İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEISENBERG GRUBUNDA HARDY, RELLICH EŞİTSİZLİKLERİ VE BU EŞİTSİZLİKLERİN BAZI UYGULAMALARI

Abdullah YENER

Danışman
Prof. Dr. İsmail KÖMBE

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
İSTANBUL - 2017

KABUL VE ONAY SAYFASI

Abdullah YENER tarafından hazırlanan **"Heisenberg Grubunda Hardy, Rellich Eşitsizlikleri ve Bu Eşitsizliklerin Bazı Uygulamaları"** adlı tez çalışması 10/07/2017 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde başarı ile savunularak, İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	**Prof. Dr. İsmail KÖMBE** İstanbul Ticaret Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Doğan KAYA** İstanbul Ticaret Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Yasemin KAHRAMANER** İstanbul Ticaret Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. İbrahim KIRAT** İstanbul Teknik Üniversitesi	İbrahim Kırat
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Semra AHMETOLAN** İstanbul Teknik Üniversitesi	....

Onay Tarihi: 21/07/2017

Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK
Enstitü Müdürü

AKADEMİK VE ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

Tarih: 11/07/2017
Abdullah YENER

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Doktora Tezi

HEISENBERG GRUBUNDA HARDY, RELLICH EŞİTSİZLİKLERİ VE BU EŞİTSİZLİKLERİN BAZI UYGULAMALARI

Abdullah YENER

İstanbul Ticaret Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İsmail KÖMBE
2017, 113 sayfa

Bu tezde; ilk olarak, sırasıyla ağırlıklı $p-$alt-Laplace ve ağırlıklı $p-$biharmonik doğrusal olmayan kısmi diferansiyel eşitsizliklerinden yola çıkılarak, $\mathbb{H}^n$ Heisenberg grubunda genel ağırlıklı L^p Hardy ve L^p Rellich eşitsizlikleri ispatlanmıştır. Burada kullanılan metodlar, $\mathbb{H}^n$ üzerinde hem bilinen hem de yeni ağırlıklı Hardy, Rellich ve Heisenberg-Pauli-Weyl tipi eşitsizlikler elde etme adına oldukça pratik ve üretkendir. $\mathbb{H}^n$'de veya $\mathbb{H}^n$'nin bazı alt bölgelerinde çeşitli ağırlık fonksiyonlarına sahip Hardy ve Rellich tipi eşitsizlikler elde etmek için, sırasıyla ağırlıklı $p-$alt-Laplace ve ağırlıklı $p-$biharmonik eşitsizliklerini sağlayan uygun fonksiyonları belirlemek yeterlidir. Bu durum, tezin uygulama kısımlarında birçok somut örnek vererek gösterilmiştir.

Daha sonra, $\mathbb{H}^n$ Heisenberg grubunda, uygun bir fonksiyonun ikinci mertebeden türevi ile birinci mertebeden türevi arasında bir ilişki kuran en iyi sabitli L^p Rellich-II tipi bir eşitsizlik elde edilmiş ve bu eşitsizlikten faydalanılarak ikinci mertebeden Heisenberg-Pauli-Weyl tipi bir eşitsizliğin de geçerli olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, en iyi sabite sahip ağırlıklı L^p Rellich-II eşitsizliğinin ispatında kullanılan tekniğe benzer bir teknikle, Rellich-Hardy-Poincaré tipi yeni bir eşitsizlik bulunmuştur.

Son olarak, $\mathbb{H}^n$ içindeki düzgün sınırlı bir Ω bölgesinde geliştirilmiş iki-ağırlıklı genel L^p Hardy ve L^p Rellich tipi eşitsizlikler üzerine bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bu tipten Hardy ve Rellich eşitsizliklerinin ispatındaki temel dayanak noktalardan biri bazı doğrusal olmayan kısmi diferansiyel eşitsizliklerin varlığı olmuştur. Bu diferansiyel eşitsizliklerin çözümlerinden yola çıkılarak; üstel, logaritmik ve radyal tipli çok çeşitli ağırlık fonksiyonlarına sahip geliştirilmiş L^p Hardy ve L^p Rellich eşitsizliklerine bazı somut örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ağırlıklı Hardy eşitsizliği, ağırlıklı Rellich eşitsizliği, ağırlıklı Rellich-II eşitsizliği, en iyi sabit, Heisenberg grubu, Heisenberg-Pauli-Weyl eşitsizliği, kalan terim, $p-$alt-Laplace denklemi, $p-$biharmonik denklem.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

HARDY, RELLICH INEQUALITIES AND THEIR SOME APPLICATIONS ON THE HEISENBERG GROUP

Abdullah YENER

İstanbul Commerce University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. İsmail KÖMBE
2017, 113 pages

In this theses, firstly, general weighted L^p Hardy and L^p Rellich inequalities are proved on the Heisenberg group $\mathbb{H}^n$ via weighted $p-$sub-Laplace and weighted $p-$biharmonic nonlinear partial differential inequalities, respectively. The methods used herein are quite practical and constructive for obtaining both known and new weighted Hardy, Rellich and Heisenberg-Pauli-Weyl type inequalities on $\mathbb{H}^n$. To construct various weighted Hardy and Rellich type inequalities on $\mathbb{H}^n$ or on some other domains in $\mathbb{H}^n$, it is enough to determine the proper model functions that satisfy weighted $p-$sub-Laplace and weighted $p-$biharmonic inequalities, respectively. This situation is demonstrated by giving several concrete examples in the application sections of the thesis.

Afterwards, on the Heisenberg group $\mathbb{H}^n$, a sharp weighted L^p Rellich-II type inequality which connects first to second order derivatives of an appropriate function is established and by utilizing this sharp inequality it is also shown that a second order Heisenberg-Pauli-Weyl type inequality is valid. Furthermore, with a similar technique as in the proof of sharp weighted L^p Rellich-II inequality, a new Rellich-Hardy-Poincaré type inequality is discovered.

Finally, some new results on improved two-weight general L^p Hardy and L^p Rellich type inequalities on smooth bounded domains Ω in $\mathbb{H}^n$ are obtained. The primary tool which is employed in constructing these type of Hardy and Rellich inequalities is existence of some particular nonlinear partial differential inequalities. By specializing the solutions of these differential inequalities, some concrete examples of improved L^p Hardy and L^p Rellich inequalities including radial, logarithmic and exponential weights are also given.

Keywords: Best constant, Heisenberg group, Heisenberg-Pauli-Weyl inequality, $p-$biharmonic equation, $p-$sub-Laplace equation, remainder term, weighted Hardy inequality, weighted Rellich inequality, weighted Rellich-II inequality.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı veren ve çalısmamın her aşamasında bana rehberlik eden, ilgi ve önerileri ile hep yanımda olan danışman hocam, Prof. Dr. İsmail Kömbe'ye sonsuz teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Bugünlere gelmeme vesile olan, maddi ve manevi yardımlarını benden esirgemeyen aileme, doktora eğitimim süresince tüm sıkıntılarıma ortak olan sevgili eşim Eda Yener'e bütün samimiyetim ile şükranlarımı sunarım.

Tezi yazım ve imla açısından kontrol edip çeşitli düzeltmelerde bulunan çalışma arkadaşım Elif Nuray'a ayrıca teşekkür ederim.

Abdullah YENER

İSTANBUL, 2017

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}^n$	$n-$boyutlu Öklid uzayı
$C(\Omega)$	Ω bölgesindeki sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_0^k(\Omega)$	Ω bölgesinde k. mertebeden sürekli türevlenebilir kompakt desteğe sahip fonksiyonların uzayı
$C_0^\infty(\Omega)$	Test fonksiyonları uzayı
∇	Öklid uzayında tanımlı gradyan vektörü
Δ	Öklid uzayında tanımlı Laplace operatör
$B(x_0, R)$	Öklid uzayındaki x_0 merkezli R yarıçaplı açık yuvar
ω_n	$n-$boyutlu $B(0,1)$ birim yuvarının yüzey alanı
$L^p(\Omega)$	Ω bölgesindeki p. kuvvetten integrallenebilir fonksiyonların uzayı
$L^p_{loc}(\Omega)$	Ω bölgesindeki p-yerel integrallenebilir fonksiyonların uzayı
$W^{k,p}$	Sobolev uzayı
$W_0^{k,p}$	C_0^∞ uzayının $W^{k,p}$ uzayındaki kapanışı
H_0^k	$W_0^{k,p}$ Sobolev uzayının $p=2$ durumu
$\mathbb{H}^n$	Heisenberg grubu
ξ	Heisenberg grubundaki tipik bir nokta
$\circ$	Heisenberg grup işlemi
X_i, Y_i	Heisenberg grubunda tanımlı vektör alanları
$\nabla_{\mathbb{H}^n}$	Heisenberg gradyan vektörü
$\Delta_{\mathbb{H}^n}$	Kohn-Laplace operatör (alt-Laplace operatör)
$\Delta_{\mathbb{H}^n,p}$	Heisenberg grubunda tanımlı $p-$alt-Laplace operatör
$\Delta^2_{\mathbb{H}^n,p}$	$p-$biharmonik operatör ($p-$bi-Kohn-Laplace operatör)
Q	Heisenberg grubunun homojen boyutu
δ_λ	Heisenberg dilatasyon dönüşümü
$d\xi$	$\mathbb{R}^{2n+1}$ uzayındaki Lebesgue ölçüsü
$\rho = \|\xi\|_{\mathbb{H}^n}$	Heisenberg grubundaki doğal norm fonksiyonu
$d_{\mathbb{H}^n}$	Heisenberg grubundaki doğal uzaklık fonksiyonu
$B_{\mathbb{H}^n}(\xi_0, R)$	Heisenberg grubundaki ξ_0 merkezli R yarıçaplı açık yuvar

1 GİRİŞ

Bir fonksiyonun kendisi ile türevlerini ihtiva eden integral eşitsizlikleri diferansiyel denklemler, spektral teori, harmonik analiz, diferansiyel geometri ve matematiğin bunlar gibi pek çok alanında çok çeşitli şekillerde yıllardan beri karşımıza çıkmaktadır. Özellikle tekil potansiyele sahip doğrusal veya doğrusal olmayan bazı kısmi diferansiyel denklemlerdeki çözümlerin incelenmesinde, türev operatörleriyle ilgili olan eşitsizliklerin rolü oldukça önemlidir. Referans olarak (Baras ve Goldstein, 1984; Okawaza, 1996; Brezis ve Vázquez, 1997; Crespo ve Alonso, 2000; Detalla vd., 2012) kaynaklarına bakılabilir. Bundan dolayı; integral eşitsizliklerine olan ilgi hiçbir zaman azalmayıp, aksine artarak devam etmektedir.

Ortalama değer teoremi gereğince, $C_0^{\infty}(0,\infty)$ sınıfından olan herhangi bir u fonksiyonu için

$$\frac{u(t)}{t} = \frac{u(t)-u(0)}{t-0} = u'(t_0)$$

eşitliğinin gerçeklendiği bir $t_0 \in (0,t)$ değeri vardır. O halde, bu u fonksiyonları için

$$c(p)\int_0^{\infty} \frac{|u|^p}{t^p}dt \leq \int_0^{\infty} |u'|^p\, dt, \quad c(p) > 0 \tag{1.1}$$

tipindeki bir eşitsizliğin geçerli olmasını beklemek çok doğaldır. Bu bağlamda; İngiliz matematikçi Hardy,

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t f ds\right)^p dt \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} f^p dt \tag{1.2}$$

integral eşitsizliğinin $f \geq 0$, $p > 1$ ve $\int_0^{\infty} f^p dt < \infty$ iken geçerli olduğunu 1920 yılında yayınladığı makalesinde ifade etmiş ve daha sonra 1925 yılındaki çalışmasında ispatını vermiştir (Hardy, 1920; 1925). Gerçekten de, (1.2) eşitsizliğinde $u(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ olarak alınırsa bu eşitsizlik (1.1) eşitsizliğine indirgenir. Hardy'nin (1.2) eşitsizliğini araştırmasındaki motivasyon kaynağı, David Hilbert'e ait olan serisel bir eşitsizliğin yeni ve daha basit bir ispatını verme isteğidir. Öte yandan, (1.2) eşitsizliğindeki $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ sabiti en iyi sabittir. Yani daha büyük bir sabit ile yer değiştirildiğinde (1.2) eşitsizliği geçerliliğini yitirir. Bu sabitin en iyi sabit olduğuna dikkatleri Hardy (1925) çekmiş olsa da, ispat Landau (1926) tarafından verilmiştir.

Kısa bir süre sonra, (1.2) eşitsizliğinin ilk ağırlıklı hali yine Hardy tarafından

$$\int_0^\infty t^{\epsilon-p} F^p dt \leq \left(\frac{p}{|\epsilon-p+1|}\right)^p \int_0^\infty t^\epsilon f^p dt \tag{1.3}$$

olarak elde edilmiştir (Hardy, 1928). Burada, f fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon ve $1 < p < \infty$ olmak üzere, F fonksiyonu

$$F(t) = \begin{cases} \int_0^t f ds, & \epsilon < p-1, \\ \int_t^\infty f ds, & \epsilon > p-1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlıdır. (1.3) eşitsizliğindeki $\left(\frac{p}{|\epsilon-p+1|}\right)^p$ sabiti en iyi sabit olup, burada eşitlik hali yalnızca $f \equiv 0$ durumu için mevcuttur. Dikkat edilecek olursa (1.3) eşitsizliği, $p > 1$ ve $\epsilon \neq p-1$ olmak üzere, her $u \in C_0^\infty(0,\infty)$ fonksiyonu için

$$\int_0^\infty t^{\epsilon-p} |u|^p dt \leq \left(\frac{p}{|\epsilon-p+1|}\right)^p \int_0^\infty t^\epsilon |u'|^p dt$$

şeklinde yazılabilir. Özel olarak, $\epsilon = 0$ için bu eşitsizlik

$$\int_0^\infty |u'|^p dt \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_0^\infty \frac{|u|^p}{t^p} dt \tag{1.4}$$

halini alır.

Daha sonra, yukarıda verilen tüm bu integral eşitsizlikleri Godfrey Harold Hardy'e atfen literatüre *Hardy eşitsizlikleri* olarak geçmiştir. Tek boyutlu Hardy eşitsizliklerinin detaylı analizi için geniş bilgiye Opic ve Kufner (1990) ile Kufner ve Persson (2003) tarafından ele alınan kitaplardan ulaşılabilir. Ayrıca, Kufner vd. (2006)'nin çalışmasında Hardy eşitsizliklerinin tarihsel geçmişiyle ilgili ilginç bilgiler yer almaktadır. Diğer yandan, Hardy vd. (1952)'nin yazmış olduğu "Inequalities" adlı kitap eşitsizlikler konusu için klasik sayılabilecek bir eserdir.

(1.4) tek boyutlu Hardy eşitsizliği çok daha genel integral eşitsizlikleri elde etmek için model bir örnek olarak kullanılmış olup; bu eşitsizliğin yüksek boyutlardaki karşılığı, çeşitli iyileştirmeleri, farklı yapılardaki analogları ve çok farklı ispat teknikleri kapsamlı bir şekilde araştırılmıştır. Örneğin Leray (1933), (1.4) Hardy eşitsizliğinin $p = 2$ durumu için yüksek boyutlardaki analoğunu şu şekilde elde etmiştir: $B(0,1)$ $\mathbb{R}^2$'de sıfır merkezli birim yuvar olmak üzere, herhangi $u \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^2 \backslash B(0,1)\right)$ fonksiyonu için

$$\int_{\mathbb{R}^2 \backslash B(0,1)} |\nabla u|^2 \, dx \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2 \backslash B(0,1)} \frac{u^2}{|x|^2 \ln^2 |x|} dx \tag{1.5}$$

eşitsizliği mevcuttur. $n \geq 3$ durumunda ise herhangi $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{|x|^2} dx \tag{1.6}$$

olur. Burada $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ ve $|\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^n |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2$ şeklinde tanımlıdır. Daha sonra Shen (1964), herhangi sınırlı $\Omega \subset B(0,R)$ bölgesinde $\ln^2 |x|$ fonksiyonunun yerine $\ln^2 \frac{R}{|x|}$ fonksiyonunu getirerek (1.5) kritik Hardy eşitsizliğinin farklı bir formunu elde etmiştir.

(1.6) Hardy eşitsizliğinin L^p analoğu şu şekildedir: $1 \leq p < n$ durumunda $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $p > n$ durumunda ise $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ sınıfından olan u fonksiyonları için

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \geq \left|\frac{n-p}{p}\right|^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx \tag{1.7}$$

ilişkisi geçerli olur (Shen, 1980). Diğer yandan, Azorero ve Alonso (1998) ikilisi; $1 < p < n$ durumu için, (1.7)'nin

$$u_\lambda = \lambda^{\frac{n-p}{p}} u(\lambda x), \quad \lambda > 0$$

ölçeklemesi altında değişmez olduğundan faydalanarak, bu eşitsizliğin ispatını farklı bir yaklaşımla ele almış ve buradaki $\left(\frac{n-p}{p}\right)^p$ sabitinin en iyi sabit olduğunu göstermiştir. Diğer bir ifade ile, yazarlar

$$\left(\frac{n-p}{p}\right)^p = \inf_{0 \neq u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx}{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx}$$

eşitliğinin gerçekleştiğini ispatlamıştır. $n = p \geq 2$ olması durumunda, (1.7) Hardy eşitsizliğinin yerini Edmunds ve Triebel (1999)'in ispatladığı her $u \in C_0^\infty(B(0,1))$ fonksiyonu için geçerli olan

$$\int_{B(0,1)} |\nabla u|^p \, dx \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{B(0,1)} \frac{|u|^p}{|x|^p \left(1 + \log \frac{1}{|x|}\right)^p} dx \tag{1.8}$$

logaritmik Hardy eşitsizliği alır. Bu eşitsizlikteki $\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p}$ sabiti en iyi sabittir.

(1.7) Hardy eşitsizliği herhangi sınırlı $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde de geçerlidir ve bölgenin sınırlı olması en iyi sabit olan $\left(\frac{n-p}{p}\right)^{p}$ değerini değiştirmemektedir. Ayrıca, bu sabite $C_0^\infty(\Omega)$ sınıfındaki sıfırdan farklı hiçbir fonksiyon ile ulaşılamamaktadır. O halde; "Bu eşitsizliğin sağına ikinci bir pozitif terim eklemek mümkün müdür?", "Eğer mümkün ise ikinci terim için en iyi sabit ne olur?", "Bu işlem ne zamana kadar sürdürülebilir?" gibi sorular akla gelmektedir. Bu bağlamda; Brezis ve Vázquez (1997) bazı eliptik problemlerin çözümünün patlamasını incelerken, kalan terimli Hardy eşitsizlikleri için bir başlangıç noktası sayılabilecek şu sonucu elde etmiştir: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olsun. $z_0 = 2.4048\ldots$, $J_0(z)$ Bessel fonksiyonunun ilk sıfır yeri olmak üzere, α_n ve $|\Omega|$ sembolleri sırasıyla $\mathbb{R}^n$'deki birim yuvarın ve Ω bölgesinin hacmini göstersin. Bu takdirde, her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} dx + z_0^2 \left(\frac{\alpha_n}{|\Omega|}\right)^{2/n} \int_\Omega u^2 dx \tag{1.9}$$

ve

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} dx + c(n,q) \left(\int_\Omega |u|^q \, dx\right)^{2/q} \tag{1.10}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. (1.10) eşitsizliğinde $1 < q < \frac{2n}{n-2}$ kabulü mevcuttur. Ayrıca, Ω bölgesi $\mathbb{R}^n$'de sıfır merkezli bir yuvar ise (1.9) eşitsizliğindeki $z_0^2 \left(\frac{\alpha_n}{|\Omega|}\right)^{2/n}$ katsayısı en iyi sabit olur.

Daha sonra, $n = p$ kritik durumundaki (1.8) logaritmik Hardy eşitsizliğinin geliştirilmiş hali Adimurthi ve Sandeep (2002) tarafından elde edilmiştir. Diğer yandan, Filippas ve Tertikas (2002) ikilisi (1.6) L^2 Hardy eşitsizliğini logaritmik kalan terimli sonsuz seri formuna geliştirmiş olup, bu eşitsizlik şöyledir: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge ve $d \geq \sup_\Omega |x|$ olsun. Ayrıca, $t \in (0,1]$ için $A_k(t)$ fonksiyonları

$$A_1(t) = (1 - \log t)^{-1},$$

$$A_k(t) = A_1(A_{k-1}(t)), \qquad k = 2, 3, \ldots$$

biçiminde tanımlansın. O halde, A_i'ler $A_i\left(|x|/d\right)$'yi göstermek üzere her $u \in H_0^1(\Omega)$ ve $n \geq 3$ için

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} dx + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} A_1^2 A_2^2 \cdots A_i^2 dx \tag{1.11}$$

eşitsizliği mevcuttur. (1.11) eşitsizliğindeki $\frac{1}{4}$ sabiti her $k = 1, 2, \ldots$ için en iyi sabittir. Başka bir deyişle, her $k = 1, 2, \ldots$ için

$$\frac{1}{4} = \inf_{0 \neq u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} dx - \frac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{k-1} \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} A_1^2 A_2^2 \cdots A_i^2 dx}{\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} A_1^2 A_2^2 \cdots A_k^2 dx}$$

eşitliği gerçeklenir.

(1.9) ile verilen kalan terimli Hardy eşitsizliğinin Adimurthi vd. (2002) tarafından elde edilen bir genişlemesi de şu şekildedir: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge, $1 < p < n$ ve $R = \left(\sup_\Omega |x|\right) \left(e^{e^{e^{\cdot^{e\ (k\ defa)}}}}\right)^{2/p}$ olmak üzere, her $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx \geq \left(\frac{n-p}{p}\right)^p \int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^p} dx + c\left(R, n, p\right) \sum_{j=1}^{k} \int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^p} \left(\prod_{i=1}^{j} \log^{(i)}\left(\frac{R}{|x|}\right)\right)^{-2} dx$$

olur. Burada, $\log^{(1)}(\cdot) = \log(\cdot)$ ve $k \geq 2$ için $\log^{(k)}(\cdot) = \log\left(\log^{(k-1)}(\cdot)\right)$ şeklinde tanımlıdır. Daha sonra, Barbatis vd. (2003a) daha genel ağırlık fonksiyonlarıyla birlikte (1.9) eşitsizliğinin bir başka genişlemesini bulmuştur.

Kalan terimli Hardy eşitsizliklerine verilebilecek önemli örneklerden bir diğeri de Gazzola vd. (2004) tarafından elde edilen şu eşitsizliktir: $n > p > 1$ olmak üzere, her $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx \geq \left(\frac{n-p}{p}\right)^p \int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^p} dx + \frac{c\left(n, p\right)}{|\Omega|^{p/n}} \int_\Omega |u|^p\, dx$$

ilişkisi geçerlidir. Burada, $c\left(n, p\right)$ pozitif bir sabit ve $|\Omega|$ ise sınırlı Ω bölgesinin hacmidir. $p = 2$ durumu için bu eşitsizlik Brezis ve Vazquez'in elde ettiği (1.9) eşitsizliğini içerir.

Belli sınıftan fonksiyonlar için Hardy tipi eşitsizlikler elde etmenin çok çeşitli metodları vardır. Bu metodların en etkililerinden bir tanesi diferansiyel denklemlerden veya diferansiyel eşitsizliklerden faydalanmaktır. Bunun güzel bir örneği Ghoussoub ve Moradifam (2011) ikilisinin yaptığı çalışmada görülmekte olup, bu çalışmadaki sonuçlardan biri şöyledir: $B(0,R)$ $\mathbb{R}^n$ içinde orijin merkezli R yarıçaplı bir yuvar olmak üzere, V ve W bu yuvar üzerinde tanımlı C^1 sınıfından olan pozitif radyal fonksiyonlar olsun. Ayrıca $r = |x|$ olmak üzere, bazı $0 < x_0 < R$ değerleri için $\int_0^{x_0} \frac{1}{r^{n-1}V(r)}dr = \infty$ ve $\int_0^{x_0} r^{n-1}V(r)\,dr < \infty$ olsun. Bu taktirde,

$$\int_{B(0,R)} V(x)\,|\nabla u|^2 dx \geq \int_{B(0,R)} W(x)\,u^2 dx, \qquad \forall u \in C_0^\infty(B(0,R))$$

genel ağırlıklı Hardy eşitsizliğinin var olması için gerek ve yeter şart,

$$y''(r) + \left(\frac{n-1}{r} + \frac{V'(r)}{V(r)}\right) y'(r) + \frac{W(r)}{V(r)} y(r) = 0$$

adi diferansiyel denkleminin $(0,R]$ aralığında pozitif çözümünün var olmasıdır. Yazarlar bu ilişkinin bir sonucu olarak, farklı bir ağırlık fonksiyonuna sahip aşağıdaki iki eşitsizliğin geçerli olduğunu ispatlamıştır. Şöyle ki, $s,t > 0$ ve α, β, m reel sayılar olmak üzere; $\alpha\beta > 0$ ve $n - 2m \geq 2$ ise

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(s + t\,|x|^\alpha)^\beta}{|x|^{2m}} |\nabla u|^2 dx \geq \left(\frac{n-2m-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(s + t\,|x|^\alpha)^\beta}{|x|^{2m+2}} u^2 dx \tag{1.12}$$

eşitsizliği, $\alpha\beta < 0$ ve $n - 2m + \alpha\beta \geq 2$ için ise

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(s + t\,|x|^\alpha)^\beta}{|x|^{2m}} |\nabla u|^2 dx \geq \left(\frac{n-2m+\alpha\beta-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(s + t\,|x|^\alpha)^\beta}{|x|^{2m+2}} u^2 dx \tag{1.13}$$

eşitsizliği her $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için gerçeklenir. Ayrıca, bu eşitsizliklerdeki $\left(\frac{n-2m-2}{2}\right)^2$ ve $\left(\frac{n-2m+\alpha\beta-2}{2}\right)^2$ pozitif sabitleri en iyi sabitlerdir.

Tüm bu çalışmaların yanısıra, $\mathbb{R}^n$ uzayında Hardy eşitsizliğini çeşitli yönlerden inceleyen farklı çalışmalar yapılmış ve yapılmaya da devam edilmektedir, bkz. (Barbatis vd., 2004; Tertikas ve Zographopoulos, 2007; Frank ve Seiringer, 2008; Ghoussoub ve Moradifam, 2008; Cowan, 2010; Skrzypczak, 2013; Fall ve Mahmoudi, 2014; Devyver vd., 2014; Devyver, 2014; Osekowski, 2015; Takahashi, 2015). Devam eden bu ilginin en önemli nedenlerinden birisi kısmi diferansiyel denklemlerdeki eliptik veya parabolik bir problemin çözümünün varlığı, düzgünlüğü veya asimptotik davranışı incelenirken Hardy eşitsizliklerinden sıklıkla faydalanılıyor olmasıdır, bkz. (Baras ve Goldstein, 1984; Okawaza, 1996; Brezis ve Vázquez, 1997; Crespo ve Alonso, 2000; Detalla vd., 2012). Baras ve Goldstein (1984) ikilisinin yaptığı çalışma bunun ilk önemli örneklerinden birisidir. Bu çalışmada, $\mathbb{R}^n$'de $\frac{\lambda}{|x|^2}$ tekil potansiyeline sahip

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \frac{\lambda}{|x|^2} u, & x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

doğrusal Cauchy-Dirichlet problemi incelenmiştir. İncelemenin sonucunda bu problemin; $\lambda > \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ için $u \equiv 0$ dışında negatif olmayan zayıf çözümünün olmadığı, $\lambda \leq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ için ise pozitif zayıf çözümlerinin varlığı gösterilmiştir. Dikkat edilirse buradaki $\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ sabiti (1.6) Hardy eşitsizliğindeki sabittir.

(1.4) ile ifade edilen tek boyutlu Hardy eşitsizliğinin ikinci mertebeden türevlere genişletilmiş haline *Rellich eşitsizliği* adı verilir ve bu eşitsizlik $C_0^\infty(0, \infty)$ sınıfından olan u fonksiyonları için

$$\int_0^\infty |u''|^p \, dt \geq \frac{(p-1)^p (2p-1)^p}{p^{2p}} \int_0^\infty \frac{|u|^p}{t^{2p}} dt, \quad p > 1$$

ilişkisinin mevcut olduğunu söyler. Bu eşitsizliğin $p = 2$ için yüksek boyuttaki formu ilk olarak Avusturyalı matematikçi Rellich tarafından 1954 yılında Amsterdam'da gerçekleşen Uluslararası Matematikçiler Kongresi'nde şu şekilde sunulmuştur: $n \neq 2$ olmak üzere, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 \, dx \geq \frac{n^2 (n-4)^2}{16} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{|x|^4} dx \tag{1.14}$$

eşitsizliği mevcuttur. $n = 2$ durumunda bu eşitsizlik ancak u üzerine bazı ek koşullar konulduğunda geçerli olmaktadır (Bennett, 1989). $n = 4$ kritik durumunda ise (1.14) eşitsizliği anlamını yitirir ve her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ için geçerli olan

$$\int_\Omega |\Delta u|^2 dx \geq \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^4 \left(\log \frac{R}{|x|}\right)^2} dx \tag{1.15}$$

eşitsizliği yerini alır (Adimurthi vd., 2006). Burada, $B(0, R) \subset \mathbb{R}^4$ merkezi orijin olan R yarıçaplı bir yuvar ve $0 \in \Omega \subset B(0, R)$ sınırlı bir bölgedir.

Davies ve Hinz (1998) ikilisi (1.14) ile gösterilen L^2 Rellich eşitsizliğini L^p formuna genişletmiş olup bu eşitsizlik şöyledir: $1 < p < \infty$ ve $n > 2p$ olmak üzere, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^p \, dx \geq \frac{(n-2p)^p (np-n)^p}{p^{2p}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^p}{|x|^{2p}} dx \tag{1.16}$$

olur. Yazarlar aynı çalışmada, L^p Rellich eşitsizliğinin daha yüksek mertebeden türevlere genellemesini de elde etmiştir. Şöyle ki; α, β, m, n ve p uygun birer sabit olmak üzere, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ fonksiyonu için

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Delta^m u|^p}{|x|^\alpha} dx \geq c(m,n,\alpha,\beta,p) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^p}{|x|^\beta} dx \tag{1.17}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Davies ve Hinz, 1998).

Daha sonra, (1.16) L^p Rellich eşitsizliğinin $n = 2p$ kritik durumundaki formu Adimurthi ve Santra (2009) tarafından şu şekilde verilmiştir: $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge ve $R > 0$ olsun. O halde, her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega |\Delta u|^p \, dx \geq \frac{2^p (p-1)^{2p}}{p^{2p}} \int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^{2p} \left(\log \frac{R}{|x|}\right)^p} dx \tag{1.18}$$

logaritmik Rellich eşitsizliği geçerlidir.

(1.14), (1.15), (1.16), (1.17) ve (1.18) Rellich eşitsizliklerindeki tüm sabitler en iyi sabit olup, bu sabitlere $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ sınıfındaki fonksiyonlar ile ulaşılamamaktadır. Bundan dolayı, tüm bu eşitsizliklerin sağına pozitif kalan terimler ekleyerek bu eşitsizlikleri geliştirmek çok doğal bir istek olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu anlamda verilebilecek önemli örneklerden biri Gazzola vd. (2004) tarafından elde edilmiştir. Yazarlar bu çalışmada, Brezis ve Vazquez'in kalan terimli Hardy eşitsizliği üzerine yaptığı çalışmadan esinlenerek, (1.16) L^p Rellich eşitsizliğini geliştirmiştir. Bu eşitsizlik şu şekildedir: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olsun. $p \geq 2$ ve $n \geq 2p$ olmak üzere, her $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ için

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\Delta u|^p \, dx \geq{}& \frac{(n-2p)^p (np-n)^p}{p^{2p}} \int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^{2p}} dx \\ &+ \frac{c_0(n,p)}{|\Omega|^{2/n}} \int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^{2p-2}} dx + \frac{c_1(n,p)}{|\Omega|^{2p/n}} \int_\Omega |u|^p \, dx\end{aligned}$$

olur. Burada, $c_0(n,p)$ ve $c_1(n,p)$ pozitif birer sabit, $|\Omega|$ ise Ω bölgesinin hacmidir.

Kalan terimli Rellich eşitsizliğine verilebilecek önemli örneklerden bir diğeri de Tertikas ve Zographopoulos (2007) tarafından bulunan aşağıdaki eşitsizliktir: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge, $d \geq \sup_\Omega |x|$ ve $t \in (0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
&A_1(t) = (1-\log t)^{-1}, \\
&A_k(t) = A_1(A_{k-1}(t)), \qquad k = 2,3,\ldots
\end{aligned}
$$

olsun. O halde, A_i'ler $A_i(|x|/d)$'yi göstermek üzere her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ve $n \geq 5$ için

$$
\int_\Omega |\Delta u|^2 \, dx \geq \frac{n^2(n-4)^2}{16} \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^4} dx + \left(1 + \frac{n(n-4)}{8}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^4} A_1^2 A_2^2 \cdots A_i^2 dx
$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikteki $1 + \frac{n(n-4)}{8}$ sabiti her $k = 1,2,\ldots$ için en iyi sabittir. Daha açık bir ifade ile

$$
1 + \frac{n(n-4)}{8} = \inf_{0 \neq u \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\Delta u|^2 dx - \frac{n^2(n-4)^2}{16} \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^4} dx - \left(1 + \frac{n(n-4)}{8}\right) \sum_{i=1}^{k-1} \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^4} A_1^2 A_2^2 \cdots A_i^2 dx}{\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^4} A_1^2 A_2^2 \cdots A_k^2 dx}
$$

eşitliği her $k = 1,2,\ldots$ değeri için doğrudur. Diğer yandan, Tertikas ve Zographopoulos (2007) ikilisi aynı çalışmalarında Hardy ve Rellich eşitsizliklerini bir anlamda birleştiren ve *Rellich-II eşitsizliği* olarak adlandırılan bir eşitsizlik elde etmiştir. Tam olarak ifade etmek gerekirse, yazarlar, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sınıfından olan bir u fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi ile birinci mertebeden türevi arasında $n \geq 5$ için bir ilişki kuran en iyi sabitli aşağıdaki eşitsizliği ispatlamıştır:

$$
\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx \geq \frac{n^2}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^2} dx. \tag{1.19}
$$

Ayrıca yazarlar, (1.11) geliştirilmiş Hardy eşitsizliğini ve (1.19) Rellich-II eşitsizliğini kullanarak, her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ve $n \geq 5$ için

$$
\int_\Omega |\Delta u|^2 \, dx \geq \frac{n^2}{4} \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{|x|^2} dx + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{|x|^2} A_1^2 A_2^2 \cdots A_i^2 dx
$$

kalan terimli Rellich-II eşitsizliğinin geçerli olduğunu göstermiştir. Buradaki $\frac{n^2}{4}$ ve $\frac{1}{4}$ sabitleri en iyi sabitlerdir (Tertikas ve Zographopoulos, 2007).

Dördüncü mertebeden eliptik ve parabolik denklemlerin incelenmesinde Rellich eşitsizliklerinin önemli bir yeri vardır. Bu denklemler tekil potansiyele sahip ise geliştirilmiş Rellich eşitsizliğine ihtiyaç duyulmaktadır. Örneğin, V tekil potansiyeline sahip olan $u_t = -\Delta^2 + V$ denkleminin çözümünün varlığı ve çözümün asimptotik davranışı hakkında bilgi sahibi olabilmek için kalan terimli Rellich eşitsizliğine başvurulmaktadır. Bundan dolayı, Rellich eşitsizliklerine olan ilgi artarak devam etmektedir. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında Hardy ve Rellich eşitsizliklerini çeşitli yönlerden inceleyen güncel referans kaynağı olarak Ghoussoub ve Moradifam (2013) ile Balinsky vd. (2015) tarafından yazılan kitaplara başvurulabilir.

$\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında yapılan bütün bu çalışmaların ışığında, Hardy ve Rellich tipi eşitsizliklerin farklı soyut yapılarda, örneğin $\mathbb{H}^n$ Heisenberg grubu üzerinde geçerli olup olmadığı sorusu akla gelmektedir. Bu doğrultuda, $\mathbb{R}^n$ uzayındaki (1.6) L^2 Hardy eşitsizliğini Heisenberg grubuna ilk taşıyan Garofalo ve Lanconelli (1990) ikilisidir. Bu ikilinin elde ettiği eşitsizlik şu şekildedir:

$$\int_{\mathbb{H}^n} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 dzdl \geq \left(\frac{Q-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{H}^n} \frac{|z|^2}{|z|^4 + l^2} u^2 dzdl \tag{1.20}$$

eşitsizliği her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \backslash \{(0,0)\})$ fonksiyonu için geçerlidir. Burada $Q = 2n+2$, $\mathbb{H}^n$'nin homojen boyutu, $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i \frac{\partial}{\partial l}$ ve $Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i \frac{\partial}{\partial l}$ Heisenberg grubunda tanımlı sol invaryant vektör alanları, $\nabla_{\mathbb{H}^n} = (X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$ Heisenberg gradyan vektörü ve $\Delta_{\mathbb{H}^n} = \sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2)$ şeklinde tanımlı alt-Laplace operatördür. Ayrıca, $z = (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $l \in \mathbb{R}$ ve $|z| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$ olarak kullanılmış olup, bundan sonra da ifade edilen anlamda kullanılacaktır.

Garofalo ve Lanconelli'nin bu çalışmasından sonra, Hardy ve Rellich eşitsizliklerini $\mathbb{H}^n$ Heisenberg grubu üzerinde çeşitli yönlerden inceleyen çalışmalar artarak devam etmiştir. Referans olarak (Niu vd., 2001; Goldstein ve Zhang, 2001; D'Ambrosio, 2001; Han ve Niu, 2003; D'Ambrosio, 2004; D'Ambrosio, 2005; Goldstein ve Kömbe, 2005; Adimurthi ve Sekar, 2006; Yang, 2008; Jin ve Han, 2010; Kömbe, 2010; Xiao, 2011; Jin ve Shen, 2011; Lian, 2013; Yener, 2016) makalelerine ve bu makalelerdeki kaynaklara bakılabilir. Örneğin, Niu vd. (2001) (1.20) numaralı eşitsizliğin L^p versiyonunu $\mathbb{H}^n$'deki $p-$alt-Laplace denklemi ile ilişkili olan Picone özdeşliğini kullanarak ispatlamıştır. Bu eşitsizlik açıkça şöyle ifade edilir: $1 < p < Q$ olmak üzere, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \backslash \{(0,0)\})$ fonksiyonu için

$$\int_{\mathbb{H}^n} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p dzdl \geq \left(\frac{Q-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^n} \frac{|z|^p}{\left(|z|^4 + l^2\right)^{\frac{p}{2}}} |u|^p \, dzdl \tag{1.21}$$

ilişkisi mevcuttur. Aynı çalışmada yazarlar, $\mathbb{H}^n$'deki $p-$biharmonik denklem ile ilişkili olan Picone özdeşliğini kullanarak, aşağıdaki Rellich tipi eşitsizliği de elde etmiştir: Sadece Q ve p sayılarına bağlı olan pozitif k_0 ve k_1 sabitleri vardır, öyle ki

$$\int_{\mathbb{H}^n} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p \, dzdl + k_0 \int_{\mathbb{H}^n} \frac{|z|^{2p-4}}{\left(|z|^4 + l^2\right)^{p-1}} |u|^p \, dzdl \geq k_1 \int_{\mathbb{H}^n} \frac{|z|^{2p}}{\left(|z|^4 + l^2\right)^p} |u|^p \, dzdl \tag{1.22}$$

eşitsizliği her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \backslash \{(0,0)\})$ ve $p \geq 1$ için gerçeklenir. Daha sonra, Goldstein ve Zhang (2001) ikilisi (1.20) numaralı eşitsizliğin farklı bir ispatını vermiş ve bu eşitsizlikteki $\left(\frac{Q-2}{2}\right)^2$ sabitinin en iyi sabit olduğunu göstermiştir. Bununla birlikte, Han ve Niu (2003) Picone özdeşliğinden faydalanarak Heisenberg grubunun çeşitli alt bölgelerinde tanımlı farklı tipte Hardy eşitsizlikleri bulmuştur.

