = 1$ olmak üzere U da bir p holomorf fonksiyonu ancak ve ancak $p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$, U da ise $\mathcal{P}$ ye aittir. Eğer $\varphi \in H(U)$, $\varphi(0) = 0$ ise o zaman ancak ve ancak $\varphi(z) \prec z$, U da ise $\varphi,\ \mathcal{V}$ ye aittir.



Şekil 3.1: $f \prec g$

Kompleks düzlemde subordinasyonun kavramlarının detaylı çalışmaları ve birçok bilgi için Miller ve Mocanu (2000) kitabına bakabilirsiniz.

Şimdi pozitif reel kısımlı fonksiyonlar sınıfına dönelim ve Herglotz (1911) temsil formülünü açıklayalım. Bu temel sonuç S in ayrı altsınıfları için integral temsil teoremlerine öncülük eder. Böyle fonksiyonların alternatif temsili, azalan olmayan fonksiyonlara göre Riemann-Stieltjes integrali yerine, sonlu pozitif Borel ölçümüne göre Lebesgue integralini alarak, (3.1.1) deki integrali almak ile elde edilebilir (Hallenbeck-MacGregor 1984, Rudin 1987). Poisson çekirdeğinin analitik tümleyeni, (3.1.1) deki integranttır.

Teorem 3.1.1: $f \in H(U)$ olsun. U da $Re\, f(z) \geq 0$ ise ancak ve ancak $[0,2\pi]$ aralığında $\mu(2\pi) - \mu(0) = Ref(0)$ ve

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}} d\mu(t) + i\mathrm{Im}\, f(0), \quad z \in U \tag{3.1.1}$$

olacak şekilde azalan olmayan bir μ fonksiyonu vardır.

İspat: İlk olarak varsayalım ki f, (3.1.1) i sağlasın. μ , $[0,2\pi]$ aralığında azalan olmayan olduğundan

$$Re\, f(z) = \int_0^{2\pi} Re\, \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}} d\mu(t) \geq 0$$

olduğu açıktır ve integrantın pozitif reel kısmı vardır.

Tersine olarak varsayalım ki U da $Re\, f(z) \geq 0$ olsun. Genelleştirmeyi yok etmeden, U da $Re\, f(z) > 0$ varsayabiliriz. $n = 0,1, \ldots$ için $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $b_n = Re\, a_n$ ve $c_n = \mathrm{Im}\, a_n$ olsun.

Eğer $0 < r < 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$ için

$$\mu(r,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t Re\, f\left(re^{i\theta}\right) d\theta$$

ise $\mu(r,.)$, $[0,2\pi]$ aralığında azalan olmayandır ve $\mu(r,2\pi) = b_0$ dır. Ayrıca basit hesaplamalar

$$\int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(r,t) = \begin{cases} a_n \dfrac{r^n}{2}, & n = 1,2, \ldots \\ b_0 \quad , & n = 0 \end{cases}$$

olduğunu gösterir. Bu yüzden

$$f(z) = \int_0^{2\pi} d\mu(r,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{r^n} \int_0^{2\pi} e^{-int}\, d\mu(r,t) z^n + ic_0$$

dir. $|z| < r$ için serinin son integrantı t de düzgün yakınsak olduğundan

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-it} z}{r} \right)^n \right] d\mu(r,t) + ic_o$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan da

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}+z}{re^{it}-z} d\mu(r,t) + ic_o \tag{3.1.2}$$

elde edilir.

Şimdi $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 1$ olacak şekilde $(0,1)$ aralığında $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ artan bir dizi olsun ve $t \in [0,2\pi]$ iken $\mu_n(t) = \mu(\rho_n, t)$ olsun. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $[0,2\pi]$ aralığında azalan olmayan fonksiyonların dizisidir. Helly seçme teoreminden (Natanson 1961, s.233), (Duren 1983, s.22-23) , $[0,2\pi]$ aralığında azalan olmayan bir μ fonksiyonu ve $\{\mu_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ altdizisi bulabiliriz ve $k \to \infty$ için $\mu_{n_k} \to \mu$ ve $[0,2\pi]$ aralığında her sürekli h fonksiyonu için

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} h(t)\, d\mu_{n_k}(t) = \int_0^{2\pi} h(t) d\mu(t)$$

bulabiliriz.

Bu gerçekle birlikte $k \to \infty$ için

$$\frac{\rho_{n_k} e^{it} + z}{\rho_{n_k} e^{it} - z} \to \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$$

z sabiti için t de düzgündür. Bu

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_{n_k} e^{it} + z}{\rho_{n_k} e^{it} - z} d\mu_{n_k}(t) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t)$$

ifadesini verir.

(3.1.2) den ve yukarıdaki eşitlikten istenilen (3.1.1) sonucunu buluruz. Bu da ispatı tamamlar.

Önceki teoremin direk sonucu $\mathcal{P}$ sınıfındaki fonksiyonlar için Herglotz (1911) integral formülüdür.

Sonuç 3.1.2: $p \in H(U)$, $p(0) = 1$ sağlansın. $p \in \mathcal{P}$ ise ancak ve ancak $[0,2\pi]$ aralığında $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$ ile μ azalan olmayan fonksiyonu olsun öyle ki

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\, d\mu(t) \qquad (3.1.3)$$

dir. Herglotz formülü pozitif reel kısımlı fonksiyonlar için büyüme ve bükülme sonuçlarına yol açar.

Teorem 3.1.3: $p \in \mathcal{P}$ ve $|z| = r < 1$ ise

$$\frac{1-r}{1+r} \leq |p(z)| \leq \frac{1+r}{1-r} \tag{3.1.4}$$

$$\frac{1-r}{1+r} \leq Re\, p(z) \leq \frac{1+r}{1-r} \tag{3.1.5}$$

$$|p'(z)| \leq \frac{2\, Re\, p(z)}{1-r^2} \leq \frac{2}{(1-r)^2} \tag{3.1.6}$$

Bu tahminler kesindir.

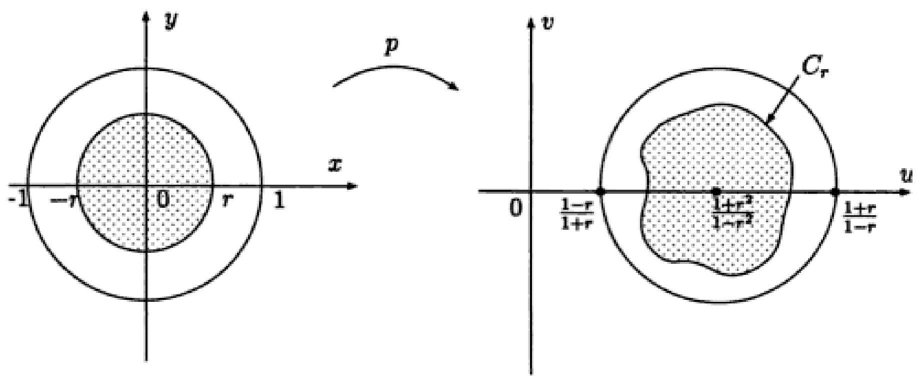
İspat: Birinci ve ikinci eşitsizlikler (3.1.3) deki bağıntının basit sonuçlarıdır. (3.1.6) deki tahmini ispatlamak için, z ye göre (3.1.3) ün iki tarafının diferansiyelini almak yeterlidir, buradan

$$|p'(z)| \leq \int_0^{2\pi} \frac{2d\mu(t)}{|1 - ze^{-it}|^2} = \frac{2}{1-r^2} \int_0^{2\pi} Re\, \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}}\, d\mu(t) = \frac{2\, Re\, p(z)}{1-r^2}$$

elde ederiz.

Sonuç olarak, bazı $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ için $z \in U$, $p(z) = \frac{1+\lambda z}{1-\lambda z}$ ile bu bağıntıların her birinde eşitlik sağlanır.

Sonuç 3.1.4: (3.1.3) formülü kullanılarak her sabit z ile $|z| = r < 1$ ve $p \in \mathcal{P}$ için $p(z)$ fonksiyonu $\frac{2r}{1-r^2}$ yarıçaplı ve $\frac{1+r^2}{1-r^2}$ merkezli kapalı dairede bulunur sonucuna kolayca ulaşırız (Şekil 3.2). Bu yüzden $p \in \mathcal{P}$ ise



Şekil 3.2: $C_r = \partial U_r$ nin görüntüsü

$$\left|p(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{2r}{1-r^2}\ , \quad |z| = r$$

dir.

Herglotz formülü, $\mathcal{P}$ de fonksiyonların katsayıları için sınırları da verir. Bu sonuç Carathedory (1907) den dolayıdır.

Teorem 3.1.5: $p \in \mathcal{P}$ ise her $n = 1,2,\dots$ için $|p_n| \leq 2$ olacak şekilde $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n\, z^n\ ,\ \ z \in U$ kuvvet serisi vardır. Bu tahmin kesindir.

İspat: $p \in \mathcal{P}$ olduğundan $[0,2\pi]$ aralığında $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$ olacak şekilde azalan olmayan μ fonksiyonu vardır.

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}}\, d\mu(t)$$

dir.

Tüm $n = 1,2,\dots$ ler için integrantın binom açılımı

$$p_n = 2\int_0^{2\pi} e^{-int}\, d\mu(t)$$

ifadesini verir. Bu yüzden $|p_n| \leq 2$ olarak açıklanır. Açıkça $|\lambda| = 1$ ile $p(z) = \frac{1+\lambda z}{1-\lambda z}$ için $|p_n| = 2$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç olarak $\mathcal{P}$ sınıfı için kompaktlık sonucundan söz edebiliriz.

Sonuç 3.1.6: $\mathcal{P}$ bir kompakt kümedir.

3.1.2 Subordinasyon Prensibinin Uygulamaları

Subordinasyon prensibinin basit uygulamalarını elde edeceğiz. Robertson (1961) tarafından elde edilen bu uygulamalar, birim dairede yalınkat fonksiyonların altsınıflarının çalışmalarında gereklidir. Burada Teorem 3.1.7 ve Teorem 3.1.8 in birkaç kompleks değişkenliye genelleştirilebileceğinden söz edeceğiz.

Teorem 3.1.7: $\omega(.,t)$, U da holomorf fonksiyon olsun ve $t \in [0,1]$ için $\omega(0,t) = 0$ olsun. Varsayalım ki $|z| < 1$, $0 \leq t \leq 1$ için $|\omega(z,t)| < 1$ ve $w(z,0) = z$ olsun. ρ pozitif bir değer olsun. U da holomorf ve $Re\,\omega(0) \neq 0$ olacak şekilde

$$w(z) = \lim_{t \to o} \left[\frac{\omega(z,t) - z}{zt^{\rho}}\right] \tag{3.1.7}$$

limiti var olsun. $|z| < 1$ için $Re\,\omega(z) < 0$ dır.

İspat: Schwarz lemmasına göre, $z \in U$ ve $t \in [0,1]$ için $|\omega(z,t)| \leq |z|$ dir. (3.1.7) yi göz önünde bulundurursak $\lim_{t \to 0} \omega(z,t) = z = \omega(z,0)$ sonucuna varırız. $Re\,\omega(z) \leq 0$ olduğu açıktır ve ω, U da holomorf ve $Re\,\omega(0) \neq 0$ olduğundan harmonik fonksiyonların minimum prensibinden U da $Re\,\omega(z) < 0$ olmalıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Yukarıdaki sonuç bir sonraki teoremin özel durumudur. Ayrıca Teorem 3.1.8 in ispatı Teorem 3.1.7 ye bağlıdır.

Teorem 3.1.8: $f: U \to \mathbb{C}$, S sınıfında bir fonksiyon olsun. $g: U \times [0,1] \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun ve $g(.,t)$ her $t \in [0,1]$, $g(z,0) \equiv f(z)$, $g(0,t) \equiv 0$ için U da holomorf ve $z \in U$ ve $t \in [0,1]$ için $g(z,t) \prec f(z)$ olsun. ρ pozitif bir sayı olsun. U da holomorf ve $Re\,G(0) \neq 0$ şartını sağlayan

$$G(z) = \lim_{t \to 0} \left[\frac{g(z,t) - g(z,0)}{zt^{\rho}}\right] \tag{3.1.8}$$

limiti var olsun. $|z| < 1$ iken $Re\,|f'(z)/G(z)| < 0$ dir.

İspat: $g(z,t) \prec f(z)$ olduğundan her $t \in [0,1]$ için $\omega(.,t)$ Schwarz fonksiyonu vardır ki, $z \in U$ ve $t \in [0,1]$ iken $g(z,t) = f\big(\omega(z,t)\big)$ dir. Başka bir bakışla (3.1.8) deki bağıntı $\lim_{t \to 0} g(z,t) = f(z)$ yi sağlar ve bu yüzden $z \in U$ iken $\lim_{t \to 0} \omega(z,t) = z$ dir.

$t > 0$ için

$$\frac{g(z,t) - g(z,0)}{zt^{\rho}} = \left[\frac{f\big(\omega(z,t)\big) - f\big(\omega(z,0)\big)}{\omega(z,t) - \omega(z,0)}\right]\left[\frac{\omega(z,t) - \omega(z,0)}{zt^{\rho}}\right] \tag{3.1.9}$$

elde ederiz.

Şimdi (3.1.9) için $t \to 0$ olsun. (3.1.9) un sol tarafında (3.1.8) den dolayı $G(z)$ limiti vardır. (3.1.9) un sağ tarafındaki ilk faktör $f'(z) \neq 0$ limitidir. Bu yüzden

$$\omega(z) = \lim_{t \to 0} \frac{\omega(z,t) - \omega(z,0)}{zt^{\rho}}$$

limiti vardır ve (3.1.9) teki görüşe göre $\omega(z) = \frac{G(z)}{f'(z)}$ dir. Ayrıca $G,\ U$ da holomorf ve $Re\, G(0) \neq 0$ olduğundan, ω de U da holomorf ve $Re\, \omega(0) \neq 0$ dir. Teorem 3.1.7 nin sonucunu kullanarak, U da $Re\, \omega(z) < 0$ sonucuna varırız. Bu da ispatı tamamlar.

Bölüm 3.1 deki kaynaklar klasiktir ve iyi bilinmektedir. Ek olarak Duren (1983), Scbober (1975), Goodman (1983), Hallenbeck ve MacGregor (1984), Pommerenke (1975), Golusin (1952), Hayman (1994), Miller ve Mocanu (2000), Nehari (1952) kitaplarına; ayrıca Rogogonski (1939), Rogogonski (1943), Robertson (1961) , Robinson (1947), Herglotz (1911) , MacGregor (1967) ve MacGregor (1972) çalışmalarına bakabilirsiniz.

3.2. Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonlar

Bu bölüm S in en önemli altsınıflarından yıldızıl ve konveks fonksiyonlar adlı çalışmalara ayrılmıştır. Bu iki sınıf geometrik sonuçlardan tanımlandı ve çok önemli analitik karakterlere sahiptir. Taylor serilerinin katsayıları için sınırlar, S sınıfının tamamı için daha kolay elde edilebilir. Yıldızıl fonksiyonlar S sınıfının tamamı gibi aynı büyüme, kapsama ve bükülme teoremlerini sağlar; fakat konveks fonksiyonlar ve diğer çeşitli altsınıflar için daha güçlü sonuçlar sağlanır. Yıldızıl ve konveks fonksiyonların analitik karakterleri daha yüksek boyutlara genelleştirilebilir, fakat ispatlar epeyce değişiklik gösterir.

Tanım 3.2.1: Ω , $\mathbb{C}$ de bir küme olsun. Ω boyunca her $\omega \in \Omega$ noktasından uzanan kapalı doğru parçası ω_0 ile birleşirse, Ω bölgesine $\omega_0 \in \Omega$ sabit noktasına göre yıldızıl bölge denir. Her $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ için tüm Ω boyunca ω_1 ve ω_2 arasında uzanan kapalı doğru parçaları Ω bölgesinde ise, Ω konvekstir deriz. Başka bir deyişle Ω konveks ise ancak ve ancak Ω bu noktaların her birine göre yıldızıldır.

$r \in (0,1]$, $f \in H\,(U_r)$ ve $z_0 \in U_r$ olsun. f, U_r dairesinde yalınkat ise f fonksiyonu, z_0 noktasına göre U_r de yıldızıldır ve $f(U_r)$ nin görüntüsü $\omega_0 = f(z_0)$ a göre yıldızıl bölgedir. Yıldızıl terimi sıfıra göre yıldızıl anlamına gelecektir. Eğer f, U_r dairesinde yalınkat ise f, U_r de konvekstir deriz ve $f(U_r)$ nin görüntüsü $\mathbb{C}$ de konveks bölgedir. $S^*(U_r)$ ve $K(U_r)$, U_r de sırasıyla yıldızıl ve konveks fonksiyonların normalizasyonlarını içeren $S(U_r)$ nin altsınıfları olsun. $S^*(U)$ ve $K(U)$ sınıfları S^* ve K olarak gösterilecektir. U birim dairesinde normalize yıldızıl ve normalize konveks fonksiyonların sınıfı vardır.

Yıldızıl fonksiyonların çok iyi bilinen analitik karakterizasyonu ile başlayacağız.

Teorem 3.2.2: $f(0) = 0$ ile $f: U \to \mathbb{C}$ ye holomorf bir fonksiyon olsun. f yıldızıl ise ancak ve ancak $f'(0) \neq 0$ ve U da

$$Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0$$

dır.

İspat: İlk olarak varsayalım ki f yıldızıl olsun. f yalınkattır ve $f'(0) \neq 0$ dır. Her $r \in (0,1)$ için $f(U_r)$ nin yıldızıl bölge olduğunu göstereceğiz. Bu amaç için $r \in (0,1)$ yazalım ve $t \in (0,1)$ olsun ve $z \in U$ için $g(z) = f^{-1}\big(tf(z)\big)$ düşünelim. f yıldızıl olduğundan bu fonksiyon iyi tanımlıdır ve U da holomorftur. Bu fonksiyon U da $g(0) = 0$ ve $|g(z)| < 1$ i sağlar. Schwarz lemmasından U da $|g(z)| \leq |z|$ sonucu bulunur. Bu sebeple her $z \in U_r$ için $tf(z) = f\big(g(z)\big) \in f(U_r)$ dir. Bu yüzden $f(U_r)$ sıfıra göre yıldızıl bölgedir. $|\,z| = r$ dairesinin görüntüsünü sağlayan geometrik varsayımlar sıfıra göre yıldızıl eğridir ve $[0,2\pi]$ aralığında θ artarken $\arg f\big(re^{i\theta}\big)$ artar. Bu yüzden

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f\big(re^{i\theta}\big) \geq 0\,, \qquad \theta \in [0,2\pi]$$

dir.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f\left(re^{i\theta}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{Im}\left[\log f\left(re^{i\theta}\right)\right]$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{izf'(z)}{f(z)}\right] = Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]$$

olduğundan $|z| = r = 1$ için $Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geq 0$ sonucunu buluruz. Fakat $f'(0) \neq 0$ dır ve bu yüzden harmonik fonksiyonlar için minimum prensibinden yararlanarak

$$Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0\,, \qquad z \in U_r$$

buluruz. r keyfi olduğundan U da

$$Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0$$

elde ederiz.

