T.C. İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CESARO TİPLİ BAZI DİZİ UZAYARININ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Zhamile ASKEROVA

Danışman:

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
İSTANBUL – 2018

KABUL VE ONAY SAYFASI

Zhamile ASKEROVA tarafından hazırlanan **"Cesaro Tipli Bazı Dizi Uzaylarının Geometrik Özellikleri"** adlı tez çalışması 16/02/2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde başarı ile savunularak, İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	**Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK** İstanbul Ticaret Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Hamdullah ŞEVLİ** İstanbul Ticaret Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Yusuf ZEREN** Yıldız Teknik Üniversitesi	....

Onay Tarihi: 16/2/2018

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK
Enstitü Müdürü

AKADEMİK VE ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

16/02/2018

Zhamile ASKEROVA

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

CESARO TİPLİ BAZI DİZİ UZAYLARININ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Zhamile ASKEROVA

İstanbul Ticaret Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK
2018, 30 sayfa

Bazı dizi uzaylarının geometrik özelliklerinin incelendiği bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde Banach dizi uzaylarına ait bazı geometrik özelliklerle ilgili çalışmalara ait literatür bildirisi verilmiştir.

İkinci bölüm, tezin ilerleyen kısımlarında kullanacağımız temel kavramlara ayrılmıştır.

Üçüncü bölümde modüler uzaylar ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü ve beşinci bölümlerde sırasıyla, $ces[(p_n),(q_n)]$ ve $ces(X,p_n,q_n)$ uzaylarının bazı geometrik özellikleri incelenmiştir.

Sonuç ve Değerlendirme kısmında ise adı geçen uzaylarla ilgili olarak elde edilen tüm özellikler sıralanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Geometrik özellikler, dizi uzayları, Kadec-Klee özelliği, rotundluk.

ABSTRACT

Master Thesis

GEOMETRIC PROPERTY OF SOME CESARO TYPE SEQUENCE SPACES

Zhamile ASKEROVA

İstanbul Commerce University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK
2017, 30 pages

This study, which deals with the geometrical properties of some sequence spaces, consists of five chapter.

In the first chapter, a literature review of studies concerned with Banach space geometry.

In the second chapter, the basic concepts that used in the other chapters.

In the third chapter, modular sequence spaces and its's some properties is given.

In the fourth and fifth chapter, some geometrical properties of the sequence spaces $ces[(p_n),(q_n)]$ and $ces(X,p_n,q_n)$ are investigated.

In the Results and Evaluation part, all of the geometrical properties results of the spaces which are proved in the fourth and fifth chapter are listed.

Keywords: Geometric properties, sequence spaces, Kadec-Klee property, rotundity.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında beni yönlendiren ve bana rehberlik eden, ilgi ve önerileri ile hep yanımda olan danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Zhamile ASKEROVA

İSTANBUL, 2018

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
ρ	konveks modüler
X_ρ	Modüler uzay
$\|\| \cdot \|\|_L$	Luxemburg normu
$\|\| \cdot \|\|_O$	Amemiya normu
ces_p	Cesaro dizi uzayı
$ces(p)$	Genelleştirilmiş Cesaro dizi uzayı
$p = (p_n)$	Reel sayı dizisi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
F	Cisim
$B(X)$	X in birim yuvarı
$S(X)$	X in birim küresi

1 GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ

1.1 Literatür Özeti

Son zamanlarda belirli dizi uzayları ve bunların geometrik özelliklei ile ilgili birçok çalışmalar yapılmaktadır. Bu uzayların topolojik özelliklerinin yanında geometrik özellikleri de büyük önem kazanmıştır. Teze konu olduğu kadarıyla ilgilendiğimiz bazı dizi uzayları ile ilgili yapılmış olan çalışmalardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Cesaro dizi uzayları (ces_p) özellikleri pek çok çalışmaya konu olmuştur. 1970 yılında Shue [18], Cesaro dizi uzaylarını normla birlikte ilk defa tanımlamıştır. Liu, Wu ve Lee [19] 1936 yılında Kadec-Klee ve yerel düzgün rotund olma özelliklerini, Cui, Hudzik ve Pluciennik [20] 1997 yılında p-tipte Banach-Saks özelliğini incelemişlerdir.

Normlu Cesaro dizi uzaylarının paranormlu dizi uzaylarına genellenmesi ise Sanhgan ve Suantai [21] tarafından yapılmıştır.

Genelleştirilmiş dizi uzaylarının düzgün Opial özelliğini Petrot ve Suntai [22] çalışmıştır.

2007 yılında Karakaya [23], Lacunary içerikli dizi uzayını Luxemburg normla birlikte tanıtmış, rotundluk ve Kadec-Klee özelliklerini incelemiştir.

Bu uzayın β ve düzgün Opial özellikleri ise Mongkolkeha ve Kumam [24] tarafından 2011 yılında incelenmiştir.

1997 yılında Khan ve Rahman [25], $ces[(p_n),(q_n)]$ dizi uzayını tanıtmış, bu uzayın vektör değerli dizi uzayına genelleştirilmesi ise 2005 yılında Mursaleen ve Khan [26] tarafından yapılmıştır.

Şimşek ve Karakaya [27], $ces[(p_n),(q_n)]$ paranormlu dizi uzayını, $ces(X,p_n,q_n)$ vektör değerli uzayına genelleştirmiş, Kadec-Klee ve rotund olma özelliklerini incelemişlerdir.

Savaş, Karakaya ve Şimşek [28], tanımladıkları $l(p)$-tipte dizi uzayının bazı topolojik özelliklerinin yanı sıra p-tipte Banach-Saks ve Gurarii konvekslik modülü ile ilgili özelliklerini incelemişlerdir.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı, literatürde var olan ve çok önemli bir yere sahip olan bazı geometrik özelliklerin tanıtılmasını, birbirleri arasındaki ilişkilerini ve bahsedilen geometrik özelliklerin bazı dizi uzayları üzerindeki uygulamalarını vermektir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Şimdi, tezin çeşitli bölümlerinde adları sıklıkla geçen Öklid uzayındaki bazı temel tanım, teorem, fonksiyon uzayları ve eşitsizlikler verilecektir. Daha detaylı bilgi için (Adams, 1975; Evans, 2002; Balinsky-Evans-Lewis, 2015) kaynaklarına başvurulabilir.

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde daha sonra kullanılacak olan fonksiyonel analizin temel kavramlarına yer verilmiştir.

Tanım 2.1 (Lineer Uzay) X boştan farklı bir küme ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \longrightarrow X \qquad \text{ve} \qquad \cdot : K \times X \longrightarrow X$$

ikili işlemleri aşağıda verilen özellikleri sağlıyorsa X cümlesine K üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) adı verilir [36].
Her $\alpha, \beta \in K$ ve $x, y, z \in X$ için

(L1) $x + y = y + x$

(L2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

(L3) $x + \theta = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır.

(L4) Her bir $x \in X$ için x+(-x)=θ olacak şekilde $-x \in X$ vardır.

(L5) $1.x = x$

(L6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

(L7)$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

(L8) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

Tanım 2.2 (Alt Vektör Uzayı) Y kümesi X vektör uzayının boştan farklı bir altkümesi olsun. Her $y_1, y_2 \in Y$ ve α, β skalerleri için $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$ sağlanıyorsa Y ye X vektör uzayının alt uzayı denir [37].

Tanım 2.3 (Metrik Uzay) Boş olmayan bir X kümesi ve bir

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow d(x, y) \end{aligned}$$

fonksiyonu verilsin. Eğer bu d fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için

(M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adını alır ve bu durumda (X,d) ikilisine bir metrik uzay denir [38].

Tanım 2.4 (Normlu Vektör Uzayı) X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned} ||\cdot|| : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow ||x|| \end{aligned}$$

fonksiyonu her $\forall x, y, z \in X$ ve her $\alpha \in K$ için

(N1) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N2) $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$

(N3) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, ||x||)$ ikilisine bir normlu vektör uzayını adı verilir[38].

Tanım 2.5 (Paranormlu Uzay) X, K cismi üzerinde lineer bir uzay olsun. Eğer $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\lambda \in K$ ve $x, y \in X$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa g dönüşümüne bir paranorm, (X,g) ikilisine ise bir paranormlu uzay denir [36].

i) $g(\theta) = 0$,

ii) $g(x) = g(-x)$,

iii) $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$,

iv) $\lambda \longrightarrow \lambda_0$ ve $g(x - x_0) \longrightarrow 0$ iken $g(\lambda x - \lambda_0 x_0) \longrightarrow 0$.

Tanım 2.6 (Uzaklık, Çap) (X,d) bir metrik uzay ve A ve B, X in altkümeleri olsun.

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$$

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$$

$$d(A) = \sup\{d(a,a') : a, a' \in A\}$$

olarak tanımlandığında $d(x,A)$ x ve A arasındaki, $d(A,B)$ A ve B arasındaki uzaklıktır. $d(A)$ ise A kümesinin çapı olarak ifade edilir [36].

Tanım 2.7 (Sınırlı Küme) Bir metrik uzayın A altkümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart sonlu bir çapa sahip olması, yani $d(A) < \infty$ olmasıdır. Aksi halde sınırsız olarak adlandırılır [36].

Tanım 2.8 (Komşuluk) (X, d) bir metrik uzay ve $a \in X$ olsun. O halde, $r > 0$ için

$$S(a, r) = \{x \in X : d(a, x) > r\}$$

a merkezli ve r yarıçaplı bir komşuluk (ya da açık yuvar, açık küre) olarak adlandırılır [36].

Tanım 2.9 (Açık Küme, Kapalı Küme) (X, d) bir metrik uzay olsun. $G \subset X$ in açık olması için gerek ve yeter şart G nin her noktasının komşuluğunun G de olmasıdır. Yani, eğer $x \in G$ ise öyle bir $r > 0$ vardır ki $S(x, r) \subset G$ dir.
(X, d) bir metrik uzayındaki bir kümenin kapalı olması için gerek ve yeter şart kümenin tümleyeninin açık olmasıdır [36].

