T.C. İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAOUENDİ-GRUSHİN OPERATÖRÜNE İLİŞKİLENDİRİLMİŞ LİNEER OLMAYAN SİNGÜLER PARABOLİK DENKLEMLER

Erkan GÜRSU

Danışman
Prof. Dr. İsmail KÖMBE

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
İSTANBUL- 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

ERKAN GÜRSU tarafından hazırlanan **"BAOUENDİ-GRUSHİN OPERATÖRÜNE İLİŞKİLENDİRİLMİŞ LİNEER OLMAYAN SİNGÜLER PARABOLİK DENKLEMLER"** adlı tez çalışması 05/07/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde başarı ile savunularak, İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **Prof. Dr. İsmail KÖMBE**
İstanbul Ticaret Üniversitesi

Jüri Üyesi **Dr. Öğretim Üyesi Abdullah YENER**
İstanbul Ticaret Üniversitesi

Jüri Üyesi **Doç. Dr. Ahmet DURAN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Onay Tarihi: 09.07.2019

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK
Enstitü Müdürü

AKADEMİK VE ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

09.07.2019

Er.Gursu

Erkan GÜRSU

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAOUENDİ-GRUSHİN OPERATÖRÜNE İLİŞKİLENDİRİLMİŞ LİNEER OLMAYAN SİNGÜLER PARABOLİK DENKLEMLER

Erkan GÜRSU

İstanbul Ticaret Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İsmail KÖMBE
2019, 33 sayfa

Bu tezin amacı Baouendi-Grushin vektör alanlarıyla ilişkilendirilmiş olan aşağıdaki doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemin

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_\gamma \left(a(z) \left| \nabla_\gamma u \right|^{p-2} \nabla_\gamma u \right) + V(z) u^{p-1} & \Omega \times (0, T) \\ u(\mathrm{z}, \mathrm{t}) = u_0(z) > 0 & \partial\Omega \times (0, T) \\ u(\mathrm{z}, \mathrm{t}) = 0 & \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

pozitif çözümünün hangi şartlarda mevcut olmadığının araştırılmasıdır. Burada Ω R^{d+k} için Carnot Carathedory metrik yuvarı, a(z)$\in L^1_{loc}(\Omega)$ pozitif fonksiyon ve $V \in L^1_{loc}(\Omega)$ dır.

Hardy eşitsizlikleri singüler(tekil) potansiyel içeren, doğrusal ya da doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerde pozitif çözümün varlığı ya da yokluğunu göstermede önemli bir rol oynamaktadır. Bu tezde Baouendi-Grushin vektör alanlarıyla ilişkilendirilmiş bazı Hardy tipi eşitsizlikler de çalışılmış ve problemlerde uygulaması gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bouendi- Grushin vektör alanı, doğrusal olmayan parabolik denklem, Hardy eşitsizliği, pozitif çözümün yokluğu.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

NONLINEAR SINGULAR PARABOLIC EQUATIONS ASSOCIATED WİTH BAOUENDI-GRUSHIN OPERATOR

Erkan GÜRSU

İstanbul Commerce University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. İsmail KÖMBE

2019, 33 pages

The purpose of this thesis is to investigate the conditions under which the positive solution of the following nonlinear partial differential equation associated with the Bouendi-Grushin vector fields not avaiable.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_\gamma \left(a(z) \left| \nabla_\gamma u \right|^{p-2} \nabla_\gamma u \right) + V(z) u^{p-1} & \Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{z},\mathrm{t}) \ = u_0(z) > 0 & \partial\Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{z},\mathrm{t}) \ = 0 & \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

where Ω Carnot Carathedory metric space, a(z)$\in L^1_{loc}(\Omega)$ positive function and $V \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Hardy inequalities involving singular potential play an important role in linear or nonlinear partial differential equations. In this thesis, some Hardy type inequalities related to Baouendi-Grushin vector fields have also been studied and their application has been shown.

Keywords: Bouendi-Grushin vector field, Hardy inequality, nonexistence of a positive solution, nonlinear parabolic equation.

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Prof. Dr. İsmail Kömbe'ye teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Tezi yazım ve imla açısından kontrol edip çeşitli düzenlemelerde bulunan Reyhan Tellioğlu'na ayrıca teşekkür ederim.

Erkan GÜRSU
İSTANBUL, 2019

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}^{n}$	n boyutlu Öklid uzayı
∇	Öklid uzayında tanımlı gradyan vektör
Δ	Öklid uzayında Laplace operatör
$\mathrm{D}(a,\varepsilon)$	Öklid uzayında a merkezli ε yarıçaplı açık yuvar
$\mathrm{L}^{P}(\Omega)$	Ω bölgesindeki p.kuvvetten integrallenebilen fonksiyonların ailesi
$\mathrm{L}^{p}_{loc}(\Omega)$	Ω bölgesindeki p-yerel integrallenebilen fonksiyonların sınıfı
$\mathrm{W}^{k,p}$	Sobolev uzayı
$C_0^k(\Omega)$	Ω bölgesinde, k.mertebeden sürekli türevlenebilir kompakt desteğe sahip fonksiyonların sınıfı
z	Baouendi Grushin operatöründe bir nokta
X_i, Y_i	Baouendi Grushin operatöründe vektör alanları
∇_{γ}	Baouendi Grushin operatöründe gradyant vektör
Δ_{γ}	Baouendi Grushin operatöründe laplace operatör
Q	Baouendi Grushin operatöründe homojen boyut
ρ	Baouendi Grushin operatöründe doğal norm fonksiyonu

1. GİRİŞ

Birçok fiziksel, kimyasal ve biyolojik olayların matematiksel olarak modellenmesinde kısmi diferansiyel denklem kullanılır. Genel olarak bir kısmi diferansiyel denklem; birden fazla bağımsız değişken, bir tane bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre kısmi türevlerini içeren denklemdir.

İki değişkenli bir u=$u(x,y)$ fonksiyonunun x ve y değişkenlerine göre kısmi türevleri aşağıdaki limitler mevcut olmak şartıyla,

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{a\to 0}\frac{u(x+a,y)-u(x,y)}{a},$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{b\to 0}\frac{u(x,y+b)-u(x,y)}{b}$$

şeklinde tanımlanır.

İki değişkenli bir u=$u(x, y)$ fonksiyonu için en genel haliyle kısmi diferansiyel denklem kapalı formda

H=$(x, y, u, u_x,\ u_y, u_{xy,} u_{xx}, u_{yy})$=0

şeklinde yazılır.

Bir kısmi diferansiyel denklemin mertebesi, denklemdeki en yüksek mertebeli kısmi türevin mertebesine denir. Bir kısmi diferansiyel denklem, bağımlı değişkene ve denklemdeki kısmi türevlerine göre birinci dereceden ise lineerdir. Aksi halde lineer değildir. Bir kısmi diferansiyel denklemin genel çözümü denklemin mertebesi kadar keyfi fonksiyon ihtiva eden ve denklemi sağlayan yüzey aileleridir.

Kısmi diferansiyel denklemler; parabolik, eliptik ve hiperbolik olmak üzere 3 kısımda sınıflandırılır.

Tanım 1.1: Bağımsız değişkenleri x,y ve bağımlı değişkeni u olan ikinci mertebeden lineer kısmi türevli denklemlerin en genel hali

$$\mathrm{A}\, u_{xx} + \mathrm{B}\, u_{xy} + \mathrm{C}\, u_{yy} + \mathrm{D}\, u_x + \mathrm{E}\, u_x + \mathrm{F}\, u_y + G = 0 \tag{1.1}$$

şeklinde verilir.

Eğer A, B, C sayıları için

i) $B^2 - 4AC = 0$ ise (1.1) denklemine **parabolik denklem** ,

ii) $B^2 - 4AC < 0$ ise (1.1) denklemine **eliptik denklem**,

iii) $B^2 - 4AC > 0$ ise (1.1) denklemine **hiperbolik denklem** denir.

Bazı önemli ikinci mertebeden iki değişkenli kısmı türevli denklem örnekleri

$u_{xx+}u_{yy} = 0$ (Laplace Denklemi) (1.2)

u_t=k u_{xx} (Isı Denklemi) (1.3)

u_{tt}=$c^2 u_{xx}$ (Dalga Denklemi) (1.4)

Bağımsız değişkenler x_1 , x_2 , x_3 ,..., x_n ,bağımsız değişkenleri içeren bağımlı değişken u, bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlerine göre kısmi türevlerini içeren bir kısmi diferansiyel denklem kapalı formda en genel haliyle

$G = (x_1, x_2, .. x_n, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, u_{x_i x_j x_k}, \dots)$=0

şeklinde yazılır. Burada u_{x_i},$u_{x_i x_j}$, $u_{x_i x_j x_k}$,... u fonksiyonunun sonlu sayıdaki kısmi türevlerini ifade etmektedir.

(1.2), (1.3), (1.4) denklemlerinin n değişken içeren halleri aşağıdaki gibi verilir.

$u_{x_1 x_1 +} u_{x_2 x_2} + \cdots + u_{x_n x_n} = \Delta u = 0$ (Laplace Denklemi)

u_t= Δu (Isı Denklemi)

u_{tt}=Δu (Dalga Denklemi)

Parabolik tipten ve doğrusal olan kısmi türevli denklemlerin en bilinen hali

u_t= Δu

şeklinde verilen ısı denklemidir.

Bu tezde yoğun olarak parabolik tipten fakat doğrusal olmayan denklemler üzerinde çalışılacaktır. Tezin son kısmında ise doğrusal olmayan eliptik kısmı türevli denklemin uygulamasına yer verilecektir.

Doğrusal olmayan fakat parabolik tipten olan difüzyon denkleminin en bilinen hali

$u_t = \Delta u^m$

şeklindedir. Bu denklem aşağıdaki denklemleri de içermektedir.

i) m=1 ise denklem doğrusal ısı denklemidir.

ii) $m > 1$ ise denklem yavaş difüzyon denklemidir.

iii) $0 < m < 1$ ise denklem hızlı difüzyon denklemidir.

iv) $m < 0$ ise denklem süper hızlı difüzyon denklemidir.