Şimdi varsayalım ki $f'(0) \neq 0$ ve $|z| < 1$, $Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0$ olsun. $z \in U \setminus \{0\}$ için $f(z) \neq 0$ dır, aksi halde $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ fonksiyonunun U da bir kutbu olurdu. Basit hesaplamalar ispatın ilk bölümünden

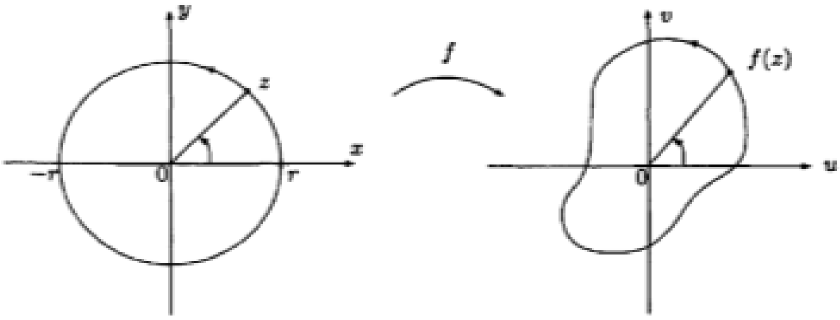
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f\left(re^{i\theta}\right) > 0, \qquad \theta \in [0,2\pi]$$

olduğunu gösterir.

Bu yüzden $\arg f\left(re^{i\theta}\right)$, $\theta \in [0,2\pi]$ aralığında artan fonksiyondur. Tüm U birim dairesinde f in sadece basit bir sıfırı olduğundan, argüment prensibinden $\theta \in [0,2\pi]$ için $f\left(re^{i\theta}\right)$ nin argümentinin varyasyonları 2π ye eşitir. Gerçekten

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f\left(re^{i\theta}\right)d\theta = Re\left\{\frac{1}{i}\int_{|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right\} = 2\pi$$

dir.



Şekil 3.3: U_r nin görüntüsünün yıldızıllığı

Bu yüzden $|z| = r$ nin görüntüsü basit yıldızıl eğridir ve $f(U_r)$ yıldızıl bölgedir. Ayrıca f, $|z| = r$ çemberinde içine olduğundan, sınırlarda yalınkatlık prensibi f in U_r dairesinde yalınkat olduğu anlamına da gelir (Pommerenke 1975, Lemma 1.1). r keyfi olduğundan, tüm U dairesinde f in yalınkat olduğu sonucuna varırız. Sonuç olarak $f(U) = \bigcup_{0<r<1} f(U_r)$ olduğundan, $f(U)$ sıfıra göre yıldızıl bölgedir. Bu da ispatı tamamlar.

Konveks fonksiyonlar için çok iyi bilinen analitik karakterleri vereceğiz.

Teorem 3.2.3: $f: U \to \mathbb{C}$ ye holomorf bir fonksiyon olsun. f konveks ise ancak ve ancak $f'(0) \neq 0$ ve $z \in U$ iken

$$Re\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > 0$$

dır.

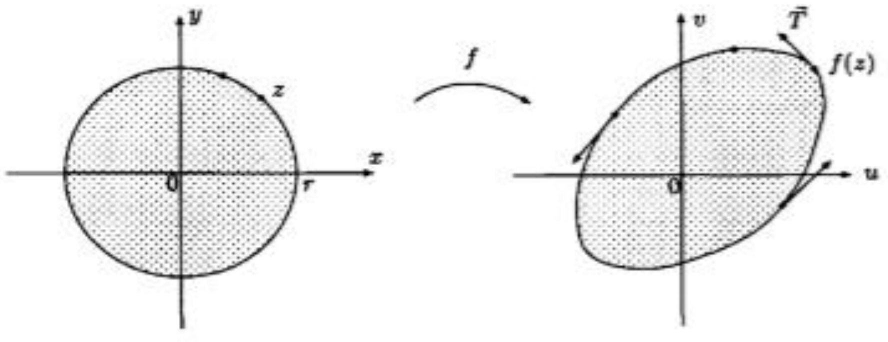
İspat: İlk olarak f in konveks olduğunu varsayalım. f yalınkattır ve bu yüzden $f'(0) \neq 0$ dır. Tüm $r \in (0,1)$ ler için $f(U_r)$ nin konveks bölge olduğunu göstereceğiz. $r \in (0,1)$ aralığında değerler alsın. $z_2 \neq 0$, $|z_1| \leq |z_2|$ olacak şekilde $z_1, z_2 \in U_r$ ve $0 \leq t \leq 1$ olsun. $g: U \to U$, $z \in U$ için

$$g(z) = f^{-1}\left((1-t)f\left(\frac{z_1}{z_2}z\right) + tf(z)\right)$$

olarak tanımlansın. f konveks olduğundan, g iyi tanımlıdır ve U da holomorftur. Ayrıca $g(0) = 0$ ve Schwarz lemmasından $z \in U$ için $|g(z)| \leq |z|$ dir. $z = z_2$ için $|g(z_2)| \leq |z_2| < r$ sonucu çıkar ve bu yüzden $(1-t)f(z_1) + tf(z_2) \in f(U_r)$ dir. Bu yüzden $f(U_r)$ konveks bölgedir.

Γ_r, $|z| = r$ çemberinin görüntüsü olsun. Γ_r, Jordan eğrisi pozitif yönlüdür ve iç bölgesi konveks bölgedir. Ayrıca Γ_r , $0 \leq \theta \leq 2\pi$ için $\omega = f\left(e^{i\theta}\right)$ parametrik temsili ile verilir.

$$\psi(\theta) = \arg\left[\frac{\partial}{\partial\theta} f\left(re^{i\theta}\right)\right] = \arg\left[ire^{i\theta}\, f'\left(re^{i\theta}\right)\right]$$



Şekil 3.4: U_r nin görüntüsünün konveksliği

ve $\theta \in [0,2\pi]$ için $\psi'(\theta) \geq 0$ olmalıdır.

$$\frac{\partial}{\partial\theta} Im\left[\log\left(izf'(z)\right)\right] \geq 0, \qquad z = re^{i\theta}$$

dir. Basit hesaplamalar gösterir ki

$$\frac{\partial}{\partial\theta} Im\left[\log\left(izf'(z)\right)\right] = Im\left[i\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right] = Re\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right], \quad z = re^{i\theta}$$

ve bu yüzden $|z| = r$ de

$$Re\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \geq 0$$

Harmonik fonksiyonlar için minimum prensibini göz önünde bulundurursak, $z = 0$ da kesin eşitsizlik sağlandığından

$$Re\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]>0 \qquad\qquad z\in U_r$$

sonucu çıkar. r keyfi olduğundan $z \in U$ için

$$Re\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]>0$$

elde ederiz. Bu ispatın ilk bölümünü tamamlar.

Şimdi varsayalım ki $f'(0) \neq 0$ ve U da

$$Re\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]>0$$

olsun. Bu bağıntı $z \in U \setminus \{0\}$ için $f'(z) \neq 0$ sonucunu verir. $r \in (0,1)$ değerlerini alsın. Yukarıdaki hesaplamalardaki adımları tersine düşünürsek

$$\frac{\partial}{\partial\theta} arg\left[ire^{i\theta}f'\left(re^{i\theta}\right)\right] \geq 0, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

sonucu çıkar. Bu yüzden Γ_r eğrisinde teğet argümenti, $|z|=r$ çemberinin görüntüsü, θ nın azalan olmayan fonksiyonudur. Ayrıca integrasyon gösteriyor ki $[0,2\pi]$ aralığında $\psi(\theta)$ nın toplam artışı 2π ye eşittir. Gerçekten

$$\int_0^{2\pi}\psi'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta} arg\left[ire^{i\theta}f'\left(re^{i\theta}\right)\right]d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} Re\left[1+\frac{re^{i\theta}f''\left(re^{i\theta}\right)}{f'\left(re^{i\theta}\right)}\right]d\theta$$

$$= Re\int_{|z|=r}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]\frac{dz}{iz} = 2\pi$$

Buradan Γ_r nin basit konveks eğri olduğunu görürüz ve bu yüzden $f(U_r)$ konveks bir bölgedir. Çünkü $f(U)=\cup_{0<r<1}f(U_r)$ dir ve $f(U)$ bir konveks bölgedir. Ayrıca f, $|z|=r$ çemberinde içine olduğundan, sınırlarda yalınkatlık prensibi her $r \in (0,1)$ için f in U_r de yalınkat olduğu anlamına gelir. Bu yüzden f, U da yalınkattır ve bu nedenle konvekstir.

Teorem 3.1.8 in sonucu olarak, Teorem 3.2.2 ve Teorem 3.2.3 teki şartların gerekli basit ispatlarını açıklayacağız (Robertson 1961).

Konvekslik için bazen yararlı olan başka gerek ve yeter şartlar vardır. Konvekslik her iç noktaya göre yıldızıllığa eşdeğerdir fikri Sheil-Small (1969) ve Suffridge (1970) tarafından verildi.

Teorem 3.2.4: $f: U \to \mathbb{C}$ ye normalize holomorf bir fonksiyon olsun. $f \in K$ ise ancak ve ancak

$$Re\left[\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right] \geq 0, \qquad z, \zeta \in U \tag{3.2.1}$$

İspat: Varsayalım ki f konvekstir, bilhassa yalınkattır.

$$g(z,\zeta) = \frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta}$$

fonksiyonu $\mathbb{C}^2$ nin

$$P = \{(z,\zeta) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |\zeta| < 1\}$$

birim poli dairesinde holomorftur, çünkü $\lim_{\zeta \to z} g(z,\zeta) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ dir.

Şimdi $|z| = r < 1$ çemberinin f altındaki görüntüsü konveks eğridir ve bu eğri her iç noktaya göre yıldızıl eğridir. $|z| = r$ çemberinde z değişir ve $|\zeta| < r$ ile ζ alırsak, $f(\zeta)$ ve $f(z)$ arasındaki vektörün argümenti $\arg z$ nin azalan olmayan fonksiyonudur. Teorem 3.2.2. nin ispatındaki nedenler gösteriyor ki yukarıdaki şartlar

$$Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}\right] > 0, \qquad |\zeta| < |z| = r < 1 \tag{3.2.2}$$

ye eşdeğerdir.

Eğer $|\zeta| = |z|$, $\zeta \neq z$ ise Teorem 3.2.2

$$Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}\right] \geq 0$$

eşitsizliğini verir ve bu durumda $Re\left[\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right] = 0$ ve $Re\, g(z,\zeta) \geq 0$ sonucu çıkar. $z = \zeta$ olduğundan $g(z,\zeta)$ için teklik ortadan kaldırılırsa

$$Re\, g(z,\zeta) \geq 0\ , \qquad |\zeta| = |z| = r < 1$$

elde ederiz.

Harmonik fonksiyonlar için minimum prensibine başvurarak $Re\ g(z,\zeta) \geq 0$ $|z| < r,\ |\zeta| < r$ elde ederiz. $r \to 1$ için istenilen (3.2.1) i elde ederiz.

Varsayalım ki (3.2.1) sağlansın. (3.2.1) de $\zeta \to z$ için

$$Re\ \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \geq 0\,, \quad z \in U$$

elde ederiz. Bu yüzden harmonik fonksiyonlar için minimum prensibinden ve Teorem 3.2.3 ten f konvekstir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.2.5: Teorem 3.2.4 ün ispatından, birim dairede normalize holomorf fonksiyonlar için konveksliğin ek özelliklerini gözlemleriz (Suffridge 1970).

$$f \in K \quad \Leftrightarrow \quad Re\ \left[\frac{zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}\right] > 0, \qquad |\zeta| < |z| < 1 \tag{3.2.3}$$

Birim dairede konvekslik için başka gerek ve yeter şartlar Ruschewyh ve Sheil-Small (1973) tarafından elde edildi.

Teorem 3.2.2 ve Teorem 3.2.3 te verilen sonuçlar S^* ve K kümeleri arasında çok önemli bağlantılar kurmaya öncü oldu. Bu bağıntı ilk olarak Alexander tarafından keşfedildi (Alexander 1915/1916).

Teorem 3.2.6: $f,\ U$ da normalize holomorf bir fonksiyon olsun ve $z \in U$ $g(z) = zf'(z)$ olsun. $f \in K \;\Leftrightarrow\; g \in S^*$ dır.

Koebe fonksiyonu ve rotasyonları S^* ye ait olduğundan, S sınıfının tamamı için geçerli olan bükülme ve büyüme sonuçları S^* sınıfı için de kesindir.

Teorem 3.2.7: $f \in S^*$ ve $|z| = r < 1$ olsun.

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \tag{3.2.4}$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \tag{3.2.5}$$

Bu tahminler kesindir. Koebe fonksiyonlarının rotasyonları için bu bağıntıların her birinde eşitlik sağlanır.

Bu teoremin sonucu olarak S^* kümesi $H(U)$ nun kompakt altkümesidir. S^* için Koebe sabiti de S sınıfında olduğu gibi $1/4$ dür.

Normalize konveks fonksiyonlar için büyüme ve bükülme teoremlerini görelim (Gronwall 1914/1915, Loewner 1917):

Teorem 3.2.8: $f \in K$ ve $|z| = r < 1$ olsun.

$$\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r} \tag{3.2.6}$$

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2} \tag{3.2.7}$$

Bu tahminlerin tümü kesindir. Bazı $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ için $f(z) = \frac{z}{1-\lambda z}$ fonksiyonunda sıfırın dışında verilen noktalarda eşitlik sağlanır.

İspat: (3.2.7) tahmini Teorem 3.2.6 nın ve (3.2.4) bağıntısının basit bir sonucudur. (3.2.7) nin üst sınırı integre edilerek, kolayca (3.2.6) nın üst sınırı bulunur.

(3.2.6) daki alt sınırı elde etmek için $|z| = r < 1$ olsun. $f \in K$ olduğundan 0 ile $f(z)$ arasında Γ kapalı doğru parçası $f(U)$ dadır. γ, Γ nın görüntüsünün tersi ise γ, 0 dan z ye basit bir eğridir. (3.2.7) de alt tahmini kullanarak

$$|f(z)| = \int_{\Gamma} |d\omega| = \int_{\gamma} |f'(\zeta)|\,|d\zeta| \geq \int_0^r \left|f'\left(\rho e^{i\theta}\right)\right| d\rho \geq \frac{r}{1+r}$$

sonucunu buluruz.

Açıktır ki (3.2.6) ve (3.2.7) eşitsizliklerinin her birinde bazı $z \in U \setminus \{0\}$ lar için eşitlik sağlanır ancak ve ancak $zf'(z)$ Koebe fonksiyonunun bir rotasyonudur. Bu bazı $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ için $f(z) = \frac{z}{1-\lambda z}$ ile verilir. Böyle fonksiyonlar için bir ışın boyunca alt veya üst tahminde eşitlik sağlanır.

Konveks fonksiyonlar için kapsama teoremi de farklı birkaç yolla ispatlanabilir.

Teorem 3.2.9: $f \in K$ ise $f(U)$, $U_{1/2}$ dairesini kapsar. Bu sonuç kesindir.

İspat: $f(z)=\frac{z}{1-z}$ fonksiyonu ve rotasyonları düşünülerek ispat kesindir. $r\to 1$ iken (3.2.6) daki alt tahminden ispat ortaya çıkar.

İkinci ispat 1964 te MacGregor (1964) tarafından verildi. $\omega\notin f(U)$ ise $|\omega|\geq 1/2$ olduğunu göstereceğiz. $g(z)=[f(z)-\omega]^2,\ z\in U$ olsun. g nin U da yalınkat, $g(0)=\omega^2$ ve $g'(0)=-2\omega$ olduğunu görmek kolaydır. $z\in U$, $h(z)=\left(\omega^2-g(z)\right)/2\omega$ olsun, $h\in S$ dir ve Teorem 2.1.5 ten $|\omega/2|\geq 1/4$ sonucu çıkar.

Üçüncü ispat da subordinasyon prensibi kullanılarak elde edilebilir. $\omega_0=\rho e^{i\phi}\in\partial f(U)$ sıfırdan minimum uzaklıkta bir nokta olsun. $\omega_0=\rho$ olduğunu varsayabiliriz, yoksa f in uygun rotasyonları tarafından f yer değiştirebilir. Her $\omega\in f(U)$ için $Re\ \omega<\rho$ olduğunu görmek zor değildir ve bu yüzden $z\in U$ iken $g(z)=2\rho z/(1+z)$ olduğunda $f\prec g$ dir. Subordinasyon prensibini kullanarak $1=f'(0)\leq\ g'(0)=2\rho$ sonucu çıkar, bu yüzden $\rho\geq 1/2$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

Üçüncü ispattaki argüment aşağıdaki teoremi verir (Graham 1990, Minda 1983) .

Teorem 3.2.10: $f,\ U$ da normalize holomorf bir fonksiyon ise $f(U)$ nun $\widehat{f(U)}$ konveks gövdesi $U_{1/2}$ dairesini kapsar.

Büyüme ve kapsama teoremlerinin ek özellikleri, k −fold (katlı) simetri ile elde edilebilir (cf. Graham ve Varolin 1996). Eğer $z\in U$ için k pozitif tamsayı olmak üzere $e^{-2\pi i/k}f\left(e^{2\pi i/k}z\right)=f(z)$ ise, $f\in H(U)$ fonksiyonu k −fold simetriktir.

Teorem 3.2.11: ***i***) $f\in S$ olsun ve varsayalım ki $f,\ k$ −fold simetriktir. $\rho_k=\frac{1}{4^{1/k}}$ olduğunda $f(U)\supseteq\ U_{\rho_k}$ dır.

ii) Varsayalım ki $f\in K$ olsun. $r_k=\int_0^1\frac{dt}{\left(1+t^k\right)^{2/k}}$ olduğunda $f(U)\supseteq\ U_{r_k}$ dır.

Bu sonuçların ikisi de kesindir.

İspat: $\boldsymbol{i})$ nin ispatı için $g(z) = \sqrt[k]{f(z^k)},\ z \in U$ tarafından verilen f in $k -ıncı$ kök dönüşümünü düşünmek yeterlidir. Bu fonksiyon S ye aittir. S sınıfı için büyüme sonucunu kullanarak (Teorem 2.1.6 bak)

$$\frac{|z|}{\left(1+|z|^k\right)^{2/k}} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{\left(1-|z|^k\right)^{2/k}}, \qquad z \in U \tag{3.2.8}$$

sonucu çıkar.

Şimdi $0 < r < 1$ ile U_r dairesini düşünelim. U_r nin görüntüsü, sınırı ∂U_r nin görüntüsü olan açık kümedir. (3.2.8) i kullanarak ∂U_r nin görüntüsünün orjinden en az $r/(1 + r^k)^{2/k}$ uzaklıkta olduğunu görürüz ve $r \to 1$ için (i) sonucunu buluruz.

(ii) yi ispatlamak için $h(z) = zf'(z)$ fonksiyonuna (3.2.8) e başvururuz ve (3.2.6) nın ispatını ileri sürerek

$$\int_0^r \frac{dt}{\left(1+t^k\right)^{2/k}} \leq |f(z)| \leq \int_0^r \frac{dt}{\left(1-t^k\right)^{2/k}}, \qquad |z| = r < 1$$

sonucunu buluruz. Alt tahminde tekrar $r \to 1$ iken istenilen sonuca varırız.

Bu sonuçların ikisi her k için kesindir, çünkü ilk olarak Koebe fonksiyonunun $k - ıncı$ kök dönüşümünü, ikinci olarak aşağıdaki konveks fonksiyonları seçebiliriz:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{z}{1-z} & k = 1 \\ \frac{1}{2}\log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] & k = 2 \\ \int_0^z \frac{dt}{\left(1-t^k\right)^{2/k}} & k \geq 3 \end{cases} \tag{3.2.9}$$

Burada $k \geq 3$ için g_k, birim daireyi $k -$ mertebeden düzgün çokgen üzerine konform dönüştürür (Nehari 1952, s.196).

