T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# İSTATİSTİKSEL LİMİT NOKTALARI

İsmail YILDIZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI



1995

ŞANLIURFA

*T.C.*
***HARRAN ÜNİVERSİTESİ***
***FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ***

# *İSTATİSTİKSEL LİMİT NOKTALARI*

***İsmail YILDIZ***

***YÜKSEK LİSANS TEZİ***

***MATEMATİK ANABİLİM DALI***

Bu Tez 8/8/1995 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından Değerlendirilerek Oybirliği / ~~Oyçokluğu~~ İle Kabul Edilmiştir.

Prof. Dr. M. Yaşar ÜNLÜ
Enstitü Müdürü

| (İmza) | (İmza) | (İmza) |
| --- | --- | --- |
| Doç.Dr.Fatih NURAY | Yrd.Doç.Dr. Aslan Gülcü | Yrd. Doç. Dr. Mikail ET |
| Danışman | | |

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İSTATİSTİKSEL LİMİT NOKTALARI

İsmail YILDIZ

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

1995, Sayfa : 56

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde çalışmaya kaynaklık eden bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde bir dizinin istatistiksel yakınsak olması tanımından hareketle, x 'in istatistiksel limit noktası tanımı verildi. İstatistiksel yakınsaklık kavramı dizisel limit kavramı olarak ele alınıp bir sayı dizisinin yığılma noktaları veya limit noktaları kümesinin istatistiksel benzerleri doğal bir yolla tanımlandı. Ayrıca yığılma noktaları ve istatistiksel limit noktalarının temel özellikleri verildi. Adi limit noktaları ile istatistiksel limit noktaları ve istatisiksel yığılma noktaları arasındaki benzerlikler ve farklılıklar ortaya koyuldu. Son olarak da bazı iyi bilinen tamlık özelliklerinin istatistiksel benzerleri verildi.

İstatistiksel yakınsaklığın hiç bir matris metodu tarafından içerilmediği, ancak sınırlı diziler için Cesaro matrisi tarafından içerildiği bilinir. Üçüncü bölümde, toplanabilme matrislerinin bir sınıfının arakesiti ile istatistiksel yakınsaklık mukayese edilerek bu sonuçlar genelleştirildi. İstatistiksel yakınsaklığın bir matrix karekterizasyonu tanıtıldı.

***ANAHTAR KELİMELER:*** Matris dönüşümü, regüler matris, üçgensel matris doğal yoğunluk, toplanabilme, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel cauchy dizisi, istatistiksel limit noktaları, istatistiksel yığılma noktaları, istatistiksel kapanış A-toplanabilme, A-istatistiksel yakınsaklık.

## *SUMMARY*

Masters Thesis

STATISTICAL LIMIT POINTS



İsmail YILDIZ

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics


1995, Page : 56


This theis consists of three chapter.

In the first chapter, some fundemental definations and theorems have been given as a references to this study.

In the second chapter, following the concept of a statistically convergent sequence x, we define a statistical limit points of x.

In this chapter, we return to the view of statistical convergence as a sequential limit concept and we extend this concept in a natural way to define a statistical analogue of the set of limit points or cluster points of a number sequence. Also, we give the basic properties os statistical limit points and cluster points, and the similarities and differences between these points and ordinary limit points were given. Finally, in the second chapter, statistical analogues of some of the well-known completeness properties of the real numbers were given.

It is known that statistical convergence can not be included by any matrix method but for bounded sequences it is included by the cesaro matrix method. In the third chapter, these result are extended by comparing statistical convergence with the intersection of a collection of summability matrices. Also, A matrix characterization of statistical convergence has been introduced.



***KEY WORDS:*** Matrix transformation, regular matrix, triangular matrix, natural density, summability, statistical convergence, statistical Cauchy sequence, statistical limit points, statistical cluster points, statistical closure, A-summability, A-statistical convergence.