Bu denklemin uygulama alanlarına örnek olarak, gaz kinetiği, popülasyon dinamikleri verilebilir.

Bir diğer önemli doğrusal olmayan parabolik tipten denklem ise

$u_t = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \qquad 1<p<n$

şeklinde tanımlanan p-Laplace denklemidir.

Yukarıda verilen difüzyon denklemlerinin en temel karakteristik özelliği; başlangıç koşulu pozitif ise diğer çözümleri de pozitiftir.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Bu bölümde Öklid uzayında ve Baouendi-Grushin operatörlerinde tezin ana problemine ait önceki çalışmalar literatür özeti olarak açıklanmaya çalışılmıştır.

Baras ve Goldstein (1984), Öklid uzayında ters kare potansiyeline sahip aşağıdaki denklemin pozitif çözümünün olmadığını gösterdiler.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta \mathrm{u} + \frac{c}{|x|^2} u \tag{2.1}$$

Garcia ve Peral (1998), (2.1) denklemini Öklid uzayında aşağıdaki şekilde genişletti ve denklemin pozitif çözümü olmadığını gösterdiler.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_\mathrm{p} \mathrm{u} + \frac{\mathrm{c}}{|\mathrm{x}|^{\mathrm{p}-1}} \mathrm{u}^{\mathrm{p}-1}$$

Cabré ve Martel (1999), daha genel pozitif potansiyeller içeren aşağıdaki denklemi çalıştılar ve denklemin pozitif çözümünün olmadığını gösterdiler.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta \mathrm{u} + \mathrm{V(x)u} \tag{2.2}$$

Goldstein ve Kömbe (2003), (2.2) denklemini doğrusal olmayan problemlere aşağıdaki şekilde genişlettiler ve denklemin pozitif çözümünün olmadığını gösterdiler.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}(\nabla u^m) + V(x)u^m \tag{2.3}$$

Goldstein ve Kömbe (2003), (2.3) denklemini aşağıdaki şekilde genişlettiler ve denklemin pozitif çözümünün olmadığını gösterdiler.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + V(x)u^{p-1} \tag{2.4}$$

Kömbe (2004), (2.4) problemini aşağıdaki şekilde genişletti ve denklemin pozitif çözümünün olmadığını gösterdi.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\, u^{m-1}) + V(x)u^{m+p-2} \tag{2.5}$$

Kömbe vd. (2005), (2.3), (2.4), (2,5) problemlerini aşağıdaki şekilde genişlettiler ve denklemlerin pozitif çözümünün olmadığını gösterdiler.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}\left(|\mathrm{x}|^{-2\lambda}\nabla u^m\right) + V(x)u^m$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}\left(|x|^{-2\lambda}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + V(x)u^{p-1}$$

Baouendi-Grushin operatörlerinde çalışılan ana probleme ait ilk çalışma Kömbe (2006) tarafından yapıldı. Kömbe bu çalışmada aşağıdaki iki denklemi inceledi ve bu denklemlerin pozitif çözümünün olmadığını gösterdi.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_\gamma.\left(\nabla_\gamma u^m\right) + V(z)u^m \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_\gamma.\left(\left|\nabla_\gamma u\right|^{p-2}\nabla_\gamma u\right) + V(z)u^{p-1} \tag{2.7}$$

Kömbe (2013), (2.6) ve (2.7) aynı anda içeren aşağıdaki denklemi inceledi ve bu denklemin pozitif çözümünün olmadığını gösterdi.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}_\gamma\left(\left|\nabla_\gamma u\right|^{p-2}u^{m-1}\nabla_\gamma u\right) + V(z)u^{m+p-2} \tag{2.8}$$

Han ve Guo (2015), (2.8) problemini aşağıdaki şekilde genişlettiler ve bu denklemin pozitif çözümünün olmadığını gösterdiler.

$$\frac{\partial u^q}{\partial t} = \nabla_\gamma.\left(\|z\|^{\gamma p}\left|\nabla_\gamma u\right|^{p-2}\nabla_\gamma u\right) + V(z)u^{p-1}$$

3. ÖKLİD UZAYINDA YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde özet kısmında verilen problem için Öklid uzayında yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilecektir. Bu bilgilerin verilmesi için öncelikle aşağıdaki tanımlara ihtiyaç vardır.

3.1 Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanımlar

Tanım 3.1.1 (Metrik Uzay): X boştan farklı bir küme, d:$X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

M1) $\forall x, y \in X$ için $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$

M2) $\forall x, y \in X$ için $\mathrm{d}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

M3) $\forall x, y \in X$ için $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$,

M4) $\forall x, y, z \in X$ için $\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)$

özelliklerini sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir **metrik**, (X, d) ikilisine **metrik uzay** denir(Başkan vd., 2006).

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi $\mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = |\mathrm{x} - \mathrm{y}|$ ile bir metrik uzaydır. Bu metriğe alışılmış metrik denir. $\mathbb{R}^n$ uzayında alışılmış metrik i=1,2,...,n için aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\mathrm{d}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Tanım 3.1.2 (Açık Yuvar): (X, d) bir metrik uzay ve herhangi bir a$\in X$ noktası verilsin. $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$\mathrm{D}(\mathrm{a}, \varepsilon) = \{x \in \mathrm{X}: \mathrm{d}(a, x) < \varepsilon\}$

kümesine **a merkezli *ε* yarıçaplı açık yuvar** denir(Başkan vd., 2006).

Tanım 3.1.3 (Normlu Uzay): $X = \mathbb{R}$ için $x, y \in X$ ve α skaler bir sayı olmak üzere,

$\rho = \|.\|: X \to \mathbb{R}, \rho(x) = \|x\|$

fonksiyonu

N1) $\|x\| \geq 0$,

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N3) $\|\alpha x\|$=$|\alpha|\|x\|$

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir **norm**, $(X, \|.\|)$ ikilisine **normlu uzay** denir(Başkan vd., 2006).

$\mathbb{R}^n$ üzerinde alışılmış metriğin norma indirgemesi i=1,2,...,n için x=$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olmak üzere

$$\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} (|x_i|^2))^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.4 (Genişletme Dönüşümü): $X = \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanan dönüşüme **genişletme dönüşümü** denir. $\delta_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$=$(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$

Tanım 3.1.5 (Vektör Alanı): D , $\mathbb{R}^n$ de herhangi bir bölge ve F fonksiyonu D üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon olsun. F fonksiyonu D bölgesinin her bir noktasına bir vektör karşılık getiriyorsa bir vektör alanı oluşturuyor denir (Balcı, 2012).

Tanım 3.1.6 (Gradyant Vektörü): F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ türevlenebilen bir fonksiyon olsun.

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\nabla \text{ F= } (\frac{\partial F}{x_1}, \frac{\partial F}{x_2}, \ldots, \frac{\partial F}{x_n})$$

ifadesine F fonksiyonunun **gradyantı** denir. Gradyant bir vektör alanıdır.

Örnek 3.1.1 F(x,y,z)=ln$(x^2 + y^2 + z^2)$ şeklinde tanımlanan F fonksiyonu için

$$\nabla \text{ F= } (\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2})$$

Tanım 3.1.7 (Laplace Operatörü): $\mathbb{R}^n$ de Laplace operatörü $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$$

şeklindedir.

Örnek 3.1.2 $F(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ şeklinde tanımlanan F fonksiyonu için

$$\Delta F = \left(\frac{2y^2 - 2x^2 + 2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = 0$$

olur.

Tanım 3.1.8 (Laplace Denklemi): $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyon bir fonksiyon olmak üzere

$\Delta F = 0$

denklemine **laplace denklemi** denir. Ayrıca bu eşitliği sağlayan F fonksiyonuna da **harmonik fonksiyon** denir.

Tanım 3.1.9 (Diverjans): $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\frac{\partial F}{x_1}, \dots, \frac{\partial F}{x_n}$ türevleri mevcut olsun. $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\text{div}F = \nabla . F = \left(\frac{\partial F}{x_1} + \dots + \frac{\partial F}{x_n}\right)$$

ifadesine F fonksiyonunun **diverjansı** denir (Balcı, 2012).

Örnek 3.1.3 $F(x,y) = \sin(x + y)$ fonksiyonu için

$\text{div}F = 2\cos(x + y)$

olur.

Tanım 3.1.10 (C^∞ ailesi): F fonksiyonu D kümesinde tanımlansın. Kabul edelim ki F ve F nin k.mertebeye kadar olan kısmi türevleri, $B \subset A$ kümesinde sürekli olsun. O zaman f fonksiyonuna C^k sınıfındandır denir. B de her mertebeden kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlar ailesi de, $C^\infty(B)$ ile gösterilir (Anar, 2005).

Örnek 3.1.4 $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = e^x$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ de C^∞ sınıfındadır.

Tanım 3.1.11 ($\mathbf{L^P}$ sınıfı): Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge, 0<p<∞ olmak üzere

$\mathrm{L^P}(\Omega) = \{\mathrm{f}: \left(\int_\Omega |\mathrm{f}|^\mathrm{p}\right)\mathrm{dx} < \infty\}$

şeklinde tanımlanan kümeye **p. kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı** denir.

$\mathrm{L^P}$ sınıfı 1≤p<∞ $\|\mathrm{f}\|_\mathrm{P} = \left(\int_\Omega |\mathrm{f}|^\mathrm{p}\right)^{\frac{1}{\mathrm{p}}}$ normlu ile normlu uzaydır.

Örnek 3.1.5 $\mathrm{f}(x)= x$ birim fonksiyonu $\mathrm{L^P}[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ sınıfındandır. Burada $[\mathrm{a},\mathrm{b}] \subset \mathbb{R}$ şeklindedir.

Tanım 3.1.12 ($\mathbf{L^p_{loc}}$sınıfı): Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge, Ω nın her K kompakt alt kümesinde 1≤p≤ ∞ için

$\mathrm{L^p_{loc}}(\mathrm{K}) = \{\mathrm{f}: \left(\int_\mathrm{K} |\mathrm{f}|^\mathrm{p}\right)\mathrm{d}x < \infty\}$

şeklinde tanımlanan kümeye **p-yerel integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı** denir (Evans, 2002).