Konveks fonksiyonlar için $k -$fold simetriden daha zayıf bir şart, yani $a_2 = a_3 = \cdots = a_k = 0$, aynı sonuçları elde etmeye yeterlidir. Aslında böyle fonksiyonlar için aşağıdaki bükülme teoremini vereceğiz . (Graham ve Varolin 1996)

Teorem 3.2.12: Varsayalım ki $f(z) = z + a_{k+1}z^{k+1} + a_{k+2}z^{k+2} + \cdots$ fonksiyonu U da konveks bir fonksiyon olsun. O halde

$$\frac{1}{\left(1+|z|^k\right)^{2/k}} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{\left(1-|z|^k\right)^{2/k}} \qquad z \in U$$

Bu tahmin kesindir ve (3.2.9) da g_k fonksiyonu için eşitlik sağlanır.

İspat: İspatın metodu subordinasyon savından elde edilmiştir. Eğer

$$g(z) = \frac{zf''(z)}{f'(z)} \qquad \text{ve} \qquad G(z) = \frac{2z}{1-z} \qquad z \in U$$

ise f in konveksliği anlamına gelir ki $g \prec G$ dir.

Şimdi $g(0) = 0$ ve $g(z) = \frac{(k+1)ka_{k+1}z^k+\cdots}{1+(k+1)a_{k+1}z^k+\cdots}$ ise $g'(0) = \cdots = g^{k-1}(0) = 0$ dır. Genelletirilmiş Schwarz lemmasını ve subordinasyon prensibini kullanarak $r \in (0,1)$ için $g(U_r) \subseteq G\left(U_{r^k}\right)$ sonucunu elde ederiz.

$G\left(U_{r^k}\right)$ reel eksende $\frac{2r^{2k}}{1-r^{2k}}$ merkezli ve $\frac{2r^k}{1-r^{2k}}$ yarıçaplı dairedir. Bu

$$\left|g(z) - \frac{2r^{2k}}{1-r^{2k}}\right| \leq \frac{2r^k}{1-r^{2k}}, \qquad |z| = r$$

verir ve aşağıdaki eşitsizliğe eşdeğerdir:

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^{2k}}{1-r^{2k}}\right| \leq \frac{2r^k}{1-r^{2k}}$$

Bu yüzden

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\bar{z}r^{2k-2}}{1-r^{2k}}\right| \leq \frac{2r^{k-1}}{1-r^{2k}}, \qquad |z| = r$$

$z = r$ için tahminimizi ispatlamak yeterlidir, yoksa f in bir rotasyonunu kullanabiliriz. Bu durumda

$$\left|\frac{f''(r)}{f'(r)} - \frac{2r^{2k-1}}{1-r^{2k}}\right| \leq \frac{2r^{k-1}}{1-r^{2k}}$$

Her iki tarafın integralini alırsak

$$\left|\log f'(r) + \frac{1}{k}\log(1 - r^{2k})\right| \leq \int_0^r \frac{2t^{k-1}}{1 - t^{2k}} dt = \frac{1}{k}\log\left[\frac{1 + r^k}{1 - r^k}\right]$$

elde ederiz ve bu nedenle

$$-\frac{1}{k}\log\left[\frac{1 + r^k}{1 - r^k}\right] \leq \log|f'(r)| + \frac{1}{k}\log(1 - r^{2k}) \leq \frac{1}{k}\log\left[\frac{1 + r^k}{1 - r^k}\right]$$

veya

$$\frac{1}{k}\log\frac{1}{(1 + r^k)^2} \leq \log|f'(r)| \leq \frac{1}{k}\log\frac{1}{(1 - r^k)^2}$$

elde ederiz.

$a_2 = a_3 = \cdots = a_k = 0$ ile yıldızıl fonksiyonlar için, Alexander' ın teoremini (Teorem 3.2.6) kullanarak benzer büyüme sonucu elde edebiliriz.

Teorem 3.2.13: $f(z) = z + a_{k+1}z^{k+1} + a_{k+2}z^{k+2} + \cdots$ fonksiyonu U da yıldızıl olsun. O halde

$$\frac{|z|}{(1+|z|^k)^{2/k}} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|^k)^{2/k}}, \quad z \in U$$

dir. Bu tahmin kesindir ve g_k , (3.2.9) ile verildiğinde, $f_k(z) = zg_k'(z)$ fonksiyonu için eşitlik sağlanır.

Teorem 3.2.12 den de $a_2 = a_3 = \cdots = a_k = 0$ ile Teorem 3.2.11 (ii) in genelleştirilmiş hali olan normalize konveks fonksiyonlar için kapsama sonucunu buluruz (Graham ve Varolin 1996).

Sonuç 3.2.14: $f(z) = z + a_{k+1}z^{k+1} + a_{k+2}z^{k+2} + \cdots$ U da konveks bir fonksiyon ise, $r_k = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^k)^{2/k}}$ olduğunda $f(U)$, U_{r_k} dairesini kapsar.

Sonuç olarak $k-$fold simetri ile bir fonksiyonun görüntüsünün konveks gövdesi için kapsama teoreminden bahsederiz (Graham ve Varolin 1996). Bu sonuç yalınkatlık gerektirmez, ayrıca $a_2 = a_3 = \cdots = a_k = 0$ ile fonksiyonların durumuna genelleştirilemez.

Teorem 3.2.15: $f: U \to \mathbb{C}$, $f'(0) = 1$ ile bir k −fold simetrik fonksiyon olsun. $r_k = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^k)^{2/k}}$ olduğunda $\widehat{f(U)} \supseteq U_{r_k}$ dir.

Şimdi S^* ve K fonksiyonları için sınır katsayıları çalışmalarına dönelim. Bieberbach varsayımındaki normalize yıldızıl fonksiyonların durumu, 1920 li yıllarda Nevanlinna (1920/1921) tarafından ispatlandı.

Teorem 3.2.16: $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$, U da yıldızıl ise her $n = 2,3, \ldots$ için $|a_n| \leq n$ dir. f fonksiyonu Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olduğunda $n \geq 2$ için $|a_n| = n$ sağlanır.

İspat: $f \in S^*$ olduğundan $z \in U$, $p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$ ile tanımlı p fonksiyonu $\mathcal{P}$ ye aittir. Eğer $p(z) = 1 + p_1 z + \cdots + p_n z^n + \cdots$, $z \in U$ ise Teorem 3.1.5 ten $n \geq 2$, $|p_n| \leq 2$ dir. $zf'(z)$ ve $f(z)p(z)$ nin kuvvet serilerinde katsayıları karşılaştırılarak

$$(n-1)a_n = a_{n-1}p_1 + a_{n-2}p_2 + \cdots + p_{n-1} \, , \qquad n = 2,3, \ldots$$

sonucu çıkar. Bu nedenle

$$(n-1)|a_n| \leq 2(n-1+n-2+\cdots+1) = n(n-1)$$

elde edilir ve istenilen $|a_n| \leq n$ sonucu çıkar.

Verilen n ler için $|a_n| = n$ ise yukarıdaki argümentlerden $|a_2| = 2$ olduğunu görmek kolaydır ve bu nedenle f, Koebe fonksiyonunun bir rotasyonudur.

Alexander teoremi ile beraber Nevanlinna' nın sonucu K fonksiyonların katsayıları için aşağıdaki sınırları verir (Loewner 1917).

Teorem 3.2.17: U üzerinde $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$ konveks bir fonksiyon ise her $n = 2,3, \ldots$ için $|a_n| \leq 1$ dir. Verilen $n \geq 2$ için $|a_n| = 1$ eşitliği bazı $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ için $f(z) = \frac{z}{1-\lambda z}$ ile sağlanır.

k −ıncı katsayıların tahminlerinin yanısıra, K da fonksiyonların katsayıları için önemli başka tahminler vardır. Yalınkat fonksiyonlar teorisinde olağanüstü bağlantıları olan bir sonraki sonuç önce Hummel (1957), sonra Trimble (1975) tarafından elde edildi. Trimble' ın ispatını vereceğiz. Hummel' ın ispatının varyasyonel tekniklerinden bahsedeceğiz.

Teorem 3.2.18: $f \in K,\ z \in U$ ve $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$ ile tanımlansın. O halde

$$|a_3 - a_2^2| \leq \frac{1-|a_2|^2}{3} \tag{3.2.10}$$

dir.

İspat: $z \in U,\ f(z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ olsun. $p \in \mathcal{P}$ ve eğer $q(z) = \frac{1-p(z)}{1+p(z)}$ yazarsak $q \in \mathcal{V}$ dir ve q kuvvet serileri açılımı şöyledir:

$$q(z) = -a_2 z + 3(a_2^2 - a_3)z^2 + \cdots, \qquad z \in U$$

Eğer $q(z)/z$ modüler olmayan bir sabit ise $a_2^2 - a_3 = 0$ dır ve istenilen

$$|3(a_2^2 - a_3)| \leq 1 - |a_2|^2$$

sonucunu elde ederiz.

Eğer $f \in S$, (2.1.1) de verilen Taylor serileri açılımına sahip ise

$$|a_3 - a_2^2| \leq 1$$

dir.

Bu tahmin K deki fonksiyonlar için geliştirilebilir. Bir sonraki sonuç önce Nehari (1976), daha sonra Koepf (1988) tarafından elde edildi.

Sonuç 3.2.19: $f \in K,\ z \in U,\ f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$ ile verilsin. O halde

$$|a_3 - a_2^2| \leq \frac{1}{3} \tag{3.2.11}$$

dir. Bu tahmin kesindir. Eşitlik ancak ve ancak

$$f(z) = \frac{1}{2\lambda}\log\left[\frac{1+\lambda z}{1-\lambda z}\right], \qquad |\lambda| = 1 \tag{3.2.12}$$

ile sağlanır.

İspat: (3.2.11) in (3.2.10) den geldiği açıktır. Ayrıca (3.2.10) den dolayı (3.2.11) de $a_2 = 0$ ve $|a_3| = 1/3$ gerek ve yeter koşulu ile eşitlik sağlanır. Bu yüzden f in Taylor serileri açılımını almalıyız.

$$f(z) = z + a_3 z^3 + \cdots, \qquad z \in U$$

ve bu yüzden

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = 1 + 6a_3 z^2 + \cdots, \quad z \in U$$

dir.

Bu fonksiyon $\mathcal{P}$ ye aittir ve $6|a_3| = 2$ dir ve lineer terim yoktur ki

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{1+\lambda^2 z^2}{1-\lambda^2 z^2}, \qquad |\lambda|=1$$

dir (Pommerenke 1975, sonuç 2.3 bak). Bu da (3.2.12) ifadesini verir.

Holomorf- Schwarzian türevlenebilir lokal yalınkat f fonksiyonu U da

$$\{f; z\} = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2, \qquad z \in U$$

ile tanımlıdır.

Lineer fraksiyonel dönüşümler altında invaryans özellikleri nedeniyle bu önemlidir.

Bir sonraki sonuç Sonuç 3.2.19 da kullanılan konveks fonksiyonların Schwarzian türevi için olan tahmindir. Bu da Nehari (1976) tarafından elde edildi ve Koepf (1988) tarafından detayları oluşturuldu. Koepf eşitlik sağlayan fonksiyonları belirledi ve kesin eşitsizlik olan fonksiyonların karakterizasyonunu verdi.

Teorem 3.2.20: $f \in K$ ise

$$|\{f; z\}| \leq \frac{2}{(1-|z|^2)^2}, \quad z \in U \tag{3.2.13}$$

dir.

Bu tahmin kesindir ve eşitlik $f(U)$ çizgisel bölge ise sağlanır.

$$f(z) = \frac{1}{\omega+\eta}\log\left[\frac{1+\omega z}{1-\eta z}\right], \quad |\omega| = |\eta| = 1, \ \omega \neq -\eta \tag{3.2.14}$$

İspat: $z \neq 0$ için (3.2.13) ü ispatlamak yeterlidir. f in g Koebe dönüşümü

$$g(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right)-f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)} = \zeta + b_2\zeta^2 + b_3\zeta^3 + \cdots, \quad \zeta \in U \tag{3.2.15}$$

olarak verilsin. g nin U da konveks olduğu açıktır ve Sonuç 3.2.19 dan

$$|b_3 - b_2^2| \leq \frac{1}{3}$$

sonucu mevcuttur. Basit hesaplamalarla

$$|(1-|z|^2)^2\{f;z\}| = |\{g;0\}| = 6|b_3 - b_2^2| \leq 2$$

olur ve (3.2.13) ü elde ederiz.

(3.2.13) te bazı $z \in U$ lar için eşitlik varsa, f in uygun g Koebe dönüşümünün (3.2.12) formu vardır. (3.2.15) i göz önünde bulundurursak, f U yu sonsuz çizgi üzerine dönüştürmelidir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç olarak benzer sebepler ile Teorem 3.2.18 in ispatından U da normalize konveks fonksiyonun Schwarzian türevi için başka tahminden sözederiz.

Eğer $f \in K$ ise

$$|(1-|z|^2)^2\{f;z\}| \leq 2\left(1 - \left|\frac{1-|z|^2}{2}.\frac{f''(z)}{f'(z)} - \bar{z}\right|^2\right), \quad z \in U \tag{3.2.16}$$

dir.

U da yalınkat fonksiyonların Schwarzian türevini içeren daha fazla sonuç için şu referanslar kontrol edilebilir: Chuaqui (1995), Duren (1983), Chuaqui ve Osgood (1993), Chuaqui ve Osgood (1998), Chuaqui ve Pommerenke (1999), Harmelin (1989), Kra (1971), Lehto (1987), Minda (1985), Nehari (1952), Nehari (1979), Osgood (1982), Over holt (1989), Pommerenke (1975).

Bu bölümün sonunda S sınıfının tamamı için konvekslik yarıçapı ve yıldızıllık yarıçapını ele alacağız. Şüphesiz bu konuları S in altsınıfları için de çalışabiliriz.

$\mathcal{F}$, S nin boş olmayan bir altsınıfı olsun. $\mathcal{F}$ sınıfında her fonksiyon $U_{r^*(\mathcal{F})}$ dairesinde yıldızıl olacak şekilde, $r^*(\mathcal{F})$ en büyük pozitif sayı olsun. Bu sayıya $\mathcal{F}$ in yıldızıllık yarıçapı denir. $\mathcal{F}$ sınıfındaki her fonksiyon $U_{r_c(\mathcal{F})}$ de konveks olacak şekilde, $r_c(\mathcal{F})$ en büyük pozitif sayı olsun. Bu sayıya da $\mathcal{F}$ in konvekslik yarıçapı denir.

Nevanlinna (1920) sayesinde bulunan bir sonraki sonuç konvekslik yarıçapını hesaplar. Campbell (1974), $f \in S$ ise konvekslik yarıçapının $2-\sqrt{3}$ olduğunu gösterdi, o halde f Koebe fonksiyonunun bir rotasyonudur.

Teorem 3.2.21: $r_c(S) = 2-\sqrt{3}$

İspat: $f \in S$ olsun. f, (2.1.9) eşitsizliğini sağlar ve bu nedenle $|z| = r < 1$ için

$$Re\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \geq \frac{1-4r+r^2}{1-r^2}$$

elde ederiz.

$0 \leq r \leq 2-\sqrt{3}$ için $1-4r+r^2 \geq 0$ olduğundan, r nin böyle her değeri için $f \in K(U_r)$ dir. Bu nedenle $r_c(S) \geq 2-\sqrt{3}$ tür.

Ayrıca eğer $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$, $z \in U$ ve $2-\sqrt{3} < r < 1$ ise, f fonksiyonu $|z| = r$ çemberini konveks eğri üzerine dönüştürmez. Bunu görmek için

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{z^2+4z+1}{1-z^2}$$

dir ve bu ifade reel z için negatif olduğundan $-1 < z < -\left(2-\sqrt{3}\right)$ bir sonraki sonuçtur. Bu yüzden $r_c(S) = 2-\sqrt{3}$ sonucu bulunur.

$r^*(S)$ için benzer olarak Grunsky (1933) sonuç elde etti. Yalınkat fonksiyonların diğer yarıçap problemleri için Goodman' ı (1983) inceleyebilirsiniz.

Teorem 3.2.22: $r^*(S) = \tan h\frac{\pi}{4}$

Brown (1989), her $f \in S$ fonksiyonunun $|z-\zeta|<\rho^*$, $|\zeta|<1$ dairesini $f(\zeta)$ ya göre yıldızıl bölge üzerine dönüştüren $\rho^* = \rho^*(|\zeta|)$ yarıçapını elde etti.

Teorem 3.2.23: $r \in [0,1)$ ve ρ^*, $(0, 1-r)$ de $A_\rho = \pi/2$ denkleminin tek kökü olsun.

$$A_\rho \equiv \log\left\{\frac{\sqrt{(1-r^2)^2 - r^2\rho^2} + \rho}{\sqrt{(1-r^2)^2 - r^2\rho^2} - \rho}\right\} + arc\tan\left\{\frac{r\rho}{\sqrt{(1-r^2)^2 - r^2\rho^2}}\right\}$$

Eğer $|\zeta| = r$ ise her $f \in S$, $|z-\zeta| < \rho^*$ dairesini $f(\zeta)$ ya göre yıldızıl bölge üzerine dönüştürür. ρ^* sabiti kesindir.

Bu bölümün hazırlanmasında kullanılan temel kaynaklar Duren (1983), Pommerenke (1975), Goodman (1983) dir. Ek olarak yıldızıl ve konveks fonksiyonlar hakkında bilgi almak için Goluzin (1952), Hallenbeck ve MacGregor (1984), Hayman (1994), Nehari (1952), Schober (1975), Ruschweyh (1982) kaynaklarından da yararlanabilirsiniz

3.3 Yıldızıllık ve $\alpha -$ ıncı Mertebeden Konvekslik, Alfa Konvekslik

3.3.1 Yıldızıllık ve $\alpha -$ ıncı Mertebeden Konvekslik

Şimdi birim dairede normalize yıldızıl ve konveks fonksiyonların bazı altsınıflarını ele alacağız ve bu sınıfların temel özelliklerinden bazılarını vereceğiz.

Aşağıdaki tanım Robertson (1936) tarafından tanımlandı:

Tanım 3.3.1: $f: U \to \mathbb{C}$ ye holomorf bir fonksiyon olsun. $f(0) = 0,\ f'(0) \neq 0$ ve

$$Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \alpha\,, \qquad z \in U$$

ise $0 \leq \alpha < 1$ için f, $\alpha -$ ıncı mertebeden yıldızıldır. Yine aynı şekilde $f'(0) \neq 0$ ve

$$Re\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > \alpha\,, \qquad z \in U$$

ise $0 \leq \alpha < 1$ için $f,\ \alpha - ıncı$ mertebeden konvekstir.

Birim dairede $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ sırasıyla $\alpha - ıncı$ mertebeden normalize yıldızıl ve konveks fonksiyonlar olsun. Alexander' ın çalışmalarında $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ ile bağlantılı sonuçlar vardır. $f \in K(\alpha)$ ise ancak ve ancak $g(z) = zf'(z),\ \ z \in U$ olacak şekilde $g \in S^*(\alpha)$ dır.

Bu sınıflar hakkındaki sonuçların en önemli olanlarından biri Marx (1932) ve Strohhacker' ın (1933) bulduğu, $1/2 - inci$ mertebeden konvekslik ve yıldızıllık arasında bağlantı kuran teoremdir. Burada verdiğimiz ispat Suffridge' nin (1970) ispatıdır ve Teorem 3.2.4 te verilen konvekslik karakterizasyonuna dayanır.

Teorem 3.3.2: $f \in K$ ise $f \in S^*(1/2)$ dir. Bu sonuç kesindir. $1/2$ sabiti daha büyük bir sabit ile yer değiştiremez.

İspat: $f \in K$ olduğundan, Teorem 3.2.4 ten

$$Re\left[\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right] \geq 0\,, \qquad z,\zeta \in U$$

dir ve bu bağıntıda $\zeta = 0$ yazarsak

$$Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geq \frac{1}{2}\,, \qquad z \in U$$

elde ederiz.