***TEŞEKKÜR***

Bu yüksek lisans çalışmasını yöneten ve çalışma süresince karşılaştığım güçlüklerde değerli yardımlarını esirgemeyen hocam sayın Doç.Dr.Fatih NURAY 'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

***İsmail YILDIZ***

## *İÇİNDEKİLER*

## SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| IR | Gerçel Sayılar Cümlesi |
| IN | Doğal Sayılar Cümlesi |
| C | Reel yada Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı |
| S | İstatistiksel yakınsak diziler uzayı |
| $S_0$ | Sıfıra istatistiksel yakınsak diziler uzayı |
| $w_p$ | Kuvvetli p-Cesaro toplanabilir diziler uzayı |
| h.h.k. | Hemen hemen tüm k 'lar |
| $\delta(K)$ | K 'nın doğal yoğunluğu |
| $\Lambda_x$ | x 'in istatistiksel limit noktaları kümesi |
| $L_x$ | x 'in adi limit noktaları kümesi |
| $\Gamma_x$ | x 'in İstatistiksel yığılma noktaları kümesi |
| $\Lambda_y$ | y 'nin İstatistiksel limit noktaları kümesi |
| $\Gamma_y$ | y 'nin İstatistiksel yığılma noktaları kümesi |
| W | Kompleks terimli diziler uzayı |
| $I_J$ | $L_x \backslash \Gamma_x$ 'in açık örtüsü |
| s | Doğal sayıların kesin artan bir dizisi |
| $\Omega$ | Tek nokta cümlesi |
| (E,F) | E 'den F 'ye matris dönüşümleri |
| $\tau$ | Alt üçgensel negatif olmayan toplanabilir A matrislerinin toplamı |
| A | Matrislerin sayılabilir kolleksiyonu |
| K | Matris kolleksiyonun birleşimi |

# *1.BÖLÜM*

## *1.1. TEMEL KAVRAMLAR*

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

***Tanım 1.1. [6] (Metrik uzay) :*** X boş olmayan bir cümle olsun.
d: X x X$\longrightarrow$IR fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d 'ye X 'de metrik (veya uzaklık fonksiyonu) ve (X,d) çiftine de metrik uzay denir.

$M_1$ ) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$M_2$ ) $d(x,y) = d(y,x)$ (Simetri özelliği)

$M_3$ ) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ (Üçgen eşitsizliği)

***Tanım 1.2. [6] (Yuvar) :*** (X,d) bir metrik uzay , $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olsun

$D_r(x_0) = D(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$' ye, $x_0$ merkezli r yarıçaplı açık yuvar denir.

$D_r(x_0) = D(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) \leq r\}$' ye, $x_0$ merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar denir.

$S_r(x_0) = S(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) = r\}$' ye, $x_0$ merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

***Tanım 1.3. [6] (Açık ve kapalı cümle) :*** X bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Her $x \in A$ için $D_r(x) \subset A$ olacak şekilde r sayısı varsa A 'ya X 'de açık denir.

X 'in B alt cümlesinin X 'deki tümleyeni yani $B'$ =X -B, X 'de açıksa B 'ye kapalı cümle denir.

***Tanım 1.4. [6] (Kısmi Sıralama Bağıntısı) :*** X boş olmayan bir cümle ve "$\leq$" X 'de bir bağıntı olsun . Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa ; "$\leq$" bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir.

$S_1$) Her $x \in X$ için $x \leq x$ dir. (Yansıma özelliği)

$S_2$) $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise x = y dir. (ters simetri özelliği)

$S_3$) $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ dir. (Geçişme özelliği)

***Tanım 1.5. [6] (Sınırlı cümle) :*** $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir cümle ve $A \subset X$ olsun . $(A \neq \varnothing)$. Her $x \in A$ için $u \leq x$ olacak şekilde $u \in X$ varsa u 'ya A 'nın X 'deki alt sınırı denir. Benzer şekilde her $x \in A$ için $x \leq v$ olacak şekilde $v \in X$ varsa v 'ye A 'nın X 'deki üst sınırı denir.

Alttan ve üstten sınırlı olan cümleye sınırlı cümle denir.

***Tanım 1.6. [6] (Lineer Uzay) :*** L boş olmayan bir cümle ve F reel veya kompleks sayılar cismi olsun .Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L 'ye F üzerinde Lineer uzay veya Vektör uzayı denir.

A) L , + işlemine göre değişmeli gruptur.