Tanım 2.10 (Yakınsak Dizi) (x_n) reel sayılar dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $n_o = n_o(\varepsilon)$ doğal sayısı için $n > n_o$ iken

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

şartı sağlanıyorsa (x_n) dizisi x e yakınsar denir ve $x_n \longrightarrow x$ veya $\underset{n\to\infty}{lim} x_n = x$şeklinde gösterilir [41].

Tanım 2.11 (Cauchy Dizisi) (X, d) bir metrik uzay, (x_n) X uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_o$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_o = n_o(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir [42].

Tanım 2.12 (Tam Uzay) (X, d) metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsıyorsa (yani, limiti X in bir elemanı ise) X uzayına tam uzay adı verilir [37].

Tanım 2.13 (Banach Uzay) Tam normlu uzaya Banach uzay denir [37].

Tanım 2.14 (Tam Paranormlu Uzay) Bir (X, g) paranormlu uzayında, alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa (X, g) uzayına tam paranormlu uzay denir [36].

Tanım 2.15 (Lineer Fonksiyonel) X lineer bir uzay olmak üzere $f : X \to \mathbb{C}$ dönüşümüne bir fonksiyonel denir.

- Eğer her $x, y \in X$ için $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ eşitsizliği gerçekleniyorsa f fonksiyoneline alt toplamsal, $f(x+y) = f(x)+f(y)$ eşitsizliği gerçekleniyorsa toplamsaldır denir.
- Eğer her $x \in X$ ve her λ skaleri için $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ ise f fonksiyoneli homojendir denir.

- Homojen ve alt toplamsal olan bir fonksiyonele alt lineer, toplamsal ve homojen olan bir fonksiyonele ise lineer fonksiyonel denir.
- Her $x \in X$ için $|f(x)| \leq K||x||$ olacak şekilde bir $K > 0$ reel sayısı varsa$f : X \to \mathbb{C}$ dönüşümüne sınırlı lineer fonksiyonel denir.
- Sınırlı bir lineer fonksiyonelin normu;

$$||f|| = \sup_{x \neq \theta} \frac{|f(x)|}{||x||}$$

olarak verilir [36].

Tanım 2.16 (Sürekli Dual Uzay) X normlu bir uzay olsun. X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan $B(X, R)$ cümlesi

$$||f|| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq \theta}} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq \theta}} |f(x)|$$

normu ile bir Banach uzay oluşturur. Bu uzaya X in dual uzayı denir ve X^* ile gösterilir [36].

Tanım 2.17 (H noktası, H özelliği) (X, E) bir reel Banach uzayı ve B(X) (sırasıyla $S(X)$) de X in kapalı birim yuvarı (birim küresi) olsun.

- Eğer $n \to \infty$ olduğunda $||x_n|| \to 1$ olacak şekilde verilen X deki her (x_n) dizisi için (x_n) dizisinin x e zayıf yakınsaması[$(x_n \xrightarrow{w} x)$ $n \to \infty$ için] $||x_n - x|| \to 0$ olmasını gerektiriyorsa; $S(X)$ in x elemanı, $B(X)$ in $H-noktası$ adını alır.
- Eğer $S(X)$ in her noktası, $B(X)$ in bir $H-noktası$ ise, bu takdirde X uzayına H *özelliğine* sahiptir veya $Kadec-Klee$ özelliğine sahiptir denir.
- Kısacası X in birim küresinde alınan her dizi için zayıf yakınsama ile kuvvetli yakınsama çakışıyorsa(birbirini gerektiriyorsa), bu takdirde X uzayı $H-$*özelliği*ne sahiptir denir.

Tanım 2.18 Eğer herhangi $y, z \in S(X)$ için $x = \frac{y+z}{2}$ olması $y = z$ olmasını gerektiriyorsa, bu takdirde $z \in S(X)$ noktasına $B(X)$ in *ekstrem noktası* adı verilir.

Tanım 2.19 Eğer $S(X)$ in her bir noktası $B(X)$ in bir ekstrem noktası ise, bu takdirde X uzayına $rotund(R)$ özelliğine sahiptir denir.

Tanım 2.20 Eğer $B(X)$ deki $||x_n + x|| \to 2$ $(n \to \infty)$ özelliğine sahip her dizi için $||x_n - x|| \to 0$ $(n \to \infty)$ şartı sağlanıyorsa, $S(X)$ in x elemanına $B(X)$ in lokal düzgün rotund noktası(LUR noktası) adı verilir.

Tanım 2.21 Eğer $S(X)$ in her bir noktası $B(X)$ in LUR noktası ise, bu takdirde X uzayına lokal düzgün rotund adı verilir. Literatürden bilinmektedir ki, eğer

uzayı LUR özelliğine sahipse, bu takdirde R özelliğine de sahiptir ve H özelliğini de sağlar. Fakat bu son ifadenin tersi gelende doğru değildir.

Bahsedilen matematik kavramlar ve tanımları için [1],[2],[3],[4] ve [5] kaynaklarından yararlanılabilir.

Bu kavramların bir çoğu Orlicz uzayları için de çalışılmıştır([9,10,11,12]).

2.2 $ces[(p_n),(q_n)]$ Dizi Uzayları

Şimdi tezin ilerleyen bölümlerinde belirli geometrik özelliklerinin inceleneceği $ces[(p_n),(q_n)]$ dizi uzayını verelim:

Eğer, q_n pozitif reel sayıların bir dizisi ve $p=(p_r)$ de $inf p_r > 0$ şartını sağlasın.

Khan and Rahman [6] da $ces[(p_n),(q_n)]$ dizi uzayını

$$ces[(p_n),(q_n)] = \left\{ x \in w : \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k |x_k| \right)^{p_r} < \infty \right\},$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada $Q_{2^r} = q_{2^r} + q_{2^{r+1}} + ... + q_{2^{r+1}-1}$, ve $\sum_r$ toplamı da $2^r < k < 2^{r+1}$ şeklinde verilmiştir. Khan and Rahman [6] aynı zamanda göstermiştir ki; eğer her n için $q_n = 1$ ise bu takdirde $ces[(p_n),(q_n)]$ uzayı Lim [7] tarafından çalışılan $ces(p_n)$ uzayına dönüşmektedir.

Bunun yanısıra, Khan ve Rahman [6], eğer her n için $p_n = p$ alındığında $ces[(p_n),(q_n)]$ uzayı Lim [8] tarafından çalışılan ces_p uzayına dönüşmektedir.

Sanhan ve Suantai [5] de, $ces(p_n)$ uzayının bazı geometrik özelliklerini incelemiştir. Daha sonrasında, Khan and Rahman [6] da göstermiştir ki $ces[(p_n),(q_n)]$ uzayı, $H = \sup_r p_r < \infty$ ve $M = \max(1,H)$ olmak üzere

$$g(x) = \left[\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k |x_k| \right)^{p_r} < \infty \right]^{\frac{1}{M}}$$

şeklinde tanımlanan paranormuyla bir paranormlu uzaydır. Yani, $ces[(p_n),(q_n)]$ uzayı $g(x)$ paranormuna sahiptir.

w tüm reel(veya kompleks) tüm dizilerin kümesi ve ℓ_∞ ve c de

$$||x|| = \sup_{k \geq 0} |x_k|$$

normuyla donatılmış ve sırasıyla sınırlı ve yakınsak $x = (x_n)$ dizilerin kümesini göstersin.

Eğer w üzerindeki $\sigma(x)$ fonksiyoneli aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu fonksiyonele w üzerinde modüler adı verilir:

i) $\sigma(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

ii) her $x \in X$, ve $|\alpha| = 1$ şartını sağlayan her $\alpha \in F$ için, $\sigma(\alpha x)$=$\sigma(x)$

iii) her $x, y \in X$ ve $\alpha+\beta = 1$ şartını sağlayan $\alpha, \beta \geq 0$ için $\sigma(\alpha x+\beta y) = \sigma(x)+\sigma(y)$

Eğer (iii) özelliği aşağıdaki (iv) ifadesiyle yer değiştirirse;

iv) $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan her $\alpha, \beta \in R^+$ için $\sigma(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\sigma(x) + \beta\sigma(y)$ σ konveks modüler olarak adlandırılır.

$ces[(p_n), (q_n)]$ dizi uzayı üzerindeki $\sigma(x)$ modülerini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$\sigma(x) : ces[(p_n), (q_n)] \to [0, \infty]$ şeklinde verildiğinde $\sigma(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k |x_k| \right)^{p_r}$

Her $x \in ces[(p_n), (q_n)]$ için norm fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$||x|| = \inf \left\{ \tau > 0 : \sigma(\frac{x}{\tau}) \leq 1 \right\}$$

$\|\cdot\|$ fonksiyonuna $ces[(p_n), (q_n)]$ uzayı üzerinde Luxemburg normu adı verilir.

Bu çalışmanın ilerleyen kısımlarında, $ces[(p_n), (q_n)]$ uzayının Luxemburg normuna göre bir Banach uzayı olduğu gösterilecektir.

Daha açıkça yazmak istersek; $ces[(p_n), (q_n)]$ uzayı üzerinde Luxemburg normu şu şekilde tanımlanır:

$$||x|| = \inf \left\{ \tau > 0 : \sigma(\frac{x}{\tau}) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k |x_k| \right)^{p_r} \right\}$$

Eğer, her $n \in N$ için $q_n = 1$ alınırsa; [7] ile verilen çalışmadan kolayca elde edilir ki $ces[(p_n), (q_n)]$ uzayı üzerindeki Luxemburg normu aşağıdaki norma indirgenir:

$$|x||_{ces(p_n)} = \inf \left\{ \tau > 0 : \sigma(\frac{x}{\tau}) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{k=1}^{r} |\frac{x_k}{\tau}| \right)^{p_r} \leq 1 \right\}$$

Dahası, eğer her $n \in N$ için $p_n = p$ ve her $n \in N$ için $q_n = 1$ ise, bu takdirde $ces[(p_n), (q_n)]$ uzayı üzerindeki Luxemburg normu aşağıdaki norma indirgenir [8]:

$$|x||_{ces_p} = \inf \left\{ \tau > 0 : \sigma(\frac{x}{\tau}) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{k=1}^{r} |\frac{x_k}{\tau}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 \right\}$$

Şimdi ise tezde ihtiyaç duyacağımız aşağıdaki eşitsizliği verelim:
p_k dizisi monoton artan pozitif reel sayıların bir dizisi olsun, bu takdirde

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq c.\left[|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}\right]$$

burada $a_k > 0, b_k > 0$ ve $c = 2^{H-1}$, $H = \underset{k}{supp_k}$ dir. Böylece λ^{p_r}¡λ ve β^{p_r}¡β. elde edilir.