Tanım 3.1.13 ($\mathbf{C_0}(\mathbb{R})$ sınıfı): f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonun desteği

$\mathrm{supp(f)}=\overline{\{x \in \mathbb{R}: \mathrm{f}(x) \neq 0\}}$

ile ifade edilir. Eğer supp(f) kompakt ise f kompakt desteğe sahiptir denir. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kompakt desteğe sahip sürekli fonksiyonların kümesi $\mathrm{C_0}(\mathbb{R})$ ile gösterilir (Hansen, 2006).

Tanım 3.1.14(Konkav Fonksiyon): Eğer her a,b $\in \mathbb{R}^n$ ve her t $\in$ [0,1] için

f((1-t)a+tb))≥(1-t)f(a)+tf(b)

ise f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna **konkav fonksiyon** denir.

Tanım 3.1.15 (Zayıf Türev): α çoklu indis, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de bir bölge, u$\in \mathrm{L^1_{loc}}(\Omega)$ olsun. Eğer her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$\int_\Omega uD^\alpha \mathrm{u}\, \varphi\, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\, \varphi\, \mathrm{d}x$

eşitliğini gerçekleyen bir $v \in \mathrm{L^1_{loc}}(\Omega)$ fonksiyonu var ise $\boldsymbol{v'ye}$ u'nun $\boldsymbol{\alpha}$**.mertebeden zayıf türevi** denir. $\boldsymbol{v = D^\alpha \mathrm{u}}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.16 (Sobolev Uzayı): $\Omega, \mathbb{R}^n$de bir bölge ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. k negatif olmayan herhangi bir tam sayı olmak üzere ,

$W^{k,p}(\Omega)$={u$\in L^P(\Omega)$: $\forall|\alpha| \leq$ k için D^αu $\in L^P(\Omega)$}

şeklinde tanımlanan uzaya **sobolev uzayı** denir**.** $\boldsymbol{D^\alpha}$**u** u fonksiyonun zayıf türevini temsil eder.

Teoremler

Teorem 3.1.1(Green Özdeşlikleri): $\Omega \in \mathbb{R}^n$ sınırlı açık bir küme ve $\partial\Omega \in C^1$ olsun. u,v$\in C^2(\overline{\Omega})$ olmak üzere

i) $\int_\Omega v\Delta u \, dx = -\int_\Omega \nabla u \,.\, \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma$

ii) $\int_\Omega v\Delta u - u\,\Delta v \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma$

v'nin dış yönlü normal türevi $\frac{\partial v}{\partial n}$, $\partial\Omega$ sınırının yüzey alan elementi dσ ile temsil edilir (Evans, 2002).

Örnek 3.1.5 Eğer u, Ω içinde harmonik fonksiyon ise

$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$

olur.

Bu eşitliğin doğru olduğunu göstermek için öncelikle ii ile verilen Green özdeşliğinde v=1 alınacaktır. Daha sonra u fonksiyonunun harmonikliği kullanılacaktır.

Teorem 3.1.2 (Kısmi İntegrasyon): $\Omega \in \mathbb{R}^n$ sınırlı ve açık bir bölge ve $\partial\Omega \in C^1$ olsun. u,v$\in C^1(\overline{\Omega})$ olmak üzere i=1,2,...,n için

$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = \int_\Omega vu \, n_i \, d\sigma - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i}$

şeklindedir (Evans, 2002).

Teorem 3.1.3(Gauss-Green): $\Omega \in \mathbb{R}^n$ sınırlı ve açık bir bölge ve $\partial\Omega \in C^1$ olsun. u,v$\in C^1(\overline{\Omega})$ olmak üzere i=1,2,...,n için

$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} u \, n_i \, d\sigma$

şeklindedir (Evans, 2002).

Teorem 3.1.4 (Young Eşitsizliği): p>1, q>1 reel sayıları için $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ şartını sağlansın. Bu taktirde negatif olmayan a ve b reel sayıları için,

$a.b \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$

olur (Hansen, 2006).

Teorem 3.1.5 (Hölder Eşitsizliği): p>1, q>1 reel sayıları için $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ şartını sağlansın. $f, g \in C_0(\mathbb{R})$ için

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \tag{3.1}$$

olur (Hansen, 2006).

Teorem 3.1.6: Herhangi $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

i) 1<p<2 ise

$|x+y|^p \geq |x|^p + p|x|^{p-2}x.y + \beta \frac{|y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}$

ii) p≥ 2 ise

$|x+y|^p \geq |x|^p + p|x|^{p-2}x.y + \beta|y|^p$

olacak şekilde bir $\beta > 0$ sayısı vardır (Lindqvist, 1990).

Teorem 3.1.7 (Jensen Eşitsizliği): $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık ve sınırlı bir bölge, $u: \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonu toplanabilir ve $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konkav fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_a^b u \, dx\right) \geq \frac{1}{|\Omega|}\int_a^b f(u)dx \tag{3.2}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe konkav fonksiyonlar için **Jensen eşitsizliği** denir.

Teorem 3.1.8 (Sobolev Eşitsizliği): $1 < p < n$, $p^* = \frac{pn}{n-p}$ olsun. $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ için

$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi|^{p^*}dx\right)^{1/p^*} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\varphi|^p\,dx\right)^{1/p}$

olacak şekilde C pozitif sayısı vardır.

3.2 Öklid Uzayında Hardy Eşitsizlikleriyle İlgili Çalışmalar

Hardy eşitsizlikleri kısmi türevli denklemlerin pozitif çözümün yokluğunun belirlenmesinde önemli rol oynar. Bu ilişki bir sonraki başlık altında incelenecektir. Bu kısımda Hardy eşitsizlikleriyle ilgili literatür bilgisi verilecektir.

Hardy eşitsizliği, fonksiyonun kendisi ile türevlerini içeren integral eşitsizliğidir. Bu integral eşitsizlikleri hakkında ilk çalışma 1920 yılında Hardy tarafından verilmiştir. Hardy aşağıdaki şekilde bir eşitsizlik bulmuştur:

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{t}\int_0^t f(s)\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p\,dt \tag{3.3}$$

Bu eşitsizlik $f \geq 0$,p≥ 1 ve $\int_0^\infty f^p\,dt < \infty$ şartıyla geçerlidir (Hardy,1920). Bu tür eşitsizliklerle ilgili yapılan ilk çalışma Hardy'e ait olduğundan bu tür integral eşitsizlikleri Hardy eşitsizlikleri olarak adlandırılır. Öklid uzayında klasik Hardy eşitsizliği ise n$\geq$ 3 için her $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \geq \frac{(n-2)^2}{4}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{|x|^2}\,\mathrm{d}x \tag{3.4}$$

şeklinde verilmiştir.

Buradaki en önemli nokta (3.3) de bulunan $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ sabiti ile (3.4) de bulunan $\frac{(n-2)^2}{4}$ sabitin en iyi olmasıdır.

(3.4) eşitsizliğinin $\mathrm{L^P}$ formu ise $1 \leq \mathrm{p} < n$ durumunda $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{p} > n$ için $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ sınıfından oluşan u fonksiyonu için

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \mathrm{d}x \geq \left|\frac{n-p}{p}\right|^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^p}{|x|^p} \tag{3.5}$$

şeklindedir (Shen, 1980). (3.5) eşitsizliğinde bulunan $\left|\frac{n-p}{p}\right|^p$ sabitininin en iyi sabit olduğu Azorero ve Alanso ikilisi tarafından 1998 yılında ispatlanmıştır (Azorero ve Alanso, 1988).

(3.5) ile Hardy eşitsizliğinin farklı bir ispatı aşağıdaki şekilde verilecektir. İspata geçmeden önce p-laplace denklemi olarak ifade edilen

$$\Delta_p u = \nabla.(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

denklemin temel çözümünden bahsedelim. Bu denklemin temel çözümü:

$$u_p = \begin{cases} |x|^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{eğer } p = n \\ -\log|x| & \text{eğer } p \neq n \end{cases}$$

şeklindedir. Burada 1<p<∞, n sayısı ise Öklid uzayında boyutu ifade etmektedir.

Şimdi (3.5) ile verilen Hardy eşitsizliğinin ispatını verelim.

Kanıt: Kabul edelim ki $\varphi = |x|^\gamma \vartheta$, $\vartheta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ve $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olsun. Basit bir hesaplama ile

$|\nabla(|x|^\gamma \vartheta)| = |\gamma |x|^{\gamma-1}\vartheta\nabla(|x|) + |x|^\gamma \nabla\vartheta|$

eşitliği elde edilir. $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve 1<p<2 olmak üzere

$|x + y|^p \geq |x|^p + p|x|^{p-2}x.y$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\int |\nabla\varphi|^p dx \geq |\gamma|^p \int |x|^{p\gamma-p} |\nabla(|x|)|^p |\vartheta|^p dx + \gamma \int |x|^{p\gamma-p+1} |\nabla(|x|)|^{p-2}\nabla(|x|)\nabla(|\vartheta|^p)dx$$

elde edilir. Kısmi integrasyon uygulanrsa

$$\int |\nabla\varphi|^p dx \geq |\gamma|^p \int |x|^{p\gamma-p} |\nabla(|x|)|^p |\vartheta|^p dx - |\gamma|^{p-2}\gamma \int \nabla.(|x|^{p\gamma-p+1} |\nabla(|x|)|^{p-2}\nabla(|x|))|\vartheta|^p dx$$

elde edilir. $\gamma = \frac{p-n}{n}$ seçilirse

$$\int \nabla(|x|^{p\gamma-p+1} |\nabla(|x|)|^{p-2}\nabla(|x|))|\vartheta|^p dx = \int \nabla.(|x|^{1-n}) |\nabla(|x|)|^{p-2}\nabla(|x|))|\vartheta|^p dx$$

$$= \int \Delta_p(u_p) |\vartheta|^p dx = 0$$

u_p p-laplace denkleminin temel çözümü olduğundan yukarıdaki eşitsizliği yazabiliriz. Buradan

$\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\varphi|^p dx \geq \left|\frac{n-p}{p}\right|^p \int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\varphi|^p}{|x|^p}dx$ eşitsizliği elde edilir. Buradaki $\left|\frac{n-p}{p}\right|^p$ sabitinin en iyi sabit olduğunu göstermek için aşağıdaki fonksiyon ailesi kullanılacaktır.