$G_1$ ) Her $x,y \in L$ için $x+y \in L$ dir. (Kapalılık)

$G_2$ ) Her $x,y \in L$ için $x+(y+z) = (x+y)+z$ dir. (Birleşme özelliği)

$G_3$ ) Her $x \in L$ için $x+\theta = \theta+x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır. (Özdeş eleman)

$G_4$ ) Her $x \in L$ için $x+(-x) = ((-x)+x) = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır. (Ters eleman)

$G_5$ ) Her $x,y \in L$ için $x+y = y+x$ dir. (Değişme özelliği)

B) $x,y \in L$ ve $\alpha,\beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

$L_1$ ) $\alpha x \in L$ dir. (Skalerle çarpmaya göre kapalılık)

$L_2$ ) $\alpha (x+y) = \alpha x+\alpha.y$

$L_3$ ) $(\alpha +\beta).x = \alpha x+\beta x$

$L_4$ ) $(\alpha \beta) x = \alpha (\beta x)$

$L_5$ ) $1x = x$ (1,F 'nin birim elemanıdır.)

***Tanım 1.7. [6] (Lineer Alt Uzay) :*** L, F cismi üzerinde bir Lineer uzay olsun. L 'nin bir M alt cümlesi L 'deki işlemlere göre F üzerinde Lineer uzay ise M 'ye L 'nin alt uzayı denir. Yani

Her $\alpha \in F$ ve her $x,y \in M$ için

1) $x+y \in M$

2) $\alpha x \in M$

veya

$\alpha x+\beta y \in M$ $(\alpha,\beta \in F) \Rightarrow M$

'ye L 'nin Lineer alt uzayı denir.

***Tanım 1.8. [6] (Normlu Uzay) :*** N bir Lineer uzay olsun.

$\| \; \| : N \longrightarrow IR$ fonksiyonunun x 'deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\| \; \|$ 'ye N 'de norm denir.

$N_1$ ) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ dır.

$N_2$ ) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ dır. ($\alpha \in F$)

$N_3$ ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dır. (Üçgen eşitsizliği)

Lineer uzay üzerinde bir norm tarif edilmişse bu uzaya normlu lineer uzay denir.

***Tanım 1.9. [6] (Sürekli Fonksiyon) :*** X=(X,d) ve Y=(Y,ρ) iki metrik uzay olsun. $f : X \to Y$ bir dönüşüm ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$d(x.x_0) < \delta$$

olduğunda,

$$\rho\ (f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f 'ye $x_0$ noktasında süreklidir denir. f, X 'in her noktasında sürekli ise f 'ye X 'de süreklidir denir.

***Tanım 1.10. [6] (Sayılabilir Cümle) :*** Bir A cümlesi, N={1,2,3,.........,n,.........} cümlesinin bir alt cümlesine denk ise A cümlesine sayılabilir cümle denir. Örneğin reel sayılar cümlesi IR sayılamaz fakat rasyonel sayılar cümlesi Q sayılabilirdir.

***Tanım 1.11. [21] (Kapanış):*** $S \subset (X,d)$ olsun. $\bar{S}$, S 'yi içeren en küçük kapalı kümedir.

$$\bar{S} = \bigcap_{F \supset S} F$$

şeklinde gösterilir. Yani, S 'nin kapanışı S 'yi içeren bütün kapalı kümelerin kesişimidir.

***Tanım 1.12. [6] (Yoğun Cümle ve Ayrılabilir Cümle ) :*** (X,d) metrik uzay ve A, X 'in bir alt cümlesi olsun . A 'nın kapanışı X 'e eşitse , yani $\overline{A} = X$ ise, A 'ya X 'de yoğun denir. X 'in sayılabilir yoğun bir alt cümlesi varsa X 'e ayrılabilir denir. Örneğin Q sayılabilir ve $Q = IR$ olduğundan $IR$ ayrılabilirdir.

***Tanım 1.13. [6] (Sınırlı Dizi) :*** $(x_n)$, $(X,\|\ \|)$ 'de bir dizi olsun. Her n için $\|x_n\| \leq K$ olacak şekilde $K \geq 0$ sayısı varsa $x_n$ 'e sınırlı dizi denir.

