



SINIRLI SINIR ROTASYONLARINA SAHİP
FONKSİYONLARIN ALT SINIFLARININ
İNCELENMESİ

Kaya ADEMOĞULLARI

Danışman

Prof. Dr. Yasemin KAHRAMANER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
İSTANBUL - 2016

KABUL VE ONAY SAYFASI

Kaya ADEMOĞULLARI tarafından hazırlanan "Sınırlı Sınır Rotasyonlarına Sahip Fonksiyonların Alt Sınıflarının İncelenmesi" adlı tez çalışması, 14/06/2016 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde başarı ile savunularak, İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman Prof. Dr. Yasemin KAHRAMANER

İstanbul Ticaret Üniversitesi

Jüri Üyesi

Prof. Dr. İsmail KÖMBE

İstanbul Ticaret Üniversitesi

Jüri Üyesi

Doç. Dr. Yaşar POLATOĞLU

İstanbul Kültür Üniversitesi

Onay Tarihi:

09/10/2016



Prof. Dr. Doğan Kaya

Enstitü Müdürü

AKADEMİK VE ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

Tarih 09.10.2016

İmza

Kaya ADEMOĞULLARI

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
ŞEKİLLER	v
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	3
3. ANALİTİK FONKSİYONLAR	6
3.1. Analitik Fonksiyonların Genel Özellikleri	6
3.2. Möbius Dönüşümleri	10
3.2.1. Dönüşümlerdeki karakteristik özellikler	10
3.2.2. Ters dönüşüm	10
3.2.3. Möbius transformasyonları	12
3.3. Analitik S Sınıfı, Normalize Yalınkat Fonksiyonlar	15
3.3.1. Analitik fonksiyonlarda yalınkatlık kavramı	15
3.3.2. Analitik fonksiyonlarda normalize kavramı	19
3.3.3. S sınıfı	20
3.3.4. Bieberbach sayısı	27
4. HARMONİK FONKSİYONLAR	32
4.1. S_H Sınıfı, Normalize Harmonik Yalınkat Fonksiyonlar	32
4.1.1. S_H sınıfı	32
4.1.2. Kesme tekniği	37
5. ANALİTİK KISMI q -KONVEKS OLAN FONKSİYONLARIN HAR- MONİK TASVİRLERİ	45
6. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	50
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	56
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ	60

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SIINIRLI SINIR ROTASYONLARINA SAHİP FONKSİYONLARIN ALT SINIFLARININ İNCELENMESİ

Kaya ADEMOĞULLARI

İstanbul Ticaret Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yasemin KAHRAMANER
2016, 60 sayfa

Analitik yalınkat fonksiyonları bir alt küme olarak içeren harmonik yalınkat fonksiyonlar, özellikle son zamanlarda üzerinde durulmaya başlanan bir araştırma konusudur. "Analitik fonksiyonların hangi özellikleri, kendisinden daha büyük bir sınıf olan harmonik yalınkat dönüşümler için geçerliliğini korumaya devam eder?" sorusu 3. ve 4. bölümlerin genel temasını oluşturacaktır.

Bu çalışmada dönüşüm kavramı, analitik yalınkat fonksiyonlar ve normalize S_H sınıfı genel anlamda incelenirken, diğer taraftan da ComplexTool programı yardımıyla elde edilen grafiklerle bu kavramlar görsel bir anlam kazanacaktır.

Son olarak q -calculus ile ilgili genel bilgiler eşliğinde, analitik kısmı q -convex olan harmonik dönüşümler incelenecektir.

Anahtar Kelimeler: Harmonik dönüşümler, q -konveks fonksiyonlar, q -harmonik dönüşümler, S sınıfı, yalınkat fonksiyonlar.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

EXAMINATION OF SUBCLASSES OF FUNCTIONS WITH BOUNDED BOUNDARY ROTATION

Kaya ADEMOĞULLARI

İstanbul Commerce University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yasemin KAHRAMANER
2016, 60 pages

Harmonic univalent functions which contains the collection of analytic univalent functions as a subset is especially began to focus on a research topic lately. A general theme in chapter 3 and 4 will be “What properties of analytic univalent functions are still true for this larger class of harmonic univalent functions?”

While examined concept of mappings, analytic univalent functions and normalized S_H class in this study, at the same time, these concepts will acquire visual sense with the resultant graph provided by the ComplexTool program.

Finally at the last chapter we will examined the harmonic mappings for which analytic part is q -convex functions accompanied by general information about the q -calculus.

Keywords: harmonic mappings, q -convex functions, , q -harmonic mappings, S class, univalent functions.

TEŞEKKÜR

Bu tez alıŐmasının hazırlanma aŐamasında bŸyŸk bir anlayıŐ, sabır ve tolerans gŸstererek, bilgi ve tecrŸbeleri ile alıŐmanın Ÿekillenmesini sağlayan tez danıŐmanım ve çok değerli hocam Prof. Dr. Yasemin Kahramaner'e teŐekkŸr ve saygılarımı sunarım.

Kaya ADEMOĞULLARI
İstanbul 2016



ŞEKİLLER

Şekil 1.	$f(z) = 1/z$	10
Şekil 2.	$M(z) = \frac{z}{1-z}$	13
Şekil 3.	$f(z) = (1+z)^2$	16
Şekil 4.	$g_1(z) = z - z^2$	16
Şekil 5.	$g_2(z) = z - \frac{1}{2}z^2$	16
Şekil 6.	$g_3 = 2g_2$	17
Şekil 7.	$g_4(z) = z + \frac{3}{4}z^2$	17
Şekil 8.	$g_5(z) = \frac{z}{1-z}$	17
Şekil 9.	$g_6(z) = \frac{z^2}{1-z}$	18
Şekil 10.	$g_7(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$	18
Şekil 11.	$g_2(z) = z - \frac{1}{2}z^2$	21
Şekil 12.	$f(z) = z + \frac{1}{2}z^2$	22
Şekil 13.	$f(z) = z + \frac{1}{3}z^2$	23
Şekil 14.	$f(z) = z - \frac{1}{2}z^2$	23
Şekil 15.	$f(z) = z + \frac{1}{3}z^3$	23
Şekil 16.	$f(z) = z + \frac{1}{5}z^3$	24
Şekil 17.	$f(z) = z + \frac{1}{8}z^8$	24
Şekil 18.	$k < n$ ve $a_k = 1/k$ için $fz = z + a_k z^n$	24
Şekil 19.	Sağ Yarı-Düzlem Dönüşümü	25
Şekil 20.	Koebe fonksiyonunun imajı	26
Şekil 21.	$t = 0$ için $f(z) = \frac{z - tz^2}{(1-z)^2}$ dönüşümü	28
Şekil 22.	$t = 1$ için $f(z) = \frac{z - tz^2}{(1-z)^2}$ dönüşümü	28
Şekil 23.	$t = 1/3$ için $f(z) = \frac{z - tz^2}{(1-z)^2}$ dönüşümü	29
Şekil 24.	$t = 1/7$ için $f(z) = \frac{z - tz^2}{(1-z)^2}$ dönüşümü	29
Şekil 25.	$t = 2$ için $f(z) = \frac{z - tz^2}{(1-z)^2}$ dönüşümü	30
Şekil 26.	$t = ik, 0 \leq k \leq 1$ için $f(z) = \frac{z - tz^2}{(1-z)^2}$ dönüşümü	30
Şekil 27.	Harmonik Polinomial Dönüşüm	34
Şekil 28.	$f(z) = (1+z)^4$	35
Şekil 29.	Lokal Yalınkatlık	35
Şekil 30.	Yön koruyan ve korumayan iki fonksiyon	36
Şekil 31.	Yatay yönde konveks olan ve olmayan iki bölge.	38
Şekil 32.	Kesme tekniği	40
Şekil 33.	$f(z) = -\log(1-z) - \bar{z} - \log(1-\bar{z})$ harmonik yalınkat fonksiyonu	41
Şekil 34.	$F(z) = z$ analitik yalınkat fonksiyonu	42
Şekil 35.	$(h-g)(z) = [w + p(w)] \circ f(z)$ yalınkat fonksiyonunun yatay konveksliği	44
Şekil 36.	$f \circ F^{-1}$ yalınkat fonksiyonunun yatay konveksliği	44

1 GİRİŞ

Reel değerli fonksiyonların sahip olmadığı bir çok önemli özelliği kompleks değerli fonksiyonlarda görmek mümkündür. Örnek olarak, kompleks değerli bir fonksiyon *bir kez* türevlenebilirse, buna *analitik* fonksiyon diyebiliyoruz. Kompleks değerli bir f fonksiyon, analitik bir fonksiyon ise bu durumda sonsuz kez differensiyelenebilir demektir. Ayrıca, kompleks değerli analitik fonksiyonlar her zaman bir *Taylor serisi* olarak gösterilebilir ve konformdur (*bu da, $f' \neq 0$ olduğu takdirde açığı korur demektir.*) Bu tür özellikler reel değerli bir fonksiyonun bir kez türevlendiğinde görülemeyen özelliklerdir. Eğer $f = u + iv$ bir analitik fonksiyonsa, bu durumda reel kısım, $u(x, y)$ ve imajiner kısım olan $v(x, y)$ Laplace denklemini sağlar ve bundan dolayı ikisi de *harmoniktir*. Aynı zamanda u ve v , Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığından dolayı birbirlerinin *harmonik eşleniğidir*. Bu çalışmada, $f = u + iv$ şeklinde, u ve v 'nin Laplace denklemlerini sağladığı ancak Cauchy-Riemann koşullarını sağlamasının gerekli olmadığı kompleks değerli yalınkat fonksiyonlarla ilgili problemleri ve fikirleri ele alacağız. Bu fonksiyonlar *harmonik yalınkat fonksiyonlar* olarak bilinir ve analitik yalınkat fonksiyonları bir alt küme olarak içeren türden dönüşümlerdir. Analitik yalınkat fonksiyonlar, 1900'lerin başından bu yana üzerinde çalışılan ve hakkında yüzlerce makale ve araştırma yapılan bir konudur. Harmonik yalınkat dönüşümler ise son zamanlarda üzerinde durulmaya başlanan bir araştırma alanıdır. Bundan dolayı harmonik yalınkat fonksiyonlar hakkındaki araştırmalarımızda, analitik yalınkat fonksiyonların özelliklerini dikkate almak durumundayız. "Analitik yalınkat fonksiyonların hangi özellikleri, harmonik yalınkat fonksiyonların daha büyük olan bu sınıfları için geçerli olmaya devam eder?" sorusu genel tamamızı oluşturacaktır.

Analitik fonksiyonlarla ilgili temel kavramları hatırlayarak *Möbius Dönüşümleri* diye bilinen kompleks değerli fonksiyonlar altında \mathbb{D} bölgesinin imajını belirleme konusunu öncelikle ele alacağız ve bu imajları görsel olarak çizebilmek için *ComplexTool* isimli programdan yararlanacağız. Daha sonra yalınkat analitik fonksiyonlar ailesinin arkaplanından bazı noktalara değinerek kompleks değerli yalınkat analitik fonksiyonların perspektifinden harmonik yalınkat fonksiyonların temellerine giriş yapacağız. Son olarak q-calculus kavramı içinde yer alan ve analitik kısmı q-konveks olan fonksiyonların harmonik tasvirleri üzerinde bir takım

sonuçlar elde edeceğiz. Bu çalışmada imajları görsel anlamda çizebilmek için app-let adıyla da bilinen 2 farklı java programı kullanılmıştır:

1. \mathbb{C} 'deki bölgelerin kompleks değerli fonksiyonlar altındaki imajlarına ait noktaları belirlemek için *ComplexTool*
2. Kompleks değerli harmonik bir fonksiyon altında \mathbb{C} 'deki bölgelerin imajlarına ait noktaları tespit etmek için *ShearTool*. Burada *kesme (shearing)* ve *dilatasyon* yöntemi görsel bir anlam kazanacaktır.



2 LİTERATÜR ÖZETİ

Konform dönüşümlerin modern teorisi 1851 Göttingen Konferansına kadar gider. Burada Riemann açılış konuşmasında, basit bağlantılı bölgelerde konform dönüşümler üzerine olan meşhur teoremini formüle etmiştir.

Riemann Dönüşüm Teoreminin Orijinal Versiyonu

D ve G , \mathbb{C} kompleks düzleminin basit bağlantılı iki uygun altbölgesi olsun. $z_0 \in D$, $\xi_0 \in \partial D$, $w_0 \in G$ ve $\zeta_0 \in \partial G$ verilsin. D 'den G 'ye analitik, injektif olacak şekilde bir ve yalnız bir f dönüşümü vardır öyle ki, z_0 'ı w_0 ve ξ_0 'ı ζ_0 içine gönderir.

Riemann'ın verdiği kanıt, sınırdaki belirli şartlar altında,

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

integralinin minimize edilme probleminin bir sonucu olduğunu ileri süren Dirichlet prensibi tabanlıdır. Bu prensip o günlerde geniş ölçüde kabul görmüş, ta ki Weierstrass calculusta çözümü olmayan şu benzer problemlerle ilgili gözlem yapana kadar; bu integrallerin infimumunun varolması, bir fonksiyonun minimize edilmesinin varlığını sağlamaz.

Bu durum Riemann teoreminin yeni bir ispatının yapılması ihtiyacını getirdi. Yüksek prestijli C. Neumann, H. A. Schwarz, H. Poincare ve D. Hilbert gibi matematikçilerin çalışmaları, Dirichlet'in probleminin genel bir bölge sınıfı için çözüm arayışlarının başını çekti. Bunun bir sonucu olarak, analitik eğri parçalarıyla sınırlanmış bölgeler için Riemann dönüşüm teoremi ispatlandı.

Riemann dönüşüm teoreminin orijinaline ait ortaya koyulan normalizasyonlar, bölgelerin sınırlarını referans alır. Bir bölgenin sınırı çok karmaşık olabilir ve bundan dolayı da Riemann'ın seçtiği koşullar bizi gereksiz zorluklara yönlendirir. Dönüşüm problemi, bölgenin iç noktasında analitik olarak ve genel olarak, sınırlarda bunun tam tersi olarak düşünülür. Sadece iç noktalarla ilgilenmek, koşulların daha doğal olması şeklinde görülmektedir. 20. yy. başlarında, P. Koebe, C. Carathéodory, L. Bieberbach, E. Lindelöf ve P. Montel gibi matematikçiler Riemann teoreminin formulasyonu ve ispatının daha basit biçimlerine doğru yol almamızı sağlayacak yeni metodlar geliştirdiler.

Riemann Dönüşüm Teoremi

D , \mathbb{C} 'de basit bağlantılı bir bölge ve $D \neq \mathbb{C}$ olsun. z_0 , D 'de bir nokta olsun. Bu durumda D bölgesinden

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diski üzerine bir tek f dönüşümü vardır. Bu dönüşüm analitiktir ve D 'de $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ olacak şekilde injektiftir.

Eğer D ve G , \mathbb{C} 'de iki bölge ise ve f analitik dönüşümü $f(D) = G$ olacak şekilde D 'de injektif ise, bu durumda f fonksiyonuna D 'den G 'ye bir **konform dönüşüm** denir. Konform dönüşümlerin tersinin de konform dönüşüm olmasından, Riemann dönüşüm teoremi, \mathbb{C} 'de basit bağlantılı iki bölge $D \neq \mathbb{C}$ ve $G \neq \mathbb{C}$ için, D ve G bölgelerinin konformal eşdeğer olmasını sağlar.

Riemann dönüşüm teoreminin modern ispatları, *normal aile* kavramını kullanır. Bu ifadede varlığı garantilenmiş olan fonksiyon, \mathcal{F} 'deki belli bir fonksiyoneli maximize eden ve D 'de bulunan analitik fonksiyonların oluşturduğu belirli bir \mathcal{F} ailesinin üyesi olarak karakterize edilir. Maximize eden bu türden bir fonksiyonun varlığı *normal fonksiyonlar teorisinden* kaynaklanır.

Buna ek olarak, Riemann dönüşüm teoreminin yeni bir ispatının elde edilmesi, geometrik fonksiyonlar teorisinin çalışma biçimindeki bir değişikliğin varsayılmasıyla oluşan normal aile konseptine giriş şeklindedir. O zamana kadar belli bir bölgedeki analitik fonksiyonlar, geometrik özellikleri ayrı ayrı tespit edilerek çalışılıyordu. **Normal ailelerin** ortaya çıkışından sonra matematikçiler konform dönüşümlerin farklı sınıflarını çalışmaya yöneldiler ve ailenin bütün elemanları tarafından paylaşılan özellikleri aramaya başladılar. Bundan itibaren en fazla üzerinde çalışılan sınıf, çok basit bir tanımlamaya sahip olan ve kompakt olma niteliğine sahip olduğundan dolayı limit alma operasyonu altında kapalı olan S sınıfı oldu. Dahası, birim diskten bir bölge üzerine herhangi bir konform dönüşüm, S 'teki bir fonksiyon ile basit bir şekilde standart bir ilişkiye sahip oldu. Bütün bunlardan dolayı, S sınıfı için elde edilen herhangi bir sonucun, diske ait gelişigüzel bir konform dönüşümden elde edilecek bir sonuç olma durumu ortaya çıktı (Girela, 2013).

De Branges (1985) tarafından Bieberbach sanısının ispatlandığı dönemde, S sınıfını bir alt sınıf olarak kapsayan ve S sınıfını incelerken bir takım aynı özelliklere sahip olduğu ortaya çıkan, kompleks değerli harmonik fonksiyonlar olan S_H sınıfı,

Clunie ve Sheil-Small (1984) tarafından incelenmekteydi. Her ne kadar harmonik fonksiyonlar analitik fonksiyonlara göre daha genel bir yapı teşkil etse de, analitik fonksiyonlardaki bilindik teoremler harmonik fonksiyonlar için de eşdeğerlik taşımaktadır. Bunların içinde ortalama değer teoremi, maksimum modül teoremi, Liouville teoremi, argüman prensibi de vardır.

Sonrasında, ilk planda hiç de kolay olmayan bir durum başgösterdi; analitik olmayan yalınkat harmonik dönüşümleri bulmak. Clunie ve Sheil-Small (1984) tarafından ortaya koyulan kesme tekniği bu tür fonksiyonları bulma konusunda en işe yarar yöntem olarak ortaya çıktı. Analitik olmayan yalınkat harmonik dönüşümlerin yön koruyan ve yatay yönde konveks olanlarının q -calculus ile ilişkili halinin incelenmesi son dönemlerde üzerinde çalışılmaya başlanan bir konudur.

3 ANALİTİK FONKSİYONLAR

3.1 Analitik Fonksiyonların Genel Özellikleri

Analitik fonksiyonların kavranması açısından öncelikle bazı genel özellikleri hatırlayalım.

Kompleks düzlemdeki bir \mathbb{D}_1 bölgesindeki noktaları, bir diğer kompleks düzlemin \mathbb{D}_2 bölgesindeki noktalara eşleyen $w = f(z)$ şeklindeki fonksiyonlara kompleks fonksiyonlar denir. Bahsedilen ilk bölgedeki $z = x + iy$ noktası, diğer bölgedeki $w = u(x, y) + iv(x, y)$ noktasıyla bir kompleks fonksiyon aracılığıyla eşlenir.

Analitik fonksiyonlar, kompleks düzlemdeki açık kümelerle tanımlanmış olan kompleks değerli fonksiyonlardır. Kompleks düzlemde bulunan bir Ω açık kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu analitikse, Ω 'nın her y noktasının bu kümede bulunmakta olan bir $N_\delta(y)$ komşuluğu vardır. Bu komşulukta bulunan her z_1 elemanı için,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_1)^n, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

şeklindeki kuvvet serisi $f(z)$ 'ye yakınsar.