2.3 $ces(X, p_n, q_n)$ Dizi Uzayları

$\inf p_r > 0$ olmak üzere; (q_n) ve (p_n) pozitif reel sayıların dizisi olsunlar. Bu diziler yardımıyla, Musaleen-Khan de tanımlanan $ces(X, p, q)$ uzayına denk olan $ces(X, p_n, q_n)$ genelleştirilmiş vektör değerli dizilerin uzayını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$ces(X, p_n, q_n) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x(k)|| \right)^{p_r} < \infty \right\}.$$

Burada $Q_{2^r} = q_{2^r} + q_{2^r+1} + ... + q_{2^{r+1}-1}$, ve $\sum_r$ toplamı da $2^r < k < 2^{r+1}$ şeklinde verilmiştir.

Aşikardır ki, her $n \in \mathbb{N}$ için $X, (p_n)$ ve (q_n) in farklı değerleri için $ces(X, p_n, q_n)$ dizi uzayı yeni dizi uzaylarına isabet etmektedir.

Örneğin, X=$\mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$ olması durumunda, $ces(X, p_n, q_n)$ dizi uzayı Khan-Rahman tarafından tanımlanan $ces[(p_n), (q_n)]$ dizi uzayına karşılık gelir.

Aynı zamanda eğer $q_n = 1$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $ces(X, p_n, q_n)$ uzayı daha önce Chanan tarafından tanımlanan $ces(X, p)$ uzayına denk olan $ces(X, p_n)$ uzayına denk elde edilir.

Bunun yanı sıra eğer $q_n = 1$ ve $p_n = p$ ise her $n \in \mathbb{N}$, $ces(X, p_n, q_n)$ uzayı yerine $ces_p(X)$ yazabiliriz ki

$$ces_p(X) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{r=0}^{\infty} \left(2^{-r} \sum_r ||x(k)|| \right)^{p} < \infty \right\}.$$

Verilen dizi uzayı $ces(X, p_n, q_n)$, $H = sup_r p_r < \infty$ and $M = max(1, H)$ olmak üzere,

$$h(x) = \left[\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x(k)|| \right)^{p_r} \right]^{1/M}, \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlı normla birlikte bir paranormdur. Standard teknikler kullanılarak kolayca gösterilebilir ki $ces(X, p_n, q_n)$ uzayı yukarıda tanınlanan paranormla birlikte paranormlu bir uzay olur.

$ces(X, p_n, q_n)$ vektör değerli dizi uzayı üzerinde tanımlı σ modülerini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\sigma : ces\,(X, p_n, q_n) \rightarrow [0, \infty]$$

Burada $\sigma(x) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum\limits_{r} q_k ||x(k)|| \right)^{p_r}$ dir. Her $x \in ces(X, p_n, q_n)$ için norm fonksiyonelini aşağıdaki gibi tanımlarız:

$$\|x\|_L = \inf \left\{ \tau > 0 : \sigma\left(\frac{x}{\tau}\right) \leq 1 \right\}.$$

Burada verilen $||\cdot||_L$ normuna, $ces(X, p_n, q_n)$ dizi uzayı üzerindeki Luxemburg normu adı verilir.

Daha açık olarak; $ces(X, p_n, q_n)$ dizi uzayı üzerindeki Luxemburg normu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\|x\|_L = \inf \left\{ \tau > 0 : \sigma\left(\frac{x}{\tau}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_{r} q_k || \frac{x(k)}{\tau} || \right)^{p_r} \leq 1 \right\}.$$

3 MODÜLER UZAYLAR VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, belirli dizi uzaylarının geometrik incelenmesinde kullanılan modül kavramı, modüler uzay tanımı ve modüler yakınsaklık kavramı incelenmiştir.

Tanım 3.1 X reel veya kompleks vektör uzayı olsun. $\rho : X \to [0, \infty]$ fonksiyonu, herhangi $x, y \in X$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa X üzerinde bir pseudomodül adını alır:

i) $\rho(\theta) = 0$

ii) $\rho(-x) = \rho(x)$

iii) $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ olduğunda $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

Eğer iii) şartının yerine aşağıda verilen şart geçerli olursa; $s \in (0, 1]$ için ρ pseudomodülü s-konveks pseudomodül adını alır:

iv) $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s \rho(x) + \beta^s \rho(y) \quad (\alpha, \beta \geq 0;\ \alpha^s + \beta^s = 1)$

Bu şartta $s = 1$ alınması durumunda, ρ modülüne konveks modül adı verilir.

i) şartıyla beraber $\forall \lambda > 0$ için $\rho(\lambda x) = 0 \Rightarrow x = \theta$ şartı da sağlanırsa ρ modülü yarı-modül (semi-modül) adını alır.

Burada dikkat edilirse; $\rho(x) = 0 \Rightarrow x = \theta$ şartının sağlanması halinde ρ bir modül olur.

Tanım 3.2 i) $|\alpha| \leq 1 \Rightarrow \rho(\alpha x) \leq \rho(x)$

ii) $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \Rightarrow \rho\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)$

iii) $0 < s \leq 1$ için ρ, s-konveks ise; $\alpha_i \geq 0$, $\rho\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^s \rho(x_i)$

Tanım 3.3 ρ modülü X uzayı üzerinde bir pseudomodül ise;

$$X_\rho = \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x) = 0 \right\}$$

şeklinde verilen uzaya modüler uzay adı verilir.

Teorem 3.1 ρ, X uzayında bir pseudomodül olsun. $x \in X_\rho$ ve $k = 1, 2, 3, ...$ için $x_k \in X_\rho \Rightarrow k \to \infty$ iken $|x_k - x|_p \to 0$ şartı, her $\lambda > 0$ için $k \longrightarrow \infty$ iken $\rho\left(\lambda\left(x_k - x\right)\right) \to 0$ şartına denktir.

Tanım 3.4 X uzayında verilen ρ pseudomodülü

i) Her $x \in X_\rho$ için $\lim_{\lambda \to 1^+} \rho(\lambda x) = \rho(x)$ ise sağdan süreklidir.

ii) Her $x \in X_\rho$ için $\lim_{\lambda \to 1^-} \rho(\lambda x) = \rho(x)$ ise soldan süreklidir.

Eğer ρ pseudomodülü hem sağdan hem de soldan sürekli ise, ρ pseudomodülü sürekli olarak adlandırılır.

Tanım 3.5 Eğer ρ bir s-konveks bir pseudomodül ise;

$$\|x\|_\rho^s = \inf_{k>0} \frac{1+\rho\left(k^{\frac{1}{s}}x\right)}{k}$$

şeklinde tanımlı normu X_ρ uzayı üzerinde bir s-pseudonormdur ve her $x \in X_\rho$ için $\|x\|_\rho^s \leq \|x\|_0^s \leq 2\|x\|_\rho^s$ dir. Burada özel olarak $s=1$ olması durumunda, X_ρ uzayında Luxemburg normu,

$$\|x\| = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq 1\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Aynı uzay üzerinde Orlicz veya Amemiya normu da

$$\|x\| = \inf\left\{k > 0 : \frac{1}{k}\left(1+\rho\left(kx\right)\right)\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.6 (Modüler Yakınsama) ρ, X uzayında bir pseudomodül olsun. $k \to \infty$ iken bir $\lambda > 0$ için $\rho\left(\lambda\left(x_k - x\right)\right) \to 0$ olacak şekilde bir yakınsama mevcutsa, X_ρ uzayının elemanlarının bir (x_k) dizisi $x \in X_\rho$ elemanına modüler yakınsaktır ya da kısaca ρ-yakınsaktır denir. Bu $x_k \xrightarrow{\rho} x$ ile gösterilir.

Tanım 3.7 (Modüler Yakınsama Özellikleri) i) $x'_k \xrightarrow{\rho} x'$ ve $x^*_k \xrightarrow{\rho} x^* \Longrightarrow x'_k + x^*_k \xrightarrow{\rho} x' + x^*$

ii) $x_k \xrightarrow{\rho} x$ ve c bir sabit olmak üzere $cx_k \xrightarrow{\rho} cx$

iii) ρ bir modüler ise X_ρ uzayının elemanlarından oluşan her (x_k) dizisi en fazla bir modüler limite eşittir.

iv) Norma gör yakınsama ve ρ-yakınsama X_ρ uzayında birbirlerine denktir$\Leftrightarrow$ $x_k \in X_\rho$ olmak üzere $\rho(x_k) \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \rho(2x_k) \to 0$ dır.

Hatırlatma 3.1 ρ-yakınsama, norma göre yakınsamayı gerektirmez. Bu ifade modüler uzaylar teorisinin geliimesinde büyük önem sahiptir. Çünkü eğer X_ρ uzayında sadece norma göre yakınsama olsaydı, bu takdirde ρ-modülünün bir vektör uzayında kullanılabilmesi durumu ancak bu uzayda yeni bir norm tanımlamak suretiyle mümkün olabilirdi.

Teorem 3.2 $(x_n) \in X_\rho$ olsun. $\|x_n\| \longrightarrow 0$ (veya bu ifadeye denk olarak $\|x_n\|_\rho \longrightarrow 0$)$\Leftrightarrow$her $\lambda > 0$ için, $n \longrightarrow \infty$ iken $\rho\left(\lambda(x_n)\right) \longrightarrow 0$ dır.