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & , \ eğer\ |x| \in [0,1] \\ |x|^{-\left(\frac{n-p}{p}+\varepsilon\right)} & , eğer\ \ |x| > 1 \end{cases}$$

İşlemler yapıldıktan sonra $\varepsilon \to 0$ için limit alınacaktır.

Hardy eşitsizliğiyle ilgili yapılan çalışmalar için Landau (1926), Hardy (1928), Leray (1933), Hardy vd. (1952), Opic ve Kufner (1990), Edmunds ve Triebel (1999), Kufner vd. (2006) makaleleri referans olarak verebilir.

3.3 Öklid uzayında Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Isı Problemi

Bu kısımda Hardy eşitsizliklerinin singüler potansiyele sahip doğrusal ve doğrusal olmayan kısmı türevli denklemlerde pozitif çözümün varlığında ve yokluğunda nasıl bir rol oynadığı gösterilecektir.

1984 yılında Baras ve Goldstein aşağıdaki ters kare potansiyeline sahip doğrusal ısı problemini incelemiştir.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta \mathrm{u} + \frac{c}{|x|^2}u & \Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{x},\mathrm{t}) \ = u_0(x) > 0 & \partial\Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{x},\mathrm{t}) \ = 0 & \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{3.6}$$

Burada Ω sınırlı bir bölge ve $0 \in \Omega$ dır (Baras ve Goldstein, 1984).

1. Eğer c> $\frac{(n-2)^2}{4}$ ise (3.6) denkleminin pozitif çözümü yoktur.
2. Eğer c $\leq \frac{(n-2)^2}{4}$ ise (3.6) denkleminin pozitif çözümleri vardır.

Buradaki $\frac{(n-2)^2}{4}$ sayısı Hardy eşitsizliğindeki en iyi sabittir.

Diğer taraftan Garcia ve Peral (1998), yukarıdaki (3.6) problemin L^P formunu aşağıdaki şekilde çalışmıştır:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_\mathrm{p}\mathrm{u} + \frac{\mathrm{c}}{|\mathrm{x}|^{\mathrm{p}-1}}\mathrm{u}^{\mathrm{p}-1} & \Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{x},\mathrm{t}) \ = u_0(x) > 0 & \partial\Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{x},\mathrm{t}) \ = 0 & \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{3.7}$$

Ω sınırlı bir bölge, $0 \in \Omega$ olmak üzere,

1. Eğer c> $\frac{(n-p)^p}{p^p}$ ise (3.7) denkleminin pozitif çözümü yoktur.
2. Eğer c $\leq \frac{(n-p)^p}{p^p}$ ise (3.7) denkleminin pozitif çözümleri vardır.

Yine dikkat edilirse $\frac{(n-p)^p}{p^p}$ Hardy eşitsizliğinin en iyi sabitidir.

Yukarıdaki (3.6) denkleminin daha genel pozitif potansiyeller için formu

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta \mathrm{u} + \mathrm{V(x)u} & \Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{x,t}) = u_0(x) > 0 & \partial\Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{x,t}) = 0 & \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{3.8}$$

Cabré ve Martel tarafından incelenmiştir. İspat etmişlerdir ki (3.8) denkleminin pozitif çözümün varlığı ya da yokluğu S = - Δ − V simetrik operatörünün spektrumunun:

$$\inf_{0\neq\phi\in C_c^\infty(\Omega\backslash \mathrm{K})} \frac{\int_\Omega |\nabla\phi|^2\, dx - \int_\Omega V(z)|\phi|^2\, dx}{\int_\Omega |\phi|^2\, dx}$$

büyüklüğüne bağlıdır (Cabré ve Martel, 1999).

Goldstein ve Kömbe (2003), (3.8) probleminde kullanılan tekniği doğrusal olmayan problemlere genişleterek aşağıdaki problemleri çalışmışlardır.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}(\nabla u^m) + V(x)u^m & \Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{x,t}) = u_0(x) > 0 & \partial\Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{x,t}) = 0 & \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{3.9}$$

Burada Ω sınırlı bölge, 0<m<1 dir. (3.9) problemi için elde edilen sonuç aşağıda verilmiştir.

Sonuç 3.3.1: $\frac{n-2}{n} \leq m \leq 1$, n ≥ 3 , $V \in L^1_{loc}(\Omega\backslash \mathrm{K})$, K, Ω yuvarının kapalı Lebesgue null alt kümesi olsun. Eğer verilen herhangi $\epsilon > 0$ sayısı için

$$\inf_{0\neq\phi\in C_c^\infty(\Omega\backslash \mathrm{K})} \frac{\int_\Omega |\nabla\phi|^2\, dx - \int_\Omega (1-\epsilon)V(x)|\phi|^2\, dx}{\int_\Omega |\phi|^2\, dx} = -\infty$$

Bu problemin $\mathrm{L^P}$ formu ise yine aynı çalışmada

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}(\nabla u|\nabla u|^{p-2}) + V(x)u^{p-1} & \Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{x,t}) = u_0(x) > 0 & \partial\Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{x,t}) = 0 & \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{3.10}$$

şeklinde verilmiştir. (3.10) probleme ilişkin sonuç aşağıdaki şekildedir.

Sonuç 3.3.2: $\frac{2n}{n+1} \leq p \leq 2$, n≥ 2, $V \in L^1_{loc}(\Omega\backslash \mathrm{K})$, K, Ω yuvarının kapalı Lebesgue null alt kümesi olsun. Eğer verilen herhangi $\epsilon > 0$ sayısı için

$$\inf_{0\not\equiv\phi\in C_c^\infty(\Omega\backslash K)} \frac{\int_\Omega |\nabla\phi|^p\,dx - \int_\Omega (1-\epsilon)V(x)|\phi|^p\,dx}{\int_\Omega |\phi|^p\,dx} = -\infty$$

ise (3.10) probleminin pozitif çözümü yoktur.

Kömbe (2004), (3.10) problemini aşağıdaki şekilde genişletti ve bu denklemin pozitif çözümünün olmadığını gösterdi.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\, u^{m-1}) + V(x)u^{m+p-2} & \Omega\times(0,T) \\ u(\mathrm{x},\mathrm{t}) = u_0(x) > 0 & \partial\Omega\times(0,T) \\ u(\mathrm{x},\mathrm{t}) = 0 & \partial\Omega\times(0,T) \end{cases} \tag{3.11}$$

Kömbe vd. (2005), yaptıkları çalışmada (3.9), (3.10) ve (3.11) ile verilen problemleri aşağıdaki şekilde genişlettiler.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(|\mathrm{x}|^{-2\lambda}\nabla u^m\right) + V(x)u^m & \Omega\times(0,T) \\ u(\mathrm{x},\mathrm{t}) = u_0(x) > 0 & \partial\Omega\times(0,T) \\ u(\mathrm{x},\mathrm{t}) = 0 & \partial\Omega\times(0,T) \end{cases} \tag{3.12}$$

Benzer şekilde, bu problemin L^P formunu ise 1<p<2 olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(|x|^{-2\lambda}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + V(x)u^{p-1} & \Omega\times(0,T) \\ u(\mathrm{x},\mathrm{t}) = u_0(x) > 0 & \partial\Omega\times(0,T) \\ u(\mathrm{x},\mathrm{t}) = 0 & \partial\Omega\times(0,T) \end{cases} \tag{3.13}$$

şeklinde verdiler.

(3.12) ile (3.13) denklemine ait verdikleri sonuçlar aşağıdaki şekildedir.

Sonuç 3.3.3: $\frac{n-2}{n} \leq m \leq 1$, $\mathrm{n} \geq 3$, $|x| = \sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}$, $\lambda > 0$, , $V \in L^1_{loc}(\Omega\backslash \mathrm{K})$, K, Ω yuvarının kapalı Lebesgue null alt kümesi olsun. Eğer verilen herhangi $\epsilon > 0$ sayısı için

$$\inf_{0\not\equiv\phi\in C_c^\infty(\Omega\backslash K)} \frac{\int_\Omega (\epsilon+|\mathrm{x}|^{-2\lambda})|\nabla\phi|^2\,dx - \int_\Omega V(x)|\phi|^2\,dx}{\int_\Omega |\phi|^2\,dx} = -\infty$$

ise (3.12) probleminin pozitif çözümü yoktur.

Sonuç 3.3.4: $\frac{2n}{n+1} \leq p \leq 2$, $\mathrm{n} \geq 2$, $\lambda > 0$, $V \in L^1_{loc}(\Omega\backslash \mathrm{K})$, K, Ω yuvarının kapalı Lebesgue null alt kümesi olsun. Eğer verilen herhangi $\epsilon > 0$ sayısı için

$$\inf_{0\not\equiv\phi\in C_c^\infty(\Omega\backslash K)} \frac{\int_\Omega (\epsilon+|\mathrm{x}|^{-\lambda \mathrm{p}})|\nabla\phi|^p\,dx - \int_\Omega V(x)|\phi|^p\,dx}{\int_\Omega |\phi|^p\,dx} = -\infty$$

ise (3.13) probleminin pozitif çözümü yoktur.

Uyarı 3.3.1: n=1 ve n=2 durumlarında değişen koşullara göre problem incelenmiştir. Kaynak makalede detayları görülebilir.

Bir sonraki bölümde Baouendi-Grushin vektör alanlarına ilişkilendirilmiş benzer kısmı diferansiyel denklemler anlatılacaktır.

4. BAOUENDİ- GRUSHİN VEKTÖR ALANLARIYLA İLGİLİ HARDY EŞİTSİZLİKLERİ VE DOĞRUSAL OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu bölüm temel olarak kendi sonuçlarımızı içeren bir bölümdür. Bu bölüme başlamadan önce çalıştığımız yapılara ilişkin öncelikle temel kavramlar, notasyonlar ve yardımcı sonuçlar verilecektir.