Bazı önemli tanımları hatırlayalım.

Tanım 3.1. Bir $f(z)$ fonksiyonu, bir \mathbb{D} bölgesinin herhangi bir a noktasından tanımlı değilse yada süreksiz ise veya türevi yoksa a noktasına ayrık tekil nokta denir.

$f(z) = \frac{\sin z}{z}$ fonksiyonu $z = 0$ noktasında belirsiz olmasına rağmen $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ olduğundan $f(0) = 1$ alınabilir. Bu türden tekillikler kaldırılabilir olduğundan yapaydırlar. Bundan başka iki türlü tekillik daha vardır.

- i) **Kutup Noktaları:** Bir $f(z)$ fonksiyonu a komşuluğunda sınırlı değil ancak $\frac{1}{f(z)}$ holomorftir ise a noktasına kutup denir.
- ii) **Esas Tekil Nokta:** Eğer bir a noktası hem $f(z)$ hem de $\frac{1}{f(z)}$ nin tekil noktası ise a noktasına esas tekil nokta denir.

Tanım 3.2. \mathbb{C} kompleks düzleminde açık bağlantılı bir kümeye **bölge** denir.

Tanım 3.3. *Başlangıç ve bitiş noktaları farklı olan ve kendi kendisini kesmeyen bir eğriye basit bağlantılı açık eğri denir. Kendi kendini kesiyorsa çok bağlantılı açık eğri denir.*

Tanım 3.4. *Kendi kendini kesmeyen, başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan eğriye basit bağlantılı eğri denir. Bu eğrinin belirlediği kapalı alana basit bağlantılı bölge denir.*

Kendi kendini kesiyorsa çok bağlantılı kapalı eğri, bu eğrinin kapattığı alana ise bağlantılı kapalı bölge denir.

Tanım 3.5. *Bir $w = f(z)$ fonksiyonunun bir \mathbb{D} bölgesinin her noktasında türevi varsa, $f(z)$ fonksiyonuna bu bölgede **holomorf** denir.*

Teorem 3.1. *$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu basit bağlantılı bir \mathbb{D} bölgesinde tanımlanmış olsun. $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ fonksiyonları da birinci mertebeden kısmi türevli sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun \mathbb{D} bölgesinde analitik olması için gerek ve yeter koşul, \mathbb{D} bölgesinin tüm noktalarında,*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

eşitliklerini gerçekleştirmesidir. Bu denklemlere Cauchy-Riemann denklemleri adı verilir (Kahramaner, 1995; Ahlfors, 1973).

Tanım 3.6. *Kompleks düzlemin bir \mathbb{D} bölgesindeki tekil noktalar dışında holomorf olan fonksiyonlara analitik fonksiyonlar adı verilir. Analitik fonksiyonlar tanımlı olduğu her noktada türevlenebilen fonksiyonlardır.*

Bir f fonksiyonu analitikse, reel ve sanal kısımları Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

Harmonik fonksiyonların genel özellikleri

Tanım 3.7. *$f = u + iv$ fonksiyonu basit bağlantılı bir \mathbb{D} bölgesinde analitik ise, reel ve sanal kısımları Laplace differensiyel denklemini sağlar. Bir $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesinde sürekli, ikinci kısmi türevelere sahip bir f fonksiyonu*

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

denklemini sağlıyorsa, f fonksiyonuna harmonik fonksiyon denir.

Bir \mathbb{D} bölgesinde tanımlı, sürekli ve kompleks değerli $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonunun harmonik olması için, \mathbb{D} bölgesinde u ve v 'nin reel değerli harmonik fonksiyonları olması gerekir. Bu da $\Delta(u) = u_{xx} + u_{yy} = 0$ ve $\Delta(v) = v_{xx} + v_{yy} = 0$ şeklindeki Laplace eşitliklerinin sağlanması demektir. xy -düzlemindeki bir \mathbb{D}_1 bölgesinden, uv -düzlemindeki bir \mathbb{D}_2 bölgesine tanımlanmış, bire-bir $f(z)$ tasviri, u ve v harmonik olduğu takdirde yalınkat tasvir adını alır. $f = u + iv$ fonksiyonunun sürekli kısmi türevleri var ise analitiktir. Bu durumda her analitik fonksiyon harmoniktir. Ancak her kompleks değerli harmonik fonksiyonun analitik olması gerekmez. Örnek olarak $w = f(z) = -2xy + i(y^2x^2)$ fonksiyonu harmonik olmasına rağmen hiçbir yerde analitik değildir.

Laplace denkleminin lineer karakteri olduğundan, iki harmonik fonksiyonun toplamı ve bir sabit ile çarpımı da harmoniktir. Analitik fonksiyonların aksine, iki harmonik fonksiyonun çarpımı veya bileşkesi harmonik olmak zorunda değildir. f analitik ise, f^{-1} analitik olmasına rağmen harmonik olmayabilir (Ahlfors, 1973).

Analitik ve harmonik fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi veren teoremi verelim.

Teorem 3.2. Basit bağlantılı bir \mathbb{D} bölgesinde tanımlı bir $f = u + iv$ fonksiyonunun harmonik olması için gerek ve yeter koşul, h ve g analitik olmak üzere, $f = h + \bar{g}$ olarak yazulabilmesidir (Pommerenke, 1975).

Kanıt. Eğer u ve v fonksiyonları basit bağlantılı bir \mathbb{D} bölgesinde harmonik ise, $u = \Re K$ ve $v = \Im L$ olacak şekilde K ve L analitik fonksiyonları vardır. Bu durumda,

$$f = u + iv = \Re K + \Im L = \frac{K + \bar{K}}{2} + i \frac{L - \bar{L}}{2i} = \frac{K + L}{2} + \frac{\overline{K - L}}{2} = h + \bar{g}$$

elde edilir ve ispat bu şekilde tamamlanmış olur. \square

$f = h + \bar{g}$ gösterimine f 'in kanonik gösterimi denir. Burada h , f 'in analitik kısmı, g ise co-analitik kısmı olarak adlandırılır. Ayrıca $h' = f_z$ ve $g' = \bar{f}_{\bar{z}}$ fonksiyonları da f 'in tanımlı olduğu bölgede analitiktir.

$f = h(z) + \overline{g(z)}$ harmonik fonksiyonu,

$$f(z) = \Re\{h(z) + g(z)\} + i\Im\{h(z) - g(z)\}$$

olarak da yazılabilir.

h ve g analitik olduğunda $f = h + \bar{g}$ yazılabileceğinden,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \bar{z}^n$$

kuvvet serisi açılımı şeklinde gösterime sahiptir.

Tanım 3.8. $z \in \mathbb{D}$ noktasından geçen iki eğri arasındaki açının yönü ve büyüklüğü korunuyorsa, f fonksiyonunun \mathbb{D} bölgesinden \mathbb{C} 'ye olan dönüşümüne bu noktada konformdur denir (Kahramaner, 1995).

Tanım 3.9. $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı bir \mathbb{D} bölgesinde analitik olsun.

$\forall z \in \mathbb{D}$ için $f'(z) \neq 0$ ise f fonksiyonu konformdur.

Eğer bir dönüşüm konform ise, bu dönüşümün Jakobieni sıfırdan farklıdır (Ahlfors, 1973; Kahramaner, 1995).

$f = u + iv$ alalım.

$$J_{f(z)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$$

olduğundan $u_x = v_y$ ve $u_y = -v_x$ yazarsak,

$$J_{f(z)} = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2 \quad \text{elde ederiz.}$$

3.2 Möbius Dönüşümleri

3.2.1 Dönüşümlerdeki karakteristik özellikler

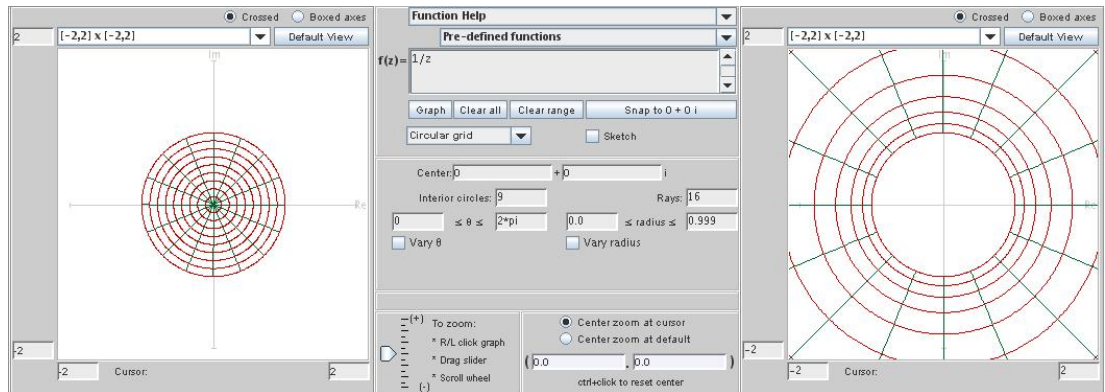
Bir $f(z)$ dönüşümünün \mathbb{D} birim çemberini aşağıdaki karakteristik özelliklere göre dönüştürdüğünü söyleyebiliriz;

- $A = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $f(z) = z + A$ formundaki dönüşümlerde a_1 değeri imaj görüntüsünü yatay olarak, a_2 değeri ise dikey olarak hareket ettirir.
- $B > 0$ olmak üzere $f(z) = Bz$ dönüşümü imaj görüntüsünü büyütür yada küçültür.
- $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta}z$ dönüşümü ise θ değerine bağlı olarak imaj görüntüsünü pozitif veya negatif yönde döndürür.

Eğer bir doğruyu açısı sonsuz olan bir çember olarak düşünürsek, bu durumda bu fonksiyonların çember formunu koruduklarını söyleyebiliriz. Öyle ki, çemberler çemberlere dönüşür.

3.2.2 Ters dönüşüm

İlgilendiğimiz bir diğer fonksiyon, bir *ters dönüşüm* olan $f(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyonudur (Şekil 1).



Şekil 1: $f(z) = 1/z$

$z = e^{i\theta}$ dersek,

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

ve bundan dolayı da, $f(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyonu görüntüyü $\frac{1}{r}$ oranına göre büyütür/küçültür ve $e^{-i\theta}$ değerine bağlı olarak reel eksene göre döndürür.

Ters dönüşüm fonksiyonu olan $f(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyonu, çemberi çembere, doğruyu da doğruya dönüştürür. Bir doğrunun ters dönüşüm fonksiyonu altındaki görüntüsünü ele alalım. Öncelikle bir L_1 doğrusu düşünelim, bu doğru imajiner eksenin alt kısmından başlayarak, eksen boyunca yukarı doğru çıksın. Bu doğruyu $z = 0 + iy$ olarak alalım öyle ki, y değeri $-\infty$ ile ∞ aralığında değişsin. Bu durumda L_1 doğrusunun imajı

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{iy} = i \frac{-1}{y}$$

şeklindedir.

L_1 doğrusunun reel kısmı sıfır olduğundan bu dönüşüm imajiner eksen doğrultusunda görüntü alır. y değerleri $-\infty$ 'den itibaren arttığı için, görüntü imajı sıfırdan başlayarak yukarı doğru çıkar. y değeri 0 noktasını geçtiğinde ise görüntü imajının, imajiner eksenin alt kısmında belirip yukarıya doğru çıktığını görürüz. y değerleri pozitif eksende ilerlemeye devam ettiğinde de, imaj görüntüsü 0 noktasına doğru ilerler.

Şimdi, $\Re z = \frac{1}{2}$ dikey doğrusunun imajını ele alalım. z -düzleminde, $z = x + iy$ olsun. Ayrıca,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

olarak genelleştirme yapalım. Görüntü bölgesini $w = u + iv$ olarak düşünersek, bu durumda şunu elde ederiz;

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{ve} \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

z -düzleminde $\Re z = \frac{1}{2}$ dik doğrusunu $z = x + iy = \frac{1}{2} + iy$ olarak ifade edebiliriz. Bu denklemleri kombine ederek, bu doğrunun ters imaj altındaki görüntüsünü,

$$\frac{1}{z} = u + iv = \frac{1/2}{1/4 + y^2} + i \frac{-y}{1/4 + y^2} = \frac{2}{4y^2 + 1} + i \frac{-4y}{4y^2 + 1}$$

olarak buluruz.

Yukarıdaki doğrunun ters fonksiyon altındaki görüntüsü bize $u = 1$ merkezli, $r = 1$ yarıçaplı bir çemberi çizer. Bu bahsedilenin aslında $(u - 1)^2 + v^2 = 1$ denk-

lemiyle ifade edilen bir çember olduğuna dikkat edelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
(u-1)^2 + v^2 &= \left(\frac{2}{4y^2+1} - 1 \right)^2 + \left(\frac{-4y}{4y^2+1} \right)^2 \\
&= \frac{(-4y^2+1)^2 + (-4y)^2}{(4y^2+1)^2} \\
&= \frac{16y^4 + 8y^2 + 1}{(4y^2+1)^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

3.2.3 Möbius transformasyonları

Ters dönüşüm fonksiyonu olan $f(z) = \frac{1}{z}$ çemberi çembere, doğruyu ise doğruya resmeder. Özel olarak,

- Orijinle kesişmeyen bir çember, yine orijinle kesişmeyen bir çembere dönüşür.
- Orijinle kesişen bir doğru, orijinle kesişen bir doğruya dönüşür.
- Orijinle kesişen bir çember, orijinle kesişmeyen bir doğruya dönüşür.

Buraya kadar ele alınan dört farklı dönüşüm, **Möbius transformasyonları** adında özel bir dönüşüm olarak bilinir, öyle ki, $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ ve $AD \neq BC$ olmak üzere;

$$M(z) = \frac{Az + B}{Cz + D}$$

şeklinde ifade edilir.

$A = 1$, $C = 0$, ve $D = 1$ olduğu takdirde Möbius dönüşümü $M(z) = z + B$ şeklinde bir *öteleme transformasyonuna* dönüşür. $C = 0$, $B = 0$, ve $D = 1$ olduğunda ise $M(z) = Az$ biçiminde bir *döndürme, büyütme/küçültme (scaling)* veya her ikisine sahip bir dönüşüm haline gelir. Eğer $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$, ve $D = 0$ olursa $M(z) = \frac{1}{z}$, yani bir *ters dönüşüm fonksiyonuna* dönüşür. Bunun yanısıra,

$$\frac{Az + B}{Cz + D} = \frac{\frac{A}{C}(Cz + D) - \frac{AD}{C} + B}{Cz + D} = \frac{A}{C} + \frac{B - \frac{AD}{C}}{Cz + D}$$

ve böylece,

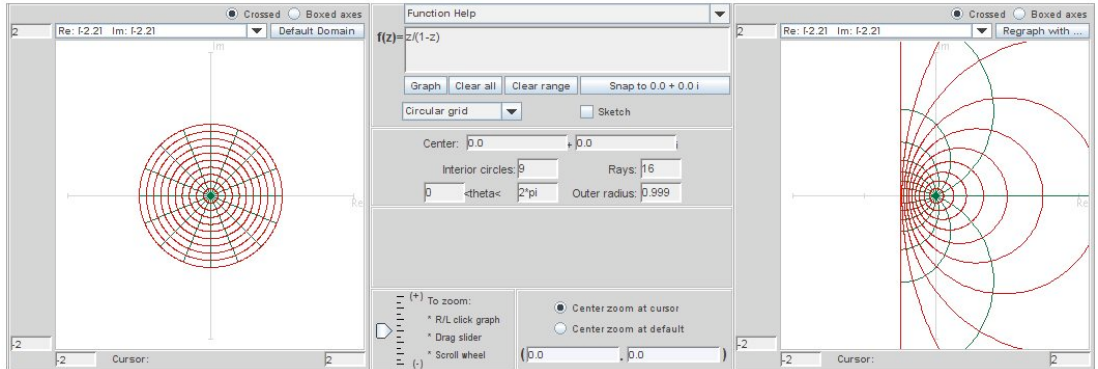
$$f_1(z) = Cz + D, \quad f_2(z) = \frac{1}{z} \quad \text{ve} \quad f_3 = \left(B - \frac{AD}{C} \right) z + \frac{A}{C}$$

Bu da bize $M(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$ Möbius transformasyonunu $(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z)$ şeklinde ifade etme imkanı verir. Burada f_1 , f_2 ve f_3 fonksiyonlarının nasıl dönüşümler oluşturduğunu biliyoruz, ki bu da, çemberler/doğrular, çemberler/doğrulara şeklindedir, Möbius transformasyonu da aynı şeyi yapar. Tanım ve görüntü kümeleri ∞ noktasını da içerecek şekilde olmak üzere, Möbius transformasyonu (1-1) ve örtendir. Bundan dolayı da ters fonksiyona sahiptir. Bu ters fonksiyon,

$$M^{-1}(z) = \frac{Dz - B}{-Cz + A}$$

şeklinde olup, herhangi bir Möbius transformasyonunun tersi de bir Möbius transformasyonudur (Ahlfors, 1973).

Örnek 3.3. $\{z \mid |z| < 1\}$ şeklindeki birim çemberin $\frac{z}{1-z}$ dönüşümü altındaki görüntüsüne bakalım. Möbius transformasyonu iç noktaları imajdaki iç noktalara gönderir. $M(0) = 0$ olduğundan birim çemberin bu dönüşüm altındaki görüntüsü, $\{w \mid \Re\{w\} > -\frac{1}{2}\}$ yarı düzlemini örtecek şekildedir. (Şekil 2)



Şekil 2: $M(z) = \frac{z}{1-z}$

Verilen bir C_1 çemberini (yada doğrusunu) belirli bir C_2 çemberine (yada doğrusuna) gönderdiğimiz varsayalım. Bunu yapacak bir fonksiyon yapılandıracağız. Bir çember belirleyen üç farklı noktayı ele alalım, Möbius transformasyonu çemberi çembere, doğruları doğrulara gönderecektir. O halde C_1 üzerinde z_1 , z_2 ve z_3 noktalarını, C_2 üzerinde ise w_1 , w_2 ve w_3 noktalarını seçelim. $M(z)$ Möbius transformasyonumuz aşağıdakileri sağlar;

$$M(z_1) = w_1, \quad M(z_2) = w_2, \quad M(z_3) = w_3$$

ve C_1 'i C_2 üzerine resmeder. Çapraz oran (*Cross-Ratio*) formülünü kullanarak $M(z)$ fonksiyonunu şu şekilde oluşturabiliriz;

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \quad (1)$$

Eğer z_i yada w_i terimlerinden biri ∞ ise (C_1 yada C_2 çemberlerinden biri aslında bir doğru ise), bu ifadeyi içeren terimi yok sayarız. Örnek olarak, eğer $w_1 = \infty$ ise bu durumda 1 denklemi,

$$\frac{w_2 - w_3}{w - w_3} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_3)}$$

eşitliğine dönüşür.

1 denklemini, z_1 'i w_1 'e, z_2 'yi w_2 'ye ve z_3 'ü w_3 'e dönüştürecek şekilde bir Möbius transformasyonu oluşturmak için kullanalım.