$\mathbb{H}^n$ Heisenberg grubunda, Hardy ve Rellich eşitsizliklerinin ağırlıklı halleri ilk olarak D'Ambrosio (2004) tarafından ele alınmıştır. D'Ambrosio'nun elde ettiği ağırlıklı L^p Hardy eşitsizliği şöyledir: $p > 1$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $Q > \alpha - \beta$ ve $Q > 2 + p - \beta$ olsun. Bu takdirde, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{|z|^{\beta-p}}{\left(|z|^4 + l^2\right)^{\frac{\alpha-2p}{4}}} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p dzdl \geq \left(\frac{Q+\beta-\alpha}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^n} \frac{|z|^\beta}{\left(|z|^4 + l^2\right)^{\frac{\alpha}{4}}} |u|^p dzdl$$

eşitsizliği sağlanır. Buradaki $\left(\frac{Q+\beta-\alpha}{p}\right)^p$ sabiti en iyi sabittir. Ayrıca, aynı çalışmada yazar

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{|\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p}{|z|^{2\alpha-2p}} dzdl \geq \left(\frac{Q-2\alpha-2}{p}\right)^p \left(\frac{(Q-2)(p-1) + 2(\alpha-p)}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^n} \frac{|u|^p}{|z|^{2\alpha}} dzdl$$

Rellich eşitsizliğinin, $p > 1$ ve $\frac{Q-2}{2} > \alpha > 1$ olmak koşulu ile, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ fonksiyonu için geçerli olduğunu da ispatlamıştır.

D'Ambrosio (2005) diğer bir makalesinde, $\mathbb{H}^n$ üzerinde tanımlı alt-eliptik operatörü de kapsayan ikinci mertebeden diferansiyel operatörlerin geniş bir sınıfı için Hardy tipi eşitsizlikleri türetmenin farklı bir yöntemini vermiştir. Şöyle ki, ϕ pozitif ağırlık fonksiyonu $\mathbb{H}^n$'de $-\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(|\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^{p-2} \nabla_{\mathbb{H}^n} \phi \right) \geq 0$ eşitsizliğini sağlıyorsa

$$\int_{\mathbb{H}^n} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p \, dzdl \geq c \int_{\mathbb{H}^n} \frac{|\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p}{\phi^p} |u|^p \, dzdl$$

şeklinde verilen Hardy tipi eşitsizlik her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ için geçerlidir. Bu eşitsizliğin ispatı Diverjans Teoremi ve uygun vektör alanlarının seçimine dayanmaktadır.

Bunların yanında, Kömbe (2006) radyal tipli ağırlık fonksiyonuna sahip bir Hardy eşitsizliğini farklı bir yaklaşımla ispatlamıştır. Yang (2008), $\mathbb{H}^n$'deki $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ alt-Laplace operatörün temel çözümünü kullanarak,

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\left(|z|^4 + l^2\right)^{\frac{2-\alpha}{4}}}{|z|^2} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^2 \, dzdl \geq \frac{(Q+\alpha)^2 (Q-\alpha-4)^2}{16} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{|z|^2}{\left(|z|^4 + l^2\right)^{\frac{\alpha+6}{4}}} u^2 dzdl$$

şeklinde verilen ağırlıklı L^2 Rellich eşitsizliğinin her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ ve $0 \leq \alpha < Q-4$, $n \geq 2$ için doğruluğunu ve bu eşitsizlikte beliren sabitin en iyi sabit olduğunu göstermiştir. Ayrıca yazar aynı çalışmada, (1.19) Rellich-II eşitsizliğinin ağırlıklı halinin Heisenberg grubundaki analoğunu elde etmiştir. Tam olarak ifade etmek gerekirse bu eşitsizlik şu şekildedir: $n \geq 3$ ve $0 \leq \alpha \leq \frac{Q-8}{3}$ olmak üzere, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\left(|z|^4 + l^2\right)^{\frac{2-\alpha}{4}}}{|z|^2} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^2 \, dzdl \geq \frac{(Q+\alpha)^2}{4} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{|\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2}{\left(|z|^4 + l^2\right)^{\frac{\alpha+2}{4}}} dzdl \tag{1.23}$$

eşitsizliği sağlanır ve $\frac{(Q+\alpha)^2}{4}$ sabiti en iyi sabittir (Yang, 2008).

Daha sonra, Jin ve Han (2010) Heisenberg grubundaki ağırlıklı L^2 Rellich eşitsizliğinin

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\left(|z|^4 + l^2\right)^{\frac{\alpha+4p-4}{4}}}{|z|^{2p-2}} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p \, dzdl \geq c\,(Q,p,\alpha) \int_{\mathbb{H}^n} \frac{|z|^2}{\left(|z|^4 + l^2\right)^{\frac{4-\alpha}{4}}} |u|^p \, dzdl$$

şeklindeki L^p formunun doğruluğunu, $2-Q < \alpha < \min\{(p-1)(Q-2), (Q-2)\}$ ve $1 < p < \infty$ koşulu altında, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \backslash \{(0,0)\})$ fonksiyonu için kanıtlamıştır. Ayrıca, yazarlar $c\,(Q,p,\alpha) := \left(\frac{Q+\alpha-2}{p}\right)^p \left(\frac{(Q-2)(p-1)-\alpha}{p}\right)^p$ pozitif sabitinin en iyi sabit olduğunu da göstermiştir.

Yakın bir zamanda, Lian (2013) (1.22) Rellich eşitsizliğini geliştirmiştir. Açıkça ifade etmek gerekirse, $1 < p < \frac{Q-\alpha}{2}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $k = k(Q,p,\alpha) := (\frac{Q(p-1)+\alpha}{p})(\frac{Q-\alpha-2p}{p})$ olmak üzere, Lian

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{|\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p}{\left(|z|^4 + l^2\right)^{\frac{\alpha}{4}}} dzdl + 2(p-1)(Q+2p-6)\, k^{p/q} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{|z|^{2p-4}}{\left(|z|^4 + l^2\right)^{\frac{\alpha+4p-4}{4}}} |u|^p \, dzdl$$
$$\geq \left[k^p + 2(p-1)(Q+2p-4)\, k^{p/q}\right] \int_{\mathbb{H}^n} \frac{|z|^{2p}}{\left(|z|^4 + l^2\right)^{\frac{\alpha+4p}{4}}} |u|^p \, dzdl$$

eşitsizliğinin her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \backslash \{(0,0)\})$ için geçerli olduğunu ispatlamıştır.

Hardy ve Rellich eşitsizlikleri üzerine yapılan tüm bu çalışmalar düşünüldüğünde, $\mathbb{H}^n$ Heisenberg grubunda radyal veya radyal olmayan çeşitli ağırlık fonksiyonlarına sahip Hardy ve Rellich tipi eşitsizlikler türetmek için kullanışlı bir yöntem araştırmak makul bir istek olarak karşımıza çıkmaktadır. Literatürde; bir diferansiyel denklemin çözümü hakkında fikir sahibi olmak için, Hardy ve Rellich eşitsizliklerinden sıklıkla faydalanıldığı görülmektedir. Peki bunun tam tersi olarak, ağırlıklı $p-$alt-Laplace ve $p-$biharmonik denklemler gibi bazı doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinden yola çıkılarak genel ağırlıklı Hardy ve Rellich eşitsizliklerinin varlığını ispatlamak mümkün mü sorusu akla gelmektedir. Bu soruya cevap niteliğinde elde ettiğimiz bazı sonuçlar şu şekildedir:

Teorem 1.1 Negatif olmayan $a \in C^1(\mathbb{H}^n)$ ve $b \in L^1_{loc}(\mathbb{H}^n)$ fonksiyonları ile pozitif $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$ fonksiyonu

$$-\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(a \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta\right|^{p-2} \nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta\right) \geq b \vartheta^{p-1} \tag{1.24}$$

ağırlıklı $p-$alt-Laplace eşitsizliğini hemen hemen her $(z,l) \in \mathbb{H}^n$ için sağlıyorsa $p \geq 2$ ve $c_p > 0$ olmak üzere,

$$\int_{\mathbb{H}^n} a \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\right|^p dzdl \geq \int_{\mathbb{H}^n} b\,|u|^p\, dzdl + c_p \int_{\mathbb{H}^n} a \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} \frac{u}{\vartheta}\right|^p \vartheta^p dzdl$$

geliştirilmiş genel ağırlıklı L^p Hardy tipi eşitsizlik her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ fonksiyonu için geçerlidir.

Uyarı 1.1 $1 < p < 2$ durumu için farklı bir kalan terimle birlikte benzer bir eşitsizlik mevcuttur.

Teorem 1.2 Negatif olmayan $a \in C^2(\mathbb{H}^n)$ ve $b \in L^1_{loc}(\mathbb{H}^n)$ fonksiyonları ve pozitif $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$ fonksiyonu

$$\Delta_{\mathbb{H}^n}\left(a\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2}\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) \geq b\vartheta^{p-1} \quad \text{ve} \quad -\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta > 0 \tag{1.25}$$

diferansiyel eşitsizliklerini hemen hemen her $(z,l) \in \mathbb{H}^n$ için sağlıyorsa

$$\int_{\mathbb{H}^n} a\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}u\right|^p dzdl \geq \int_{\mathbb{H}^n} b\left|u\right|^p dzdl$$

genel ağırlıklı L^p Rellich eşitsizliği her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ fonksiyonu ve her $p > 1$ değeri için doğrudur.

Burada, Teorem 1.1 ve Teorem 1.2 ile sunulan metodlar, hem bilinen hem de yeni Hardy ve Rellich tipi eşitsizlikler elde etme adına oldukça pratik ve üretkendir. Çeşitli ağırlık fonksiyonlarına sahip Hardy ve Rellich eşitsizlikleri elde etmek için, sırasıyla (1.24) ağırlıklı $p-$alt-Laplace ve (1.25) ağırlıklı $p-$biharmonik eşitsizlikleri sağlayan uygun a ve ϑ fonksiyonlarını belirlemek yeterlidir. Tezin uygulama kısımlarında bu durumu destekleyen çokça örnek verilmiştir.

Diğer taraftan, (1.23) L^2 Rellich-II eşitsizliğinin Heisenberg grubunda L^p durumuna genişlemesi bulunmuştur. Daha açık bir ifade ile, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $Qp > Q+\alpha > p > 1$ olmak üzere, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \setminus \{(0,0)\})$ için

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\left(|z|^4+l^2\right)^{\frac{\alpha+p}{4}}}{|z|^p}\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}u\right|^p dzdl \geq \left(\frac{Qp-Q-\alpha}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^n}\left(|z|^4+l^2\right)^{\frac{\alpha-p}{4}}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right|^p dzdl$$

eşitsizliğinin ispatı verilmiştir. Ayrıca, $\left(\frac{Qp-Q-\alpha}{p}\right)^p$ pozitif sabitinin en iyi sabit olduğu ispatlanmıştır. Bu sonuç, Öklid uzayında da yenidir. Daha sonra, (1.23) ile verilen Rellich-II eşitsizliğinden faydalanılarak, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \{(0,0)\})$ fonksiyonu için

$$\left(\int_{\mathbb{H}^n}\frac{\rho^2}{|z|^2}\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}u\right|^2 dzdl\right)\left(\int_{\mathbb{H}^n}\rho^2|z|^2u^2dzdl\right) \geq \frac{Q^4}{16}\left(\int_{\mathbb{H}^n}\frac{|z|^2}{\rho^2}u^2dzdl\right)^2$$

ikinci mertebeden *Heisenberg-Pauli-Weyl* eşitsizliğinin geçerli olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, $\alpha \in \mathbb{R}$, $Q+\alpha > 1$ ve $Q > p > 1$ olmak üzere,

$$\int_{\mathbb{H}^n}\frac{\rho^{\alpha p+p}}{|z|^p}\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}u\right|^p dzdl \geq c(Q,p,\alpha)\int_{\mathbb{H}^n}\frac{\rho^{\alpha p}}{|z|^p}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\right|^p dzdl$$

Rellich-Hardy-Poincaré eşitsizliğinin herhangi $u \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{H}^n \backslash \{(0,0)\}\right)$ fonksiyonu için sağlandığı ispatlanmıştır. Burada ρ sembolü, $\rho = \left(|z|^4 + l^2\right)^{1/4}$ biçiminde tanımlı $\mathbb{H}^n$'deki doğal norm fonksiyonunu temsil etmektedir ve $c\,(Q, p, \alpha)$ pozitif bir sabittir.

Bunların yanısıra, $\mathbb{H}^n$ içindeki düzgün sınırlı bir Ω bölgesinde geliştirilmiş iki-ağırlıklı genel L^p Hardy ve L^p Rellich tipi eşitsizlikler üzerine bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bu tipten bir Hardy eşitsizliği elde edilirken kullanılmış olan önemli araçlardan biri, her $0 \leq a \in C^1(\Omega)$ ve $0 < \vartheta \in C^{\infty}(\Omega)$ için geçerli olan

$$-\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(a\rho^{p-Q} \frac{|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^{p-2}}{\vartheta^{p-2}} \nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) \geq 0 \tag{1.26}$$

şeklindeki bir diferansiyel eşitsizliktir. Rellich eşitsizliği için ise elde edilen iki-ağırlıklı geliştirilmiş Hardy eşitsizliği ve $0 \leq a \in C^2(\Omega)$, $0 < \vartheta \in C^{\infty}(\Omega)$ fonksiyonları için geçerli olan

$$-\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(a\rho^{2-Q} \nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) \geq 0 \tag{1.27}$$

tipindeki bir diferansiyel eşitsizliğin varlığı temel dayanak noktalar olmuştur. Tezin uygulama kısımlarında, (1.26) ve (1.27) doğrusal olmayan kısmi diferansiyel eşitsizliklerin çözümlerinden yola çıkılarak, $\mathbb{H}^n$'nin değişik bölgelerinde tanımlı üstel, logaritmik ve radyal tipli çok çeşitli ağırlık fonksiyonlarına sahip kalan terimli L^p Hardy ve L^p Rellich eşitsizliklerine örnekler verilmiştir.

2 ÖN BİLGİLER

Şimdi, tezin çeşitli bölümlerinde adları sıklıkla geçen Öklid uzayındaki bazı temel tanım, teorem, fonksiyon uzayları ve eşitsizlikler verilecektir. Daha detaylı bilgi için (Adams, 1975; Evans, 2002; Balinsky vd., 2015) kaynaklarına başvurulabilir.

2.1 Fonksiyon Uzayları

2.1.1 Test fonksiyonları uzayı

$\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayı ve Ω bu uzayda tanımlı basit bağlantılı açık bir küme olsun. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, negatif olmayan α_i tamsayılarının n bileşenlisi ise α'ya *çoklu indis* denir.

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

olsun. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ise

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

olur. $1 \leq i \leq n$ için $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ise

$$D^\alpha = \prod_{i=1}^{n} D_i^{\alpha_i} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$|\alpha|$. mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir. Özel olarak, bir $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun *gradyanı* $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ ile, *Laplasyeni* ise $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ şeklinde gösterilir.

Negatif olmayan herhangi k tamsayısı için Ω bölgesinde $|\alpha| \leq k$ mertebesine kadar tüm $D^\alpha u$ kısmi türevleri var ve sürekli olan fonksiyonların uzayı $C^k(\Omega)$ ile gösterilir. $C^\infty(\Omega)$ ise Ω bölgesindeki her mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonların uzayıdır. Yani,

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$$

dır. Bir $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun *desteği* şöyle tanımlanır:

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

Başka bir deyişle, bir u fonksiyonunun sıfırdan farklı değerler aldığı $x \in \Omega$ noktalarının oluşturduğu kümenin kapanışına o fonksiyonun desteği denir. Eğer $\operatorname{supp} u$ alt kümesi kompakt ise u fonksiyonunun *kompakt desteğe* sahip olduğu söylenir. Ω bölgesinde kompakt desteğe sahip olan $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ sınıflarına ait fonksiyonların oluşturduğu uzaylar sırasıyla $C_0(\Omega)$ ve $C_0^\infty(\Omega)$ ile gösterilir. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının elemanlarına *test fonksiyonu* adı verilir.

2.1.2 L^p uzayları

Eğer bir önermenin doğru olmadığı noktalarının kümesi sıfır ölçülü bir küme ise veya sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanıyorsa bu önerme *hemen hemen her yerde* doğrudur denir ve bu ifade *h.h.h.* şeklinde kısaltılır.

Ω, $\mathbb{R}^n$'de ölçülebilir bir küme ve $0 < p < \infty$ olsun. Ω kümesi üzerinde ölçülebilir olan ve

$$\int_\Omega |u|^p \, dx < \infty$$

şartını sağlayan $[u] := \{v : u = v \text{ h.h.h. } x \in \Omega\}$ biçimindeki denklik sınıflarından oluşan kümeye *p. kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı* denir ve bu sınıf $L^p(\Omega)$ ile gösterilir. $1 \le p < \infty$ olmak üzere,

$$\|[u]\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p}$$

normu ile $L^p(\Omega)$ bir Banach uzayıdır.

Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|u| \le K$ olacak şekilde bir K sabiti var ise u fonksiyonuna *hemen hemen sınırlıdır* denir. Böyle K'ların en büyük alt sınırına da u'nun Ω bölgesindeki *esas supremumu* adı verilir ve $\operatorname{ess\,sup}_\Omega |u|$ şeklinde gösterilir. Ω bölgesinde gerçel değerli, ölçülebilir, hemen hemen her yerde sınırlı olan fonksiyonların denklik sınıflarının oluşturduğu uzaya *özde sınırlı fonksiyonlar uzayı* denir ve $L^\infty(\Omega)$ ile gösterilir. $L^\infty(\Omega)$ uzayı,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |u|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Ω, $\mathbb{R}^n$'de bir bölge ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Ω bölgesinin her K kompakt alt kümesinde

$$\int_K |u|^p \, dx$$

integrali var ve sonlu ise u fonksiyonuna Ω bölgesinde *$p-$yerel integrallenebilir fonksiyon* denir ve bu fonksiyonların uzayı $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ sembolü ile gösterilir.

Hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için pozitif ve yerel integrallenebilir olan bir a fonksiyonuna *ağırlık fonksiyonu* adı verilir. Ω, $\mathbb{R}^n$'de açık bir bölge, $1 < p < \infty$ ve a bir ağırlık fonksiyonu olsun.

$$\int_\Omega a \, |u|^p \, dx < \infty$$

şartını sağlayan ölçülebilir u fonksiyonlarının oluşturduğu kümeye *ağırlıklı Lebesgue uzayı* denir ve $L^p_a(\Omega)$ sembolü ile gösterilir. Bu uzayda norm,

$$\|u\|_{L^p_a(\Omega)} = \left(\int_\Omega a \, |u|^p \, dx \right)^{1/p}$$

olarak tanımlanır. $L^p_a(\Omega)$ uzayı bu norm ile bir Banach uzayıdır.

Teorem 2.1 [**Fatou Lemması**]. E ölçülebilir bir küme olmak üzere, (u_n)'ler negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise

$$\lim_{n\to\infty} \inf \int_E u_n dx \geq \int_E \lim_{n\to\infty} \inf u_n dx$$

özelliği sağlanır (Adams, 1975).

Teorem 2.2 [**Monoton Yakınsaklık Teoremi**]. E ölçülebilir bir küme ve (u_n) negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların monoton artan bir dizisi olsun. Eğer h.h.h. $x \in E$ için (u_n) dizisi u fonksiyonuna yakınsak ise

$$\lim_{n\to\infty} \int_E u_n dx = \int_E u dx$$

olur (Adams, 1975).

Teorem 2.3 [**Lebesgue Sınırlı Yakınsaklık Teoremi**] . E ölçülebilir bir küme ve (u_n) , E üzerinde u fonksiyonuna h.h.h. yakınsayan Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların dizisi olsun. Eğer h.h.h. $x \in E$ için $|u_n| \leq v$ olacak şekilde Lebesgue integrallenebilir bir v fonksiyonu varsa u Lebesgue integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_E u_n dx = \int_E u dx$$

eşitliği sağlanır (Adams, 1975).

Teorem 2.4 [**Fubini Teoremi**] . $E_1 \subset \mathbb{R}^n$, $E_2 \subset \mathbb{R}^m$ ölçülebilir kümeler ve u fonksiyonu $E = E_1 \times E_2$ üzerinde Lebesgue integrallenebilir olsun. Bu durumda,

(i) H.h.h. $x \in E_1$ için $u(x, .)$ fonksiyonu E_2 üzerinde, $\int_{E_2} u dy$ fonksiyonu da E_1 üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\int_{E_1} \left(\int_{E_2} u dy \right) dx = \int_E u dx dy$$

eşitliği gerçeklenir.

(ii) H.h.h. $x \in E_2$ için $u(., y)$ fonksiyonu E_1 üzerinde, $\int_{E_1} u dx$ fonksiyonu da E_2 üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\int_{E_2} \left(\int_{E_1} u dx \right) dy = \int_E u dx dy$$

eşitliği gerçeklenir (Adams, 1975).

2.1.3 Sobolev uzayları

α çoklu indis, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge ve $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ olsun. Eğer her $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi dx$$

eşitliğini gerçekleyen bir $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ fonksiyonu var ise v'ye u'nun α. mertebeden *zayıf türevi* denir ve $v = D^\alpha u$ olarak gösterilir.

Ω, $\mathbb{R}^n$'de bir bölge ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. k negatif olmayan herhangi bir tamsayı olmak üzere,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \forall |\alpha| \leq k \text{ için } D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir. Bu uzay

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \text{ ise,} \\ \sum_{|\alpha|\leq k} \operatorname{ess\,sup}_\Omega |D^\alpha u|^p, & p = \infty \text{ ise} \end{cases}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

$C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{k,p}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{k,p}(\Omega)$ ile gösterilir. Diğer bir deyişle, her $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ fonksiyonu için $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$ olacak şekilde bir $(u_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ test fonksiyonları dizisi vardır. $W_0^{k,p}(\Omega)$ uzayı, $W^{k,p}(\Omega)$ uzayında bulunan ve $(k-1)$. mertebeye kadar tüm kısmi türevleri Ω bölgesinin $\partial\Omega$ sınırında sıfır olan fonksiyonların sınıfıdır. Herhangi negatif olmayan k tamsayısı için

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmeleri geçerlidir. Genel olarak $W_0^{k,p}(\Omega) \neq W^{k,p}(\Omega)$ olmasına rağmen, $\Omega = \mathbb{R}^n$ durumunda $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ eşitliği söz konusudur (Edmunds ve Evans, 1987). $p = 2$ durumunda $W_0^{k,2}(\Omega) = H_0^k(\Omega)$ gösterimi tercih edilir.

a bir ağırlık fonksiyonu ve Ω, $\mathbb{R}^n$'de bir bölge olsun. k negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

$$W_a^{k,p}(\Omega) = \{u \in L_a^p(\Omega) : \forall |\alpha| \leq k \text{ için } D^\alpha u \in L_a^p(\Omega)\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *ağırlıklı Sobolev uzayı* denir. $W_a^{k,p}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{W_a^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega a |D^\alpha u|^p \, dx\right)^{1/p}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

2.2 Green Özdeşlikleri ve İntegrasyon Formülleri

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık, sınırlı bir küme ve $k = 1, 2, \ldots$ olsun. $B(x_0, R)$, x_0 merkezli R yarıçaplı bir yuvarı temsil etmek üzere, eğer her bir $x_0 \in \partial\Omega$ için

$$\Omega \cap B(x_0, R) = \{x \in B(x_0, R) : x_n > u(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

olacak şekilde bir R sayısı ve C^k sınıfından bir $u : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa $\partial\Omega$ sınırı C^k sınıfından, her bir $k \in \mathbb{N}$ değeri için $\partial\Omega$ sınırı C^k sınıfına ait ise C^∞ sınıfındandır denir. Eğer $\partial\Omega$ sınırı C^1 sınıfından ise $\partial\Omega$ sınırı boyunca dış yönlü birim normal vektörü $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_i, \ldots, \eta_n)$ tanımlıdır. $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ olmak üzere, $\eta \cdot \nabla u$ ifadesine u'nun dış yönlü *normal türevi* denir ve $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ sembolü ile gösterilir. Ayrıca $\partial\Omega$ sınırının yüzey alan elementi dS ile temsil edilir.

Teorem 2.5 [**Gauss-Green Teoremi**] . $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı ve açık bir bölge ve $\partial\Omega$ sınırı C^1 sınıfına ait olsun. $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ise $i = 1, 2, ..., n$ için

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u\eta_i dS$$

olur (Evans, 2002).

Teorem 2.6 [**Diverjans Teoremi**] . $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı ve açık bir bölge ve $\partial\Omega$ sınırı C^1 sınıfına ait olsun. O halde, her $F \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ vektör alanı için

$$\int_\Omega divF dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \eta dS$$

olur (Evans, 2002).

Teorem 2.7 [**Kısmi İntegrasyon**]. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı ve açık bir bölge ve $\partial\Omega$ sınırı C^1 sınıfına ait olsun. $u, v \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ise $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_{\partial\Omega} uv\eta_i dS - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

olur (Evans, 2002).

Teorem 2.8 [**Green Formülleri**] . $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı ve açık bir bölge, $\partial\Omega$ sınırı C^1 sınıfına ait ve $u, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ olsun. O zaman,

i. $\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} dS,$

ii. $\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} u dS - \int_\Omega u \Delta v dx,$

iii. $\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) dS,$

iv. $\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} u dS - \int_\Omega u \Delta u dx$

formülleri geçerlidir (Evans, 2002).

Teorem 2.9 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, her $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} u dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(x_0,R)} u dS \right) dR$$

olarak hesaplanabilir. Özel olarak, her $R > 0$ için

$$\frac{d}{dR} \left(\int_{B(x_0,R)} u dx \right) = \int_{\partial B(x_0,R)} u dS$$

olur (Evans, 2002).

2.3 Eşitsizlikler

Şimdi, bu çalışmada sıklıkla kullanılacak olan bazı önemli eşitsizlikler teorem halinde ifade edilecek ve bu eşitsizliklerden bazıları ispatlarıyla birlikte verilecektir.

Teorem 2.10 [**Young Eşitsizliği**]. $x, y \in \mathbb{R}$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$$

eşitsizliği sağlanır (Evans, 2002).

Teorem 2.11 [**ϵ'lu Young Eşitsizliği**]. Eğer $\epsilon > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise o zaman

$$|xy| \leq \epsilon x^p + c(\epsilon) y^q$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $c(\epsilon) = (\epsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$'dir (Evans, 2002).

Teorem 2.12 [**Hölder Eşitsizliği**]. Ω, $\mathbb{R}^n$'de bir bölge, $1 \leq p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ olsun. Bu durumda, $uv \in L^1(\Omega)$ olur ve

$$\int_\Omega |uv| \, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |v|^q \, dx \right)^{1/q}$$

eşitsizliği geçerlidir (Evans, 2002).

$p = 1$ durumunda $q = \infty$ olacağından $\|u\|_{L^q(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |u|$ olarak alınır. $p = q = 2$ iken bu eşitsizliğe *Cauchy-Schwarz eşitsizliği* adı verilir.

Teorem 2.13 [**Clarkson Eşitsizliği**]. $2 \leq p < \infty$ olmak üzere, her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p + \left|\frac{x-y}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}\left(|x|^p + |y|^p\right) \tag{2.1}$$

eşitsizliği sağlanır (Clarkson, 1936).

Kanıt. İlk olarak $\tilde{x}, \tilde{y} \geq 0$ reel sayıları için $\tilde{x}^p + \tilde{y}^p \leq (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^{p/2}$ olduğu gösterilecektir. $\tilde{x} = 0$ veya $\tilde{y} = 0$ ise bu eşitsizlik aşikârdır. $\tilde{x} \neq 0$ ve $\tilde{y} \neq 0$ olması durumunda ise ispatı $\tilde{y} = 1$ için vermek yeterlidir; çünkü elde edilen $\tilde{x}^p + 1 \leq (\tilde{x}^2 + 1)^{p/2}$ eşitsizliği $\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}$ için uygulanırsa istenen bulunur. O halde, $t \geq 0$ olmak üzere $f(t) := (t^2+1)^{p/2} - t^p - 1$ fonksiyonu ele alınsın. $f'(t) = pt\left[(t^2+1)^{\frac{p-2}{2}} - (t^2)^{\frac{p-2}{2}}\right] \geq 0$ olduğundan f fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde artandır. f fonksiyonu artan ve $f(0) = 0$ olduğundan, her $t \geq 0$ için $f(t) \geq 0$ olur. Yani, herhangi $\tilde{x}, \tilde{y} \geq 0$ reel sayısı için

$$\tilde{x}^p + \tilde{y}^p \leq \left(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2\right)^{p/2}$$

eşitsizliği geçerlidir. $\tilde{x} = \left|\frac{x+y}{2}\right|$ ve $\tilde{y} = \left|\frac{x-y}{2}\right|$ için bu eşitsizlik uygulandığında,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x+y}{2}\right|^p + \left|\frac{x-y}{2}\right|^p &\leq \left(\left|\frac{x+y}{2}\right|^2 + \left|\frac{x-y}{2}\right|^2\right)^{p/2} \\
&= \left(\frac{2|x|^2 + 2|y|^2}{4}\right)^{p/2} \\
&= \left(\frac{|x|^2}{2} + \frac{|y|^2}{2}\right)^{p/2} \\
&\leq \frac{1}{2}\left(|x|^p + |y|^p\right)
\end{aligned}$$

Clarkson eşitsizliği elde edilir. İspatın son basamağında $p \geq 2$ için $t \mapsto |t|^{p/2}$ fonksiyonunun konveks olduğu kullanılmıştır. ■

Teorem 2.14 Herhangi $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

(i) $1 < p < 2$ ise

$$|x+y|^p \geq |x|^p + p\,|x|^{p-2}\, x \cdot y + c_p \frac{|y|^2}{(|x| + |y|)^{2-p}}, \tag{2.2}$$

(ii) $p \geq 2$ ise

$$|x+y|^p \geq |x|^p + p\,|x|^{p-2}\,x \cdot y + c_p\,|y|^p \tag{2.3}$$

olacak şekilde bir $c_p = c\,(p) > 0$ sabiti vardır (Lindqvist, 1990). Buradaki " $\cdot$ " sembolü $\mathbb{R}^n$ uzayındaki standart iç çarpımı temsil etmektedir.

Kanıt. (i) $1 < p < 2$ ve $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ olsun. Sabitlenmiş $\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ değerleri için $0 \leq t \leq 1$ değişkenine bağlı

$$f\,(t) = |\tilde{x} + t\,(\tilde{y} - \tilde{x})|^p \tag{2.4}$$

fonksiyonu tanımlansın. Kısmi integrasyon yardımı ile

$$f\,(1) = f\,(0) + f'\,(0) + \int_0^1 (1-t)\,f''\,(t)\,dt \tag{2.5}$$

eşitliğinin gerçeklendiği görülür. $\tilde{x}+t\,(\tilde{y}-\tilde{x}) = 0$ olduğunda sonuç aşikârdır. O halde, $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $|\tilde{x} + t\,(\tilde{y} - \tilde{x})| \neq 0$ olsun.

$$f'\,(t) = p\,|\tilde{x} + t\,(\tilde{y} - \tilde{x})|^{p-2}\,(\tilde{x} + t\,(\tilde{y} - \tilde{x})) \cdot (\tilde{y} - \tilde{x})$$

olduğundan, (2.5) eşitliğinde (2.4) fonksiyonu kullanılırsa

$$|\tilde{y}|^p = |\tilde{x}|^p + p\,|\tilde{x}|^{p-2}\,\tilde{x} \cdot (\tilde{y} - \tilde{x}) + \int_0^1 (1-t)\,f''\,(t)\,dt \tag{2.6}$$

eşitliği bulunur. Diğer yandan, türev alma işlemi sonucunda

$$\begin{aligned} f''\,(t) = {} & p\,(p-2)\,|\tilde{x} + t\,(\tilde{y} - \tilde{x})|^{p-4}\,|(\tilde{x} + t\,(\tilde{y} - \tilde{x})) \cdot (\tilde{y} - \tilde{x})|^2 \\ & + p\,|\tilde{x} + t\,(\tilde{y} - \tilde{x})|^{p-2}\,(\tilde{y} - \tilde{x}) \cdot (\tilde{y} - \tilde{x}) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$|(\tilde{x} + t\,(\tilde{y} - \tilde{x})) \cdot (\tilde{y} - \tilde{x})|^2 \leq |\tilde{x} + t\,(\tilde{y} - \tilde{x})|^2\,|\tilde{y} - \tilde{x}|^2$$

olur. Bu durumda, $p\,(p-2) < 0$ olduğu dikkate alınarak

$$\begin{aligned} f''\,(t) \geq {} & p\,(p-2)\,|\tilde{x} + t\,(\tilde{y} - \tilde{x})|^{p-4}\,|\tilde{x} + t\,(\tilde{y} - \tilde{x})|^2\,|\tilde{y} - \tilde{x}|^2 \\ & + p\,|\tilde{x} + t\,(\tilde{y} - \tilde{x})|^{p-2}\,|\tilde{y} - \tilde{x}|^2 \\ = {} & p\,(p-1)\,|\tilde{x} + t\,(\tilde{y} - \tilde{x})|^{p-2}\,|\tilde{y} - \tilde{x}|^2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Diğer taraftan,

$$\int_0^1 (1-t)\, f''(t)\, dt \geq \frac{3}{4} \int_0^{1/4} f''(t)\, dt \tag{2.8}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu gözlemlemek zor değildir. Bunun yanında, $0 \leq t \leq 1$ için

$$\begin{aligned} |\tilde{x} + t(\tilde{y} - \tilde{x})| &\leq |1-t|\, |\tilde{x}| + |t|\, |\tilde{y}| \\ &\leq |\tilde{x}| + |\tilde{y}| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan, $1 < p < 2$ için

$$|\tilde{x} + t(\tilde{y} - \tilde{x})|^{p-2} \geq (|\tilde{x}| + |\tilde{y}|)^{p-2}$$

olur ve dolayısıyla

$$f''(t) \geq p(p-1) \frac{|\tilde{y} - \tilde{x}|^2}{(|\tilde{x}| + |\tilde{y}|)^{2-p}} \tag{2.9}$$

ilişkisi bulunur. (2.8) ile (2.9) eşitsizlikleri birleştirildiğinde

$$\int_0^1 (1-t)\, f''(t)\, dt \geq \frac{3p(p-1)}{16} \frac{|\tilde{y} - \tilde{x}|^2}{(|\tilde{x}| + |\tilde{y}|)^{2-p}}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bu eşitsizlik (2.6) eşitliğinde kullanıldığında

$$|\tilde{y}|^p \geq |\tilde{x}|^p + p\, |\tilde{x}|^{p-2}\, \tilde{x} \cdot (\tilde{y} - \tilde{x}) + \frac{3p(p-1)}{16} \frac{|\tilde{y} - \tilde{x}|^2}{(|\tilde{x}| + |\tilde{y}|)^{2-p}}$$

sonucu bulunur. Bu sonuç $\tilde{x} = x$ ve $\tilde{y} = x + y$ için uygulandığında istenen (2.2) eşitsizliği elde edilir.

(ii) İlk olarak $p \geq 2$ ve $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$|x + y|^p \geq |x|^p + p\, |x|^{p-2}\, x \cdot y \tag{2.10}$$

olduğu ispatlanacaktır. $x = 0$ veya $y = 0$ olması durumunda bu eşitsizlik aşikârdır. O halde, $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ olsun. $p = 2$ için

$$|x + y|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = |x|^2 + 2x \cdot y + |y|^2 \geq |x|^2 + 2x \cdot y$$

olduğu görülür. $p > 2$ olduğunda, $-1 \leq t \in \mathbb{R}$ için $(1+t)^{p/2} \geq 1 + \frac{p}{2}t$ Bernoulli eşitsizliğinin geçerli olduğu bilinmektedir. Böylece; ilk olarak Bernoulli eşitsizliği, daha sonra $|2x \cdot y| \leq |x|^2 + |y|^2$ eşitsizliği göz önünde bulundurularak

$$
\begin{aligned}
|x+y|^p = \left(|x+y|^2\right)^{p/2} &= \left(|x|^2 + |y|^2 + 2x \cdot y\right)^{p/2} \\
&= \left(|x|^2 + |y|^2\right)^{p/2} \left(1 + \frac{2x \cdot y}{|x|^2 + |y|^2}\right)^{p/2} \\
&\geq \left(|x|^2 + |y|^2\right)^{p/2} \left(1 + \frac{p}{2} \frac{2x \cdot y}{|x|^2 + |y|^2}\right) \\
&= \left(|x|^2 + |y|^2\right)^{p/2} + p\left(|x|^2 + |y|^2\right)^{\frac{p}{2}-1} x \cdot y \\
&\geq |x|^p + p\,|x|^{p-2}\, x \cdot y
\end{aligned}
$$

istenen (2.10) eşitsizliğine ulaşılır. Şimdi, (2.3) eşitsizliğinin ispatına başlanabilir. (2.10) eşitsizliğinde x yerine $\tilde{x}$, y yerine ise $\tilde{y} - \tilde{x}$ alındığında bu eşitsizlik

$$
|\tilde{y}|^p \geq |\tilde{x}|^p + p\,|\tilde{x}|^{p-2}\, \tilde{x} \cdot (\tilde{y} - \tilde{x})
$$

halini alır. Buradan, kolayca doğrulanabileceği gibi

$$
\left|\frac{\tilde{x} + \tilde{y}}{2}\right|^p \geq |\tilde{x}|^p + \frac{p}{2}\,|\tilde{x}|^{p-2}\, \tilde{x} \cdot (\tilde{y} - \tilde{x})
$$

olur. Bu eşitsizlik (2.1) Clarkson eşitsizliği ile birleştirildiğinde,

$$
|\tilde{x}|^p + |\tilde{y}|^p \geq 2\,|\tilde{x}|^p + p\,|\tilde{x}|^{p-2}\, \tilde{x} \cdot (\tilde{y} - \tilde{x}) + 2\left|\frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{2}\right|^p
$$

ilişkisi elde edilir ve dolayısıyla

$$
|\tilde{y}|^p \geq |\tilde{x}|^p + p\,|\tilde{x}|^{p-2}\, \tilde{x} \cdot (\tilde{y} - \tilde{x}) + 2\left|\frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{2}\right|^p
$$

eşitsizliği bulunur. Sonuç olarak, $\tilde{x} = x$ ve $\tilde{y} = x + y$ geri dönüşümü yapıldığında istenen

$$
|x+y|^p \geq |x|^p + p\,|x|^{p-2}\, x \cdot y + 2^{1-p}\,|y|^p
$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer işlemler tekrarlanarak, 2^{1-p} sabiti

$$
2^{1-p} + 4^{1-p} + 8^{1-p} + \cdots = \frac{1}{2^{p-1} - 1}
$$

olarak geliştirilebilir. ■

Teorem 2.15 [**Hardy Eşitsizliği**] . $1 < p < n$ olmak üzere, her $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx \geq \left(\frac{n-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx \tag{2.11}$$

olur. Ayrıca, $\left(\frac{n-p}{p}\right)^p$ pozitif sabiti en iyi sabittir (Azorero ve Alonso, 1998).

Kanıt. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayı $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ Sobolev uzayında yoğun olduğundan, ispatı $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sınıfından olan fonksiyonlar için vermek yeterlidir. $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. O halde

$$|u(x)|^p = -\int_1^\infty \frac{d}{d\lambda} |u(\lambda x)|^p \, d\lambda = -p \int_1^\infty u^{p-1}(\lambda x) \frac{d}{d\lambda} |u(\lambda x)| \, d\lambda$$

eşitliği yazılabilir. Zincir kuralı uygulandığında

$$\frac{d}{d\lambda} |u(\lambda x)| = x \cdot \nabla u(\lambda x)$$

olur ve böylelikle

$$|u(x)|^p = -p \int_1^\infty u^{p-1}(\lambda x) (x \cdot \nabla u(\lambda x)) \, d\lambda$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $|x|^{-p}$ ile çarpılıp $\mathbb{R}^n$ üzerinde integre edilirse Fubini Teoremi yardımı ile

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx &= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{p}{|x|^p} \int_1^\infty u^{p-1}(\lambda x) (x \cdot \nabla u(\lambda x)) \, d\lambda dx \\ &= -p \int_1^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^{p-1}(\lambda x)}{|x|^{p-1}} \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(\lambda x) \, dx d\lambda \end{aligned}$$

sonucu bulunur. Hesaplamada kolaylık olması açısından $y = \lambda x$ değişken değişimi yapıldığında

$$\frac{\partial(x_1, ..., x_n)}{\partial(y_1, ..., y_n)} = \lambda^{-n}$$

olacağından,

$$dx = \lambda^{-n} dy, \quad |x|^{p-1} = |y|^{p-1} \lambda^{1-p} \quad \text{ve} \quad \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(\lambda x) = \frac{y}{|y|} \cdot \nabla u(y) = \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

olur. Tüm bu değişikler ile son integral eşitliği

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx &= -p \int_1^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{n+1-p}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^{p-1}(y)}{|y|^{p-1}} \frac{\partial u}{\partial \eta} dy \\ &= \frac{-p}{n-p} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^{p-1}(y)}{|y|^{p-1}} \frac{\partial u}{\partial \eta} dy \end{aligned} \tag{2.12}$$

halini alır. Diğer yandan, Hölder eşitsizliği yardımı ile

$$\frac{-p}{n-p}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u^{p-1}(y)}{|y|^{p-1}}\frac{\partial u}{\partial \eta}dy \leq \frac{p}{n-p}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(y)|^p}{|y|^p}dy\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.13)$$

ilişkisi elde edilir. (2.12) ve (2.13) ifadeleri birleştirildiğinde

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)|^p}{|x|^p}dx \leq \frac{p}{n-p}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)|^p}{|x|^p}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği bulunur. Cauchy Schwarz eşitsizliği ve gerekli sadeleştirmeler sonucunda istenen eşitsizlik elde edilir.