4.1 TEMEL KAVRAMLAR

Herhangi bir z noktası $R^{\mathrm{d+k}}$ uzayında $d, k \geq 1$, $\mathrm{d} + \mathrm{k} = \mathrm{N}$ olmak üzere

$$z = (x, y) = (x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_k) \in \mathrm{R}^{\mathrm{d}} \times \mathrm{R}^{\mathrm{k}} \tag{4.1}$$

şeklinde verilir. (4.1) ile verilen z noktasının orijine uzaklığı

$$\rho = \|z\| = \|(x, y)\| = (|x|^{2+2\gamma} + (1 + \gamma)^2 |y|^2)^{\frac{1}{2+2\gamma}}$$

şeklinde verilir.

R^{d+k} uzayında vektör alanları

$$X_i := \frac{\partial}{\partial x_i}, \; Y_j := |x|^\gamma \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \gamma > 0\,, i = 1, \dots, d, \quad j = 1, \dots, k \tag{4.2}$$

şeklindedir.

(4.2) ile verilen vektör alanları ilk defa 1961 yılında Baouendi tarafından tanımlanmıştır (Baouendi, 1961). Müteakiben bu vektör alanları Grushin tarafından çalışılmıştır (Grushin, 1970; 1971). Literatürde bu vektör alanları Baouendi-Grushin vektör alanları olarak adlandırılır. Bu vektör alanlarına ilişkin gradyant operatörü aşağıdaki şekilde verilir.

∇_γ , gradyant operatörü

$$\nabla_\gamma = (\nabla_x, |x|^\gamma \nabla_y)\,, \gamma > 0 \tag{4.3}$$

şeklinde verilir. (4.3) ile verilen gradyant operatörü vasıtasıyla elde edilen Laplace operatörü ise

$$\Delta_\gamma = \nabla_\gamma . \nabla_\gamma = \Delta_x + |x|^{2\gamma}\Delta_y \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlanır (4.4) ile verilen operatör literatürde Baouendi-Grushin operatörü olarak adlandırılır. p-laplace operatörü ise

$\Delta_\gamma u = div_\gamma \left(\left|\nabla_\gamma u\right|^{p-2} \nabla_\gamma u \right)$ şeklinde tanımlanır. Bu denklemin temel çözümü

$$u_p(\rho) = \begin{cases} \rho^{\frac{p-Q}{p-1}}, & \text{eğer p = Q} \\ -\log\rho, & \text{eğer p} \neq \text{Q} \end{cases}$$

şeklindedir. u_p fonksiyonu biharmonik fonksiyondur. Öyle bir $c_p > 0$ sayısı vardır ki $-\Delta_\gamma(c_p\, u_p) = \delta$ olur. Burada δ dirac-delta fonksiyonudur.

Eğer $\phi = \phi(\rho)$ ise düzgün radyal fonksiyon ise

$$\left|\nabla_\gamma \phi(\rho)\right|^p = \frac{|x|^{\gamma p}}{\|z\|^{\gamma p}} \left|\phi'(\rho)\right|^p$$

şeklindedir.

Eğer $\phi \in C^2(0,\infty)$ ve $\phi = \phi(\rho)$ radyal fonksiyon olmak üzere aşağıdaki faydalı formül elde edilir:

$$\Delta_\gamma \phi = \frac{|\mathrm{x}|^{2\gamma}}{\rho^{2\gamma}} \left(\phi'' + \frac{\mathrm{Q}-1}{\rho}\phi'\right)$$

şeklinde verilir. Burada

$$\mathrm{Q} = (\mathrm{d} + (1+\lambda)\mathrm{k} \tag{4.5}$$

sayısı homojen boyut olarak adlandırılır.

$\mathrm{R} > 0$ için ρ açık yuvarı $B_R = \{z \in R^N : \rho < \mathrm{R}\}$ şeklinde verilir. $0 < \mathrm{R}_1 < \mathrm{R}_2 \leq \infty$ için $D = \mathrm{B}_{\mathrm{R}_2} / \overline{\mathrm{B}_{\mathrm{R}_1}}$ olsun. $\phi \in L^1(D)$ olmak üzere $\int_D \phi dz$ integralini hesaplamak için aşağıda verilen dönüşüm(küresel dönüşüm) kullanılır.

$$z = (x,y) = (\rho, \theta, \theta_1, .., \theta_{d-1}, \omega_1, \dots, \omega_{k-1}) :$$

$$x_1 = \rho sin\theta (sin^2\theta)^{-\frac{\gamma}{1+\gamma}} \cos\omega_1,$$

$$x_2 = \rho sin\theta (sin^2\theta)^{-\frac{\gamma}{1+\gamma}} \sin\omega_1 \cos\omega_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{d-1} = \rho sin\theta (sin^2\theta)^{-\frac{\gamma}{1+\gamma}} \sin\omega_1 \sin\omega_2 \dots \cos\omega_{d-1},$$

$$x_d = \rho sin\theta (sin^2\theta)^{-\frac{\gamma}{1+\gamma}} \sin\omega_1 \sin\omega_2 \dots \sin\omega_{d-1},$$

$y_1 = \frac{1}{1+\gamma}\rho^{1+\gamma} cos\theta cos\theta_1,$

$y_2 = \frac{1}{1+\gamma}\rho^{1+\gamma} cos\theta sin\theta_1 cos\theta_2,$

……………………………………………………

$y_{k-1} = \frac{1}{1+\gamma}\rho^{1+\gamma} cos\theta sin\theta_1 sin\theta_2 \ldots. cos\theta_{k-1},$

$y_k = \frac{1}{1+\gamma}\rho^{1+\gamma} cos\theta sin\theta_1 sin\theta_2 \ldots. sin\theta_{k-1},$

Bu dönüşümlerde $R_1 < \rho < R_2$, $i = 1,2, \ldots, k-2, j = 1,2, \ldots, d-2$ için $\theta_i, \omega_j \in (0,\pi)$, $\theta_{k-1}, \omega_{d-1} \in (0,2\pi)$, k ile d ye bağlı a_0, b_0 değerleri için $\theta \in (a_0, b_0)$ olarak alınmıştır (D'Ambrosio ve Lucente, 2003).

Eğer $\phi\colon \Omega \to$ R ise radyal fonksiyon yani $\phi(z) = \phi(\rho)$ ise

$$\int_D \phi(z)dz = \mu \int_{R_1}^{R_2} \rho^{Q-1}\phi(\rho)\, d\rho \qquad (4.6)$$

(4.6) eşitliğinde

$$\mu = \varphi \int_{a_0}^{b_0} d\theta \int_0^{\pi} d\theta_1 \ldots \int_0^{\pi} d\theta_{k-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{k-1} \int_0^{\pi} d\omega_1 \ldots \int_0^{\pi} d\omega_{d-2} \int_0^{2\pi} d\omega_{d-1},$$

$$\varphi = \left(\frac{1}{1+\gamma}\right)^k |sin\theta|^{\frac{d}{1+\gamma}-1} cos^{k-1}\theta sin^{k-2}\theta_1 \ldots sin\theta_{k-2} sin^{d-2}\omega_1 \ldots sin\, \omega_{d-2}$$

ve

Q=(d+(1+γ)k) (4.5) ile verilen homojen boyuttur.

Bu uzayda z ve z_0 noktalarındaki uzaklık aşağıdaki Carnot-Caretheodary metriği ile verilir.

$$\mathrm{d_C}(\mathrm{z}, \mathrm{z_0}) = \inf\{\text{uzunluk}(\tau) \colon \tau \in \Gamma\} \qquad (4.7)$$

(4.7) ifadesinde Γ kümesi $\tau(0) = z, \tau(1) = z_0$ yapan τ eğri ailelerinden oluşan küme ve $\tau'(t)=\mathrm{span}\{X_1(\tau(t)),\ldots, X_d((\tau(t)),Y_1(\tau(t)),\ldots, Y_k((\tau(t))\}$ dir. Eğer γ pozitif tam sayı ise $\rho(z)$ ile $d_C(z,0)$ karşılaştırılabilir (D'Ambrosio ve Lucente, 2003).

$z_0 \in R^{d+k}$ ve $R > 0$ için z_0 merkezli R yarıçaplı $d_C -$ metrik yuvarı R^{d+k} uzayında

$$\Omega = B_{d_C} = \{z \in R^{d+k} \colon d_C(z, z_0) < R\}$$

şeklinde verilir.

$z_0 \in R^{d+k}$ ve $\mathrm{R} > 0$ için z_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar ve küre sırasıyla

B(z_0, R)={$z \in R^N: \rho < \mathrm{R}$}, S($z_0$, R)= {$z \in R^N: \rho = \mathrm{R}$}

şeklinde ifade edilir.

B(z_0, R) yuvarının hacmi ile birim yuvarın hacmi arasında aşağıdaki şekilde eşitlik vardır.

$|\mathrm{B}(z_0, \mathrm{R})| = \mathrm{R}^{\mathrm{Q}} |\mathrm{B}(0,1)|$

Burada |. | R^N uzayında Lebesgue ölçüsü ifade etmektedir.

4.2 Baouendi-Grushin Vektör Alanlarıyla İlgili Hardy-Sobolev Eşitsizliği

Öklid uzayında kısmı türevli denklemlerin pozitif çözümünün varlığı ya da yokluğunun belirlenmesinde Hardy eşitsizliklerinin önemli rol oynadığından bahsetmiştik. Baouendi-Grushin operatörlerinde aynı durum geçerlidir. Bu kısımda ilk olarak Baouendi-Grushin operatörlerinde Hardy eşitsizlikleri ile ilgili literatür bilgisi verilecektir.

Bouendi-Grushin operatöründe ise Hardy eşitsizliği ilk olarak 1993 yılında Garofalo tarafından $\mathrm{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k\{(0,0)\})$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}^{d+k}} |\nabla_\gamma \mathrm{u}|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \left(\frac{Q-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^{d+k}} \frac{|x|^{2\gamma}}{\rho^{2\gamma}} \frac{u^2}{\rho^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (4.8)$$

şeklinde verilmiştir. (4.8) eşitsizliğinde $\left(\frac{Q-2}{2}\right)^2$ sayısı en iyi sabittir (Garofalo, 1993).