Örnek 3.4. $l = \{z \mid \Re\{z\} = -\frac{1}{2}\}$ dikey doğrusunu, C birim çemberine gönderecek Möbius transformasyonunu belirleyelim. Öncelikle l üzerinden üç nokta seçelim;

$$z_1 = -\frac{1}{2}, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}, \quad \text{ve} \quad z_3 = \infty$$

olsun. Şimdi de C birim çemberinden üç nokta,

$$w_1 = -1, \quad w_2 = i \quad \text{ve} \quad w_3 = 1$$

olarak belirleyelim. 1 denklemini kullanarak,

$$\frac{z + \frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}} = \frac{(w + 1)(i - 1)}{(w - 1)(i + 1)}$$

yazıp, düzenleyerek

$$w = \frac{z}{1 + z}$$

elde ederiz. Böylece l doğrusunu C üzerine gönderen Möbius transformasyonunu $M(z) = \frac{z}{1+z}$ olarak bulmuş oluruz.

3.3 Analitik S Sınıfı, Normalize Yalınkat Fonksiyonlar

Bu kısımda kompleks analizde dönüşüm problemlerini ele alacağız. Bir alanı, bir başka geçerli imaj alanına resmeden fonksiyon koleksiyonlarına ait özelliklere değineceğiz. Bu özelliklere giriş yapmadan önce bazı temel unsurları gözden geçirelim.

3.3.1 Analitik fonksiyonlarda yalınkatlık kavramı

Tanım 3.10. *Aşağıdaki özelliklerin gerçekleştiğini kabul edelim.*

1. *Bu bölüm boyunca $G \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bölge olsun.*
2. $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ *birim çember olsun.*
3. *f fonksiyonu G bölgesinde (1-1) ise **yalınkat**dır, öyle ki, $\forall z_1, z_2 \in G$ için, $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$.*

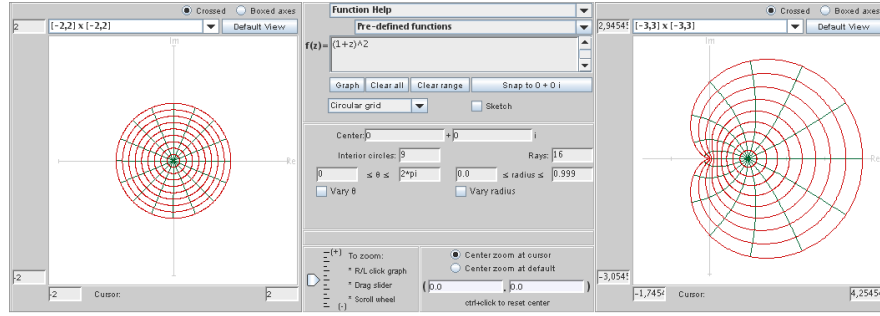
yalınkat analitik fonksiyonlar, analitik bir ters fonksiyonun varlığını garantiler (Bshouty ve Hengartner, 1995; Pommerenke, 1992).

Örnek 3.5. $f(z) = (1+z)^2$ *fonksiyonunun \mathbb{D} bölgesinde yalınkat olduğunu kanıtlayalım. Bunun için $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,*

$$\begin{aligned} f(z_1) = f(z_2) &\Rightarrow (1+z_1)^2 = (1+z_2)^2 \\ &\Rightarrow 1 + 2z_1 + z_1^2 = 1 + 2z_2 + z_2^2 \\ &\Rightarrow z_1^2 - z_2^2 + 2(z_1 - z_2) = 0 \\ &\Rightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2 + 2) = 0 \end{aligned}$$

$|z_1|, |z_2| < 1$ ise $z_1 + z_2 + 2 \neq 0$ olacaktır. Bundan dolayı $z_1 - z_2 = 0$ olmak zorundadır. O halde $z_1 = z_2$.

\mathbb{D} bölgesinin $f(z) = (1+z)^2$ altında görüntüsü aşağıdaki gibidir. (Şekil 3)

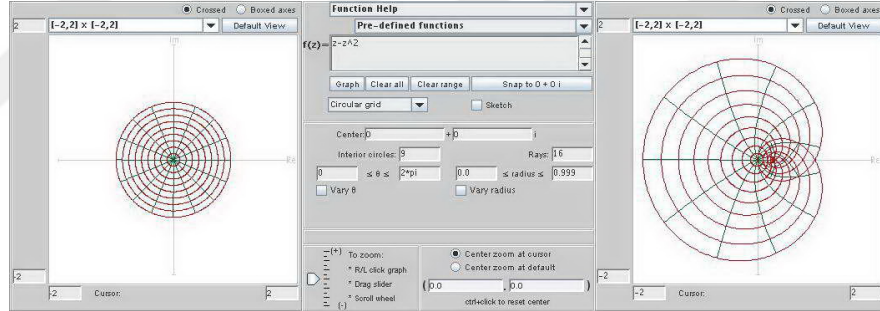


Şekil 3: $f(z) = (1+z)^2$

Yukarıdaki örneğe ait şekilden de anlaşılacağı gibi fonksiyon yalınkat ise imaj görüntüsünde kırmızı çizgiler kesişmez. Aşağıda birim çemberin bazı fonksiyonlar altındaki imajları görülüyor.

a)

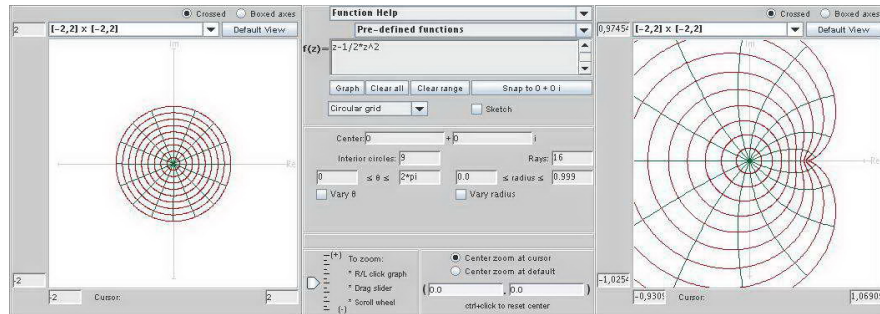
$$g_1(z) = z - z^2$$



Şekil 4: $g_1(z) = z - z^2$

b)

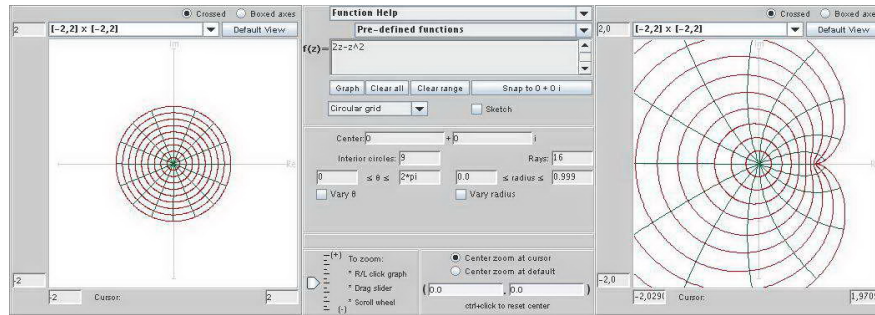
$$g_2(z) = z - \frac{1}{2}z^2$$



Şekil 5: $g_2(z) = z - \frac{1}{2}z^2$

c)

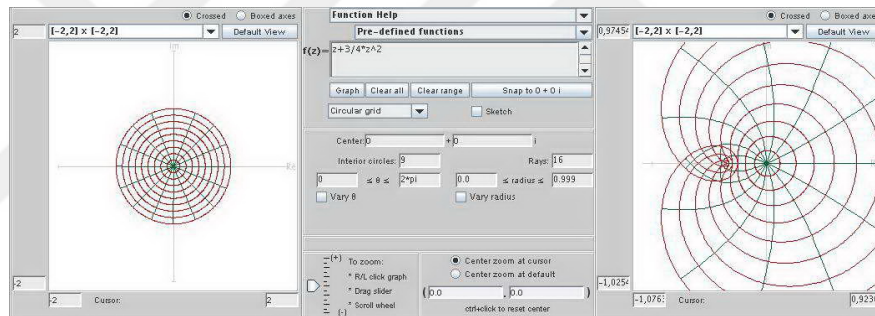
$$g_3(z) = 2z - z^2$$



Şekil 6: $g_3 = 2g_2$

d)

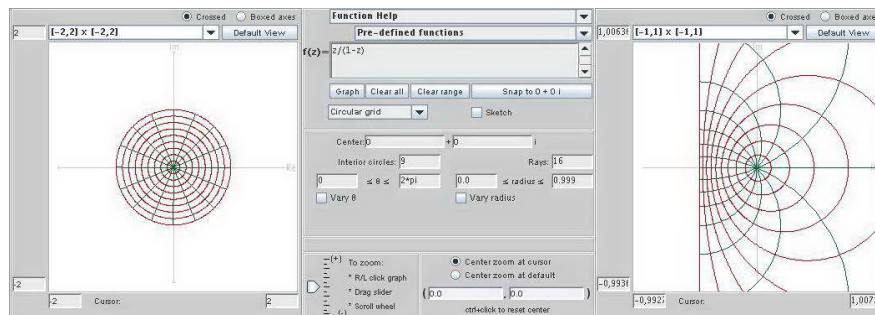
$$g_4(z) = z + \frac{3}{4}z^2$$



Şekil 7: $g_4(z) = z + \frac{3}{4}z^2$

e)

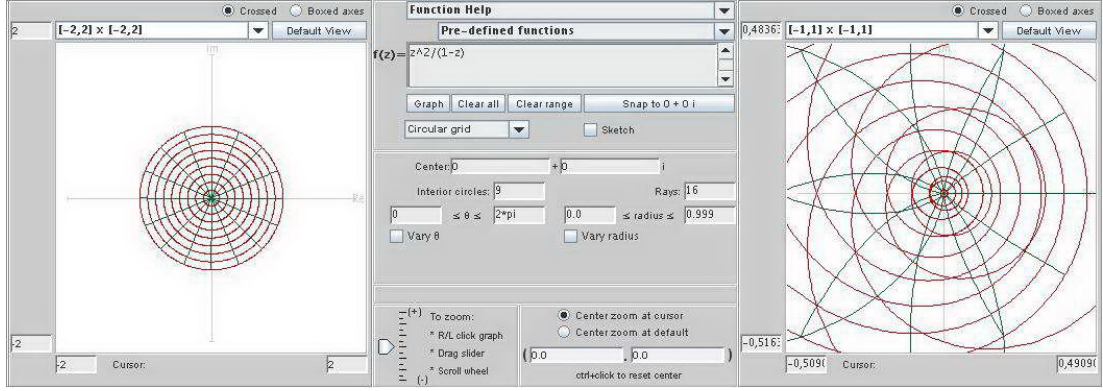
$$g_5(z) = \frac{z}{1-z}$$



Şekil 8: $g_5(z) = \frac{z}{1-z}$

f)

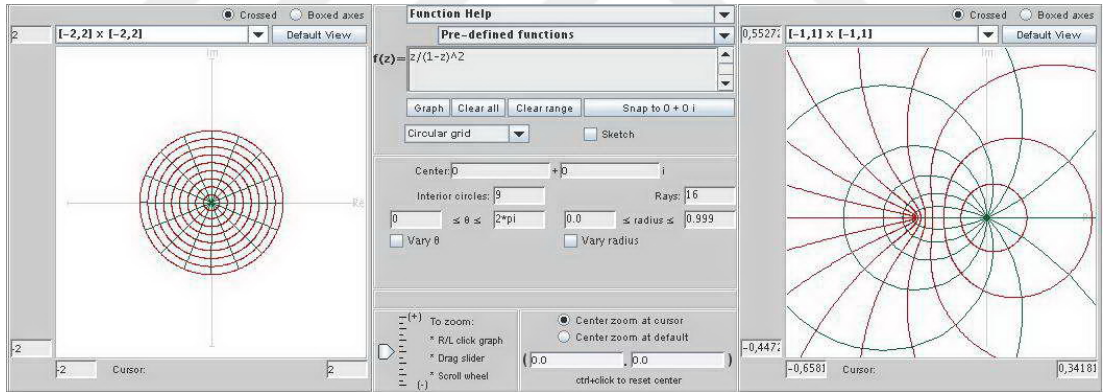
$$g_6(z) = \frac{z^2}{1-z}$$



Şekil 9: $g_6(z) = \frac{z^2}{1-z}$

g)

$$g_7(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$



Şekil 10: $g_7(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$

Yukarıdaki örneklerde b) ve c) şikkında, \mathbb{D} 'nin imajının $g_2(z) = z - \frac{1}{2}z^2$ altında ve $g_3(z) = 2z - z^2$ altında da aynı olduğu görülüyor. Bunun sebebi $g_3 = 2g_2$ olmasıdır. Bundan kaçınmak için, \mathbb{D} bölgesinde tanımlı analitik yalınkat fonksiyonlar ailesine ait tüm fonksiyonları *normalize* edeceğiz. Bunu yaparken, basit bağlantılı bir $G \neq \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve yalınkat bir f_1 fonksiyonunun varolduğunu varsayacağız. **Riemann Dönüşüm Teoremi** aşağıdaki formda yeniden ifade edilebilir.

3.3.2 Analitik fonksiyonlarda normalize kavramı

Teorem 3.6 (Riemann Dönüşüm Teoremi). $a \in G$ olsun. Bu durumda, bir ve yalnız bir $f_2 : G \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu vardır, öyle ki,

1. $f_2(a) = 0$ ve $f_2'(a) > 0$,

2. f_2 yalınkattır,

3. $f_2(G) = \mathbb{D}$.

$f_3 = f_1 \circ f_2^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow f_1(G)$ fonksiyonu yalınkat ve analitiktir. Basit bağlantılı bölgelerde çalışırken, kolaylık olması açısından \mathbb{D} bölgesini kullanıyoruz. $f_3 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ yalınkat ve analitik olsun. f_3 analitikse, orijine ait aşağıdaki gibi bir kuvvet serisine sahiptir;

$$f_3(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \dots$$

Bu seri \mathbb{D} bölgesinde yakınsaktır. f_3 fonksiyonuna bir sabit eklendiğinde, imajda bir ötelemeye yolaçacağından, yalınkatlığa bir etkisi olmayacaktır. Şöyle ki,

$$f_4(z) = f_3(z) - \alpha_0 = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \dots$$

Bu da \mathbb{D} bölgesinde analitik ve yalınkattır. $\alpha_2 \neq 0$ olduğuna dikkat edelim, çünkü f_4 yalınkat ise $f_4'(z) \neq 0$ ($\forall z \in \mathbb{D}$), ancak $f_4'(0) = \alpha_1$. Aşağıdaki durumu da hesaba katarsak,

$$f_5(z) = \frac{1}{\alpha_1} f_4(z) = z + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} z^2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} z^3 + \dots$$

buluruz ki, f_4 'ü $\frac{1}{\alpha_1}$ ile çarptığımızda, imajı döndürmüş ve/veya genişletmiş yada daraltmış oluruz. Bu durumda da f_5 , \mathbb{D} bölgesinde analitik ve yalınkat olmaya devam edecektir. Bu aşamalar, $f'(0) = 1$ ve $f(0) = 0$ olacak şekilde, orijinal fonksiyonumuz olan f_3 fonksiyonunu **normalize** etme adımlarıdır (Dorff, 1999; Sheil-Small, 1990).

3.3.3 S sınıfı

Tanım 3.11. *Analitik, normalize ve yalınkat fonksiyonlar ailesini S ile gösteririz (Pommerenke, 1975), öyle ki,*

$$S = \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(0) = 0, f'(0) = 1, f \text{ analitik ve yalınkat}\}.$$

Böylece, $f \in S$ ise $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$ sağlanır.

Önerme 3.7.

$$f(z) = z + a_2z^2 \quad \mathbb{D}' \text{de yalınkat} \iff |a_2| \leq \frac{1}{2}$$

Örnek 3.8 (Polinomial Dönüşüm). *Daha önce yalınkat olduğunu gösterdiğimiz $g_2(z) = z - \frac{1}{2}z^2 \in S$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Bilgisayarda elde ettiğimiz grafikler her ne kadar bize yardımcı oluyorsa da, hatalı ve yanıltıcı olabiliyor. Yani bu imajları analitik olarak belirleyebilmemiz bizim için çok önemli. $g_2(\mathbb{D})$ analitik olarak belirlenmeli. Bunun için \mathbb{D} 'nin sınırlarınının imajını ele alalım.*

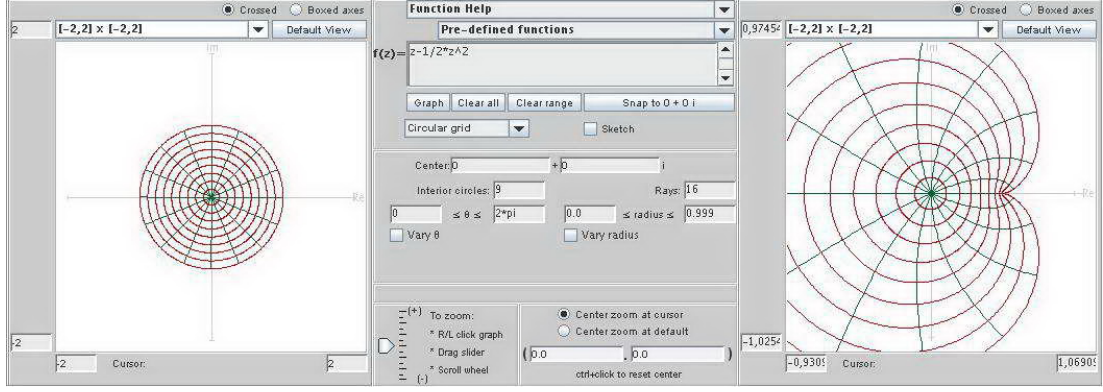
$$\begin{aligned} w = g_2(e^{i\theta}) &= e^{i\theta} - \frac{1}{2}e^{2i\theta} \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta) - \frac{1}{2}(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ &= \left(\cos \theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) + i \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \\ &= u + iv \end{aligned}$$

Böylece $g_2(\partial\mathbb{D})$ şu şekilde parametrize edebiliriz;

$$\begin{aligned} u(\theta) &= \cos \theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \\ v(\theta) &= \sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$

Bu imajın adı cardioiddir. Aynı zamanda tek uçlu epicycloid (Şekil 11.) olarak da bilinir (Suffridge, 1998).

$f(z) = z + a_2z^2$ \mathbb{D} üzerinde yalınkat $\iff |a_2| \leq \frac{1}{2}$ önermesini ele alalım. Bu sonucun genelleştirilmesi üzerine çıkarsamalarda bulunmaya çalışacağız. Örneğin a_3 değişik değerler aldığı takdirde $f(z) = z + a_3z^3$ fonksiyonu için *ComplexTool*



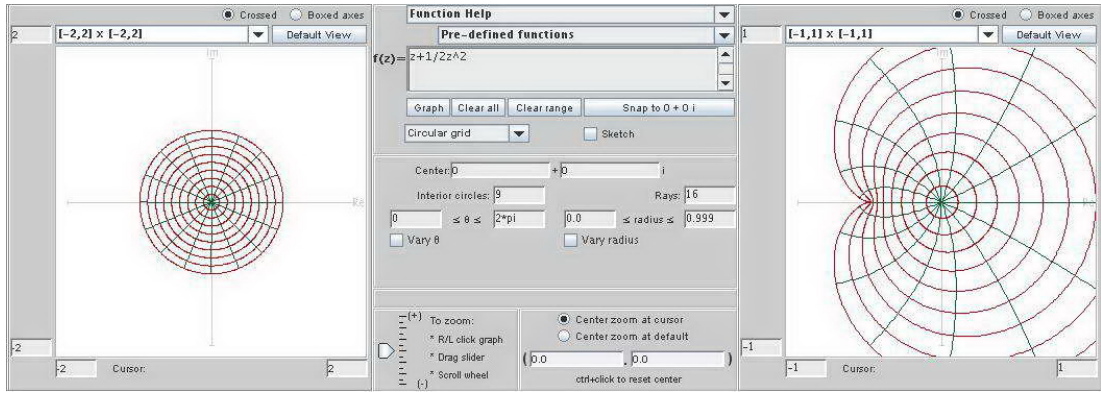
Şekil 11: $g_2(z) = z - \frac{1}{2}z^2$

üzerinde nasıl grafiklerle karşılaşıyoruz? a_3 hangi sınır değerlere sahip olduğunda, f fonksiyonu \mathbb{D} üzerinde yalınkat olmaya devam ediyor? Aynımsı $f(z) = z + a_4z^4$, $f(z) = z + a_5z^5$, ve diğerleri için tekrarlırsak nasıl sonuçlarla karşılaştığımızı inceleyelim. a_n hangi sınır değerlere sahip olduğunda, \mathbb{D} üzerinde $f(z) = z + a_nz^n$ yalınkat olmaya devam ediyor? $a_n = -\frac{1}{n}$ olduğu takdirde $f(\mathbb{D})$ için nasıl bir tahminde bulunabiliriz?