Şimdi, $\left(\frac{n-p}{p}\right)^p$ sabitinin en iyi sabit olduğunu gösterelim. Keyfi $\epsilon > 0$ değeri için

$$u_\epsilon(r) = \begin{cases} c(n,p,\epsilon), & r \in [0,1] \text{ ise,} \\ c(n,p,\epsilon)\, r^{(p-n)/p-\epsilon}, & r > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindeki bir radyal fonksiyon ele alınsın. Burada $c(n,p,\epsilon) := p/(n-p+p\epsilon)$'dur. Bu fonksiyonun türevi

$$u'_\epsilon(r) = \begin{cases} 0, & r \in [0,1] \text{ ise,} \\ -r^{-n/p-\epsilon}, & r > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak hesaplanır ve buradan

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u_\epsilon|^p}{|x|^p}dx &= \int_{B(0,1)}\frac{|u_\epsilon|^p}{|x|^p}dx + \int_{\mathbb{R}^n - B(0,1)}\frac{|u_\epsilon|^p}{|x|^p}dx \\ &= c^p(n,p,\epsilon)\,\omega_n\left(\int_0^1 r^{n-1-p}dr + \int_1^\infty r^{-(1+p\epsilon)}dr\right) \\ &= c^p(n,p,\epsilon)\,\omega_n\int_0^1 r^{n-1-p}dr + c^p(n,p,\epsilon)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_\epsilon|^p dx\end{aligned}$$

sonucu bulunur. ω_n, $n-$boyutlu $B(0,1)$ birim yuvarının yüzey alanıdır. $\epsilon \longrightarrow 0$ iken limit alındığında ispat tamamlanmış olur. ■

$n = p$ kritik durumunda (2.11) Hardy eşitsizliği şu şekilde verilir:

Teorem 2.16 [**Kritik Hardy Eşitsizliği**]. $n = p \geq 2$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olsun. Bu durumda, her $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega\left|\frac{x}{|x|}\cdot\nabla u\right|^p dx \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p\int_\Omega\frac{|u|^p}{|x|^p\left(\log\frac{Re}{|x|}\right)^p}dx$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $R = \sup_{x\in\Omega} |x|$'tir (Takahashi, 2015).

Kanıt. İspatı $C_0^\infty(\Omega)$ sınıfından olan fonksiyonlar için vermek yeterlidir.

$$\nabla \cdot \left(\frac{x}{|x|^p \left(\log \frac{Re}{|x|}\right)^{p-1}} \right) = \frac{p-1}{|x|^p \left(\log \frac{Re}{|x|}\right)^{p}}$$

özdeşliği, Diverjans Teoremi ve Hölder eşitsizliği yardımı ile

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^p \left(\log \frac{Re}{|x|}\right)^{p}} dx &= \left| \frac{1}{p-1} \int_\Omega |u|^p \nabla \cdot \left(\frac{x}{|x|^p \left(\log \frac{Re}{|x|}\right)^{p-1}} \right) dx \right| \\
&= \left| -\frac{1}{p-1} \int_\Omega \nabla |u|^p \cdot \frac{x}{|x|^p \left(\log \frac{Re}{|x|}\right)^{p-1}} dx \right| \\
&= \left| -\frac{p}{p-1} \int_\Omega \frac{|u|^{p-2} u}{|x|^{p-1} \left(\log \frac{Re}{|x|}\right)^{p-1}} \nabla u \cdot \frac{x}{|x|} dx \right| \\
&\leq \left| \frac{p}{p-1} \right| \left(\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^p \left(\log \frac{Re}{|x|}\right)^{p}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega \left| \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylelikle, son eşitsizliğin p. kuvveti alındıktan sonra elde edilen sonucun her iki yanı $\left(\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^p \left(\log \frac{Re}{|x|}\right)^{p}} dx \right)^{p-1}$ ifadesi ile sadeleştirilirse istenen sonuç bulunur. ■

(2.11) Hardy eşitsizliğinin ağırlıklı hali şu şekildedir:

Teorem 2.17 [**Ağırlıklı Hardy Eşitsizliği**]. $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 < p < n + \alpha$ olmak üzere, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha |\nabla u|^p \, dx \geq \left(\frac{n+\alpha-p}{p} \right)^p \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha-p} |u|^p \, dx \tag{2.14}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Buradaki $\left(\frac{n+\alpha-p}{p}\right)^p$ sabiti en iyi sabittir (Balinsky vd., 2015).

Kanıt. $r = |x|$ ve $c(n)$ uygun bir sabit olmak üzere, $n > 2$ için $c(n)\, r^{2-n}$ fonksiyonu Δ Laplace operatörünün temel çözümüdür. O halde, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için

$$c(n) \left\langle \Delta r^{2-n}, u \right\rangle = -\langle \delta, u \rangle = -u(0)$$

eşitliği sağlanır ve dolayısıyla kısmi integrasyon ile

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla r^{2-n} \cdot \nabla u dx = c^{-1}(n)\, u(0) \tag{2.15}$$

olur. Keyfi $\epsilon > 0$ değeri için $0 \leq u_\epsilon := (u^2+\epsilon^2)^{p/2} - \epsilon^p \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon ile u fonksiyonu aynı desteğe sahiptir. Her u test fonksiyonu için (2.15) eşitliği sağlandığından, özel olarak $u = u_\epsilon r^{n+\alpha-p}$ seçimi için de sağlanır. O halde, $u(0) = u_\epsilon(0)\, r^{n+\alpha-p}(0) = 0$ olduğundan,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla r^{2-n} \cdot \nabla \left(u_\epsilon r^{n+\alpha-p}\right) dx = 0 \tag{2.16}$$

eşitliği vardır. Diğer yandan,

$$\nabla r^{2-n} = (2-n)\, r^{1-n} \nabla r$$

ve

$$\nabla\left(u_\epsilon r^{n+\alpha-p}\right) = r^{n+\alpha-p} \nabla u_\epsilon + (n+\alpha-p)\, r^{n+\alpha-p-1} u_\epsilon \nabla r$$

eşitlikleri (2.16) integralinde yerine yazıldığında

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\nabla r \cdot \nabla u_\epsilon}{r^{p-\alpha-1}} dx + (n+\alpha-p) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u_\epsilon}{r^{p-\alpha}} dx = 0$$

sonucu bulunur. Böylelikle, $\nabla u_\epsilon = pu\,(u^2+\epsilon^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u$ olduğu da dikkate alınarak, son eşitlik Cauchy-Schwarz ve $u \leq \sqrt{u^2+\epsilon^2}$ eşitsizlikleri yardımı ile

$$\begin{aligned}(n+\alpha-p) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u_\epsilon}{r^{p-\alpha}} dx &= -p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u\,(u^2+\epsilon^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla r \cdot \nabla u}{r^{p-\alpha-1}} dx \\ &\leq p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u^2+\epsilon^2)^{\frac{p-2}{2}} |u|\, |\nabla r \cdot \nabla u|}{r^{p-\alpha-1}} dx \\ &\leq p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u^2+\epsilon^2)^{\frac{p-1}{2}} |\nabla u|}{r^{p-\alpha-1}} dx\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $\epsilon \longrightarrow 0$ iken limit alındığında Lebesgue Sınırlı Yakınsaklık Teoremi yardımıyla

$$\left(\frac{n+\alpha-p}{p}\right) \int_{\mathbb{R}^n} r^{\alpha-p} |u|^p \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} r^\alpha \frac{|u|^{p-1}}{r^{p-1}} |\nabla u| \, dx$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizliğin sağına Hölder eşitsizliği uygulandığında

$$\left(\frac{n+\alpha-p}{p}\right) \int_{\mathbb{R}^n} r^{\alpha-p} |u|^p \, dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} r^{\alpha-p} |u|^p \, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} r^\alpha |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

sonucu bulunur. Gerekli düzenleme ile istenen eşitsizlik elde edilir.

Şimdi, $\left(\frac{n+\alpha-p}{p}\right)^p$ sabitinin en iyi sabit olduğunu göstermek için

$$u_\epsilon(r) = \begin{cases} 1, & r \in [0,1], \\ r^{-\left(\frac{n+\alpha-p}{p}+\epsilon\right)}, & r > 1 \end{cases}$$

radyal fonksiyonu ele alınsın. Türev işlemiyle

$$u'_\epsilon(r) = \begin{cases} 0, & r \in [0,1], \\ -\left(\frac{n+\alpha-p}{p}+\epsilon\right) r^{-\left(\frac{n+\alpha}{p}+\epsilon\right)}, & r > 1 \end{cases}$$

olur. $\mathbb{R}^n$'deki kutupsal koordinatlar kullanıldığında, ω_n birim yuvarın yüzey alanı olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha |\nabla u_\epsilon|^p \, dx &= \int_{B(0,1)} |x|^\alpha |\nabla u_\epsilon|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} |x|^\alpha |\nabla u_\epsilon|^p \, dx \\
&= \left|\frac{n+\alpha-p}{p}+\epsilon\right|^p \omega_n \int_1^\infty r^\alpha \left| r^{-\left(\frac{n+\alpha}{p}+\epsilon\right)}\right|^p r^{n-1} dr \\
&= \left|\frac{n+\alpha-p}{p}+\epsilon\right|^p \omega_n \int_1^\infty r^{-\epsilon p-1} dr \\
&= \left|\frac{n+\alpha-p}{p}+\epsilon\right|^p \frac{\omega_n}{\epsilon p}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha-p} |u_\epsilon|^p \, dx &= \int_{B(0,1)} |x|^{\alpha-p} |u_\epsilon|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} |x|^{\alpha-p} |u_\epsilon|^p \, dx \\
&= \omega_n \int_0^1 r^{\alpha-p} r^{n-1} dr + \omega_n \int_1^\infty r^{\alpha-p} \left| r^{-\left(\frac{n+\alpha-p}{p}+\epsilon\right)}\right|^p r^{n-1} dr \\
&= \omega_n \int_0^1 r^{n+\alpha-p-1} dr + \omega_n \int_1^\infty r^{-\epsilon p-1} dr \\
&= \omega_n \left(\frac{1}{n+\alpha-p} + \frac{1}{\epsilon p}\right)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. O halde, $\epsilon \longrightarrow 0$ iken limit alındığında

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha |\nabla u_\epsilon|^p \, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha-p} |u_\epsilon|^p \, dx} &= \left|\frac{n+\alpha-p}{p}+\epsilon\right|^p \frac{1}{\left(\frac{\epsilon p}{n+\alpha-p}+1\right)} \\
&\longrightarrow \left|\frac{n+\alpha-p}{p}\right|^p
\end{aligned}$$

sabiti bulunur. Bu da $\left(\frac{n+\alpha-p}{p}\right)^p$ sabitinin en iyi sabit olduğunu gösterir. ■

Teorem 2.18 [**Heisenberg-Pauli-Weyl Eşitsizliği**] . Her $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 u^2 dx\right) \geq \frac{n^2}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx\right)^2$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikteki $\frac{n^2}{4}$ sabiti en iyi sabittir (Weyl, 1931).

Kanıt. $r = |x|$ olmak üzere,

$$\Delta r^2 = 2n$$

özdeşliğinden

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\left(r^2\right) u^2 dx = 2n \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx$$

eşitliği elde edilir. Soldaki integral ifadesi için kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\left(r^2\right) u^2 dx &= -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla\left(r^2\right) \cdot \nabla\left(u^2\right) dx \\ &= -4\int_{\mathbb{R}^n} ur\nabla r \cdot \nabla u dx\end{aligned}$$

bulunur ve dolayısıyla

$$-\int_{\mathbb{R}^n} ur\nabla r \cdot \nabla u dx = \frac{n}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx$$

olur. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden, istenen

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} r^2 u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{n}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx$$

sonucu elde edilir. Burada eşitlik hali, $A, B \in \mathbb{R}$ ve $B > 0$ olmak üzere, u fonksiyonunun sadece $u(r) = A\,\mathrm{e}^{-Br^2}$ tipindeki bir Gaussian fonksiyonu olması ile mümkündür. $u(r) = A\,\mathrm{e}^{-Br^2}$ fonksiyonu için standart türev alma işlemleri uygulandıktan sonra $\mathbb{R}^n$'deki kutupsal koordinatlar yardımı ile gerekli integral ifadeleri hesaplandığında $\frac{n^2}{4}$ sabitinin en iyi sabit olduğu görülür. ■

Şimdi, (2.14) ağırlıklı Hardy eşitsizliğinden faydalanılarak Rellich eşitsizliğinin ispatı verilecektir.

Teorem 2.19 [**Rellich Eşitsizliği**] . $1 < p < \infty$ ve $n > 2p$ olsun. Her $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^p \, dx \geq \left(\frac{n(p-1)(n-2p)}{p^2}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^p}{|x|^{2p}} dx \tag{2.17}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradaki $\left(\frac{n(p-1)(n-2p)}{p^2}\right)^p$ sabiti en iyi sabittir (Davies ve Hinz, 1998; Balinsky vd., 2015).

Kanıt. Herhangi $\epsilon > 0$ sabiti için $u_\epsilon := (u^2+\epsilon^2)^{p/2} - \epsilon^p$ olsun. u_ϵ fonksiyonu pozitiftir ve u fonksiyonu ile aynı desteğe sahiptir. Gerekli türev işlemlerinden sonra

$$\begin{aligned}\Delta u_\epsilon &= p\left(u^2+\epsilon^2\right)^{p/2-1}|\nabla u|^2 + p\,(p-2)\left(u^2+\epsilon^2\right)^{p/2-2}|\nabla u|^2 u^2 \\ &\quad + p\left(u^2+\epsilon^2\right)^{p/2-1} u\Delta u \\ &\geq p\,(p-2)\left(u^2+\epsilon^2\right)^{p/2-2}|\nabla u|^2 u^2 + p\left(u^2+\epsilon^2\right)^{p/2-1} u\Delta u \end{aligned} \tag{2.18}$$

olur. $v_\epsilon := (u^2+\epsilon^2)^{p/4} - \epsilon^{p/2}$ için

$$|\nabla v_\epsilon|^2 = \frac{p^2}{4}u^2\left(u^2+\epsilon^2\right)^{p/2-2}|\nabla u|^2 u^2$$

bulunur ve dolayısıyla (2.18) eşitsizliği

$$-p\left(u^2+\epsilon^2\right)^{p/2-1} u\Delta u \geq \frac{4\,(p-1)}{p}|\nabla v_\epsilon|^2 - \Delta u_\epsilon$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$-p\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left(u^2+\epsilon^2\right)^{p/2-1}u\Delta u}{|x|^{2p-2}}dx \geq \frac{4\,(p-1)}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\nabla v_\epsilon|^2}{|x|^{2p-2}}dx - \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Delta u_\epsilon}{|x|^{2p-2}}dx \tag{2.19}$$

ilişkisi elde edilir ve kısmi integrasyon yardımı ile

$$-\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Delta u_\epsilon}{|x|^{2p-2}}dx = (n-2p)\,(2p-2)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u_\epsilon}{|x|^{2p}}dx \tag{2.20}$$

eşitliği bulunur. Diğer yandan, $p=2$ için (2.14) ağırlıklı Hardy eşitsizliği

$$\frac{4\,(p-1)}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\nabla v_\epsilon|^2}{|x|^{2p-2}}dx \geq \frac{(p-1)\,(n-2p)^2}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{v_\epsilon^2}{|x|^{2p}}dx \tag{2.21}$$

sonucunu verir. (2.20) ve (2.21) ifadeleri (2.19) eşitsizliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}-p\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left(u^2+\epsilon^2\right)^{p/2-1}u\Delta u}{|x|^{2p-2}}dx &\geq \frac{(p-1)\,(n-2p)^2}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{v_\epsilon^2}{|x|^{2p}}dx \\ &\quad + (n-2p)\,(2p-2)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u_\epsilon}{|x|^{2p}}dx\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$p\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left(u^2+\epsilon^2\right)^{(p-1)/2}|\Delta u|}{|x|^{2p-2}}dx \geq p\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left(u^2+\epsilon^2\right)^{p/2-1}|u|\,|\Delta u|}{|x|^{2p-2}}dx$$
$$\geq \frac{(p-1)(n-2p)^2}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{v_\epsilon^2}{|x|^{2p}}dx$$
$$+(n-2p)(2p-2)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u_\epsilon}{|x|^{2p}}dx$$

eşitsizliği elde edilir. $\epsilon \longrightarrow 0$ iken Lebesgue Sınırlı Yakınsaklık Teoremi uygulandığında bu eşitsizlik

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^{p-1}|\Delta u|}{|x|^{2p-2}}dx \geq \frac{n(p-1)(n-2p)}{p^2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^p}{|x|^{2p}}dx$$

halini alır. Eşitsizliğin solundaki integral ifadesi için Hölder eşitsizliği uygulandığında

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^p}{|x|^{2p}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \geq \frac{n(p-1)(n-2p)}{p^2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^p}{|x|^{2p}}dx$$

sonucu elde edilir. Böylelikle, istenen eşitsizliğin ispatı tamamlanmış olur.
Şimdi, $c^p(n,p) := \left(\frac{n(p-1)(n-2p)}{p^2}\right)^p$ sabitinin en iyi sabit olduğunu gösterelim. Bunun için, $0 < \alpha < \frac{n-2p}{p}$ olmak üzere, $u = |x|^{-\alpha}$ fonksiyonu ele alınsın. Bu durumda $u \in W^{2,p}(B(0,1))$ olur ve standart hesaplamalar ile

$$|\Delta u| = \alpha(n-\alpha-2)\frac{|u|}{|x|^2}$$

olduğu görülür. Buradan, $\alpha = \frac{n-2p}{p}$ olması durumunda

$$|\Delta u| = c(n,p)\frac{|u|}{|x|^2}, \quad x \neq 0$$

eşitliği bulunur. Diğer yandan, $\mathcal{X}_{B(0,1)}$ birim basamak fonksiyonu olmak üzere, $\alpha_k := \frac{n-2p-\frac{1}{k}}{p}$ için

$$u_k := |x|^{-\alpha_k}\mathcal{X}_{B(0,1)} \in W^{2,p}(B(0,1))$$

olsun. Bu durumda,

$$c^p(n,p) \leq \inf_{u\in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)}\frac{\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta u|^p\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^p}{|x|^{2p}}dx}$$
$$\leq \inf_{k\in\mathbb{N}}\frac{\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta u_k|^p\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u_k|^p}{|x|^{2p}}dx}$$
$$\leq \lim_{k\to\infty}\alpha_k(n-\alpha_k-2) = c^p(n,p)$$

sonucu elde edilir ve böylece $c^p(n,p)$ sabitinin en iyi sabit olduğu kanıtlanmış olur.

■

Teorem 2.20 **[Rellich-II Eşitsizliği]**. $n \geq 5$ olmak üzere, her $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 \, dx \geq \frac{n^2}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^2} dx$$

olur. Buradaki $\frac{n^2}{4}$ sabiti en iyi sabittir (Tertikas ve Zographopoulos, 2007).

Kanıt. $r = |x|$ ve $u \in C_0^\infty$ olsun.

$$\Delta\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{-2(n-4)}{r^4}$$

eşitliğinden

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^2 \Delta\left(\frac{1}{r^2}\right) dx = -2(n-4) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{r^4} dx$$

ifadesi elde edilebilir. Soldaki integral için iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u}{r^2} \Delta u dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u|^2}{r^2} dx + (n-4) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{r^4} dx$$

eşitliği bulunur. Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizlikleriyle, her $\epsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u}{r^2} \Delta u dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{r^4} dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 \, dx\right)^{1/2} \\ &\leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{r^4} dx + \frac{1}{4\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 \, dx \end{aligned}$$

olacağından,

$$\frac{1}{4\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 \, dx + (\epsilon - n + 4) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{r^4} dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u|^2}{r^2} dx$$

sonucuna ulaşılır. $p = 2$ için (2.17) Rellich eşitsizliğinden

$$\frac{16(\epsilon - n + 4)}{n^2 (n-4)^2} \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 \, dx \geq (\epsilon - n + 4) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{r^4} dx$$

ilişkisi elde edilir. Buradan ulaşılan sonuç ise

$$\left(\frac{16(\epsilon - n + 4)}{n^2 (n-4)^2} + \frac{1}{4\epsilon}\right) \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 \, dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u|^2}{r^2} dx \tag{2.22}$$

şeklindedir. $f(n;\epsilon) := \frac{16(\epsilon-n+4)}{n^2(n-4)^2} + \frac{1}{4\epsilon}$ olmak üzere, f fonksiyonu minimum değerini $0 < \epsilon_0 = \frac{n(n-4)}{8}$ için alır ve bu değer $f\left(\frac{n(n-4)}{8}\right) = \frac{4}{n^2}$ olarak hesaplanır. Her pozitif ϵ değeri için (2.22) eşitsizliği geçerli olduğundan, $\epsilon_0 = \frac{n(n-4)}{8}$ seçiminin istenen sonucu verdiği rahatlıkla görülür.

Şimdi, $\frac{n^2}{4}$ sabitinin en iyi sabit olduğunu gösterelim. Keyfi $\epsilon > 0$ değeri için

$$u_\epsilon(r) = \begin{cases} -\left(\frac{n-4}{2}+\epsilon\right)(r-1)+1, & r \le 1, \\ r^{-\left(\frac{n-4}{2}+\epsilon\right)}, & r > 1 \end{cases}$$

fonksiyonu ele alınsın. Kolayca doğrulanabileceği üzere, türev alma işlemleri ile

$$|\nabla u_\epsilon(r)|^2 = \begin{cases} \left(\frac{n-4}{2}+\epsilon\right)^2, & r \le 1, \\ \left(\frac{n-4}{2}+\epsilon\right)^2 r^{2-n-2\epsilon}, & r > 1 \end{cases}$$

ve

$$|\Delta u_\epsilon(r)|^2 = \begin{cases} \left(\frac{n-4}{2}+\epsilon\right)^2 (n-1)^2 \frac{1}{r^2}, & r \le 1, \\ \left(\frac{n-4}{2}+\epsilon\right)^2 \left(\frac{n}{2}-\epsilon\right)^2 r^{-n-2\epsilon}, & r > 1 \end{cases}$$

ifadeleri bulunur. $\mathbb{R}^n$'deki kutupsal koordinatlar kullanıldığında, ω_n birim yuvarın yüzey alanı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u_\epsilon|^2 dx &= \int_{B(0,1)} |\Delta u_\epsilon|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} |\Delta u_\epsilon|^2 dx \\ &= \omega_n \left(\frac{n-4}{2}+\epsilon\right)^2 \left[(n-1)^2 \int_0^1 r^{n-3} dr + \left(\frac{n}{2}-\epsilon\right)^2 \int_1^\infty r^{-1-2\epsilon} dx\right] \\ &= \omega_n \left(\frac{n-4}{2}+\epsilon\right)^2 \left[\frac{(n-1)^2}{n-2} + \left(\frac{n}{2}-\epsilon\right)^2 \frac{1}{2\epsilon}\right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u_\epsilon|^2}{r^2} dx &= \int_{B(0,1)} \frac{|\nabla u_\epsilon|^2}{r^2} dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} \frac{|\nabla u_\epsilon|^2}{r^2} dx \\ &= \left(\frac{n-4}{2}+\epsilon\right)^2 \omega_n \int_0^1 r^{n-3} dr + \left(\frac{n-4}{2}+\epsilon\right)^2 \omega_n \int_1^\infty r^{-1-2\epsilon} dx \\ &= \omega_n \left(\frac{n-4}{2}+\epsilon\right)^2 \left[\frac{1}{n-2} + \frac{1}{2\epsilon}\right] \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan, $\epsilon \longrightarrow 0$ iken limit alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u_\epsilon|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u_\epsilon|^2}{r^2} dx} &= \frac{\frac{(n-1)^2}{n-2} + \left(\frac{n}{2}-\epsilon\right)^2 \frac{1}{2\epsilon}}{\frac{1}{n-2} + \frac{1}{2\epsilon}} \\ &\longrightarrow \frac{n^2}{4} \end{aligned}$$

en iyi sabiti bulunur. ■

3 $\mathbb{H}^n$ HEISENBERG GRUBU

Tezin bu bölümünde, Heisenberg grubu üzerindeki temel tanım, gösterim ve yapılar verilecektir. Daha detaylı bilgi için (Garofalo ve Lanconelli, 1990; Stein, 1993; Thangavelu, 1998; Capogna vd., 2007; Bonfiglioli vd., 2007; Calin vd., 2007; Krantz, 2009) referanslarına başvurulabilir.

3.1 Temel Tanım ve Kavramlar

Heisenberg grubu için üzerinde verilen işleme göre farklı tanımlar kullanılmaktadır. Bu tanımların en kullanışlılarından biri şu şekildedir:

Tanım 3.1 [**Heisenberg Grubu**] . $\xi = (x, y, l)\,,\ \tilde{\xi} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{l}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\tau_\xi(\tilde{\xi}) = \xi \circ \tilde{\xi} = (x + \tilde{x}, y + \tilde{y}, l + \tilde{l} + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i\tilde{y}_i - y_i\tilde{x}_i)) \tag{3.1}$$

ikili işlemi ile verilen $(\mathbb{R}^{2n+1}, \circ)$ cebirsel yapısına *Heisenberg grubu* denir ve bu grup $\mathbb{H}^n$ sembolü ile gösterilir (Folland ve Stein, 1974).

Burada $\xi \circ \tilde{\xi} \neq \tilde{\xi} \circ \xi$ olduğu açıktır. Yani, $\mathbb{H}^n$ üzerinde $\circ$ işleminin değişme özelliği yoktur. Heisenberg grubunun birim elemanı $0 = (0, 0, 0)$'dır ve bu gruptaki herhangi ξ elemanının tersi $\xi^{-1} = -\xi$ olarak bulunur. Şimdi, $\xi, \tilde{\xi} \in \mathbb{H}^n$ için

$$\begin{array}{rcll} h & : & \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n & \longrightarrow \quad \mathbb{H}^n \\ & & (\xi, \tilde{\xi}) & \longmapsto \quad h(\xi, \tilde{\xi}) = \xi \circ \tilde{\xi}^{-1} \end{array}$$

biçiminde tanımlanan h dönüşümü verilsin. Bu dönüşüm,

$$\begin{aligned} h(\xi, \tilde{\xi}) &= \xi \circ \tilde{\xi}^{-1} \\ &= (x, y, l) \circ (-\tilde{x}, -\tilde{y}, -\tilde{l}) \\ &= (x - \tilde{x}, y - \tilde{y}, l - \tilde{l} - 2\sum_{i=1}^{n}(x_i\tilde{y}_i - y_i\tilde{x}_i)) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. h dönüşümünün koordinat fonksiyonları polinomlardan oluştuğu için h dönüşümü her mertebeden sürekli türevlenebilirdir. Dolayısıyla, $\mathbb{H}^n$ bir Lie grubudur ve ayrıca altında yatan manifold $\mathbb{R}^{2n+1}$'dir.

$\mathbb{H}^n$ üzerindeki vektör alanları şu şekilde verilir:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i \frac{\partial}{\partial l}, \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i \frac{\partial}{\partial l}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3.2}$$

Bu vektör alanları, (3.1) işlemiyle verilen $\mathbb{H}^n$ Heisenberg grubu üzerinde sol invaryanttır (Calin vd., 2007). Sürekli türevlenebilir keyfi X ve Y vektör alanlarının Lie çarpımı $[X, Y] = XY - YX$ biçiminde tanımlanır. Kolayca doğrulanabileceği üzere, $\mathbb{H}^n$'deki (3.2) vektör alanlarının Lie çarpımları herhangi $i, j = 1, 2, \ldots, n$ için

$$[X_i, X_j] = [Y_i, Y_j] = \left[X_i, \frac{\partial}{\partial l}\right] = \left[Y_i, \frac{\partial}{\partial l}\right] = 0, \quad [X_i, Y_j] = -4\delta_{ij} \frac{\partial}{\partial l}$$

olarak hesaplanır. Burada δ_{ij},

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

şeklinde verilen Kronecker delta fonksiyonudur. Gerçekten de, basit bir hesaplama ile Heisenberg grubundaki sıfırdan farklı tek Lie çarpımının $i = 1, \ldots, n$ için

$$\begin{aligned} [X_i, Y_i] &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i \frac{\partial}{\partial l}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i \frac{\partial}{\partial l}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i \frac{\partial}{\partial l}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i \frac{\partial}{\partial l}\right) \\ &= -2\left(\frac{\partial}{\partial x_i} x_i\right)\frac{\partial}{\partial l} - 2\left(\frac{\partial}{\partial y_i} y_i\right)\frac{\partial}{\partial l} \\ &= -4\frac{\partial}{\partial l} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu yapıya Heisenberg grubu denmesinin nedeni de Lie çarpımlarının bu özelliğindendir. Heisenberg grubundaki $[X, Y]$ ikili işlemi ya sıfır ya da $-4\frac{\partial}{\partial l}$ olduğundan, ikinci mertebeden herhangi $[[X, Y], Z]$ Lie çarpımı sıfırdır. Bundan dolayı, (3.2) vektör alanları ikinci mertebeden nilpotent Lie cebiri oluşturur (Krantz, 2009).

(3.2) vektör alanları yardımı ile Heisenberg gradyan vektörü

$$\nabla_{\mathbb{H}^n} = (X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$$

şeklinde verilir. Verilen gradyan vektörü, $\mathbb{H}^n$'deki her nokta için $2n$ boyutlu bir vektör alanı oluşturur. $\mathbb{H}^n$'deki alt-Laplace operatör, diğer adıyla Kohn Laplace operatör

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} = \nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i^2 + Y_i^2\right) \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlı olup, daha açık bir şekilde

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbb{H}^n} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+4y_i\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial l}-4x_i\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial l}+4\left(x_i^2+y_i^2\right)\frac{\partial^2}{\partial l^2}\right)\\ &= \Delta_{\mathbb{R}^{2n}}+4\left(|x|^2+|y|^2\right)\frac{\partial^2}{\partial l^2}+4\frac{\partial}{\partial l}T\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada; $\Delta_{\mathbb{R}^{2n}}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\right)$ ile $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ değişkenine göre klasik Laplace operatör, T ile $T=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i\frac{\partial}{\partial x_i}-x_i\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$ şeklindeki vektör alanı gösterilmektedir. $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ operatörü ikinci mertebeden öz eşlenik bir diferansiyel operatördür. Bu operatör sol invaryant ve alt-eliptiktir ancak $\mathbb{H}^n$'deki hiçbir noktada eliptik değildir (Folland, 1973). $u:\mathbb{H}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon ve $p>1$ olsun. $\mathbb{H}^n$'deki $p-$alt-Laplace ($p-$Kohn Laplace) ve $p-$biharmonik ($p-$bi-Kohn Laplace) operatörler sırasıyla

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbb{H}^n,p}u &= \sum_{i=1}^{n}X_i\left(\left[\sum_{i=1}^{n}\left(|X_iu|^2+|Y_iu|^2\right)\right]^{\frac{p-2}{p}}X_iu\right)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{n}Y_i\left(\left[\sum_{i=1}^{n}\left(|X_iu|^2+|Y_iu|^2\right)\right]^{\frac{p-2}{p}}Y_iu\right)\\ &= \nabla_{\mathbb{H}^n}\cdot\left(|\nabla_{\mathbb{H}^n}u|^{p-2}\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right)\end{aligned}$$

ve

$$\Delta_{\mathbb{H}^n,p}^2u=\Delta_{\mathbb{H}^n}\left(|\Delta_{\mathbb{H}^n}u|^{p-2}\Delta_{\mathbb{H}^n}u\right)$$

şeklindedir.

I_n, $n\times n$'lik bir birim matris olmak üzere,

$$\Lambda=\begin{pmatrix}I_n & 0 & 2y\\ 0 & I_n & -2x\end{pmatrix}$$

olsun. ∇ ile $\mathbb{R}^{2n+1}$ Öklid uzayındaki standart gradyan vektörü gösterilmekte olup,

$$\nabla_{\mathbb{H}^n}=\Lambda\nabla,\quad \Delta_{\mathbb{H}^n}=\nabla\cdot\left(\Lambda^T\Lambda\nabla\right)$$

ilişkilerinin varlığını gözlemlemek zor değildir. Bu durumda, aşağıdaki

$$\int_\Omega v\Delta_{\mathbb{H}^n}ud\xi=-\int_\Omega\nabla_{\mathbb{H}^n}v\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}ud\xi+\int_{\partial\Omega}v\nabla_{\mathbb{H}^n}u\cdot\eta_{\mathbb{H}^n}d\sigma$$

Gauss-Green formülü geçerli olur (D'Ambrosio, 2004). Burada η, $\partial\Omega$ sınırı boyunca dış yönlü normal vektör olmak üzere, $\eta_{\mathbb{H}^n} = \Lambda\eta$ şeklinde tanımlıdır.

Heisenberg dilatasyon dönüşümü, yani $\mathbb{H}^n$'deki bir cismin şeklini değiştirmeyecek şekilde genişletme veya daraltma işini yapan dönüşüm, her pozitif reel λ sayısı için

$$\begin{array}{rcll} \delta_\lambda & : & \mathbb{H}^n & \longrightarrow \quad \mathbb{H}^n \\ & & (x,y,l) & \mapsto \quad \delta_\lambda(x,y,l) := \left(\lambda x, \lambda y, \lambda^2 l\right) \end{array}$$

şeklinde verilir. δ_λ dönüşümü bir grup izomorfizmdir. Basit bir hesaplama sonucunda δ_λ dönüşümünün Jacobi determinantı λ^{2n+2} olarak bulunur. $|E|$ ile herhangi ölçülebilir $E \subset \mathbb{H}^n$ kümesinin ölçüsü ve $d\xi = dxdydl$ ile $\mathbb{R}^{2n+1}$ uzayındaki Lebesgue ölçüsü gösterilmek üzere, değişken değiştirme formülü şu ilişkileri verir:

$$|\delta_\lambda(E)| = \lambda^Q |E|, \quad d\delta_\lambda(x,y,l) = \lambda^Q dxdydl = \lambda^Q d\xi.$$

Burada $Q = 2n+2$'dir ve bu sayıya $\mathbb{H}^n$ Heisenberg grubunun *homojen boyutu* denir. Diğer taraftan, $\mathbb{H}^n$'nin topolojik boyutunun $2n+1$ olduğu unutulmamalıdır.

Tanım 3.2 $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere, bir $u : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\lambda > 0$ değeri için

$$u(\delta_\lambda(x,y,l)) = u\left(\lambda x, \lambda y, \lambda^2 l\right) = \lambda^m u(x,y,l)$$

eşitliğini sağlıyor ise bu fonksiyonun *homojenlik derecesi* m'dir denir (Garofalo ve Lanconelli, 1990).

(3.2) ile verilen X_i ve Y_i Heisenberg vektör alanlarının δ_λ dönüşümüne göre birinci dereceden homojen vektör alanları olduklarını göstermek zor değildir. Gerçekten de,

$$X_i(\delta_\lambda) = \lambda\delta_\lambda(X_i), \quad Y_i(\delta_\lambda) = \lambda\delta_\lambda(Y_i)$$

olduğu görülür. $\mathbb{H}^n$ Heisenberg grubundaki $\nabla_{\mathbb{H}^n}$ ve $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ türev operatörleri, τ_ξ sol ötelemeye göre invaryant ve δ_λ dilatasyon dönüşümüne göre sırasıyla birinci ve ikinci dereceden homojendir. Açık bir şekilde ifade etmek gerekirse,

$$\nabla_{\mathbb{H}^n}(u \circ \tau_\xi) = (\nabla_{\mathbb{H}^n} u) \circ \tau_\xi, \quad \nabla_{\mathbb{H}^n}(u \circ \delta_\lambda) = \lambda(\nabla_{\mathbb{H}^n} u) \circ \delta_\lambda$$

ve

$$\Delta_{\mathbb{H}^n}(u \circ \tau_\xi) = (\Delta_{\mathbb{H}^n} u) \circ \tau_\xi, \quad \Delta_{\mathbb{H}^n}(u \circ \delta_\lambda) = \lambda^2(\Delta_{\mathbb{H}^n} u) \circ \delta_\lambda$$

ilişkileri mevcuttur.

$\mathbb{H}^n$ Heisenberg grubundaki doğal norm fonksiyonu

$$\rho = \|\xi\|_{\mathbb{H}^n} = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + y_i^2 \right) \right)^2 + l^2 \right)^{1/4} \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlıdır ve bu fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $\|\xi\|_{\mathbb{H}^n} \geq 0$ ve $\|\xi\|_{\mathbb{H}^n} = 0 \iff \xi = 0.$

2. $\left\|\xi^{-1}\right\|_{\mathbb{H}^n} = \|-\xi\|_{\mathbb{H}^n} = \|\xi\|_{\mathbb{H}^n}.$

3. $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^n}$ fonksiyonunun homojenlik derecesi 1'dir:

$$\|\delta_\lambda(\xi)\|_{\mathbb{H}^n} = \left\|\left(\lambda x, \lambda y, \lambda^2 l\right)\right\|_{\mathbb{H}^n} = \left(|\lambda(x,y)|^4 + \lambda^4 l^2\right)^{1/4} = \lambda \|\xi\|_{\mathbb{H}^n}.$$

4. $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^n} : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir.

5. $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^n} : \mathbb{H}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her mertebeden sürekli türevlenebilirdir.

Bu özellikler $\mathbb{H}^n$ üzerinde tek bir norm fonksiyonu belirlemez. Eğer u, pozitif, sıfır noktası dışında sürekli türevlenebilir ve homojenlik derecesi sıfır olan bir fonksiyon ise

$$\|\xi\|^*_{\mathbb{H}^n} \equiv u(\xi) \|\xi\|_{\mathbb{H}^n}$$

ifadesi de $\mathbb{H}^n$ üzerinde bir norm belirtir. Örneğin, $\mathbb{R}^{2n+1}$ uzayındaki

$$\|\xi\|_e = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + y_i^2 \right) + l^2 \right)^{1/2}$$

standart Öklid normu aynı zamanda Heisenberg grubu için de bir norm ifade eder (Krantz, 2009).

Tanım 3.3 $\mathbb{H}^n \setminus \{0\}$ üzerinde sürekli ve pozitif olan bir u fonksiyonu, her $\lambda > 0$ sayısı için $u(\delta_\lambda(\xi)) = \lambda u(\xi)$ ve $u\left(\xi^{-1}\right) = u(\xi)$ şartlarını sağlıyor ise bu fonksiyona $\mathbb{H}^n$ üzerinde *homojen norm* adı verilir (Garofalo ve Lanconelli, 1990).

Bu tanıma göre, (3.4) normunun homojen olduğu âşikardır.

$\xi = (x, y, l)$ ve $\tilde{\xi} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{l})$, $\mathbb{H}^n$'de herhangi iki nokta olmak üzere, uzaklık fonksiyonu (3.1)ile verilen $\circ$ grup işlemi ve (3.4) normu yardımı ile

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}^n}(\xi, \tilde{\xi}) &= \left\| \xi^{-1} \circ \tilde{\xi} \right\|_{\mathbb{H}^n} \\ &= \left(\left[(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2 \right]^2 + \left[l - \tilde{l} - 2\left(x \cdot \tilde{y} - \tilde{x} \cdot y \right) \right]^2 \right)^{1/4} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $d_{\mathbb{H}^n}$ fonksiyonu şu özelliklere sahiptir:

1. $d_{\mathbb{H}^n}(\xi, \tilde{\xi}) = 0 \iff \xi = \tilde{\xi}$.