Harmonik fonksiyonlar için minimum prensibi kullanılarak, istenilen sonuç elde edilir.

Bu sonucu görmek için birim daireyi, $\{\omega \in \mathbb{C} : Re\ \omega > -1/2\}$ sağ yarı düzlemi üzerine dönüştüren $f(z) = z/1 - z$ fonksiyonunu düşünmek yeterlidir.

Marx (1932) ve Strohhacker' ın (1933) bir başka sonucu aşağıdadır. Suffridge (1970) tarafından ispatlandı.

Sonuç 3.3.3: $f \in K$ ise $Re\,[f(z)/z] > 1/2$, $z \in U$ dur. Bu sonuç kesindir.

İspat: $f \in K$ olduğundan (3.2.1) bağıntısı sağlanır.

$$F(,\zeta) = \frac{zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)} - \frac{\zeta}{z-\zeta}\ , \qquad z,\zeta \in U$$

olur. (3.2.1) bağıntısı $z,\zeta \in U$ için $Re\, F(z,\zeta) \geq 1/2$ ye eşdeğerdir.

$\zeta \in U$ olsun. z değişkenli kuvvet serilerinde $F(z,\zeta)$ nin açılımı:

$$F(z,\zeta) = 1 + \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{f(\zeta)}\right)z + \cdots$$

şeklindedir.

Önceki iki bağıntı $2F(.,\zeta) - 1 \in \mathcal{P}$ ile gösterilir ve bu yüzden Teorem 3.1.5 kullanılarak

$$\left|\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{f(\zeta)}\right| \leq 1$$

sonucu çıkar.

$|1 - \zeta/f(\zeta)| \leq |\zeta| < 1$ ifadesi ζ ile çarpılarak bulunur ve sonuç olarak $Re\,[f(\zeta)/\zeta] > 1/2$ olur. $f(z) = z/1 - z$ fonksiyonu yukarıdaki eşitsizlikte extremal rol oynar.

Jack (1971) tarafından Teorem 3.3.2 nin genelleşmesi elde edildi. Ayrıca bu sonuç kesindir. $\alpha -$ mertebeden verilen konveks fonksiyonlar için yıldızıllığın mertebesinin kesin sonuçları için Miller ve Mocanu (2000) kaynaklarından yararlanabilirsiniz.

Teorem 3.3.4: $f \in K(\alpha)$ ve $\alpha \in [0,1)$ ise

$$\beta = \beta(\alpha) = \frac{2\alpha - 1 + \sqrt{(2\alpha-1)^2 + 8}}{4}$$

olduğunda $f \in S^*(\beta)$ dır.

Bir sonraki sonuç sırasıyla $\alpha \in [0,1)$ için $K(\alpha)$ ve S^* sınıfları ile $S^*(\alpha)$ ve S^* sınıfları arasında duallik kurar.

Teorem 3.3.5: $\alpha \in [0,1)$ olsun. Aşağıdaki iddialar sağlanır :

i) $f \in S^*(\alpha)$ ise ancak ve ancak $z \in U$, $g(z) = z\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{1/1-\alpha}$ olduğunda $g \in S^*$ dır. Kuvvet fonksiyonunun dalı $\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{1/1-\alpha}\Big|_{z=0} = 1$ şeklinde seçilir.

ii) $f \in K(\alpha)$ ise ancak ve ancak $z \in U$, $h(z) = z\big(f'(z)\big)^{1/1-\alpha}$ olduğunda $h \in S^*$ dır. Kuvvet fonksiyonunun dalı $\big(f'(z)\big)^{1/1-\alpha}\Big|_{z=0} = 1$ şeklinde seçilir.

Bu sonucu kullanarak Robertson' un (1936) $\alpha \in [0,1)$ için $\alpha -$ mertebeden konveks fonksiyonlar için büyüme ve bükülme teoremlerini elde edebiliriz.

Teorem 3.3.6: $f \in K(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$ ve $|z| = r < 1$ olsun. O halde

$$\frac{1}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^{2(1-\alpha)}} \tag{3.3.1}$$

dır. Eğer $\alpha \neq 1/2$ ise

$$\frac{(1+r)^{2\alpha-1}-1}{2\alpha-1} \leq |f(z)| \leq \frac{1-(1-r)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} \tag{3.3.2}$$

dir ve eğer $\alpha = 1/2$ ise

$$\log(1+r) \leq |f(z)| \leq -\log(1-r) \tag{3.3.3}$$

dir. Bu tahminler kesindir. $(1-z)^{2\alpha-1}$ kuvvet fonksiyonlarının dalı ve $\log(1-z)$ nin dalı, $(1-z)^{2\alpha-1}|_{z=0} = 1$ ve $\log(1-z)|_{z=0} = 0$ olacak şekilde

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1-(1-z)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} & \alpha \neq 1/2 \\ -\log(1-z) & \alpha = 1/2 \end{cases}$$

eşitliği yukarıdaki bağıntıların her birinde sağlanır.

İspat: (3.3.1) tahmini Teorem 3.3.5 (ii) den ve yıldızıl fonksiyonlar için büyüme teoreminden kolayca bulunur. (3.3.2) ve (3.3.3) büyüme teoremlerinde üst tahminler elde etmek için, (3.3.1) deki sağ yön eşitsizliğini integre etmek yeterlidir. Alt tahminleri ispatlamak Teorem 3.2.8 de verilen argümentleri gerektirir.

Teorem 3.3.5 (i) den veya (3.3.1) bükülme teoreminden $\alpha \in [0,1)$ için $S^*(\alpha)$ fonksiyonları için büyüme teoremini elde ederiz.

Teorem 3.3.7: $f \in S^*(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$ ve $|z| = r < 1$ ise

$$\frac{r}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}$$

dır.

Bu tahmin kesindir. $z \in U$, $f(z) = \frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}$ için eşitlik sağlanır.

Brown (1989), $\alpha \in [0,1)$ mertebeden konvekslik için gerek ve yeter şartları içeren aşağıdaki teoremi elde etti. Özellikle Brown' ın sonucuna göre eğer f, U da konveks ise her $|z-\zeta| < r < 1-|\zeta|$, $|\zeta| < 1$ daireyi konveks bölge üzerine dönüştürür (Study 1913 ve Robertson 1936).

Teorem 3.3.8: $f : U \to \mathbb{C}$ normalize holomorf bir fonksiyon ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. $f \in K(\alpha)$ ise ancak ve ancak

$$Re\left\{1 + \frac{(z-\zeta)f''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha, \quad |z-\zeta| < 1-|\zeta|, \quad |\zeta| < 1$$

dir.

İspat: İlk olarak varsayalım ki

$$Re\left\{1 + \frac{(z-\zeta)f''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha, \quad |z-\zeta| < 1-|\zeta|, \quad |\zeta| < 1$$

dir.

Yukarıda $\zeta = 0$ için $f \in K(\alpha)$ sonucu çıkar.

Şimdi varsayalım ki $f \in K(\alpha)$ olsun. $|\zeta| = r < 1$ ve

$$A \equiv 1 + \left(\frac{z-\zeta}{1-\alpha}\right)\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

olsun. Harmonik fonksiyonlar için minimum prensibinden $|z-\zeta| = \rho < 1-r$ için $Re\, A > 0$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. Bu amaç için $|z-\zeta| = \rho$ olacak şekilde $z \in U$ olsun. $f \in K(\alpha)$ olduğundan $p \in \mathcal{P}$ olduğunda

$$A = \frac{(z-\zeta)(p(z)-1)}{z} + 1 \tag{3.3.4}$$

olur. İyi biliniyor ki $\mathcal{P}$ nin extrem noktaları $\theta \in \mathbb{R}$ için $p_\theta(z) = \frac{1+e^{i\theta}z}{1-e^{i\theta}z}$ fonksiyonudur (Eğer $p \in \mathcal{P}$ ise ve $0 < t < 1,\ g \in \mathcal{P}$ ve $h \in \mathcal{P}$ olduğunda $p = tg + (1-t)h$ ise $h = g$ dir ve $p,\ \mathcal{P}$ nin extrem noktasıdır). (3.3.4) eşitliğinin sağ yönü keyfi olduğundan $\mathcal{P}$ de bir afin fonksiyoneldir. Buradan $\min_{p\in\mathcal{P}} Re\ A$, $\mathcal{P}$ nin böyle bir extrem noktasına ulaşır (e.g. Hallenbeck ve MacGregor 1984). Daha sonra $\zeta = re^{i\theta}$ ve $z = \zeta + \rho e^{i\phi}$ için aşağıdaki temel sonuçları elde ederiz:

$$Re\ A \geq \min_{0\leq\theta<2\pi} Re \left[\frac{(z-\zeta)(p_\theta(z)-1)}{z} + 1\right]$$

$$= \min_{0\leq\theta<2\pi} \left|1 - e^{i\theta}z\right|^{-2}[-\rho^2 + 1 - 2r\cos(\theta+\varphi) + r^2]$$

$$\geq \min_{0\leq\theta<2\pi} \left|1 - e^{i\theta}z\right|^{-2}[(1-r)^2 - \rho^2] > 0$$

olur.

Sonuç olarak Robertson' un (1936) bu fonksiyonlar sınıfı hakkındaki orjinal çalışmalarında elde ettiği, $\alpha \in [0,1),\ S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ fonksiyonlarının özelliklerini verdik. $\alpha-$ mertebeden konvekslik ve yıldızıllık hakkında daha fazla bilgi için Goodman (1983) ve Bernardi (1982) kaynaklarından yararlanabilirsiniz.

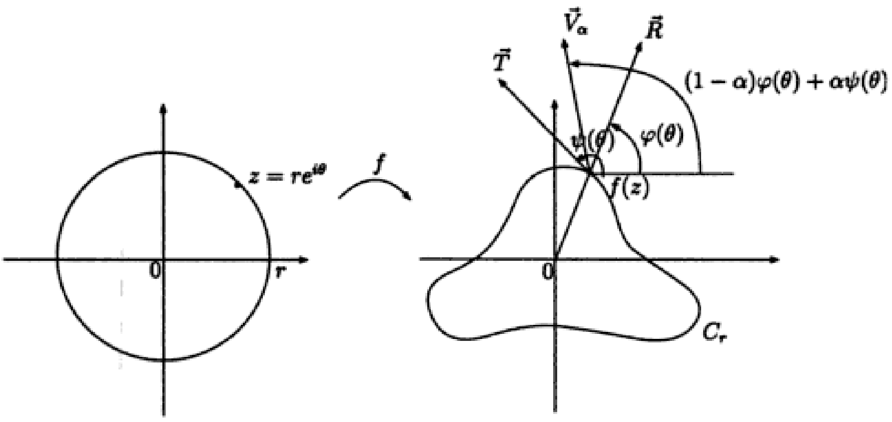
3.3.2 Alfa- Konvekslik

Bu bölümde alfa konveks fonksiyonlar sınıfı denilen, S in başka bir altsınıfını oluşturacağız. Bu fikir 1969 da Mocanu (1969) tarafından, yıldızıl fonksiyonlardan konveks fonksiyonlara bir süreklilik sağlayan S in altsınıflarının bir değişkenli ailesinin oluşturulması amacı ile ortaya çıkmıştır. Daha fazla durum detayları Goodman (1983) , Mocanu, Bulboaca ve Salagean (1999) kitaplarında bulunabilir. Alfa$-$konveks fonksiyonlar ile bağlantılı bazı fikirler ilk olarak Sakagucki' nin (1962) çalışmalarında ortaya çıkmıştır. Birkaç kompleks değerli alfa$-$konveks dönüşümlerin Kohr (1998) tarafından ortaya çıkmış olduğunu söyleyebiliriz.

Tanım 3.3.9: $z \in U$, $\frac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0$ olacak şekilde f, U da normalize holomorf bir fonksiyon olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun ve

$$J(\alpha, f; z) = (1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right), \qquad z \in U$$

dir. Eğer $Re\, J(\alpha, f; z) > 0$ ise f, alfa−konvekstir.



Şekil 3.5: C_r nin $\alpha -$ konveksliği

Alfa−konveks fonksiyonların bir sınıfı M_α olsun. $M_0 = S^*$ ve $M_1 = K$ olduğu açıktır.

Mocanu (1969) orjinal çalışmalarında geometrik alfa−konveksliği tanımlamıştır ve Tanım 3.3.9 da sonuç olarak analitik şartlar vermiştir. $0 \leq \alpha \leq 1$ durumunu alarak, Mocanu' nun argümentleri dışına çıkacağız.

$f(0) = 0$ ile $f \in H_u(U)$ olsun. C_r eğrisi $r \in (0,1)$ ile $|z| = r$ çemberinin görüntüsü olsun. f, U da yalınkat olduğundan C_r eğrisi $\omega = f(re^{i\theta}) = \omega(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ile verilen pozitif yönlü Jordan eğrisidir.

Eğer $\arg f(z)$ nin $|z| = r$ çemberi etrafında hareketi pozitif yönde artan ise C_r yıldızıldır. Ayrıca C_r nin teğet vektörünün argümenti, $\theta \in [0,2\pi]$ aralığında azalan olmayan ise C_r konveks eğridir.

$\varphi(\theta) = \arg f\left(re^{i\theta}\right)$ durum vektörünün argümenti olsun ve $\psi(\theta)$, $\omega = f\left(re^{i\theta}\right)$ da C_r ye teğet vektörünün argümenti olsun. $\overrightarrow{V_\alpha} = \overrightarrow{V_\alpha}(\theta)$, $f\left(re^{i\theta}\right)$ dan başlayan bir vektör olsun. Bu vektör $\omega = f\left(re^{i\theta}\right)$ durum vektörü ile $\omega = f\left(re^{i\theta}\right)$ de C_r ye teğet olan vektör arasında α oranıyla açıları böler. $\overrightarrow{V_\alpha}(\theta)$ nın eğim açısı $(1-\alpha)\varphi(\theta) + \alpha\psi(\theta)$ dır.

Eğer bu açı $\theta \in [0,2\pi]$ aralığında artan bir fonksiyon ise C_r eğrisi alfa−konvekstir. Bu bağıntı $Re\, J(\alpha, f; z) > 0$ ye eşdeğerdir.

Şimdi alfa−konveks fonksiyonlar hakkında bazı temel sonuçlar vereceğiz. Bunlar içinde en dikkat çeken sonuç aşağıdadır (Mocanu 1969, Miller, Mocanu ve Reade 1972/1973, Sakaguchi 1962).

Teorem 3.3.10: $\alpha \in \mathbb{R}$ ise $M_\alpha \subseteq S^*$ dır. Ayrıca her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 \le \alpha/\beta < 1$ için $M_\beta \subset M_\alpha$ dır.

İspat: İlk olarak $f \in M_\alpha$ ise $f \in S^*$ olduğunu ispatlayalım. Eğer $p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$ ve $z \in U$ ise p, U da holomorf bir fonksiyondur. $p(0) = 1$ ve $Re\, J(\alpha, f; z) > 0$ şartı

$$Re\left[p(z) + \alpha\frac{zp'(z)}{p(z)}\right] > 0, \qquad z \in U$$

haline dönüşür.

Şimdi $0 \le \alpha/\beta < 1$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. $0 \le \alpha < \beta$ durumunu düşüneceğiz, diğer durum benzerdir. Varsayalım ki $f \in M_\beta$ olsun. İlk durumun ispatına göre

$$Re\left[p(z) + \beta\frac{zp'(z)}{p(z)}\right] > 0, \qquad z \in U$$

ve $Re\ p(z) > 0$ elde ederiz. Sonra $z \in U$ alalım ve $a = Re\ p(z)$ ve $b = Re\left[\frac{zp'(z)}{p(z)}\right]$ olsun. $t \in [0, \beta]$ için $h(t) = a + tb$ olsun. $h(0) = a > 0$ ve $h(\beta) > 0$ olduğundan her $t \in [0, \beta]$ için $h(t) > 0$ olduğu aşikardır.

Bu teorem negatif α için α ile artan ve α pozitif için α ile azalan M_α sınıflarını açıklar. Bu sınıfların en geniş olanı $M_0 = S^*$ dır. Teorem 3.3.10 un sonucunu da aşağıda verdik (Mocanu 1969, Miller, Mocanu ve Reade 1972/1973, Sakaguchi 1962).

Sonuç 3.3.11: $(\boldsymbol{i})$ $\alpha \geq 1$ ise $M_\alpha \subseteq K$ dır.

$(\boldsymbol{ii})$ $0 \leq \alpha < 1$ ise $K \subseteq M_\alpha$ dır.

$(\boldsymbol{iii})$ $z \in U,\ id(z) = z$ olduğunda $\bigcap_{\alpha=0}^{\infty} M_\alpha = \{id\}$ dir.

Bir sonraki sonuç $\alpha \geq 0$ ile S^* ve M_α sınıfları arasında duallik kurar. Farklı yollar ile ispatlanabilir (Mocanu 1969, Miller, Mocanu ve Reade 1974).

Teorem 3.3.12: $\alpha \geq 0$ olsun. $f \in M_\alpha$ ise ancak ve ancak $z \in U$ için

$$g(z) = f(z)\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{\alpha}$$

ile tanımlanan fonksiyon S^* ya aittir. Kuvvet fonksiyonunun dalı $\left.\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{\alpha}\right|_{z=0} = 1$ olacak şekilde seçilir.

$\alpha > 0,\ M_\alpha$ sınıfındaki fonksiyonlar için Miller' in (1973) aşağıdaki büyüme sonucunu elde ederiz. İspat için Teorem 3.3.12 i kullanmak yeterlidir ve Teorem 3.2.8 in ispatındaki argümentlere benzerdir.

Teorem 3.3.13: $\alpha > 0$ ve $f \in M_\alpha$ ise

$$-K(-r;\alpha) \leq |f(z)| \leq K(r;\alpha), \quad |z| = r < 1$$

dir. $K(z;\alpha)$, alfa$-$konveks Koebe fonksiyonu olmak üzere

$$K(z;\alpha) = \left[\frac{1}{\alpha}\int_0^z \frac{\zeta^{\frac{1}{\alpha}} d\zeta}{\zeta(1-\zeta)^{\frac{2}{\alpha}}}\right]^{\alpha}, \qquad z \in U$$

dır. Kuvvet fonksiyonunun dalı $K(z;\alpha)$ olacak şekilde seçilir ki U da normalize holomorftur. Bu tahmin kesindir.

3.4 Birim Dairede Konvekse Yakın, Spirallike ve Φ $-$like Fonksiyonlar

3.4.1 Birim Dairede Konvekse Yakın Fonksiyonlar

Birim dairede yalınkat fonksiyonların konvekse yakın ve spirallike fonksiyon olarak bilinen diğer iki altsınıfını ele alacağız. Konvekse yakın fikri hakkında ilk defa çalışacağız ve bunun için Noshiro (1934/35), Warschawski (1935) ve Wollf (1934) tarafından elde edilen, aşağıda verilen sonuç ile başlayacağız.

Lemma 3.4.1: Varsayalım ki D, $\mathbb{C}$ bölgesinde konveks bölge olsun. Eğer $H(D)$, D üzerinde $Re\, f'(z) > 0$ şartını sağlarsa f, D de yalınkattır.

İspat: $z_1 \neq z_2$ olacak şekilde $z_1, z_2 \in D$ olsun. γ, z_1 den z_2 ye birleşen düzgün doğru parçası olsun. $t \in [0,1]$ için $z(t) = (1-t)z_1 + tz_2$ olsun. O halde $z(t) \in D$, $t \in [0,1]$ ve

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_\gamma f'(\zeta)d\zeta = (z_2 - z_1)\int_0^1 f'\big(z(t)\big)dt$$

elde ederiz.

Hipotezi göz önünde bulundurursak

$$Re\left[\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}\right] = \int_0^1 Re\left[f'\big(z(t)\big)\right]dt > 0$$

sonucu bulunur ve bu yüzden $f(z_2) \neq f(z_1)$ dir.