Yukarıda bahsettiğimiz durumları gözden geçirdiğimizde genel olarak şöyle sonuçlarla karşılaşıyoruz; $a_k = \frac{1}{k}$ olmak üzere, $f(z) = z + a_kz^n$ formundaki fonksiyonlarda, $k \geq n$ olduğu takdirde fonksiyon yalınkat, $k < n$ şeklindeki durumlarda yalınkatlık bozuluyor. $a_n = -\frac{1}{n}$ olduğu takdirde ise pozitif ifadenin imajiner eksenine göre simetriği oluşuyor. Aşağıda bu konuda *ComplexTool* programında elde edilen örnekler açıklayıcı olmaktadır;

a)

$$f(z) = z + \frac{1}{2}z^2$$

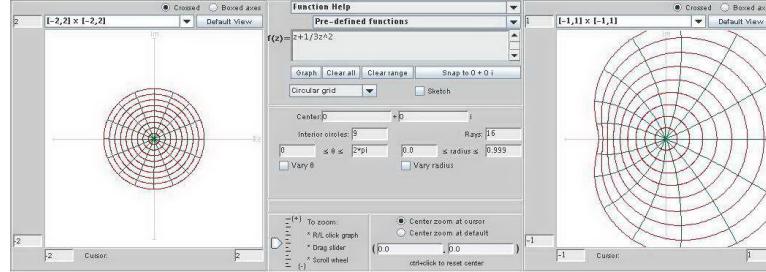


Şekil 12: $f(z) = z + \frac{1}{2}z^2$



b)

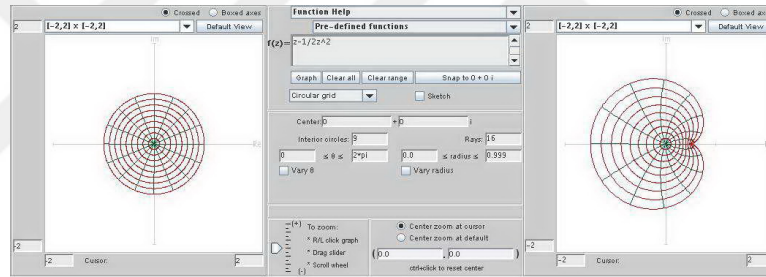
$$f(z) = z + \frac{1}{3}z^2$$



Şekil 13: $f(z) = z + \frac{1}{3}z^2$

c) $a_n = -\frac{1}{n}$ olduğu takdirde

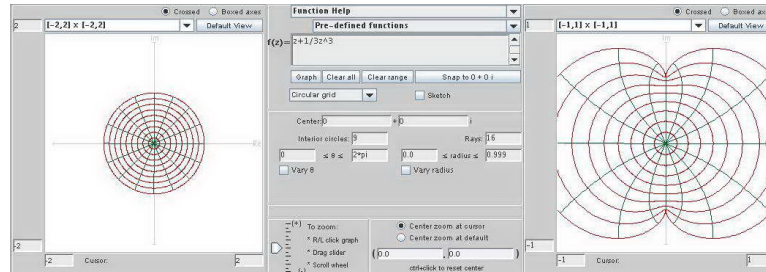
$$f(z) = z - \frac{1}{2}z^2$$



Şekil 14: $f(z) = z - \frac{1}{2}z^2$

d)

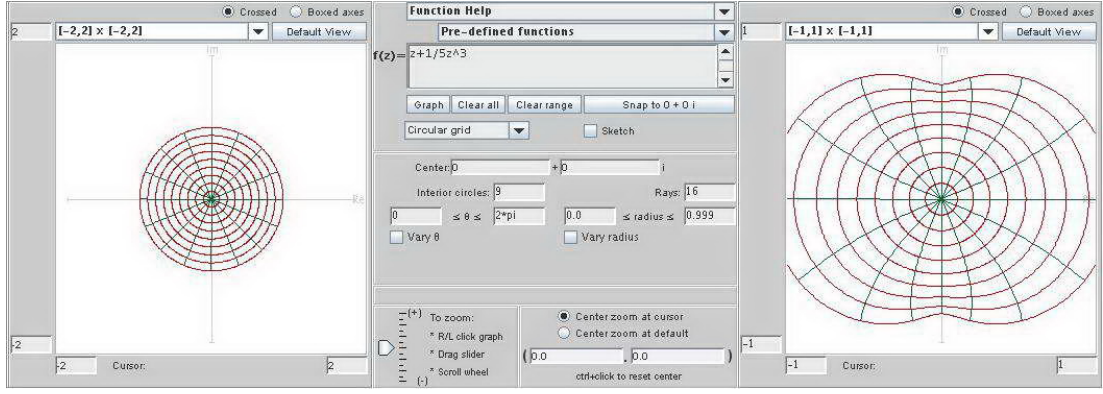
$$f(z) = z + \frac{1}{3}z^3$$



Şekil 15: $f(z) = z + \frac{1}{3}z^3$

e)

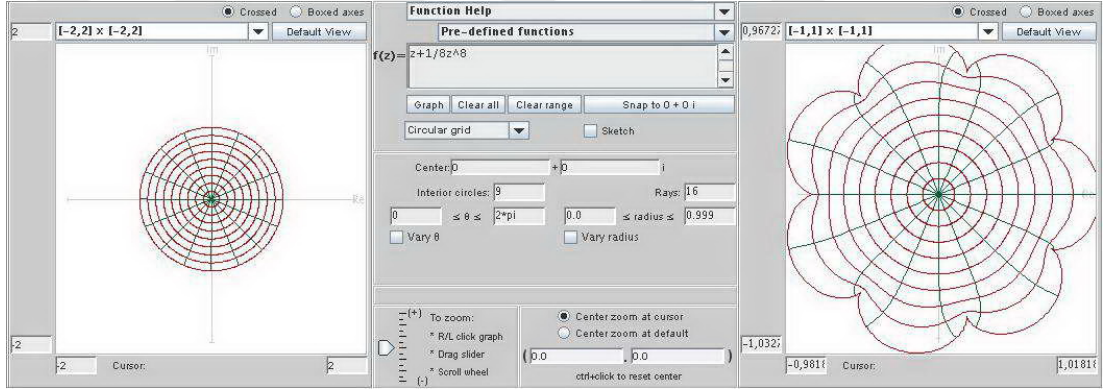
$$f(z) = z + \frac{1}{5}z^3$$



Şekil 16: $f(z) = z + \frac{1}{5}z^3$

f)

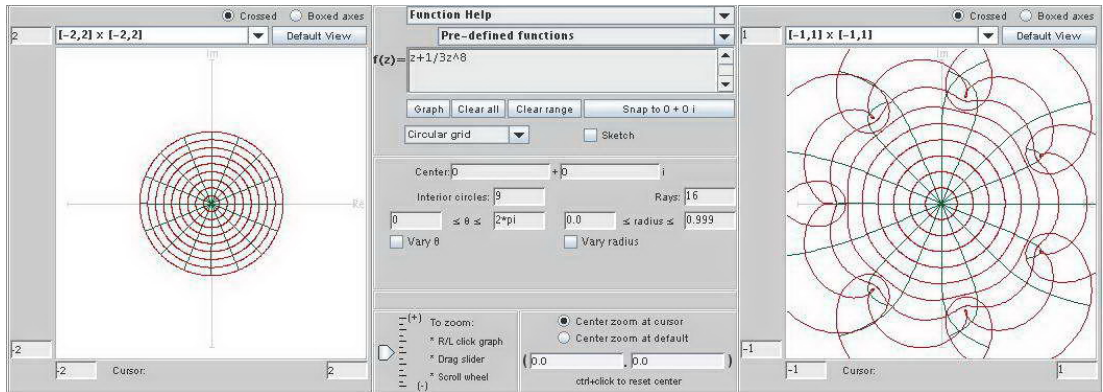
$$f(z) = z + \frac{1}{8}z^8$$



Şekil 17: $f(z) = z + \frac{1}{8}z^8$

g) $a_k = \frac{1}{k}$, $k < n$ olduğu zaman yalınkatlık bozuluyor.

$$f(z) = z + \frac{1}{3}z^8$$



Şekil 18: $k < n$ ve $a_k = 1/k$ için $fz = z + a_k z^n$

Şimdi, $f(\mathbb{D})$ fonksiyonunun analitikliğini bir kaç önemli örnek üzerinden belirleyelim.

Örnek 3.9 (Sağ Yarı-Düzlem Dönüşümü). Şu fonksiyonu gözönüne alalım;

$$f_r(z) = \frac{z}{1-z} \in S$$



Şekil 19: Sağ Yarı-Düzlem Dönüşümü

$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ olduğundan, ifadeyi z ile çarptığımızda,

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = z + z^2 + z^3 + \dots$$

elde ederiz. Bu fonksiyon, \mathbb{D} birim çemberini, $\Re\{w\} = -\frac{1}{2}$ doğrusu sınır olmak üzere, bu sınırın sağ yarı-düzlemine götüren bir Möbius transformasyonudur.

Örnek 3.10 (Koebe dönüşümü). Şimdi de şu fonksiyonu ele alalım;

$$f_k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \in S$$

$\frac{1}{1-z}$ serisinin türevini alıp, z ile çarparak, f_k gibi bir kuvvet serisi elde edebiliriz, böylece;

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$$

Bu fonksiyonda ($\forall n$) için $a_n = n$ olduğuna dikkat edelim.

Şimdi, \mathbb{D} 'nin f_k altındaki imajının kesik (slit) bir bölge olduğunu göstereyim. Öyle ki, bu bölge, kesik bir hat dışında bütün kompleks düzlemi içermekte. $f_k(\mathbb{D})$ 'yi

belirlemek için, aşağıdaki dönüşümler dizisini gözönüne alalım;

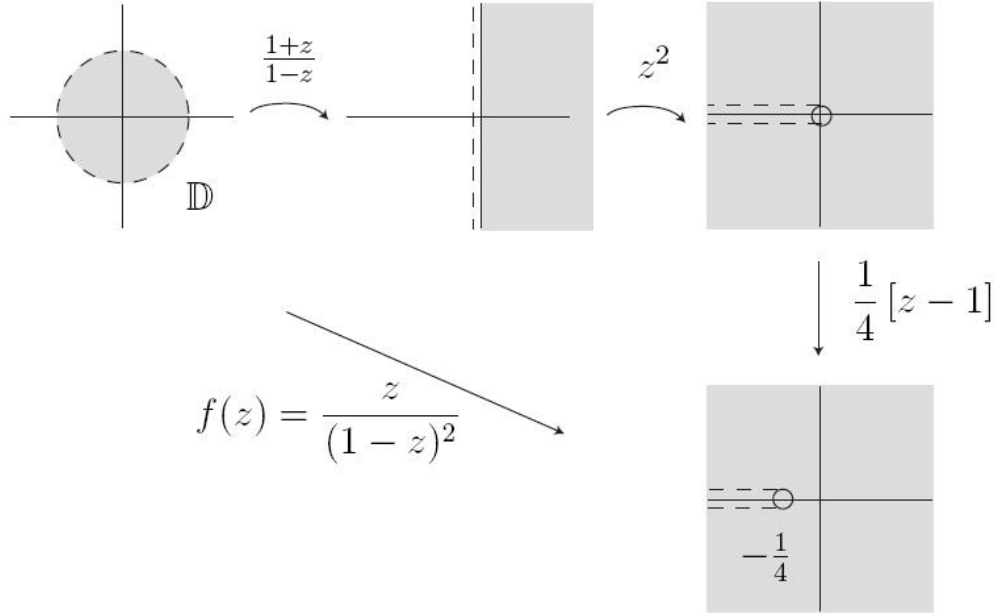
$$u_1(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad u_2(z) = z^2, \quad u_3(z) = \frac{1}{4}[z-1]$$

Buradan,

$$u_2 \circ u_1 \circ u_3(z) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right] = \frac{z}{(1-z)^2}$$

u_1 'in, \mathbb{D} 'yi imajiner eksenin sağ yarı düzlemine götüren bir Möbius transformasyonu olduğuna dikkat edelim. Aynı zamanda u_2 bir kare alma fonksiyonu, u_3 ise imaj uzayını sola öteleyip $\frac{1}{4}$ ile çarpıyor.

Böylece \mathbb{D} imajı, $w = \infty$ 'dan $w = -\frac{1}{4}$ 'e negatif reel eksen boyunca bir kesik dışında bütün kompleks düzlemi içerir. (Şekil 20.)



Şekil 20: Koebe fonksiyonunun imajı

$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$ Taylor serisi gösterimine sahip bir f analitik fonksiyonumuz olsun. Sorumuz şu; hangi a_n değerleri için f fonksiyonu S sınıfına dahil olur? Şöyle ele alalım, a_2 dışında bütün $a_n = 0$ durumunda $f(z) = z + a_2z^2$ olur. Önceki örneklerden biliyoruz ki $|a_2| \leq \frac{1}{2} \iff f \in S$. $f(z) = z - \frac{1}{2}z^2$ ise *extremal* bir fonksiyondur. Extremal fonksiyonlar sınır üzerinde bazı koşulları sağlayan, bazılarını ise sağlamayan türden fonksiyonlardır. Burada, $f(z) = z - \frac{1}{2}z^2$ fonksiyonu extremaldir, çünkü $|a_2| = \left| -\frac{1}{2} \right|$ olacak şekilde bir miktar dahi değeri yükseltirsek,

$f(z) = a + a_2z^2$ S sınıfına dahil olmaktan çıkar. Bu durumda, $|a_n|$ değerini en fazla ne kadar büyütürsek, $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$ S sınıfından olmaya devam eder gibi genel bir sorunla karşılaşmaktayız. Burada, Koebe fonksiyonunu ele alırsak,

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$$

$a_n = n$ gibi bir sonuç elde ederiz. Bu, Bieberbach tarafından ilk olarak 1916 senesinde öne sürdüğü meşhur *Bieberbach Sanısı*dır (de Branges, 1985).

3.3.4 Bieberbach sanısı

$\forall n, |a_n| \leq n$ olmak üzere $f \in S$ dir. Özel olarak $|a_2| \leq 2$ dir.

Koebe fonksiyonu altında \mathbb{D} imajı, reel eksen boyunca bir kesik dışında bütün \mathbb{C} düzlemini kapsadığından ve Koebe fonksiyonunun extremal olması sebebiyle, Bieberbach'ın sanısı makul görünüyor. 1984 yılında de Branges (1985) bunu kanıtlayana kadar doğru olduğunu söyleyemiyorduk.

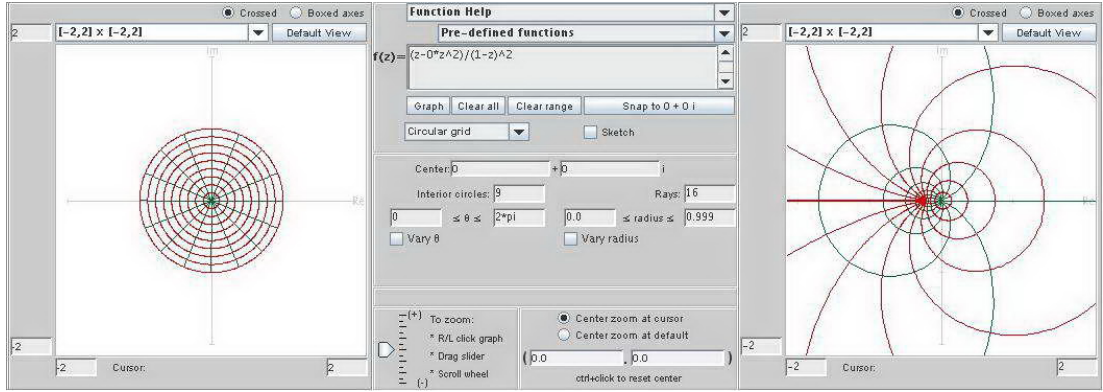
Eğer bir eşitsizliğin altsınırını yükseltip, üst sınırını küçültemiyorsak buna *keskin* (*sharp*) diyoruz. Bir eşitsizliğin keskin olduğu, istenilen özellikleri sağlayan bir fonksiyon bularak ve eşitsizliği bir eşitliğe dönüştürerek gösterilir. Eşitlik sağlayan böyle bir fonksiyona, *extremal* bir fonksiyon denir. Bieberbach sanısında, Koebe fonksiyonu bir extremal fonksiyondur (Gong, 1999).

Koebe fonksiyonunu extremal olmasıyla ilgili bir başka durum daha vardır. $f \in S$ ise, bu durumda $f(\mathbb{D})$ bütün kompleks düzlemi içermez. Yani, öyle bir $a \in \mathbb{C}$ vardır ki, $a \notin f(\mathbb{D})$ dir. Bu da bizi şu soruya götürür; $a \in f(\mathbb{D})$ olması için $|a|$ ne kadar küçük olmalıdır? Örnek olarak, $f(z) = z$ ise $|a| = 1$, ve $f(z) = \frac{z}{1-z}$ ise, $|a| = 1/2$ dir. Bu sorunun cevabı, her $f \in S$ için $|a| \geq \frac{1}{4}$ olmasıdır. Bu Koebe $\frac{1}{4}$ teoremi olarak bilinir. Koebe fonksiyonu aynı zamanda extremaldır, çünkü $|a| = \frac{1}{4}$ tür.

$0 \leq t \leq 1$ olmak üzere, $f(z) = \frac{z-tz^2}{(1-z)^2}$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $t = 0$ ve $t = 1$ olduğu takdirde $f(\mathbb{D})$ 'nin nasıl olacağını inceleyelim. $t > 1$ için ve $0 \leq k \leq 1$ olmak üzere $t = ik$ için $f(\mathbb{D})$ durumunu gözden geçirelim.

$0 \leq t \leq 1$ olmak üzere, $f(z) = \frac{z-tz^2}{(1-z)^2}$ fonksiyonunda, $t = 0$ ve $t = 1$ olduğunda $f(\mathbb{D})$ imajına bakalım.