2. Simetri özelliğini sağlar:

$$d_{\mathbb{H}^n}(\xi, \tilde{\xi}) = \left\| \xi^{-1} \circ \tilde{\xi} \right\|_{\mathbb{H}^n} = \left\| (-\xi) \circ \tilde{\xi} \right\|_{\mathbb{H}^n} = \left\| \xi \circ (-\tilde{\xi}) \right\|_{\mathbb{H}^n} = d_{\mathbb{H}^n}(\tilde{\xi}, \xi).$$

3. Her $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{H}^n$ için

$$d_{\mathbb{H}^n}\left(\xi_1, \xi_2\right) \leq \gamma_0 \left[d_{\mathbb{H}^n}\left(\xi_1, \xi_3\right) + d_{\mathbb{H}^n}\left(\xi_3, \xi_2\right) \right]$$

olacak şekilde bir $\gamma_0 > 0$ sayısı mevcuttur (Krantz, 2009).

Kanıt.

$$C := \sup \left\{ d_{\mathbb{H}^n}\left(\xi_1, \xi_2\right) : \left\| \xi_1 \right\|_{\mathbb{H}^n}, \left\| \xi_2 \right\|_{\mathbb{H}^n} \leq 1 \right\}$$

ve

$$D := \inf \left\{ d_{\mathbb{H}^n}\left(\xi_1, \xi_3\right) + d_{\mathbb{H}^n}\left(\xi_3, \xi_2\right) : \left\| \xi_1 \right\|_{\mathbb{H}^n}, \left\| \xi_2 \right\|_{\mathbb{H}^n}, \left\| \xi_3 \right\|_{\mathbb{H}^n} \leq 1 \right\}$$

olsun. Buradan, rahatlıkla $C \geq 1$ ve $D > 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $\left\| \xi_1 \right\|_{\mathbb{H}^n}, \left\| \xi_2 \right\|_{\mathbb{H}^n}, \left\| \xi_3 \right\|_{\mathbb{H}^n} \leq 1$ için istenen

$$d_{\mathbb{H}^n}\left(\xi_1, \xi_2\right) \leq C \leq \frac{C}{D} \left[d_{\mathbb{H}^n}\left(\xi_1, \xi_3\right) + d_{\mathbb{H}^n}\left(\xi_3, \xi_2\right) \right]$$

elde edilir. Şimdi, herhangi $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{H}^n$ için $c = \max \left\{ \left\| \xi_1 \right\|_{\mathbb{H}^n}, \left\| \xi_2 \right\|_{\mathbb{H}^n}, \left\| \xi_3 \right\|_{\mathbb{H}^n} \right\}$ olsun. Bu durumda, $\left\| \tilde{\xi}_1 \right\|_{\mathbb{H}^n}, \left\| \tilde{\xi}_2 \right\|_{\mathbb{H}^n}, \left\| \tilde{\xi}_3 \right\|_{\mathbb{H}^n} \leq 1$ için $\xi_1 = c\tilde{\xi}_1$, $\xi_2 = c\tilde{\xi}_2$ ve $\xi_3 = c\tilde{\xi}_3$ olur. Böylelikle,

$$d_{\mathbb{H}^n}\left(\xi_1, \xi_2\right) = d_{\mathbb{H}^n}(c\tilde{\xi}_1, c\tilde{\xi}_2) = c d_{\mathbb{H}^n}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$$

ve

$$d_{\mathbb{H}^n}(\xi_1,\xi_3)+d_{\mathbb{H}^n}(\xi_3,\xi_2)=c\left[d_{\mathbb{H}^n}(\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_3)+d_{\mathbb{H}^n}(\tilde{\xi}_3,\tilde{\xi}_2)\right]$$

eşitlikleri bulunur. Sonuç olarak, herhangi $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\mathbb{H}^n$ değeri için

$$d_{\mathbb{H}^n}(\xi_1,\xi_2)\leq\frac{C}{D}\left[d_{\mathbb{H}^n}(\xi_1,\xi_3)+d_{\mathbb{H}^n}(\xi_3,\xi_2)\right]$$

eşitsizliği geçerli olur. ■

Şimdi, tanımlanan uzaklık fonksiyonu yardımı ile $\mathbb{H}^n$'deki açık yuvar ve kürenin tanımları verilebilir. $\mathbb{H}^n$'deki R yarıçaplı ξ_0 merkezli açık yuvar

$$B_{\mathbb{H}^n}(\xi_0,R)=\{\xi\in\mathbb{H}^n : d_{\mathbb{H}^n}(\xi_0,\xi)<R\}$$

şeklinde, R yarıçaplı ξ_0 merkezli küre ise

$$S_{\mathbb{H}^n}(\xi_0,R)=\{\xi\in\mathbb{H}^n : d_{\mathbb{H}^n}(\xi_0,\xi)=R\}$$

olarak tanımlanır. $\mathbb{H}^n$'deki $B_{\mathbb{H}^n}(\xi_0,R)$ yuvarına *Heisenberg yuvarı*, bazen de *Koranyi yuvarı* denir. $\mathbb{R}^n$ uzayındaki Öklid yuvarının üstlendiği rolü $\mathbb{H}^n$'de Koranyi yuvarı üstlenir. $B(0,R)$ $\mathbb{R}^{2n+1}$ Öklid uzayındaki R yarıçaplı sıfır merkezli açık yuvar ise $R>1$ için şu ilişki geçerlidir:

$$B(0,R)\subset B_{\mathbb{H}^n}(0,R)\subset B\left(0,R^2\right).$$

$\mathbb{H}^n$'deki birim yuvarın hacmi

$$|B_{\mathbb{H}^n}(0,1)|=\frac{2\pi^{n+\frac{1}{2}}\Gamma(n/2)}{(n+1)\Gamma(n)\Gamma((n+1)/2)}$$

olmak üzere,

$$|B_{\mathbb{H}^n}(\xi_0,R)|=|B_{\mathbb{H}^n}(0,R)|=R^Q|B_{\mathbb{H}^n}(0,1)| \tag{3.5}$$

eşitliği söz konusudur. Burada Γ ve $|\cdot|$ sembolleri ile sırasıyla, Gamma fonksiyonu ve $\mathbb{R}^{2n+1}$'deki Lebesgue ölçüsü gösterilmekte olup, (3.5) eşitliğinde $\mathbb{H}^n$'nin homojen boyutu olan Q'nun belirdiğine dikkat edilmelidir. Diğer yandan, $S_{\mathbb{H}^n}(0,1)\subset\mathbb{H}^n$ birim küresinin yüzey alanı $\omega_Q=Q|B_{\mathbb{H}^n}(0,1)|$ eşitliği ile verilir (Coulhon vd., 1996).

$\mathbb{R}^n$ Öklid uzayındaki Δ klasik Laplace operatörün temel çözümünün

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)}\,|x|^{2-n}, & n\neq 2,\\ \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x|}, & n=2\end{cases}$$

olduğu bilinmektedir. Folland (1973), $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ Kohn Laplace operatör ile Δ klasik Laplace operatör arasında çok önemli bir bağlantı kurmuş ve şu sonucu elde etmiştir: $\tilde{c}_Q$ sadece Q'ya bağlı

$$\tilde{c}_Q=\frac{2^{(Q-2)/2}\Gamma^2\left((Q-2)/4\right)}{\pi^{Q/2}}$$

şeklinde verilen pozitif bir sabit olmak üzere, sıfırda tekil noktasına sahip

$$\Psi_2(\rho)=\frac{\tilde{c}_Q}{\rho^{Q-2}}$$

fonksiyonu $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$ operatörünün temel çözümüdür. Başka bir deyişle,

$$-\tilde{c}_Q\Delta_{\mathbb{H}^n}\rho^{2-Q}=\delta_0$$

eşitliği geçerlidir. Diğer taraftan, $1<p<\infty$ ve c_p ile c_Q uygun birer sabit olmak üzere,

$$\Psi_p(\rho)=\begin{cases}c_p\rho^{\frac{p-Q}{p-1}}, & p\neq Q,\\ c_Q\ln\frac{1}{\rho}, & p=Q\end{cases}$$

fonksiyonu $p-$alt-Laplace operatörün $0\in\mathbb{H}^n$ noktasında tekilliğe sahip olan temel çözümüdür (Capogna vd., 1996).

Ω, $\mathbb{H}^n$'de bir bölge ve $1\leq p<\infty$ olsun.

$$S^{1,p}(\Omega)=\left\{u\in L^p(\Omega):\forall i=1,\ldots,n \text{ için } X_iu,Y_iu\in L^p(\Omega)\right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya Heisenberg grubunda *Sobolev uzayı* denir. Bu uzay,

$$\|u\|_{S^{1,p}(\Omega)}:=\left(\int_\Omega\left(|\nabla_{\mathbb{H}^n}u|^p+|u|^p\right)d\xi\right)^{1/p}$$

normu ile bir Banach uzayıdır. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $S^{1,p}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $S_0^{1,p}(\Omega)$ ile gösterilir. Diğer yandan, $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $\left(\int_\Omega|\nabla_{\mathbb{H}^n}u|^p\,d\xi\right)^{1/p}$ normu altındaki kapanışı $D_0^{1,p}(\Omega)$ ile, $\left(\int_\Omega|\Delta_{\mathbb{H}^n}u|^2\,d\xi\right)^{1/2}$ normu altındaki kapanışı ise $D_0^{2,2}(\Omega)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca, Ω bölgesi sınırlı olduğunda, $S_0^{1,p}(\Omega)$ ve $D_0^{1,p}(\Omega)$ uzaylarındaki normlar denktir. Bunların yanında, $a\in L^1_{loc}(\Omega)$ ve h.h.h $x\in\Omega$ için $a>0$ olmak üzere, $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $\left(\int_\Omega a\,|\nabla_{\mathbb{H}^n}u|^p\,d\xi\right)^{1/p}$ normu altındaki kapanışı $D_0^{1,p}(\Omega,a)$ olarak gösterilir (D'Ambrosio, 2004).

3.2 Heisenberg Grubunda Diferansiyel Hesap

Tezin devam eden kısımlarında

$$z=(x,y)\,,\ r=|z|=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2+y_i^2\right)\right)^{1/2} \quad \text{ve } \rho=\|\xi\|_{\mathbb{H}^n}=\left(r^4+l^2\right)^{1/4}$$

gösterimlerinin kullanımı tercih edilecektir. Şimdi, hesaplamalarda sıklıkla kullanılacak olan $\mathbb{H}^n$'deki bazı önemli özdeşlikler ispatı ile birlikte verilecektir.

Önerme 3.1 Türevlenebilir $u:\mathbb{H}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu radyal bir fonksiyon, yani sadece ρ değişkenine bağlı olan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, her $\xi\in\mathbb{H}^n\backslash\{0\}$ için

$$\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u(\rho)\right|^2=\frac{r^2}{\rho^2}\left|u'(\rho)\right|^2 \tag{3.6}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt. Gerekli türev alma işlemleri ile, her $i=1,\ldots,n$ için

$$X_iu(\rho)=\frac{\partial u(\rho)}{\partial x_i}+2y_i\frac{\partial u(\rho)}{\partial l}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_i}+2y_i\frac{\partial\rho}{\partial l}\right)u'(\rho) \tag{3.7}$$

ve

$$Y_iu(\rho)=\frac{\partial u(\rho)}{\partial y_i}-2x_i\frac{\partial u(\rho)}{\partial l}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial y_i}-2x_i\frac{\partial\rho}{\partial l}\right)u'(\rho) \tag{3.8}$$

eşitlikleri bulunur. $r=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2+y_i^2\right)\right)^{1/2}$ ve $\rho=\left(r^4+l^2\right)^{1/4}$ olduğuna dikkat edilerek, gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\frac{\partial\rho}{\partial l}=\frac{1}{4}\left(r^4+l^2\right)^{-3/4}2l=\frac{l}{2\rho^3},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial x_i}=\frac{1}{4}\left(r^4+l^2\right)^{-3/4}4r^3\frac{\partial r}{\partial x_i}=\left(r^4+l^2\right)^{-3/4}r^3\frac{x_i}{r}=\frac{r^2}{\rho^3}x_i$$

ve

$$\frac{\partial\rho}{\partial y_i}=\frac{1}{4}\left(r^4+l^2\right)^{-3/4}4r^3\frac{\partial r}{\partial y_i}=\left(r^4+l^2\right)^{-3/4}r^3\frac{y_i}{r}=\frac{r^2}{\rho^3}y_i$$

kısmi türevleri elde edilir. Bu kısmi türevler (3.7) ve (3.8) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$X_iu(\rho)=\left(x_i\frac{r^2}{\rho^3}+y_i\frac{l}{\rho^3}\right)u'(\rho)$$

ve

$$Y_i u(\rho) = \left(y_i \frac{r^2}{\rho^3} - x_i \frac{l}{\rho^3} \right) u'(\rho)$$

eşitlikleri bulunur. Sonuç olarak, istenen

$$\begin{aligned}
|\nabla_{\mathbb{H}^n} u(\rho)|^2 &= \nabla_{\mathbb{H}^n} u(\rho) \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} u(\rho) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(|X_i u(\rho)|^2 + |Y_i u(\rho)|^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} |u'(\rho)|^2 \left[\left(x_i \frac{r^2}{\rho^3} + y_i \frac{l}{\rho^3} \right)^2 + \left(y_i \frac{r^2}{\rho^3} - x_i \frac{l}{\rho^3} \right)^2 \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} |u'(\rho)|^2 \left(\frac{r^4}{\rho^6} x_i^2 + \frac{l^2}{\rho^6} y_i^2 + \frac{r^4}{\rho^6} y_i^2 + \frac{l^2}{\rho^6} x_i^2 \right) \\
&= \frac{r^2}{\rho^2} |u'(\rho)|^2
\end{aligned}$$

özdeşliği elde edilmiş olur. ■

Önerme 3.2 $u : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir radyal bir fonksiyon olsun. O halde, her $\xi \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$ için

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} u(\rho) = \frac{r^2}{\rho^2} \left(u''(\rho) + \frac{Q-1}{\rho} u'(\rho) \right) \tag{3.9}$$

eşitliği mevcuttur.

Kanıt. Bir önceki önermedeki hesaplamalardan her $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$X_i u(\rho) = \left(x_i \frac{r^2}{\rho^3} + y_i \frac{l}{\rho^3} \right) u'(\rho), \quad Y_i u(\rho) = \left(y_i \frac{r^2}{\rho^3} - x_i \frac{l}{\rho^3} \right) u'(\rho) \tag{3.10}$$

olduğu bilinmektedir. Benzer hesaplamalar ile, $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$X_i u'(\rho) = \left(x_i \frac{r^2}{\rho^3} + y_i \frac{l}{\rho^3} \right) u''(\rho), \quad Y_i u'(\rho) = \left(y_i \frac{r^2}{\rho^3} - x_i \frac{l}{\rho^3} \right) u''(\rho) \tag{3.11}$$

sonuçları bulunur. (3.10) ve (3.11) eşitlikleri yardımı ile

$$\begin{aligned}
X_i^2 u(\rho) &= X_i \left[\left(x_i \frac{r^2}{\rho^3} + y_i \frac{l}{\rho^3} \right) u'(\rho) \right] \\
&= u'(\rho) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + 2 y_i \frac{\partial}{\partial l} \right) \left(x_i \frac{r^2}{\rho^3} + y_i \frac{l}{\rho^3} \right) + \left(x_i \frac{r^2}{\rho^3} + y_i \frac{l}{\rho^3} \right) X_i u'(\rho) \\
&= u'(\rho) \left[\frac{r^2}{\rho^3} + \left(x_i^2 + y_i^2 \right) \frac{2}{\rho^3} - 6 x_i y_i \frac{r^2 l}{\rho^7} - \frac{3}{\rho^7} \left(x_i^2 r^4 + y_i^2 l^2 \right) \right] \\
&\quad + u''(\rho) \left[x_i^2 \frac{r^4}{\rho^6} + 2 x_i y_i \frac{r^2 l}{\rho^6} + y_i^2 \frac{l^2}{\rho^6} \right]
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
Y_i^2 u(\rho) &= Y_i \left[\left(y_i \frac{r^2}{\rho^3} - x_i \frac{l}{\rho^3} \right) u'(\rho) \right] \\
&= u'(\rho) \left(\frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i \frac{\partial}{\partial l} \right) \left(y_i \frac{r^2}{\rho^3} - x_i \frac{l}{\rho^3} \right) + \left(y_i \frac{r^2}{\rho^3} - x_i \frac{l}{\rho^3} \right) Y_i u'(\rho) \\
&= u'(\rho) \left[\frac{r^2}{\rho^3} + \left(x_i^2 + y_i^2 \right) \frac{2}{\rho^3} + 6x_i y_i \frac{r^2 l}{\rho^7} - \frac{3}{\rho^7} \left(x_i^2 l^2 + y_i^2 r^4 \right) \right] \\
&\quad + u''(\rho) \left[y_i^2 \frac{r^4}{\rho^6} - 2x_i y_i \frac{r^2 l}{\rho^6} + x_i^2 \frac{l^2}{\rho^6} \right]
\end{aligned}
$$

kısmi türevleri elde edilir. Böylelikle,

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{H}^n} u(\rho) &= \sum_{i=1}^{n} \left(X_i^2 + Y_i^2 \right) u(\rho) \\
&= \sum_{i=1}^{n} u'(\rho) \left[\frac{2r^2}{\rho^3} + \left(x_i^2 + y_i^2 \right) \frac{1}{\rho^3} \right] + \sum_{i=1}^{n} u''(\rho) \left[\left(x_i^2 + y_i^2 \right) \frac{r^4 + l^2}{\rho^6} \right] \\
&= (2n+1) u'(\rho) \frac{r^2}{\rho^3} + u''(\rho) \frac{r^2}{\rho^2} \\
&= \frac{r^2}{\rho^2} \left(u''(\rho) + \frac{Q-1}{\rho} u'(\rho) \right)
\end{aligned}
$$

istenen sonucuna ulaşılır. ■

(3.9) özdeşliğinin $p-$alt-Laplace operatör için olan daha genel hali şu şekildedir: $u'(\rho(\xi)) \neq 0$ olmak üzere, her $\xi \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$ ve $p > 1$ için

$$
\Delta_{\mathbb{H}^n,p} u(\rho) = \frac{r^p}{\rho^p} \left| u'(\rho) \right|^{p-2} \left[(p-1) u''(\rho) + (Q-1) \frac{u'(\rho)}{\rho} \right] \tag{3.12}
$$

formülü geçerlidir. $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere, (3.6) ve (3.12) özdeşliklerinde özel olarak $u(\rho) = \rho^\alpha$ fonksiyonu düşünüldüğünde, sırasıyla

$$
\left| \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho^\alpha \right| = |\alpha| \, r \rho^{\alpha-2} \tag{3.13}
$$

ve

$$
\Delta_{\mathbb{H}^n,p} \rho^\alpha = \alpha \, |\alpha|^{p-2} (Q + \alpha p - \alpha - p) \, r^p \rho^{\alpha p - \alpha - 2p}, \quad p > 1 \tag{3.14}
$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitlikler, $\alpha = 1$ ve $p > 1$ olması durumunda, sırasıyla

$$
\left| \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho \right| = \frac{r}{\rho}
$$

ve

$$\Delta_{\mathbb{H}^n,p}\rho = |\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho|^p \,\frac{Q-1}{\rho} = (Q-1)\,\frac{r^p}{\rho^{p+1}}$$

halini alır. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $p = 2$ durumunda ise (3.14) ile verilen formül

$$\Delta_{\mathbb{H}^n}\rho^{\alpha} = \alpha\,(Q+\alpha-2)\,r^2\rho^{\alpha-4} \tag{3.15}$$

olur.

Önerme 3.3 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $r = |z|$ ve $\rho = \left(r^4 + l^2\right)^{1/4}$ olmak üzere,

$$\nabla_{\mathbb{H}^n} r^{\beta} \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n}\rho^{\alpha} = \alpha\beta r^{\beta+2}\rho^{\alpha-4} \tag{3.16}$$

ve

$$\Delta_{\mathbb{H}^n}\left(r^{\beta}\rho^{\alpha}\right) = \alpha\,(Q+\alpha+2\beta-2)\,r^{\beta+2}\rho^{\alpha-4} + \beta\,(Q+\beta-4)\,r^{\beta-2}\rho^{\alpha} \tag{3.17}$$

özdeşlikleri mevcuttur.

Kanıt. Standart türev alma işlemleri ile

$$\nabla_{\mathbb{H}^n} r^{\beta} \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n}\rho^{\alpha} = \alpha\beta r^{\beta-1}\rho^{\alpha-1}\nabla_{\mathbb{H}^n} r \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \tag{3.18}$$

eşitliği bulunur. Diğer yandan, $i = 1, \ldots, n$ için

$$X_i r = \frac{\partial r}{\partial x_i} + 2y_i\frac{\partial r}{\partial l} = \frac{x_i}{r}, \quad Y_i r = \frac{\partial r}{\partial y_i} - 2x_i\frac{\partial r}{\partial l} = \frac{y_i}{r}$$

ve

$$X_i\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + 2y_i\frac{\partial \rho}{\partial l} = x_i\frac{r^2}{\rho^3} + y_i\frac{l}{\rho^3}, \quad Y_i\rho = \frac{\partial \rho}{\partial y_i} - 2x_i\frac{\partial \rho}{\partial l} = y_i\frac{r^2}{\rho^3} - x_i\frac{l}{\rho^3}$$

olduğundan, sırasıyla

$$\nabla_{\mathbb{H}^n} r = \left(\frac{x_1}{r}, \cdots, \frac{x_n}{r}, \frac{y_1}{r}, \cdots, \frac{y_n}{r}\right)$$

ve

$$\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho = \left(x_1\frac{r^2}{\rho^3} + y_1\frac{l}{\rho^3}, \ldots, x_n\frac{r^2}{\rho^3} + y_n\frac{l}{\rho^3}, y_1\frac{r^2}{\rho^3} - x_1\frac{l}{\rho^3}, \ldots, y_n\frac{r^2}{\rho^3} - x_n\frac{l}{\rho^3}\right)$$

vektörleri elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbb{H}^n} r \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho &= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 \frac{r}{\rho^3} + x_i y_i \frac{l}{r\rho^3} + y_i^2 \frac{r}{\rho^3} - x_i y_i \frac{l}{r\rho^3} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + y_i^2 \right) \frac{r}{\rho^3} \\
&= \frac{r^3}{\rho^3}
\end{aligned}$$

sonucu bulunur. Bu sonuç (3.18) eşitliğinde kullanıldığında (3.16) özdeşliği elde edilir. Şimdi, (3.17) özdeşliğinin doğruluğunu gösterelim. İlk olarak,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{H}^n} r^\beta &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + 4y_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial l} - 4x_i \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial l} + 4\left(x_i^2 + y_i^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial l^2} \right) r^\beta \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 r^\beta}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 r^\beta}{\partial y_i^2} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\beta r^{\beta-2} x_i \right) + \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\beta r^{\beta-2} y_i \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\beta (\beta-2) r^{\beta-4} x_i^2 + 2\beta r^{\beta-2} + \beta(\beta-2) r^{\beta-4} y_i^2 \right) \\
&= \beta (2n + \beta - 2) r^{\beta-2} \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece, gerekli türev işlemlerinden sonra (3.15), (3.16) ve (3.19) özdeşlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{H}^n} \left(r^\beta \rho^\alpha \right) &= \nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(\rho^\alpha \nabla_{\mathbb{H}^n} r^\beta + r^\beta \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho^\alpha \right) \\
&= \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho^\alpha \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} r^\beta + \rho^\alpha \Delta_{\mathbb{H}^n} r^\beta + \nabla_{\mathbb{H}^n} r^\beta \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho^\alpha + r^\beta \Delta_{\mathbb{H}^n} \rho^\alpha \\
&= 2\alpha\beta r^{\beta+2} \rho^{\alpha-4} + \beta (Q + \beta - 4) r^{\beta-2} \rho^\alpha + \alpha (Q + \alpha - 2) r^{\beta+2} \rho^{\alpha-4} \\
&= \alpha (Q + \alpha + 2\beta - 2) r^{\beta+2} \rho^{\alpha-4} + \beta (Q + \beta - 4) r^{\beta-2} \rho^\alpha
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. ■

Önerme 3.4 $\mathcal{Z} := \{\xi = (z,l) \in \mathbb{H}^n : z = 0, l \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere, her $\xi \in \mathbb{H}^n \backslash \mathcal{Z}$ için

$$\nabla_{\mathbb{H}^n} \left(\frac{\rho^3}{r^2} \right) \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho = 1$$

ve

$$\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(\frac{\rho^3}{r^2} \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho \right) = Q \qquad (3.20)$$

özdeşlikleri geçerlidir.

Kanıt. (3.13) ve (3.16) özdeşlikleri düşünülerek gerekli türevler alındığında

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbb{H}^n}\left(\frac{\rho^3}{r^2}\right)\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho &= \left(\frac{3\rho^2r^2\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho-2r\rho^3\nabla_{\mathbb{H}^n}r}{r^4}\right)\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\\ &= \frac{3\rho^2r^2\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\right|^2-2r\rho^3\nabla_{\mathbb{H}^n}r\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho}{r^4}\\ &= 1\end{aligned}$$

sonucu bulunur. Diğer yandan, elde edilen bu sonuç ve (3.15) eşitliği yardımı ile

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbb{H}^n}\cdot\left(\frac{\rho^3}{r^2}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\right) &= \nabla_{\mathbb{H}^n}\left(\frac{\rho^3}{r^2}\right)\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho+\frac{\rho^3}{r^2}\Delta_{\mathbb{H}^n}\rho\\ &= Q\end{aligned}$$

formülüne ulaşılır. ■

Önerme 3.5 ρ fonksiyonu $\mathbb{H}^n\setminus\{0\}$ bölgesinde $\infty-$harmoniktir. Başka bir deyişle, ρ fonksiyonu

$$\nabla_{\mathbb{H}^n}\left(\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\right|^2\right)\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho=0$$

denkleminin bir çözümüdür.

Kanıt. (3.13) ve (3.16) özdeşlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbb{H}^n}\left(\frac{r^2}{\rho^2}\right)\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho &= \frac{2r\rho^2\nabla_{\mathbb{H}^n}r-2r^2\rho\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho}{\rho^4}\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\\ &= \frac{2r\rho^2\nabla_{\mathbb{H}^n}r\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho-2r^2\rho\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\right|^2}{\rho^4}\\ &= 2\frac{r}{\rho^2}\nabla_{\mathbb{H}^n}r\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho-2\frac{r^2}{\rho^3}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\right|^2\\ &= 0\end{aligned}$$

istenen sonucu elde edilir. ■

Önerme 3.6 Türevlenebilir $u:\mathbb{H}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu sadece r ve l değişkenlerine bağlı bir fonksiyon, yani silindirik bir fonksiyon ise

$$\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\left(r,l\right)\right|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+4r^2\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)^2$$

ve

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} u(r,l) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{Q-3}{r}\frac{\partial}{\partial r} + 4r^2\frac{\partial^2}{\partial l^2}\right) u(r,l)$$

eşitlikleri mevcuttur.

Kanıt. Gerekli türev alma işlemleri ile, herhangi $i = 1, \ldots, n$ için

$$X_i u(r,l) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i\frac{\partial}{\partial l}\right) u(r,l) = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x_i}{r} + 2y_i\frac{\partial u}{\partial l} \tag{3.21}$$

ve

$$Y_i u(r,l) = \left(\frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i\frac{\partial}{\partial l}\right) u(r,l) = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{y_i}{r} - 2x_i\frac{\partial u}{\partial l} \tag{3.22}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
|\nabla_{\mathbb{H}^n} u(r,l)|^2 &= \nabla_{\mathbb{H}^n} u(r,l) \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} u(r,l) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(|X_i u(r,l)|^2 + |Y_i u(r,l)|^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial r}\frac{x_i}{r} + 2y_i\frac{\partial u}{\partial l}\right|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial r}\frac{y_i}{r} - 2x_i\frac{\partial u}{\partial l}\right|^2 \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + 4r^2\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)^2
\end{aligned}$$

istenen sonucu bulunur. Diğer taraftan, (3.21) ve (3.22) eşitlikleri yardımı ile

$$\begin{aligned}
X_i^2 u(r,l) &= X_i\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{x_i}{r} + 2y_i\frac{\partial u}{\partial l}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i\frac{\partial}{\partial l}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{x_i}{r} + 2y_i\frac{\partial u}{\partial l}\right) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{x_i^2}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^2}\right) + \frac{4x_i y_i}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial l} + 4y_i^2\frac{\partial^2 u}{\partial l^2}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
Y_i^2 u(r,l) &= Y_i\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{y_i}{r} - 2x_i\frac{\partial u}{\partial l}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i\frac{\partial}{\partial l}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{y_i}{r} - 2x_i\frac{\partial u}{\partial l}\right) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{y_i^2}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{y_i^2}{r^2}\right) - \frac{4x_i y_i}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial l} + 4x_i^2\frac{\partial^2 u}{\partial l^2}
\end{aligned}$$

kısmi türevlerine ulaşılır. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbb{H}^n} u(r,l) &= \sum_{i=1}^{n}\left[X_i^2 u(r,l) + Y_i^2 u(r,l)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{(x_i^2+y_i^2)}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{2}{r} - \frac{x_i^2+y_i^2}{r^2}\right) + 4\left(x_i^2+y_i^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial l^2}\right] \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{Q-3}{r}\frac{\partial}{\partial r} + 4r^2\frac{\partial^2}{\partial l^2}\right)u(r,l)\end{aligned}$$

özdeşliği elde edilir. ■

$\alpha \in \mathbb{R}$ için $u(r,l) = r^\alpha$ özel durumunda, yukarıda elde edilen özdeşliklerden

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n} r^\alpha| = |\alpha|\, r^{\alpha-1}$$

ve

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} r^\alpha = \alpha(Q+\alpha-4)\, r^{\alpha-2}$$

sonuçlarına kolaylıkla ulaşılır.

3.3 Heisenberg Grubunda İntegral Hesap

Bu altbölümde, Heisenberg grubundaki bazı radyal ya da silindirik tipli fonksiyonların integralini daha rahat hesaplayabilmek için D'Ambrosio (2004) tarafından kullanılan küresel dönüşümler tanıtılacaktır.

$0 \le R_1 < R_2 \le \infty$, $\Omega := B_{\mathbb{H}^n}(0,R_2)\setminus\overline{B_{\mathbb{H}^n}(0,R_1)}$ ve $u \in L^1(\Omega)$ olsun. Amaç, verilen bir Ω halkası üzerinde $\int_\Omega u d\xi$ integralini hesaplamaktır. Ω halkası üzerindeki herhangi

$$\xi = (z,l) = (x,y,l) = (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n,l)$$

noktasının küresel koordinatlardaki gösterimi

$$\begin{aligned}x_1 &= \rho\sqrt{\sin\theta}\cos\theta_1, \\ y_1 &= \rho\sqrt{\sin\theta}\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \rho\sqrt{\sin\theta}\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\cos\theta_{2n-3},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_{n-1} &= \rho\sqrt{\sin\theta}\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{2n-3}\cos\theta_{2n-2}, \\
x_n &= \rho\sqrt{\sin\theta}\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{2n-3}\sin\theta_{2n-2}\cos\theta_{2n-1}, \\
y_n &= \rho\sqrt{\sin\theta}\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{2n-3}\sin\theta_{2n-2}\sin\theta_{2n-1}, \\
l &= \rho^2\cos\theta
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Burada, $\theta \in (0,\pi)$, $i = 1,\ldots,2n-2$ için $\theta_i \in (0,\pi)$, $\theta_{2n-1} \in (0,2\pi)$ ve $R_1 < \rho < R_2$'dir. Yukarıda tanımlanan küresel dönüşümden $r^2 = \rho^2\sin\theta$ eşitliği rahatlıkla elde edilebilir ve küresel koordinatlardaki $\rho,\theta,\theta_1,\ldots,\theta_{2n-1}$ değişkenlerinin açık şekli aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
\rho &= \left(r^4+l^2\right)^{1/4}, \\
\theta &= \arcsin\left(\frac{r^2}{\rho^2}\right), \\
\theta_1 &= \arccos\left(\frac{x_1}{r}\right), \\
&\vdots \\
\theta_{2n-2} &= \arccos\left(\frac{y_{n-1}}{r\prod_{i=1}^{2n-3}\sin\theta_i}\right), \\
\theta_{2n-1} &= \arccos\left(\frac{x_{2n-2}}{r\prod_{i=1}^{2n-2}\sin\theta_i}\right).
\end{aligned}
$$

Küresel koordinatlarda kullanılan

$$
\begin{array}{llll}
\Phi & : & \mathbb{R}^{2n+1} & \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1} \\
 & & (\rho,\theta,\theta_1,\ldots,\theta_{2n-1}) & \mapsto \Phi(\rho,\theta,\theta_1,\ldots,\theta_{2n-1}) = (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n,l)
\end{array}
$$

dönüşüm operatörünün Jacobi matrisi $J(\Phi)$ ile gösterilir ve

$$
J(\Phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial\rho} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial\theta_{2n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial l}{\partial\rho} & \cdots & \frac{\partial l}{\partial\theta_{2n-1}} \end{bmatrix}_{(2n+1)\times(2n+1)}
$$

şeklinde tanımlanır. $J(\Phi)$ Jacobi matrisi $(2n+1)\times(2n+1)$ boyutlu kare matris olduğundan, $J(\Phi)$'nin determinantı vardır ve tümevarım tekniği ile

$$
\begin{aligned}
\det J(\Phi) = \frac{\partial(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n,l)}{\partial(\rho,\theta,\theta_1,\ldots,\theta_{2n-1})} &= \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial\rho} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial\theta_{2n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial l}{\partial\rho} & \cdots & \frac{\partial l}{\partial\theta_{2n-1}} \end{bmatrix} \\
&= \rho^{2n+1}\sin^{n-1}\theta\sin^{2n-2}\theta_1\cdots\sin\theta_{2n-2}
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır. O halde, $\mathbb{H}^n$'deki birim yuvarın küresel koordinatlardaki hacim diferansiyeli

$$\begin{aligned} d\xi = dzdl &= \left|\det J\left(\Phi\right)\right| d\rho d\theta d\theta_1 \cdots d\theta_{2n-2} d\theta_{2n-1} \\ &= \rho^{2n+1} \sin^{n-1}\theta \sin^{2n-2}\theta_1 \cdots \sin\theta_{2n-2} d\rho d\theta d\theta_1 \cdots d\theta_{2n-2} d\theta_{2n-1} \end{aligned}$$

ile ifade edilir. Bu ifade daha kompakt olarak $d\xi = \rho^{2n+1} d\rho d\sigma = \rho^{Q-1} d\rho d\sigma$ şeklinde yazılabilir. Burada

$$d\sigma = \sin^{n-1}\theta \sin^{2n-2}\theta_1 \cdots \sin\theta_{2n-2} d\theta d\theta_1 \cdots d\theta_{2n-2} d\theta_{2n-1},$$

$\mathbb{H}^n$'deki birim kürenin yüzey alan diferansiyelini temsil etmektedir. Bu takdirde, $\mathbb{H}^n$'deki birim kürenin yüzey alanı

$$\left|S_{\mathbb{H}^n}\left(0,1\right)\right| = \int_{S_{\mathbb{H}^n}(0,1)} d\sigma$$

olmak üzere,

$$\left|B_{\mathbb{H}^n}\left(0,1\right)\right| = \int_{B_{\mathbb{H}^n}(0,1)} d\xi = \int_{S_{\mathbb{H}^n}(0,1)} \int_0^1 \rho^{Q-1} d\rho d\sigma = \frac{\left|S_{\mathbb{H}^n}\left(0,1\right)\right|}{Q}$$

ve

$$\left|B_{\mathbb{H}^n}\left(0,R\right)\right| = \int_{B_{\mathbb{H}^n}(0,R)} d\xi = \int_{B_{\mathbb{H}^n}(0,1)} d\left(R\xi\right) = R^Q \int_{B_{\mathbb{H}^n}(0,1)} d\xi = R^Q \left|B_{\mathbb{H}^n}\left(0,1\right)\right|$$

ilişkileri vardır (Krantz, 2009). $|\cdot|$ ile $\mathbb{R}^{2n+1}$'deki Lebesgue ölçüsü gösterilmekte olup, bu ilişkilerde $\mathbb{H}^n$'nin homojen boyutu olan Q'nun nasıl belirdiğine dikkat edilmelidir.

Şimdi, $\mathbb{H}^n$'deki radyal veya silindirik bir fonksiyonun integrali hesaplanırken ihtiyaç duyulan çeşitli özdeşlikler verilecektir. Örneğin, $u = u\left(r,l\right)$ silindirik bir fonksiyon olsun. $\mathbb{R}^{2n}$'deki birim kürenin Lebesgue yüzey ölçümü

$$\begin{aligned} \omega_{2n} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \sin^{2n-2}\theta_1 \cdots \sin\theta_{2n-2} d\theta_1 \cdots d\theta_{2n-2} d\theta_{2n-1} \\ &= 2\pi \left(\int_0^{\pi} \sin^{2n-2}\theta_1 d\theta_1\right) \cdots \left(\int_0^{\pi} \sin\theta_{2n-2} d\theta_{2n-2}\right) \end{aligned}$$

olmak üzere, $\int_\Omega u\left(r,l\right) d\xi$ integrali

$$\int_\Omega u\left(r,l\right) d\xi = \omega_{2n} \int_0^{\pi} \int_{R_1}^{R_2} \rho^{2n+1} u\left(\rho\sqrt{\sin\theta}, \rho^2\cos\theta\right) \sin^{n-1}\theta d\rho d\theta$$

olarak bulunur. Diğer yandan, $u = u(\rho)$ radyal bir fonksiyon olduğu takdirde

$$\int_{\Omega} u(\rho) d\xi = \omega_{2n} \left(\int_0^{\pi} \sin^{n-1} \theta d\theta \right) \left(\int_{R_1}^{R_2} \rho^{2n+1} u(\rho) d\rho \right)$$

eşitliği mevcuttur. Bunların yanında, u fonksiyonu

$$u(\xi) = \frac{r^p}{\rho^p} \psi(\rho), \quad p > 1$$

tipindeki bir fonksiyon ise $r^p = \rho^p (\sin\theta)^{p/2}$ eşitliği de dikkate alınarak, $\int_{\Omega} u(\xi) d\xi$ integrali aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\int_{\Omega} u(\xi) d\xi = \int_{\Omega} \frac{r^p}{\rho^p} \psi(\rho) d\xi = \omega_{2n} \left(\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{n-1+p/2} d\theta \right) \left(\int_{R_1}^{R_2} \rho^{2n+1} \psi(\rho) d\rho \right).$$

Bu integralden faydalanılarak, $u = r^{\alpha}\rho^{\beta}$ tipindeki bir fonksiyon için integrallenebilme şartları şu şekilde belirlenebilir:

i. Eğer $2n > -\alpha$ ve $2n + 2 > -\alpha - \beta$ ise

$$\int_{B_{\mathbb{H}^n}(0,1)} r^{\alpha} \rho^{\beta} d\xi < \infty,$$

ii. Eğer $2n > -\alpha$ ve $2n + 2 < -\alpha - \beta$ ise

$$\int_{\mathbb{H}^n \setminus B_{\mathbb{H}^n}(0,1)} r^{\alpha} \rho^{\beta} d\xi < \infty.$$

4 GENEL AĞIRLIKLI HARDY TİPİ EŞİTSİZLİKLER

4.1 Giriş

Klasik Hardy ve Heisenberg Belirsizlik İlkesi eşitsizlikleri spektral teori, harmonik analiz, kısmi diferansiyel denklemler, geometri, kuantum mekanik ve bunun gibi pek çok alanda önemli uygulama sahalarına sahiptir. Bunun için (Weyl, 1931; Baras ve Goldstein, 1984; Okawaza, 1996; Brezis ve Vázquez, 1997; Folland ve Sitaram, 1997; Crespo ve Alonso, 2000; Ciatti vd., 2007; Detalla vd., 2012) referanslarına bakılabilir.

$\mathbb{R}^n$ Öklid uzayındaki klasik Hardy eşitsizliği, $n > 2$ olmak üzere, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sınıfından olan u fonksiyonları için

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{|x|^2} dx \tag{4.1}$$

ilişkisinin geçerli olduğunu söyler. Bu eşitsizlikteki $\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ sabiti en iyi sabittir, fakat $H_0^1(\mathbb{R}^n)$ sınıfından olan sıfırdan farklı hiçbir fonksiyon ile bu sabite ulaşılamaz.