4 $ces[(p_n),(q_n)]$ UZAYININ BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Tanım 4.1 Bu bölümün temel amacı,Luxemburg normu ile donatılmış $ces\,[(p_n),(q_n)]$ dizi uzayının bir modüler uzay olduğunun gösterilmesi ve bu uzayın bazı geometrik özelliklerinin incelenmesidir.

Şimdi ise tez içinde verilecek ana teoremlerin ispatında kullanılacak bazı teknik sonuçlar ispat edilecektir.

İlk olarak $ces[(p_n),(q_n)]$ dizi uzayı üzerindeki konveks modüler kavramı ile ilgili aşağıdaki yardımcı teoremleri verelim.

Yardımcı Teorem 4.1 $ces\,[(p_n),(q_n)]$ dizi uzayı üzerinde tanımlı σ fonksiyoneli bir konveks modülerdir.

İspat. $x, y \in ces\,[(p_n),(q_n)]$.verilsin. Buradan açıktır ki;

(i) $\sigma(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ve

(ii) $\sigma(\lambda x) = \sigma(x)$ λ skaler olmak üzere $|\lambda| = 1$.

$$\begin{aligned}
\sigma(\lambda x) &= \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_k|\lambda x_k|\right)^{p_r} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}|\lambda|^{p_r}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_k|x_k|\right)^{p_r} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_k|x_k|\right)^{p_r} \\
&= \sigma(x)
\end{aligned}$$

(iii) $\lambda, \beta \geq 0$ için $\lambda + \beta = 1$ olmak üzere, $t \to |t|^{p_k}$ fonksiyonun konveksliğinden,her $k \in N$ için aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
\sigma(\lambda x + \beta y) &= \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_k|\lambda x_k + \beta y_k|\right)^{p_r} \\
&\leq \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\left[\lambda\sum_{r} q_k|x_k| + \beta\sum_{r} q_k|y_k|\right]\right)^{p_r} \\
&\leq \sum_{r=0}^{\infty}\left[\lambda\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_k|x_k|\right) + \beta\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_k|y_k|\right)\right]^{p_r} \\
&\leq \lambda^{p_r}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_k|x_k|\right)^{p_r} + \beta^{p_r}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_k|y_k|\right)^{p_r} \\
&\leq \lambda\sigma(x) + \beta\sigma(y).
\end{aligned}$$

■

Yardımcı Teorem 4.2 $x \in ces\left[(p_n),(q_n)\right]$ olmak üzere, $ces\left[(p_n),(q_n)\right]$ üzerinde tanımlı σ modüleri aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır:

(i) Eğer $0 < a < 1$,ise bu takdirde, $a^H\sigma(\frac{x}{a}) \leq \sigma(x)$ ve $\sigma(ax) \leq a\sigma(x)$ dir,

(ii) Eğer $a > 1$ ise bu takdirde $\sigma(x) \leq a^H\sigma(\frac{x}{a})$ dir,

(iii) Eğer $a \geq 1$, then $\sigma(x) \leq a\sigma(x) \leq \sigma(ax)$

İspat.

(i) $0 < a < 1$ verilsin. Bu takdirde, aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_k q_k|x_k|\right)^{p_r} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}a\sum_k q_k|x_k|\right)^{p_r} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}a^{p_r}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_k q_k|x_k|\right)^{p_r} \\
&\geq a^H\sigma(\frac{x}{a}) \qquad\qquad (H = \sup_r p_r).
\end{aligned}$$

(ii) $a > 1$ verilsin. Bu takdirde, aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_k q_k|x_k|\right)^{p_r} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}a\sum_k q_k|\frac{x_k}{a}|\right)^{p_r} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}a^{p_r}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_k q_k|\frac{x_k}{a}|\right)^{p_r} \\
&\leq a^H\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_k q_k|\frac{x_k}{a}|\right)^{p_r} \\
&\leq a^H\sigma(\frac{x}{a}).
\end{aligned}$$

(iii) Bu şartın ispatı, σ modüler fonksiyonelinin konveksliğinden elde edilir.

■

Yardımcı Teorem 4.3 Herhangi $x \in ces\left[(p_n),(q_n)\right]$, için

(i) Eğer $\|x\| < 1$, ise bu takdirde $\sigma(x) \leq \|x\|$,

(ii) Eğer $\|x\| > 1$, ise bu takdirde $\sigma(x) \geq \|x\|$,

(iii) Eğer $\|x\| = 1 \Leftrightarrow \sigma(x) = 1$,

(iv) Eğer $\|x\| < 1$, ise bu takdirde $\sigma(x) \leq 1$,

(v) Eğer $\|x\| > 1$, ise bu takdirde $\sigma(x) \geq 1$.

İspat.

(i) $\varepsilon > 0$ sayısı $0 < \varepsilon < 1 - ||x||$ şartını sağlasın. Buradan, $\varepsilon + ||x|| < 1$ olduğunu yazabiliriz. Norm fonksiyonun tanımından $\varepsilon + ||x|| > \tau$ ve $\sigma()x\tau \leq 1$ olacak şekilde $\tau > 0$ mevcuttur. Lemma 2, (i) ve (iii) den, aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}\sigma(x) &\leq \sigma()(\varepsilon + \|x\|)x\tau = \sigma\left((\varepsilon + \|x\|)\frac{x}{\tau}\right)\\ &\leq (\varepsilon + \|x\|)\,\sigma()x\tau \leq \varepsilon + \|x\|.\end{aligned}$$

Böylece, $\sigma(x) \leq \|x\|$, olduğunu dolayısıyla (i) deki ifadenin sağlandığını elde etmiş oluruz.

(ii) Eğer $\|x\| > 1$ ve $\varepsilon > 0$ ise bu takdirde $0 > 1 - ||x||$ ve $0 > \frac{1-||x||}{||x||}$ yazabiliriz. Böylece $\frac{||x||-1}{||x||} > 0$ olduğunu elde ederiz. $\varepsilon > 0$ sayısı, $0 < \varepsilon < \frac{||x||-1}{||x||}$ şartını sağlasın. $\frac{||x||-1}{||x||} > 0$ ve $||x||(\varepsilon - 1) < -1$, olduğundan, -$\frac{1}{||x||(\varepsilon-1)} < 1 < \frac{||x||}{||x||(\varepsilon-1)}$ olduğunu yazabiliriz.
Norm fonksiyonunun tanımı ve Lemma 2 (i) den, $1 < \sigma(\frac{x}{||x||(1-\varepsilon)}) \leq \frac{1}{||x||(1-\varepsilon)}\sigma(x)$ olduğunu yazabiliriz.
Böylece her $\varepsilon \in \left(0, \frac{||x||-1}{||x||}\right)$ için $||x||(1-\varepsilon) < \sigma(x)$ elde edilir.

$$A = \left\{(1-\varepsilon)||x|| : 0 < \varepsilon < \frac{||x||-1}{||x||}\right\}$$

şeklinde tanımlanırsa, $||x|| = supA$ elde edilir. $\sigma(x)$ A nın üst sınırı olduğundan; $\|x\| \leq \sigma(x)$ olduğunu elde ederiz.

(iii) Farzedelim ki $||x|| = 1$ olsun. Kabul edelim ki $\varepsilon > 0$ olsun, bu takdirde $1+\varepsilon > \delta > ||x||$ and $\sigma()x\delta \leq 1$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ mevcuttur. Lemma 2 (ii) den $\sigma(x) \leq \delta^H\ \sigma()x\delta \leq \delta^H\ < (1+\varepsilon)^H$, elde ederiz ve her $\varepsilon > 0$ için $(\sigma(x))^{1/H} \leq 1 + \varepsilon$ olması, $\sigma(x) \leq 1$ olmasını gerektirir.
Eğer $\sigma(x) < 1$ ise, $\sigma(x) < a^H < 1$ olacak şekilde $a \in (0,1)$ olsun. Lemma 2 (i) den, $\sigma()xa \leq \frac{1}{a^H}\sigma(x) \leq 1$, olduğunu elde ederiz, böylece $||x|| \leq a < 1$ yazabiliriz ki bu da bir çelişkidir. Böylece $\sigma(x) = 1$ olduğunu elde ederiz.
Aksine, kabul edelim ki $\sigma(x) = 1$ verilsin. Norm fonksiyonunun tanımından, $\|x\| \leq 1$ yazabiliriz. Eğer $\|x\| \leq 1$ ise bu takdirde, (i) şıkkında yazılan ifadeden, we have that $\sigma(x) \leq ||x||$, olduğunu yazabiliriz ki bu da kabulümüze bir çelişkidir, böylece $||x|| = 1$ olduğunu elde ederiz.

(iv) Eğer $\|x\| < 1$ ise, (i) şıkkından, $\sigma(x) < \|x\| < 1$ olduğunu yazabiliriz. $\sigma(x) < 1$ olduğunda, (ii) ve (iii) den $||x|| < 1$ elde edilir ki buradan da (iv) ifadesi elde edilir.

(v) (iii) ve (iv) ifadelerinden elde edilir.

■

Yardımcı Teorem 4.4 $x \in ces\left[(p_n), (q_n)\right]$ olduğunda aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

(i) eğer $0 < a < 1$ ve $||x|| > a$ ise bu takdirde, $\sigma(x) > a^H$,

(ii) eğer $a \geq 1$ ve $||x|| < a$ ise bu takdirde, $\sigma(x) < a^H$.

İspat.

(i) Kabul edelim ki $0 < a < 1$ ve $||x|| > a$. olsun. Buradan $\left\|\frac{x}{a}\right\| > 1$ elde edilir. Lemma 3 (ii) den $\sigma\left(\frac{x}{a}\right) > \left\|\frac{x}{a}\right\| > 1$ yazabiliriz. Böylece Lemma 2 (i) den $\sigma\left(\frac{x}{a}\right) \geq a^H \sigma\left(\frac{x}{a}\right) > a^H$ yazabiliriz.

(ii) Kabul edelim ki $a > 1$ ve $\|x\| < a$ olsun. Bu takdirde $\left\|\frac{x}{a}\right\| < 1$ elde edilir. Lemma 3 (i) den $\sigma\left(\frac{x}{a}\right) \leq \left\|\frac{x}{a}\right\| < 1$ yazabiliriz Eğer $a = 1$ ise, bu takdirde $\sigma(x) < 1$ yazabiliriz.Lemma 2 (ii) den, $\sigma(x) < a^H \sigma\left(\frac{x}{a}\right) < a^H$ olduğunu elde ederiz.