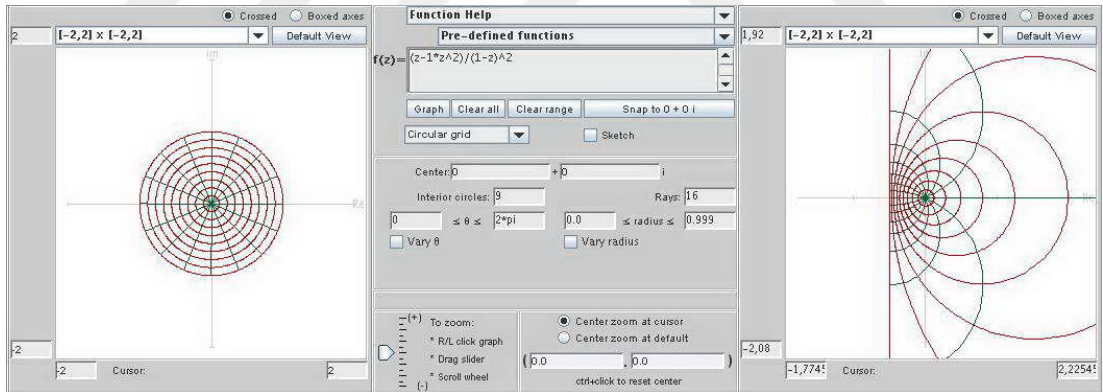
a) $t = 0$ iken ,



Şekil 21: $t = 0$ için $f(z) = \frac{z - tz^2}{(1 - z)^2}$ dönüşümü

Reel ekseninde orijinin sol tarafından $-1/2$ noktasından itibaren negatif yönde ve gitgide genişliği artan bir çıkarılmış parçayı grafiğin dışında bırakan yalınkat bir fonksiyon görülüyor.

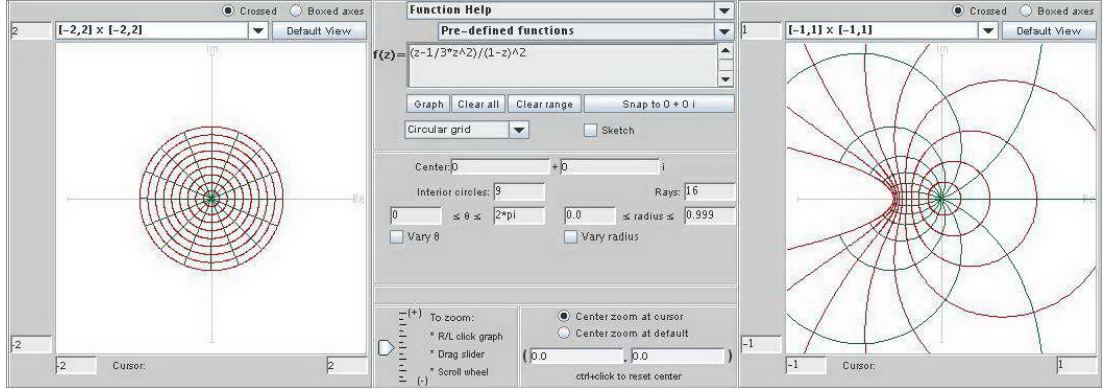
b) $t = 1$ ise,



Şekil 22: $t = 1$ için $f(z) = \frac{z - tz^2}{(1 - z)^2}$ dönüşümü

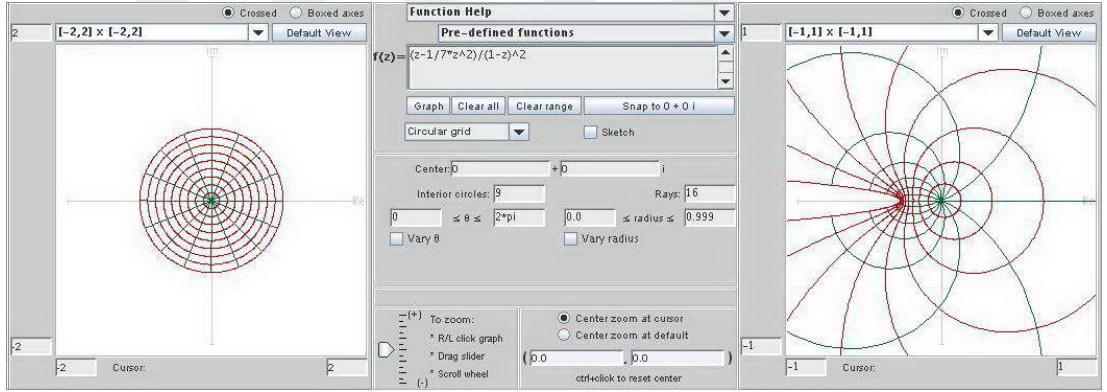
Reel ekseninde orijinin solunda $-1/2$ noktasından itibaren çıkarılmış parçanın iki kanadı sanal eksene paralel biçimde açılmış durumda ve imaj bölgemiz bu doğrunun sağ yanı.

$0 < t < 1$ olduğu takdirde, t değeri 0 ' a yaklaştıkça, örneğin $t = 1/3$ olduğunda,



Şekil 23: $t = 1/3$ için $f(z) = \frac{z - tz^2}{(1 - z)^2}$ dönüşümü

$t = 1/7$ olduğunda ise,

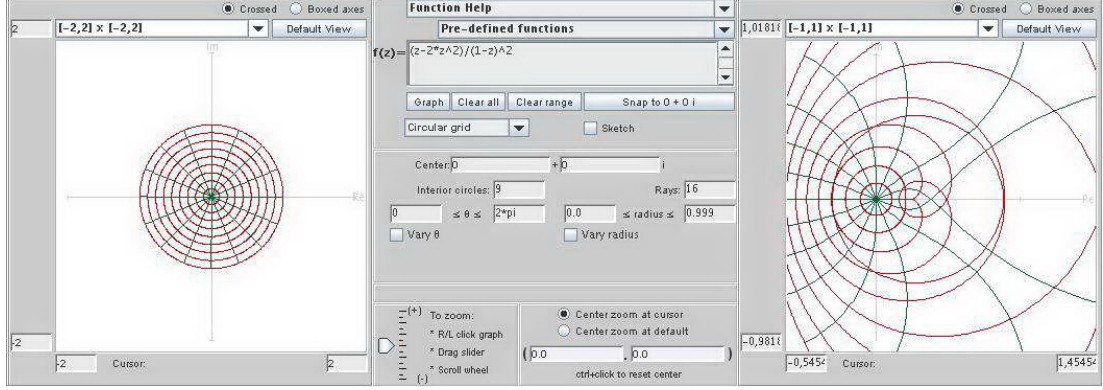


Şekil 24: $t = 1/7$ için $f(z) = \frac{z - tz^2}{(1 - z)^2}$ dönüşümü

görülebceği gibi Şekil 21'e doğru ilerliyor. t değeri 1 'e yaklaştıkça, imajımız Şekil 21'e daha fazla yaklaşıyor.

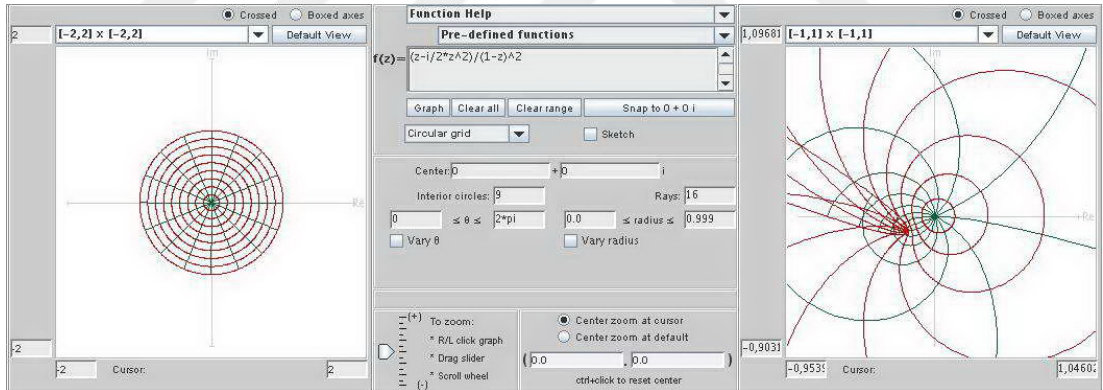
c) $t > 1$ için yalınkatlık bozulacağından fonksiyon S sınıfında artık bulunmuyor.

$t = 2$ iken,



Şekil 25: $t = 2$ için $f(z) = \frac{z - tz^2}{(1 - z)^2}$ dönüşümü

d) $t = ik$, $0 \leq k \leq 1$ durumu için de yalınkat olmadığı için S sınıfına dahil olmayan bir fonksiyon çıkıyor karşımıza.



Şekil 26: $t = ik$, $0 \leq k \leq 1$ için $f(z) = \frac{z - tz^2}{(1 - z)^2}$ dönüşümü

Normalize analitik yalınkat fonksiyonlar hakkında bir kaç özellik verelim:

1. (Rieman Dönüşüm Teoreminde Teklik) $a \in G \neq \mathbb{C}$ olmak üzere G basit bağlantılı bölge olsun. Riemann Dönüşüm Teoremi gereğince $f \in S$ dönüşümü, \mathbb{D} 'yi G üzerine $f(0) = a$ ve $f'(0) > 0$ olacak şekilde resmeder ve tektir (Ahlfors, 1973).
2. (de Branges Teoremi) $f \in S$ için $|a_n| \leq n$, $(\forall n \in \mathbb{N})$ (de Branges, 1985).

3. (Koebe $\frac{1}{4}$ Teoremi) S sınıfından her fonksiyonun gittiği imaj,
 $G = \{w : |w| < \frac{1}{4}\}$ çemberini içerir (de Branges, 1985).
4. $f \in S$ olsun. Bu durumda $f(\mathbb{D})$ fonksiyonunun, $R \geq 1$ olacak şekilde her bir
 $\{w : |w| = R\}$ çemberinde ihmal ettiği bir değer vardır. Özel olarak, $f(\mathbb{D})$ 'nin
 $\partial\mathbb{D}$ 'yi içerdiği bir $f \in S$ yoktur (Girela, 2013).



4 HARMONİK FONKSİYONLAR

4.1 S_H Sınıfı, Normalize Harmonik Yalınkat Fonksiyonlar

4.1.1 S_H sınıfı

Bieberbach sanısının de Branges tarafından ispatlanması ile kompleks harmonik fonksiyonların geçerli bir alt küme olarak S sınıfını içinde barındırıyor olması ve S_H 'da bazı özelliklerin S ile aynı olduğunun Clunie J. ve Sheil-Small (1984) tarafından keşfedilmesi aynı zamana dilimine rastlar.

Önce bir hatırlatma; $\phi(x, y)$ fonksiyonu harmonik ise $\iff \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$

Tanım 4.1. G 'de tanımlı olan sürekli bir $f = u + iv$ fonksiyonu, G 'de kompleks değerli, harmonik bir fonksiyon ise, u ve v G 'de harmoniktir (Kahramaner, 1995).

Bir $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonunun analitik olduğunu düşünmemiz için, f fonksiyonunun, $\bar{z} = x - iy$ kullanmadan sadece $z = x + iy$ terimleriyle ifade edilebilirliğine bakmamız, bunu anlamak için kullandığımız yollardan biridir. Bu şekilde, $f = z^2$ fonksiyonunun analitik olduğunu, $f = z\bar{z}$ fonksiyonunun analitik olmadığını kolaylıkla söyleyebiliriz. Bu fikri araştırmak için, $\zeta = z = x + iy$ ve $\xi = \bar{z} = x - iy$ diyelim. Bu gösterimi kullanarak x ve y kolaylıkla, $x = \frac{1}{2}(\zeta + \xi)$ ve $y = \frac{1}{2i}(\zeta - \xi)$ olarak bulunur. $f(x(\zeta, \xi), y(\zeta, \xi))$ fonksiyonunda zincir kuralını kullanarak ve $\zeta = z$ ve $\xi = \bar{z}$ olduğundan,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3)$$

denklemlerini elde edebiliriz (Ahlfors, 1973).

Örnek 4.1.

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \text{ analitikse, } \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Kanıt. (\Rightarrow)

f fonksiyonunun analitik olduğunu kabul edelim. Bu durumda Cauchy-Riemann

eşitlikleri sağlanacağından, $u_x = v_y$ ve $u_y = -v_x$ olacaktır.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y)$$

eşitliğinde yerine koyarsak $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ bulunur.

(\Leftarrow)

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ kabul edelim. Bu durumda,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y) = 0$$

$$u_x - v_y + iv_x + iu_y = 0$$

$$u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

eşitliğinden, reel kısımlar ve imajier kısımlar birbirine eşit olacağından, $u_x = v_y$ ve $u_y = -v_x$ bulunur. \square

Aşağıdaki teorem \mathbb{D} bölgesinde tanımlı kompleks değerli harmonik bir fonksiyonun, analitik fonksiyonlarla olan bağlantısını göstermektedir.

Teorem 4.2. *Basit bağlantılı bir G bölgesinde $f = u + iv$ harmonik ise, bu durumda h ve g analitik olacak şekilde $f = h + \bar{g}$ dir (Bshouty ve Hengartner, 1995).*

Kanıt. Basit bağlantılı bölgede u ve v nin real harmonik olduğunu düşünelim. Bu durumda $u = \Re K$ ve $v = \Im L$ olacak şekilde K ve L analitik fonksiyonları vardır. Bundan dolayı da,

$$f = u + iv = \Re K + i\Im L = \frac{K + \bar{K}}{2} + i\frac{L - \bar{L}}{2i} = \frac{K + L}{2} + \frac{\bar{K} + \bar{L}}{2} = h + \bar{g}$$

\square

h ve g analitik olduğundan, $f = h + \bar{g}$ aşağıdaki gibi seri gösterimine sahiptir,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \bar{z}^n$$

Tanım 4.2. S_H , birim çember üzerinde normalize edebileceğimiz, kompleks de-

ğerli harmonik yalınkat dönüşümler ailesi olsun.

$$S_H = \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ harmonik, yalınkat ve } f(0) = a_0, f_z(0) = a_1 = 1\}$$

ve

$$S \subset S_H^O = \{f \in S_H \mid f_{\bar{z}}(0) = b_1 = 0\}$$

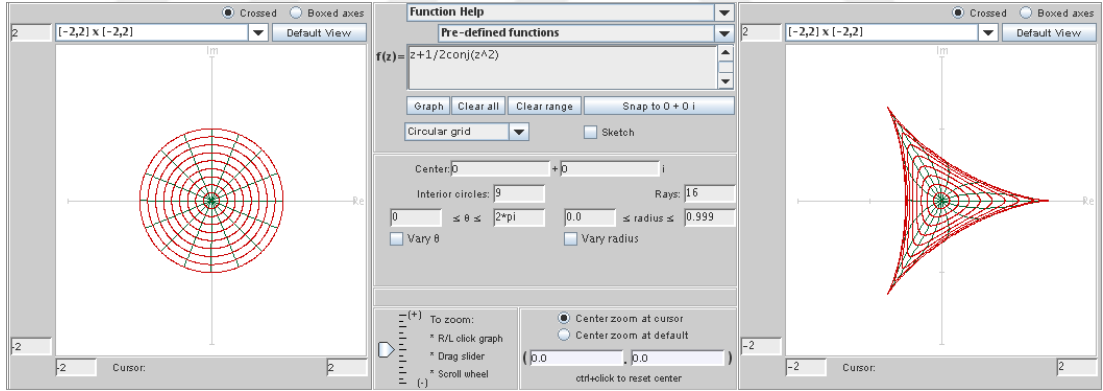
olacağından $S \subset S_H^O \subset S_H$ olur (Bshouty ve Hengartner 2005; Greiner, 2004).

Şu önemli örneğe dikkat edelim;

Örnek 4.3 (Harmonik Polinomial Dönüşüm).

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \frac{1}{2}z^2$$

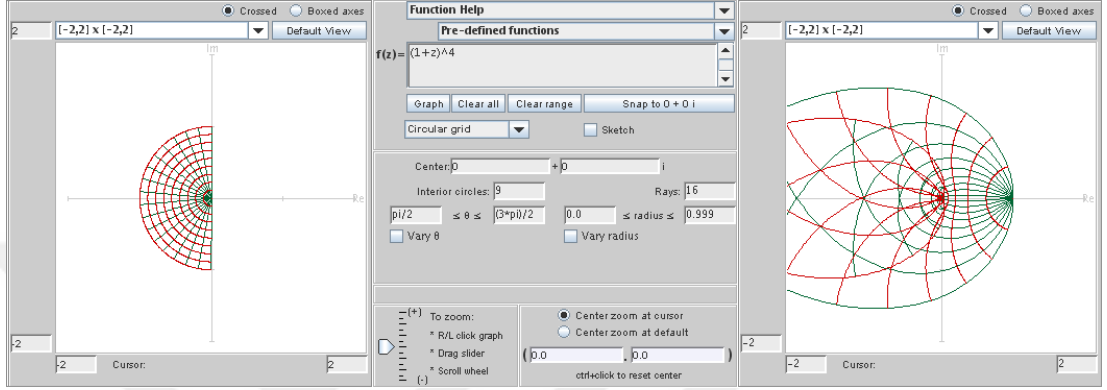
fonksiyonunu ele alalım. f 'in yalınkat ve S_H^O da bulunuyor. \mathbb{D} bölgesinin bu fonksiyon altındaki imajına bakalım. Burada f , \mathbb{D} 'yi üç köşeli bir hypocycloid ile sınırlandırılmış bir alanın iç bölgesine gönderiyor (Suffridge, 1998).



Şekil 27: Harmonik Polinomial Dönüşüm

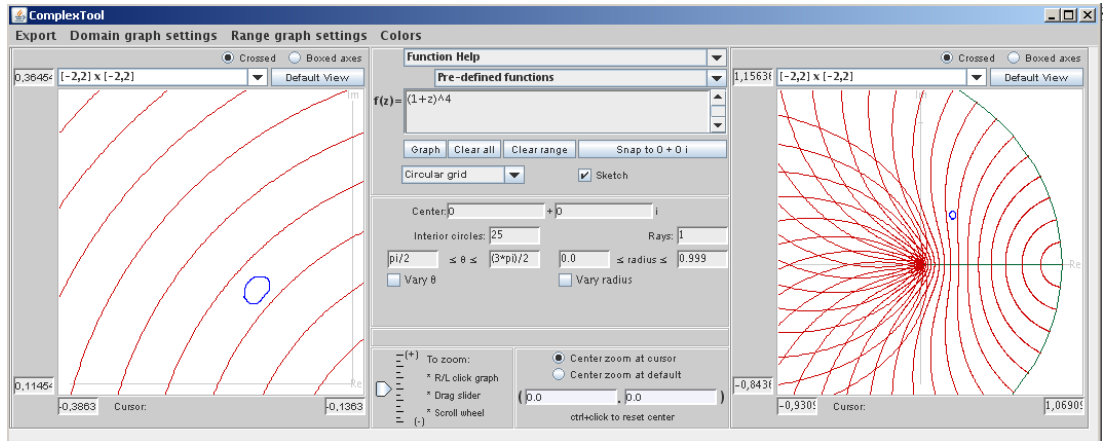
Harmonik yalınkat fonksiyonlarla ilgileniyoruz ancak, yalınkat fonksiyonların sonuçlarını irdelemek zordur. Bazen sadece lokal univalent fonksiyonları incelemek, genel anlamda yalınkat fonksiyonları incelemekten daha kullanışlı olabiliyor. Genelde, lokal yalınkat fonksiyonlar, lokal olarak (1-1) fonksiyonlar oluyor. Bu da $z_0 \in \mathbb{D}$ noktasında küçük bir komşulukta, yani z_0 merkezli küçük bir \mathbb{D} çemberinde bulunan bütün z noktaları için (1-1) olması demek oluyor. Burada dikkat edilecek özellik, lokal yalınkat fonksiyonların, bütün bir \mathbb{D} bölgesinde yalınkatlığı garantilemiyor olmasıdır (Hengartner ve Schober, 1987).