İlk ve en ünlü Heisenberg Belirsizlik İlkesi eşitsizliği Heisenberg'in kuantum mekanik alanında 1927 yılında yapmış olduğu meşhur çalışmasına dayanmaktadır (Heisenberg, 1927). Heisenberg Belirsizlik İlkesi'ne göre bir parçacığın momentumu, yani kütlesi ile hızının çarpımı, ve konumu aynı anda tam olarak ölçülemez. Bu prensip matematiksel olarak Pauli ve Weyl (1931) tarafından formülize edilmiştir ve dolayısıyla bazen *Heisenberg-Pauli-Weyl eşitsizliği* olarak da adlandırılır. Heisenberg-Pauli-Weyl eşitsizliği her $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 u^2 dx\right) \geq \frac{n^2}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx\right)^2 \tag{4.2}$$

olarak verilir. Bu eşitsizlikteki $\frac{n^2}{4}$ sabiti en iyi sabit olup, burada eşitlik hali $A, B \in \mathbb{R}$ ve $B > 0$ olmak üzere, u fonksiyonunun sadece $u = A\,\mathrm{e}^{-B|x|^2}$ tipindeki bir Gaussian fonksiyonu olması ile mümkündür.

Hardy ve Heisenberg-Pauli-Weyl eşitsizlikleri $\mathbb{R}^n$ uzayında kapsamlı bir şekilde incelenmiş olup konuyla ilgili literatür oldukça geniş ve zengindir. Referans olarak (Kennard, 1927; Alonso ve Vázquez, 1995; Folland ve Sitaram, 1997; Adimurthi vd., 2002;

Filippas ve Tertikas, 2002; Barbatis vd., 2003a, b; Gazzola vd., 2004; Abdellaoui vd., 2005; Ciatti vd., 2007; Frank ve Seiringer, 2008; Ghoussoub ve Moradifam, 2008; Cowan, 2010; Goldstein vd., 2011; Skrzypczak, 2013; Hauer ve Rhandi, 2013; Fall ve Mahmoudi, 2014) çalışmalarına bakılabilir. Öte yandan, bu eşitsizliklere çeşitli soyut yapılarda da yoğun bir ilgi vardır. Bu doğrultuda, (4.1) ve (4.2) eşitsizliklerini Heisenberg grubuna ilk taşıyan Garofalo ve Lanconelli (1990) ikilisidir. Bu ikilinin elde ettiği eşitsizlikler açıkça şöyle ifade edilir:

$$\int_{\mathbb{H}^n} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 d\xi \geq \left(\frac{Q-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^2}{\rho^4} u^2 d\xi \tag{4.3}$$

ve

$$\left(\int_{\mathbb{H}^n} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 d\xi\right)\left(\int_{\mathbb{H}^n} r^2 u^2 d\xi\right) \geq \left(\frac{Q-2}{2}\right)^2 \left(\int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^2}{\rho^2} u^2 d\xi\right)^2 \tag{4.4}$$

eşitsizlikleri her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \setminus \{0\})$ fonksiyonu için geçerlidir. $\left(\frac{Q-2}{2}\right)^2$ sabiti (4.3) eşitsizliğinde en iyi sabit olmasına rağmen (4.4) eşitsizliğinde en iyi sabit değildir.

Garofalo ve Lanconelli'nin bu çalışmasından sonra, Hardy ve Heisenberg-Pauli-Weyl eşitsizliklerini Heisenberg grubu üzerinde çeşitli yönlerden inceleyen çalışmalar artarak devam etmiştir. Örneğin Niu vd. (2001), $\mathbb{H}^n$'deki $p-$alt-Laplace operatör ile ilişkili olan Picone özdeşliğini kullanarak (4.3) Hardy eşitsizliğini L^p durumuna genişletmiştir. Daha sonra Goldstein ve Zhang (2001), (4.3) Hardy eşitsizliğinin farklı bir ispatını vermiş ve bu eşitsizlikteki $\left(\frac{Q-2}{2}\right)^2$ pozitif sabitinin en iyi sabit olduğunu kanıtlamıştır. Han ve Niu (2003), Picone özdeşliğinden faydalanarak Heisenberg grubunun çeşitli alt bölgelerinde tanımlı farklı tipte Hardy eşitsizlikleri elde etmiştir. Bunların yanında, D'Ambrosio (2004) Heisenberg grubunda L^p Hardy eşitsizliğinin ağırlıklı hali üzerine çalışmıştır. Ayrıca, Kömbe (2010) (4.4) ile verilen Heisenberg-Pauli-Weyl eşitsizliğinin $\frac{Q^2}{4}$ en iyi sabitli halini bulmuştur.

4.2 Genel Ağırlıklı Hardy Eşitsizliği ve Bu Eşitsizliğin Bazı Uygulamaları

Belli sınıftan olan fonksiyonlar için Hardy tipi eşitsizlikler elde etmenin en etkili araçlarından biri diferansiyel denklemlerden veya diferansiyel eşitsizliklerden faydalanmaktır. Bu bağlamda elde ettiğimiz aşağıdaki sonuç, $\mathbb{H}^n$'deki ağırlıklı $p-$alt-Laplace eşitsizliği ile genel ağırlıklı L^p Hardy eşitsizliği arasındaki kuvvetli ilişkiyi göstermesi açısından önem arz etmektedir.

Teorem 4.1 $a \in C^1(\mathbb{H}^n)$ ve $b \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{H}^n)$ negatif olmayan iki fonksiyon olsun. Pozitif $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$ fonksiyonu hemen hemen her $\xi \in \mathbb{H}^n$ için

$$-\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(a \left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2} \nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) \geq b\vartheta^{p-1} \tag{4.5}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu takdirde, sadece p değerine bağlı olan pozitif bir c_p sabiti vardır; öyleki $p \geq 2$ ise

$$\int_{\mathbb{H}^n} a \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\right|^p d\xi \geq \int_{\mathbb{H}^n} b \left|u\right|^p d\xi + c_p \int_{\mathbb{H}^n} a \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} \frac{u}{\vartheta}\right|^p \vartheta^p d\xi \tag{4.6}$$

eşitsizliği, $1 < p < 2$ ise

$$\int_{\mathbb{H}^n} a \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\right|^p d\xi \geq \int_{\mathbb{H}^n} b \left|u\right|^p d\xi + c_p \int_{\mathbb{H}^n} a \frac{\left|\nabla_{\mathbb{H}^n} \frac{u}{\vartheta}\right|^2 \vartheta^2}{\left(\left|\frac{u}{\vartheta}\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right| + \left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\frac{u}{\vartheta}\right|\vartheta\right)^{2-p}} d\xi \tag{4.7}$$

eşitsizliği, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ fonksiyonu için gerçeklenir.

Kanıt. $0 < \vartheta \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$ ve $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ olsun. $\varphi := \frac{u}{\vartheta}$ şeklinde yeni bir fonksiyon tanımlansın. (2.3) vektör eşitsizliği $x = \varphi\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta$ ve $y = \vartheta\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi$ için uygulanırsa biraz hesaplamadan sonra şu sonuca varılır:

$$\begin{aligned} \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\right|^p &= \left|\varphi\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta + \vartheta\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi\right|^p \\ &\geq \left|\varphi\right|^p \left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^p + c_p\vartheta^p \left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi\right|^p + \vartheta \left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2} \nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n}\left(\left|\varphi\right|^p\right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

(4.8) eşitsizliğinin her iki yanı a fonksiyonu ile çarpılıp, elde edilen sonucun sağındaki en son ifade için $\mathbb{H}^n$ üzerinde kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^n} a \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\right|^p d\xi &\geq \int_{\mathbb{H}^n} a \left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^p \left|\varphi\right|^p d\xi + c_p \int_{\mathbb{H}^n} a \left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi\right|^p \vartheta^p d\xi \\ &\quad - \int_{\mathbb{H}^n} \nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(a\vartheta \left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2} \nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) \left|\varphi\right|^p d\xi \\ &= - \int_{\mathbb{H}^n} \nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(a \left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2} \nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) \vartheta \left|\varphi\right|^p d\xi \\ &\quad + c_p \int_{\mathbb{H}^n} a \left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi\right|^p \vartheta^p d\xi \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Daha sonra, (4.5) diferansiyel eşitsizliği kullanıldığında

$$\int_{\mathbb{H}^n} a\left|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\right|^p d\xi \geq \int_{\mathbb{H}^n} b\left|\varphi\right|^p \vartheta^p d\xi + c_p \int_{\mathbb{H}^n} a\left|\nabla_{\mathbb{H}^n} \varphi\right|^p \vartheta^p d\xi$$

sonucu elde edilir. Son olarak, $\varphi = \frac{u}{\vartheta}$ dönüşümü yapıldığında, istenen (4.6) eşitsizliği bulunur. (4.7) ile verilen eşitsizlik de (4.6) eşitsizliğinin ispatında izlenen yönteme benzer bir yöntemle, ancak (2.2) vektör eşitsizliği kullanılarak, rahatlıkla elde edilebilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. ■

Uyarı 4.1 $p = 2$ olması durumunda, $c_2 = 1$ olur ve (4.6) Hardy eşitsizliği eşitlik halini alır. Açıkça ifade etmek gerekirse

$$\int_{\mathbb{H}^n} a\left|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{H}^n} bu^2 d\xi + \int_{\mathbb{H}^n} a\left|\nabla_{\mathbb{H}^n} \frac{u}{\vartheta}\right|^2 \vartheta^2 d\xi$$

olur.

4.2.1 Teorem 4.1'in uygulamaları

Herhangi $\epsilon > 0$ sayısı için $r_\epsilon := \left(\epsilon^2 + r^2\right)^{1/2}$ ve $\rho_\epsilon := \left(r_\epsilon^4 + l^2\right)^{1/4}$ olarak tanımlansın. r ve ρ fonksiyonlarının 0'daki türevlenebilme sorunundan kurtulabilmek için gerekli hesaplamalar r yerine r_ϵ, ρ yerine ise ρ_ϵ konarak yapılmalı ve daha sonra Lebesgue yakınsama teoremleri ile $\epsilon \longrightarrow 0$ iken limit alınmalıdır. Ancak, bu durumun bilindiği göz önünde bulundurularak, sadelikten ödün vermemek ve kolaylık olması adına hesaplamalarda r ve ρ fonksiyonları tercih edilecektir.

Teorem 4.1 ile sunulan metod, hem bilinen hem de yeni ağırlıklı Hardy ve Heisenberg-Pauli-Weyl tipi eşitsizlikler elde etmek için oldukça pratik ve üretkendir. Burada önemli olan,

$$-\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(a\left|\nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta\right|^{p-2} \nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta\right) \geq b\vartheta^{p-1}$$

doğrusal olmayan kısmi diferansiyel eşitsizliğini sağlayan uygun a ve ϑ fonksiyonlarını belirleyip, gerekli hesaplamalardan sonra istenen b fonksiyonunu bulmaktır. Şimdi bu durum, $\mathbb{H}^n$'de ve $\mathbb{H}^n$'nin bazı alt bölgelerinde çeşitli örnekler üzerinde gösterilecektir.

İlk olarak, $1 < p < Q$ olmak üzere,

$$a = 1, \qquad \vartheta = \rho^{-\frac{Q-p}{p}}$$

seçimi yapılsın. Bu seçimin Teorem 4.1'deki şartları sağladığı açıkça görülmektedir. O halde, gerekli işlemler yapıldığında

$$
\begin{aligned}
-\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(a \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta\right|^{p-2} \nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta\right) &= \left(\frac{Q-p}{p}\right)^p r^p \rho^{-\left(\frac{Q-p}{p}\right)(p-1)-2p} \\
&= \left(\frac{Q-p}{p}\right)^p \frac{r^p}{\rho^{2p}} \vartheta^{p-1}
\end{aligned}
$$

bulunur, ki buradan $b = \left(\frac{Q-p}{p}\right)^p \frac{r^p}{\rho^{2p}}$ olarak belirlenir. Böylelikle, $\rho^p \left(1+\rho\right)^p \geq \rho^{2p}$ olduğu da göz önünde bulundurularak, Niu vd. (2001)'nin elde ettiği aşağıdaki L^p Hardy eşitsizliklerine rahatlıkla ulaşılır.

Sonuç 4.1 $1 < p < Q$ olmak üzere, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \setminus \{0\})$ için

$$
\int_{\mathbb{H}^n} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \geq \left(\frac{Q-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^p}{\rho^{2p}} |u|^p d\xi \tag{4.9}
$$

ve

$$
\int_{\mathbb{H}^n} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \geq \left(\frac{Q-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^p}{\rho^p \left(1+\rho\right)^p} |u|^p d\xi
$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Ayrıca, (4.9) eşitsizliğindeki $\left(\frac{Q-p}{p}\right)^p$ pozitif sabiti en iyi sabittir (Niu vd., 2001).

Daha sonra, $\Omega = B_{\mathbb{H}^n}(0,R) \setminus \{0\}$ merkez noktası çıkarılmış $R-$yarıçaplı Koranyi yuvarı üzerinde $p > 1$ için

$$
a = 1, \qquad \vartheta = \left(R-\rho\right)^{\frac{p-1}{p}}
$$

seçimi yapılırsa

$$
\begin{aligned}
-\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(a \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta\right|^{p-2} \nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta\right) &\geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \frac{r^p}{\rho^p} \left(R-\rho\right)^{\frac{1-2p}{p}} \\
&\geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \frac{r^p}{\rho^p \left(R-\rho\right)^p} \vartheta^{p-1}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği bulunur. Buradan, Teorem 4.1 yardımı ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2 $\Omega = B_{\mathbb{H}^n}(0,R) \setminus \{0\}$ ve $p > 1$ olsun. Bu durumda, her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$
\int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{\Omega} \frac{r^p}{\rho^p \left(R-\rho\right)^p} |u|^p d\xi
$$

eşitsizliği geçerlidir (Han ve Niu, 2003).

Diğer yandan, $\Omega = \mathbb{H}^n \backslash B_{\mathbb{H}^n}(0, R)$ bölgesi üzerinde seçilen

$$a = 1, \qquad \vartheta = \left(\log \frac{\rho}{R}\right)^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \rho > R$$

fonksiyonları ile Han ve Niu (2003)'nun elde ettiği başka bir Hardy eşitsizliğine ulaşılır.

Sonuç 4.3 $\Omega = \mathbb{H}^n \backslash B_{\mathbb{H}^n}(0, R)$ olmak üzere, $p \geq Q$ ve $0 < \alpha < 1$ olsun. Bu durumda, her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \geq c(\alpha, p) \int_\Omega \frac{r^p}{\rho^{2p} \left(\log \frac{\rho}{R}\right)^p} |u|^p d\xi$$

olacak şekilde bir $c(\alpha, p) > 0$ sabiti vardır (Han ve Niu, 2003).

Şimdi, $p > 1$, $Q > \alpha - \beta$ ve $Q > 2 + p - \beta$ olmak üzere,

$$a = r^{\beta - p} \rho^{2p - \alpha}, \qquad \vartheta = \rho^{-\frac{Q + \beta - \alpha}{p}}$$

fonksiyon çifti için gerekli türev alma işlemleri yapıldığında,

$$\begin{aligned} -\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(a \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta\right|^{p-2} \nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta\right) &= \left(\frac{Q + \beta - \alpha}{p}\right)^p r^\beta \rho^{\frac{Q+\beta-\alpha}{p} - Q - \beta} \\ &= \left(\frac{Q + \beta - \alpha}{p}\right)^p \frac{r^\beta}{\rho^\alpha} \vartheta^{p-1} \end{aligned}$$

olacağından, $b = \left(\frac{Q+\beta-\alpha}{p}\right)^p \frac{r^\beta}{\rho^\alpha}$ olarak belirlenir. Buradan, D'Ambrosio tarafından bulunan aşağıdaki ağırlıklı L^p Hardy eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.4 $p > 1$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. $Q > \alpha - \beta$ ve $Q > 2 + p - \beta$ olmak üzere, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ fonksiyonu için

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^{\beta - p}}{\rho^{\alpha - 2p}} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \geq \left(\frac{Q + \beta - \alpha}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^\beta}{\rho^\alpha} |u|^p d\xi \tag{4.10}$$

eşitsizliği geçerlidir (D'Ambrosio, 2004).

Uyarı 4.2 (4.10) eşitsizliğinin sağında beliren $\left(\frac{Q+\beta-\alpha}{p}\right)^p$ sabitinin en iyi sabit olduğu D'Ambrosio (2004) tarafından gösterilmiştir. Ayrıca, bu eşitsizliğin $\alpha = 2p$ ve $\beta = p$ durumunda (4.9) eşitsizliğine indirgendiği açıkça görülmektedir.

Bunların yanısıra, $Q-2>p>1$ için

$$a=1, \qquad \vartheta = r^{-\frac{Q-p-2}{p}}$$

seçimi yapıldığında,

$$\begin{aligned}
-\nabla_{\mathbb{H}^n}\cdot\left(a\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2}\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) &= \left(\frac{Q-p-2}{p}\right)^p r^{\frac{Q-p-2}{p}-Q+2}\\
&= \left(\frac{Q-p-2}{p}\right)^p \frac{1}{r^p}\vartheta^{p-1}
\end{aligned}$$

olur. Böylece, $b=\left(\frac{Q-p-2}{p}\right)^p\frac{1}{r^p}$ olarak belirlenir. Diğer yandan, $\rho=\left(r^4+l^2\right)^{1/4}\geq r$ olduğu da göz önünde bulundurulduğunda, aşağıdaki sonuçlara kolaylıkla ulaşılır.

Sonuç 4.5 $Q-2>p>1$ olsun. O halde, her $u\in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{H}^n}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right|^p d\xi \geq \left(\frac{Q-p-2}{p}\right)^p\int_{\mathbb{H}^n}\frac{|u|^p}{r^p}d\xi \tag{4.11}$$

ve

$$\int_{\mathbb{H}^n}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right|^p d\xi \geq \left(\frac{Q-p-2}{p}\right)^p\int_{\mathbb{H}^n}\frac{|u|^p}{\rho^p}d\xi$$

eşitsizlikleri gerçeklenir (D'Ambrosio, 2004).

Ayrıca, $Q=p>1$, $\alpha<-1$ olmak koşulu ile, $B_{\mathbb{H}^n}(0,R)$ Koranyi yuvarı üzerindeki

$$a=\left(\log\frac{R}{\rho}\right)^{\alpha+p}, \qquad \vartheta=\left(\log\frac{R}{\rho}\right)^{\frac{|\alpha+1|}{p}}$$

seçimi için ağırlıklı $p-$alt-Laplace operatör

$$\begin{aligned}
-\nabla_{\mathbb{H}^n}\cdot\left(a\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2}\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) &= \left(\frac{|\alpha+1|}{p}\right)^p\left(\log\frac{R}{\rho}\right)^{\frac{\alpha-p+1}{p}}\frac{r^p}{\rho^{2p}}\\
&= \left(\frac{|\alpha+1|}{p}\right)^p\left(\log\frac{R}{\rho}\right)^{\alpha}\frac{r^p}{\rho^{2p}}\vartheta^{p-1}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Buradan hareketle, $b=\left(\frac{|\alpha+1|}{p}\right)^p\left(\log\frac{R}{\rho}\right)^\alpha\frac{r^p}{\rho^{2p}}$ olarak belirlenir ve aşağıdaki kuvvet logaritmalı ağırlık fonksiyonlarına sahip L^p Hardy eşitsizliğine ulaşılır.

Sonuç 4.6 $Q = p > 1$ ve $\alpha < -1$ olsun. O halde,

$$\int_{B_{\mathbb{H}^n}(0,R)} \left(\log \frac{R}{\rho}\right)^{\alpha+p} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi \geq \left(\frac{|\alpha+1|}{p}\right)^p \int_{B_{\mathbb{H}^n}(0,R)} \left(\log \frac{R}{\rho}\right)^{\alpha} \frac{r^p}{\rho^{2p}} |u|^p \, d\xi$$

eşitsizliği her $u \in C_0^\infty(B_{\mathbb{H}^n}(0,R))$ için geçerlidir (D'Ambrosio, 2005).

Uyarı 4.3 Bu eşitsizlikteki $\left(\frac{|\alpha+1|}{p}\right)^p$ sabiti en iyi sabittir. İspat için D'Ambrosio (2005)'nun çalışmasına başvurulabilir.

Şimdi, $\frac{Q+2}{2} > p > 1$ olmak üzere,

$$a = \frac{1}{r^{p-2}}, \qquad \vartheta = \rho^{-\frac{Q-2p+2}{p}}$$

fonksiyon çifti için Teorem 4.1 uygulanırsa Adimurthi ve Sekar (2006) tarafından elde edilen aşağıdaki ağırlıklı L^p Hardy eşitsizliği bulunur.

Sonuç 4.7 $\frac{Q+2}{2} > p > 1$ olsun. Bu durumda, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{|\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p}{r^{p-2}} d\xi \geq \left(\frac{Q-2p+2}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^2}{\rho^{2p}} |u|^p d\xi$$

ilişkisi doğrudur (Adimurthi ve Sekar, 2006).

Uyarı 4.4 Dikkatli bakıldığında, aslında bu eşitsizliğin (4.10) eşitsizliğinin özel bir hali olduğu görülür.

Şimdiye kadar, Teorem 4.1 yardımı ile Heisenberg grubundaki bilinen Hardy tipi eşitsizlikler elde edilmiştir. Şimdi ise, Teorem 4.1 yardımı ile bu eşitsizliklerin yanısıra farklı ağırlık fonksiyonlarıyla verilmiş yeni Hardy eşitsizliklerinin de elde edilebileceği gösterilecektir. Bunun için ilk olarak

$$a = \rho^\alpha, \qquad \vartheta = \left(1 + \rho^{\frac{p}{p-1}}\right)^{-\frac{Q+\alpha-p}{p}}$$

tipindeki fonksiyonlar ele alınsın. Bu fonksiyonlar Teorem 4.1'deki şartları sağlar ve $Q + \alpha > p > 1$ olmak üzere gerekli hesaplamalardan sonra

$$\begin{aligned} -\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(a \, |\nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta|^{p-2} \, \nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta\right) &= \left(\frac{Q+\alpha-p}{p-1}\right)^{p-1} (Q+\alpha) \frac{\rho^{\alpha-p} r^p}{\left(1+\rho^{\frac{p}{p-1}}\right)^{-\frac{Q+\alpha-p}{p}+Q+\alpha}} \\ &= \left(\frac{Q+\alpha-p}{p-1}\right)^{p-1} (Q+\alpha) \frac{\rho^\alpha r^p}{\left(\rho+\rho^{\frac{2p-1}{p-1}}\right)^p} \vartheta^{p-1} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylelikle, $b = \left(\frac{Q+\alpha-p}{p-1}\right)^{p-1}(Q+\alpha)\frac{\rho^{\alpha-p}r^p}{\left(1+\rho^{\frac{p}{p-1}}\right)^p}$ olacağından aşağıdaki ağırlıklı L^p Hardy tipi eşitsizlik bulunur.

Sonuç 4.8 $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $Q+\alpha > p > 1$ olsun. Bu durumda, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{H}^n} \rho^\alpha |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \geq \left(\frac{Q+\alpha-p}{p-1}\right)^{p-1}(Q+\alpha)\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha-p}r^p}{\left(1+\rho^{\frac{p}{p-1}}\right)^p}|u|^p d\xi$$

ilişkisi doğrudur.

Diğer yandan, $\alpha \in \mathbb{R}$, $Q+\alpha-2<0$ ve $1<p<\infty$ olmak üzere,

$$a = r^{\alpha+p}, \qquad \vartheta = r^{\frac{|Q+\alpha-2|}{p}}$$

seçimi için gerekli hesaplamalar yapıldığında,

$$\begin{aligned} -\nabla_{\mathbb{H}^n}\cdot\left(a\,|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^{p-2}\,\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) &= \left(\frac{|Q+\alpha-2|}{p}\right)^p r^{\frac{|Q+\alpha-2|}{p}(p-1)+\alpha} \\ &= \left(\frac{|Q+\alpha-2|}{p}\right)^p r^\alpha \vartheta^{p-1} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan, $b = \left(\frac{|Q+\alpha-2|}{p}\right)^p r^\alpha$ olarak belirlenir ve aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.9 $\alpha \in \mathbb{R}$, $Q+\alpha-2<0$ ve $1<p<\infty$ olsun. O halde, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{H}^n} r^{\alpha+p}|\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \geq \left(\frac{|Q+\alpha-2|}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^n} r^\alpha |u|^p d\xi \tag{4.12}$$

eşitsizliği sağlanır.

Uyarı 4.5 (4.12) eşitsizliği $\alpha=-p$ özel durumu için (4.11) eşitsizliğine indirgenir.

Bununla birlikte, $Q-2=p>1$, $\alpha<-1$ olmak koşulu ile, $\Omega := \{(z,l)\in\mathbb{H}^n : |z|<R\}$ bölgesi üzerindeki

$$a = \left(\log\frac{R}{r}\right)^{\alpha+p}, \qquad \vartheta = \left(\log\frac{R}{r}\right)^{\frac{|\alpha+1|}{p}}$$

seçimi için ağırlıklı $p-$alt-Laplace operatör

$$\begin{aligned}
-\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(a \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta\right|^{p-2} \nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta\right) &= \left(\frac{|\alpha+1|}{p}\right)^p \left(\log \frac{R}{r}\right)^{\frac{|\alpha+1|}{p}(p-1)+\alpha} \frac{1}{r^p} \\
&= \left(\frac{|\alpha+1|}{p}\right)^p \left(\log \frac{R}{r}\right)^{\alpha} \frac{1}{r^p} \vartheta^{p-1}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve böylece $b = \left(\frac{|\alpha+1|}{p}\right)^p \left(\log \frac{R}{r}\right)^{\alpha} \frac{1}{r^p}$ olarak bulunur. Dolayısıyla, Teorem 4.1 yardımı ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.10 $\alpha \in \mathbb{R}$, $Q-2=p>1$, $\alpha<-1$ ve $\Omega := \{(z,l) \in \mathbb{H}^n : |z| < R\}$ olsun. O halde,

$$\int_{\Omega} \left(\log \frac{R}{r}\right)^{\alpha+p} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi \geq \left(\frac{|\alpha+1|}{p}\right)^p \int_{\Omega} \left(\log \frac{R}{r}\right)^{\alpha} \frac{|u|^p}{r^p} d\xi$$

eşitsizliği her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ için geçerlidir.

Teorem 4.1'in bir başka sonucuna,

$$a = \left(1 + \rho^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\alpha(p-1)}, \qquad \vartheta = \left(1 + \rho^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\alpha}$$

özel fonksiyonları için gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra ulaşılır.

Sonuç 4.11 $Q > p > 1$ ve $\alpha > 1$ olsun. Bu takdirde,

$$\int_{\mathbb{H}^n} \left(1 + \rho^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\alpha(p-1)} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \geq Q \left(\frac{\alpha p - p}{p-1}\right)^{p-1} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\left(1 + \rho^{\frac{p}{p-1}}\right)^{(\alpha-1)(p-1)} r^p}{\rho^p} |u|^p d\xi$$

eşitsizliği her $u \in C_0^\infty\left(\mathbb{H}^n\right)$ için sağlanır.

Uyarı 4.6 Bu sonuç, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında Skrzypczak (2013) tarafından elde edilen (5.11) eşitsizliğinin Heisenberg grubuna bir genişlemesidir.

Bunların yanısıra, $s, t > 0$, $\alpha\beta > 0$ reel sayılar ve $Q - pm \geq p > 1$ olmak üzere,

$$a = \frac{(s + t\rho^{\alpha})^{\beta}}{\rho^{pm}}, \qquad \vartheta = \rho^{-\left(\frac{Q-pm-p}{p}\right)}$$

seçimi için ağırlıklı $p-$alt-Laplace operatör

$$\begin{aligned}-\nabla_{\mathbb{H}^n}\cdot\left(a\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2}\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) &= c^p\left(Q,p,m\right)\frac{\left(s+t\rho^{\alpha}\right)^{\beta}r^p}{\rho^{Q+p}}\rho^{\frac{Q-pm-p}{p}}\\ &\quad+c^{p-1}\left(Q,p,m\right)\alpha\beta t\frac{\left(s+t\rho^{\alpha}\right)^{\beta-1}r^p}{\rho^{Q-\alpha+p}}\rho^{\frac{Q-pm-p}{p}}\\ &= c^p\left(Q,p,m\right)\frac{\left(s+t\rho^{\alpha}\right)^{\beta}r^p}{\rho^{pm+2p}}\vartheta^{p-1}\\ &\quad+c^{p-1}\left(Q,p,m\right)\alpha\beta t\frac{\left(s+t\rho^{\alpha}\right)^{\beta-1}r^p}{\rho^{pm+2p-\alpha}}\vartheta^{p-1}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Burada, $c\left(Q,p,m\right):=\left(\frac{Q-pm-p}{p}\right)$ şeklindeki pozitif bir sabittir. Bu durumda,

$$b=c^p\left(Q,p,m\right)\frac{\left(s+t\rho^{\alpha}\right)^{\beta}r^p}{\rho^{pm+2p}}+c^{p-1}\left(Q,p,m\right)\alpha\beta t\frac{\left(s+t\rho^{\alpha}\right)^{\beta-1}r^p}{\rho^{pm+2p-\alpha}}$$

olur. Benzer olarak,

$$a=\frac{\left(s+t\rho^{\alpha}\right)^{\beta}}{\rho^{pm}},\qquad \vartheta=\rho^{-\left(\frac{Q-pm+\alpha\beta-p}{p}\right)}$$

seçimi için $s,t>0$, $\alpha\beta<0$ ve $Q-pm+\alpha\beta\geq p>1$ koşulları altında gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}-\nabla_{\mathbb{H}^n}\cdot\left(a\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2}\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) &= c^p\left(Q,p,m,\alpha,\beta\right)\frac{\left(s+t\rho^{\alpha}\right)^{\beta}r^p}{\rho^{Q+\alpha\beta+p}}\rho^{\frac{Q-pm+\alpha\beta-p}{p}}\\ &\quad-c^{p-1}\left(Q,p,m,\alpha,\beta\right)\alpha\beta s\frac{\left(s+t\rho^{\alpha}\right)^{\beta-1}r^p}{\rho^{Q+\alpha\beta+p}}\rho^{\frac{Q-pm+\alpha\beta-p}{p}}\\ &= c^p\left(Q,p,m,\alpha,\beta\right)\frac{\left(s+t\rho^{\alpha}\right)^{\beta}r^p}{\rho^{pm+2p}}\vartheta^{p-1}\\ &\quad-c^{p-1}\left(Q,p,m,\alpha,\beta\right)\alpha\beta s\frac{\left(s+t\rho^{\alpha}\right)^{\beta-1}r^p}{\rho^{pm+2p}}\vartheta^{p-1}\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Burada, $c\left(Q,p,m,\alpha,\beta\right):=\left(\frac{Q-pm+\alpha\beta-p}{p}\right)$ şeklindeki pozitif bir sabittir. O halde,

$$b=c^p\left(Q,p,m,\alpha,\beta\right)\frac{\left(s+t\rho^{\alpha}\right)^{\beta}r^p}{\rho^{pm+2p}}-c^{p-1}\left(Q,p,m,\alpha,\beta\right)\alpha\beta s\frac{\left(s+t\rho^{\alpha}\right)^{\beta-1}r^p}{\rho^{pm+2p}}$$

olarak belirlenir. Böylelikle, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında Ghoussoub ve Moradifam (2011) ikilisinin elde ettiği (1.12) ve (1.13) L^2 Hardy eşitsizliklerinin $\mathbb{H}^n$'deki geliştirilmiş L^p analogları bulunur.

Sonuç 4.12 $s,t>0$ ve α,β,m reel sayılar ve $u\in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ olsun. Bu durumda, $\alpha\beta>0$ ve $Q-pm\geq p>1$ ise

$$\int_{\mathbb{H}^n}\frac{(s+t\rho^\alpha)^\beta}{\rho^{pm}}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right|^p d\xi\geq c^p(Q,p,m)\int_{\mathbb{H}^n}\frac{(s+t\rho^\alpha)^\beta r^p}{\rho^{pm+2p}}|u|^p d\xi$$
$$+c^{p-1}(Q,p,m)\,\alpha\beta t\int_{\mathbb{H}^n}\frac{(s+t\rho^\alpha)^{\beta-1}r^p}{\rho^{pm+2p-\alpha}}|u|^p d\xi$$

eşitsizliği; $\alpha\beta<0$ ve $Q-pm+\alpha\beta\geq p>1$ ise

$$\int_{\mathbb{H}^n}\frac{(s+t\rho^\alpha)^\beta}{\rho^{pm}}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right|^p d\xi\geq c^p(Q,p,m,\alpha,\beta)\int_{\mathbb{H}^n}\frac{(s+t\rho^\alpha)^\beta r^p}{\rho^{pm+2p}}|u|^p d\xi$$
$$-c^{p-1}(Q,p,m,\alpha,\beta)\,\alpha\beta s\int_{\mathbb{H}^n}\frac{(s+t\rho^\alpha)^{\beta-1}r^p}{\rho^{pm+2p}}|u|^p d\xi$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizliklerde, $c(Q,p,m)=\left(\frac{Q-pm-p}{p}\right)$ ve $c(Q,p,m,\alpha,\beta)=\left(\frac{Q-pm+\alpha\beta-p}{p}\right)$ şeklindeki pozitif sabitlerdir.

Uyarı 4.7 $\alpha=0$ veya $\beta=0$ olduğunda, bu eşitsizliklerdeki ağırlık fonksiyonları standart ağırlık fonksiyonları olmakta ve pozitif kalan terimler sıfırlanmaktadır. Bundan dolayı, $\alpha\beta\neq0$ durumu ele alınmıştır.

Son olarak, r^α ve ρ^β simetrik fonksiyonlarına bağlı olmayan ağırlık fonksiyonlarına sahip bir Hardy eşitsizliğinin Teorem 4.1'in bir uygulaması olarak elde edilebileceği gösterilecektir. Bunun için $\Omega:=\{(x,y,l)\in\mathbb{H}^n : x_1,y_1>1\}$ bölgesi üzerinde

$$a=x_1^{p-2}\log y_1,\qquad \vartheta=\log x_1$$

radyal olmayan fonksiyonları ele alınsın. Buradan

$$-\nabla_{\mathbb{H}^n}\cdot\left(a\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2}\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right)=\frac{\log y_1}{x_1^2}$$
$$=\frac{\log y_1}{x_1^2\log^{p-1}x_1}\vartheta^{p-1}$$

olur ve bu aşağıdaki radyal olmayan ağırlık fonksiyonlarına sahip Hardy eşitsizliğinin elde edilmesine olanak tanır.

Sonuç 4.13 $\Omega:=\{(x,y,l)\in\mathbb{H}^n : x_1,y_1>1\}$ olmak üzere, herhangi $u\in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega x_1^{p-2}\log y_1\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right|^p d\xi\geq\int_\Omega\frac{\log y_1}{x_1^2\log^{p-1}x_1}|u|^p d\xi$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi, Teorem 4.1'in sadece ağırlıklı Hardy tipi eşitsizlikler bulmak için değil, aynı zamanda Heisenberg-Pauli-Weyl tipi eşitsizlikler elde etmek için de etkili bir araç olarak kullanılabileceği gösterilecektir. İlk olarak, $\alpha > 0$ için

$$a = \frac{\rho^2}{r^2}, \qquad \vartheta = e^{-\alpha\rho^2}$$

fonksiyon çifti ele alınsın. (4.5) diferansiyel eşitsizliğindeki gerekli türevler alınarak b fonksiyonu belirlendikten sonra aşağıdaki integral eşitsizliği elde edilir:

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^2}{r^2} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 \, d\xi \geq 2\alpha Q \int_{\mathbb{H}^n} u^2 d\xi - 4\alpha^2 \int_{\mathbb{H}^n} \rho^2 u^2 d\xi.$$

$A = -4\int_{\mathbb{H}^n} \rho^2 u^2 d\xi$, $B = 2Q\int_{\mathbb{H}^n} u^2 d\xi$ ve $C = -\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^2}{r^2} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 \, d\xi$ olsun. Bu durumda, yukarıdaki eşitsizlik her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $A\alpha^2 + B\alpha + C \leq 0$ halini alır. Bu parabolün sıfırdan farklı reel kökü olmadığından, diskriminant değeri $B^2 - 4AC \leq 0$ olmalıdır. Böylece, en iyi sabite sahip aşağıdaki Heisenberg-Pauli-Weyl eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.14 Her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ fonksiyonu için

$$\left(\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^2}{r^2} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 \, d\xi\right)\left(\int_{\mathbb{H}^n} \rho^2 u^2 d\xi\right) \geq \frac{Q^2}{4}\left(\int_{\mathbb{H}^n} u^2 d\xi\right)^2 \tag{4.13}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradaki $\frac{Q^2}{4}$ sabiti en iyi sabittir (Kömbe, 2010).

Şimdi, Teorem 4.1'deki a ve ϑ fonksiyonları şu şekilde seçilsin:

$$a = 1, \qquad \vartheta = e^{-\alpha\rho^2}, \quad \alpha > 0.$$

Bu seçim

$$\int_{\mathbb{H}^n} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 \, d\xi \geq 2\alpha Q \int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^2}{\rho^2} u^2 d\xi - 4\alpha^2 \int_{\mathbb{H}^n} r^2 u^2 d\xi$$

eşitsizliğini verir ve bir önceki örnekteki yaklaşımla aşağıdaki sonucun elde edilmesini sağlar.

Sonuç 4.15 Her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ fonksiyonu için

$$\left(\int_{\mathbb{H}^n} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 \, d\xi\right)\left(\int_{\mathbb{H}^n} r^2 u^2 d\xi\right) \geq \frac{Q^2}{4}\left(\int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^2}{\rho^2} u^2 d\xi\right)^2$$

eşitsizliği sağlanır.

Son olarak, $\alpha > 0$ olmak üzere,

$$a = 1, \qquad \vartheta = e^{-\alpha\rho}$$

fonksiyon çifti için Teorem 4.1 uygulanırsa şu eşitsizliğe ulaşılır:

Sonuç 4.16 Her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ fonksiyonu için

$$\left(\int_{\mathbb{H}^n} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 \, d\xi\right)\left(\int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^2}{\rho^2} u^2 d\xi\right) \geq \frac{(Q-1)^2}{4}\left(\int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^2}{\rho^3} u^2 d\xi\right)^2$$

eşitsizliği sağlanır.

4.2.2 Dirichlet sınır değer probleminin pozitif çözümü üzerine

Bir önceki alt bölümde çeşitli ağırlık fonksiyonlarına sahip Hardy eşitsizlikleri elde edebilmek için ağırlıklı $p-$alt-Laplace eşitsizliğinin ne kadar etkili bir araç olarak kullanılabileceği birçok örnek üzerinde kuşkuya yer bırakmayacak biçimde gösterilmiştir. Şimdi ise elde edilen bu ağırlıklı Hardy eşitsizliklerinin, ikinci mertebeden bazı Dirichlet sınır değer problemlerinin pozitif çözümünün belirlenmesinde ne kadar etkin olabileceğini gösteren aşağıdaki teorem kanıtlanacaktır.

Teorem 4.2 $p > 1$ ve $\alpha, \beta, m \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $Q > \alpha - \beta$ ve $Q > 2 + p - \beta$ olsun. O halde, $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip sınırlı bir bölge ve $0 < v \in L^1_{loc}(\Omega)$ olmak üzere, $\lambda < \left(\frac{Q+\beta-\alpha}{p}\right)^p$ ise

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(\frac{r^{\beta-p}}{\rho^{\alpha-2p}} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^{p-2} \nabla_{\mathbb{H}^n} u\right) + \lambda \frac{r^\beta}{\rho^\alpha} |u|^{p-2} u = v u^m, & \xi \in \Omega, \\ u = 0, & \xi \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.14}$$

doğrusal olmayan Dirichlet sınır değer probleminin pozitif çözümü yoktur.