Aynı zamanda Franchi vd. (1994), $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{\Omega})$ için aşağıdaki Sobolev eşitsizliğini

$$\left(\int_\Omega |\phi|^q \mathrm{dz}\right)^{1/q} \leq C_r\left(\int_\Omega |\nabla_\gamma \phi|^p \mathrm{dz}\right)^{1/p} \qquad (4.9)$$

elde etmiştir. Burada $1 \leq p < Q$, $q = \frac{Qp}{Q-p}$ ve C>0 .

D'Ambrosio (2005), aşağıdaki ağırlıklı L^{P} Hardy eşitsizliğini elde etmiştir:

$$\int_{\mathbb{R}^{d+k}} |\nabla_\gamma \mathrm{u}|^p \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \left(\frac{Q-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^{d+k}} \frac{|x|^{p\gamma}}{\rho^{p\gamma}} \frac{u^p}{\rho^p} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (4.10)$$

burada $\mathrm{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k\{(0,0)\})$ ve $\left(\frac{Q-p}{p}\right)^p$ en iyi sabittir.

(4.8), (4.9) ve (4.10) Hardy-Sobolev eşitsizlikleri singüler potansiyele sahip doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümün yokluğunun ispatında kullanılmıştır (Kömbe, 2006; 2013).

4.3 Baouendi-Grushin Operatörüne İlişkilendirilmiş Doğrusal Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemler

Bu kısımda bize motivasyon veren temel problemler incelenecektir. Kömbe (2006), sırasıyla aşağıdaki doğrusal olmayan kısmı diferansiyel denklemleri çalışmıştır:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_\gamma . \left(\nabla_\gamma u^m\right) + V(z)u^m & \Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{z},\mathrm{t}) \ = u_0(z) > 0 & \partial\Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{z},\mathrm{t}) \ = 0 & \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{4.11}$$

ve

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_\gamma . \left(\left|\nabla_\gamma u\right|^{p-2} \nabla_\gamma u\right) + V(z)u^{p-1} & \Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{z},\mathrm{t}) \ = u_0(z) > 0 & \partial\Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{z},\mathrm{t}) \ = 0 & \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{4.12}$$

burada $\Omega \subset R^{d+k}$ Carnot Carathedory metrik yuvarı, 0<m<1, 1<p<2, $V \in L^1_{loc}(\Omega)$ dir.

Bu problemlerde pozitif çözümün yokluğu m, p değerlerine ve denklemin eliptik kısmına ilişkin spektrumunun büyüklüğüne bağlıdır.

(4.11) ile (4.12) problemlerini aynı anda içeren bir problem yazmak mümkün müdür sorusu akıllara gelmektedir. Bu soruya Kömbe (2013), aşağıda yazmış olduğu çift katlı doğrusal olmayan

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}_\gamma \left(\left|\nabla_\gamma u\right|^{p-2} u^{m-1} \nabla_\gamma u\right) + V(z)u^{m+p-2} & \Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{z},\mathrm{t}) \ = u_0(z) > 0 & \partial\Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{z},\mathrm{t}) \ = 0 & \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{4.13}$$

problem ile cevap verdi.

Diğer taraftan Han ve Guo (2015), yaptıkları çalışmada (4.13) problemini aşağıdaki şekilde genişlettiler.

$$\begin{cases} \frac{\partial u^q}{\partial t} = \nabla_\gamma . \left(\|z\|^{\gamma p} \left|\nabla_\gamma u\right|^{p-2} \nabla_\gamma u\right) + V(z)u^{p-1} & \Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{z},\mathrm{t}) = u_0(z) > 0 & \partial\Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{z},\mathrm{t}) \ = 0 & \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

Bu sonuçlar ışığı altın yukarıdaki problemleri ihtiva edebilecek yeni bir problemin ortaya koyma isteği doğmuştur. Şimdi ana problemin ifadesi ve ispatı verilecektir.

4.4 Ana Problemin İspatı

Ana probleminin pozitif çözümünün olmadığını ispatlamadan önce aşağıdaki yardımcı teoremi ispatlayalım. Bu yardımcı teoremin ispatında Sobolev eşitsizliği kullanılmıştır.

Yardımcı Teorem 4.4.1: Ω=B(z_0,r) R^{d+k} uzayında d_C metrik yuvar, 1<p<Q değeri için $M \in L^{Q/P}$ (Ω), $\phi \in W_0^{1,p}$ (Ω) fonksiyonları Ω bölgesinde kompakt desteğe sahip olsun. Verilen herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı için

$$\int_\Omega M(z)|\phi|^p \mathrm{dz} \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\int_\Omega |\nabla_\gamma \phi|^p \mathrm{dz} + \mathrm{C}(\epsilon)\int_\Omega |\phi|^p \mathrm{dz} \tag{4.14}$$

eşitsizliğini gerçekleyen $C(\epsilon)$ pozitif sayısı vardır.

Kanıt: $M_k(z) = \min\{M(z), k\}$ olarak tanımlayalım. $k \to \infty$ için $\|M_k - M\|_{L^{Q/p}} \to 0$ olur. Buradan

$$\int_\Omega M(z)|\phi|^p \mathrm{dz} \leq \int_\Omega |M_k - M||\phi|^p \mathrm{dz} + k\int_\Omega |\phi|^p \mathrm{dz}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağındaki ilk integral ifadesi için (3.1) ile verilen Hölder eşitsizliği uygulandığında

$$\int_\Omega M|\phi|^p \mathrm{dz} \leq \left(\int_\Omega |M_k - M|^{Q/p} dz\right)^{\mathrm{p}/Q}\left(\int_\Omega |\phi|^{\frac{Qp}{Q-P}}\right)^{\mathrm{p}/Q} + k\int_\Omega |\phi|^p \mathrm{dz} \tag{4.15}$$

$1 \leq p < Q$, $q = \frac{Qp}{Q-p}$,C>0 ve ϕ fonksiyonu Ω bölgesinden bağımsız olmak üzere aşağıdaki Sobolev eşitsizliği (4.15) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\left(\int_\Omega |\phi|^q \mathrm{dz}\right)^{1/q} \leq C_r\left(\int_\Omega |\nabla_\gamma \phi|^p \mathrm{dz}\right)^{1/p}$$

Buradan

$$\int_\Omega M|\phi|^p \mathrm{dz} \leq \left(\int_\Omega |M_k - M|^{Q/p} dz\right)^{\mathrm{p}/Q}\left(\int_\Omega |\nabla_\gamma \phi|^{\frac{Qp}{Q-P}}\right)^{\mathrm{p}/Q} + k\int_\Omega |\phi|^p \mathrm{dz}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak yeteri kadar büyük k sabiti için

$\left(\int_{\Omega} |M_k - M|^{Q/p} dz\right)^{p/Q} \leq \frac{\epsilon}{(1-\epsilon)C_r}$ olur. Böyle bir k sabiti için $C(\epsilon) = \mathrm{k}$ seçilirse (4.14) sonucu elde edilir.

Şimdi ana problemin ispatını verilecektir.

Ω R^{d+k} için Carnot Carathedory metrik yuvarı, a(z) pozitif fonksiyonu için $V \in L^1_{loc}(\Omega)$ olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_\gamma.\left(a(z)\left|\nabla_\gamma u\right|^{p-2}\nabla_\gamma u\right) + V(z)u^{p-1} & \Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{z},\mathrm{t}) = u_0(z) > 0 & \partial\Omega \times (0,T) \\ u(\mathrm{z},\mathrm{t}) = 0 & \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{4.16}$$

ile tanımlanan problemin pozitif çözümü yoktur.

Bu problemin pozitif çözümünün olmadığına ilişkin teorem aşağıdaki şekildedir.

Teorem 4.4.1: $\frac{2Q}{2Q+1} \leq p \leq 2$, 1<p<2, $\gamma > 0, \mathrm{Q} = (\mathrm{d} + (1+\gamma)\mathrm{k}), a(z) > 0$, $V \in L^1_{loc}(\Omega \backslash \mathrm{K})$, K, Ω yuvarının kapalı Lebesgue null alt kümesi olsun. Eğer verilen herhangi $\epsilon > 0$ sayısı için

$$\inf_{0 \not\equiv \phi \in C_c^\infty(\Omega\backslash \mathrm{K})} \frac{\int_\Omega (\epsilon + a(z))\left|\nabla_\gamma \phi\right|^p dz - \int_\Omega V(z)|\phi|^p\, dz}{\int_\Omega |\phi|^p\, dz} = -\infty$$

ise (4.16) probleminin pozitif çözümü yoktur.

Kanıt: Bu ispat kontrapozitif tekniği yardımı ile verilecektir. $u: [0,T) \to L^1(\Omega)$ fonksiyonu $u_0 \geq 0$ olan fakat $u \equiv 0$ olmayan $(\Omega\backslash K) \times (0,T)$ bölgesinde (4.16) probleminin çözümü kabul edilsin. (4.16) eşitliğinin her iki yanını, $\phi \in C_c^\infty(\Omega\backslash K)$ *için*; $|\phi|^p/u^{p-1}$ test fonksiyonu çarpılıp Ω bölgesinde integre edilirse

$$\frac{1}{2-p}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{2-p}|\phi|^p\, dz = \int_\Omega \nabla_\gamma.\left(a(z)\nabla_\gamma u\left|\nabla_\gamma u\right|^{p-2}\right)\frac{|\phi|^p}{u^{p-1}}dz + \int_\Omega V(z)|\phi|^p\, dz \tag{4.17}$$

sonucu elde edilir. (4.17) eşitliği için

$$\mathrm{L} = \int_\Omega \nabla_\gamma.\left(a(z)\nabla_\gamma u\left|\nabla_\gamma u\right|^{p-2}\right) \frac{|\phi|^p}{u^{p-1}}\, \mathrm{dz} \tag{4.18}$$

olmak üzere (4.18) ifadesi için kısmı integrasyon uygulanırsa

$$\mathrm{L} \geq (\mathrm{p}-1)\int_\Omega \left(a(z)\left|\nabla_\gamma u\right|^p\right)\frac{|\phi|^p}{u^p})dz - \mathrm{p}\int_\Omega \left(a(z)\left|\nabla_\gamma u\right|^{p-1}\left|\nabla_\gamma \phi\right|\right)\frac{|\phi|^{p-1}}{u^{p-1}})\mathrm{dz} \tag{4.19}$$

eşitsizliği elde edilir.