Örnek 4.4. $f(z) = (1+z)^4$ fonksiyonu \mathbb{D} 'de yalınkat değildir. Dikkat edilirse, \mathbb{D} 'de bulunan $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ve $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ noktalarının $f(z) = (1+z)^4$ altında $-\frac{1}{4}$ 'e gittiğini görebiliriz. Ancak, $f(z) = (1+z)^4$ \mathbb{D} 'de lokal yalınkattır. Burada lokal yalınkatlığın ne anlama geldiğini sezmemek mümkün. Bunu yapmak için Complex-Tool programı sayesinde $\{z = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \mid \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\}$ sektöründe f 'i çalıştıralım. $z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ noktasının soldaki bölge içinde kaldığı ve bölgenin f altındaki gö-



Şekil 28: $f(z) = (1+z)^4$

rüntüsünün yalınkat olmadığı görülebiliyor. Ancak bu f 'in lokal yalınkat olmadığı anlamına gelmez. Lokal yalınkatlık, z_0 noktasında bazı komşuluklar vardır ki, oraya ait tüm z noktalarında fonksiyon (1-1) olması demektir. Bunu görmek için aşağıdaki şekli inceleyelim.



Şekil 29: Lokal Yalınkatlık

Lokal yalınkatlığı incelemeye devam edelim.

Tanım 4.3. Eğer G 'de $J_f \neq 0$ ise $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu G 'de lokal yalınkattır.

J_f , $f = u + iv$ fonksiyonunun Jacobienidir;

$$\begin{aligned} J_f &= \det \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \\ &= \det \begin{vmatrix} (\Re h)_x + (\Re g)_x & (\Re h)_y + (\Re g)_y \\ (\Im h)_x - (\Im g)_x & (\Im h)_y - (\Im g)_y \end{vmatrix} \end{aligned}$$

F analitik fonksiyonu için, Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır; $(\Re F)_y = -(\Im F)_x$ ve $(\Im F)_y = (\Re F)_x$. Bundan dolayı,

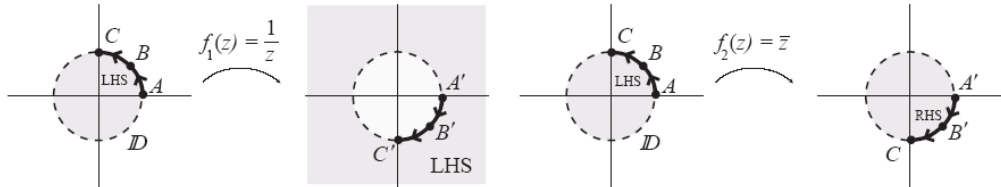
$$\begin{aligned} &= \det \begin{vmatrix} (\Re h)_x + (\Re g)_x & -(\Im h)_x - (\Im g)_x \\ (\Im h)_x - (\Im g)_x & (\Re h)_x - (\Re g)_x \end{vmatrix} \\ &= (\Re h)_x^2 - (\Re g)_x^2 + (\Im h)_x^2 - (\Im g)_x^2 \\ &= |h'|^2 - |g'|^2. \end{aligned}$$

Sonuç olarak $|h'|^2 - |g'|^2 \neq 0$ olması gerekiyor (Levy, 1936).

Lokal yalınkatlığın dışında, bu fonksiyonların bir diğer önemli özelliği *sense-preserving* (yön koruyan) olmasıdır. Şu iki örneğe bakalım. f_1 ve f_2 fonksiyonları, delinmiş bir $\mathbb{D} - \{0\}$ çemberinde tanımlı olsun;

$$f_1(z) = \frac{1}{z} \quad \text{ve} \quad f_2(z) = \bar{z}$$

alalım. Her iki fonksiyon da birim çemberi, $\partial\mathbb{D}$ olacak şekilde, kendi üzerine resmeder. Özel olarak her iki fonksiyon da $A = 1$, $B = e^{i\pi/4}$ ve $C = i$ noktalarını sırasıyla $A' = 1$, $B' = e^{-i\pi/4}$ ve $C' = -i$ noktalarına götürür.



Şekil 30: Yön koruyan ve korumayan iki fonksiyon

Şekilden de anlaşılacağı gibi, ilk örneğimizde, orijinalde A 'dan B 'ye ve oradan da C 'ye giderken \mathbb{D} bölgesi sol tarafta kalıyor. Buna *Left Hand Side - LHS* denir. Sağ

tarafıta kaldığı takdirde ise *Right Hand Side - RHS* denir. İmajda ise, sırasıyla A' , B' ve C' boyunca giderken sol tarafıta kalan alanı aldığımız için o da LHS dır. Bu durumda f_1 fonksiyonu LHS-LHS olduğundan sense-preserving/yönü koruyan fonksiyondur. \mathbb{D} bölgesine ait, $\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$ alalım. Bu nokta imajda $2 \in \mathbb{C} - \mathbb{D}$ bölgesinde bulunduğu için, bu fonksiyonun LHS-LHS olduğü anlaşılabilir. f_2 ise, $\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$ noktasını yine kendisine götürüyor. (İç bölgeyi iç bölgeye götürüyor ancak, imajda yön değışti.) O halde f_2 fonksiyonu LHS-RHS olduğundan sense-reversing/ yönü tersine çeviren bir dönüşümdür.

Daha net olarak ifade etmek gerekirse, saat yönünün tersine, yani pozitif yönde $\gamma \in G$ yolu üzerinde giderken sol tarafıta bir *sol taraf bölgesi - LHS* ve sağ tarafıta kalan bir de *sağ taraf bölgesi - RHS* bulunuyor. İmaj eğrimiz de $f(\gamma)$ olsun. f , LHS olan (RHS) orijinal bölgeyi, imajda da yön itibarıyla LHS (RHS) olacak şekilde resmediyorsa buna yön koruyan (sense preserving) diyoruz. Aksi halde yönü tersine çeviren (sense reversing) deniyor.

Bütün analitik fonksiyonlar yön koruyandır. Kompleks değerli harmonik fonksiyonların ise bazıısı yön korur, bazıları korumaz.

Şimdi şu aşağıdaki önemli tanımı verelim.

Tanım 4.4. $w(z) = g'(z)/h'(z)$ ifadesi, $f = h + \bar{g}$ eşitliğinin dilatasyonu olarak bilinir.

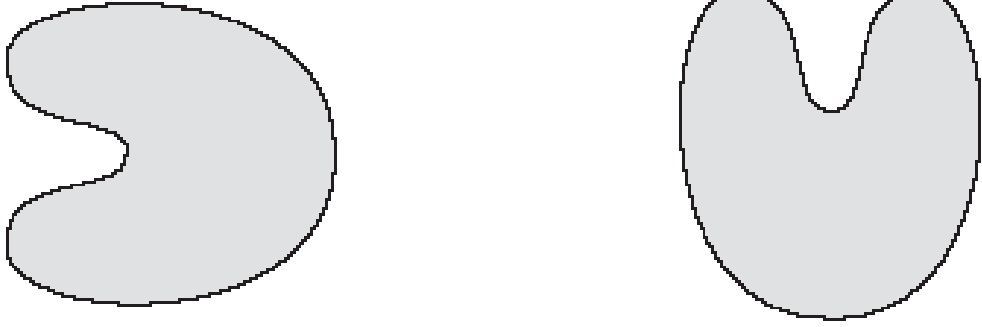
Harmonik bir fonksiyonun dilatasyonu ile lokal yalınkatlık ve yön koruma arasında bir bağlantı vardır.

Teorem 4.5 (Lewy, 1936). $f = g + \bar{h}$ fonksiyonu lokal yalınkat ve yön koruyan ise $\iff \forall z \in G$ için $|w(z)| < 1$ dir (Dorff, 1999).

4.1.2 Kesme tekniğı

Analitik olmayan yalınkat harmonik dönüşüm örnekleri bulmak zordur. Bu konuda çok kullanışlı bir metod Clunie ve Sheil-Small (1984) tarafından ortaya konulmuştur ve bu da *kesme tekniğı* olarak bilinir. Verilen, belirli özelliklere sahip bir F analitik fonksiyonu ve w dilatasyonu alınır. Sonrasında, $F = h - g$ ve $w = g'/h'$ yazılıp, h ve g hesaplanarak, $f = h + \bar{g}$ formunda bir yalınkat harmonik fonksiyon elde etmek mümkün olur (Hengartner ve Schober, 1986).

Tanım 4.5. Eğer her $a \in \mathbb{C}$ için $\Omega \cap \{a + te^{i\varphi} : t \in \mathbb{R}\}$ bağlantılı yada boş ise, Ω bölgesine, $e^{i\varphi}$ doğrultusunda konvektir denir. Özel olarak, reel eksene paralel her doğru, Ω ile bağlantılı bir kesişime sahipse, bu bölge yatay yönde konvektir - (CHD, convex in the horizontal direction) (Hengartner ve Schober, 1970).



Şekil 31: Yatay yönde konveks olan ve olmayan iki bölge.

Teorem 4.6. \mathbb{D} 'de lokal yalınkat olan harmonik bir fonksiyon $f = h + \bar{g}$ olsun ($\forall z \in \mathbb{D}, |w(z)| < 1$). $F = h - g$ fonksiyonu \mathbb{D} 'den CHD üzerine analitik yalınkat bir dönüşüm ise $\iff f = h + \bar{g}$ fonksiyonu da \mathbb{D} üzerinden CHD üzerine bir yalınkat dönüşümdür (Clunie ve Sheil-Small, 1984).

Kesme tekniğini hatırlayalım. Bir F yalınkat analitik fonksiyonu \mathbb{D} 'yi CHD bölgesine resmetsin ve $\forall z \in \mathbb{D}$ için

$|w(z)| < 1$ olacak şekilde bir w dilatasyonu verilsin. Bu durumda, F fonksiyonunu $F = h - g$ şeklinde ve w dilatasyonunu da $w = h'/g'$ olarak yazıp, h ve g 'yi çözerek, bir $f = h + \bar{g}$ yalınkat harmonik fonksiyonu inşa edebiliriz.

Analitik fonksiyonumuz $F(z) = z - \frac{1}{2}z^2 = h(z) - g(z)$ olsun. Burada F fonksiyonu $\partial\mathbb{D}$ bölgesini CHD olan tek uçlu bir epycycloide resmeder.

$w(z) = g'(z)/h'(z) = z$ olarak seçelim. Bu şekilde kesme tekniğini uygulayabiliriz. h ve g çözümlenerek,

$$\begin{aligned}
h'(z) - g'(z) = 1 - z &\Rightarrow h'(z) - zh'(z) = 1 - z \\
&\Rightarrow h'(z) = 1 \\
&\Rightarrow h(z) = z.
\end{aligned}$$

$g'(z) = zh'(z) = z$ olduğundan, $g(z) = \frac{1}{2}z^2$ olarak elde edilir. Bu arada h ve g 'nin normalize olduğuna dikkat edelim; $h(0) = 0$ ve $g(0) = 0$ dir. Böylece harmonik yalınkat fonksiyonu

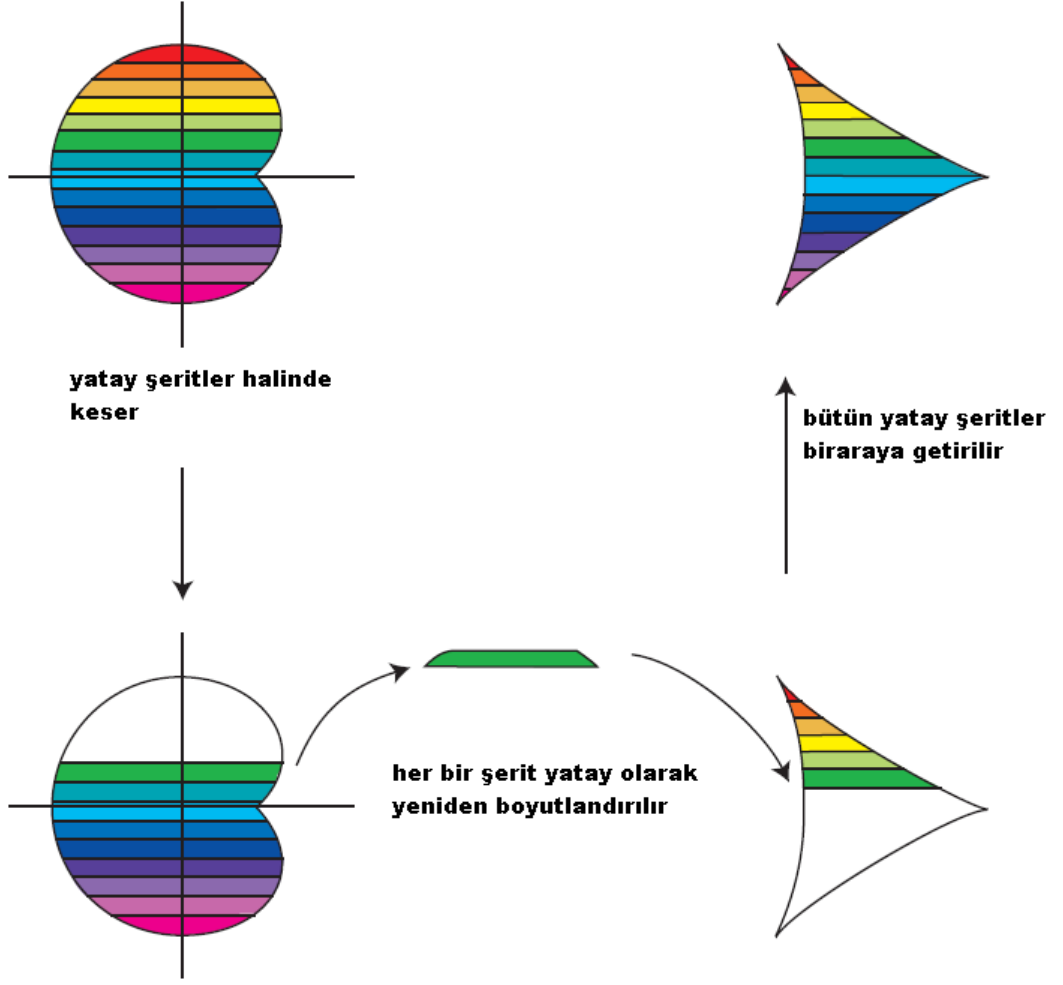
$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \frac{1}{2}\bar{z}^2 \in S_H^O$$

olarak, $F(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}^2 \in S$ analitik yalınkat fonksiyonu ve $w(z) = z$ dilatasyonu yardımıyla tespit etmiş oluruz.

$F = h - g$ yatay yönlü bir analitik yalınkat fonksiyon olsun. Bu durumda harmonik kesme,

$$f = h + \bar{g} = h - g + g + \bar{g} = h - g + 2\Re\{g\}$$

şeklinde olur (Dorff, 1999). Harmonik kesmenin analitik fonksiyondan farkı, reel bir fonksiyonun eklenmiş olmasıdır. Geometrik olarak, F yalınkat analitik fonksiyonu tarafından belirlenen, yatay yönlü konveks bir $F(\mathbb{D})$ imajını aldığımızı ve bunu yatay yönde çizikler halinde kestiğimizi, sonra da f harmonik yalınkat fonksiyonu ile ötelemeye ve büyütme/küçültme şeklinde dönüşüme uğradığını düşünelim (Şekil 32). $f(\mathbb{D})$ imajı da yatay yönde konvekstir (Greiner, 2004).



Şekil 32: KESME tekniği

Örnek 4.7. $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu $h(z) - g(z) = z$ ve $w(z) = z$ şeklinde olsun. $f \in S_H^O$ olması için h ve g 'yi hesaplayalım ve $f(\mathbb{D})$ görüntüsünü ComplexTool kullanarak elde edelim.

$$h(z) - g(z) = z \Rightarrow h'(z) - g'(z) = 1 \text{ ve } w(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)} = z \Rightarrow g'(z) = h'(z)z \text{ olur.}$$

Yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} h'(z) - zh'(z) = 1 &\Rightarrow h'(z) = \frac{1}{1-z} \text{ buradan da } h(z) = -\log(1-z) \\ &\Rightarrow g'(z) = \frac{z}{1-z} \text{ ve } g(z) = -z - \log(1-z) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$h(0) = 0$ ve $g(0) = 0$ olduğundan her iki fonksiyon da normalizedir. Bu şartları sağlayan harmonik yalınkat fonksiyon,

$$f(z) = -\log(1-z) - \bar{z} - \log(1-\bar{z})$$

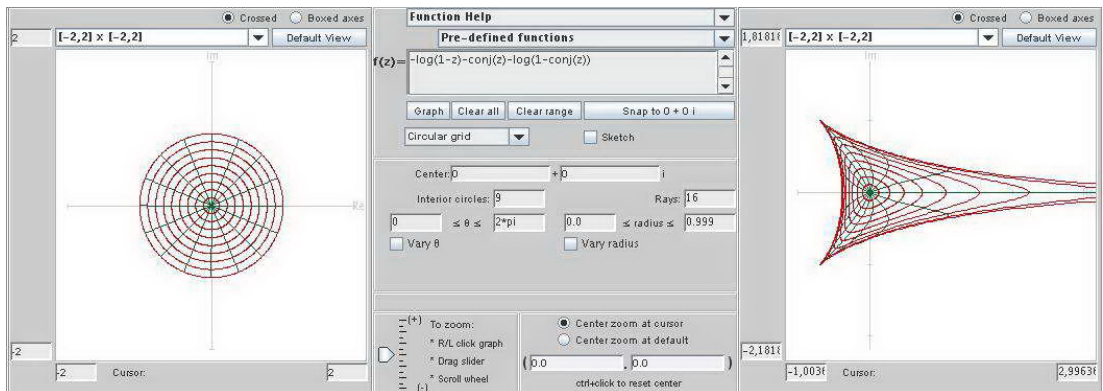
ve analitik fonksiyon da,

$$F(z) = -\cancel{\log(1-z)} + z + \cancel{\log(1-z)} = z$$

olarak bulunur.

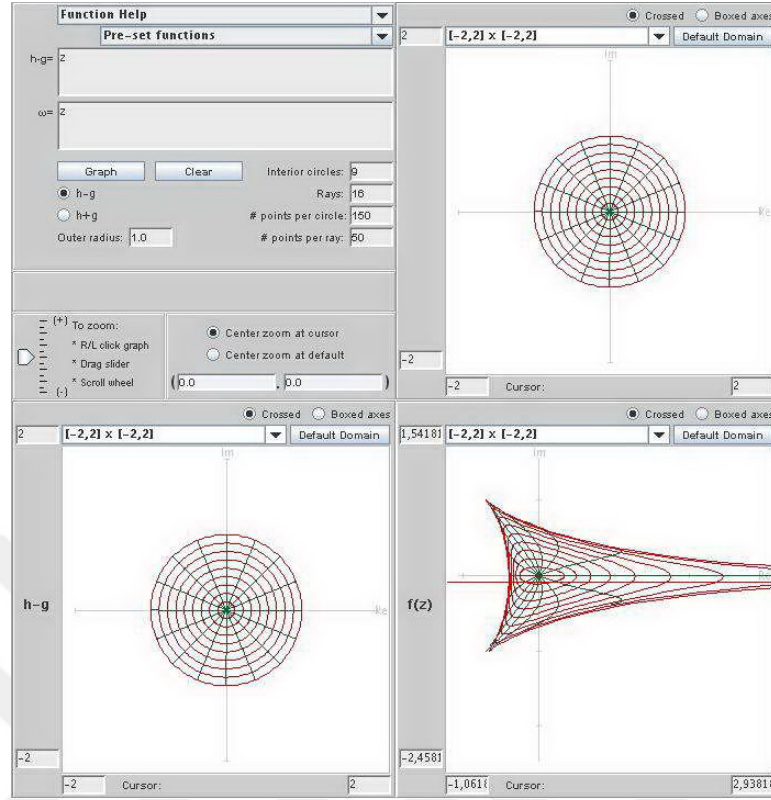
Bu fonksiyonları ComplexTool 'da yerleştirirsek,

a) $f(z) = -\log(1-z) - \bar{z} - \log(1-\bar{z})$ harmonik yalınkat fonksiyonun grafiği,



Şekil 33: $f(z) = -\log(1-z) - \bar{z} - \log(1-\bar{z})$ harmonik yalınkat fonksiyonu

b) $F(z) = z$ analitik yalınkat fonksiyonunun grafiği ise,



Şekil 34: $F(z) = z$ analitik yalınkat fonksiyonu

olarak elde edilir.