Kanıt. u fonksiyonu (4.14) probleminin pozitif bir çözümü olsun. O halde bu u fonksiyonları için

$$\int_\Omega u \nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(\frac{r^{\beta-p}}{\rho^{\alpha-2p}} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^{p-2} \nabla_{\mathbb{H}^n} u\right) d\xi + \lambda \int_\Omega \frac{r^\beta}{\rho^\alpha} |u|^p d\xi = \int_\Omega v u^{m+1} d\xi$$

eşitliği mevcuttur. Diğer yandan, Gauss-Green formülü ve (4.10) ağırlıklı Hardy eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} \int_\Omega u \nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(\frac{r^{\beta-p}}{\rho^{\alpha-2p}} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^{p-2} \nabla_{\mathbb{H}^n} u\right) d\xi &= -\int_\Omega \frac{r^{\beta-p}}{\rho^{\alpha-2p}} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi \\ &\leq -\left(\frac{Q+\beta-\alpha}{p}\right)^p \int_\Omega \frac{r^\beta}{\rho^\alpha} |u|^p d\xi \end{aligned}$$

ilişkisi elde edilir. Böylelikle, $\lambda < \left(\frac{Q+\beta-\alpha}{p}\right)^p$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda

$$-\int_\Omega vu^{m+1}d\xi \geq \left[\left(\frac{Q+\beta-\alpha}{p}\right)^p - \lambda\right]\int_\Omega \frac{r^\beta}{\rho^\alpha}|u|^p d\xi$$
$$> 0$$

olur, ki bu bir çelişkidir. O halde, istenen koşullar altında (4.14) Dirichlet probleminin pozitif bir çözümü yoktur. ■

4.3 Ağırlıklı Hardy-Poincaré Tipi Bir Eşitsizlik

$Q \geq 3$, $1 < p < Q$ ve $Q + \alpha > 0$ olmak üzere, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha+3p}}{r^{2p}}|\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n}u|^p d\xi \geq \left(\frac{Q+\alpha}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^n} \rho^\alpha |u|^p d\xi \tag{4.15}$$

şeklinde verilen en iyi sabitli Hardy-Poincaré eşitsizliği geçerlidir (Kömbe, 2010). Kısa bir süre önce, Ahmetolan ve Kömbe (2016) bu eşitsizliği ihtiva eden aşağıdaki

$$\int_{\mathbb{H}^n} r^{\beta-2p}\rho^{\alpha+3p}|\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n}u|^p d\xi \geq \left(\frac{Q+\alpha+\beta}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^n} r^\beta \rho^\alpha |u|^p d\xi \tag{4.16}$$

en iyi sabitli iki-ağırlıklı Hardy-Poincaré tipi eşitsizliğin, $Q+\alpha+\beta > 0$ ve $Q+\beta > 2$, $1 < p < \infty$ olmak koşulu ile her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ fonksiyonu için geçerli olduğunu göstermiştir. Hardy-Poincaré tipi bu eşitsizlikler, ağırlıklı Hardy tipi eşitsizliklerin kısa ve daha basit ispatlarının verilmesinde önemli rol oynamaktadır.

Teorem 4.3 $a \in C^1$ negatif olmayan bir fonksiyon, $Q > p > 1$, $Q + \alpha > 0$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. O halde, $\mathcal{Z} := \{\xi = (z,l) \in \mathbb{H}^n : z = 0, l \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \backslash \mathcal{Z})$ fonksiyonu için

$$\int_{\mathbb{H}^n} a\frac{\rho^{\alpha+3p}}{r^{2p}}|\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n}u|^p d\xi \geq \left(\frac{Q+\alpha}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^n} a\rho^\alpha |u|^p d\xi \tag{4.17}$$
$$+\left(\frac{Q+\alpha}{p}\right)^{p-1}\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha+3}}{r^2}\left(\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n}a\right)|u|^p d\xi$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt.

$$\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(\frac{\rho^3}{r^2}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\right) = Q$$

hacim büyüme formülü ve gerekli türev işlemleri sonucunda

$$\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(a\frac{\rho^3}{r^2}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \right) = \frac{\rho^3}{r^2}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} a + aQ$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğin her iki yanı $\rho^\alpha |u|^p$ ifadesi ile çarpıldıktan sonra elde edilen sonuç $\mathbb{H}^n$ üzerinde integre edilirse

$$\begin{aligned} Q\int_{\mathbb{H}^n} a\rho^\alpha |u|^p d\xi =& \int_{\mathbb{H}^n} \rho^\alpha |u|^p \nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(a\frac{\rho^3}{r^2}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \right) d\xi \\ &- \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha+3}}{r^2} \left(\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} a \right) |u|^p d\xi \end{aligned}$$

olur. Kısmi integrasyon formülünün bir sonucu olarak

$$\begin{aligned} Q\int_{\mathbb{H}^n} a\rho^\alpha |u|^p d\xi =& - \int_{\mathbb{H}^n} a\frac{\rho^3}{r^2}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n}\left(\rho^\alpha |u|^p\right) d\xi \\ &- \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha+3}}{r^2} \left(\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} a \right) |u|^p d\xi \\ =& - \alpha \int_{\mathbb{H}^n} a\rho^\alpha |u|^p d\xi - \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha+3}}{r^2} \left(\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} a \right) |u|^p d\xi \\ &- p\int_{\mathbb{H}^n} a\frac{\rho^{\alpha+3}}{r^2} \left(\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} u \right) |u|^{p-1} d\xi \end{aligned} \tag{4.18}$$

eşitliği elde edilir.

$$M := (Q+\alpha)\int_{\mathbb{H}^n} a\rho^\alpha |u|^p d\xi + \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha+3}}{r^2} \left(\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} a \right) |u|^p d\xi$$

olmak üzere, biraz düzenlemeden sonra yukarıdaki (4.18) integral eşitliği

$$M = -p\int_{\mathbb{H}^n} a\frac{\rho^{\alpha+3}}{r^2} \left(\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} u \right) |u|^{p-1} d\xi \tag{4.19}$$

şeklinde yazılabilir. (4.19) eşitliğinin sağındaki integral ifadesine sırasıyla Hölder ve Young eşitsizlikleri uygulandığında, herhangi $\epsilon > 0$ sayısı için

$$\begin{aligned} M \le& \; p\left(\int_{\mathbb{H}^n} a\rho^\alpha |u|^p d\xi \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{H}^n} a\frac{\rho^{\alpha+3p}}{r^{2p}} |\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \\ \le& \; (p-1)\,\epsilon^{\frac{-p}{p-1}} \int_{\mathbb{H}^n} a\rho^\alpha |u|^p d\xi + \epsilon^p \int_{\mathbb{H}^n} a\frac{\rho^{\alpha+3p}}{r^{2p}} |\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \end{aligned}$$

kestirimi elde edilir. Böylelikle, $f(Q,\alpha,p;\epsilon) = \epsilon^{-p}\left[Q + \alpha + (1-p)\,\epsilon^{\frac{-p}{p-1}} \right]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^n} a\frac{\rho^{\alpha+3p}}{r^{2p}} |\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \ge& \; f(Q,\alpha,p;\epsilon) \int_{\mathbb{H}^n} a\rho^\alpha |u|^p d\xi \\ &+ \epsilon^{-p} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha+3}}{r^2} \left(\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} a \right) |u|^p d\xi \end{aligned}$$

olduğu görülür. f fonksiyonu maksimum değerini $\epsilon_0 = \left(\frac{Q+\alpha}{p}\right)^{\frac{1-p}{p}}$ noktasında alır ve bu değer $f(Q, \alpha, p; \epsilon_0) = \left(\frac{Q+\alpha}{p}\right)^p$ olarak bulunur. Bunun bir sonucu olarak, arzulanan eşitsizlik elde edilir. ■

Uyarı 4.8 Elde edilen (4.17) eşitsizliğinde; $a = 1$ olarak alınırsa (4.15) eşitsizliği, $a = r^\beta$ olarak alınıp ispatın son basamağındaki hesaplamalar buna göre yapılırsa (4.16) eşitsizliği bulunur.

Şimdi, (3.20) ile verilen özdeşlik, kısmi integrasyon ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği yardımı ile Caffarelli-Kohn-Nirenberg eşitsizliğinin L^2 versiyonunun kısa ve basit bir ispatı verilecektir.

Teorem 4.4 $Q + \alpha > 0$, $1 < p < \infty$ ve $\alpha, s \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \backslash \mathcal{Z})$ fonksiyonu için

$$\left(\int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^{s-2}}{\rho^{s-2}} \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\right|^2 d\xi\right) \left(\int_{\mathbb{H}^n} r^s \rho^{2\alpha+2-s} |u|^{2p-2} d\xi\right) \geq \left(\frac{Q+\alpha}{p}\right)^2 \left(\int_{\mathbb{H}^n} r^s \rho^{\alpha-s} |u|^p d\xi\right)^2$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $\mathcal{Z} = \{\xi = (z, l) \in \mathbb{H}^n : z = 0, l \in \mathbb{R}\}$ şeklindedir.

Kanıt.

$$\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(\frac{\rho^3}{r^2} \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho\right) = Q$$

eşitliği $r^s \rho^{\alpha-s} |u|^p$ fonksiyonu ile çarpıldıktan sonra $\mathbb{H}^n$ üzerinde kısmi integrasyon uygulanırsa ρ fonksiyonu $\infty-$harmonik, yani $\nabla_{\mathbb{H}^n}(|\nabla_{\mathbb{H}^n} \rho|^2) \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
Q \int_{\mathbb{H}^n} r^s \rho^{\alpha-s} |u|^p d\xi =& - \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^3}{r^2} \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} (r^s \rho^{\alpha-s} |u|^p) d\xi \\
=& - \alpha \int_{\mathbb{H}^n} r^s \rho^{\alpha-s} |u|^p d\xi \\
& - p \int_{\mathbb{H}^n} r^{s-2} \rho^{\alpha-s+3} \left(\nabla_{\mathbb{H}^n} \rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} u\right) |u|^{p-1} d\xi \\
& - \frac{s}{2} \int_{\mathbb{H}^n} r^{s-4} \rho^{\alpha-s+5} \nabla_{\mathbb{H}^n} (|\nabla_{\mathbb{H}^n} \rho|^2) \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho |u|^p d\xi \\
=& - \alpha \int_{\mathbb{H}^n} r^s \rho^{\alpha-s} |u|^p d\xi \\
& - p \int_{\mathbb{H}^n} r^{s-2} \rho^{\alpha-s+3} \left(\nabla_{\mathbb{H}^n} \rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} u\right) |u|^{p-1} d\xi
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece, Cauchy-Schwarz eşitsizliği istenen sonucu verir:

$$\begin{aligned}\left(\frac{Q+\alpha}{p}\right)\int_{\mathbb{H}^n} r^s\rho^{\alpha-s}|u|^p d\xi &= -\int_{\mathbb{H}^n} r^{s-2}\rho^{\alpha-s+3}\left(\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right)|u|^{p-1}d\xi \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{H}^n} r^s\frac{|u|^{2p-2}}{\rho^{s-2\alpha-2}}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{H}^n}\frac{r^{s-2}}{\rho^{s-2}}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

■

Uyarı 4.9 Bu eşitsizlik, $s = 0$, $\alpha = 0$ ve $p = 2$ özel durumunda (4.13) Heiseneberg-Pauli-Weyl eşitsizliğine, $s = 2$, $\alpha = -2$ ve $p = 2$ özel durumunda ise (4.3) L^2 Hardy eşitsizliğine indirgenir.

5 GENEL AĞIRLIKLI RELLICH TİPİ EŞİTSİZLİKLER

5.1 Giriş

Rellich, 1953 yılında New York Üniversitesi'nde verdiği derslerde ve daha sonra 1954 yılında Amsterdam'da toplanan Uluslararası Matematikçiler Kongresi'ndeki konuşmasında, kendi adını taşıyan

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 \, dx \geq \frac{n^2 (n-4)^2}{16} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{|x|^4} dx \tag{5.1}$$

eşitsizliğinin, $n > 4$ olmak üzere, her $u \in C_0^\infty (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ fonksiyonu için geçerli olduğunu göstermiştir. Rellich'in bu konuşması, ölümünden sonra 1956 yılında yayımlanan Kongre'nin bildiri kitabında basılmıştır. Daha sonra bu eşitsizlik üzerine Öklid uzayında çok çeşitli çalışmalar yapılmış ve yapılmaya da devam edilmektedir. Örneğin, Davies ve Hinz (1998) (5.1) eşitsizliğinin L^p durumuna genişlemesini elde etmiştir. Diğer yandan, Tertikas ve Zographopoulos (2007), $n > 4$ olmak üzere herhangi bir $u \in C_0^\infty (\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi ile birinci mertebeden türevi arasında ilişki kuran en iyi sabitli aşağıdaki eşitsizliği ispatlamıştır:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx \geq \frac{n^2}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^2} dx. \tag{5.2}$$

Öklid uzayında Rellich eşitsizlikleri üzerine yapılan tüm bu çalışmalar birçok matematikçi için ilham kaynağı olmuş ve bu eşitsizliklerin Riemann manifoldları, Heisenberg grubu ve Baouendi-Grushin vektör alanları gibi $\mathbb{R}^n$'ye göre daha genel ve daha soyut yapılardaki çeşitli genelleştirmeleri, iyileştirmeleri, analogları ve ispat teknikleri çok farklı şekillerde ele alınmıştır. Bu bağlamda, Niu vd. (2001) Heisenberg grubundaki $p-$biharmonik denklem ile ilişkili olan Picone özdeşliğini kullanarak, Heisenberg grubunda Rellich tipi yeni bir eşitsizlik elde etmiştir. D'Ambrosio (2004), Heisenberg grubunda çeşitli ağırlık fonksiyonlarıyla verilmiş Rellich eşitsizlikleri bulmuştur. Diğer yandan, $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ Kohn Laplace operatörünün temel çözümünü kullanarak, Yang (2008) en iyi sabitli (5.1) ve (5.2) L^2 Rellich eşitsizliklerinin ağırlıklı hallerinin Heisenberg grubundaki analoglarını elde etmiştir. Daha sonra Jin ve Han (2010), (5.1) eşitsizliğinin Heisenberg grubundaki analoğu olan en iyi sabitli L^2 Rellich eşitsizliğini L^p formuna genişletmiştir. Niu vd. (2001)'nin elde ettiği Rellich eşitsizliği kısa bir süre önce Lian (2013) tarafından geliştirilmiştir.

5.2 Genel Ağırlıklı Rellich Eşitsizliği ve Bu Eşitsizliğin Bazı Uygulamaları

Klasik Picone özdeşliği, her $u \geq 0$ ve $\vartheta > 0$ türevlenebilir fonksiyonları için $\mathbb{R}^n$'de

$$|\nabla u|^2 + \frac{u^2}{\vartheta^2} |\nabla \vartheta|^2 - 2\frac{u}{\vartheta} \nabla u \cdot \nabla \vartheta = |\nabla u|^2 - \nabla \left(\frac{u^2}{\vartheta} \right) \cdot \nabla \vartheta \geq 0 \tag{5.3}$$

ilişkisinin varlığını söyler. Bu özdeşliğin diferansiyel denklemlerde birçok uygulaması vardır. Bu nedenle, Picone özdeşliği üzerine birçok araştırmacı çeşitli çalışmalar yapmış ve yapmaya da devam etmektedir. Örneğin, Allegretto ve Huang (1998) ikilisi bu özdeşliği $p-$Laplasyen durumuna genişletmiştir. Daha sonra benzer bir yaklaşımla, Heisenberg grubundaki $p-$alt-Laplace ve $p-$biharmonik operatörler için Picone özdeşlikleri elde edilmiştir (Niu vd., 2001).

Şimdi, okurun tezi bir bütünlük içerisinde takip edebilmesi için Heisenberg grubundaki $p-$biharmonik operatörler için bulunan Picone özdeşliği ispatıyla birlikte verilecektir.

Yardımcı Teorem 5.1 $\mathbb{H}^n$'de $u \geq 0$ ve $\vartheta > 0$ fonksiyonları türevlenebilir olsun ve $-\Delta_{\mathbb{H}^n} \vartheta > 0$ eşitsizliği sağlansın. $p > 1$ olmak üzere,

$$R(u, \vartheta) = |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p - \Delta_{\mathbb{H}^n} \left(\frac{u^p}{\vartheta^{p-1}} \right) |\Delta_{\mathbb{H}^n} \vartheta|^{p-2} \Delta_{\mathbb{H}^n} \vartheta$$

ve

$$\begin{aligned} L(u, \vartheta) = {} & |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p - p \frac{u^{p-1}}{\vartheta^{p-1}} \Delta_{\mathbb{H}^n} u \, |\Delta_{\mathbb{H}^n} \vartheta|^{p-2} \Delta_{\mathbb{H}^n} \vartheta + (p-1) \frac{u^p}{\vartheta^p} |\Delta_{\mathbb{H}^n} \vartheta|^p \\ & - p(p-1) \frac{u^{p-2}}{\vartheta^{p-1}} |\Delta_{\mathbb{H}^n} \vartheta|^{p-2} \Delta_{\mathbb{H}^n} \vartheta \left(\nabla_{\mathbb{H}^n} u - \frac{u}{\vartheta} \nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta \right)^2 \end{aligned}$$

olsun. Bu takdirde

$$L(u, \vartheta) = R(u, \vartheta) \geq 0$$

ilişkisi mevcuttur (Niu vd., 2001).

Kanıt.

$$\nabla_{\mathbb{H}^n}\left(\frac{u^p}{\vartheta^{p-1}}\right) = \frac{pu^{p-1}\vartheta^{p-1}\nabla_{\mathbb{H}^n}u - (p-1)\,u^p\vartheta^{p-2}\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta}{\vartheta^{2p-2}}$$
$$= \frac{pu^{p-1}}{\vartheta^{p-1}}\nabla_{\mathbb{H}^n}u - \frac{(p-1)\,u^p}{\vartheta^p}\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbb{H}^n}\left(\frac{u^p}{\vartheta^{p-1}}\right) &= \nabla_{\mathbb{H}^n}\cdot\left(\frac{pu^{p-1}\nabla_{\mathbb{H}^n}u}{\vartheta^{p-1}}\right) - \nabla_{\mathbb{H}^n}\cdot\left(\frac{(p-1)\,u^p\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta}{\vartheta^p}\right)\\ &= \frac{p\,(p-1)\,u^{p-2}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right|^2 + pu^{p-1}\Delta_{\mathbb{H}^n}u}{\vartheta^{p-1}}\\ &\quad - \frac{p\,(p-1)\,u^{p-1}\nabla_{\mathbb{H}^n}u\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta}{\vartheta^p}\\ &\quad + \frac{pu^{p-1}\nabla_{\mathbb{H}^n}u\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta + (p-1)\,u^p\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta}{\vartheta^p}\\ &\quad - \frac{p\,(p-1)\,u^{p-1}\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}u}{\vartheta^{p+1}}\end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde,

$$I_1 := \left|\Delta_{\mathbb{H}^n}u\right|^p + (p-1)\,\frac{u^p}{\vartheta^p}\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^p - p\frac{u^{p-1}}{\vartheta^{p-1}}\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^p\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}u\right|\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|,$$

$$I_2 := \frac{pu^{p-1}}{\vartheta^{p-1}}\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2}\left(\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}u\right|\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right| - \Delta_{\mathbb{H}^n}u\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right)$$

ve

$$\begin{aligned}I_3 :=& \frac{2p\,(p-1)\,u^{p-1}}{\vartheta^p}\nabla_{\mathbb{H}^n}u\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2}\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\\ &- \frac{p\,(p-1)\,u^{p-2}}{\vartheta^{p-1}}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right|^2\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2}\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\\ &- \frac{p\,(p-1)\,u^p}{\vartheta^{p+1}}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right|^2\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2}\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\end{aligned}$$

olmak üzere, $R\,(u,\vartheta)$ ifadesi

$$R\,(u,\vartheta) = I_1 + I_2 + I_3$$

şeklinde yazılabilir. I_3 ile ifade edilen eşitlik düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}I_3 &= \frac{p\,(p-1)\,u^{p-2}}{\vartheta^{p-1}}\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2}\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\left(\frac{2u}{\vartheta}\nabla_{\mathbb{H}^n}u\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta - \left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right|^2 - \frac{u^2}{\vartheta^2}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right|^2\right)\\ &= -\frac{p\,(p-1)\,u^{p-2}}{\vartheta^{p-1}}\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2}\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\left(\nabla_{\mathbb{H}^n}u - \frac{u}{\vartheta}\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right)^2\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ise $L(u,\vartheta) = R(u,\vartheta)$ eşitliğinin gerçeklendiğini gösterir. Şimdi $L(u,\vartheta) \geq 0$ olduğu gösterilecektir. İlk olarak, $u \geq 0$, $\vartheta > 0$ ve $-\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta > 0$ kabullerinden $I_3 \geq 0$ bulunur. Diğer yandan, $|\Delta_{\mathbb{H}^n} u| \, |\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta| \geq \Delta_{\mathbb{H}^n} u \Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta$ olduğundan $I_2 \geq 0$ olur. Son olarak, Young eşitsizliğinden elde edilebilen

$$p\frac{u^{p-1}}{\vartheta^{p-1}} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u| \, |\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^{p-1} \leq |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p + (p-1)\frac{u^p}{\vartheta^p} |\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^p$$

ilişkisi yardımı ile $I_1 \geq 0$ eşitsizliği ispatlanır. Dolayısıyla $L(u,\vartheta) = R(u,\vartheta) \geq 0$ sonucu ispatlanmış olur. ■

Verilen Picone özdeşliği aşağıdaki teoremin kanıtında kullanılan temel fikirdir.

Teorem 5.1 $a \in C^2(\mathbb{H}^n)$ ve $b \in L^1_{loc}(\mathbb{H}^n)$ negatif olmayan fonksiyonlar ve $p > 1$ olsun. Pozitif $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$ fonksiyonu

$$\Delta_{\mathbb{H}^n}\left(a |\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^{p-2} \Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) \geq b\vartheta^{p-1} \quad \text{ve} \quad -\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta > 0$$

diferansiyel eşitsizliklerini hemen hemen her $\xi \in \mathbb{H}^n$ için sağlıyorsa

$$\int_{\mathbb{H}^n} a |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi \geq \int_{\mathbb{H}^n} b |u|^p \, d\xi \tag{5.4}$$

genel ağırlıklı L^p Rellich eşitsizliği her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ fonksiyonu için geçerlidir.

Kanıt. İspat ilk olarak $0 \leq u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ için yapılacaktır. Yardımcı Teorem 5.1 ve kısmi integrasyon kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\mathbb{H}^n} aL(u,\vartheta)\, d\xi &= \int_{\mathbb{H}^n} aR(u,\vartheta)\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{H}^n} a |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi - \int_{\mathbb{H}^n} a\Delta_{\mathbb{H}^n}\left(\frac{u^p}{\vartheta^{p-1}}\right) |\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^{p-2} \Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta d\xi \\ &= \int_{\mathbb{H}^n} a |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi - \int_{\mathbb{H}^n} \frac{u^p}{\vartheta^{p-1}} \Delta_{\mathbb{H}^n}\left(a |\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^{p-2} \Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) d\xi \end{aligned}$$

sonucu bulunur. Buradan, $\Delta_{\mathbb{H}^n}\left(a |\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^{p-2} \Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) \geq b\vartheta^{p-1}$ diferansiyel eşitsizliği yardımı ile

$$\int_{\mathbb{H}^n} a |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi \geq \int_{\mathbb{H}^n} b |u|^p \, d\xi$$

genel ağırlıklı L^p Rellich eşitsizliği negatif olmayan $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ fonksiyonları için ispatlanmış olur. $u = u^+ - u^-$ olduğu düşünülerek, ispat $C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ sınıfından olan negatif u fonksiyonları için de rahatlıkla verilebilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

5.2.1 Teorem 5.1'in uygulamaları

Herhangi $\epsilon > 0$ sayısı için $r_\epsilon := (\epsilon^2 + r^2)^{1/2}$ ve $\rho_\epsilon := (r_\epsilon^4 + l^2)^{1/4}$ olarak tanımlansın. r ve ρ fonksiyonlarının 0'daki türevlenebilme sorunundan kurtulabilmek için gerekli hesaplamalar r yerine r_ϵ, ρ yerine ise ρ_ϵ konarak yapılmalı ve daha sonra Lebesgue yakınsama teoremleri ile $\epsilon \longrightarrow 0$ iken limit alınmalıdır. Ancak, bu durumun bilindiği göz önünde bulundurularak, gösterim ve yazım kolaylığı sağlamak için hesaplamalarda r ve ρ fonksiyonları tercih edilecektir.

Teorem 5.1,

$$\Delta_{\mathbb{H}^n}\left(a\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2}\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) \geq b\vartheta^{p-1} \tag{5.5}$$

doğrusal olmayan kısmi diferansiyel eşitsizlik ile (5.4) genel ağırlıklı Rellich eşitsizliği arasındaki kuvvetli ilişkiyi gözler önüne sermektedir. Bu ilişkiyle yeni ve bilinen çeşitli ağırlık fonksiyonlarına sahip Rellich eşitsizlikleri türetebilmek için yapılması gereken, (5.5) diferansiyel eşitsizliğini sağlayan uygun a ve ϑ fonksiyonlarını belirleyip gerekli hesaplamalardan sonra istenen b fonksiyonunu bulmaktır. Şimdi bu durum, $\mathbb{H}^n$'de ve $\mathbb{H}^n$'nin bazı alt bölgelerinde pek çok örnek üzerinde gösterilecektir.

İlk örnek olarak, $p > 1$ ve $\frac{Q-2}{2} > \alpha > 1$ olmak üzere,

$$a = r^{2p-2\alpha}, \qquad \vartheta = r^{-\left(\frac{Q-2\alpha-2}{p}\right)} \tag{5.6}$$

seçimi için gerekli hesaplamalar yapıldığında,

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\mathbb{H}^n}\left(a\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2}\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right)\\
&\quad= \left(\frac{Q-2\alpha-2}{p}\right)^p\left(\frac{(Q-2)(p-1)+2(\alpha-p)}{p}\right)^p r^{\frac{Q-2\alpha+2p-2}{p}-Q}\\
&\quad= \left(\frac{Q-2\alpha-2}{p}\right)^p\left(\frac{(Q-2)(p-1)+2(\alpha-p)}{p}\right)^p \frac{1}{r^{2\alpha}}\vartheta^{p-1}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer yandan, $\alpha > 1$ için $\rho^{2\alpha} = (r^4 + l^2)^{\alpha/2} \geq r^{2\alpha}$ olduğu da göz önünde bulundurulduğunda, aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

Sonuç 5.1 $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $p > 1$ ve $\frac{Q-2}{2} > \alpha > 1$ olsun. O halde,

$$\int_{\mathbb{H}^n}\frac{\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}u\right|^p}{r^{2\alpha-2p}}d\xi \geq \left(\frac{Q-2\alpha-2}{p}\right)^p\left(\frac{(Q-2)(p-1)+2(\alpha-p)}{p}\right)^p\int_{\mathbb{H}^n}\frac{|u|^p}{r^{2\alpha}}d\xi$$

ve

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{|\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p}{r^{2\alpha-2p}} d\xi \geq \left(\frac{Q-2\alpha-2}{p}\right)^p \left(\frac{(Q-2)(p-1)+2(\alpha-p)}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^n} \frac{|u|^p}{\rho^{2\alpha}} d\xi$$

eşitsizlikleri her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ için doğrudur (D'Ambrosio, 2004).

(5.6) ile verilen fonksiyon çiftinin $p=2$ özel durumu

$$a = r^{4-2\alpha}, \qquad \vartheta = r^{-\left(\frac{Q-2\alpha-2}{2}\right)}$$

ele alınsın. $\frac{Q-2}{2} > \alpha > 1$ için $\rho^{4\alpha} \geq r^{4\alpha}$ ve dolayısıyla da $\frac{1}{r^{2\alpha}} \geq \frac{r^{2\alpha}}{\rho^{4\alpha}}$ olduğu dikkate alındığında,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{H}^n}(a\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta) &= \frac{(Q+2\alpha-6)^2(Q-2\alpha-2)^2}{16} r^{-\left(\frac{Q+2\alpha-2}{2}\right)} \\
&\geq \frac{(Q+2\alpha-6)^2(Q-2\alpha-2)^2}{16} \frac{r^{2\alpha}}{\rho^{4\alpha}} r^{-\left(\frac{Q-2\alpha-2}{2}\right)} \\
&= \frac{(Q+2\alpha-6)^2(Q-2\alpha-2)^2}{16} \frac{r^{2\alpha}}{\rho^{4\alpha}} \vartheta
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan, $b = \frac{(Q+2\alpha-6)^2(Q-2\alpha-2)^2}{16} \frac{r^{2\alpha}}{\rho^{4\alpha}}$ olarak belirlenir ve aşağıdaki ağırlıklı Rellich tipi eşitsizlik bulunur.

Sonuç 5.2 $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{Q-2}{2} > \alpha > 1$ olsun. O halde,

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{|\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^2}{r^{2\alpha-4}} d\xi \geq \frac{(Q+2\alpha-6)^2(Q-2\alpha-2)^2}{16} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^{2\alpha}}{\rho^{4\alpha}} u^2 d\xi$$

eşitsizliği her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ için geçerlidir (D'Ambrosio, 2004).

Başka bir eşitsizlik elde etmek için, $Q-4 > \alpha \geq 0$ olmak üzere,

$$a = \frac{\rho^{2-\alpha}}{r^2}, \qquad \vartheta = \rho^{-\left(\frac{Q-\alpha-4}{2}\right)}$$

seçimi yapılsın. Bu seçim Teorem 5.1'deki istenen şartları sağlar ve dikkatli bir hesaplama sonucunda

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{H}^n}(a\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta) &= \frac{(Q+\alpha)^2(Q-\alpha-4)^2}{16} r^2 \rho^{-\frac{Q+\alpha+8}{2}} \\
&= \frac{(Q+\alpha)^2(Q-\alpha-4)^2}{16} \frac{r^2}{\rho^{\alpha+6}} \vartheta
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan, $b = \frac{(Q+\alpha)^2(Q-\alpha-4)^2}{16} \frac{r^2}{\rho^{\alpha+6}}$ olarak belirlendiğinde şu sonuç elde edilir.

Sonuç 5.3 $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $Q-4>\alpha \geq 0$ olsun. Her $u \in C_0^{\infty}(\mathbb{H}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{2-\alpha}}{r^2} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^2 d\xi \geq \frac{(Q+\alpha)^2 (Q-\alpha-4)^2}{16} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^2}{\rho^{\alpha+6}} u^2 d\xi \tag{5.7}$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca $\frac{(Q+\alpha)^2(Q-\alpha-4)^2}{16}$ sabiti en iyi sabittir (Yang, 2008).

Diğer yandan,

$$a = \frac{\rho^{\alpha+4p-4}}{r^{2p-2}}, \qquad \vartheta = \rho^{-\left(\frac{Q+\alpha-2}{p}\right)}$$

seçimi için $1<p<\infty$ ve $2-Q<\alpha<\min\{(p-1)(Q-2),(Q-2)\}$ koşulu ile gerekli hesaplamalar yapıldığında,

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbb{H}^n}\left(a|\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^{p-2}\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) &= \left(\frac{Q+\alpha-2}{p}\right)^p \left(\frac{(Q-2)(p-1)-\alpha}{p}\right)^p \frac{r^2}{\rho^{Q+2}} \rho^{\frac{Q+\alpha-2}{p}} \\ &= \left(\frac{Q+\alpha-2}{p}\right)^p \left(\frac{(Q-2)(p-1)-\alpha}{p}\right)^p \frac{r^2}{\rho^{4-\alpha}} \vartheta^{p-1}\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece, $b = \left(\frac{Q+\alpha-2}{p}\right)^p \left(\frac{(Q-2)(p-1)-\alpha}{p}\right)^p \frac{r^2}{\rho^{4-\alpha}}$ olur ve Teorem 5.1'in bir sonucu olarak aşağıdaki ağırlıklı L^p Rellich eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.4 $2-Q<\alpha<\min\{(p-1)(Q-2),(Q-2)\}$ ve $1<p<\infty$ olsun. O halde, her $u \in C_0^{\infty}(\mathbb{H}^n\backslash\{0\})$ için

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha+4p-4}}{r^{2p-2}} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \geq \left(\frac{Q+\alpha-2}{p}\right)^p \left(\frac{(Q-2)(p-1)-\alpha}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^2}{\rho^{4-\alpha}} |u|^p d\xi$$

eşitsizliği geçerli olur. Buradaki $\left(\frac{Q+\alpha-2}{p}\right)^p \left(\frac{(Q-2)(p-1)-\alpha}{p}\right)^p$ sabiti en iyi sabittir (Jin ve Han, 2010).

Uyarı 5.1 Bu eşitsizlikteki $\left(\frac{Q+\alpha-2}{p}\right)^p \left(\frac{(Q-2)(p-1)-\alpha}{p}\right)^p$ pozitif sabitinin en iyi sabit olduğunun ispatını görmek isteyen okuyucu Jin ve Han (2010) referansına bakabilir. Ayrıca, bu eşitsizlikte $p=2$ durumu için α yerine $-\alpha-2$ alınırsa (5.7) eşitsizliği elde edilir.

Şimdi, $1<p<\frac{Q-\alpha}{2}$ ve $k=k(Q,p,\alpha)=(\frac{Q(p-1)+\alpha}{p})(\frac{Q-\alpha-2p}{p})$ olmak üzere,

$$a = \rho^{-\alpha}, \qquad \vartheta = \rho^{-\left(\frac{Q-\alpha-2p}{2}\right)}$$

fonksiyon çifti için gerekli işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbb{H}^n}\left(a\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2}\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) &= \left[k^p+2\left(p-1\right)\left(Q+2p-4\right)k^{p-1}\right]r^{2p}\rho^{\frac{Q-\alpha}{p}-Q-2p-2}\\ &\quad -2\left(p-1\right)\left(Q+2p-6\right)k^{p-1}r^{2p-4}\rho^{\frac{Q-\alpha}{p}-Q-2p-2}\\ &= \left[k^p+2\left(p-1\right)\left(Q+2p-4\right)k^{p-1}\right]\frac{r^{2p}}{\rho^{\alpha+4p}}\vartheta^{p-1}\\ &\quad -2\left(p-1\right)\left(Q+2p-6\right)k^{p-1}\frac{r^{2p-4}}{\rho^{\alpha+4p-4}}\vartheta^{p-1}\end{aligned}$$

sonucu elde edilir ve buradan

$$b=\left[k^p+2\left(p-1\right)\left(Q+2p-4\right)k^{p-1}\right]\frac{r^{2p}}{\rho^{\alpha+4p}}-2\left(p-1\right)\left(Q+2p-6\right)k^{p-1}\frac{r^{2p-4}}{\rho^{\alpha+4p-4}}$$

olarak bulunur. Böylelikle, Teorem 5.1 uygulandığında Lian (2013) tarafından bulunan aşağıdaki ağırlıklı L^p Rellich tipi eşitsizliğe ulaşılır.

Sonuç 5.5 $\alpha\in\mathbb{R}$, $1<p<\frac{Q-\alpha}{2}$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. Her $u\in C_0^\infty\left(\mathbb{H}^n\backslash\{0\}\right)$ için

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{H}^n}\frac{\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}u\right|^p}{\rho^\alpha}d\xi+2\left(p-1\right)\left(Q+2p-6\right)k^{p/q}\int_{\mathbb{H}^n}\frac{r^{2p-4}}{\rho^{\alpha+4p-4}}\left|u\right|^p d\xi\\ &\geq\left[k^p+2\left(p-1\right)\left(Q+2p-4\right)k^{p/q}\right]\int_{\mathbb{H}^n}\frac{r^{2p}}{\rho^{\alpha+4p}}\left|u\right|^p d\xi\end{aligned}\tag{5.8}$$

olur. Burada, $k=k\left(Q,p,\alpha\right)=(\frac{Q(p-1)+\alpha}{p})(\frac{Q-\alpha-2p}{p})$ şeklindedir (Lian, 2013).

Uyarı 5.2 Lian (2013), yukarıdaki (5.8) eşitsizliğinin sağında beliren sabitin

$$\left[k^p+2\left(p-1\right)\left(Q+2p-4\right)k^{p/q}\right]=\inf_{0\neq u\in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)}\frac{\int_{\mathbb{H}^n}\frac{\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}u\right|^p}{\rho^\alpha}d\xi+2\left(p-1\right)\left(Q+2p-6\right)k^{p/q}\int_{\mathbb{H}^n}\frac{r^{2p-4}}{\rho^{\alpha+4p-4}}\left|u\right|^p d\xi}{\int_{\mathbb{H}^n}\frac{r^{2p}}{\rho^{\alpha+4p}}\left|u\right|^p d\xi}$$

manasında en iyi sabit olduğunu göstermiştir.

Teorem 5.1'in bir başka sonucu olarak, farklı ağırlık fonksiyonlarına sahip yeni Rellich tipi eşitsizlikler de rahatlıkla elde edilebilir. Bunun için düzgün sınırlı $\Omega\subset\mathbb{H}^n$ bölgesinde tanımlı

$$a=\frac{\rho^{\alpha+2p-2}}{r^{2p-2}},\qquad\vartheta=\log\frac{R}{\rho}$$

fonksiyonları düşünülsün. $\alpha \geq 0$, $\frac{Q+\alpha}{2} > p > \frac{\alpha+2}{2}$, $R > \sup_\Omega \rho$ koşulları altında ve $c_0(Q,\alpha,p) := (2p-\alpha-2)(Q+\alpha-2p)(Q-2)^{p-1}$ olmak üzere, gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\Delta_{\mathbb{H}^n}\left(a\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2}\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) = c_0(Q,\alpha,p)\, r^2\rho^{\alpha-2p-2} = c_0(Q,\alpha,p)\,\frac{r^2\rho^{\alpha-2p-2}}{\left(\log\frac{R}{\rho}\right)^{p-1}}\vartheta^{p-1}$$

olur. Buradan, aşağıdaki ağırlıklı L^p Rellich eşitsizliği bulunur.

Sonuç 5.6 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ düzgün sınırlı bir bölge olmak üzere, $\alpha \geq 0$, $\frac{Q+\alpha}{2} > p > \frac{\alpha+2}{2}$ ve $R > \sup_\Omega \rho$ olsun. O halde, her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \frac{\rho^{\alpha+2p-2}}{r^{2p-2}}\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}u\right|^p d\xi \geq c_0(Q,\alpha,p)\int_\Omega \frac{r^2\rho^{\alpha-2p-2}}{\left(\log\frac{R}{\rho}\right)^{p-1}}|u|^p d\xi$$

olur. Burada, $c_0(Q,\alpha,p) = (2p-\alpha-2)(Q+\alpha-2p)(Q-2)^{p-1}$ şeklindeki pozitif bir sabittir.

Benzer biçimde, $B_{\mathbb{H}^n}(0,R)$ Koranyi yuvarı üzerinde tanımlı

$$a = \frac{\rho^{\alpha+2p-2}}{r^{2p-2}}, \qquad \vartheta = R-\rho$$

fonksiyon çifti ele alınarak, $\alpha \geq 0$ ve $Q+\alpha-1 > p > \alpha+1$ kısıtlamaları altında gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\Delta_{\mathbb{H}^n}\left(a\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2}\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) = c_1(Q,\alpha,p)\, r^2\rho^{\alpha-p-3} = c_1(Q,\alpha,p)\,\frac{r^2\rho^{\alpha-p-3}}{(R-\rho)^{p-1}}\vartheta^{p-1}$$

olur. Burada, $c_1(Q,\alpha,p) := (p-\alpha-1)(Q+\alpha-p-1)(Q-1)^{p-1}$ şeklindedir. O halde, Teorem 5.1 aşağıdaki ağırlıklı L^p Rellich tipi eşitsizliği verir.

Sonuç 5.7 $\alpha \geq 0$ ve $Q+\alpha-1 > p > \alpha+1$ olsun. Bu durumda, herhangi $u \in C_0^\infty(B_{\mathbb{H}^n}(0,R))$ fonksiyonu için

$$\int_{B_{\mathbb{H}^n}(0,R)} \frac{\rho^{\alpha+2p-2}}{r^{2p-2}}\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}u\right|^p d\xi \geq c_1(Q,\alpha,p)\int_{B_{\mathbb{H}^n}(0,R)} \frac{r^2\rho^{\alpha-p-3}}{(R-\rho)^{p-1}}|u|^p d\xi$$

olur. Burada, $c_1(Q,\alpha,p) = (p-\alpha-1)(Q+\alpha-p-1)(Q-1)^{p-1}$ şeklindeki pozitif bir sabittir.