■

Yardımcı Teorem 4.5 $(x_n) \in ces\left[(p_n), (q_n)\right]$ olsun.

(i) eğer $\lim\limits_{\infty} ||x_n|| = 1$ ise bu takdirde; $\lim\limits_{\infty} \sigma(x_n) = 1$,

(ii) eğer $\lim\limits_{\infty} \sigma(x_n) = 0$ isse bu takdirde $\lim\limits_{\infty} x_n = 0$.

İspat.

(i) Kabul edelim ki $n \to \infty$ için $\lim\limits_{\infty} ||x_n|| = 1$ olsun ve $\varepsilon \in (0, 1)$ alalım. Bu takdirde her $n \geq n_0$ için $1 - \varepsilon < ||x_n|| < 1 + \varepsilon$ olacak şekilde bir n_o vardır. Lemma 4 ten,her $n \geq n_0$ için $(1 - \varepsilon)^H < ||x_n|| < (1 + \varepsilon)^H$ olması $\lim\limits_{\infty} \sigma(x_n) = 1$. olmasını gerektirir.

(ii) Kabul edelim ki $||x_n|| \nrightarrow 0$. Bu takdirde $k \in N$ için $||x_{n_k}|| > \varepsilon$ olacak şekilde (x_n) in bir (x_{n_k}) altdizisi ve bir $\varepsilon \in (0, 1)$ mevcuttur. Yardımcı teorem 4 (i) den, her $k \in N$.için $\sigma(x_{n_k}) > \varepsilon^H$ olduğunu elde ederiz. Bu son eşitsizlikte bize $n \to \infty$ için $\sigma(x_{_{nk}}) \nrightarrow 0$ olduğunu gösterir. Böylece $\sigma(x_n) \nrightarrow 0$ olduğu gösterilmiş olur.

■

Çalışmamızın bu kısmında, $ces\left[(p_n), (q_n)\right]$ dizi uzayının Luxemburg normuyla beraber bir Banach uzayı olmasını inceleyeceğiz.

Teorem 4.1 $ces\left[(p_n), (q_n)\right]$ uzayı, $||x|| = inf\left\{\rho > 0 : \sigma()x\rho \leq 1\right\}$ şeklinde verilen Luxemburg normu ile beraber bir Banach uzayıdır.

İspat. İspat için öncelikle $ces\,[(p_n),(q_n)]$ uzayından alınan bir Cauchy dizisinin Luxemburg normu ile yakınsak olduğunu göstereceğiz. Bunun için (x_k^n) dizisi $ces\,[(p_n),(q_n)]$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun ve $\varepsilon \in (0,1)$ alalım. Buradan, $\exists n_0$ elemanı vardır ki $\forall n,m \geq n_0$ için $||x^n - x^m|| < \varepsilon^M$ yazabiliriz. Yardımcı Teorem 3 (i) den, $\forall n,m \geq n_0$ için

$$\sigma(x^n - x^m) < ||x^n - x^m|| < \varepsilon^M, \qquad \forall n,m \geq n_0. \tag{4.1}$$

olduğunu elde ederiz. Yani $m,n \geq n_0$ için

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_k q_k|x_k^n - x_k^m|\right)^{p_r} < \varepsilon.$$

Belirli bir k değeri için

$$||x_k^n - x_k^m|| < \varepsilon$$

olduğunu elde ederiz. Böylece $\forall k \in N$ için (x_k^n) dizisi $ces\,[(p_n),(q_n)]$ uzayında bir Cauchy dizisi olur. (x_k^n) dizisi R de bir Cauchy dizisi olur. R bir Banach uzayı olduğundan

$$||x_k^n - x_k|| < \varepsilon \qquad (m,n \geq n_0)$$

elde ederiz. Şimdi ise (x_k) dizisinin $ces\,[(p_n),(q_n)]$ uzayının bir elemanı olduğunu ve de $(x_n) \to x$ olduğunu göstereceğiz.
(2.1) eşitsizliğinden

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_k q_k|x^n - x^m|\right)^{p_r} < \varepsilon \qquad \forall m,n \geq n_0.$$

ifadesini yazabiliriz. Her $k = 1,2,...$ için $x_k^m \to x_k$ olduğunu elde ederiz ve böylece

$$\sigma(x^n - x^m) \to \sigma(x^n - x) \qquad \text{as m} \to \infty.$$

yakınsamasını elde ederiz. Buradan da

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_k q_k|x^n - x^m|\right)^{p_r} \to \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_k q_k|x^n - x|\right)^{p_r} \qquad (\text{m} \to \infty), \quad \forall m,n \geq n_0.$$

yakınsamasını elde ederiz. Ayrıca aşağıdaki ifadenin varlığını biliyoruz:

$$\sigma(x^n - x) < \varepsilon \qquad\qquad \forall n \geq n_0.$$

Bu ifadeden de

$$\sigma(x^n - x^m) < \varepsilon.$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_k q_k|x^n - x^m|\right)^{p_r} < \varepsilon \qquad\qquad \forall m, n \geq n_0.$$

eşitsizliklerini kolayca yazabiliriz. Son olarak

$$\sigma(x^n - x) < \varepsilon \qquad\qquad \forall n \geq n_0.$$

ifadesini ele alırsak

$$\sigma(x^n - x) < \varepsilon \Rightarrow x_n \to x.$$

olduğunu yazabiliriz.

İkinci olarak, $ces\left[(p_n),(q_n)\right]$ dizi uzayının lineerliğinden aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$x = (x - x^n) + x^n.$$

Şimdi ise σ modüleri için yazalım:

$$\sigma(x^n - (x^n - x)).$$

Aşağıdaki eşitsizliklerden de

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_k q_k|x_k|\right)^{p_r} &= \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_k q_k|x_k - x_k^n| + \frac{1}{Q_{2^r}}\sum_k q_k|x_k^n|\right)^{p_r} \\
&\leq \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_k q_k|x_k^n - x_k|\right)^{p_r} + \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_k q_k|x_k^n|\right)^{p_r} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

olduğunu elde ederiz. Bu da $(x^n - x)$ dizisinin x.dizisine yakınsaması demektir. Bu sonuç bize $x \in ces\left[(p_n),(q_n)\right]$ olduğunu.ispatlar.Böylece $ces\left[(p_n),(q_n)\right]$ dizi uzayının Luxemburg normuna göre bir Banach uzayı olduğunun ispatı tamamlanmış olur. ■

Yardımcı Teorem 4.6 $x \in ces\,[(p_n),(q_n)]$ ve $(x_n) \subseteq ces\,[(p_n),(q_n)]$ verilsin. Eğer $n \to \infty$ iken $\sigma(x_n) \to \sigma(x)$ oluyorsa ve $n \to \infty$ olduğunda her $i \in N$ iken $x_n(i) \to (x(i)$ oluyorsa, bu takdirde $n \to \infty$ için $x_n \to x$ dir.

İspat. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\sigma(x) = \sum\limits_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum\limits_{k} q_k|x_k|\right)^{p_r} < \infty$ olduğunda

$$\sum_{r=r_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{k} q_k|x_k|\right)^{p_r} < \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{2^{M+1}} \tag{4.2}$$

yazabiliriz ki burada $k \in N$ için $M = max\{1,\, 2^{H-1}\}$, $H = \sup_r p_r$. $n \to \infty$ için

$$\sigma(x_n) - \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{k} q_k|x_n(i)|\right)^{p_r} \to \sigma(x) - \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{k} q_k|x(i)|\right)^{p_r} \tag{4.3}$$

yazılabildiğinden ve $n \to \infty$ için $x_n(i) \to (x(i)$ oldu ğundan, her $i \in N$ için

$$\sigma(x_n) - \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{k} q_k|x_n(i)|\right)^{p_r} \to \sigma(x) - \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{k} q_k|x(i)|\right)^{p_r} + \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{2^{M+1}} \tag{4.4}$$

olacak şekilde bir $n \geq n_0$ sayısı mevcuttur ve her $i \in N$ için $n \to \infty$ olduğunda $x_n(i) \to (x(i)$ yazabiliriz. Buradanda $n \to \infty$ için $\sigma(x_n) \to \sigma(x)$ elde edilir.

Sonuçta her $n \geq n_0$ için $|x_n(i) - x(i)| < \varepsilon$ olduğunu yazabiliriz.

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{k} q_k|x_n(i) - x(i)|\right)^{p_r} + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.5}$$

Buradan, (2.1), (2.2) and (2.3) ifadelerinden, $n \geq n_0$ için

$$
\begin{aligned}
\sigma(x_n - x) &= \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{k} q_k|x_n(i)-x(i)|\right)^{p_r} \\
&= \sum_{r=0}^{r_0}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_i|x_n(i)-x(i)|\right)^{p_r} + \sum_{r=r_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_i|x_n(i)-x(i)|\right)^{p_r} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + 2^M\left[\sum_{r=r_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_i|x_n(i)|\right)^{p_r} + \sum_{r=r_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_i|x(i)|\right)^{p_r}\right] \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + 2^M\left[\sigma(x_n) - \sum_{r=0}^{r_0}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_i|x_n(i)|\right)^{p_r} + \sum_{r=r_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_i|x(i)|\right)^{p_r}\right] \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + 2^M\left[\sigma(x) - \sum_{r=0}^{r_0}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_i|x(i)|\right)^{p_r} + \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{2^M}\sum_{r=r_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_i|x(i)|\right)^{p_r}\right] \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + 2^M\left[\sum_{r=r_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_i|x(i)|\right)^{p_r} + \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{2^M}\sum_{r=r_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_i|x(i)|\right)^{p_r}\right] \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + 2^M\left[2\sum_{r=r_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_i|x(i)|\right)^{p_r} + \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{2^M}\right] \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Bu son ifadede $n \to \infty$ olduğunda $\sigma(x_n - x) \to 0$ elde edilir. Böylece Lemma 5 ten, $n \to \infty$ için $||x_n - x|| \to 0$ elde edilir. ■

Şimdi vereceğimiz teorem ile uzayın Kadec-Klee (H özelliği) özelliğine sahip olduğu gösterilecektir.