p>1 ve $w_1 \neq w_2$ pozitif reel sayılar olmak üzere

$(p-1){w_2}^p - p{w_2}^{p-1}w_1 > -{w_1}^p$

eşitsizliğinde $w_2 = (a(z))^{\frac{1}{p}} \left|\frac{\phi}{u}\nabla_\gamma u\right|, w_1 = (a(z))^{\frac{1}{p}}\left|\nabla_\gamma \phi\right|$ alınıp kullanılırsa H=p-1 olmak üzere

$$H\left(\int_\Omega \left(a(z)\left|\nabla_\gamma u\right|^p\right)\frac{|\phi|^p}{u^p}\right)dz - p\int_\Omega \left(a(z)\left|\nabla_\gamma u\right|^{p-1}\left|\nabla_\gamma \phi\right|\right)\frac{|\phi|^{p-1}}{u^{p-1}}dz > -\int_\Omega \left(a(z)\left|\nabla_\gamma \phi\right|^p dz\right)$$

eşitsizliği ile (4.19) eşitsizliği birlikte düşünülürse

$$L > -\int_\Omega \left(a(z)\left|\nabla_\gamma \phi\right|^p\right)dz \tag{4.20}$$

elde edilir. Buradaki L ifadesi $0 < t_1 < t_2 < T$ olmak üzere t_1 den t_2 ye integre edilip (4.20) ile birlikte düşünülürse

$$\int_\Omega V(z)|\phi|^p dz - \int_\Omega a(z)\left|\nabla_\gamma \phi\right|^p dz < K\int_\Omega (u^{2-p}(z,t_2) - u^{2-p}(z,t_1))|\phi|^p dz \tag{4.21}$$

$K = \frac{1}{(2-p)(t_2-t_1)}$ için yukarıdaki eşitsizlik elde edilir.

Konkav fonksiyonlar için (3.2) ile verilen Jensen eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_\Omega (u(z,t_i))^{\frac{(2-p)Q}{p}} dz \leq C(\Omega)\int_\Omega (u(z,t_i)dz)^{\frac{(2-p)Q}{p}} < \infty$$

Buradan $u^{2-p}(z,t_i) \in L^{\frac{Q}{p}}(\Omega)$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.4.1 kullanılırsa

$$K\int_\Omega (u^{2-p}(z,t_2) - u^{2-p}(z,t_1))|\phi|^p dz \leq \in \int_\Omega \left|\nabla_\gamma \phi\right|^p dz + C(\in)\int_\Omega |\phi|^p dz \tag{4.22}$$

eşitsizliği elde edilir.

(4.21) ile (4.22) sonuçları birleştirilirse

$$\int_\Omega V(z)|\phi|^p dz - \int_\Omega a(z)\left|\nabla_\gamma \phi\right|^p dz \leq \in \int_\Omega \left|\nabla_\gamma \phi\right|^p dz + c(\in)\int_\Omega |\phi|^p dz$$

Buradan

$$\inf_{0 \not\equiv \phi \in C_c^\infty(\Omega \backslash K)} \frac{\int_\Omega (\epsilon + a(z))\left|\nabla_\gamma \phi\right|^p dz - \int_\Omega V(z)|\phi|^p dz}{\int_\Omega |\phi|^p dz} \geq -C(\in) > -\infty$$

elde edilir. Buradan Teorem 4.4.1 ispatlanmıştır.

Uyarı 4.4.1: Pozitif çözüm aşağıdaki özellikleri sağlar. (K dışında sürekli yerel pozitif çözüm)

i) K, Ω bölgesinde Lebesgue ölçümü sıfır olan kümedir.

ii) u: [0,T]→ $L^1(\Omega)$ fonksiyonu bazı T>0 değerleri için süreklidir.

iii) $(x,t) \to u(x,t) \in C\big((\Omega\backslash K) \times (0,T)\big)$

iv) u (x,t) >0 on $(\Omega\backslash K) \times (0,T)$

v) $\nabla_\gamma u \in L^p_{loc}(\Omega\backslash K)$

vi) $\lim\limits_{t\to 0} u(.,t) = u_0$

4.5 Bazı Hardy Eşitsizlikleri ve Uygulamaları

Bu kısımda radyal olmayan bazı Hardy eşitsizlikleri verilecek ve bazı denklemlerde uygulaması gösterilecektir.

Teorem 4.5.1: u$\in C_c^\infty(\Omega)$, Ω düzgün sınıra sahip bir bölge ve $\Omega \subset R^d \times R^k$, s reel sayı, γ >0, $\nabla_\gamma = (\nabla_x, |x|^\gamma \nabla_y)$, $k \geq 1$, $d + k = N$ için $z = (x,y) = (x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_k) \in R^d \times R^k$ olmak üzere

$$\int_\Omega \left|\nabla_\gamma u\right|^2 dz \geq \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{1}{x_1^2} u^2\, dz$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt: Mutlak değerin pozitifliğinden

$$\left|\nabla_\gamma u + s\frac{\nabla_\gamma(x_1)}{x_1}u\right|^2 \geq 0$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade açılıp Ω bölgesinde integre edilirse

$$\int_\Omega [\left|\nabla_\gamma u\right|^2 + 2s\nabla_\gamma u \frac{\nabla_\gamma(x_1)}{x_1} u + s^2 \left(\frac{\nabla_\gamma(x_1)}{x_1}\right)^2 u^2] dz \geq 0 \tag{4.23}$$

ifadesi için

$$A = 2\int_\Omega \nabla_\gamma u \frac{\nabla_\gamma(x_1)}{x_1} u\, dz = -\int_\Omega u^2 \mathrm{div}\left(\frac{\nabla_\gamma(x_1)}{x_1}\right) dz = \int_\Omega \frac{1}{x_1^2} u^2 dz \tag{4.24}$$

olmak üzere (4.23) ile (4.24) ifadeleri birlikte düşünüldüğünde

$$\int_\Omega \left|\nabla_\gamma u\right|^2 dz + k\int_\Omega \frac{1}{x_1^2}u^2 dz + s^2\int_\Omega \left(\frac{\nabla_\gamma(x_1)}{x_1}\right)^2 u^2 dz \geq 0 \tag{4.25}$$

(4.25) ifadesinde $\left(\frac{\nabla_\gamma(x_1)}{x_1}\right)^2 = \frac{1}{x_1^2}$ olduğundan

$$\int_\Omega \left|\nabla_\gamma u\right|^2 dz \geq -(s+s^2)\int_\Omega \frac{1}{x_1^2}u^2 dz \tag{4.26}$$

(4.26) ifadesinde ise f(s)=-(s + s^2) alınırsa max{f(s)}=$\frac{1}{4}$ olduğundan

$\int_\Omega \left|\nabla_\gamma u\right|^2 dz \geq \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{1}{x_1^2}u^2 dz$ eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.5.2: u$\in C_c^\infty(\Omega)$, $\Omega = B_1(0)$,γ>0, s reel sayı, $\nabla_\gamma = \left(\nabla_x, |x|^\gamma \nabla_y\right)$, $k \geq 1$, $d + k = N$ için $z = (x,y) = (x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_k) \in R^d \times R^k$ olmak üzere

$$\int_\Omega \left|\nabla_\gamma u\right|^2 dz \geq \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{1}{x_1^2\log^2\left(\frac{1}{x_1}\right)}u^2\, dz - \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{x_1^2\log\left(\frac{1}{x_1}\right)}u^2\, dz$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt: Mutlak değerin pozitif olmasından

$$\left|\nabla_\gamma u + s\frac{\nabla_\gamma\left(\log\left(\frac{1}{x_1}\right)\right)}{\log\left(\frac{1}{x_1}\right)}u\right|^2 \geq 0$$

elde edilir. Bu ifade açılıp Ω bölgesinde integre edilirse

$$\int_\Omega \left[\left|\nabla_\gamma u\right|^2 + 2s\nabla_\gamma u\frac{\nabla_\gamma\left(\log\left(\frac{1}{x_1}\right)\right)}{\log\left(\frac{1}{x_1}\right)}u + s^2\left(\frac{\nabla_\gamma\left(\log\left(\frac{1}{x_1}\right)\right)}{\log\left(\frac{1}{x_1}\right)}\right)^2 u^2\right]dz \geq 0 \tag{4.27}$$

Bu ifade için

$$A = -\int_\Omega u^2 div\left(\frac{\nabla_\gamma\left(\log\left(\frac{1}{x_1}\right)\right)}{\log\left(\frac{1}{x_1}\right)}\right)dz = \int_\Omega \frac{1}{x_1^2\log^2\left(\frac{1}{x_1}\right)}u^2 dz - \int_\Omega \frac{1}{x_1^2\log\left(\frac{1}{x_1}\right)}u^2\, dz \tag{4.28}$$

olmak üzere, (4.27) ile (4.28) birlikte düşünüldüğünde

$$\int_\Omega |\nabla_\gamma u|^2 dz + s\int_\Omega \frac{1}{x_1^2\log^2\left(\frac{1}{x_1}\right)}u^2\,dz - s\int_\Omega \frac{1}{x_1^2\log\left(\frac{1}{x_1}\right)}u^2\,dz + s^2\int_\Omega \left(\frac{\nabla_\gamma\left(\log\left(\frac{1}{x_1}\right)\right)}{x_1}\right)^2 u^2 dz$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadenin pozitifliği ile $\left(\frac{\nabla_\gamma\left(\log\left(\frac{1}{x_1}\right)\right)}{\log\left(\frac{1}{x_1}\right)}\right)^2 = \frac{1}{x_1^2\log^2\left(\frac{1}{x_1}\right)}$ eşitliği kullanılırsa

$$\int_\Omega |\nabla_\gamma u|^2 dz \geq -(s+s^2)\int_\Omega \frac{1}{x_1^2\log^2\left(\frac{1}{x_1}\right)}u^2\,dz + s\int_\Omega \frac{1}{x_1^2\log\left(\frac{1}{x_1}\right)}u^2\,dz \tag{4.29}$$

(4.29) ifadesinde f(s)=-$(s+s^2)$ alındığında max{f(s)}=$\frac{1}{4}$ olacağından

$$\int_\Omega |\nabla_\gamma u|^2\,dz \geq \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{1}{x_1^2\log^2\left(\frac{1}{x_1}\right)}u^2\,dz - \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{x_1^2\log\left(\frac{1}{x_1}\right)}u^2\,dz$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi Teorem 4.5.1' in bir uygulaması verilecektir.