Son olarak, r^α ve ρ^β tipindeki simetrik fonksiyonlara bağlı olmayan ağırlık fonksiyonlarına sahip bir Rellich eşitsizliğinin Teorem 5.1'in bir uygulaması olarak elde edilebileceği gösterilecektir. Bunun için $\Omega := \{(x,y,l) \in \mathbb{H}^n : x_1, y_1 > 1\}$ üzerinde

$$a = x_1^{2p-2} \log y_1, \qquad \vartheta = \log x_1$$

radyal olmayan fonksiyon çifti ele alınsın. Dikkatli hesaplamalar sonucunda,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta &= \sum_{i=1}^{n} \left(X_i^2 + Y_i^2\right)(\log x_1) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + 2y_1\frac{\partial}{\partial l}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + 2y_1\frac{\partial}{\partial l}\right)(\log x_1) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + 2y_1\frac{\partial}{\partial l}\right)\left(\frac{1}{x_1}\right) \\
&= -\frac{1}{x_1^2}
\end{aligned}$$

eşitliği ve buradan

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{H}^n}\left(a\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^{p-2}\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) &= -\Delta_{\mathbb{H}^n}(\log y_1) \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 + Y_i^2\right)(\log y_1) \\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial y_1} - 2x_1\frac{\partial}{\partial l}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_1} - 2x_1\frac{\partial}{\partial l}\right)(\log y_1) \\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial y_1} - 2x_1\frac{\partial}{\partial l}\right)\left(\frac{1}{y_1}\right) \\
&= \frac{1}{y_1^2} \\
&= \frac{1}{y_1^2 \log^{p-1} x_1}\vartheta^{p-1}
\end{aligned}$$

sonucu bulunur. Bu ise aşağıdaki radyal olmayan ağırlık fonksiyonlarına sahip Rellich eşitsizliğinin elde edilmesini sağlar.

Sonuç 5.8 $\Omega := \{(x,y,l) \in \mathbb{H}^n : x_1, y_1 > 1\}$ olmak üzere, herhangi $u \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega x_1^{2p-2} \log y_1 \left|\Delta_{\mathbb{H}^n} u\right|^p d\xi \geq \int_\Omega \frac{|u|^p}{y_1^2 \log^{p-1} x_1} d\xi$$

eşitsizliği sağlanır.

5.2.2 Dirichlet sınır değer probleminin pozitif çözümü üzerine

Bir önceki alt bölümde ağırlıklı $p-$biharmonik diferansiyel eşitsizliği kullanılarak ağırlıklı Rellich eşitsizliklerinin rahatlıkla elde edilebileceği birçok örnek üzerinde açıkça gösterilmiştir. Şimdi bu durumun tersi olarak, dördüncü mertebeden bir Dirichlet sınır değer probleminin pozitif çözümünün ne zaman olmadığı hakkında bilgi veren aşağıdaki teorem elde edilen ağırlıklı Rellich tipi bir eşitsizlik yardımıyla ispatlanacaktır.

Teorem 5.2 $2 - Q < \alpha < \min\{(p-1)(Q-2), (Q-2)\}$ ve $1 < p < \infty$ olsun. O halde, $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip sınırlı bir bölge ve $0 < v \in L^1_{loc}(\Omega)$ olmak üzere, $\lambda < \left(\frac{Q+\alpha-2}{p}\right)^p \left(\frac{(Q-2)(p-1)-\alpha}{p}\right)^p$ ise

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^n}\left(\frac{\rho^{\alpha+4p-4}}{r^{2p-2}} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^{p-2} \Delta_{\mathbb{H}^n} u\right) + \lambda \frac{r^2}{\rho^{4-\alpha}} |u|^{p-2} u = v u^m, & \xi \in \Omega, \\ u = 0, & \xi \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5.9}$$

doğrusal olmayan Dirichlet sınır değer probleminin pozitif çözümü yoktur.

Kanıt. u fonksiyonu (5.9) probleminin pozitif çözümü olsun. O halde, bu u fonksiyonları için

$$-\int_\Omega u \Delta_{\mathbb{H}^n}\left(\frac{\rho^{\alpha+4p-4}}{r^{2p-2}} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^{p-2} \Delta_{\mathbb{H}^n} u\right) d\xi + \lambda \int_\Omega \frac{r^2}{\rho^{4-\alpha}} |u|^p d\xi = \int_\Omega v u^{m+1} d\xi$$

eşitliği mevcuttur. Diğer yandan, Gauss-Green formülü ve ağırlıklı Rellich eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} -\int_\Omega u \Delta_{\mathbb{H}^n}&\left(\frac{\rho^{\alpha+4p-4}}{r^{2p-2}} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^{p-2} \Delta_{\mathbb{H}^n} u\right) d\xi \\ &= \int_\Omega \nabla_{\mathbb{H}^n} u \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n}\left(\frac{\rho^{\alpha+4p-4}}{r^{2p-2}} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^{p-2} \Delta_{\mathbb{H}^n} u\right) d\xi \\ &= -\int_\Omega \frac{\rho^{\alpha+4p-4}}{r^{2p-2}} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \\ &\le -\left(\frac{Q+\alpha-2}{p}\right)^p \left(\frac{(Q-2)(p-1)-\alpha}{p}\right)^p \int_\Omega \frac{r^2}{\rho^{4-\alpha}} |u|^p d\xi \end{aligned}$$

ilişkisi elde edilir. Böylelikle,

$$\left[\lambda - \left(\frac{Q+\alpha-2}{p}\right)^p \left(\frac{(Q-2)(p-1)-\alpha}{p}\right)^p\right] \int_\Omega \frac{r^\beta}{\rho^\alpha} |u|^p d\xi \ge \int_\Omega v u^{m+1} d\xi$$

olduğu görülür. Bu durumda, $\lambda < \left(\frac{Q+\alpha-2}{p}\right)^p \left(\frac{(Q-2)(p-1)-\alpha}{p}\right)^p$ olduğundan, yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafındaki integral ifadesi negatif, sağ tarafındaki integral ifadesi ise pozitiftir. Bu ise bir çelişkidir ve böylece istenen koşullar altında (5.9) probleminin pozitif çözümünün olmadığı kanıtlanmış olur. ∎

5.3 Rellich-II Tipi Bir Eşitsizlik

Bu alt bölümde ilk olarak, Heisenberg grubundaki

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha+2}}{r^2} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^2 \, d\xi \geq \left(\frac{Q-\alpha}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{H}^n} \rho^{\alpha-2} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 \, d\xi, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$$

ağırlıklı Rellich-II eşitsizliğinin L^p durumuna genişlemesi verilecektir. Bu sonuç Öklid uzayında da yeni bir sonuçtur. Daha sonra, elde edilen bu eşitsizlik yardımı ile ikinci mertebeden Heisenberg-Pauli-Weyl tipi bir eşitsizlik ispatlanacaktır. Bunların yanısıra son olarak, ağırlıklı L^p Rellich-Hardy-Poincaré tipi yeni bir eşitsizlik elde edilecektir.

Heisenberg grubundaki L^p Rellich-II eşitsizliğinin ispatı şu şekildedir:

Teorem 5.3 $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $Qp > Q + \alpha > p > 1$ olsun. Her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \setminus \{0\})$ için

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha+p}}{r^p} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi \geq \left(\frac{Qp-Q-\alpha}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^n} \rho^{\alpha-p} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi \tag{5.10}$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca $(\frac{Qp-Q-\alpha}{p})^p$ sabiti en iyi sabittir.

Kanıt. γ daha sonra belirlenmek üzere reel bir sayı olsun. Herhangi $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \setminus \{0\})$ için

$$v := \rho^\gamma \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} u \tag{5.11}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlansın. (3.15) özdeşliği dikkate alınarak gerekli türevler alınırsa

$$\rho^\gamma \Delta_{\mathbb{H}^n} u \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho = \nabla_{\mathbb{H}^n} v - (Q+\gamma-1) r^2 \rho^{\gamma-3} \nabla_{\mathbb{H}^n} u$$

eşitliği bulunur. Daha sonra, $\xi = -(Q+\gamma-1) r^2 \rho^{\gamma-3} \nabla_{\mathbb{H}^n} u$ ve $\eta = \nabla_{\mathbb{H}^n} v$ için

$$|\xi + \eta|^p \geq |\xi|^p + p |\xi|^{p-2} \xi \cdot \eta, \quad p > 1$$

şeklindeki vektörel eşitsizlik uygulandığında,

$$\left|\rho^{\gamma}\Delta_{\mathbb{H}^n}u\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\right|^p \geq |Q+\gamma-1|^p r^{2p}\rho^{(\gamma-3)p}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right|^p \qquad (5.12)$$
$$-p\,|Q+\gamma-1|^{p-2}(Q+\gamma-1)\frac{r^{2(p-1)}}{\rho^{(3-\gamma)(p-1)}}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right|^{p-2}\nabla_{\mathbb{H}^n}u\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}v$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan, (5.11) ile tanımlanan fonksiyondan

$$v\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}u = r^2\rho^{\gamma-2}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right|^2$$

eşitliği ve dolayısıyla

$$\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right|^{p-2}\nabla_{\mathbb{H}^n}u\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}v = \frac{\rho^{(1-p)\gamma+p}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}|v|^p}{pr^p}$$

ifadesi çıkarılır. Bu ifade, (5.12) eşitsizliğinde kullanıldığında

$$\rho^{\gamma p-p}r^p\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}u\right|^p \geq |Q+\gamma-1|^p\rho^{(\gamma-3)p}r^{2p}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right|^p \qquad (5.13)$$
$$-|Q+\gamma-1|^{p-2}(Q+\gamma-1)\,\rho^{3-2p}r^{p-2}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}|v|^p$$

sonucuna ulaşılır. $\gamma = \frac{p-Q-\alpha}{p}$ seçiminden sonra, (5.13) eşitsizliği $\frac{\rho^{Q+2\alpha+p}}{r^{2p}}$ ile çarpılırsa şu eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{\rho^{\alpha+p}}{r^p}\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}u\right|^p \geq \left(\frac{Qp-Q-\alpha}{p}\right)^p\rho^{\alpha-p}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right|^p$$
$$-\left(\frac{Qp-Q-\alpha}{p}\right)^{p-1}\frac{\rho^{Q-p+2\alpha+3}}{r^{p+2}}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}|v|^p.$$

Böylelikle, kısmi integrasyon yardımı ile

$$\int_{\mathbb{H}^n}\frac{\rho^{\alpha+p}}{r^p}\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}u\right|^p d\xi \geq \left(\frac{Qp-Q-\alpha}{p}\right)^p\int_{\mathbb{H}^n}\rho^{\alpha-p}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\right|^p d\xi$$
$$+\left(\frac{Qp-Q-\alpha}{p}\right)^{p-1}\int_{\mathbb{H}^n}\nabla_{\mathbb{H}^n}\cdot\left(\frac{\rho^{Q-p+2\alpha+3}}{r^{p+2}}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\right)|v|^p d\xi$$

olur. (3.13) , (3.15) ve (3.16) özdeşlikleri dikkate alınarak gerekli işlemler yapıldığında

$$\nabla_{\mathbb{H}^n}\cdot\left(\frac{\rho^{Q-p+2\alpha+3}}{r^{p+2}}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\right) = (Q-p+2\alpha+3)\frac{\rho^{Q-p+2\alpha}}{r^p}-(p+2)\frac{\rho^{Q-p+2\alpha}}{r^p}$$
$$+(Q-1)\frac{\rho^{Q-p+2\alpha}}{r^p}$$
$$=2(Q+\alpha-p)\frac{\rho^{Q-p+2\alpha}}{r^p}$$

eşitliği bulunur. $Qp > Q + \alpha > p > 1$ olduğundan, istenen sonuca ulaşılır:

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha+p}}{r^p} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi \geq \left(\frac{Qp - Q - \alpha}{p} \right)^p \int_{\mathbb{H}^n} \rho^{\alpha-p} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi.$$

Şimdi, $(\frac{Qp-Q-\alpha}{p})^p$ pozitif sabitinin en iyi sabit olduğu, yani

$$\inf_{0 \neq u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \setminus \{0\})} \frac{\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha+p}}{r^p} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi}{\int_{\mathbb{H}^n} \rho^{\alpha-p} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi} = \left(\frac{Qp - Q - \alpha}{p} \right)^p$$

eşitliği ispatlanacaktır. Keyfi bir $\epsilon > 0$ değeri için

$$u_\epsilon(\rho) = \begin{cases} -\left(\frac{Q+\alpha-2p}{p} + \epsilon \right)(\rho - 1) + 1, & \rho \leq 1 \quad \text{ise}, \\ \rho^{-\left(\frac{Q+\alpha-2p}{p}+\epsilon\right)}, & \rho > 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $u_\epsilon(\rho)$ fonksiyonu ele alınsın. $u_\epsilon(\rho)$ fonksiyonuna $\mathbb{H}^n$'de kompakt desteğe sahip düzgün fonksiyonlar tarafından yaklaşılabildiği unutulmamalıdır. Gerekli türev alma işlemleri sonucunda

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n} u_\epsilon|^p = \begin{cases} \left(\frac{Q+\alpha-2p}{p} + \epsilon \right)^p \frac{r^p}{\rho^p}, & \rho \leq 1 \quad \text{ise}, \\ \left(\frac{Q+\alpha-2p}{p} + \epsilon \right)^p \rho^{-Q-\alpha-\epsilon p} r^p, & \rho > 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

ve

$$|\Delta_{\mathbb{H}^n} u_\epsilon|^p = \begin{cases} (Q-1)^p \left(\frac{Q+\alpha-2p}{p} + \epsilon \right)^p \frac{r^{2p}}{\rho^{3p}}, & \rho \leq 1 \quad \text{ise}, \\ \left(\frac{Q+\alpha-2p}{p} + \epsilon \right)^p \left(\frac{Qp-Q-\alpha}{p} + \epsilon \right)^p \rho^{-Q-\alpha-\epsilon p-2p} r^{2p}, & \rho > 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

eşitlikleri kolaylıkla elde edilir. (5.10) eşitsizliğinin solundaki integral ifadesi iki parçaya ayrılarak rahatlıkla hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha+p}}{r^p} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u_\epsilon|^p \, d\xi = & \, A(Q, p, \alpha, \epsilon) \int_{B_{\mathbb{H}^n}(0,1)} \rho^{\alpha-2p} r^p d\xi \\ & + B(Q, p, \alpha, \epsilon) \int_{\mathbb{H}^n \setminus B_{\mathbb{H}^n}(0,1)} \rho^{-Q-\epsilon p-p} r^p d\xi. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Burada

$$A(Q, p, \alpha, \epsilon) = (Q-1)^p \left(\frac{Q+\alpha-2p}{p} + \epsilon \right)^p$$

ve

$$B(Q, p, \alpha, \epsilon) = \left(\frac{Q+\alpha-2p}{p} + \epsilon \right)^p \left(\frac{Qp-Q-\alpha}{p} + \epsilon \right)^p$$

şeklindedir. ω_{2n}, $\mathbb{R}^{2n}$'deki birim kürenin Lebesgue yüzey ölçümü olmak üzere,

$$s_{2n} = \omega_{2n}\left(\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{n-1+p/2}\, d\theta\right)$$

olarak verilsin. Böylelikle, $\mathbb{H}^n$'deki kutupsal koordinatlar kullanılarak

$$\begin{aligned}\int_{B_{\mathbb{H}^n}(0,1)} \rho^{\alpha-2p} r^p d\xi &= s_{2n}\left(\int_0^1 \rho^{Q+\alpha-p-1} d\rho\right)\\ &= \frac{s_{2n}}{Q+\alpha-p}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}^n\setminus B_{\mathbb{H}^n}(0,1)} \rho^{-Q-\epsilon p-p} r^p d\xi &= s_{2n}\left(\int_1^{\infty} \rho^{-\epsilon p-1} d\rho\right)\\ &= \frac{s_{2n}}{\epsilon p}\end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Bu durumda, (5.14) eşitliği

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha+p}}{r^p}\left|\Delta_{\mathbb{H}^n} u_\epsilon\right|^p d\xi = s_{2n}\left(\frac{Q+\alpha-2p}{p}+\epsilon\right)^p\left(\frac{(Q-1)^p}{Q+\alpha-p}+\frac{\left(\frac{Qp-Q-\alpha}{p}+\epsilon\right)^p}{\epsilon p}\right)$$

halini alır. Benzer biçimde, (5.10) eşitsizliğinin sağındaki integral ifadesi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}^n} \rho^{\alpha-p}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n} u_\epsilon\right|^p d\xi &= s_{2n}\left(\frac{Q+\alpha-2p}{p}+\epsilon\right)^p\left(\int_0^1 \rho^{Q+\alpha-p-1} d\rho + \int_1^{\infty} \rho^{\epsilon p-1} d\rho\right)\\ &= s_{2n}\left(\frac{Q+\alpha-2p}{p}+\epsilon\right)^p\left(\frac{1}{Q+\alpha-p}+\frac{1}{\epsilon p}\right)\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Sonuç olarak, $\epsilon \longrightarrow 0$ iken limit alındığında,

$$\begin{aligned}\frac{\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha+p}}{r^p}\left|\Delta_{\mathbb{H}^n} u_\epsilon\right|^p d\xi}{\int_{\mathbb{H}^n} \rho^{\alpha-p}\left|\nabla_{\mathbb{H}^n} u_\epsilon\right|^p d\xi} &= \frac{(Q-1)^p}{1+\frac{Q+\alpha-p}{\epsilon p}} + \frac{\left(\frac{Qp-Q-\alpha}{p}+\epsilon\right)^p}{\frac{\epsilon p}{Q+\alpha-p}+1}\\ &\longrightarrow \left(\frac{Qp-Q-\alpha}{p}\right)^p\end{aligned}$$

en iyi sabiti bulunur. ■

Aşağıdaki ikinci mertebeden Heisenberg-Pauli-Weyl eşitsizliğinin ispatındaki temel dayanak nokta (5.10) Rellich-II eşitsizliğidir.

Teorem 5.4 Her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \setminus \{0\})$ fonksiyonu için

$$\left(\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^2}{r^2} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^2 d\xi\right)\left(\int_{\mathbb{H}^n} \rho^2 r^2 u^2 d\xi\right) \geq \frac{Q^4}{16}\left(\int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^2}{\rho^2} u^2 d\xi\right)^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt. $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \setminus \{0\})$ olsun. $\Delta_{\mathbb{H}^n}\rho^2 = 2Q\frac{r^2}{\rho^2}$ eşitliği u^2 fonksiyonu ile çarpılıp, elde edilen sonuç $\mathbb{H}^n$ üzerinde integre edilirse

$$\int_{\mathbb{H}^n} \left(\Delta_{\mathbb{H}^n}\rho^2\right) u^2 d\xi = 2Q \int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^2}{\rho^2} u^2 d\xi$$

sonucu bulunur. Kısmi integrasyon ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği yardımı ile

$$\left(\int_{\mathbb{H}^n} \rho^2 r^2 u^2 d\xi\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{H}^n} \frac{|\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2}{\rho^2} d\xi\right)^{1/2} \geq \frac{Q}{2} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^2}{\rho^2} u^2 d\xi$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe (5.10) Rellich-II eşitsizliğinin $p = 2$ hali uygulanırsa

$$\left(\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^2}{r^2} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^2 d\xi\right)\left(\int_{\mathbb{H}^n} \rho^2 r^2 u^2 d\xi\right) \geq \frac{Q^4}{16}\left(\int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^2}{\rho^2} u^2 d\xi\right)^2$$

ilişkisine ulaşılır. ■

(5.10) L^p Rellich-II eşitsizliğinin ispatında kullanılan teknik ile ağırlıklı L^p Rellich-Hardy-Poincaré eşitsizliği olarak adlandırdığımız aşağıdaki eşitsizliğin ispatı yapılacaktır.

Teorem 5.5 $Q + \alpha > 1$, $Q > p > 1$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \setminus \{0\})$ için

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha p + p}}{r^p} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \geq (Q + \alpha - 1)^{p-1} (2Q + \alpha - p - 1) \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha p}}{r^p} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho|^p d\xi$$

eşitsizliği mevcuttur.

Kanıt. $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \setminus \{0\})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun ve

$$v := \rho^\alpha \nabla_{\mathbb{H}^n}\rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} u \tag{5.15}$$

fonksiyonu tanımlansın. (3.15) formülü ve gerekli türev alma işlemleri sonucu

$$\nabla_{\mathbb{H}^n} v = \rho^\alpha \Delta_{\mathbb{H}^n} u \nabla_{\mathbb{H}^n}\rho + (Q + \alpha - 1)\rho^{\alpha - 3} r^2 \nabla_{\mathbb{H}^n} u \tag{5.16}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikten

$$\rho^{\alpha}\Delta_{\mathbb{H}^n}u=\frac{\rho^2}{r^2}\nabla_{\mathbb{H}^n}v\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho-(Q+\alpha-1)\,\rho^{\alpha-1}\nabla_{\mathbb{H}^n}u\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho$$

sonucu elde edilir. Daha sonra,

$$|\xi+\eta|^p\geq|\xi|^p+p\,|\xi|^{p-2}\,\xi\cdot\eta,\quad p>1$$

şeklindeki vektör eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}\rho^{\alpha p}\,|\Delta_{\mathbb{H}^n}u|^p&=\left|-(Q+\alpha-1)\,\rho^{\alpha-1}\nabla_{\mathbb{H}^n}u\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho+\frac{\rho^2}{r^2}\nabla_{\mathbb{H}^n}v\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\right|^p\\&\geq(Q+\alpha-1)^p\,\rho^{\alpha p-p}\,|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho|^p\\&\quad-p\,(Q+\alpha-1)^{p-1}\,\rho^{(\alpha-1)(p-1)}\,|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho|^{p-2}\,\nabla_{\mathbb{H}^n}u\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}v\end{aligned}\tag{5.17}$$

eşitsizliği bulunur. Diğer yandan, (5.15) eşitliğinden

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho|^{p-2}\,\nabla_{\mathbb{H}^n}u\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}v=\frac{\rho^{(1-p)\alpha+2}}{pr^2}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}|v|^p\tag{5.18}$$

sonucu çıkarılır. (5.17) ve (5.18) ifadeleri birleştirildiğinde

$$\begin{aligned}\frac{\rho^{\alpha p+p}}{r^p}\,|\Delta_{\mathbb{H}^n}u|^p\geq&(Q+\alpha-1)^p\,\frac{\rho^{\alpha p}}{r^p}\,|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho|^p\\&-(Q+\alpha-1)^{p-1}\,\frac{\rho^3}{r^{p+2}}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}|v|^p\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağındaki son ifade için kısmi integrasyon uygulandığında

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}^n}\frac{\rho^{\alpha p+p}}{r^p}\,|\Delta_{\mathbb{H}^n}u|^p\,d\xi\geq&(Q+\alpha-1)^p\int_{\mathbb{H}^n}\frac{\rho^{\alpha p}}{r^p}\,|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho|^p\,d\xi\\&+(Q+\alpha-1)^{p-1}\int_{\mathbb{H}^n}\nabla_{\mathbb{H}^n}\cdot\left(\frac{\rho^3}{r^{p+2}}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\right)|v|^p\,d\xi\end{aligned}$$

olur. (3.13) , (3.15) ve (3.16) özdeşlikleri dikkate alınarak gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbb{H}^n}\cdot\left(\frac{\rho^3}{r^{p+2}}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\right)&=3\frac{\rho^2}{r^{p+2}}\,|\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho|^2-(p+2)\,\frac{\rho^3}{r^{p+3}}\nabla_{\mathbb{H}^n}r\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho+\frac{\rho^3}{r^{p+2}}\Delta_{\mathbb{H}^n}\rho\\&=\frac{3}{r^p}-\frac{p+2}{r^p}+\frac{Q-1}{r^p}\\&=\frac{Q-p}{r^p}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylelikle,

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha p+p}}{r^p} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi \geq (Q+\alpha-1)^p \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha p}}{r^p} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho|^p \, d\xi$$
$$+ (Q+\alpha-1)^{p-1} (Q-p) \int_{\mathbb{H}^n} \frac{|v|^p}{r^p} d\xi$$

olduğu görülür. Yukarıdaki integral ifadesinde $v = \rho^{\alpha} \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} u$ eşitliği göz önünde bulundurulursa

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha p+p}}{r^p} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi \geq (Q+\alpha-1)^{p-1} (2Q+\alpha-p-1) \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha p}}{r^p} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho|^p \, d\xi$$

sonucuna ulaşılır. ■

6 İKİ-AĞIRLIKLI GELİŞTİRİLMİŞ HARDY VE RELLİCH TİPİ EŞİTSİZLİKLER

6.1 Giriş

Öklid uzayındaki klasik Hardy ve klasik Rellich eşitsizliklerinin, sırasıyla

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{(n-2)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{|x|^2} dx, \quad \forall u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n), \quad n > 2$$

ve

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx \geq \frac{n^2 (n-4)^2}{16} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{|x|^4} dx, \quad \forall u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \quad n > 4$$

şeklinde oldukları bilinmektedir. Bu klasik eşitsizliklerdeki $\frac{(n-2)^2}{4}$ ve $\frac{n^2(n-4)^2}{16}$ pozitif sabitleri en iyi sabitler olup, bu sabitlere $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n) - \{0\}$ sınıfından olan fonksiyonlar ile ulaşılamamaktadır. Bundan dolayı, bu eşitsizliklerin sağına pozitif kalan terimler ekleyerek bu eşitsizlikleri geliştirmek çok doğal bir istek olarak karşımıza çıkmaktadır. Brezis ve Vázquez (1997) ikilisinin bu doğrultuda yapmış olduğu çalışma, geliştirilmiş Hardy ve Rellich eşitsizliklerinin araştırılmasındaki önemli bir başlangıç noktası olarak kabul edilebilir. Bu çalışmadan sonra, gerek Öklid uzayında gerekse de Heisenberg grubunda geliştirilmiş Hardy ve Rellich eşitsizliklerini ele alan çeşitli araştırmalar yapılmış ve yapılmaya da devam edilmektedir. Örneğin, $R > \sup_{\Omega} \rho$ olmak üzere, Heisenberg grubundaki düzgün sınırlı bir Ω bölgesinde

$$\int_{\Omega} \rho^{\alpha} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 d\xi \geq \frac{(Q+\alpha-2)^2}{4} \int_{\Omega} \rho^{\alpha-4} r^2 u^2 d\xi + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{\rho^{\alpha-4} r^2}{\left(\log \frac{R}{\rho}\right)^2} u^2 d\xi \tag{6.1}$$

geliştirilmiş L^2 Hardy eşitsizliğinin $\alpha \in \mathbb{R}$, $Q + \alpha - 2 > 0$ koşulu ile,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{\rho^{\alpha+2}}{r^2} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^2 d\xi \geq& \frac{(Q+\alpha-4)^2 (Q-\alpha)^2}{16} \int_{\Omega} \rho^{\alpha-6} r^2 u^2 d\xi \\ &+ \frac{(Q+\alpha-4)(Q-\alpha)}{8} \int_{\Omega} \frac{\rho^{\alpha-6} r^2}{\left(\log \frac{R}{\rho}\right)^2} u^2 d\xi\end{aligned} \tag{6.2}$$

geliştirilmiş L^2 Rellich eşitsizliğinin ise $Q > \alpha > 4 - Q$ koşulu ile, her $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ fonksiyonu için geçerli olduğu gösterilmiştir (Kömbe, 2010).

Tezin bu bölümünde, $\mathbb{H}^n$ içindeki düzgün sınırlı bir Ω bölgesinde geliştirilmiş iki-ağırlıklı L^p Hardy ve L^p Rellich tipi eşitsizlikler üzerine bazı yeni genel sonuçlar elde edilecektir. Elde edilen bu sonuçlar özel durumlarda yukarıdaki (6.1) ve (6.2) eşitsizliklerini de ihtiva etmektedir. Bu tipten eşitsizlikler elde edilirken kullanılacak olan en temel araç bazı doğrusal olmayan kısmi diferansiyel eşitsizliklerin varlığı olacaktır. Tezin uygulama kısımlarında bu diferansiyel eşitsizliklerin çözümlerinden yola çıkılarak; üstel, logaritmik ve radyal tipli çok çeşitli ağırlık fonksiyonlarına sahip kalan terimli L^p Hardy ve L^p Rellich eşitsizliklerine örnekler verilecektir.

6.2 İki-Ağırlıklı Geliştirilmiş Hardy Tipi Bir Eşitsizlik ve Bu Eşitsizliğin Bazı Uygulamaları

Elde edilen aşağıdaki sonuç, geliştirilmiş iki-ağırlıklı L^p Hardy eşitsizliği ile doğrusal olmayan özel bir kısmi diferansiyel eşitsizliğin arasındaki ilişkiyi göstermesi açısından önemlidir.

Teorem 6.1 $Q+\alpha>p\geq 2$ ve $\alpha\in\mathbb{R}$ olsun. $\Omega\subset\mathbb{H}^n$ düzgün sınırlı bir bölge olmak üzere, $0\leq a\in C^1(\Omega)$ ve $0<\vartheta\in C^\infty(\Omega)$ fonksiyonları

$$-\nabla_{\mathbb{H}^n}\cdot\left(a\rho^{p-Q}\frac{|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^{p-2}}{\vartheta^{p-2}}\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right)\geq 0$$

doğrusal olmayan kısmi diferansiyel eşitsizliğini hemen hemen her $\xi\in\Omega$ için sağlasın. O halde, her $u\in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}\int_\Omega a\rho^\alpha|\nabla_{\mathbb{H}^n}u|^p d\xi \geq &\left(\frac{Q+\alpha-p}{p}\right)^p\int_\Omega a\rho^{\alpha-2p}r^p\,|u|^p\,d\xi\\ &+\left(\frac{Q+\alpha-p}{p}\right)^{p-1}\int_\Omega \rho^{\alpha-2p+3}r^{p-2}\left(\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}a\right)|u|^p\,d\xi\\ &+\frac{c_p}{p^p}\int_\Omega a\rho^\alpha\frac{|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^p}{\vartheta^p}\,|u|^p\,d\xi \end{aligned}\tag{6.3}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği bir $c_p=c(p)>0$ sabiti vardır.

Kanıt. $u\in C_0^\infty(\Omega)$ olsun ve $\gamma<0$ için $\psi:=\rho^{-\gamma}u$ fonksiyonu tanımlansın. Basit bir hesaplama ile

$$\nabla_{\mathbb{H}^n}(\rho^\gamma\psi)=\gamma\rho^{\gamma-1}\psi\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho+\rho^\gamma\nabla_{\mathbb{H}^n}\psi \tag{6.4}$$

olduğu görülür. (2.3) ile verilen vektör eşitsizliği ve (3.13) özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}|\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p &= |\gamma\rho^{\gamma-1}\psi\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho + \rho^{\gamma}\nabla_{\mathbb{H}^n}\psi|^p \\ &\geq |\gamma|^p \rho^{p(\gamma-2)} r^p |\psi|^p + c_p\rho^{p\gamma}|\nabla_{\mathbb{H}^n}\psi|^p \\ &\quad + \gamma|\gamma|^{p-2}\rho^{p(\gamma-2)+3} r^{p-2}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\left(|\psi|^p\right) \end{aligned} \tag{6.5}$$

sonucuna ulaşılır. (6.5) eşitsizliğinin her iki tarafı $a\rho^{\alpha}$ ile çarpıldıktan sonra, elde edilen eşitsizliğin sağındaki en son ifade için Ω üzerinde kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} a\rho^{\alpha}|\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \geq |\gamma|^p &\int_{\Omega} a\rho^{\alpha+p(\gamma-2)} r^p |\psi|^p d\xi \\ &- \gamma|\gamma|^{p-2}\int_{\Omega}\nabla_{\mathbb{H}^n}\cdot\left(a\rho^{\alpha+p(\gamma-2)+3} r^{p-2}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\right)|\psi|^p d\xi \\ &+ c_p\int_{\Omega} a\rho^{\alpha+p\gamma}|\nabla_{\mathbb{H}^n}\psi|^p d\xi \end{aligned} \tag{6.6}$$

olur. (3.13), (3.15) ve (3.16) özdeşlikleri kullanılarak gerekli türev işlemleri alınırsa

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbb{H}^n}\cdot\left(a\rho^{\alpha+p(\gamma-2)+3} r^{p-2}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\right) &= (Q+\alpha+\gamma p-p)\, a\rho^{\alpha+p(\gamma-2)} r^p \\ &\quad + \rho^{\alpha+p(\gamma-2)+3} r^{p-2}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n} a \end{aligned} \tag{6.7}$$

eşitliği rahatlıkla elde edilebilir. (6.7) eşitliği (6.6) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$f(Q,\alpha,p;\gamma) = |\gamma|^p - \gamma|\gamma|^{p-2}(Q+\alpha+\gamma p-p)$$

olmak üzere, şu sonuca ulaşılır:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} a\rho^{\alpha}|\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \geq f(Q,\alpha,p;\gamma) &\int_{\Omega} a\rho^{\alpha+p(\gamma-2)} r^p |\psi|^p d\xi \\ &- \gamma|\gamma|^{p-2}\int_{\Omega}\rho^{\alpha+p(\gamma-2)+3} r^{p-2}\left(\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n} a\right)|\psi|^p d\xi \\ &+ c_p\int_{\Omega} a\rho^{\alpha+p\gamma}|\nabla_{\mathbb{H}^n}\psi|^p d\xi. \end{aligned} \tag{6.8}$$

$\gamma = \frac{p-\alpha-Q}{p} < 0$ özel seçimi ile (6.8) eşitsizliği

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} a\rho^{\alpha}|\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \geq \left(\frac{Q+\alpha-p}{p}\right)^p &\int_{\Omega} a\rho^{-p-Q} r^p |\psi|^p d\xi \\ &+ \left(\frac{Q+\alpha-p}{p}\right)^{p-1}\int_{\Omega}\rho^{3-p-Q} r^{p-2}\left(\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n} a\right)|\psi|^p d\xi \\ &+ c_p\int_{\Omega} a\rho^{p-Q}|\nabla_{\mathbb{H}^n}\psi|^p d\xi \end{aligned} \tag{6.9}$$

halini alır. Şimdi, (6.9) eşitsizliğinin sağındaki $\int_\Omega a\rho^{p-Q}|\nabla_{\mathbb{H}^n}\psi|^p d\xi$ integral ifadesi dikkate alınsın. $0 < \vartheta \in C^\infty(\Omega)$ ve $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ olmak üzere, $\varphi := \vartheta^{-1/p}\psi$ fonksiyonu tanımlansın. (2.3) ile gösterilen vektör eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}|\nabla_{\mathbb{H}^n}\psi|^p &= \left|p^{-1}\vartheta^{\frac{1-p}{p}}\varphi\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta + \vartheta^{\frac{1}{p}}\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi\right|^p \\ &\geq p^{-p}\frac{|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^p}{\vartheta^{p-1}}|\varphi|^p + p^{1-p}\frac{|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^{p-2}}{\vartheta^{p-2}}\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\left(|\varphi|^p\right)\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu sonucun her iki yanı $a\rho^{p-Q}$ ile çarpılıp elde edilen eşitsizlik Ω üzerinde integre edilirse

$$\begin{aligned}\int_\Omega a\rho^{p-Q}|\nabla_{\mathbb{H}^n}\psi|^p d\xi \geq{}& p^{-p}\int_\Omega a\rho^{p-Q}\frac{|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^p}{\vartheta^{p-1}}|\varphi|^p d\xi \\ &+ p^{1-p}\int_\Omega a\rho^{p-Q}\frac{|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^{p-2}}{\vartheta^{p-2}}\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\left(|\varphi|^p\right)d\xi\end{aligned}$$

olur. Bu aşamada, ilk olarak kısmi integrasyon, daha sonra

$$-\nabla_{\mathbb{H}^n}\cdot\left(a\rho^{p-Q}\frac{|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^{p-2}}{\vartheta^{p-2}}\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) \geq 0$$

diferansiyel eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_\Omega a\rho^{p-Q}|\nabla_{\mathbb{H}^n}\psi|^p d\xi \geq p^{-p}\int_\Omega a\rho^{p-Q}\frac{|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^p}{\vartheta^{p-1}}|\varphi|^p d\xi \tag{6.10}$$

sonucu bulunur. (6.10) ile verilen eşitsizlikte $\varphi = \vartheta^{-1/p}\rho^{\frac{Q+\alpha-p}{p}}u$ dönüşümü yerine yazılırsa

$$\int_\Omega a\rho^{p-Q}|\nabla_{\mathbb{H}^n}\psi|^p d\xi \geq p^{-p}\int_\Omega a\rho^{\alpha}\frac{|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^p}{\vartheta^{p}}|u|^p d\xi \tag{6.11}$$

olur. Sonuç olarak, (6.9) ve (6.11) numaralı eşitsizlikler ve $\psi = \rho^{\frac{Q+\alpha-p}{p}}u$ eşitliği yardımı ile istenen (6.3) eşitsizliği elde edilir. ■

Uyarı 6.1 Teorem 6.1 ile elde edilen geliştirilmiş iki-ağırlıklı Hardy tipi eşitsizlik $1 < p < 2$ durumu için farklı bir kalan terimle geçerlidir. Bu sonuca, (2.2) vektör eşitsizliği yardımı ile ulaşılabilir.

Uyarı 6.2 Elde edilen (6.3) iki-ağırlıklı geliştirilmiş Hardy eşitsizliğinde; $a = 1$ ve $\vartheta = 1$ olarak alınırsa

$$\int_\Omega \rho^\alpha|\nabla_{\mathbb{H}^n}u|^p d\xi \geq \left(\frac{Q+\alpha-p}{p}\right)^p\int_\Omega \rho^{\alpha-2p}r^p|u|^p d\xi$$

ağırlıklı Hardy eşitsizliği, $a = r^\beta$ ve $\vartheta = 1$ olarak alınıp yukarıdaki ispattaki hesaplamalar bu durum göz önünde bulundurularak yapılırsa

$$\int_\Omega r^\beta \rho^\alpha |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \geq \left(\frac{Q+\alpha+\beta-p}{p}\right)^p \int_\Omega r^{\beta+p} \rho^{\alpha-2p} |u|^p \, d\xi \tag{6.12}$$

iki-ağırlıklı Hardy eşitsizliği bulunur. Dikkatli bakıldığında, (6.12) eşitsizliğinden (4.10) eşitsizliğinin elde edilebileceği görülür.

6.2.1 Teorem 6.1'in uygulamaları

Teorem 6.1'i önemli kılan nedenlerden biri, bu teoremin

$$-\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(a\rho^{p-Q} \frac{|\nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta|^{p-2}}{\vartheta^{p-2}} \nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta\right) \geq 0 \tag{6.13}$$

doğrusal olmayan kısmi diferansiyel eşitsizliği ile (6.3) geliştirilmiş iki-ağırlıklı L^p Hardy eşitsizliği arasında bir bağlantı kuruyor olması ve bu bağlantının da kalan terimli Hardy eşitsizlikleri türetmek için pratik bir imkan tanımasıdır. Şimdi bu durum, (6.13) diferansiyel eşitsizliğini sağlayan çeşitli a ve ϑ model fonksiyonları belirlenerek pek çok uygulama üzerinde gösterilecektir.

İlk olarak, $R > \sup_\Omega \rho$ olmak üzere, düzgün sınırlı Ω bölgesinde

$$a = 1, \qquad \vartheta = \log \frac{R}{\rho}$$

seçimi için Teorem 6.1 uygulanırsa şu sonuca ulaşılır:

Sonuç 6.1 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip sınırlı bir bölge, $Q+\alpha > p \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $c_p > 0$ ve $R > \sup_\Omega \rho$ olsun. O halde, her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\int_\Omega \rho^\alpha |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \geq \left(\frac{Q+\alpha-p}{p}\right)^p \int_\Omega \rho^{\alpha-2p} r^p \, |u|^p \, d\xi + \frac{c_p}{p^p} \int_\Omega \frac{\rho^{\alpha-2p} r^p}{\log^p\left(\frac{R}{\rho}\right)} |u|^p \, d\xi$$

eşitsizliği sağlanır.

Uyarı 6.3 $p = 2$ durumunda bu eşitsizlik (6.1) eşitsizliğine indirgenir.

Şimdi, $B_{\mathbb{H}^n}(0, R)$ Koranyi yuvarı üzerinde

$$a = 1, \qquad \vartheta = R - \rho$$

seçimi yapılsın. Bu seçim, (6.13) diferansiyel eşitsizliğini sağlar ve Teorem 6.1'in bir sonucu olarak aşağıdaki eşitsizliği verir.

Sonuç 6.2 $Q+\alpha > p \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $c_p > 0$ olsun. Bu durumda, her $u \in C_0^\infty(B_{\mathbb{H}^n}(0,R))$ için

$$\int_{B_{\mathbb{H}^n}(0,R)} \rho^\alpha |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \geq \left(\frac{Q+\alpha-p}{p}\right)^p \int_{B_{\mathbb{H}^n}(0,R)} \rho^{\alpha-2p} r^p |u|^p d\xi + \frac{c_p}{p^p} \int_{B_{\mathbb{H}^n}(0,R)} \frac{\rho^{\alpha-p} r^p}{(R-\rho)^p} |u|^p d\xi$$

eşitsizliği sağlanır.

Bunların yanısıra,

$$a = e^\rho, \qquad \vartheta = e^{-\rho}$$

fonksiyonları için Teorem 6.1 uygulandığında iki-ağırlıklı geliştirilmiş L^p Hardy tipi bir eşitsizlik bulunur.