Teorem 4.2 $ces\,[(p_n),(q_n)]$ uzayı Kadec-Klee (H) özelliğine sahiptir.

İspat. $||x_n|| \to 1$ ve $n \to \infty$ için $x_n \xrightarrow{w} x$ olduğunda $x \in S(ces\,[(p_n),(q_n)])$ ve $(x_n) \subseteq ces\,[(p_n),(q_n)]$ alalım. Lemma 3 (iii) den, $\sigma(x) = 1$ yazabiliriz. Böylece Lemma 5 (i) den $n \to \infty$ iken $\sigma(x_n) \to \sigma(x)$ dir. $x_n \xrightarrow{w} x$ olması ve $\pi_i(x) = x_i$; $\pi_i : ces\,[(p_n),(q_n)] \to R$ şeklinde tanımlı i^{th}-koordinat fonksiyonunun $ces\,[(p_n),(q_n)]$ uzayı üzerinde sürekli lineer bir fonksiyon olmasından, her $i \in N$ için $n \to \infty$ olduğunda $x_n(i) \to x(i)$ olduğu elde edilir. Böylece Yardımcı Teorem 6 dan, $n \to \infty$ olduğunda $x_n \to x$ elde ederiz. ■

Şimdi vereceğimiz teorem ile, uzayın rotund olmadığının ispatı yapılacaktır.

Teorem 4.3 $ces\,[(p_n),(q_n)]$ dizi uzayı rotund(R) özelliğe sahip değildir.

İspat. Bu teoremin ispatı için aksine bir örnek verelim. $x = (1,0,0,...)$ ve $y = (0,1,1,0,0,...)$ dizileri $ces\,[(p_n),(q_n)]$ uzayında iki dizi olsun. Kolayca görülebilir ki; $||x||_{ces[(p_n),(q_n)]} = 1$ ve $||y||_{ces[(p_n),(q_n)]} = 1$ $ces\,[(p_n),(q_n)]$ uzayının rotund özelliğine sahip olmadığını göstermek için $||\frac{x+y}{2}|| \neq 1$ olduğunu göstermeliyiz. Bu sonuç standard hesaplamalardan elde edilir. Sunuç olarak; $ces\left[(p_n),(q_n)\right]$ dizi uzayının R özelliğine sahip olmadığı ispatlanmış olur. ∎

Hatırlatma 4.1 Eğer $q_n = 1$ ise, her k için $ces\left[(p_n),(q_n)\right]$ uzayı Lim[7] tarafından çalışılan $ces(p)$ uzayına indirgenir. [5] te Sanhan ve Suantai $ces(p)$ uzayının rotund olmadığını göstermiştir. $ces\left[(p_n),(q_n)\right]$ uzayının rotund özelliğine sahip olmadığının başka bir gösterilişi de yukarıda verdiğimiz içermeden de elde edilebilir. Ayrıca, $ces(p)$ ve $ces\left[(p_n),(q_n)\right]$ uzayları arasındaki ilişkiden, $ces\left[(p_n),(q_n)\right]$ uzayının LUR özelliğine sahip olmadığını da elde ederiz.

5 $ces(X, p_n, q_n)$ UZAYININ BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, $ces(X, p_n, q_n)$ uzayının geometrik özelliklerinin incelenmesinde kullanacağımız bazı önermeler ve ispatlarını vereceğiz.

Önerme 5.1 σ fonksiyoneli $ces(X, p_n, q_n)$ uzayında bir konveks modülerdir.

İspat. $x, y \in ces(X, p_n, q_n)$ verilsin. Buradan açıktır ki;
(i) $\sigma(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ve;
(ii) her $|\lambda| = 1$ şartına sahip her λ skaleri için $\sigma(\lambda x) = \sigma(x)$ dir.

$$\begin{aligned}
\sigma(\lambda x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_{r} q_k ||\lambda x(k)|| \right)^{p_r} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} |\lambda|^{p_r} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_{r} q_k ||x(k)|| \right)^{p_r} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_{r} q_k ||x(k)|| \right)^{p_r} \\
&= \sigma(x).
\end{aligned}$$

(iii) $\lambda + \beta = 1$ şartına sahip $\lambda, \beta \geq 0$ ve her bir $r \in \mathbb{N}$ için $t \to |t|^{p_r}$ dönüşümünün konveksliğinden,

$$\begin{aligned}
\sigma(\lambda x + \beta y) &= \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_{r} q_k ||\lambda x(k) + \beta y(k)|| \right)^{p_r} \\
&\leq \lambda^{p_r} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_{r} q_k ||x(k)|| \right)^{p_r} + \beta^{p_r} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_{r} q_k ||y(k)|| \right)^{p_r} \\
&\leq \lambda \sigma(x) + \beta \sigma(y).
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Önerme 5.2 (i) Eğer $\|x\|_L < 1$ ise bu takdirde $\sigma(x) \leq \|x\|_L$ dir.
(ii) $\|x\|_L = 1$ olması için gerek ve yeter şart $\sigma(x) = 1$ olmasıdır.

İspat. Bu önermenin ispatı Sanhan-Suantai de verilen standard tekniklerle yapılabildiğinden, burada verilmemiştir. ■

Önerme 5.3 $x \in ces(X, p_n, q_n)$ için aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

(i) eğer $0 < a < 1$ ve $||x||_L > a$ ise bu takdirde $H = \sup_r p_r$ olmak üzere; $\sigma(x) > a^H$ dir.

(ii) eğer $a \geq 1$ ve $||x||_L < a$ ise bu takdirde $\sigma(x) < a^H$ dir.

İspat. Bu önermenin ispatı Sanhan-Suantai de verilen standard tekniklerle yapılabildiğinden, burada verilmemiştir. ■

Önerme 5.4 (x_n) dizisi $ces(X, p_n, q_n)$ uzayında bir dizi olsun.

(i) eğer $\lim_{n\to\infty} ||x_n||_L = 1$ ise bu takdirde $\lim_{n\to\infty} \sigma(x_n) = 1$ dir,

(ii) eğer $\lim_{n\to\infty} \sigma(x_n) = 0$ ise bu takdirde $\lim_{n\to\infty} ||x_n||_L = 0$ dir.

İspat.

(i) Kabul edelim ki $\lim_{n\to\infty} ||x_n||_L = 1$ ve $\varepsilon \in (0,1)$.verilsin. Bu takdirde her $n \geq n_0$.için $1-\varepsilon < ||x_n||_L < 1+\varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 bulunabilir. Her $n \geq n_0$.için $(1-\varepsilon)^H < ||x_n||_L < (1+\varepsilon)^H$ yazılabildiğinden, Önerme 3.3 (i) ve (ii) den, $\sigma(x_n) \geq (1-\varepsilon)^H$ ve $\sigma(x_n) \leq (1-\varepsilon)^H$.elde edilir. Böylece $\lim_{n\to\infty} \sigma(x_n) = 1$ sonucuna ulaşılır.

(ii) Kabul edelim ki $||x_n||_L \nrightarrow 0$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $||x_{n_k}||_L > \varepsilon$ şartını sağlayacak şekilde bir $\varepsilon \in (0,1)$ ve (x_n) in bir (x_{n_k}) altdizisi bulunabilir. Önerme 3.3 (i) den, her $k \in \mathbb{N}$ için $\sigma(x_{n_k}) > \varepsilon^H$ olduğu elde edilir. Bu da $n \to \infty$ için $\sigma(x_{n_k}) \nrightarrow 0$ olmasını gerektirir. Böylece $\sigma(x_n) \nrightarrow 0$ sonucuna ulaşılır.

■

Şimdi ise $ces(X, p_n, q_n)$ dizi uzayının Luxemburg normuna göre bir Banach uzayı olduğu gösterilecektir.

Teorem 5.1 $ces(X, p_n, q_n)$ dizi uzayı aşağıda verilen Luxemburg normuna göre bir Banach uzayıdır:

$$\|x\|_L = \inf\left\{\tau > 0 : \sigma\left(\frac{x}{\tau}\right) \leq 1\right\}.$$

İspat. İspat için $ces(X, p_n, q_n)$ uzayında verilen her Cauchy dizisinin Luxemburg normuna göre yakınsak olduğunu göstereceğiz. $(x^n(k))$ dizisi $ces(X, p_n, q_n)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun ve $\varepsilon \in (0,1)$ alalım. Böylece her bir $m, n \geq n_0$ için $||x^n - x^m||_L < \varepsilon^M$ olacak şekilde bir n_0 sayısı bulunabilir. Önerme 3.2 (i) den, her bir $m, n \geq n_0$ için

$$\sigma(x^n - x^m) < ||x^n - x^m||_L < \varepsilon^M, \tag{5.1}$$

elde ederiz, yani her bir $m, n \geq n_0$ için

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_k ||x^n(k) - x^m(k)||\right)^{p_r} < \varepsilon^M,$$

yazabiliriz. Sabir her bir k için

$$||x^n(k) - x^m(k)|| < \varepsilon.$$

olduğunu yazabiliriz. Böylece $(x^n(k))$ dizisinin $\mathbb{R}$ kümesinde bir Cauchy dizisi olduğunu elde etmiş oluruz. $\mathbb{R}$ bir tam uzay olduğundan; $m \to \infty$ için $x^m(k) \to x(k)$ elde edilir. Böylece sabit her bir k ve her $n \geq n_0$ için

$$||x^n(k) - x(k)|| < \varepsilon,$$

yazabiliriz. Şimdi ise $(x(k))$ dizisinin $ces(X, p_n, q_n)$ uzayının bir elemanı olduğunu göstereceğiz. (3.1) eşitsizliğinden her bir $m, n \geq n_0$ için