Sonuç 4.5.1: $\Omega \in \mathrm{R}^d \times \mathrm{R}^k$ bölgesinde düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip bir bölge, 0<v∈ $L^1_{loc}(\Omega)$, m> 0 ve $\mu > \frac{1}{4}$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki denklemin

$$\begin{cases} -\Delta_\gamma u - \mu\frac{1}{x_1^2}\mathrm{u} = \mathrm{v}u^m & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases} \tag{4.30}$$

pozitif çözümü yoktur.

Kanıt: Kabul edelim ki u fonksiyonu (4.30) probleminin pozitif bir çözümü olsun. (4.30) eşitliğinin her iki yanını u ile çarpıp ve Ω bölgesinde integre edersek

$$\int_\Omega -\mathrm{u}\Delta_\gamma u\,\mathrm{dz} - \mu\int_\Omega \frac{1}{x_1^2}|\mathrm{u}|^2\mathrm{dz} = \int_\Omega \mathrm{v}\,u^{m+1}\mathrm{dz}$$

elde edilir. Gauss-Green formülü ve Teorem 4.4.2 kullanılırsa

$$\int_\Omega -\mathrm{u}\Delta_\gamma u\,\mathrm{dz} = \int_\Omega |\nabla_\gamma \mathrm{u}|^2\mathrm{dz} \geq \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{1}{\mathrm{x}_1^2}|\mathrm{u}|^2\,\mathrm{dz}$$

elde edilir. $\mu > \frac{1}{4}$ olduğundan

$\frac{1}{4}\int_{\Omega}\frac{1}{x_1^2}|u|^2\,dz$ - $\mu\int_{\Omega}\frac{1}{x_1^2}|u|^2dz = (\frac{1}{4}-\mu)\int_{\Omega}\frac{1}{x_1^2}|u|^2dz \geq \int_{\Omega} v\, u^{m+1}dz > 0$ ifadesi elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu çelişki

$(\frac{1}{4}-\mu)\int_{\Omega}\frac{1}{x_1^2}|u|^2dz<0$

olduğundan dolayı kaynaklanmaktadır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada öncelikle,

Ω R^{d+k} için Carnot Carathedory metrik yuvarı, a(z) pozitif fonksiyonu için $V \in L^1_{loc}(\Omega)$ olmak üzere;

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_\gamma.\left(a(z)\left|\nabla_\gamma u\right|^{p-2}\nabla_\gamma u\right) + V(z)u^{p-1} & \Omega \times (0,T) \\ u(z,t) \ = u_0(z) > 0 & \partial\Omega \times (0,T) \\ u(z,t) \ = 0 & \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{5.1}$$

ile tanımlanan problemin pozitif çözümü yokluğu ile

$$\inf_{0 \not\equiv \phi \in C_c^\infty(\Omega \setminus K)} \frac{\int_\Omega (\epsilon + a(z))\left|\nabla_\gamma \phi\right|^p dz - \int_\Omega V(z)|\phi|^p dz}{\int_\Omega |\phi|^p dz}$$

spektrumunun sonucu arasında bir ilişki olduğu gösterildi.

Tezin her bölümünde Hardy eşitsizlikleri ile kısmı türevli denklemlerin pozitif çözümlerinin varlığı ya da yokluğu arasında ilişki olduğundan bahsedildi. Dolayısıyla Hardy eşitsizlikleri kısmı türevli denklemler için önemlidir. Bundan dolayı sırasıyla radyal olmayan potansiyele sahip,

$$\int_\Omega \left|\nabla_\gamma u\right|^2 dz \geq \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{1}{x_1^2} u^2\, dz \tag{5.2}$$

$$\int_\Omega \left|\nabla_\gamma u\right|^2 dz \geq \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{1}{x_1^2 \log^2\left(\frac{1}{x_1}\right)} u^2\, dz - \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{x_1^2 \log\left(\frac{1}{x_1}\right)} u^2\, dz \tag{5.3}$$

iki yeni Hardy eşitsizliği ispatlandı. (5.2) Hardy eşitsizliğinin kısmı türevli denkleme uygulaması verildi.

(5.1) probleminde uygun a(z) ve V(z) ‘lerin belirlenmesi, (5.2) ile (5.3) Hardy eşitsizliklerinde sabitlerin en iyi sabit olduğunun gösterilmesi ilerleyen çalışmalarımızın konusudur.

KAYNAKLAR

Anar, İ. E., 2005. Kısmi Diferansiyel Denklemler. Palme Yayıncılık, 552, Ankara.

Azorero J.G., Alonso I.P., 1998. Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems, Journal of Differential Equations, 144(2), 441-476.

Balcı, M., 2012. Matematik Analiz 2. Sürat Yayınları, 336, İstanbul.

Baouendi, M.S., 1967. Sur une classe d'opérateurs elliptiques degénérés, Bull.Soc. Math. France, 95, 45–87.

Baras, P., Goldstein, J. A.,1984. The heat equation with a singular potential, Trans. Amer. Math. Soc., 284, 121–139.

Başkan, T., Bizim, O., Cangül, İ.N., 2006. Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş. Nobel Yayınları, 153, Ankara.

Cabré, X., Martel, Y., 1999. Existence versus explosion instantanée pour des équations de la chaleur linéaires avec potentiel singulier, C. R. Math. Acad. Sci. Paris ,329, 973–978.

D'Ambrosio, L., Lucente, S., 2003. Nonlinear Liouville theorems for Grushin and Tricomi operators, J. Differential Equations ,193, 511–541.

D'Ambrosio, L., 2005. Hardy inequalities related to Grushin type operators, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa Classe diScienze Serie V, 4(3), 451-486.

Edmunds, D.E., Triebel, H., 1999. Sharp Sobolev embeddings and related Hardy inequalities, The critical case, Mathematische Nachrichten, 207(1), 79-92.

Evans, L.C., 2002. Partial differential equations. American Mathematical Society, Rhode, 749p, Island.

Franchi, B., Gutirrez, C.E., Wheeden, L.R., 1994. Weighted Sobolev-Poincaré inequalities for Grushin type operators, Comm. Partial Differential Equations, 19, 523-604.

Garofalo, N., 1993. Unique continuation for a class of elliptic operators which degenerate on a manifold of arbitrary codimension, J. Differential Equations ,104, 117–146.

Goldstein, J., Kombe, I., 2003. Nonlinear degenarate parabolic equations with singular lower-order term, Advances in Differantial Equations, 8(10), 1153-1192.

Grushin, V., 1970. A certain class of hypoelliptic operators, Math. USSR-Sb., 12(3), 458–476.

Grushin, V., 1971. A certain class of elliptic pseudodifferential operators that are degenerate on a submanifold, Mat. Sb., 84, 163–195.

Han, J.Q., Guo, Q.Q.,2015. Nonlinear Degenerate Parabolic Equations with Time-dependent Singular Potential for Bouendi-Grushin Vector Fields, Acta Mathematica Sinica, 31(1), 123–139.

Hansen, V.L., 2006. Functional Analysis. Word Scientific, 136p, Singapore.

Hardy, G.H., 1920. Note on a theorem of Hilbert, Mathematische Zeitschrift, 6(3), 314-317.

Hardy, G.H., 1928. Notes on some points in the integral calculus, LXIV. Further inequalities between integrals, Messenger of Mathematics, 57, 12-16.

Hardy, G.H., Littlewood J.E., Polya, G., 1952. Inequalities. Cambridge University Press, 340p, Cambridge.

Kombe, I., 2004. Doubly nonlinear parabolic equations with singular lower order term, Nonlinear Anal., 56, 185–199.

Kombe, I., Goldstein, J., Goldstein, G., 2005. Nonlinear parabolic equations with singular coefficient and criticial exponent, Applicable Analysis, 84(6), 571-583.

Kombe, I., 2006. Nonlinear degenerate parabolic equations for Baouendi-Grushin operators, Math. Nachr., 279 (7), 756-773.

Kombe, I., 2013. On the nonexistence of positive solutions to doubly nonlinear equations for Bouendi-Grushin operators, Discrete And Countinuous Dynamical Systems, 33(11), 5167-5176.

Kufner, A., Maligranda L., Persson L.E., 2006. The prehistory of the Hardy inequality, The American Mathematical Monthly, 113(8), 715-732.

Landau, E., 1926. A note on a theorem concerning series of positive terms: Extract from a letter of Prof. E. Landau to Prof. I. Schur, Journal of the London Mathematical Society, 1(1), 38-39.

Leray, J., 1933. Etude de diverses équations intégrales non lineaires et de quelques problemés que pose l'Hydrodynamique, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 12, 1-82.

Lindqvist, P., 1990. On the equation $div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+\lambda|u|^{p-2}u=0$, Proceedings of the American Mathematical Society, 109(1), 157-164.

Opic, B., Kufner A., 1990. Hardy-type inequalities. Pitman Research Notes in Mathematics, Longman Scientific & Technical, 333p, Harlow.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Erkan GÜRSU

Doğum Yeri ve Yılı : Şişli, 13/05/1994

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : erkangursuu@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Ali Rıza Özderici Lisesi, 2012

Lisans : İstanbul Ticaret Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2016

Yüksek Lisans : İstanbul Ticaret Üniversitesi,
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2019

Mesleki Deneyim

Kemerburgaz Şehit Er Sinan Şen Ortaokulu,
Matematik Öğretmeni 2017-2018

Güzeltepe Ortaokulu,
Matematik Öğretmeni 2018-… (devam ediyor)

Yayınları

Gürsu, E., 2019. Baouendi-Grushin Vektör Alanlarıyla İlişkilendirilmiş Hardy Tipi Eşitsizlik ve Lineer Olmayan Kısmi Türevli Denklemler. VI. Uluslararası Fen, Mühendislik ve Mimarlık Bilimlerinde Akademik Çalışmalar, 13-15 Haziran, Ankara, p. 9.