Bu lemmayı kullanarak Ozaki (1935) ve Kaplan (1952) tarafından elde edilen bir sonraki sonucu ispatlayabiliriz.

Lemma 3.4.2: D, $\mathbb{C}$ de bir bölge olsun. g, D de yalınkat ve $g(D)$ konveks bölge olmak üzere f ve g , D de holomorf fonksiyonlar olsun. Eğer

$$Re\left[\frac{f'(z)}{g'(z)}\right] > 0\,, \qquad z \in D$$

ise f fonksiyonu D de yalınkattır.

İspat: $h = f \circ g^{-1}$ fonksiyonunda Lemma 3.4.1 den yararlanılır.

Bir sonraki tanım Kaplan (1952) tarafından elde edildi.

Tanım 3.4.3: $f \in H(U)$ olsun. U da

$$Re\left[\frac{f'(z)}{g'(z)}\right] > 0\,, \qquad z \in U \tag{3.4.1}$$

olacak şekilde g konveks fonsiyonu varsa $f,\ U$ da konvekse yakındır denir.

Teorem 3.2.6 kullanılarak $h,\ U$ da yıldızıl olacak şekilde

$$Re\left[\frac{zf'(z)}{h(z)}\right] > 0\,, \qquad z \in U \tag{3.4.2}$$

gerektirmesi ile (3.4.1) şartını yeniden yazabiliriz. Böylece eğer $f,\ U$ da yıldızıl ise f konvekse yakındır sonucu çıkar.

$C,\ U$ da normalize konvekse yakın fonksiyonların kümesi olsun. O halde $K \subset S^* \subset C \subset S$ olduğu açıktır.

1955 te Reade (1955/56), Bieberbach varsayımını sağlayan konvekse yakın fonksiyonların katsayılarını ispatladı. Argüment yıldızıl fonksiyonlar için benzerdir (Teorem 3.2.16).

Teorem 3.4.4: Eğer $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n + \cdots$ konvekse yakın bir fonksiyon ise $n = 2,3,\ldots$ için $|a_n| \le n$ dir. $n \ge 2$ için verilen $|a_n| = n$ eşitliği, f Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu ise sağlanır.

İspat: $f \in C$ olduğundan U da

$$Re\left[\frac{f'(z)}{h'(z)}\right] > 0$$

olacak şekilde h konveks fonksiyonu vardır. Bu yüzden $Re\,[1/h'(0)] > 0$ dır ve eğer $\alpha = arg h'(0)$ ise $|\alpha| < \pi/2$ olduğunu varsayabiliriz. Ayrıca

$$g(z) = \frac{h(z)-h(0)}{h'(0)}, \qquad \mathrm{z} \in U$$

olsun. O halde $g \in K$ dır ve eğer

$$q(z) = \frac{f'(z)}{e^{i\alpha} g'(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$$

fonksiyonunu düşünürsek $q_0 = e^{-i\alpha}$ ve $Re\, q(z) > 0,\ z \in U$ dir. Ayrıca

$$p(z) = \frac{q(z) + i \sin\alpha}{\cos\alpha} = 1 + p_1 z + \cdots + p_n z^n + \cdots, \qquad z \in U$$

olsun. Bu fonksiyon $\mathcal{P}$ ye aittir ve $n \geq 1,\ q_n = p_n \cos\alpha$ olduğunu görmek kolaydır. Eğer

$$g(z) = z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots, \qquad z \in U$$

ise $f'(z)$ ve $e^{i\alpha} g'(z) q(z)$ nin kuvvet serilerinde katsayılarını kıyaslarsak

$$n a_n = e^{i\alpha}\left[n c_n e^{-i\alpha} + (n-1) c_{n-1} q_1 + (n-2) c_{n-2} q_2 + \cdots + 2 c_2 q_{n-2} + q_{n-1}\right]$$

sonucunu buluruz.

$p \in \mathcal{P}$ olduğundan $n = 2,3, \ldots$ için $|p_n| \leq 2$ elde ederiz ve bu yüzden $|q_n| \leq 2\cos\alpha \leq 2$ dir. Ayrıca $g \in K$ olduğundan $n = 2,3, \ldots$ için $|c_n| \leq 1$ elde ederiz. Bu yüzden

$$n|a_n| \leq n + 2(n-1) + 2(n-2) + \cdots + 2.2 + 2 = n^2$$

dir ve bu nedenle $n = 2,3, \ldots$ için $|a_n| \leq n$ olur.

f, Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olduğunda verilen $n \geq 2$ için $|a_n| = n$ olduğunu görmek zor değildir. Bu da ispatı tamamlar.

Konvekse yakın fonksiyonlar hakkında temel sonuçlardan biri Kaplan (1952) tarafından elde edilen geometrik karakterizasyondur. Bu ispat aşağıdaki temel gerçekleri gerektirir.

Lemma 3.4.5: $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ye aşağıdaki şartları sağlasın:

$$v(t + 2\pi) - v(t) = 2\pi, \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$v(t_1) - v(t_2) < \pi, \qquad t_1 < t_2$$

O halde $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ye azalan olmayan fonksiyonu vardır öyle ki

$$\omega(t+2\pi)-\omega(t)=2\pi, \quad t\in\mathbb{R}$$

ve

$$|\omega(t)-v(t)|\le \pi/2, \qquad t\in\mathbb{R}$$

İspat: $\omega(t)=\sup_{s\le t} v(s)-\pi/2$ olsun. ω nin $\mathbb{R}$ de azalan olmayan fonksiyon olduğu aşikardır ve

$$v(t+2\pi)-v(t)=2\pi, \quad t\in\mathbb{R}$$

olduğundan

$$\omega(t+2\pi)=\sup_{s\le t} v(s+2\pi)-\pi/2=\omega(t)+2\pi$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$v(s)<v(t)+\pi, \qquad s<t$$

olduğundan

$$\omega(t)\le v(t)+\pi/2$$

olduğunu görürüz. Ayrıca

$$v(t)\le \sup_{s\le t} v(s)=\omega(t)+\pi/2$$

bağıntısını buluruz. Yukarıdaki görüşlerin birleşiminden istenilen

$$|\omega(t)-v(t)|\le \pi/2$$

sonucu çıkar.

Teorem 3.4.6: f, U da $f(0)=f'(0)-1=0$ olacak şekilde lokal yalınkat fonksiyon olsun. f konvekse yakın fonksiyon ise ancak ve ancak her $r\in(0,1)$ için

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} Re\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]d\theta>-\pi, \qquad z=re^{i\theta} \tag{3.4.3}$$

dır ve θ_1, θ_2 reel değerlerinin her biri için $0\le \theta_2-\theta_1\le 2\pi$ dir.

İspat: Varsayalım ki f konvekse yakın fonksiyon olsun. O halde

$$Re\left[\frac{f'(z)}{h'(z)}\right] > 0\ , \quad z \in U$$

$$\left|arg\left[\frac{f'(z)}{h'(z)}\right]\right| < \frac{\pi}{2}$$

olacak şekilde h konveks fonksiyonu vardır.

$f'(z) \neq 0$ ve $h'(z) \neq 0$ olduğundan aşağıdaki gibi argümentin dalını seçebiliriz

$$|argf'(z) - argh'(z)| < \frac{\pi}{2} \qquad z \in U$$

$a(z) = argf'(z)$ ve $b(z) = argh'(z)$ olsun. $0 < r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, $z = re^{i\theta}$ için

$$V(r,\theta) = a\left(re^{i\theta}\right) + \theta = arg\left[re^{i\theta}f'\left(re^{i\theta}\right)\right]$$

ve

$$W(r,\theta) = b\left(re^{i\theta}\right) + \theta = arg\left[re^{i\theta}h'\left(re^{i\theta}\right)\right]$$

olsun. Buradan

$$|V(r,\theta) - W(r,\theta)| < \frac{\pi}{2}$$

elde ederiz.

h konveks fonksiyon olduğundan $W(r,\theta)$, θ nın artan fonksiyonudur. Harmonik fonksiyonlar için minimum prensibinden $\frac{\partial\omega}{\partial\theta}(r,\theta) > 0$ almalıyız. Önceki eşitsizlikler ile bu yorumların birleşiminden $0 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$ için

$$V(r,\ \theta_1) - V(r,\ \theta_2) = [\,V(r,\ \theta_1) - W(r,\ \theta_1)] + [\,W(r,\ \theta_1) - W(r,\ \theta_2)] + [\,W(r,\ \theta_2) - V(r,\ \theta_2)]$$

$$\leq [V(r,\ \theta_1) - W(r,\ \theta_1)] + [\,W(r,\ \theta_2) - V(r,\ \theta_2)] < \pi$$

elde ederiz. Buradan

$$V(r,\ \theta_2) - V(r,\ \theta_1) > -\pi$$

$$arg\left[re^{i\theta_2}f'\left(re^{i\theta_2}\right)\right] - arg\left[re^{i\theta_1}f'\left(re^{i\theta_1}\right)\right] > -\pi$$

olur. Bu eşitsizlik (3.4.3) e eşdeğerdir. Bu da ispatın birinci bölümünü tamamlar.

Tersine olarak varsayalım ki f, U da lokal yalınkat olsun ve (3.4.3) ü sağlasın. f in konvekse yakın olduğunu ispatlamalıyız. Bu amaç için $\rho \in (0,1)$ alalım ve

$$v_\rho(\theta) = V(\rho,\theta) = arg\left[\rho e^{i\theta}f'\left(\rho e^{i\theta}\right)\right] = \theta + arg\left[f'\left(\rho e^{i\theta}\right)\right]$$

olsun. (3.4.3) şartı

$$v_\rho(\theta_1) - v_\rho(\theta_2) < \pi, \qquad \theta_1 < \theta_2$$

ye eşdeğerdir. $f'(z) \neq 0$, $z \in U$ olduğundan $arg\left[f'\left(\rho e^{i\theta}\right)\right]$, θ da 2π peryodu ile periyodik olmalıdır. Bu yüzden

$$v_\rho(\theta + 2\pi) - v_\rho(\theta) = V(\rho, \theta + 2\pi) - V(\rho,\theta) = 2\pi$$

dir. Lemma 3.4.5 teki görüşe göre $\omega_\rho(\theta)$ azalan olmayan fonksiyonu vardır öyle ki

$$\omega_\rho(\theta + 2\pi) - \omega_\rho(\theta) = 2\pi$$

ve

$$\left|\omega_\rho(\theta) - v_\rho(\theta)\right| \leq \frac{\pi}{2}, \qquad \theta \in \mathbb{R} \tag{3.4.4}$$

dir.

Şimdi $P_\rho(r,\theta)$, U_ρ dairesi için Poisson çekirdeği olsun.

$$P_\rho(r,\theta) = \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r\cos\theta + r^2}, \qquad r < \rho$$

ve U_ρ da Poisson integrali ile verilen b_ρ harmonik fonksiyonunu

$$b_\rho(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(r,\theta - s)\left[\omega_\rho(s) - s\right]ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(r,t)\left[\omega_\rho(t+\theta) - (t+\theta)\right]dt$$

olarak düşünelim. Ayrıca

$$W_\rho(r,\theta) = b_\rho(r,\theta) + \theta$$

olsun. $tP_\rho(r,t)$, t nin tek fonksiyonudur ve

$$W_\rho(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(r,t)\,\omega_\rho(t+\theta)dt \qquad (3.4.5)$$

görürüz. Buradan $W_\rho(r,\theta)$ nın her bir $r < \rho$ sabiti için θ da artan fonksiyon olduğunu görürüz. Gerçekten $\theta_1 < \theta_2$ için $\omega_\rho(\theta)$, θ nın artan fonksiyonu olduğu düşüncesini kullanarak

$$W_\rho(r,\theta_2) - W_\rho(r,\theta_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(r,t)\left[\omega_\rho(t+\theta_2) - \omega_\rho(t+\theta_1)\right]dt \geq 0$$

elde ederiz. Bu yüzden

$$\frac{\partial W_\rho}{\partial \theta}(r,\theta) \geq 0$$

dır ve bu eşitsizlik kesin sağlanır, çünkü bu türev harmonik fonksiyondur.

Diğer taraftan (3.4.4) ten

$$\left|V_\rho(r,\theta) - \omega_\rho(\theta)\right| \leq \frac{\pi}{2}$$

elde ederiz. $V(r,\theta) - \theta = argf'\left(re^{i\theta}\right)$, U_ρ da harmonik fonksiyon olduğundan (3.4.5) teki düşünceden

$$V(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(r,t)\,V(\rho,t+\theta)dt, \qquad r < \rho$$

olduğunu gösterir. (3.4.5) i kullanarak ve daha önceki bağıntılardan $r < \rho$ için

$$\left|V(r,\theta) - W_\rho(r,\theta)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(r,t)\left|V(\rho,t+\theta) - \omega_\rho(t+\theta)\right|dt \leq \frac{\pi}{2}$$

elde ederiz.

Şimdi g_ρ: $U_\rho \to \mathbb{C}$, $z = re^{i\theta}$ için $Re\, g_\rho(0) = 0$ ve $\mathrm{I}m g_\rho(z) = b_\rho(r,\theta)$ şartlarını sağlayan holomorf bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$$h_\rho(z) = \int_0^z e^{g_\rho(\zeta)}\,d\zeta \ , \qquad z \in U_\rho$$

olsun. O halde U_ρ üzerinde h_ρ fonksiyonu holomorftur ve $h_\rho(0) = 0$ ve $\left|h'_\rho(0)\right| = 1$ dir. Ayrıca h_ρ , U_ρ da konvekstir. Gerçekten $r < \rho,\ z = re^{i\theta}$ için

$$Re\left[1 + \frac{zh''_\rho(z)}{h'_\rho(z)}\right] = 1 + Re\left[zg'_\rho(z)\right] = 1 + \frac{\partial b_\rho}{\partial\theta}(r,\theta) = \frac{\partial W_\rho}{\partial\theta}(r,\theta) > 0$$

elde ederiz.

Sonuç olarak

$$V(r,\theta) = \theta + argf'\left(re^{i\theta}\right)$$

$$W_\rho(r,\theta) = \theta + b_\rho(r,\theta) = \theta + \mathrm{I}mg_\rho\left(re^{i\theta}\right) = \theta + argh'_\rho\left(re^{i\theta}\right)$$

ve

$$\left|V(r,\theta) - W_\rho(r,\theta)\right| \leq \pi/2$$

den dolayı

$$\left|argf'(z) - argh'_\rho(z)\right| \leq \frac{\pi}{2}, \quad z = re^{i\theta}\ ,\ r < \rho$$

veya eşdeğer olarak

$$Re\left[\frac{f'(z)}{h'_\rho(z)}\right] \geq 0\ , \qquad |z| < \rho$$

sonucunu buluruz. Harmonik fonksiyonlar için minimum prensibinden

$$Re\left[\frac{f'(z)}{h'_\rho(z)}\right] > 0\ , \qquad |z| < \rho$$

almalıyız.

Daha ileri olarak $h_\rho(0) = 0$, $\left|h'_\rho(0)\right| = 1$ ve h_ρ konveks fonksiyon olduğundan, her $m \in \mathbb{N}$ için $\left\{h_{\rho_n}\right\}_{n\geq m}$ ailesi, $\rho_n = 1 - 1/n$ olduğunda U_{ρ_m} dairesinde konveks fonksiyonların bir ailesidir. Bu yüzden Montel' in teoremini ve köşegen dizi argümentini kullanarak $\rho < 1$ ile her U_ρ dairesinde düzgün yakınsak $\left\{h_{\rho_{n_k}}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ altdizisini elde ederiz. h limit fonksiyonu U da konvekstir ve $z \in U$ için

$$Re\left[\frac{f'(z)}{h'(z)}\right] \geq 0, \qquad z \in U$$

sağlar. Tekrar harmonik fonksiyonlar için minimum prensibini kullanarak

$$Re\left[\frac{f'(z)}{h'(z)}\right] > 0, \qquad z \in U$$

sonucunu buluruz ve bu yüzden $f,\ h$ a göre konvekse yakındır. Bu da ispatı tamamlar.

Birim dairede konvekse yakın fonksiyonlar hakkında bazı yorumlar ile bu bölümü tamamlayacağız.

Teorem 3.4.6 nın Geometrik Yorumları: f normalize konvekse yakın bir fonksiyon ve $0 < r < 1$ olsun. Γ_r eğrisi $|z| = r$ çemberinin görüntüsü olsun. Eğer $\overrightarrow{T_1}$ ve $\overrightarrow{T_2}$ sırasıyla $f\left(re^{i\theta_1}\right)$ ve $f\left(re^{i\theta_2}\right)$ de Γ_r ye birim teğet vektörler ise, o halde (3.4.3) bağıntısı

$$arg\overrightarrow{T_2} - arg\ \overrightarrow{T_1} > -\pi\ , \qquad 0 \leq\ \theta_2 -\ \theta_1 \leq 2\pi$$

ye eşdeğerdir.

Γ_r Jordan eğrisi, U da saat yönünde dönmez. $\theta,\ [0,2\pi]$ aralığında artan ise teğet vektörü π ye eşit veya π den daha geniş bir açı arasında dönmez.

Lineer Olarak Erişilebilir Bölgeler: Konvekse yakın fonksiyonların başka bir geometrik yorumu Lewandowski' nin (1958) çalışmalarından elde edilebilir. Biernacki (1936) da lineer olarak erişilebilir fonksiyonlar fikrini ortaya çıkardı ve Lewandowski 1958 de konvekse yakın ve lineer erişilebilirliğin eşdeğer olduğunu gösterdi. Eğer Ω nın tümleyeni ışınların veya yarı doğruların birleşimi ise $\Omega \subset \mathbb{C}$ bölgesi geniş olarak lineer erişilebilirdir. Böyle bir bölge basit bağlantılı bölgedir. Eğer $f,\ U$ da yalınkat fonksiyon ve $f(U)$ geniş olarak lineer erişilebilir bir bölge ise, f fonksiyonu geniş olarak lineer erişilebilirdir.

Eğer Ω bölgesinin tümleyeni kopuk ışınların birleşimi ise Ω kesin olarak lineer erişilebilirdir. U da yalınkat olan ve U da böyle bir fonksiyon üzerine konform dönüşen bir fonksiyona kesin olarak lineer erişilebilir fonksiyon denir. Biernacki şartların ikisini ortaya attı, fakat ikincisi üzerine çalıştı. Lewandowski' ye göre eğer f konvekse yakın ise ancak ve ancak f kesin olarak lineer erişilebilirdir.

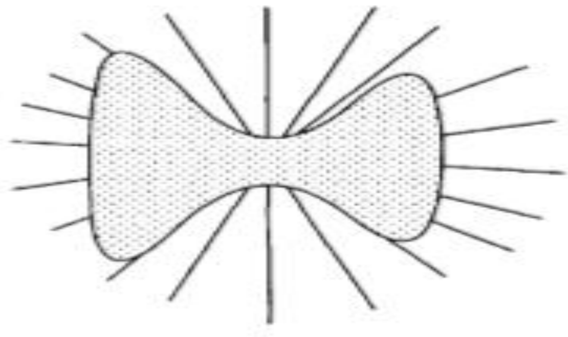
Bielecki ve Lewandowski (1962) daha sonra kısa ve seçkin olan Lewandowski teoreminin ispatını buldu. Bu Loewner zinciri teriminde konvekse yakın fonksiyonların başka önemli analitik karakterizasyonlarına dayanır. Başka önemli bir ispat da Koepf (1989) tarafından verilmiştir.

Sheil-Small (1973) tarafından kesin olarak lineer erişilebilir fonksiyonların bazı ilgi çekici sonuçlarını içeren çalışmalar vardır. Bir sonraki sonuç Kaplan' ın teoremi ile kıyaslanabilir.