Teorem 4.6 ispatlamak için aşağıdaki lemma kullanılacak;

Yardımcı Teorem 4.8. $\Omega \subset \mathbb{C}$ bir CHD bölgesi, ρ ise Ω bölgesinde reel değerli ve sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$\Psi(w) = w + \rho(w)$ dönüşümü Ω 'da (1-1) ise $\iff \Psi$ lokal olarak (1-1) dir.

Eğer Ψ , (1-1) \Rightarrow görüntüsü de bir CHD bölgesidir.

Kanıt. (\Rightarrow) Trivialdir.

(\Leftarrow) $\Psi(w) = w + \rho(w)$ dönüşümünün (1-1) olmadığını kabul edelim. Bu durumda, $\Psi(w_1) = \Psi(w_2)$ olacak şekilde birbirinden farklı $w_1 = u_1 + iv_1, w_2 = u_2 + iv_2 \in \Omega$ noktaları vardır. ρ reel değerli olduğundan,

$$\Im(\Psi(w_1)) = \Im(w_1 + \rho(w_1)) = \Im(w_1) = v_1$$

olur. Benzer şekilde, $\Im(\Psi(w_2)) = v_2$ dir. $\Psi(w_1) = \Psi(w_2)$ olduğundan, ispat için

$v_1 = v_2$ olduğunu göstermeliyiz. $v_1 = v_2 = k \in \mathbb{R}$ sabit alalım. Şimdi,

$$\Phi(u) = u + \rho(u + ik)$$

şeklinde bir $\Phi : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü tanımlayalım. Ψ (1-1) olmadığı için,

$$\Phi(u_1) = u_1 + \rho(u_1 + k) = \Re\{\Psi(w_1)\} = \Re\{\Psi(w_2)\} = u_2 + \rho(u_2 + k) = \Phi(u_2)$$

Bundan dolayı, Φ kesinlikle bir monoton fonksiyon değildir. u_0 noktası, Φ değişimindeki monotonluklara ait bir nokta olsun. Φ , \mathbb{R} 'ye resmedildiğinden, u_0 komşuluğunda lokal olarak (1-1) olamaz. Bundan dolayı Φ (1-1) değildir ve böylece ψ de lokal (1-1) değildir. Geometrik olarak Ψ , yatay yönde bir (*kesme*) olarak davranacağından, görüntüsü de CHD dir (Greiner, 2004; Hengartner ve Schober, 1970). \square

Teorem 4.6'in ispatı;

Kanıt. (\Rightarrow)

$f = h + \bar{g}$ fonksiyonu (1-1) ve $\Omega = f(\mathbb{D})$ CHD olsun. Bu arada, $f = h - g + g + \bar{g} = h - g + 2\Re\{g\}$ olduğunu unutmayalım.

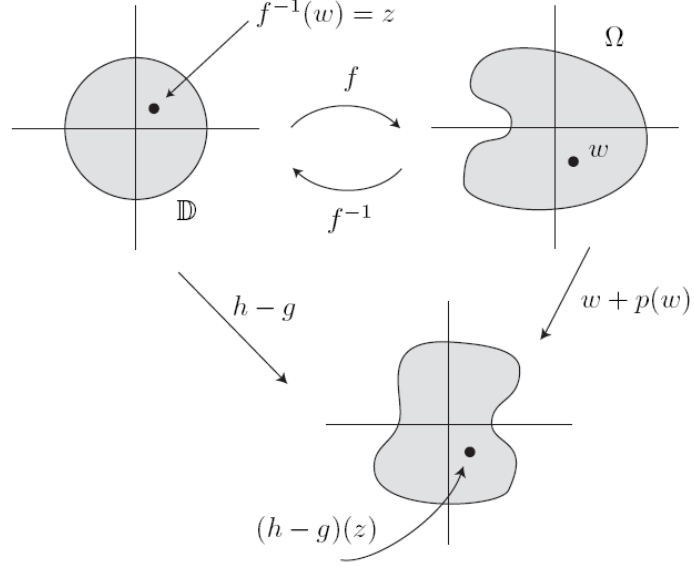
$$(h - g) \circ f^{-1}(w) = (f - 2\Re\{g\}) \circ f^{-1}(w) = w - 2\Re\{g(f^{-1}(w))\} = w + p(w)$$

p reel değerli ve sürekli olmak üzere, Ω üzerinde tanımlı olsun. f lokal (1-1) olduğundan, $|g'| < |h'| \iff g'(z) \neq h'(z)$, $\forall z \in \mathbb{D}$. Bundan dolayı $h - g$, \mathbb{D} üzerinde lokal (1-1) dir ve böylece $w \rightarrow w + p(w)$ de Ω üzerinde lokal (1-1) fonksiyonların bir kompozisyonu olarak, (1-1) lokaldir. 4.8 numaralı yardımcı teoremden, $w \rightarrow w + p(w)$ yalınkattır ve görüntüsü de CHD dir. O halde

$$(h - g)(z) = [w + p(w)] \circ f(z)$$

fonksiyonu da, yalınkat fonksiyonların bir kompozisyonu olduğundan yalınkattır ve görüntüsü CHD dir (Şekil 35).

(\Leftarrow) Şimdi, \mathbb{D} üzerinde $\Omega = f(\mathbb{D})$ CHD olacak şekilde $F = h - g$ yalınkat alalım.

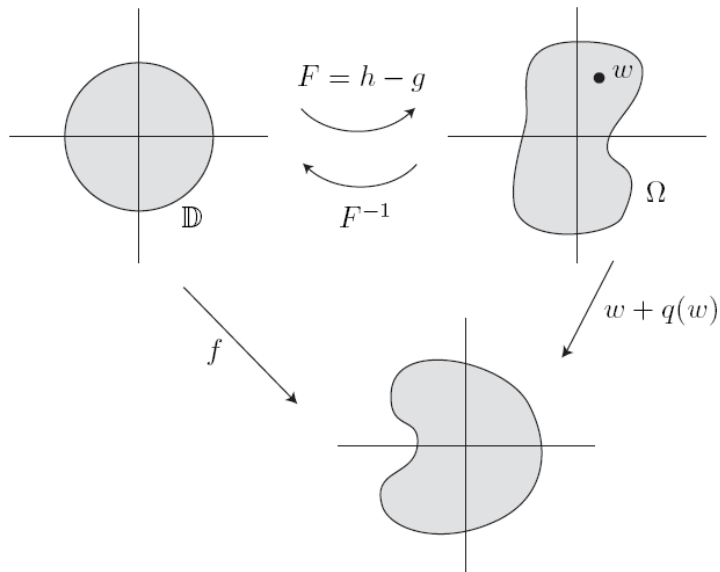


Şekil 35: $(h - g)(z) = [w + p(w)] \circ f(z)$ yalınkat fonksiyonunun yatay konveksliği

Bu durumda $f = F + 2\Re\{g\}$ ve

$$\begin{aligned} f(F^{-1}(w)) &= w + 2\Re\{g(F^{-1}(w))\} \\ &= w + q(w) \end{aligned}$$

lokal (1-1) fonksiyonların bir kompozisyonu olduğundan Ω üzerinde lokal (1-1) dir (Şekil 36). Yardımcı teorem 4.8 sebebiyle $f \circ F^{-1}$ de Ω üzerinde yalınkattır ve görüntüsü de CHD dir (Hengartner ve Schober, 1970).



Şekil 36: $f \circ F^{-1}$ yalınkat fonksiyonunun yatay konveksliği

5 ANALİTİK KISMI q -KONVEKS OLAN FONKSİYONLARIN HARMONİK TASVİRLERİ

q -Calculus

Bu kısımda q -calculus kavramını ele alacağız. Sabit bir $q \in (0,1)$ ve bir $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}$ alt kümesi alalım. Eğer $z \in \mathbb{B}$ olduğunda $qz \in \mathbb{B}$ ise, \mathbb{B} alt kümesine **geometrik küme** adı verilir ve $qz \in \mathbb{B}$ olmak üzere tüm $\{zq^n\}_0^\infty$ geometrik dizilerini içerir.

$|q| \neq 1$ olmak üzere, \mathbb{B} geometrik kümesinde reel yada kompleks değerli bir f fonksiyonu tanımlı olsun. **Q-difference operatörü** şu şekilde tanımlanmıştır (Kac ve Pokman, 2001);

$$D_q f(z) = \frac{f(z) - f(qz)}{(1-q)z}, \quad z \in \mathbb{B} \setminus \{0\} \quad (4)$$

q -difference operatörü (4) $0 \in \mathbb{B}$ olduğu takdirde Jackson difference operatörü olarak da bilinir ve $|q| < 1$ olmak üzere sıfır noktasında tanımlı olan q -türev

$$D_q f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(zq^n) - f(0)}{zq^n}, \quad z \in \mathbb{B} \setminus \{0\} \quad (5)$$

z 'ye bağlı olmaksızın limitin varlığını sağlar. Ayrıca sıfır noktasında q -türev

$$D_q f(0) = D_{q^{-1}} f(0) \quad (6)$$

şeklinde tanımlıdır.

q -difference operatörüne ait bu hipotez altında, aşağıdaki kurallar (Andrews, 1974; Kac ve Pokman, 2001) geçerlidir;

1) Fonksiyon $f(z) = z^n$ biçiminde ise,

$$D_q f(z) = D_q z^n = \frac{1 - q^n}{1 - q} z^{n-1}$$

2) $f(z)$ ve gz q -geometrik $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}$ kümesi üzerinde tanımlı olsun öyle ki, $\forall z \in \mathbb{B}$ için f ve g fonksiyonlarının q -türevleri bulunsun. Bu durumda,

(i) a ve b reel yada kompleks sabitler olmak üzere,

$$D_q(af(z) \pm bg(z)) = aD_q f(z) \pm bD_q g(z)$$

(ii) $D_q(f(z).g(z)) = g(z).D_q f(z) + f(qz)D_q g(z)$

(iii)

$$\begin{aligned} D_q \left(\frac{f(z)}{gz} \right) &= \frac{g(z)D_q f(z) - f(qz)D_q g(z)}{g(z).g(qz)} \\ &= \frac{g(qz)D_q f(z) - f(qz)D_q g(z)}{g(z).g(qz)}, \quad g(z).g(qz) \neq 0 \end{aligned}$$

(iv) Tersine olarak Jackson tarafından ortaya konulan q -integral

$$\int_0^z f(t) d_q t = z(1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(zq^n)$$

serinin yakınsaklığını sağlar (Andrews, 1974; Kac ve Pokman, 2001). Aşağıdaki teorem, calculus'un esas teoremi ile benzerlik taşır.

Teorem 5.1. *Sıfır noktasında q -regular olan bir f fonksiyonu, sıfırın da bulunduğu q -geometrik bir \mathbb{B} kümesinde tanımlı olsun. c sabit noktası \mathbb{B} kümesine ait olmak üzere,*

$$F(z) = \int_c^z f(\zeta) d_q \zeta, \quad (z \in \mathbb{B})$$

tanımlandığı takdirde, F de sıfır noktasında q -regulardır ve $z \in \mathbb{B}$ için $D_q F(z)$ mevcuttur. Aynı zamanda

$$D_q F(z) = f(z) \quad z \in \mathbb{B}$$

olmaktadır (Andrews, 1974; Kac ve Pokman, 2001).

Tersine: a ve b noktaları \mathbb{B} kümesine ait olduğu takdirde,

$$\int_a^b D_q f(\zeta) d_q \zeta = f(b) - f(a)$$

eşitliği geçerlidir.

3) q -differensiyel $d_q f(z) = f(z) - f(qz)$ şeklinde tanımlı olduğundan,

$$D_q f(z) = \frac{d_q f(z)}{d_q z} = \frac{f(z) - f(qz)}{(1-q)z} \Rightarrow d_q f(z) = \frac{f(z) - f(qz)}{(1-q)z} d_q z$$

4) Çok değerli ve sürekli bir $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ reel fonksiyonunun x_i değeri için kısmi q -türevi şu şekilde tanımlanır;

$$D_{q, x_i} f(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x}) - \varepsilon_{q, i} f(\vec{x})}{(1-q)x_i} \quad (x_i \neq 0, q \in (0, 1))$$

$$[D_{q, x_i} f(\vec{x})]_{x_i=0} = \lim_{x_i \rightarrow 0} D_{q, x_i} f(\vec{x}).$$

Burada $\varepsilon_{q, x_i} f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, qx_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ eşitliği sözkonusudur ve $\frac{\partial^k}{\partial_q x^k}$ operatörü yerine $D_{k, x}^k$ kullanacağız.

\mathbb{D} açık birim çemberde regular olan $\phi(z)$ fonksiyonlarının ailesi Ω olsun ve $\forall z \in \mathbb{D}$ için $|\phi(z)| < 1$ ve $\phi(0) = 0$ koşulları gerçeklensin. Açık birim çemberde regular olan $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots$ formunda olan ve

$$\left| p(z) - \frac{1}{1-q} \right| < \frac{1}{1-q}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad q \in (0, 1)$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar ailesini de $\mathcal{P}(q)$ ile gösterelim.

\mathbb{D} birim çemberinde regular olan ve $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ şartlarını sağlayan f fonksiyonlar ailesi A olsun. Eğer $f(z), p(z) \in \mathcal{P}(q)$ olmak üzere,

$$\frac{D_q(D_q f(z))}{D_q f(z)} = p(z), \quad z \in \mathbb{D}$$

koşulunu sağlıyorsa, $f(z)$ A 'nın bir elemanıdır ve bu durumda $f(z)$ 'ye **q -konveks fonksiyon** denir. Bu tür fonksiyonların sınıfı C_q ile gösterilir.

Teorem 5.2. (Polatoglu ve Yemisci, 2016) $p(z) \in \mathcal{P}(q) \iff p(z) \prec \frac{1+z}{1-qz}$

Kanıt. $p(z)$, $\mathcal{P}(q)$ sınıfının bir elemanı olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{1-q} = m \iff 1-q = \frac{1}{m} \Rightarrow 1 - \frac{1}{m} = q$$

olmak üzere,

$$\left| p(z) - \frac{1}{1-q} \right| < \frac{1}{1-q} \Rightarrow |p(z) - m| < M \quad (7)$$

olacaktır. Bundan dolayı,

$$\psi(z) = \frac{1}{m}p(z) - 1$$

fonksiyonunun modülü \mathbb{D} birim çemberinde en fazla birdir. Böylece,

$$\phi(z) = \frac{\psi(z) - \psi(0)}{1 - \overline{\psi(0)}\psi(z)} = \frac{\left(\frac{1}{m}p(z) - 1\right) - \left(\frac{1}{m} - 1\right)}{1 - \left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m}p(z) - 1\right)} \quad (8)$$

olduğundan $\phi(0) = 0$, $|\phi(z)| < 1$ dir. Bundan dolayı Schwarz lemması uyarınca

$$|\phi(z)| < |z| \quad (9)$$

olduğundan, 8 ve 9 gözönüne alınarak,

$$p(z) = \frac{1 + \phi(z)}{1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\phi(z)} \quad (10)$$

Böylece 8 eşitliği

$$p(z) \prec \frac{1+z}{1-qz}$$

sonucunu doğurur.

Tersine, $p(z)$ fonksiyonu \mathbb{D} bölgesinde analitik ve $p(0) = 1$ koşulunu gerçeklemek üzere

$$p(z) \prec \frac{1+z}{1-qz}$$

olduğu takdirde,

$$p(z) \prec \frac{1+z}{1-qz} \Rightarrow p(z) = \frac{1 + \phi(z)}{1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\phi(z)} \Rightarrow p(z) - m = m \frac{\frac{1-m}{m} + \phi(z)}{1 + \frac{1-m}{m}\phi(z)}.$$

Öte yandan

$$\left(\frac{\frac{1-m}{m} + \phi(z)}{1 + \frac{1-m}{m}\phi(z)} \right)$$

fonksiyonu birim çemberi kendi üzerine gönderdiğinden

$$|p(z) - m| = \left| m \frac{\frac{1-m}{m} + \phi(z)}{1 + \frac{1-m}{m}\phi(z)} \right| < M$$

olur ve bu da $p(z) \in \mathcal{P}(q)$ demektir. \square

Yardımcı Teorem 5.3 (Jack's Lemma). (Polatoglu ve Yemisci, 2016) $\phi(z)$, \mathbb{D} açık birim çemberinde $\phi(0) = 0$ ve $\forall z \in \mathbb{D}$ için $|\phi(z)| < 1$ olacak şekilde regular olsun. Eğer $|\phi(z)|$ maksimum değerini $|z| = r$ çemberi üzerindeki bir z_0 noktasında alıyorsa, bu durumda $m \geq 1$ reel sayı olmak üzere,

$$z_0 \phi'(z) = m \phi(z_0)$$

eşitliği geçerlidir.

Son olarak $f_1(z)$ ve $f_2(z)$, A kümesinin elemanları olsun. Eğer $f_1(z) = f_2(\phi(z))$ olacak şekilde bir $\phi(z) \in \Omega$ fonksiyonu varsa $f_1(z) \prec f_2(z)$ şeklinde gösterilir. $f_1(z) \prec f_2(z)$ olması için gerek ve yeter koşul $f_1(0) = f_2(0)$ olması ve $f_1(\mathbb{D}) \subseteq f_2(\mathbb{D})$ olması halinde

$$f_1(\mathbb{D}_r) \subseteq f_2(\mathbb{D}_r), \mathbb{D}_r = \{z \mid |z| < r, 0 < r < 1\}$$

olmasıdır (Dorff, 1999; Goodman, 1983).

6 ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Çalışmanın bu bölümünde analitik kısmı q -konveks olan harmonik fonksiyonların ve dilatasyonlarının, q -difference ve q -türev operatörleri altındaki davranışlarını saptayarak,

$$D_q h(z) = \frac{h(z) - h(qz)}{(1-q)z} = f(z), \quad D_q g(z) = \frac{g(z) - g(qz)}{(1-q)z} = \bar{f}_{\bar{z}}$$

olmak üzere, q -harmonik tasvirlerin,

$$SHC(q) = \left\{ f = h(z) + \overline{g(z)} \mid w_q(z) = \frac{D_q g(z)}{D_q h(z)} \prec b_1 \frac{1+z}{1-qz}, \quad h(z) \in C_q, \quad q \in (0,1) \right\}.$$

şeklindeki alt sınıfını araştıracağız

Yardımcı Teorem 6.1 (q -Jack' Lemma). (Polatoglu ve Yemisci, 2016) $\phi(z)$ \mathbb{D} 'de analitik ve $\phi(0) = 0$ olsun. Bu durumda $|\phi(z)|$ maksimum değerini $|z| = r$ çemberindeki bir z_0 noktasında alır ve $m \geq 1$ reel sayı olmak üzere $z_0 D_q \phi(z_0) = m \phi(z_0)$ eşitliği sözkonusudur.