Sonuç 6.3 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip sınırlı bir bölge, $Q+\alpha > p \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $c_p > 0$ olsun. O halde, her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\int_\Omega e^\rho \rho^\alpha |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \geq \left(\frac{Q+\alpha-p}{p}\right)^p \int_\Omega e^\rho \rho^{\alpha-2p} r^p |u|^p d\xi + \left(\frac{Q+\alpha-p}{p}\right)^{p-1} \int_\Omega e^\rho \rho^{\alpha-2p+1} r^p |u|^p d\xi + \frac{c_p}{p^p} \int_\Omega e^\rho \rho^{\alpha-p} r^p |u|^p d\xi$$

eşitsizliği mevcuttur.

Son olarak, $R > e \sup_\Omega \rho$ olmak üzere, düzgün sınırlı bir Ω bölgesinde

$$a = 1, \qquad \vartheta = \log(\log \frac{R}{\rho})$$

seçimi Teorem 6.1'deki istenen koşulları sağlar ve böylelikle logaritmik kalan terimli şu eşitsizliği verir:

Sonuç 6.4 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip sınırlı bir bölge, $Q+\alpha > p \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $c_p > 0$ ve $R > e \sup_\Omega \rho$ olsun. O halde, her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\int_\Omega \rho^\alpha |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p d\xi \geq \left(\frac{Q+\alpha-p}{p}\right)^p \int_\Omega \rho^{\alpha-2p} r^p \, |u|^p \, d\xi$$
$$+ \frac{c_p}{p^p} \int_\Omega \frac{\rho^{\alpha-2p} r^p}{\left(\log \frac{R}{\rho} \log(\log \frac{R}{\rho})\right)^p} \, |u|^p \, d\xi$$

eşitsizliği geçerlidir.

6.3 İki-Ağırlıklı Geliştirilmiş Rellich Tipi Bir Eşitsizlik ve Bu Eşitsizliğin Bazı Uygulamaları

Bu alt bölümde ilk olarak iki-ağırlıklı geliştirilmiş L^p Rellich eşitsizliği elde edilecektir. Bu eşitsizliğin elde edilmesinde (6.3) iki-ağırlıklı geliştirilmiş L^p Hardy eşitsizliğinin rolü önemlidir. Daha sonra,

$$-\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot (a\rho^{2-Q} \nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta) \geq 0$$

diferansiyel eşitsizliğini sağlayan a ve ϑ fonksiyonlarından yola çıkılarak, çeşitli ağırlık fonksiyonlarına sahip geliştirilmiş L^p Rellich eşitsizliklerine örnekler verilecektir.

Heisenberg grubundaki iki-ağırlıklı geliştirilmiş L^p Rellich eşitsizliğinin ispatı aşağıdaki gibidir.

Teorem 6.2 $\alpha \in \mathbb{R}$, $2 \leq p < \infty$ ve $Q-2 > |\alpha|$ olsun. Düzgün sınırlı bir $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ bölgesinde $0 \leq a \in C^2(\Omega)$ ve $0 < \vartheta \in C^\infty(\Omega)$ fonksiyonları $-\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot (a\rho^{2-Q} \nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta) \geq 0$ doğrusal olmayan kısmi diferansiyel eşitsizliğini hemen hemen her $\xi \in \Omega$ için sağlasın. Bu takdirde, her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}\int_\Omega a \frac{\rho^{\alpha+4p-4}}{r^{2p-2}} \, |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi \geq{}& c^p \int_\Omega a\rho^{\alpha-4} r^2 \, |u|^p \, d\xi \\ &+ (\frac{p-1}{p}) c^{p-1} \int_\Omega a\rho^\alpha \frac{|\nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta|^2}{\vartheta^2} \, |u|^p \, d\xi \\ &+ \tfrac{2(p-1)(Q+\alpha-2)}{p} c^{p-1} \int_\Omega \rho^{\alpha-1} \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} a \, |u|^p \, d\xi \\ &+ 2pc^{p-1} \int_\Omega \rho^\alpha \nabla_{\mathbb{H}^n} a \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} u \, |u|^{p-1} \, d\xi \\ &+ c^{p-1} \int_\Omega \rho^\alpha \Delta_{\mathbb{H}^n} a \, |u|^p \, d\xi \end{aligned} \tag{6.14}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada, $c = c(Q, p, \alpha) := (\frac{Q+\alpha-2}{p})(\frac{(Q-2)(p-1)-\alpha}{p})$ şeklindeki pozitif bir sabittir.

Kanıt. Basit bir hesaplama ile

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} \rho^\alpha = \alpha(Q + \alpha - 2)\rho^{\alpha-4} r^2$$

olduğu görülür. Bu eşitliğin iki yanı $a\,|u|^p$ fonksiyonu ile çarpıldıktan sonra, elde edilen sonuca Ω bölgesinde iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_\Omega \rho^\alpha \Delta_{\mathbb{H}^n} \left(a\,|u|^p\right) d\xi = \alpha(Q + \alpha - 2) \int_\Omega a\rho^{\alpha-4} r^2\, |u|^p\, d\xi \tag{6.15}$$

eşitliği bulunur. Standart türev alma işlemleriyle

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbb{H}^n} \left(a\,|u|^p\right) = {} & |u|^p\, \Delta_{\mathbb{H}^n} a + 2p\,|u|^{p-1}\, \nabla_{\mathbb{H}^n} u \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} a \\ & + p\,(p-1)\, a\, |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2\, |u|^{p-2} + pa\,|u|^{p-1}\, \Delta_{\mathbb{H}^n} u\end{aligned}$$

eşitliği kolaylıkla elde edilir. Bu eşitlik, (6.15) denkleminde yerine yazıldıktan sonra gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}& \int_\Omega a\rho^\alpha\, |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2\, |u|^{p-2}\, d\xi - \frac{\alpha(Q+\alpha-2)}{p\,(p-1)} \int_\Omega a\rho^{\alpha-4} r^2\, |u|^p\, d\xi \\ = & -\frac{1}{p-1} \int_\Omega a\rho^\alpha\, |u|^{p-1}\, \Delta_{\mathbb{H}^n} u d\xi - \frac{2}{p-1} \int_\Omega \rho^\alpha\, |u|^{p-1}\, \nabla_{\mathbb{H}^n} a \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} u d\xi \\ & - \frac{1}{p\,(p-1)} \int_\Omega \rho^\alpha\, |u|^p\, \Delta_{\mathbb{H}^n} a d\xi\end{aligned} \tag{6.16}$$

sonucuna ulaşılır. (6.16) eşitliğinin sağındaki

$$I_1 := -\tfrac{1}{p-1} \int_\Omega a\rho^\alpha \Delta_{\mathbb{H}^n} u\, |u|^{p-1}\, d\xi$$

integral ifadesine sırasıyla Hölder ve Young eşitsizlikleri uygulanırsa, her $\epsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}I_1 & \leq \frac{1}{p-1} \left(\int_\Omega a \frac{\rho^{\alpha+4p-4}}{r^{2p-2}}\, |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p\, d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega a\rho^{\alpha-4} r^2\, |u|^p\, d\xi \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ & \leq \frac{\epsilon^p}{p\,(p-1)} \int_\Omega a \frac{\rho^{\alpha+4p-4}}{r^{2p-2}}\, |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p\, d\xi + \frac{\epsilon^{\frac{-p}{p-1}}}{p} \int_\Omega a\rho^{\alpha-4} r^2\, |u|^p\, d\xi\end{aligned} \tag{6.17}$$

olduğu görülür. Şimdi,

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2\, |u|^{p-2} = \frac{4}{p^2} \left| \nabla_{\mathbb{H}^n} \left(u^{p/2}\right) \right|^2$$

özdeşliği göz önünde bulundurularak, (6.16) eşitliğinin solunda bulunan

$$I_2 := \int_\Omega a\rho^\alpha \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\right|^2 |u|^{p-2}\, d\xi$$

integral ifadesine (6.3) iki-ağırlıklı geliştirilmiş L^p Hardy tipi eşitsizliği $p = 2$ durumu için uygulandığında

$$\begin{aligned} I_2 = \frac{4}{p^2}\int_\Omega a\rho^\alpha \left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\left(u^{p/2}\right)\right|^2 d\xi \geq \left(\frac{Q+\alpha-2}{p}\right)^2 \int_\Omega a\rho^{\alpha-4} r^2 |u|^p\, d\xi \\ + \frac{2\left(Q+\alpha-2\right)}{p^2}\int_\Omega \rho^{\alpha-1}\nabla_{\mathbb{H}^n} a\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\, |u|^p\, d\xi \\ + \frac{1}{p^2}\int_\Omega a\rho^\alpha \frac{\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^2}{\vartheta^2}|u|^p\, d\xi \end{aligned} \tag{6.18}$$

sonucu elde edilir. (6.17) ve (6.18) eşitsizlikleri (6.16) ile verilen eşitlikte kullanıldıktan sonra gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$f(Q,p,\alpha;\epsilon) := \epsilon^{-p}\left[(\frac{p-1}{p})(Q+\alpha-2)^2 - \alpha\left(Q+\alpha-2\right) - (p-1)\,\epsilon^{\frac{-p}{p-1}}\right]$$

olmak üzere, her $\epsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \int_\Omega a\frac{\rho^{\alpha+4p-4}}{r^{2p-2}}\left|\Delta_{\mathbb{H}^n} u\right|^p d\xi \geq f(Q,p,\alpha;\epsilon)\int_\Omega a\rho^{\alpha-4}r^2|u|^p\, d\xi \\ + \frac{p-1}{p\epsilon^p}\int_\Omega a\rho^\alpha\frac{\left|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right|^2}{\vartheta^2}|u|^p\, d\xi \\ + \frac{2p}{\epsilon^p}\int_\Omega \rho^\alpha\nabla_{\mathbb{H}^n} a\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n} u\, |u|^{p-1}\, d\xi \\ + \frac{2\left(p-1\right)\left(Q+\alpha-2\right)}{p\epsilon^p}\int_\Omega \rho^{\alpha-1}\nabla_{\mathbb{H}^n}\rho\cdot\nabla_{\mathbb{H}^n} a\, |u|^p\, d\xi \\ + \frac{1}{\epsilon^p}\int_\Omega \rho^\alpha\Delta_{\mathbb{H}^n} a\, |u|^p\, d\xi \end{aligned}$$

olduğu görülür. $c = c\left(Q,p,\alpha\right) := (\frac{Q+\alpha-2}{p})(\frac{(Q-2)(p-1)-\alpha}{p})$ olsun. $2 \leq p < \infty$ ve $Q-2 > |\alpha|$ kabullerinden $c\left(Q,p,\alpha\right) > 0$ olduğu görülür ve dolayısıyla yukarıdaki eşitsizlikte $\epsilon = c^{\frac{1-p}{p}}$ seçimi yapılabilir. Bu durumda, $f(Q,p,\alpha;\epsilon) = c^p$ olur ve istenen (6.14) iki-ağırlıklı geliştirilmiş L^p Rellich eşitsizliği elde edilir. ■

Uyarı 6.4 Teorem 6.2 ile elde edilen iki-ağırlıklı geliştirilmiş L^p Rellich eşitsizliği, $1 < p < 2$ olması durumunda farklı kalan terimlerle geçerlidir. Bu sonuca, (2.2) vektör eşitsizliği kullanılarak ulaşılabilir.

Uyarı 6.5 Elde edilen (6.14) iki-ağırlıklı geliştirilmiş Rellich eşitsizliğinde $a = 1$ ve $\vartheta = 1$ olarak alındığında, bu eşitsizlik

$$\int_\Omega \frac{\rho^{\alpha+4p-4}}{r^{2p-2}} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi \geq \left(\frac{Q+\alpha-2}{p} \right)^p \left(\frac{(Q-2)(p-1)-\alpha}{p} \right)^p \int_\Omega \frac{r^2}{\rho^{4-\alpha}} |u|^p \, d\xi$$

ağırlıklı L^p Rellich eşitsizliğine indirgenir.

6.3.1 Teorem 6.2'nin uygulamaları

Şimdi, Teorem 6.2'deki hipotezleri sağlayan özel a ve ϑ ağırlık fonksiyonları belirlenerek negatif olmayan farklı kalan terimlere sahip ağırlıklı L^p Rellich eşitsizliklerinin rahatlıkla türetilebileceği gösterilecektir. Örneğin, $R > \sup_\Omega \rho$ olmak üzere, düzgün sınırlı Ω bölgesinde

$$a = 1, \qquad \vartheta = \log \frac{R}{\rho}$$

fonksiyon çifti Teorem 6.2'deki istenen koşulları sağlar ve logaritmik kalan terimli aşağıdaki eşitsizliğin elde edilmesine olanak tanır.

Sonuç 6.5 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip sınırlı bir bölge, $Q - 2 > |\alpha|$ ve $R > \sup_\Omega \rho$ olsun. Bu takdirde, her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu ve $2 \leq p < \infty$ için

$$\int_\Omega \frac{\rho^{\alpha+4p-4}}{r^{2p-2}} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi \geq c^p \int_\Omega \rho^{\alpha-4} r^2 |u|^p d\xi + (\frac{p-1}{p}) c^{p-1} \int_\Omega \frac{\rho^{\alpha-4} r^2}{\left(\log \frac{R}{\rho}\right)^2} |u|^p d\xi$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $c = c\,(Q, p, \alpha) = (\frac{Q+\alpha-2}{p})(\frac{(Q-2)(p-1)-\alpha}{p})$ şeklinde verilen pozitif bir sabittir.

Uyarı 6.6 Bu eşitsizlikte $p = 2$ için α yerine $\alpha - 2$ alınırsa, bu eşitsizlik (6.2) eşitsizliğine indirgenir.

Diğer yandan,

$$a = 1, \qquad \vartheta = \log(\log \frac{R}{\rho}), \quad R > e \sup_\Omega \rho$$

seçimi farklı bir logaritmik kalan terime sahip ağırlıklı L^p Rellich eşitsizliğine ulaşılmasını sağlar.

Sonuç 6.6 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip sınırlı bir bölge, $Q-2 > |\alpha|$ ve $R > e \sup_\Omega \rho$ olsun. O halde, her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu ve $2 \le p < \infty$ için

$$\int_\Omega \frac{\rho^{\alpha+4p-4}}{r^{2p-2}} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi \ge c^p \int_\Omega \rho^{\alpha-4} r^2 |u|^p d\xi \\ + (\frac{p-1}{p}) c^{p-1} \int_\Omega \frac{\rho^{\alpha-4} r^2}{\left(\log \frac{R}{\rho}\right)^2 \left(\log(\log \frac{R}{\rho})\right)^2} |u|^p d\xi$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $c = c\,(Q,p,\alpha) = (\frac{Q+\alpha-2}{p})(\frac{(Q-2)(p-1)-\alpha}{p})$ şeklinde verilen pozitif bir sabittir.

Bunların yanında,

$$a = e^\rho, \qquad \vartheta = e^{-\rho}$$

fonksiyon çifti için Teorem 6.2 uygulandığında iki-ağırlıklı geliştirilmiş L^p Rellich tipi şu eşitsizlik bulunur.

Sonuç 6.7 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip sınırlı bir bölge ve $Q-2 > |\alpha|$ olsun. O halde, her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu ve $2 \le p < \infty$ için

$$\int_\Omega e^\rho \frac{\rho^{\alpha+4p-4}}{r^{2p-2}} |\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p \, d\xi \ge c^p \int_\Omega e^\rho \rho^{\alpha-4} r^2 \, |u|^p \, d\xi \\ + (\frac{2p-1}{p}) c^{p-1} \int_\Omega e^\rho \rho^{\alpha-2} r^2 \, |u|^p \, d\xi \\ + (\tfrac{2(p-1)(Q+\alpha-2)+p(Q-1)}{p}) c^{p-1} \int_\Omega e^\rho \rho^{\alpha-3} r^2 \, |u|^p \, d\xi \\ + 2pc^{p-1} \int_\Omega e^\rho \rho^{\alpha-2} r^2 \, |u|^{p-1} \, d\xi$$

eşitsizliği mevcuttur. Burada $c = c\,(Q,p,\alpha) = (\frac{Q+\alpha-2}{p})(\frac{(Q-2)(p-1)-\alpha}{p})$ şeklinde verilen pozitif bir sabittir.

Son olarak, Teorem 6.2'nin diğer bir sonucuna $B_{\mathbb{H}^n}(0,R)$ Koranyi yuvarı üzerindeki

$$a = 1, \qquad \vartheta = R - \rho$$

seçimi ile rahatlıkla ulaşılır.

Sonuç 6.8 $Q-2>|\alpha|$ ve $2\leq p<\infty$ olsun. Bu takdirde, her $u\in C_0^\infty(B_{\mathbb{H}^n}(0,R))$ fonksiyonu için

$$\int_{B_{\mathbb{H}^n}(0,R)}\frac{\rho^{\alpha+4p-4}}{r^{2p-2}}\left|\Delta_{\mathbb{H}^n}u\right|^p d\xi \geq c^p\int_{B_{\mathbb{H}^n}(0,R)}\rho^{\alpha-4}r^2|u|^p d\xi$$
$$+(\frac{p-1}{p})c^{p-1}\int_{B_{\mathbb{H}^n}(0,R)}\frac{\rho^{\alpha-2}r^2}{(R-\rho)^2}|u|^p d\xi$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada $c=c\,(Q,p,\alpha)=(\frac{Q+\alpha-2}{p})(\frac{(Q-2)(p-1)-\alpha}{p})$ şeklinde verilen pozitif bir sabittir.

7 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada öncelikle,

$$\int_{\mathbb{H}^n} a\,|\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^p\,d\xi \geq \int_{\mathbb{H}^n} b\,|u|^p\,d\xi$$

genel ağırlıklı Hardy eşitsizliği ile

$$-\nabla_{\mathbb{H}^n}\cdot\left(a\,|\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^{p-2}\,\nabla_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) \geq b\vartheta^{p-1} \tag{7.1}$$

genel ağırlıklı $p-$alt-Laplace eşitsizliği arasında önemli bir ilişkinin olduğu gösterilmiştir. Bu ilişkinin bir sonucu olarak, (7.1) kısmi diferansiyel eşitsizliğini sağlayan uygun a ve ϑ fonksiyonları belirlenip, $\mathbb{H}^n$'de ve $\mathbb{H}^n$'nin bazı alt bölgelerindeki hem bilinen hem de yeni pek çok ağırlıklı Hardy ve Heisenberg-Pauli-Weyl eşitsizlikleri elde edilmiştir. Diğer yandan, elde edilen bu ağırlıklı Hardy eşitsizliklerinin ikinci mertebeden doğrusal olmayan bazı Dirichlet sınır değer problemlerinin pozitif çözümünün belirlenmesinde ne kadar etkin olabileceğini gösteren bir uygulama verilmiştir.

Benzer bir düşünce ile,

$$\int_{\mathbb{H}^n} a\,|\Delta_{\mathbb{H}^n} u|^p\,d\xi \geq \int_{\mathbb{H}^n} b\,|u|^p\,d\xi$$

genel ağırlıklı Rellich eşitsizliğinin varlığı için

$$\Delta_{\mathbb{H}^n}\left(a\,|\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta|^{p-2}\,\Delta_{\mathbb{H}^n}\vartheta\right) \geq b\vartheta^{p-1} \tag{7.2}$$

genel ağırlıklı $p-$biharmonik eşitsizliğinin varlığının bir yeter koşul olduğu ispatlanmıştır. Bu sonucun uygulaması olarak, hem bilinen hem de yeni çeşitli ağırlık fonksiyonlarına sahip Rellich eşitsizlikleri türetebilmek için yapılması gerekenin (7.2) diferansiyel eşitsizliğinin çözümlerini belirlemek olduğu birçok örnek üzerinde açıkça sergilenmiştir. Ayrıca, burada elde edilen ağırlıklı Rellich eşitsizlikleri yardımıyla, dördüncü mertebeden doğrusal olmayan bir Dirichlet sınır değer probleminin pozitif çözümünün ne zaman olmadığı hakkında bilgi sahibi olunabileceği bir uygulama üzerinde gösterilmiştir.

Daha sonra, ağırlıklı L^p Hardy ve ağırlıklı L^p Rellich eşitsizliklerini bir anlamda ilişkilendiren

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha+p}}{r^p} \left|\Delta_{\mathbb{H}^n} u\right|^p d\xi \geq \left(\frac{Qp-Q-\alpha}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^n} \rho^{\alpha-p} \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\right|^p d\xi$$

ağırlıklı L^p Rellich-II eşitsizliğinin, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $Qp > Q+\alpha > p > 1$ olmak üzere, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \backslash \{0\})$ fonksiyonu için geçerli olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, buradaki $\left(\frac{Qp-Q-\alpha}{p}\right)^p$ pozitif sabitinin en iyi sabit olduğu da gösterilmiştir. Bununla birlikte, bu eşitsizlik kullanılarak herhangi $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \backslash \{0\})$ fonksiyonu için

$$\left(\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^2}{r^2} \left|\Delta_{\mathbb{H}^n} u\right|^2 d\xi\right) \left(\int_{\mathbb{H}^n} \rho^2 r^2 u^2 d\xi\right) \geq \frac{Q^4}{16} \left(\int_{\mathbb{H}^n} \frac{r^2}{\rho^2} u^2 d\xi\right)^2$$

ikinci mertebeden Heisenberg-Pauli-Weyl eşitsizliğinin geçerli olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, en iyi sabitli L^p Rellich-II eşitsizliğinin ispatında kullanılan yöntemle

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha p+p}}{r^p} \left|\Delta_{\mathbb{H}^n} u\right|^p d\xi \geq (Q+\alpha-1)^{p-1} (2Q+\alpha-p-1) \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\rho^{\alpha p}}{r^p} \left|\nabla_{\mathbb{H}^n} u \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} \rho\right|^p d\xi$$

Rellich-Hardy-Poincaré eşitsizliğinin, $\alpha \in \mathbb{R}$, $Q+\alpha > 1$ ve $Q > p > 1$ olmak üzere, herhangi $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \backslash \{0\})$ fonksiyonu için sağlandığı ispatlanmıştır.

Son olarak, $\mathbb{H}^n$ içindeki düzgün sınırlı bir Ω bölgesinde geliştirilmiş iki-ağırlıklı L^p Hardy ve L^p Rellich tipi eşitsizlikler üzerine bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bu tipten Hardy ve Rellich eşitsizliklerinin ispatındaki temel dayanak noktalar, sırasıyla

$$-\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(a\rho^{p-Q} \frac{\left|\nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta\right|^{p-2}}{\vartheta^{p-2}} \nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta\right) \geq 0$$

ve

$$-\nabla_{\mathbb{H}^n} \cdot \left(a\rho^{2-Q} \nabla_{\mathbb{H}^n} \vartheta\right) \geq 0$$

doğrusal olmayan kısmi diferansiyel eşitsizliklerinin varlığı olmuştur. Bu diferansiyel eşitsizlikleri sağlayan çeşitli a ve ϑ model fonksiyonları belirlenerek; $\mathbb{H}^n$'nin farklı bölgelerinde tanımlı üstel, logaritmik ve radyal tipli çok çeşitli ağırlık fonksiyonlarına sahip kalan terimli L^p Hardy ve L^p Rellich eşitsizliklerine örnekler verilmiştir.

Kısacası tezin geneli düşünüldüğünde, belli sınıftan olan fonksiyonlar için gerek ağırlıklı Hardy ve ağırlıklı Rellich tipi eşitsizlikler, gerekse de bu eşitsizliklerin geliştirilmiş halleri elde edilirken ihtiyaç duyulan birincil aracın bazı doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin veya kısmi diferansiyel eşitsizliklerin çözümlerinin olduğu görülmüştür. Bu ise, kısmi diferansiyel denklemler ile bir fonksiyonun kendisi ve türevlerini ihtiva eden integral eşitsizlikleri arasındaki doğal ilişkiyi gözler önüne serdiğinden dolayı elde edilen sonuçların önemini artırmaktadır.

KAYNAKLAR

Abdellaoui B., Colorado E., Peral I., 2005. Some improved Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 23(3), 327-345.

Adams R.A., 1975. Sobolev spaces, Academic Press, New York.

Adimurthi, Chaudhuri N., Ramaswamy M., 2002. An improved Hardy Sobolev inequality and its applications, Proceedings of the American Mathematical Society, 130(2), 489-505.

Adimurthi, Grossi M., Santra S., 2006. Optimal Hardy-Rellich inequalities, maximum principle and related eigenvalue problem, Journal of Functional Analysis, 240(1), 36-83.

Adimurthi, Sandeep K., 2002. Existence and non-existence of the first eigenvalue of the perturbed Hardy-Sobolev operator, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A Mathematics, 132(5), 1021-1043.

Adimurthi, Santra S., 2009. Generalized Hardy-Rellich inequalities in critical dimension and its applications, Communications in Contemporary Mathematics, 11(3), 367-394.

Adimurthi, Sekar A., 2006. Role of the fundamental solution in Hardy-Sobolev-type inequalities, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A Mathematics, 136(6), 1111-1130.

Ahmetolan S., Kombe I., 2016. Hardy and Rellich type inequalities with two weight functions, Mathematical Inequalities & Applications, 19(3), 937-948.

Allegretto W., 1979. Finiteness of lower spectra of a class of higher order elliptic operators, Pacific Journal of Mathematics, 83(2), 303-309.

Allegretto W., Huang Y.X., 1998. A Picone's identity for the $p-$Laplacian and applications, Nonlinear Analysis, 32(7), 819-830.

Alonso I.P., Vázquez J.L., 1995. On the stability or instability of the singular solutions with exponential reaction term, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 129(3), 201-224.

Azorero J.G., Alonso I.P., 1998. Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems, Journal of Differential Equations, 144(2), 441-476.

Balinksy A.A., Evans W.D., Lewis R.T., 2015. The analysis and geometry of Hardy's inequality, Springer, New York.

Baras P., Goldstein J.A., 1984. The heat equation with a singular potential, Transactions of the American Mathematical Society, 284(1), 121-139.

Barbatis G., 2006. Improved Rellich inequalities for the polyharmonic operator, Indiana University Mathematics Journal, 55(4), 1401-1422.

Barbatis G., 2007. Best constants for higher-order Rellich inequalities in $L_p(\Omega)$, Mathematische Zeitschrift, 255(4), 877-896.

Barbatis G., Filippas S., Tertikas A., 2003a. Series expansion for L^p Hardy inequalities, Indiana University Mathematics Journal, 52(1), 171-190.

Barbatis G., Filippas S., Tertikas A., 2003b. Refined geometric L^p Hardy inequalities, Communications in Contemporary Mathematics, 5(6), 869-883.

Barbatis G., Filippas S., Tertikas A., 2004. A unified approach to improved L^p Hardy inequalities with best constants, Transactions of the American Mathematical Society, 356(6), 2169-2196.

Barbatis G., Tertikas A., 2006. On a class of Rellich inequalities, Journal of Computational and Applied Mathematics, 194(1), 156-172.

Bennett D.M., 1989. An extension of Rellich's inequality, Proceedings of the American Mathematical Society, 106(4), 987-993.

Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F., 2007. Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

Brezis H., Vázquez J. L., 1997. Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems, Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid, 10(2), 443-469.

Caldiroli P., Musina R., 2012. Rellich inequalities with weights, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 45(1-2), 147-164.

Calin O., Chang D., Greiner P., 2007. Geometric analysis on the Heisenberg group and its generalizations, American Mathematical Society, Cambridge.

Capogna L., Danielli D., Garofalo N., 1996. Capacitary estimates and the local behavior of solutions of nonlinear subelliptic equations, American Journal of Mathematics, 118(6), 1153-1196.

Capogna L., Danielli D., Pauls S.D., Tyson J.T., 2007. An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin.

Clarkson J.A., 1936. Uniformly convex spaces, Transactions of the American Mathematical Society, 40(3), 396-414.

Ciatti P., Ricci F., Sundari M., 2007. Heisenberg-Pauli-Weyl uncertainty inequalities and polynomial volume growth, Advances in Mathematics, 215(2), 616–625.

Costa D.G., 2009. On Hardy-Rellich type inequalities in $\mathbb{R}^N$, Applied Mathematics Letters, 22(6), 902-905.

Coulhon T., Müller D., Zienkiewicz J., 1996. About Riesz transforms on the Heisenberg groups, Mathematische Annalen, 305(2), 369-379.

Cowan C., 2010. Optimal Hardy inequalities for general elliptic operators with improvements, Communications on Pure and Applied Analysis, 9(1), 109-140.

Crespo J.A.A., Alonso I.P., 2000. Global behaviour of the Cauchy problem for some critical nonlinear parabolic equations, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 31(6), 1270-1294.

D'Ambrosio L., 2001. Critial degenerate inequalities on the Heisenberg group, Manuscripta Mathematica, 106(4), 519-536.

D'Ambrosio L., 2004. Some Hardy inequalities on the Heisenberg group, Differential Equations, 40(4), 552-564.

D'Ambrosio L., 2005. Hardy-type inequalities related to degenerate elliptic differential operators, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa Classe di Scienze Serie V, 4(3), 451-486.

Davies E.B., Hinz A.M., 1998. Explicit constants for Rellich inequalities in $L_p(\Omega)$, Mathematische Zeitschrift, 227(3), 511-523.

Detalla A., Horiuchi T., Ando H., 2012. Sharp remainder terms of the Rellich inequality and its application, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society Second Series, 35(2A), 519-528.

Devyver B., 2014. A spectral result for Hardy inequalities, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées Neuvième Série, 102(5), 813-853.

Devyver B., Fraas M., Pinchover Y., 2014. Optimal Hardy weight for second-order elliptic operator: An answer to a problem of Agmon, Journal of Functional Analysis, 266(7), 4422-4489.

Edmunds D.E., Evans W.D., 1987. Spectral theory and differential operators, Oxford University Press, Oxford.

Edmunds D.E., Triebel H., 1999. Sharp Sobolev embeddings and related Hardy inequalities: The critical case, Mathematische Nachrichten, 207(1), 79-92.

Evans L.C., 2002. Partial differential equations, American Mathematical Society, Rhode Island.

Fall M.M., Mahmoudi F., 2014. Weighted Hardy inequality with higher dimensional singularity on the boundary, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 50(3-4), 779-798.

Filippas S., Tertikas A., 2002. Optimizing improved Hardy inequalities, Journal of Functional Analysis, 192(1), 186-233.

Folland G.B., 1973. A fundamental solution for a subelliptic operator, Bulletin of the American Mathematical Society, 79, 373-376.

Folland G., Sitaram A., 1997. The uncertainty principle: A mathematical survey, The Journal of Fourier Analysis and Applications, 3(3), 207–238.

Folland G.B., Stein E.M., 1974. Estimates for the $\bar{\partial}_b$-complex and analysis on the Heisenberg group, Communications on Pure and Applied Mathematics, 27(4), 429-522.

Folland G.B., Stein E.M., 1982. Hardy spaces on homogeneous groups, Princeton University Press, Princeton.

Frank R., Seiringer R., 2008. Non-linear ground state representations and sharp Hardy inequalities, Journal of Functional Analysis, 255(12), 3407-3430.

Garofalo N., Lanconelli E., 1990. Frequency functions on the Heisenberg group, the uncertainty principle and unique continuation, Université de Grenoble Annales de l'Institut Fourier, 40(2), 313-356.

Gazzola F., Grunau H.C., Mitidieri E., 2004. Hardy inequalities with optimal constants and remainder terms, Transactions of the American Mathematical Society, 356(6), 2149-2168.

Ghoussoub N., Moradifam A., 2008. On the best possible remaining term in the Hardy inequality, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 105(37), 13746-13751.

Ghoussoub N., Moradifam A., 2011. Bessel potentials and optimal Hardy and Hardy-Rellich inequalities, Mathematische Annalen, 349(1), 1-57.

Ghoussoub N., Moradifam A., 2013. Functional inequalities: New perspectives and new applications, American Mathematical Society, Rhode Island.

Goldstein G.R., Goldstein J.A., Rhandi A., 2011. Weighted Hardy's inequality and the Kolmogorov equation perturbed by an inverse-square potential, Applicable Analysis, 91(11), 2057-2071.

Goldstein J.A., Kombe I., 2005. Nonlinear partial differential equations on the Heisenberg group, International Journal of Evolution Equations, 1(1), 1-22.

Goldstein J.A., Kombe I., Yener A., 2017. A unified approach to weighted Hardy type inequalities on Carnot groups, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series A, 37(4), 2009-2021.

Goldstein J.A., Zhang Q.S., 2001. On a degenerate heat equation with a singular potential, Journal of Functional Analysis, 186(2), 342-359.

Han Y., Niu P., 2003. Some Hardy type inequalities in the Heisenberg group, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 4(5), 1-5.

Hardy G.H., 1920. Note on a theorem of Hilbert, Mathematische Zeitschrift, 6(3), 314-317.

Hardy G.H., 1925. Notes on some points in the integral calculus, LX. An inequality between integrals, Messenger of Mathematics, 54, 150-156.

Hardy G.H., 1928. Notes on some points in the integral calculus, LXIV. Further inequalities between integrals, Messenger of Mathematics, 57, 12-16.

Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G., 1952. Inequalities, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge.

Hauer D., Rhandi A., 2013. A weighted Hardy inequality and nonexistence of positive solutions, Archiv der Mathematik, 100(3), 273-287.

Heisenberg W., 1927. Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik, Zeitschrift für Physik, 43(3), 172-198.

Jin Y., Han Y., 2010. Weighted Rellich inequality on H-type groups and nonisotropic Heisenberg groups, Journal of Inequalities and Applications, 1-17.

Jin Y., Shen S., 2011. Weighted Hardy and Rellich inequality on Carnot groups, Archiv der Mathematik, 96(3), 263-271.

Kennard E.H., 1927. Zur quantenmechanik einfacher bewegungstypen, Zeitschrift fur Physik, 44(4-5), 326.

Kombe I., 2006. Hardy, Rellich and uncertainty principle inequalities on Carnot groups, arXiv:math.FA/0611850.

Kombe I., 2010. Sharp weighted Rellich and uncertainty principle inequalities on Carnot groups, Communication in Applied Analysis, 14(2), 251-272.

Korányi A., Reimann H.M., 1985. Quasiconformal mappings on the Heisenberg group, Inventiones Mathematicae, 80(2), 309-338.

Krantz S.G., 2009. Explorations in harmonic analysis with applications to complex function theory and the Heisenberg group, Birkhäuser, Boston.

Kufner A., Maligranda L., Persson L.E., 2006. The prehistory of the Hardy inequality, The American Mathematical Monthly, 113(8), 715-732.

Kufner A., Persson L.E., 2003. Weighted inequalities of Hardy type, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, New Jersey.

Landau E., 1926. A note on a theorem concerning series of positive terms: Extract from a letter of Prof. E. Landau to Prof. I. Schur, Journal of the London Mathematical Society, 1(1), 38-39.

Leray J., 1933. Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique, Journal de Mathèmatiques Pures et Appliquèes, 12, 1-82.

Lian B., 2013. Some sharp Rellich type inequalities on nilpotent groups and application, Acta Mathematica Scientia Series B English Edition, 33(1), 59-74.

Lindqvist P., 1990. On the equation $div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$, Proceedings of the American Mathematical Society, 109(1), 157-164.

Maz'ya V.G., 1985. Sobolev spaces, Springer Verlag, Berlin.

Metafune G., Sobajima M., Motohiro S.C., 2015. Weighted Calderón-Zygmund and Rellich inequalities in L^p, Mathematische Annalen, 361(1-2), 313-366.

Moradifam A., 2012. Optimal weighted Hardy-Rellich inequalities on $H^2 \cap H_0^1$, Journal of the London Mathematical Society Second Series, 85(1), 22-40.

Musina R., 2014. Optimal Rellich-Sobolev constants and their extremals, Differential and Integral Equations, 27(5-6), 579-600.

Niu P., Zhang H., Wang Y., 2001. Hardy type and Rellich type inequalities on the Heisenberg group, Proceedings of the American Mathematical Society, 129(12), 3623-3630.

Okazawa N., 1996. L^p-theory of Schrödinger operators with strongly singular potentials, Japanese Journal of Mathematics, 22(2), 199-239.

Opic B., Kufner A., 1990. Hardy-type inequalities, Pitman Research Notes in Mathematics, Longman Scientific & Technical, Harlow.

Osekowski A., 2015. A new approach to Hardy-type inequalities, Archiv der Mathematik, 104(2), 165-176.

Persson L.E., Samko N., 2012. What should have happened if Hardy had discovered this?, Journal of Inequalities and Applications, 29, 1-11.

Rellich F., 1954. Halbbeschränkte differentialoperatoren höherer ordnung, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, North Holland-Amsterdam, 3, 243-250.

Rellich F., 1969. Perturbation theory of eigenvalue problems, Gordon and Breach, New York.

Shen Y. T., 1964. Weak solutions of elliptic equations of second order with singular coefficients, Advances in Mathematics 7, 321-327 (Chinese).

Shen Y. T., 1980. On the dirichlet problem for quasilinear elliptic equation with strongly singular coefficients, Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Science Press, Beijing, 1407-1417.

Skrzypczak I., 2013. Hardy-type inequalities derived from p-harmonic problems, Nonlinear Analysis, 93, 30-50.

Stein E.M., 1993. Harmonic analysis: real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals, Princeton University Press, New Jersey.

Takahashi F., 2015. A simple proof of Hardy's inequality in a limiting case, Archiv der Mathematik, 104(1), 77-82.

Tertikas A., Zographopoulos N., 2007. Best constants in the Hardy-Rellich inequalities and related improvements, Advances in Mathematics, 209(2), 407-459.

Thangavelu S., 1998. Harmonic analysis on the Heisenberg group, Birkhäuser, Boston.

Vázquez J.L., Zuazua E., 2000. The Hardy inequality and the asymtotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential, Journal of Functional Analysis, 173(1), 103-153.

Weyl H., 1931. The theory of groups and quantum mechanics, Dover Publications, New York.

Xiao Y.X., 2011. An improved Hardy type inequality on Heisenberg group, Journal of Inequalities and Applications, 38, 1-8.

Yafaev D., 1999. Sharp constants in the Hardy-Rellich inequalities, Journal of Functional Analysis, 168(1), 121-144.

Yang Q., 2008. Best constants in the Hardy-Rellich type inequalities on the Heisenberg group, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 342(1), 423-431.

Yener A., 2016. Weighted Hardy type inequalities on the Heisenberg group $\mathbb{H}^n$, Mathematical Inequalities & Applications, 19(2), 671-683.

Zhang H., Niu P., 2003. Hardy-type inequalities and Pohozaev-type identities for a class of p-degenerate subelliptic operators and applications, Nonlinear Analysis, 54(1), 165-186.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Abdullah YENER
Doğum Yeri ve Yılı	: Borçka, 10/03/1987
Medeni Hali	: Evli
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: abdyener@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: Gelibolu Anadolu Lisesi, 2005
Lisans	: Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2010
Yüksek Lisans	: İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2013

Mesleki Deneyim

İstanbul Ticaret Üniversitesi, 2011 $-\cdots$ (devam ediyor)

Yayınları

Goldstein J.A., Kombe I., Yener A., 2017. A unified approach to weighted Hardy type inequalities on Carnot groups, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series A, 37(4), 2009-2021.

Kombe I., Goldstein J.A., Yener A., A general approach to weighted Rellich type inequalities on Carnot groups, Monatshefte für Mathematik, In Press.

Kombe I., Yener A., 2016. Weighted Hardy and Rellich type inequalities on Riemannian manifolds, Mathematische Nachrichten, 289(8-9), 994-1004.

Kombe I., Yener A., General weighted Hardy type inequalities related to Baouendi-Grushin operators, Complex Variables and Elliptic Equations, In Press.

Kombe I., Yener A., Weighted Rellich type inequalities related to Baouendi-Grushin operators, Proceedings of the American Mathematical Society, In Press.

Yener A., 2016. Weighted Hardy type inequalities on the Heisenberg group $\mathbb{H}^n$, Mathematical Inequalities & Applications, 19(2), 671-683.

Yener A., 2014. Nonlinear degenerate parabolic partial differential equations on Heisenberg group, 3rd International Eurasian Conerence on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2014), Vienna-Austria, 25-28 August, 152-153.

Yener A., 2016. A unified approach to weighted L^p Hardy type inequalities on Riemannian manifolds, 2nd International Conference on Analysis and Its Applications (ICAA-2016), Kırşehir-Turkey, 12-15 July, 45.

Yener A., 2017. Recent advances on weighted Rellich type inequalities on the Heisenberg group, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017), Şanlıurfa-Turkey, 11-13 May, 584-585.