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x^n(k) - x^m(k)|| \right)^{p_r} < \varepsilon$$

yazabiliriz. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $x^m(k) \to x(k)$ yazabiliriz, böylece $m \to \infty$ için

$$\sigma(x^n - x^m) \to \sigma(x^n - x)$$

yazabiliriz. Böylece her bir $n \geq n_0$ ve $m \to \infty$ için

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x^n(k) - x^m(k)|| \right)^{p_r} \to \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x^n(k) - x(k)|| \right)^{p_r}$$

yazılır ve (3.1) ifadesinden, her bir $n \geq n_0$ için $\sigma(x^n - x) < ||x^n - x||_L < \epsilon$ elde edilir. Bu durumda $n \to \infty$ için $x_n \to x$ olması demektir. Böylece $(x_{n_0} - x) \in ces(X, p_n, q_n)$ elde edilir. $ces(X, p_n, q_n)$ uzayı bir lineer uzay olduğundan, $x = x_{n_0} - (x_{n_0} - x) \in ces(X, p_n, q_n)$.elde edilir. Bu yüzden vektör değerli $ces(X, p_n, q_n)$ dizi uzayı Luxemburg normuna göre bir Banach uzayıdır. Bu da ispatı tamamlar. ■

Önerme 5.5 $x \in ces(X, p_n, q_n)$ ve $(x_n) \subseteq ces(X, p_n, q_n)$ olsun. Eğer $n \to \infty$ için $\sigma(x_n) \to \sigma(x)$ ve $n \to \infty$ için $x_n(k) \to x(k)$ ise bu takdirde her bir $k \in \mathbb{N}$ için $n \to \infty$ olduğunda $x_n \to x$ dir.

İspat. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\sigma(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x(k)|| \right)^{p_r} < \infty$ olduğundan, $M = max\{1,\ 2^{H-1}\}$ ve $H = \sup_r p_r$ olmak üzere

$$\sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x(k)|| \right)^{p_r} < \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^M}\ , \tag{5.2}$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. $n \to \infty$ için $\sigma(x_n) - \sum_{r=0}^{r_0} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x_n(k)|| \right)^{p_r} \to \sigma(x) - \sum_{r=0}^{r_0} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x(k)|| \right)^{p_r}$ yakınsaması mevcut olduğ undan ve $n \to \infty$ için $x_n(k) \to x(k)$ ve de her bir $k \in \mathbb{N}$ için $n \geq n_0$ olduğunda

$$\left| \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x_n(k)|| \right)^{p_r} - \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x(k)|| \right)^{p_r} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^M}, \tag{5.3}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabilir. Ayrıca, $n \to \infty$ için $x_n(k) \to x(k)$ ve her bir $k \in \mathbb{N}$ için $n \to \infty$ olduğunda $\sigma(x_n) \to \sigma(x)$ olur. Böylece her bir $n \geq n_0$ için $||x_n(k) - x(k)||\,| < \varepsilon$. Sonuç olarak; her $n \geq n_0$ için,

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x_n(k) - x(k)|| \right)^{p_r} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.4}$$

yazabiliriz. Buradan,(3.2), (3.3) ve (3.4) ifadelerinden $n \geq n_0$ için aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
\sigma(x_n - x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x_n(k) - x(k)|| \right)^{p_r} \\
&= \sum_{r=0}^{r_0} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x_n(k) - x(k)|| \right)^{p_r} + \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x_n(k) - x(k)|| \right)^{p_r} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left[\sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x_n(k)|| \right)^{p_r} + \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x(k)|| \right)^{p_r} \right] \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left[\sigma(x_n) - \sum_{r=0}^{r_0} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x_n(k)|| \right)^{p_r} + \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x(k)|| \right)^{p_r} \right] \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left[\sigma(x) - \sum_{r=0}^{r_0} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x(k)|| \right)^{p_r} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^M} + \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x(k)|| \right)^{p_r} \right. \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left[\sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x(k)|| \right)^{p_r} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^M} + \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x(k)|| \right)^{p_r} \right] \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left[2 \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k ||x(k)|| \right)^{p_r} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^M} \right] \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Bu son ifadeler bize $n \to \infty$ için $\sigma(x_n - x) \to 0$ olduğunu gösterir.Önerme 3.4 (ii) den,$n \to \infty$ için $||x_n - x||_L \to 0$ olduğunu elde ederiz. ∎

Aşağıda vereceğimiz teoremlerde $ces(X, p_n, q_n)$.dizi uzayının geometrik özellikleri incelenecektir.

Teorem 5.2 $ces(X, p_n, q_n)$ uzayı Kadec-Klee (H-property) özelliğine sahiptir.

İspat. $||x_n||_L \to ||x||_L = 1$ ve $n \to \infty$ olduğunda $x_n \xrightarrow{w} x$ olacak şekilde $x \in S(ces(X, p_n, q_n))$ ve $(x_n) \subseteq B(ces(X, p_n, q_n))$ verilsin. Önerme 3.2 (ii) den, $\sigma(x) = 1$ yazabiliriz, böylece Önerme 3.4 (i) den $n \to \infty$ için $\sigma(x_n) \to \sigma(x)$ elde edilir. $x_n \xrightarrow{w} x$ olduğundan ve de $\pi_k(x) = x(k)$ şeklinde tanımlı $\pi_i : ces(X, p_n, q_n) \to \mathbb{R}$ i^{th}-koordinat dönüşümünün $ces(X, p_n, q_n)$ üzerinde sürekli lineer bir fonksiyonel olmasından dolayı her $k \in \mathbb{N}$ için $n \to \infty$ iken $x_n(k) \to x(k)$ elde edilir. Buradan Önerme 3.5 ten $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ olduğu elde edilir. ∎

Teorem 5.3 Her bir $k \in \mathbb{N}$ ve $p_k > 1$ olmak üzere $p = (p_k)$, reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu takdirde; $ces(X, p_n, q_n)$ uzayı rotund(R) özelliğini sağlamaz.

İspat. Teoremin ispatı için, aksine bir örnek verelim:
$z \in X$ elemanı için $||z|| = 1$ olsun. $q_k = \frac{3}{4}$ alalım ve her $k \in \mathbb{N}$ için $x = (0, 2z, 0, 0, ...)$ ve $y = (0, z, z, 0, ...)$ olarak verilsin. Bu takdirde $\sigma(x) = \sigma(y) = 1$ ve $\sigma(\frac{x+y}{2}) = 1$ dir. Bu da $ces\,(X, p_n, q_n)$ uzayının rotund olmadığını ispatlar. ■

Hatırlatma 5.1 $ces(X, p_n, q_n)$ uzayında eğer $q_k = 1$ alınırsa; vektör değerli dizi uzayı $ces(X, p)$ uzayını elde ederiz. $p_k > 1$ ve $q_k = 1$ olsun. İki tane diziyi $x_k = (1, 0, 0, 0, ...)$ ve $y_k = (0, 1, 1, 0, ...)$ şeklinde seçelim. Bu takdirde kolayca görülebilir ki

$$\sigma(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^r} \sum_{r} ||x_k|| \right)^{p_r}$$

olarak tanımlandığında, $\sigma(x) = \sigma(\frac{x+y}{2}) = \sigma(y) = 1$ elde edilir. Bu nedenle $ces(X, p)$ uzayı $q_k = 1$ için rotund değildir. Aynı zamanda, eğer $X = \mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$ ve de her $k \in \mathbb{N}$ için $q_k = 1$ ise bu durumda Sanhan-Suantai tarafından tanımlanan $ces(p)$ uzayını elde ederiz. Yazarlar bu uzayın rotund olmadığını daha önce göstermişlerdir.

6 SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Son bölüm olan bu bölümde $ces[(p_n),(q_n)]$ ve $ces(X,p_n,q_n)$ uzaylarının geometrik yapıları ve özellikleri ile ilgili literatürden elde edilen sonuçlar listelenecektir.
Yardımcı Teorem 6.1 $ces\,[(p_n),(q_n)]$ dizi uzayı üzerinde tanımlı σ fonksiyoneli bir konveks modülerdir.

Yardımcı Teorem 6.2 $x \in ces\,[(p_n),(q_n)]$ olmak üzere, $ces\,[(p_n),(q_n)]$ üzerinde tanımlı σ modüleri aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır:

(i) Eğer $0 < a < 1$,ise bu takdirde, $a^H\sigma(\frac{x}{a}) \leq \sigma(x)$ ve $\sigma(ax) \leq a\sigma(x)$ dir,

(ii) Eğer $a > 1$ ise bu takdirde $\sigma(x) \leq a^H\sigma(\frac{x}{a})$ dir,

(iii) Eğer $a \geq 1$, then $\sigma(x) \leq a\sigma(x) \leq \sigma(ax)$

Yardımcı Teorem 6.3 Herhangi $x \in ces\,[(p_n),(q_n)]$, için

(i) Eğer $\|x\| < 1$, ise bu takdirde $\sigma(x) \leq \|x\|$,

(ii) Eğer $\|x\| > 1$, ise bu takdirde $\sigma(x) \geq \|x\|$,

(iii) Eğer $\|x\| = 1 \Leftrightarrow \sigma(x) = 1$,

(iv) Eğer $\|x\| < 1$, ise bu takdirde $\sigma(x) \leq 1$,

(v) Eğer $\|x\| > 1$, ise bu takdirde $\sigma(x) \geq 1$.

Yardımcı Teorem 6.4 $x \in ces\,[(p_n),(q_n)]$ olduğunda aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

(i) eğer $0 < a < 1$ ve $||x|| > a$ ise bu takdirde, $\sigma(x) > a^H$,

(ii) eğer $a \geq 1$ ve $||x|| < a$ ise bu takdirde, $\sigma(x) < a^H$.

Yardımcı Teorem 6.5 $(x_n) \in ces\,[(p_n),(q_n)]$ olsun.

(i) eğer $\lim\limits_{\infty}||x_n|| = 1$ ise bu takdirde; $\lim\limits_{\infty}\sigma(x_n) = 1$,

(ii) eğer $\lim\limits_{\infty}\sigma(x_n) = 0$ isse bu takdirde $\lim\limits_{\infty}x_n = 0$.