Teorem 3.4.7: Holomorf ve U da yalınkat olan bir f fonksiyonu geniş olarak lineer erişilebilirdir ancak ve ancak her r için $0 < r < 1$ ve her $z_0 \in U$ için $\theta_2 > \theta_1$ olduğunda

$$\frac{1}{2}\theta_2 + arg\frac{f(re^{i\theta_2}) - f(z_0)}{re^{i\theta_2} - z_0} - \frac{1}{2}\theta_1 - arg\frac{f(re^{i\theta_1}) - f(z_0)}{re^{i\theta_1} - z_0} > -\pi$$

elde ederiz.



Şekil 3.6: Bir konvekse yakın bölge lineer erişilebilirdir

Bir sonraki teorem konvekse yakın tanımına az çok benzer olan bir şartı verir, g fonksiyonu $z_0 \in U$ noktası hariç aşağıdaki sonuca bağlıdır (Sheil ve Small 1973 bak).

Teorem 3.4.8: Holomorf ve U da yalınkat olan bir f fonksiyonu geniş olarak lineer erişilebilirdir ancak ve ancak her sabit $z_0 \in U$ noktasında $1/2$ mertebeden yıldızıl $g(z) = g_{z_0}(z)$ fonksiyonu vardır ve

$$Re\left[\frac{z\big(f(z) - f(z_0)\big)}{g(z)(z - z_0)}\right] > 0, \qquad z \in U$$

eşitsizliğini sağlar.

Uyarmalıyız ki yukarıda g fonksiyonunun normalize olması gerekmez. Eğer

$$h(z) = z_0 g'(0) + (z - z_0)\frac{g(z)}{z}\ , \qquad z \in U \tag{3.4.6}$$

olursa, buradan

$$z\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0} = g(z) \tag{3.4.7}$$

dir ve Teorem 3.4.8 den eşitsizlik

$$Re\left[\frac{f(z)-f(z_0)}{h(z)-h(z_0)}\right] > 0 \tag{3.4.8}$$

ye eşdeğerdir.

Eğer f konvekse yakın ise bazı h konveks fonksiyonları için (3.4.8) sağlanır. Bu durumda da eğer (3.4.7) ile $g(z) = g_{z_0}(z)$ tanımlarsak g, $1/2$ mertebeden yıldızıldır ve bu yüzden Teorem 3.4.8 in şartları sağlanır (Sheil ve Small 1969).

Krzyz (1964) , C kümesi için sıradaki rotasyon teoremini elde etti.

Teorem 3.4.9: $f \in C$ olsun. O halde

$$|arg f'(z)| \leq 4 arcsin|z|, \qquad z \in U$$

dir. Bu tahmin kesindir.

Krzyz (1962) , S kümesi için konvekse yakın r_{cc} yarıçapını da buldu. r_{cc} için $0{,}80 < r_{cc} < 0{,}81$ olacak şekilde kesin denklemin tek çözümü olduğunu gösterdi.

3.4.2 Birim Dairede Spirallike Fonksiyonlar

Bu bölümde birim dairede yalınkat fonksiyonların başka bir altsınıfı olan spirallike (sarmal) fonksiyonları inceleyeceğiz. Bu sınıf 1933 te Spacek (1932) tarafından ortaya çıktı.

$\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ olsun. ω_0 sıfır olmayan kompleks bir sayı olmak üzere, logaritmik $\alpha -$spiral

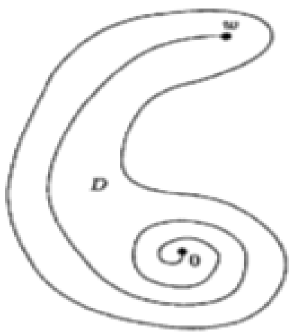
$$\omega = \omega_0 exp\left(-e^{-i\alpha}t\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

ile verilen bir eğridir. Bu yüzden eğer $\omega = \omega(t)$ logaritmik $\alpha -$spiral ise

$$\mathrm{I}m\left[e^{i\alpha} \log \omega(t)\right] = sabit, \qquad t \in \mathbb{R}$$

dir.

D, $\mathbb{C}$ de $0 \in D$ olacak şekilde bir bölge olsun. . Eğer her $\omega \in D$ için , w den uzanan $\alpha -$spiral yay orjinle birleşirse D, $\alpha -$spirallike bölgedir.



Şekil 3.7: Spirallike bölge

Eğer her $\omega = \omega(t)$ $\alpha -$ logaritmik spirali tek bir noktada γ ile kesişirse, γ kapalı eğrisi logaritmik olarak $\alpha -$tipinde spirallikedır. Böyle bir γ eğrisi, Jordan eğrisi olmalıdır ve γ ile sınırlı Ω bölgesi, $\alpha -$tipinde spirallike bölgedir.

$f : U \to \mathbb{C}$, U da $f(0) = 0$ olacak şekilde holomorf bir fonksiyon ve $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ olsun. Eğer f , U da yalınkat ve $f(U)$, $\alpha -$tipinde spirallike bölge ise f , $\alpha -$tipinde spirallikedır. $\alpha -$tipinde normalize spirallike fonksiyonların sınıfını $\widehat{S_\alpha}$ ile tanımlayalım. Eğer f bazı $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ için $\alpha -$tipinde spirallike ise f spirallikedır. $0 -$ spirallike fonksiyonların yıldızıl olduğu aşikardır.

Aşağıdaki teorem Spacek (1932) tarafından birim dairede $\alpha -$tipinde spirallike fonksiyonlar için gerek ve yeter koşulları sağlar. Analitik olmayan fonksiyonların durumuna başvurarak elde edilen Al-Amiri ve Mocanu' nun (1981) metotlarını kullanacağız. Loewner zinciri metodunu kullanarak Teorem 3.4.10 un başka bir ispatını vereceğiz.

Teorem 3.4.10: $f : U \to \mathbb{C}$ ye $f(0) = 0$ ve $f'(0) \neq 0$ olacak şekilde holomorf bir fonksiyon olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < \pi/2$ olsun. $f,\ \alpha -$tipinde spirallike ise ancak ve ancak

$$Re\ \left[e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0\ , \qquad z \in U \tag{3.4.9}$$

dır.

İspat: İlk olarak f , (3.4.9) u sağlasın. $z \in U \setminus \{0\}$ için $f(z) \neq 0$ dır ve $z \in U, f'(z) \neq 0$ olmak üzere f , U da lokal yalınkattır. $r \in (0,1)$ için $\Gamma_r = f(\partial U_r)$ olsun. Burada Γ_r eğrisinin Jordan eğrisi ile kesişmediğini ispatlayacağız. Bu f in yalınkatlığı anlamına gelecektir. $\varphi \in [0,2\pi]$ için $\{\gamma_\varphi\}$

$$\gamma_\varphi(t) = e^{i\varphi} exp\left(-e^{-i\alpha}t\right) = e^{-t\cos\alpha} e^{i(\varphi + t\sin\alpha)}\ , \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.4.10}$$

ile tanımlı spirallerin ailesi olsun.

Her $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ noktası $\{\gamma_\varphi\}$ ailesinin tam olarak bir spiralinde uzanır. Bu yüzden $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$ için

$$f(z) = \gamma_\varphi(t) \tag{3.4.11}$$

denklemi tek $\varphi = \varphi(r,\theta) \in [0,2\pi)$ yi sağlar.

Önce Γ_r nin her $r \in (0,1)$ için Jordan eğrisi olduğunu gösterelim. Bu amaç için toplam varyasyon Var olarak temsil edilirse

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\ (r,\theta) > 0 \tag{3.4.12}$$

ve

$$Var_{0\leq\theta<2\pi}\varphi(r,\theta) = 2\pi \tag{3.4.13}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. (3.4.10) ve (3.4.11) den kolayca

$$-t\cos\alpha = \log|f(z)| \tag{3.4.14}$$

ve

$$\varphi + t\sin\alpha = argf(z) \tag{3.4.15}$$

elde ederiz. Bu yüzden

$$\varphi = \ argf(z) + \tan\alpha\log|f(z)| \tag{3.4.16}$$

ve buradan da

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}argf\left(re^{i\theta}\right) + \tan\alpha\frac{\partial}{\partial\theta}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|$$

$$= Re\ \left[\frac{re^{i\theta}f'\left(re^{i\theta}\right)}{f(re^{i\theta})}\right] - \tan\alpha Im\left[\frac{re^{i\theta}f'\left(re^{i\theta}\right)}{f(re^{i\theta})}\right]$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}Re\ \left[e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right], \qquad z = re^{i\theta}$$

olur.

(3.4.9) ve yukarıdaki bağıntı göz önüne alınarak (3.4.12) elde edilir. Ayrıca $0 < |z| < 1$, $f(z) \neq 0$ olduğundan, $0 < r < 1$ için Γ_r eğrisinin $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da holomorf olduğu sonucuna varırız. Bu nedenle Γ_r eğrisinin her $r \in (0,1)$ için orjine göre aynı göstergesi vardır. Fakat f lokal yalınkattır ve orjinin komşuluğunda yön koruyandır. Bu yüzden Γ_r eğrisinin sıfıra göre yeterince küçük r göstergesi 1' dir. Bu nedenle Γ_r boyunca argümentin toplam varyasyonu 2π dir. (3.4.16) dan ve bu sonuçtan her $r \in (0,1)$ için

$$Var_{0\leq\theta<2\pi}\varphi(r,\theta) = Var_{0\leq\theta<2\pi}argf\left(re^{i\theta}\right) = 2\pi$$

elde ederiz.

Her $r \in (0,1)$ için ispat gerçeklenir, Γ_r logaritmik olarak $\alpha-$tipinde spirallike Jordan eğrisidir.

Geriye f in U da yalınkat olduğunu göstermek kalıyor. $r_1, r_2 \in (0,1)$ ve $r_1 \neq r_2$ için $\Gamma_{r_1} \cap \Gamma_{r_2} = \emptyset$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bu amaç için $\varphi \in [0,2\pi)$ olsun.

$$f(z) = \gamma_\varphi(t), \qquad |z| = r, \quad 0 < r < 1$$

sistemini düşünerek bir tek $z = re^{i\theta}$, $\theta = \theta(r)$ çözümü ve bir tek $t = t(r,\theta) = t(r)$ çözümü elde ederiz. Sadece $r \in (0,1)$ için $\frac{dt}{dr} < 0$ olduğunu göstermemiz gerekiyor. (3.4.14) ve (3.4.15) bağıntılarının r ye göre diferansiyelini alırsak

$$-\frac{dt}{dr}\cos\alpha = \frac{1}{r}Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] - \frac{d\theta}{dr}\mathrm{Im}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]$$

$$\frac{dt}{dr}\sin\alpha = \frac{1}{r}\,\mathrm{Im}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] + \frac{d\theta}{dr}Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]$$

elde ederiz. Yukarıdaki eşitliklerde $\frac{d\theta}{dr}$ yi yok edersek

$$-|f(z)|^2\frac{dt}{dr}\,Re\left[e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] = r|f'(z)|^2$$

elde ederiz. Eğer hipotezi kullanırsak istenilen $\frac{dt}{dr} < 0$ sonucunu buluruz.

f in U da yalınkat olduğunu gösterdik ve her $f(U_r)$ bölgesi $\alpha-$tipinde spirallikedır. $f(U) = \bigcup_{0<r<1} f(U_r)$ olduğundan $f(U)$, $\alpha-$tipinde spirallike bölgedir ve ispatın birinci bölümü tamamlanır.

Tersine olarak varsayalım ki f, $\alpha-$tipinde spirallikedır. Her $z \in U$ için f dizisi orjinde $f(z)$ ile birleşen $\alpha-$ spiral yayı içeren bölgedir. Bu her $t \geq 0$ için $f(z)exp\left(-e^{-i\alpha}t\right) \in f(U)$ dir.

$$\gamma(z,t) = f^{-1}\left(f(z)exp\left(-e^{-i\alpha}t\right)\right), \quad 0 \leq t < \infty \qquad (3.4.17)$$

olsun.

O halde $\gamma(z,0)=z$ ve her t sabiti için $\gamma(z,t)$, $\gamma(0,t)=0$ olacak şekilde U da kendi üzerine dönüşen analitik bir dönüşümdür. Schwarz lemmasına göre $|\gamma(z,t)| \leq |z|$ dir. Ayrıca (3.4.17) nin her iki tarafının diferansiyelini alırsak

$$f'(\gamma(z,t))\frac{\partial\gamma}{\partial t}(z,t) = -e^{-i\alpha}\, exp\left(-e^{-i\alpha}t\right)f(z)$$

elde ederiz ve buradan $t=0$ için

$$e^{-i\alpha}\frac{f(z)}{zf'(z)} = -\frac{\frac{\partial\gamma}{\partial t}(z,0)}{z}$$

elde ederiz. (3.4.9) u göstermek için

$$Re\left[\frac{1}{z}\frac{\partial\gamma}{\partial t}(z,0)\right] \leq 0$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. $|\gamma(z,t)| \leq |z|$ olduğundan

$$Re\left[\frac{1}{z}\frac{\partial\gamma}{\partial t}(z,0)\right] = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}Re\left[\frac{\gamma(z,t)}{z}-1\right] \leq 0$$

sonucunu elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

Spirallike fonksiyonların benzer karakterizasyonunu kullanarak S^* ve $\widehat{S_\alpha}$ sınıfları arasındaki benzerlikleri veren teoremi verebiliriz. Bu sonuç birim dairede spirallike fonksiyonların birçok örneklerini sağlar.

Teorem 3.4.11: $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ ve $\beta = e^{-i\alpha}\cos\alpha$ olsun. $f \in \widehat{S_\alpha}$ ise ancak ve ancak $g \in S^*$ vardır öyle ki

$$f(z) = z\left(\frac{g(z)}{z}\right)^{\beta}, \qquad z \in U \tag{3.4.18}$$

dır. Kuvvet fonksiyonunu dalı $\left.\left(\frac{g(z)}{z}\right)^{\beta}\right|_{z=0}$=1 olarak seçilir.

İspat: İlk olarak $f \in \widehat{S_\alpha}$ olduğunu varsayalım. Açık olarak (3.4.18)

$$g(z) = z\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{e^{i\alpha}/\cos\alpha}, \quad z \in U$$

ifadesine eşdeğerdir. Kuvvet fonksiyonunun dalını $\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{e^{i\alpha}/\cos\alpha}\Big|_{z=0} = 1$ olarak seçeriz. Basit hesaplamalar

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = (1 + i\tan\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} - i\tan\alpha, \quad z \in U$$

bağıntısını sağlar. Bu yüzden $f,\ \alpha -$tipinde spirallike olduğundan

$$Re\frac{zg'(z)}{g(z)} = \frac{1}{\cos\alpha} Re\left[e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0\,, \quad z \in U$$

dır. Böylece g yıldızıldır.

Tersine olarak, eğer $g \in S^*$ ise yukarıdaki bağıntıdan ve $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ den

$$Re\left[e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0\,, \quad z \in U$$

sonucu çıkar. Teorem 3.4.10 dan $f,\ \alpha -$tipinde spirallikedır. Bu da ispatı tamamlar.

(3.4.18) i kullanarak

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^{2e^{-i\alpha}\cos\alpha}}\ , \ z \in U$$

fonksiyonu $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ tipinde spirallikedır. Bu fonksiyona $\alpha -$ spiral Koebe fonksiyonu denir ve birim daireyi logaritmik $\alpha -$ spiral yayın tümleyeni üzerine dönüştürür.

Teorem 3.4.11 in direk sonucu olarak $\widehat{S_\alpha}$ daki fonksiyonların ikinci mertebeden katsayıları için sınır kesindir. $\alpha -$tipinde spirallike fonksiyonların diğer katsayılarının kesin tahminleri için (Goodman 1983, vol.1,s.151) i inceleyebilirsiniz.

Sonuç 3.4.12: $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots$ fonksiyonu $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ tipinde spirallike bir fonksiyon olsun. O halde $|a_2| \leq 2\cos\alpha$ dır. Bu sınır kesindir. Eşitliğe $\alpha -$ spiral Koebe fonksiyonu için ulaşılır.

İspat: $f \in \widehat{S_\alpha}$ olduğundan, $g \in S^*$ fonksiyonu vardır öyle ki $\beta = e^{-i\alpha}\cos\alpha$ olduğunda

$$f(z) = z\left(\frac{g(z)}{z}\right)^{\beta}, \qquad z \in U$$

dır. $g(z) = z + b_2 z^2 + \cdots$ olsun. Kuvvet serilerinin açılımında katsayıları özdeşleştirirsek, $a_2 = b_2\beta$ olduğunu kolayca görürüz. Teorem 3.2.16 göz önüne alınırsa, istenilen bu sonucu elde ederiz.

3.4.3 Birim Dairede Φ −like Fonksiyonlar

Bu bölümde Φ −like fonksiyonları kısaca anlatacağız. Bu fikir 1973 te Brickman (1973) tarafından yıldızıl ve spirallike fonksiyonların genelleştirilmesi olarak elde edildi. Loewner gibi derin bir yol alarak değil, sadece bazı diferansiyel denklemleri kullandı. Ortaya çıkan otonom diferansiyel denklemler ve sadece en temel varlık ve teklik teoremlerine ihtiyaç duydu. Yalınkatlık için gerek ve yeter koşul Sonuç 3.4.17 den elde edildi. Yalınkatlık için yeter şart 1959 da Kas' yanyuk (1959) tarafından farklı bir metod kullanılarak elde edildi. Sonuç 3.4.17 nin başka ispatı Avkhadiev ve Aksent' ev (1975, Teo.25) tarafından verildi. Bağlantılı sonuçlar Rahmanov (1954) tarafından elde edildi. Burada Brickman' nın (1973) metodunu kullanacağız.

Tanım 3.4.13: $f,\ U$ da $f(0) = 0$ ve $f'(0) \neq 0$ olacak şekilde holomorf bir fonksiyon olsun. Φ, $f(U)$ da $\Phi(0) = 0$ ve $Re\,\Phi'(0) > 0$ olacak şekilde holomorf bir fonksiyon olsun. Eğer

$$Re\left[\frac{zf'(z)}{\Phi(f(z))}\right] > 0\ , \quad z \in U \tag{3.4.19}$$

ise $f,\ U$ da Φ −like fonksiyondur.

Eğer yukarıdaki tanımda $\Phi(\omega) \equiv \omega$ ise f yıldızıldır ve eğer $\Phi(\omega) = \lambda\omega$, $Re\lambda > 0$ ise $\alpha = -arg\lambda$ olduğunda $f,\ \alpha$ −tipinde spirallike fonksiyondur.

Tanım 3.4.14: Ω, $\mathbb{C}$ de $0 \in \Omega$ olmak üzere bir bölge olsun. Φ , Ω da $\Phi(0) = 0$ ve $Re\,\Phi'(0) > 0$ olacak şekilde holomorf bir fonksiyon olsun. $t \geq 0$ için $\omega(t) \in \Omega$ ve $t \to \infty$ için $\omega(t) \to 0$ olacak şekilde her $\omega_0 \in \Omega$ noktasının

$$\frac{d\omega}{dt} = -\,\Phi(\omega)\,, \qquad \omega(0) = \omega_0 \qquad (3.4.20)$$

başlangıç değer probleminin $t \geq 0$ için tanımlı $\omega(t)$ çözümü varsa Ω , Φ −likedır deriz.