Kanıt. q -difference operatörü ve Jack Lemmasını (5.3) kullandığımız takdirde,

$$D_q \phi(z) = \frac{\phi(z) - \phi(qz)}{(1-q)z} = \frac{\phi(z) - \phi(z_0)}{z - z_0}, \quad qz = z_0$$

elde ederiz. Eğer $z \rightarrow z_0$ olacak şekilde limit alırsak,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} D_q \phi(z) = D_q \phi(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\phi(z) - \phi(z_0)}{z - z_0} = \phi'(z_0)$$

olduğu görülür ve böylece

$$z_0 \phi'(z_0) = m \phi(z_0) = z_0 D_q \phi(z_0)$$

elde ederiz. □

Teorem 6.2. (Polatoglu ve Yemisci, 2016) \mathbb{D} birim çemberinde regular bir fonk-

siyon $f(z)$ olsun. Bu durumda,

$$D_q(\log f(z)) = \frac{D_q f(z)}{f(z)}$$

Kanıt. q -difference operatorü tanımından yola çıkarak,

$$D_q(\log f(z)) = \frac{\log f(z) - \log f(qz)}{z - qz} = \log \left(1 + h \frac{D_q f(z)}{f(z)} \right)^{\frac{1}{h}}$$

bulunur ve $h \rightarrow 0$ için limit alınırsa

$$D_q(\log f(z)) = \frac{D_q f(z)}{f(z)}$$

elde edilir. □

Teorem 6.3. (Polatoglu ve Yemisci, 2016) $f(z) \in C_q$ olsun. Bu takdirde,

$$z \frac{D_q f(z)}{f(z)} \prec \frac{1}{1 - qz}$$

Kanıt. Aşağıdaki gibi bir $\phi(z)$ fonksiyonu tanımlayalım,

$$z \frac{D_q f(z)}{f(z)} = \frac{1}{1 - q\phi(z)} \tag{11}$$

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad \text{ve} \quad z D_q f(z) = z + a_2 \frac{1 - q^2}{1 - q} z^2 + a_3 \frac{1 - q^3}{1 - q} z^3 + \dots$$

olduğundan $\phi(z)$ analitik ve iyi tanımlıdır.

$$\left. \frac{z D_q f(z)}{f(z)} \right|_{z=0} = 1 = \frac{1}{1 - q\phi(0)} \implies \phi(0) = 0$$

Her $z \in \mathbb{D}$ için $|\phi(z)| < 1$ olduğunu göstermemiz gerekiyor. Tersini varsayarsak, bu durumda $|\phi(z_0)| = 1$ olacak şekilde bir $z_0 \in \mathbb{D}$ vardır. C_q sınıfının tanımı gereğince,

teorem (5.2) ve altsıralama prensibini kullanarak,

$$A_r = \left\{ f(z) \mid f(z) \in C_q, \left| \left(1 + qz \frac{D_q(D_q f(z))}{D_q f(z)} \right) - \frac{1 + q^2 r^2}{1 - q^2 r^2} \right| \leq \frac{(1+q)r}{1 - q^2 r^2}, q \in (0, 1) \right\} \quad (12)$$

yazabiliriz.

Diğer taraftan, q -derivative tanımını, teorem (6.2)'i ve tanımladığımız 11 numaralı eşitliği kullanarak, gerekli işlemler yapıldıktan sonra,

$$1 + qz \frac{D_q(D_q f(z))}{D_q f(z)} = q \cdot \left(\frac{1}{1 - q\phi(z)} \right) + \frac{\log q^{-1}}{1 - q} \cdot \frac{z D_q \phi(z)}{1 - q\phi(z)} + \left(1 - q \frac{\log q^{-1}}{1 - q} \right) \quad (13)$$

elde ederiz. 13 eşitliğinde (6.1) numaralı lemmayı (q -jacks lemma) kullanarak,

$$1 + qz_0 \frac{D_q(D_q f(z_0))}{D_q f(z_0)} = \left[q \cdot \left(\frac{1}{1 - q\phi(z_0)} \right) + \frac{\log q^{-1}}{1 - q} \cdot \frac{m\phi(z_0)}{1 - q\phi(z_0)} + \left(1 - q \frac{\log q^{-1}}{1 - q} \right) \right] \notin A_r$$

eşitliğine ulaşırız, ancak bu eşitlik 12 numaralı ifadenin karşıt tersidir. Bundan dolayı her $z \in \mathbb{D}$ için $|\phi(z)| < 1$ dir. \square

Teorem 6.4. (Polatoglu ve Yemisci, 2016) $f(z) \in C_q$ olsun. Bu takdirde,

$$\left(\frac{r}{1 + qr} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \leq |f(z)| \leq \left(\frac{r}{1 - qr} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \quad (14)$$

Kanıt. Teorem (6.3) kullanıldığı takdirde, $z \frac{D_q f(z)}{f(z)} \prec \frac{1}{1 - qz}$ olduğundan ve $w = \frac{1}{1 - qz}$ dönüşümü $|z| = r$ çemberini $C(r) = \frac{1}{1 - q^2 r^2}$ merkezli, $\rho(r) = \frac{qr}{1 - q^2 r^2}$ yarıçaplı bir disk üzerine resmedecektir. Bundan dolayı

$$\left| z \frac{D_q f(z)}{f(z)} - \frac{1}{1 - q^2 r^2} \right| \leq \frac{qr}{1 - q^2 r^2} \quad (15)$$

yazabiliriz. 15 numaralı bu eşitsizlik aşağıdaki formda ifade edilebilir,

$$\frac{1}{1 + qr} \leq \Re z \frac{D_q f(z)}{f(z)} \leq \frac{1}{1 - qr} \quad (16)$$

Diğer taraftan q -kısmi differensiyel (q -partial differential) kuralı kullanılarak

$$\Re z \frac{D_q f(z)}{f(z)} = r \cdot \frac{\partial_q}{\partial r} \log |f(z)| \quad (17)$$

elde edilir. 16 ve 17 birlikte gözönüne alınarak,

$$\frac{1}{r(1+qr)} \leq \frac{\partial_q}{\partial_r} \log |f(z)| \leq \frac{1}{r(1-qr)} \quad (18)$$

yazabiliriz. Eğer 18 ifadesinin her iki tarafının da q -integralini alırsak 14'ü elde etmiş oluruz.

□

Teorem 6.5. (Polatoglu ve Yemisci, 2016) $f(z) \in C_q$ olsun. Bu takdirde,

$$(1+qr)^{-\frac{1-q^2}{q^2 \log q^{-1}}} \leq |D_q f(z)| \leq (1-qr)^{-\frac{1-q^2}{q^2 \log q^{-1}}} \quad (19)$$

Kanıt. $\left(\frac{1+z}{1-qz}\right)$ dönüşümü, $|z|=r$ çemberini $C(r) = \left(\frac{1+q^2r^2}{1-q^2r^2}, 0\right)$ merkezli ve $\rho(r) = \frac{(1+q)r}{1-q^2r^2}$ yarıçaplı bir disk üzerine resmedeceğinden ve $f(z) \in C_q$ olduğundan, alt-sıralama prensibini kullanırsak, bu durumda

$$\left| \left(1+qz \frac{D_q(D_q f(z))}{D_q f(z)}\right) - \frac{1+q^2r^2}{1-q^2r^2} \right| \leq \frac{(1+q)r}{1-q^2r^2} \quad (20)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlik aşağıdaki gibi bir formda yazılabilir,

$$-\frac{1+q}{q} \cdot \frac{1}{1+qr} \leq \frac{\partial_q}{\partial_r} \log |D_q f(z)| \leq \frac{1+q}{q} \cdot \frac{1}{1-qr}. \quad (21)$$

Burada, 21 ifadesinin her iki tarafının da q -integralini alarak 19'yi elde ederiz.

□

SHC(q) Üzerine Bazı Uyarılar

$f = h(z) + \overline{g(z)} \Rightarrow h(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$, $g(z) = b_1z + b_2z^2 + b_3z^3 + \dots$ olduğundan,

$$D_q h(z) = 1 + a_2 \frac{1-q^2}{1-q} z + a_3 \frac{1-q^3}{1-q} z^2 + \dots, \quad D_q g(z) = b_1 + b_2 \frac{1-q^2}{1-q} z + b_3 \frac{1-q^3}{1-q} z^2 + \dots$$

elde edilir ve böylece, $q \rightarrow 1$ için

$$D_q h(z) = h'(z), \quad D_q g(z) = g'(z), \quad w_q(z) = w(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)}$$

olmak üzere,

$$J_{f_q} = |D_q h(z)|^2 - |D_q g(z)|^2 \rightarrow J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$$

elde edilir.

Teorem 6.6. $f = h(z) + \overline{g(z)}$, $SHC(q)$ 'nin bir elemanı ise, bu durumda

$$\frac{g(z)}{h(z)} \prec b_1 \frac{1+z}{1-qz}.$$

Kanıt. Fonksiyonu şu şekilde belirleyelim,

$$\frac{g(z)}{h(z)} = b_1 \frac{1+\phi(z)}{1-q\phi(z)} \quad (22)$$

öyle ki $\phi(z)$ analitik ve

$$\frac{g(z)}{h(z)} \Big|_{z=0} = b_1 = b_1 \frac{1+\phi(0)}{1-q\phi(0)} \Rightarrow \phi(0) = 0$$

olsun. $\forall z \in \mathbb{D}$ için $|\phi(z)| < 1$ olduğunu göstermemiz gerekiyor.

Diğer taraftan, $w(z) = b_1 \frac{1+z}{1-qz}$ transformasyonu $|z| = r$ çemberini, $\alpha_1 = \Re b_1$, $\alpha_2 = \Re b_2$ olmak üzere $\rho(r) = \frac{|b_1|(1-q)r}{1-q^2r^2}$ yarıçaplı ve $C(r) = \left(\frac{\alpha_1(1-r^2)}{1-q^2r^2}, \frac{\alpha_2(1-q^2)}{1-q^2r^2} \right)$ merkezli bir çember üzerine tasvir eder. Subordination (altsıralama) prensibini ve $SHC(q)$ sınıf tanımını kullanarak,

$$w_q(\mathbb{D}_r) = \left\{ \frac{D_q g(z)}{D_q h(z)} \left| \left| \frac{D_q g(z)}{D_q h(z)} - \frac{b_1(1+qr^2)}{1-q^2r^2} \right| \leq \frac{|b_1|(1-q)r}{1-q^2r^2}, q \in (0, 1) \right\} \quad (23)$$

yazabiliriz.

22 eşitliğinde q-derivative alırsak,

$$\frac{D_q g(z)}{D_q h(z)} = b_1 \frac{1+\phi(qz)}{1-\phi(qz)} + \frac{(1+q)z D_q \phi(z)}{(1-q\phi(z))(1-q\phi(qz))} \cdot \frac{h(z)}{z D_q h(z)} \quad (24)$$

elde ederiz. Teorem 6.3 ve altsıralama prensibini kullanılarak,

$$\frac{D_q g(z)}{D_q h(z)} = b_1 \frac{1+\phi(qz)}{1-q\phi(qz)} + \frac{(1+q)z D_q \phi(z)}{(1-q\phi(qz))} \quad (25)$$

buluruz.

Şimdi, $|\phi(z_0)| = 1$ olacak şekilde bir $z_0 \in \mathbb{D}_r$ noktasının varlığını kabul edelim. q-Jack's Lemma (6.1) kullanılarak,

$$\frac{D_q g(z_0)}{D_q h(z_0)} = \left(b_1 \frac{1 + \phi(qz_0)}{1 - q\phi(qz_0)} + \frac{(1+q)m\phi(z_0)}{(1 - q\phi(qz_0))} \right) \notin w_q(\mathbb{D}_r).$$

buluruz ki, bu da 23 ifadesinin karşıt tersidir. Bundan dolayı $\forall z \in \mathbb{D}_r$ için $|\phi(z)| < 1$ dir ve böylece,

$$\frac{g(z)}{h(z)} \prec b_1 \frac{1+z}{1-qz}$$

elde etmiş oluruz. □



7 SONUÇ VE ÖNERİLER

Analitik kısmı q -konveks olan harmonik fonksiyonlar hakkında yaptığımız bu çalışma sonunda ulaşılan sonuçlardan biri, $SHC(q)$ sınıfından olan bir harmonik fonksiyonun co-analitik kısmına ait $g(z)$ fonksiyonu ile ilgilidir. Altsıralama prensibini uygulayarak, analitik $h(z)$ fonksiyonunun da yardımıyla co-analitik $g(z)$ fonksiyonunun nasıl bir aralıkta bulunduğu r 'ye ve b_1 katsayısına bağlı olarak anlaşılabilir. Bu da co-analitik kısmın q -türevinin sıkıştığı aralığın tespit edilmesini sağlar.

Sonuç 7.1. $f = h(z) + \overline{g(z)}$, $SHC(q)$ sınıfının bir elemanı olsun. Bu durumda,

$$|b_1| \left(\frac{1-r}{1+qr} \right) (1+qr)^{-\frac{1-q^2}{q^2 \log q^{-1}}} \leq |D_q g(z)| \leq |b_1| \left(\frac{1+r}{1-qr} \right) (1-qr)^{-\frac{1-q^2}{q^2 \log q^{-1}}}.$$

Kanıt. $\frac{g(z)}{h(z)} \prec b_1 \frac{1+z}{1-qz}$ olduğundan alt sıralama prensibi kullanılarak,

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(z)}{h(z)} - \frac{b_1(1+qr^2)}{1-q^2r^2} \right| &\leq \frac{|b_1|(1+q)r}{1-q^2r^2} \Rightarrow \frac{|b_1|(1-r)}{1+qr} \leq \left| \frac{g(z)}{h(z)} \right| \leq \frac{|b_1|(1+r)}{1-qr} \\ &\Rightarrow |h(z)| \cdot \frac{|b_1|(1-r)}{1+qr} \leq |g(z)| \leq |h(z)| \cdot \frac{|b_1|(1+r)}{1-qr}. \end{aligned}$$

Bu adımda teorem 6.4 kullanılarak,

$$\frac{|b_1|(1-r)}{1+qr} \left(\frac{r}{1+qr} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \leq |g(z)| \leq \frac{|b_1|(1+r)}{1-qr} \left(\frac{r}{1-qr} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}}$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$\frac{|b_1|(1-r)}{1+qr} \leq \left| \frac{D_q g(z)}{D_q h(z)} \right| \leq \frac{|b_1|(1+r)}{1-qr}$$

olduğundan,

$$|b_1| \left(\frac{1-r}{1+qr} \right) (1+qr)^{-\frac{1-q^2}{q^2 \log q^{-1}}} \leq |D_q g(z)| \leq |b_1| \left(\frac{1+r}{1-qr} \right) (1-qr)^{-\frac{1-q^2}{q^2 \log q^{-1}}}$$

buluruz. □

Bir diğ er sonuç ise analitik kısmı q -konveks olan harmonik fonksiyonun, analitik ve co-analitik kısımlarının q -türevlerine bağlı Jacobien'inin bulunduğu aralığı, yarıçap ve b_1 katsayısı yardımıyla aşağıdaki gibi tespit etmektir.

Sonuç 7.2. $SHC(q)$ sınıfının bir elemanı $f = h + \bar{g}$ olsun. Bu durumda,

$$F_1(q, |b_1|, r) = (1 - qr)^{-\frac{1-q^2}{q^2 \log q^{-1}}} \frac{[(1 + |b_1|) + (q - |b_1|)r][(1 + |b_1|) - (q + |b_1|)r]}{(1 + qr)^2}$$

$$F_2(q, |b_1|, r) = (1 + qr)^{-\frac{1-q^2}{q^2 \log q^{-1}}} \frac{[(1 - |b_1|) - (q + |b_1|)r][(1 + |b_1|) + (|b_1| - q)r]}{(1 - qr)^2}$$

olmak  zere,

$$F_2(q, |b_1|, r) \leq |J_{f_q}(z)| \leq F_1(q, |b_1|, r). \quad (26)$$

Kanıt.

$$J_{f_q}(z) = |D_q h(z)|^2 - |D_q g(z)|^2 = |D_q h(z)|^2 \cdot (1 - |w_q(z)|^2),$$

ve

$$\frac{|b_1|(1 - r)}{1 + qr} \leq |w_q(z)| \leq \frac{|b_1|(1 + r)}{1 - qr}$$

olduğundan 26 elde edilir.

□

KAYNAKLAR

- Ahlfors L., (1973), Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory, McGraw-Hill, Inc., New York.
- Andrews, G.E. (1974), Application of basic hypergeometric functions, SIAM REW 16 R.I.1969.
- Bshouty D., Hengartner W., (1995), Problems and conjectures for harmonic mappings, from a workshop held at the Technion, Haifa.
- Bshouty D., Hengartner W., (2005), Univalent harmonic mappings in the plane, Handbook of complex analysis: geometric function theory, 479-506, Elsevier, Amsterdam.
- Clunie J., Sheil-Small, (1984) , Harmonic univalent functions, 3-25.
- de Branges L., (1985), A proof of the Bieberbach conjecture, 137–152, Acta Mathematica, 154,
- Dorff M., (1999) Harmonic univalent mappings onto asymmetric vertical strips, in “Proceedings of the Third CMFT '97 Conference” , 171–175, World Scientific.
- Girela D. (2013), Basic Theory of Univalent Functions, Doc-Course IMUS conference paper.
- Goodman, A. W. (1983) Univalent Functions, I-II. Tampa Florida: Mariner Publ. Co.
- Gong, S. (1999) The Bieberbach Conjecture. American Mathematic Society International Press. Providence, R.I.
- Greiner P., (2004), Geometric properties of harmonic shears, Computational Methods and Functions Theory, 77-96.
- Hengartner W., Schober G., (1970), On schlicht mappings to domains convex in one direction, Commentarii Mathematici Helvetici, 45, 303-314.
- Hengartner W., Schober G., (1986), Harmonic mappings with given dilatation, Journal London Mathematical Society, 473-483.
- Hengartner W., Schober G., (1987), Univalent harmonic functions, Transactions of the American Mathematical Society, 1-31.
- Kac V., Pokman C., (2001) Quantum Calculus, Springer-Verlag New York
- Kahramaner Y., (1995), Gerçel ve Karmaşık Analiz, İstanbul, Aşkan Yayınları
- Lewy H., (1936) , On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings, Bulletin of the American Mathematical Society. 42 989-992
- Polatoglu Y., Yemisci A., (2016 submitted) Growth and distortion theorems for q -convex functions, Mathematische Zeitschrift

Pommerenke C., (1975), Univalent Functions, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen.

Pommerenke C., (1992), Boundary Behaviour of Conformal Maps. Berlin-New York: Springer-Verlag.

Sheil-Small, (1990), Constants for planar harmonic mappings, Journal London Mathematical Society 2, 237-248.

Suffridge T., (1998), Harmonic univalent polynomials, Complex Variables and Elliptic Equations, 35, 93-107.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	Kaya Ademoğulları
Doğum Yeri ve Yılı	İstanbul 1970
Medeni Hali	Evli
Yabancı Dili	İngilizce
E-posta	kayaademogullari@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise	Eyüp Otakçılar Lisesi
Lisans	İstanbul Üniv. Fen Fak. Matematik Bölümü

Mesleki Deneyim

Matematik Öğretmenliği	2011 - ... (Devam ediyor)
------------------------	---------------------------

Yayımları

Ademogullari K., Kahramener Y., Polatoğlu Y., (2016). q -harmonic mappings for which analytic part is q -convex functions. Non Linear Analysis and Differential Equations. 283-293. HIKARI LTD.