Teorem 6.1 $ces\,[(p_n),(q_n)]$ uzayı

$$||x|| = inf\,\{\rho > 0 : \sigma()x\rho \leq 1\}$$

şeklinde verilen Luxemburg normu ile beraber bir Banach uzayıdır.

Yardımcı Teorem 6.6 $x \in ces\,[(p_n),(q_n)]$ ve $(x_n) \subseteq ces\,[(p_n),(q_n)]$ verilsin. Eğer $n \to \infty$ iken $\sigma(x_n) \to \sigma(x)$ oluyorsa ve $n \to \infty$ olduğunda her $i \in N$ iken $x_n(i) \to (x(i)$ oluyorsa, bu takdirde $n \to \infty$ için $x_n \to x$ dir.

Teorem 6.2 $ces\,[(p_n),(q_n)]$ uzayı Kadec-Klee (H) özelliğine sahiptir.

Teorem 6.3 $ces\left[(p_n),(q_n)\right]$ dizi uzayı rotund(R) özelliğe sahip değildir.

Hatırlatma 6.1 Eğer $q_n = 1$ ise, her k için $ces\left[(p_n),(q_n)\right]$ uzayı Lim[7] tarafından çalışılan $ces(p)$ uzayına indirgenir. [5] te Sanhan ve Suantai $ces(p)$ uzayının rotund olmadığını göstermiştir. $ces\left[(p_n),(q_n)\right]$ uzayının rotund özelliğine sahip olmadığının başka bir gösterilişi de yukarıda verdiğimiz içermeden de elde edilebilir.

Ayrıca, $ces(p)$ ve $ces\left[(p_n),(q_n)\right]$ uzayları arasındaki ilişkiden, $ces\left[(p_n),(q_n)\right]$ uzayının LUR özelliğine sahip olmadığını da elde ederiz.

Önerme 6.1 σ fonksiyoneli $ces(X,p_n,q_n)$ uzayında bir konveks modülerdir.

Önerme 6.2 (i) Eğer $\|x\|_L < 1$ ise bu takdirde $\sigma(x) \leq \|x\|_L$ dir.

(ii) $\|x\|_L = 1$ olması için gerek ve yeter şart $\sigma(x) = 1$ olmasıdır.

Önerme 6.3 $x \in ces(X,p_n,q_n)$ için aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

(i) eğer $0 < a < 1$ ve $||x||_L > a$ ise bu takdirde $H = \sup_r p_r$ olmak üzere; $\sigma(x) > a^H$ dir.

(ii) eğer $a \geq 1$ ve $||x||_L < a$ ise bu takdirde $\sigma(x) < a^H$ dir.

Önerme 6.4 (x_n) dizisi $ces(X,p_n,q_n)$ uzayında bir dizi olsun.

(i) eğer $\lim_{n\to\infty} ||x_n||_L = 1$ ise bu takdirde $\lim_{n\to\infty} \sigma(x_n) = 1$ dir,

(ii) eğer $\lim_{n\to\infty} \sigma(x_n) = 0$ ise bu takdirde $\lim_{n\to\infty} ||x_n||_L = 0$ dir.

Teorem 6.4 $ces(X,p_n,q_n)$ dizi uzayı aşağıda verilen Luxemburg normuna göre bir Banach uzayıdır:

$$\|x\|_L = \inf\left\{\tau > 0 : \sigma\left(\frac{x}{\tau}\right) \leq 1\right\}.$$

Önerme 6.5 $x \in ces(X,p_n,q_n)$ ve $(x_n) \subseteq ces(X,p_n,q_n)$ olsun. Eğer $n \to \infty$ için $\sigma(x_n) \to \sigma(x)$ ve $n \to \infty$ için $x_n(k) \to x(k)$ ise bu takdirde her bir $k \in \mathbb{N}$ için $n \to \infty$ olduğunda $x_n \to x$ dir.

Teorem 6.5 $ces(X,p_n,q_n)$ uzayı Kadec-Klee (H-property) özelliğine sahiptir.

Teorem 6.6 Her bir $k \in \mathbb{N}$ ve $p_k > 1$ olmak üzere $p = (p_k)$, reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu takdirde; $ces(X,p_n,q_n)$ uzayı rotund(R) özelliğini sağlamaz.

Hatırlatma 6.2 $ces(X,p_n,q_n)$ uzayında eğer $q_k = 1$ alınırsa; vektör değerli dizi uzayı $ces(X,p)$ uzayını elde ederiz. $p_k > 1$ ve $q_k = 1$ olsun. İki tane diziyi $x_k = (1,0,0,0,...)$ ve $y_k = (0,1,1,0,...)$ şeklinde seçelim. Bu takdirde kolayca görülebilir ki

$$\sigma(x) = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_r ||x_k||\right)^{p_r}$$

olarak tanımlandığında, $\sigma(x) = \sigma(\frac{x+y}{2}) = \sigma(y) = 1$ elde edilir. Bu nedenle $ces(X, p)$ uzayı $q_k = 1$ için rotund değildir. Aynı zamanda, eğer $X = \mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$ ve de her $k \in \mathbb{N}$ için $q_k = 1$ ise bu durumda Sanhan-Suantai tarafından tanımlanan $ces(p)$ uzayını elde ederiz.

KAYNAKLAR

S.T. Chen, Geometry of Orlicz spaces, Dissertationes Math., (1996), 356.

Y.A. Cui and H. Hudzik, On the Banach-Saks and weak Banach-Saks properties of some Banach sequence spaces, Act. Sci. Math. (Szeged), 65(1999), 179-187.

Y.A. Cui., H. Hudzik and C. Meng, On some local geometry of Orlicz sequence spaces equipped the Luxemburg norms, Acta Sci. Math. Hungarica, 80(1-2)(1998),143-154.

Y.A. Cui, H. Hudzik and R. Pliciennik, Banach-Saks propert in some Banach sequence spaces, Annales Math. Polonici, 65(2000),193-202.

J. Diestel, Geometry of Banach spaces- Selected Topics, Springer-Verlag, (1984).

R. Grzaslewicz, H. Hudzik and W. Kurc, Extreme and exposed points in Orlicz spaces, Canad. J. Math. Bull, 44(1992), 505-515.

H. Hudzik, Orlicz spaces without strongly extreme points and without H-points, Canad.math. Bull, 35(1992), 1-5

H. Hudzik and D. Pallaschke, On some convexity properties of Orlicz sequence spaces, Math. Nachr., 186(1997), 167-185.

V. Karakaya, Some Geometric Properties of Sequence Spaces Involving Lacunary Sequence, Journal of Inequalities and Applications Volume (2007), Article ID 81028, 8 pages, doi:10.1155/2007/81028.

F.M. Khan and M.F. Rahman, Infinite matrices and Cesaro sequence spaces, Analysis Mathematica, 23(1997), 3-11.

E. Kreyszig, (1978). Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley

B.L. Lin, P.K.Lin and S.L. Troyanski, Characterization of denting points, Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988), 526-528.

K.P. Lim, Matrix transformation on certain sequence spaces, Tamkang J. of Math., 8, No. 2(1977), 213-220.

K.P. Lim, Matrix transformation in the Cesaro sequence spaces, Kyungpook Math. J., 14(1974), 221-227.

Y.Q.Liu, B.E.Wu and Y.P. Lee, Method of sequence spaces, Guangdong of Science and Technology Press, (1996) (in Chinese).

I.J.Maddox, (1970). Elements of Functional Analysis, Cambridge University Pres., Cambridge

M. Mursaleen, F. Başar, B. Altay, On the Euler sequence spaces which include the spaces l_p and l_∞ II, Nonlinear Analysis 65 (2006) 707-717.

M.Mursaleen, Vakeel, A. Khan, Generalized Cesáro vector-valued sequence space and matrix transformations, Information Sciences, 173 (2005), 11-21.

B. Musayev ve M. Alp, (2000). Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Ankara.

J. Musielak, Orlicz spaces and modular spaces, lecture Notes in Math. 1034, Springer-Verlag, (1983).

W. Sanhan and S. Suantai, Some geometric properties of Cesáro sequence space, Kyungpook Math. J., 43(2003), 191-197.

E. Savaş, V. Karakaya and N. Şimşek, Some $\ell(p)$-Type New Sequence Spaces and Their Geometric Properties, Abstract and Applied Analysis, Volume (2009), Article ID 696971, 12 pages, doi:10.1155/2009/696971.

J. S. Shue, Cesáro sequence spaces, Tamkang J. Math. 1 (1970) 143-150.

S. Suantai, On the H- property of some Banach sequence spaces, Arch. Math.(BRNO), Tomus (39) (2003), 309-316.

C. Sudsukh, P. Pantaragphong, O. Arunphalungsanti, Matrix transformations on Cesàro vector valued sequence spaces, Kyungpook Math. J. 44 (2004), 157-166.

N. Şimşek and V. Karakaya, On some geometrical properties of generalized modular spaces of Cesáro type defined by weighted means, Journal of Inequalities and Applications, Volume (2009), Article ID 932734, 13 pages, doi:10.1155/2009/932734.

N. Şimşek and V. Karakaya, Structure and some geometric properties of generalized Cesaro sequence space, Int. J. Contemp. Math. Sci. Vol:3 (2008), 389-399.

N. Şimşek and V. Karakaya, On some geometrical properties of certain vector-valued sequence spaces, Far East Journal of Math. Sci., Vol:40(2), (2010), 189-200.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Zhamile ASKEROVA

Doğum Yeri ve Yılı : Dağıstan, 26.04.1981

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : Rusça, Türkçe

E-posta : cemile0581@mail.ru

Eğitim Durumu

Lise : Çetvertaya Skola, 1998

Lisans : Dgy. Dagestan Gasudarstveniy Üniversitesi
Matematik Bölümü, 2005

Yüksek Lisans : İstanbul Ticaret Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2018

Yayınları

Şimşek, N., Askerova, Z., 2016. On Some Geometrical Properties, 2nd International Conference on Analysis and Its Applications (ICAA-2016), Kırşehir/Turkey, 12-15 July, p.215.