Eğer (3.4.20) nin bir çözümü var ise bu çözüm tektir. Başka bir deyişle, eğer $\Phi(\omega) \equiv \omega$ ise (3.4.20) nin çözümü $\omega(t)$=$\omega_0 e^{-t}$ dir. Bu yüzden Ω , bir Φ −like bölgedir ancak ve ancak Ω orjine göre yıldızıldır. Eğer $\Phi(\omega) \equiv \lambda\omega$, $Re\lambda > 0$ ise $\omega(t)$=$\omega_0 e^{-\lambda t}$ dir. Bu yüzden Ω , bir Φ −like bölgedir ancak ve ancak $\alpha = -arg\lambda$ olduğunda Ω , $\alpha -$ spirallikedır.

Φ −like fonksiyonlar ve Φ −like bölgelerin önemi Brickman' ın (1973) bir sonraki sonucunda ortaya çıktı. Bunun için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız var.

Lemma 3.4.15: p, U da $Re\, p(z) > 0$, $z \in U$ olacak şekilde holomorf bir fonksiyon olsun. Her sabit $z \in U$ için

$$\frac{dv}{dt} = -vp(v), \qquad v(0) = z \qquad (3.4.21)$$

başlangıç değer probleminin her $t \geq 0$ için $v(t) = v(z,t)$ tek bir çözümü vardır öyle ki $|v(z,t)|$, $t \in [0,\infty)$ nin kesin azalan bir fonksiyonudur ve $t \to \infty$ iken $v(z,t) \to 0$ dır.

İspat: İspatın detayları için Loewner diferansiyel denklemi için daha genel varlık ve teklik teoremlerine bakarız. $t \to \infty$ için çözümlerin davranışına

$$\frac{d}{dt}|v|^2 = -2|v|^2 Re\, p(v)$$

den ulaşabiliriz.

Teorem 3.4.16: f , Φ −like bir fonksiyon olsun. f, U da yalınkat ise Φ −like bölgedir.

İspat: $z \in U$, $p(z) = \frac{\Phi f(z)}{zf'(z)}$ olsun. (3.4.19) dan p , U da holomorftur ve $Re\, p(z) > 0$ dır. $z \in U$ alırsak, $t \geq 0$ için $v(t) = v(z,t)$

$$\frac{dv}{dt} = -vp(v), \qquad v(0) = z$$

başlangıç değer probleminin çözümü olsun. Bu çözüm vardır ve Lemma 3.4.15 ten dolayı tektir. $v(z,t) \in U$ olduğundan $t \geq 0$ için $\omega_z(t) = \omega(z,t) = f\big(v(z,t)\big)$, tanımlayabiliriz. Kısa hesaplamalarla ω_z

$$\frac{d\omega_z}{dt} = -\,\Phi(\omega_z)\,, \qquad \omega_z(0) = f(z) \tag{3.4.22}$$

başlangıç değer probleminin tek çözümüdür. Sonra Lemma 3.4.15 in sonucu kullanılarak

$$\lim_{t\to\infty} \omega_z(t) = \lim_{t\to\infty} f\big(v(z,t)\big) = f(0) = 0$$

sonucu bulunur. Bu sebeple $f(U)$, $\Phi -$like bölgedir.

f in yalınkat olduğunu göstermek için $f(a) = f(b)$ olacak şekilde $a,b \in U$ olsun. $\omega_a(t)$ ve $\omega_b(t)$ aynı başlangıç değer probleminin çözümü olsun. $t \geq 0$ için çözümlerin tekliğinden $\omega_a(t) = \omega_b(t)$ veya $f\big(v(a,t)\big) = f\big(v(b,t)\big)$ dir. Ayrıca f in orjinde lokal tersi olduğundan $t \to \infty$ için $v(a,t) \to 0$, $v(b,t) \to 0$ dır. Bunu takiben $t \geq t_0$ için $v(a,t) = v(b,t)$ olacak şekilde $t_0 \geq 0$ vardır. (3.4.21) in çözümlerinin tekliğini tekrar kullanarak, her $t \geq 0$ için $v(a,t) = v(b,t)$ sonucunu elde ederiz. Bu sonuçlar her $t \geq 0$ için tek çözümü olan

$$\frac{dv}{dt} = -vp(v), \quad v(t_0) = v(a,t_0) = v(b,t_0)$$

başlangıç değer probleminin çözümleridir. Bu yüzden $a = v(a,0) = v(b,0) = b$ dir. Bu da f in yalınkat olduğunu gösterir. Teorem 3.4.16 dan yararlanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.4.17: f, U da $f(0) = 0$ olacak şekilde holomorf bir fonksiyon olsun. f, U da yalınkat ise ancak ve ancak bazı Φ ler için f , $\Phi -$likedır.

İspat: Teorem 3.4.16 da $\Phi -$like durumun yalınkat olduğunu ispatladık. Eğer f yalınkat ise bazı Φ ler için f in $\Phi -$like olduğunu göstermek yeterlidir. Bu amaç için U da $Re\, p(z) > 0$ olacak şekilde $p \in H(U)$ olsun ve

$$\Phi\big(f(z)\big) = \frac{zf'(z)}{p(z)}$$

denklemini düşünelim. Bu denklem $\Phi \in H\big(f(U)\big)$, $\Phi'(0) = 1/p(0)$ olacak şekilde bir Φ çözümü sağlar ve

$$Re\left[\frac{zf'(z)}{\Phi\big(\mathrm{f(z)}\big)}\right] > 0, \qquad z \in U$$

dir. Bu yüzden f , $\Phi -$likedır. Teorem 3.4.16 daki görüş bir sonraki sonuç için verilir.

Teorem 3.4.18: $f,\ U$ da $f(0) = 0$ ve $f(U)$, $\Phi -$like olacak şekilde yalınkat bir fonksiyon bir fonksiyon olsun. O halde f , $\Phi -$likedır.

İspat: $f(U)$, $\Phi -$like olduğundan $z \in U$ ve $t \geq 0$ için

$$\frac{d\omega_z}{dt} = -\,\Phi(\omega_z), \qquad \omega_z(0) = f(z) \tag{3.4.23}$$

başlangıç değer probleminin tek çözümü olan $\omega_z(t) = \omega(z,t)$ tanımlayabiliriz. $z \in U$ ve $t \geq 0$ için $v_z(t) = v(z,t) = f^{-1}\big(\omega_z(t)\big)$ olsun. f yalınkat olduğundan $v_z(t)$ iyi tanımlıdır. Basit hesaplamalarla

$$f'\big(v(z,t)\big)\frac{\partial v}{\partial t}(z,t) = -\Phi\big(\omega(z,t)\big)$$

elde ederiz ve $t = 0$ yazarsak

$$\frac{\partial v}{\partial t}(z,0) = -\frac{\Phi\big(\mathrm{f(z)}\big)}{f'(z)}$$

elde ederiz.

$$p(z) = -\frac{1}{z}\frac{\partial v}{\partial t}(z,0) = \frac{\Phi\big(\mathrm{f(z)}\big)}{zf'(z)}, \qquad z \in U$$

olsun. O halde p holomorftur, $Re\,p(0) = Re\,\Phi'(0) > 0$ dır ve $U \setminus \{0\}$ da $Re\,p(z) > 0$ olduğunu ispatlayacağız. $\Phi(z)$ ve $f(z)$=$\omega_z(0)$ holomorf olduğundan, direfansiyel denklemler teorisinde klasik bir teoremde $\omega(z,t)$, $t \geq 0$ için z de holomorftur (Cartan 1967, Teo. 3.3.1 bak). Bu yüzden her $t \geq 0$ için $v(z,t)$ de z de holomorftur. Başka bir taraftan her $z \in U$ ve $t \geq 0$ için $|v(z,t)| < 1$ dir ve $v(0,0) = 0$ dır. Ayrıca (3.4.23) te çözümlerin tekliğinden $\omega_0(0) = 0$, $t \geq 0$ için

$\omega_0(t) = 0$ anlamına gelir, bu yüzden her $t \geq 0$ için $v_0(t) = 0$ dır. Schwarz lemmasına göre $z \in U$ ve $t \geq 0$ için $|v(z,t)| \leq |z|$ dir. Bu yüzden

$$Re\, p(z) = -Re\ \lim_{t\to 0^+} \frac{v(z,t)-z}{tz}$$

$$= -\lim_{t\to 0^+} Re\left\{\frac{1}{t}\left(\frac{v(z,t)}{z} - 1\right)\right\} \geq 0$$

dır. Sonuç olarak $Re\, p(0) > 0$ olduğundan, harmonik fonksiyonlar için minimum prensibinden U da $Re\, p(z) > 0$ almalıyız. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.4.19: $f: U \to \mathbb{C}$ holomorf bir fonksiyon olsun öyle ki $f(0) = 0$ ve $f'(0) \neq 0$ dır. O halde f yıldızıldır ancak ve ancak

$$Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0\,, \quad z \in U$$

ve $f,\ \alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ tipinde spirallikedır ancak ve ancak

$$Re\left[e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0\,, \quad z \in U$$

dır.

Bölüm 3.4 ün çoğu Duren (1983), Goodman (1983), Kaplan (1952), Pommerenke (1975) ten yararlanılarak oluşturulmuştur. Konvekse yakın, spirallike ve Φ −like fonksiyonlarına ait bilgiler için Al-Amiri ve Mocanu (1981), Avkhadiev ve Aksent'ev (1971/1975), Bielecki ve Lewandowski (1962), Biernacki (1936), Brickman (1973), Clunie ve Pommerenke (1966), Goluzin (1952), Hallenbeck ve MacGregor (1984), Kas'yanyuk (1959), Koepf (1989), Krzyz (1962/1964), Lewandowski (1958), Mocanu, Bulboaca ve Salagean (1999), Rahmanov (1954), Robertson (1936/1961), Ruschweyh, Sheil ve Small (1973), Sheil ve Small (1973), Spacek (1932) kaynaklarından yararlanabilirsiniz.

3.5 Harmonik Dönüşümlerin Sınırlı Sınır Rotasyonlarıyla İlişkileri

Ω , $\mathbb{D} = \{\, z|\ |z| < 1\}$ de regüler olan $\Phi(z)$ fonksiyonlarının ailesi olsun ve her $z \in \mathbb{D}$ için $\Phi(0) = 0$, $|\Phi(z)\,| < 1$ şartları sağlansın.

$A, B,\ -1 \leq B < A \leq 1$ keyfi sabit sayıları için $\mathcal{P}(A, B)$ de tanımlanan $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$ fonksiyonlarının ailesi $\mathbb{D}$ de regülerdir öyle ki $p(z),\ \mathcal{P}(A, B)$ nin elemanıdır ancak ve ancak bazı $\Phi(z) \in \Omega$ ve her $z \in \mathbb{D}$ için

$$p(z) = \frac{1 + A\Phi(z)}{1 + B\Phi(z)} \tag{3.5.1}$$

dir. Geometrik olarak $p(z),\ \mathcal{P}(A, B)$ nin elemanıdır ancak ve ancak $p(0) = 1$ dir. $p(\mathbb{D})$, merkezi reel eksende , çapının uç noktaları $\mathbb{D}_1 = p(-1) = (1 - A)/(1 - B)$ ve $\mathbb{D}_2 = p(1) = (1 + A)/(1 + B)$ olan açık dairenin içindedir. Özel seçilmiş A ve B ler $p(0) = 1,\ M > 1/2$ ve $0 < \alpha < 1$ şartları altında tanımlanan eşitsizlikler ile bilinen kümelere öncü olur (Goodman 1983) ve

i) $\mathcal{P}(1, -1)$, $Re\, p(z) > 0$ ile tanımlı kümedir.

ii) $\mathcal{P}(1 - 2\alpha, -1)$, $Re\, p(z) > \alpha$ ile tanımlı kümedir.

iii) $\mathcal{P}(1,0),\ |p(z) - 1| < 1$ ile tanımlı kümedir.

iv) $\mathcal{P}(\alpha, 0),\ |p(z) - 1| < \alpha$ ile tanımlı kümedir.

v) $\mathcal{P}(1, -1 + 1/M),\ |p(z) - M| < M$ ile tanımlı kümedir.

vi) $\mathcal{P}(\alpha, -\alpha)$, $\left|\frac{p(z) - 1}{p(z) + 1}\right| < \alpha$ ile tanımlı kümedir.

$\mathcal{A}$, $\mathbb{D}$ de regüler olan $s(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ formundaki analitik fonksiyonların sınıfı olsun. C , $s(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarının ailesi olsun öyle ki $s(z)$, C nin elemanıdır ancak ve ancak bazı $p(z) \in \mathcal{P}(1, -1)$ ve her $z \in \mathbb{D}$ için

$$1 + z\frac{s''(z)}{s'(z)} = p(z) \tag{3.5.2}$$

C sınıfına konveks fonksiyonlar denir. $s(z)$, $\mathcal{A}$ nın bir elemanı olsun. Eğer

$$z\frac{s'(z)}{s(z)} = p(z) \tag{3.5.3}$$

eşitsizliği bazı $p(z) \in \mathcal{P}(1, -1)$ ve her $z \in \mathbb{D}$ için sağlanırsa, $s(z)$ ye yıldızıl fonksiyon denir. Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı S^* ile ifade edilir. $S^*(A, B)$, $s(z) \in \mathcal{A}$

fonksiyonlarının ailesi anlamına gelir öyle ki $s(z)$, $S^*(A,B)$ nin elemanıdır ancak ve ancak bazı $p(z) \in \mathcal{P}(A,B)$ ve her $z \in \mathbb{D}$ için

$$z\frac{s'(z)}{s(z)} = p(z) \tag{3.5.4}$$

dir. $S^*(A,B)$ sınıfına Janowski yıldızıl fonksiyonlar denir, aşikar olarak $S^*(1,-1) = S^*$ dir (Goodman,1983).

Ayrıca $\mathcal{P}_k(\rho)$, $z = re^{i\theta}$, $k \geq 2$ ve $0 \leq \rho < 1$ olduğunda $p(0) = 1$ ve

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{Re\, p(z)-\rho}{1-\rho}\right| d\theta \leq k\pi \tag{3.5.5}$$

özelliklerini sağlayan $\mathbb{D}$ de tanımlı $p(z)$ analitik fonksiyonlarının sınıfı olsun. $\rho = 0$ olduğunda, Pinchuk (1971) de tanımlı $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_k(0)$ sınıfını elde ederiz ve $k = 2$, $\rho = 0$ için pozitif reel kısımlı fonksiyonların $\mathcal{P}_k(1,-1)$ sınıfını elde ederiz. (3.5.5) i aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$p(z) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+(1-2\rho)ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}d\mu(\theta) \tag{3.5.6}$$

$\mu(\theta)$, $[0,2\pi]$ aralığında sınır varyasyonları ile bir fonksiyondur öyle ki

$$\int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 2\pi \quad \text{ve} \quad \int_0^{2\pi}|d\mu(\theta)| \leq k\pi \tag{3.5.7}$$

dir.

Ayrıca $p(z) \in \mathcal{P}_k(\rho)$ için $p_1(z), p_2(z) \in \mathcal{P}(\rho)$ olduğunda (3.5.5) ten

$$p(z) = \left(\frac{k}{4}+\frac{1}{2}\right)p_1(z) - \left(\frac{k}{4}-\frac{1}{2}\right)p_2(z), \quad z \in \mathbb{D} \tag{3.5.8}$$

yazabiliriz. $\mathcal{P}(\rho)$, ρ dan daha büyük pozitif reel kısımlı fonksiyonların sınıfıdır. $0 \leq \rho < 1$ ile $\mathcal{P}(\rho) = \mathcal{P}(1-2\rho,-1)$ dir. $s(z)$, $\mathcal{A}$ nın bir elemanı olsun ve $\mathbb{D}$ de en fazla $k\pi$ sınırlı rotasyonlarının görüntü bölgesi üzerine konform olarak dönüşen böyle fonksiyonların sınıfı $\mathcal{V}_k$ ile gösterilsin. 1917 de Loewner (1917) sınırlı sınır rotasyonları konseptini buldu, fakat terminolojide kullanmadı. $\mathcal{V}_k$ sınıfını ayrıntılı çalışan ve bunların özelliklerini sistematik olarak geliştiren Paatero (1931) dir. Paatero (1931) , $s(z) \in \mathcal{V}_k$ olduğunu gösterdi ve (3.5.7) de verilen $\mu(\theta)$ olduğunda ancak ve ancak

$$s'(z) = Exp\left[-\int_0^{2\pi} \log\left(1 - ze^{-i\theta}\right) d\,\mu(\theta)\right] \qquad (3.5.9)$$

dir. $k \geq 2$ sabiti için

$$\int_0^{2\pi} \left| Re \frac{\left(zs'(z)\right)'}{s'(z)} \right| d\theta \leq k\pi, \qquad z = re^{i\theta} \qquad (3.5.10)$$

olarak açıklanabilir.

Açık olarak eğer $k_1 < k_2$ ise $\mathcal{V}_{k_1} \subset \mathcal{V}_{k_2}$ dir. k artan olduğundan $\mathcal{V}_k$ sınıfının genişlediği aşikardır. $\mathcal{V}_2$, C konveks yalınkat fonksiyonlarının sınıfı basittir ve Paatero (1931), normalize yalınkat fonksiyonlarının sınıfı olan S için $\mathcal{V}_4 \subset S$ olduğunu gösterdi. Daha sonra Pinchuk (1971), $\mathcal{V}_k$ fonksiyonlarının $\mathbb{D}$ de konvekse yakın olduğunu gösterdi.

$s(z)$, $\mathcal{A}$ nın bir elemanı olsun ve

$$1 + z\frac{s''(z)}{s'(z)} \in \mathcal{P}_k(\rho), \quad (0 \leq \rho < 1)$$

şartını sağlasın. Böyle fonksiyonların sınıfı $\mathcal{V}_k(\rho)$ ile tanımlansın. $\rho = 0$ olduğunda sınırlı sınır rotasyonlarının $\mathcal{V}_k(0) = \mathcal{V}_k$ sınıfını alırız.

Bu çalışmada ρ

$$0 \leq \rho = \frac{1 - A}{1 - B} < 1$$

olarak tanımlıdır.

Sonuç olarak $\mathbb{D}$ açık birim dairesinde f harmonik dönüşüm düzlemi , $\mathbb{D}$ yi $f(\mathbb{D})$ bölgesinin bazı düzlemleri üzerine dönüştüren kompleks değerli harmonik bir fonksiyondur. $\mathbb{D}$ basit bağlantılı bölge olduğundan $h(z)$ ve $g(z)$, $\mathbb{D}$ de analitik olduğunda f in $f = h(z) + \overline{g(z)}$ kanonik ayrışması vardır ve

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n , \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n , \quad a_n,\ b_n \in \mathbb{C}$$

kuvvet serileri ile gösterilir. $h(z)$, f in analitik kısmı ve $g(z)$, f in co-analitik kısmıdır. Harmonik dönüşümler teorisi seçkin ve bütün olarak Duren' in (2004) monografisinde verilir. Lewy, $\mathbb{D}$ de f harmonik dönüşümünün lokal yalınkat olduğunu ispatladı ancak ve ancak Jacobian $J_f = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$ sıfırdan farklıdır. Bu sonuçtaki görüşe göre $\mathbb{D}$ açık birim dairesinde lokal yalınkat fonksiyonlar eğer $|h'(z)| > |g'(z)|$ ise yön koruyan, eğer $|h'(z)| < |g'(z)|$ ise yön korumayandır. Bu çalışmamızı yön koruyan harmonik dönüşümler ile sınırlandıracağız. Ayrıca $f = h(z) + \overline{g(z)}$, $\mathbb{D}$ de yön koruyan ise ancak ve ancak $h'(z)$, $\mathbb{D}$ de yok olmaz ve ikinci dilatasyon $w(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)}$ tüm $z \in \mathbb{D}$ ler için $|w(z)| < 1$ özelliğini sağlar. Bu sebeple $a_0 = b_0 = 0$ ve $a_1 = 1$ ile $\mathbb{D}$ açık birim dairesinde tüm yön koruyan harmonik dönüşümler S_H ile tanımlanacak. Bu yüzden S_H yalınkat fonksiyonların standart S sınıfını kapsar. Tüm $f \in S_H$ dönüşümlerinin ailesinde ek olarak $g'(0) = 0$, $b_1 = 0$ özellikleri ile S_H^0 tanımlanır. Bu nedenle $S \subset S_H^0 \subset S_H$ olduğu açıktır.

Bu çalışmamızda aşağıdaki sınıfı inceleyeceğiz:

$$S_{HS^*(A,B)} = \left\{ f = h(z) + \overline{g(z)} \middle| \; w(z) = \frac{\frac{1}{b_1} g'(z)}{h'(z)} \in \mathcal{P}_k, \;\; h(z) \in S^*(A,B) \right\}$$

3.5.1 Temel Sonuçlar

Lemma 3.5.1: $p(z)$, $\mathcal{P}_k(\rho)$= $\mathcal{P}_k\left(\frac{1-A}{1-B}\right)$ nin bir elemanı olsun. O halde

$$\left| p(z) - \frac{1 + (2A - B - 1)r^2}{(1-B)(1-r^2)} \right| \leq \frac{k(A+B)r}{(1-B)(1-r^2)}$$

dir.

İspat: K. S. Padmanabhan ve R. Parvatham (1975) sonucunu kullanarak $\rho = 1 - A/1 - B$ ile ve basit hesaplamalardan sonra istenilen sonucu elde ederiz .

Teorem 3.5.2: $f = h(z) + \overline{g(z)}$, $S_{HS^*(A,B)}$ nin bir elemanı olsun. O halde

$$C(r,A,B) = \begin{cases} r(1+Br)^{\frac{A-B}{B}} , & B \neq 0 \\ re^{Ar} , & B = 0 \end{cases}$$

ve

$$F(,B,|b_1|,k,r) = \frac{|b_1|(1 + k(A - B)r + (2A - B - 1)r^2)}{(1 - B)(1 - r^2)}$$

olmak üzere

$$F(A,B,|b_1|,k,-r).C(r,-A,-B) \leq |g(z)| \leq F(A,B,|b_1|,k,r)C(r,A,B) \quad \Rightarrow$$

$$F(A,B,|b_1|,k,-r).\tfrac{1-Ar}{1-Br}\; C(r,-A,-B) \leq |g'(z)| \leq$$

$$F(A,B,|b_1|,k,r).\frac{1 + Ar}{1 + Br}\; C(r,A,B)$$

dir.

İspat: K. I. Noor ve S. Mustafa (2009) sonucunu kullanarak

$$g(z) = b_1 h(z).p(z) \tag{3.5.11}$$

$$g'(z) = b_1 h'(z).p(z) \tag{3.5.12}$$

yazabiliriz. Eğer Janowski sonucu (Goodman, 1983) ve (3.5.11) ve (3.5.12) eşitsizliklerinde Lemma 3.5.1 i kullanırsak istenilen sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.5.3: $f = h(z) + \overline{g(z)}$, $S_{HS^*(A,B)}$ nin bir elemanı olsun. O halde

$$\left(\frac{1 - Ar}{1 - Br}\right)^2 \left(C(r,-A,-B)\right)^2 \left(1 - F(A,B,|b_1|,k,-r)\right)^2 \leq J_f \leq$$

$$\left(\frac{1 + Ar}{1 + Br}\right)^2 \left(C(r,A,B)\right)^2 \left(1 - F(A,B,|b_1|,k,r)\right)^2$$

dir.

İspat: $J_f = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 = |h'(z)|^2 \left(1 - \left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|^2\right)$ olduğundan bu adımda Teorem .3.5.2 yi kullanarak istenilen sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.5.4: Eğer $f = (h(z) + \overline{g(z)}\,) \in S_{HS^*(A,B)}$ ise o halde

$$\int \left(\frac{1-Ar}{1-Br}\right)\big(C(r,-A,-B)\big)\big(1-F(A,B,|b_1|,k,r)\big)dr \leq |f|$$
$$\leq \int \left(\frac{1+Ar}{1+Br}\right)\big(C(r,A,B)\big)\big(1-F(A,B,|b_1|,k,r)\big)dr$$

dir.

İspat:

$$(|h'(z)|-|g'(z)|)|dz| \leq |df| \leq (|h'(z)|+|g'(z)|)|dz| \quad \Rightarrow$$

$$|h'(z)|\left(1-\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|\right)|dz| \leq |df| \leq |h'(z)|\left(1+\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|\right)|dz|$$

olduğundan

$$\left(\frac{1-Ar}{1-Br}\right)\big(C(r,-A,-B)\big)\big(1-F(A,B,|b_1|,k,r)\big)dr \leq |df|$$
$$\leq \left(\frac{1+Ar}{1+Br}\right)\big(C(r,A,B)\big)\big(1-F(A,B,|b_1|,k,r)\big)dr$$

dir ve integral alırsak istenilen sonucu buluruz.

KAYNAKÇALAR

Kitaplar

Ahlfors, L. V. (1973).Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory. New York: McGraw-Hill.

Bernardi, S.D. (1982).Bibliography of Schlicht Functions. Tampa_ Florida: Marine Publishing Co. Inc.

Cartan, H.(1967). Calcul Differentiel. Formes Differentielles. Paris: Hermann.Russian transl. MIR. Moscou.1971.

Conway, J. B. (1995).Functions of One Complex Variable II. New York: Springer-Verlag.

Duren, P. L. (1983). Univalent Functions. New York: Springer-Verlag.

Duren, P. L. (2004).Harmonic mappings in the plane. Cambbidge Tracts in Math. 156. Cambridge Univercity Press.

Franzoni, T., ve Vesentini, E. (1980). Holomorphic Maps and Invariant Distances. Amsterdam: North-Holland Pub. Co.

Goluzin, G. M. (1952). Geometric Theory of Functions of a Complex Variable. Moscow: English Transl. Amer. Math. Soc. Providence, R.I.1969.

Gong, S. (1999). The Bieberbach Conjecture. Amer. Math. Soc. Intern. Press. Providence, R.I.

Goodman, A. W. (1983). Univalent Functions, I-II. Tampa_ Florida: Mariner Publ. Co.

Graham, I. ve Kohr, G. (2003). Geometric function theory in one and higher dimensions. New York- Basel: Marcel Dekker Inc.

Hallenbeck, D. J., ve MacGregor, T. H. (1984). Linear Problems and Convexity Techniques in Geometric Function Theory. Boston: Pitman.

Hayman, W. K. (1994). Multivalent Functions (second edition). Cambridge Univ. Press.

Henrici, P. (1993). Applied and Computational Complex Analysis, III. New York: Wiley Classical Library, J. Wiley & Sons.

Hille, E. (1962). Analytic Function Theory, vol.11. Boston: Ginn and Company.

Jarnicki, M., ve Pflug, P. (1993). Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis. Berlin-New York: Walter de Gruyter & Co.

Jenkins, J.A. (1965). Univalent Functions and Conformal Mapping. 2^{nd} Ed. Berlin-New York: Springer-Verlag.

Kobayashi, S. (1970). Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings. New York: Marcel Dekker Inc.

Lehto, O. (1987). Univalent Functions and Teichmuller Spaces. Berlin-New York: Springer- Verlag.

Milin, I. M. (1977). Univalent Functions and Orthonormal Systems. English transl.Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

Miller, S. S., ve Mocanu, P.T. (2000). Differential Subordinations Theory and Applications. New York: Marcel Dekker Inc.

Mocanu, P. T. , Bulboaca, T. ve Salagean, G. (1999). Geometric Theory of Univalent Functions. Cluj-Napoca (in Romanian): Casa Cartil de Stiinta.

Montel, P. (1933). Legons sur les Fonctions Univalentes ou Multivalentes. Paris: Gauthier-Villars.

Natanson, I. P. (1961).Theory of Functions of a Real Variable. Volume I. Ungar. New York: Revised Edition.

Nehari, Z. (1952). Conformal Mapping. New York : McGraw-Hill.

Pommerenke, C. (1975). Univalent Functions. Gottingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Pommerenke, C. (1992). Boundary Behaviour of Conformal Maps. Berlin-New York: Springer-Verlag.

Rosenblum, M., ve Rovnyak, J. (1994). Topics in Hardy Classes and Univalent Functions. Boston: Birkhauser Verlag.

Rudin, W. (1987). Real and Complex Analysis, third edition. New York: McGraw-Hill.

Ruschweyh, S. (1982). Convolutions in Geometric Function Theory. Les Presses de I'Universite de Montreal.

Schober, G. (1975). Univalent Functions-Selected Topics. Lecture Notes in Math. 478. New York: Springer Berlin Heidelberg.

Study, E. (1913). Vorlesungen uber ausgewdhlte Gegenstdnde der Geometric. 2. Heft. Leipzig and Berlin: Teubner.

Süreli Yayınlar

Alexander, J. W. (1915/1916). Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions. Ann. of Math. 17, 12-22.

Al-Amiri, H. ve Mocanu, P.T. (1981). Spirallike nonanalytic functions. Proc.Amer. Math. Soc. 82, 61-65.

Avkhadiev, F.G. ve Aksent'ev, L.A. (1971). Sufficient conditions for the univalence of analytic functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 198, 743-746.

Avkhadiev, F .G. ve Aksent'ev, L. A. (1975). The main results on sufficient conditions for an analytic function to be schlicht. Uspehi Mat. Nauk. 30(4), 3-60 (in Russian); Russian Math. Surveys. 30(4)(1975), 1-63.

Bieberbach, L. (1916). Uber die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreiss vermitteln. S.-B. Preuss. Akad. Wiss. 940-955.

Bielecki, A. ve Lewandowski, Z. (1962). Sur un theoreme concernant les fonctions univalentes lineairement accessibles de M. Biernacki. Ann. Polon. Math. 12, 61-63.

Biernacki, M. (1936).Sur la representation conforme des domaines lineairement accessibles. Prace Mat.-Fiz. 44, 293-314.

Blatter, C. (1978). Ein Verzerrungssatz fur schlichte Funktionen. Comment. Math. Helv. 53, 651-659.

Brickman, J. L. (1973). Φ-like analytic functions I. Bull. Amer. Math. Soc. 79, 555- 558.

Brown, J. E. (1989). Images of discs under convex and starlike functions. Math. Z. 202, 457-462.

Campbell, D. M. (1974). Applications and proof of a uniqueness theorem for linearly invariant families of finite order. Rocky Mountain J. Math. 4, 621-634.

Caratheodory, C. (1907). Uber den Variabilitatsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene werte nicht annehmen. Math. Ann. 64, 95-115.

Chuaqui, M. (1995). A unified approach to univalence criteria. Proc. Amer. Math. Soc. 123, 441-453.

Chuaqui, M. ve Osgood, B. (1993). Sharp distortion theorems associated with the Schwarzian derivative. J. London Math. Soc. 48, 289-298.

Chuaqui, M. ve Osgood, B. (1998). General univalence criteria in the unit disk: extensions and extremal functions. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 23, 101-132.

Chuaqui, M. ve Pommerenke, C. (1999). Characteristic properties of Nehari functions. Pacif. J. Math 188, 83-94.

Clunie, J. ve Pommerenke, C. (1966). On the coefficients of close-to-convex univalent functions. J. London Math. Soc. 4, 161-165.

De Branges, L. (1985). A proof of the Bieberbach conjecture. Acta Math. 154, 137-152.

Graham, I. (1990). Distortion theorems for holomorphic maps between convex domains in $\mathbb{C}^n$ Complex Variables. 15, 37-42.

Graham, I. ve Varolin, D. (1996). Bloch constants in one and several variables. Pacif. J. Math. 174, 347-357.

Gronwall, T. H. (1914/15). Some remarks on conformal representation. Ann. Math. 16, 72-76.

Grunsky, H. (1933). Zwei Bemerkungen zur konformen Abbildung. Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 43, 140-143.

Harmelin, R. (1989). Locally convex functions and the Schwarzian derivative. Israel J. Math. 67, 367-379.

Herglotz, G. (1911). Uber Potenzreihen mit positivem, reelen Teil im Einheitskreis, S.-B. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Natur. Kl., 63, 501-511.

Hummel, J. A. (1957). The coefficient regions of starlike functions. Pacif. J. Math. 7, 1381-1389.

Jack, I. S. (1971). Functions starlike and convex of order α. J. London Math. Soc. 3, 469-474.

Jenkins, J. A. (1998). On weighted distortion in conformal mapping II. Bull. London Math. Soc. 30, 151-158.

Kaplan, W. (1952). Close-to-convex schlicht functions. Michigan Math. J. 1, 169-185.

Kas'yanyuk, S. A. (1959). On the method of structural formulae and the principle of correspondence of boundaries under conformal mappings. Dop. Akad. Nauk Ukrain. RSR, 14-17.

Kim, S. A. ve Minda, D. (1994). Two point distortion theorems for univalent functions. Pacif. J. Math. 163, 137-157.

Koebe, P. (1907). Uber die Uniformisierung beliebiger analytischer kurven. Nachr. Akad. Wiss. Gottingen, Math. Phys. KL, 191-210.

Koepf, W. (1988). Convex functions and the Nehari univalence criterion, Complex Analysis. Joensu,1987, 214-218. Lecture Notes in Math.1351. Berlin- New York: Springer-Verlag.

Koepf, W. (1989). On close-to-convex functions and linearly accessible domains, Complex Variables. 11, 269-279.

Kohr, G. (1998). On some alpha convex mappings on the unit ball $\mathbb{C}^n$. Demonstratio Math. 31, 209-222.

Kra, I. (1971). Deformations of Fuchsian groups II. Duke Math. J. 38, 499-508.

Krzyz, J. (1955). On the maximum modulus of univalent functions. Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III. 3, 203-206.

Krzyz, J. (1962). The radius of close-to-convexity within the family of univalent functions. Bull. Acad. Polon. Sci. 10, 201-204.

Krzyz, J. (1964). Some remarks on close-to-convex functions. Bull. Acad. Polon. Sci. 12, 25-28.

Lewandowski, Z. (1958). Sur I'identite de certaines classes de fonctions univalentes, I, II. Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska. 12, 131-146; 14(1960), 19- 46.

Loewner, C. (1917). Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z| < 1$, die durch Funktionen mil nichtverschwindender Ableitung geliefertwerden. S.-B. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig. 69, 89-106.

Ma, W. ve Minda, D. (1999). Two point distortion for univalent functions. J. Comput. Appl. Math. 105, 385-392.

MacGregor, T.H. (1964). A covering theorem for convex functions. Proc. Amer. Math. Soc. 15, 310.

MacGregor, T.H. (1967). Majorization by univalent functions. Duke Math. J.34, 95- 102.

MacGregor, T.H. (1972). Geometric problems in complex analysis. Amer. Math. Monthly. 79, 447-468.

Marx, A. (1932). Untersuchungen über schlichte Abbildungen. Math. Ann. 107, 40- 67.

Miller, S. S. (1973). Distortion properties of alpha-starlike functions. Proc. Amer. Math. Soc. 38, 311-318.

Miller, S. S. ve Mocanu, P. T ve Reade, M. O. (1972). All α-convex functions are starlike. Rev. Roum. Math. Pures Appl. 17, 1395- 1397.

Miller, S. S. , Mocanu, P. T ve Reade, M. O. (1973). All α-convex functions are univalent and starlike. Proc. Amer. Math. Soc. 37, 553-554.

Miller, S. S. , Mocanu, P. T ve Reade, M. O. (1974). Bazilevich functions and generalized convexity. Rev. Roum. Math. Pures Appl. 19, 213-224.

Minda, D. (1983). Lower bounds for the hyperbolic metric in convex regions. Rocky Mountain J. Math. 13, 61-69.

Minda, D. (1985). The Schwarzian derivative and univalence criteria. Contemp. Math. 38, 43-52.

Mocanu, P. T. (1969). Une propriete de convexite generalises dans la theorie de la representation conforme. Mathematica (Cluj). 11(34), 127-133.

Nehari, Z. (1976). A property of convex conformal maps. J. Analyse Math. 30, 390-393.

Nehari, Z. (1979). Univalence criteria depending on the Schwarzian derivative. Illinois J. Math. 23, 345-351.

Nevanlinna, R. (1920). Uber die schlichten Abbildungen des Einheit- skreises. Oversikt Finska Vetenskaps-Soc. Forh. 62A, 1-14.

Nevanlinna, R. (1920-1921). Uber die konforme Abbildung von Sterngebieten. Oversikt av Finska Vetenskaps-Soc.Forh. 63A, 1-21.

Noor, K.I. ve Mustafa, S.(2009). Some classes of analytic functions related with functions of bounded radius rotation with respect to symmetrical points, Journal of Math. Ineq. Vol. 3, 267-276.

Noshiro, K. (1934-35). On the theory of schlicht functions. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 2, 129-155.

Osgood, B. (1982). Some properties of f''/f' and the Poincare metric. Indiana Univ. Math. J. 31, 449-461.

Over holt, M. (1989). The extreme points of the set of Schwarzians of univalent functions, Complex Variables Theory Appl. 11, 197- 202.

Ozaki, S. (1935). On the theory of multivalent functions. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku. A. 40, 167-188.

Paatero, V. (1931). Ber die konforme Abbildungen von geibeten deren Rander von beschranter Drehung sind Ann. Acad. Sci. Fenn. ser A 33(9).

Padmanabhan, K. ve Parvatham, R. (1975). Properties of a class of functions with bounded boundary rotation, Ann. Polon. Math.,31, 311-323.

Pinchuk, B. (1971). Functions with bounded boundary rotation, Isr. J. Math.,10,7-16.

Rahmanov, B.N. (1954). On the theory of univalent functions. Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.). 78(1951), 209-211; 91(1953), 729-732; 97(1954), 973-976 (in Russian).

Reade, M. O. (1955/56).On close-to-convex univalent functions. Mich. Math. J. 3, 59-62.

Robertson, M.S. (1936). On the theory of univalent functions. Ann. Math. 37, 374-408.

Robertson, M.S. (1961). Applications of the subordination principle to univalent functions. Pacif. J. Math. 11, 315-324.

Robinson, R.M. (1947).Univalent majorants. Trans.Amer. Math. Soc. 61, 1-35.

Rogosinski, W. (1939). On subordinate functions. Proc. Cambridge Phil. Soc. 35, 1-26.

Rogosinski, W. (1943). On the coefficients of subordinate functions. Proc. London Math. Soc. 48, 48-82.

Ruscheweyh, S. ve Sheil-Small, T. (1973). Hadamard products of schlicht functions and the Polya-Schoenberg conjecture. Comment. Math. Helv. 48, 119-135.

Sakaguchi, K. (1962). A note on p-valent functions. J. Math. Soc. Japan. 14, 312-321.

Sheil-Small, T. (1969). On convex univalent functions. J. London Math. Soc. 1, 483-492.

Sheil-Small, T. (1973). On linearly accessible univalent functions. J. London Math. Soc. 6, 385-398.

Spacek, L. (1932). Contribution a la theorie des fonctions univalentes. Casopis Pest. Mat. 62, 12-19 (in Russian).

Strohhacker, E. (1933). Beitrage zur Theorie der schlichten Funktionen. Math. Z. 37, 356-380.

Suffridge, T. J. (1970).Some remarks on convex maps of the unit disc. Duke Math. J. 37, 775-777.

Trimble, S. Y. (1975). A coefficient inequality for convex univalent functions. Proc. Amer. Math. Soc. 48, 266-267.

Warschawski, S. E. (1935). On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping. Trans. Amer. Math. Soc. 38, 310-340.

Wolff, J. (1934). L 'integrate d'une fonction holomorphe et a partie reelle positive dans un demi plan est univalente. C.R. Acad. Sci. Paris. 198, 1209-1210.