***Tanım 1.14. [2] (Topolojik Uzay) :*** X bir küme ; $\tau$ 'da P(X) 'in bir alt kümesi olsun . Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa $\tau$ 'ya X üzerinde bir topoloji denir.

$t_1$ ) $X, \varnothing \in \tau$ 'dur

$t_2$ ) $\tau$ 'da alınan herhangi sayıda elemanların birleşimi $\tau$ 'ya aittir. Yani, her $\{A_i\}_{i \in I} \in \tau$ (I herhangi bir indis kümesi) için $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ dır.

$t_3$ ) $\tau$ 'da alınan her sonlu sayıda elemanların kesişimi $\tau$ 'ya aittir. Yani, her $\{A_i\}_{i \in J} \in \tau$ ( J sonlu indis kümesi) için $\bigcap_{i \in J} A_i \in \tau$ dır.

$(X, \tau)$ ikilisine topolojik uzay denir.

***Tanım1.15.(Kompaktlık):*** X bir metrik uzay olsun. X 'deki herbir dizi yakınsak bir alt diziye sahipse X 'e kompaktır denir. IR 'de alınan bir A kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart A 'nın kapalı ve sınırlı olmasıdır.

***Tanım 1.16. [2] (Hiç bir yerde yoğun olmayan cümle ) :*** X Topolojik uzayının bir alt kümesi A olsun . $(\overline{A})^o = \varnothing$ ise , A kümesine X uzayı içinde hiçbir yerde yoğun olmayan alt küme denir.

***Tanım 1.17. [29] (Monoton Artan-Monoton Azalan Dizi):*** Bir $(x_n)$ dizisi için daima $x_n < x_{n+1}$ ise, buna monoton artan, eğer daima $x_n > x_{n+1}$ ise monoton azalan dizi denir.

***Tanım 1.18.($\delta$-Komşuluğu).:*** $\delta$ bir pozitif sayı olsun.

$$K=\{x\in IR : |x-a|<\delta\}$$

cümlesine a noktasının $\delta$-Komşuluğu denir. K\{a} cümlesine de a 'nın delinmiş $\delta$-Komşuluğu adı verilir.

$$|x-a|<\delta \Leftrightarrow (a-\delta<x<a+\delta)$$

olduğundan bir a noktasının $\delta$ komşuluğu (a-$\delta$ ,a+$\delta$ } açık aralığından ibarettir.

***Tanım 1.19.(Yığılma Noktası):*** $A\subset IR$ ve a∈IR olsun. a noktasının her $\delta$ komşuluğunda A cümlesinin a 'dan farklı en az bir elemanı varsa, bu a noktasına A cümlesinin bir yığılma noktasıdır denir. Örneğin $A=\{x_n=1/n, n\in IN\}$ cümlesinin yığılma noktası 0 'dır, burada yığılma noktası cümleye ait değildir. $(-1^n)$ dizisini gözönüne alalım. Bu dizinin yığılma noktalarının kümesi {-1,1} olur.

***Tanım 1.20.(Limit) :*** $A\subset IR$ ve $f:A\to IR$ bir fonksiyon ve a 'da A cümlesinin bir yığılma noktası olsun. Terimleri A \ {a} cümlesine ait olan ve a noktasına yakınsayan her $(x_n)$dizisi için elde edilen (f$(x_n)$) görüntü dizisi aynı bir L sayısına yakınsıyorsa bu L sayısına, f fonksiyonunun a noktasındaki limiti denir ve

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

ile gösterilir. Bir f fonksiyonunun bir noktada limitinin var olması için gerek ve yeter şart o noktada sağ ve sol limitlerinin mevcut ve eşit olmasıdır.

***Tanım 1.21.(Yakınsaklık) :*** (X,d) bir metrik uzay ve $(x_n)$, X 'de bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$$

olacak şekilde bir $x\in X$ varsa $(x_n)$, X 'de yakınsak ve x 'e de dizinin limiti denir. $(x_n)$ dizisi yakınsak ve limiti x ise bu,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, x_n \to x \text{ veya } n \to \infty \text{ için } x_n \to x$$

sembollerinden biri ile ifade edilir. $(x_n)$ yakınsak değilse ıraksaktır.

***Tanım 1.22.(Asimtotik Yoğunluk):*** Eğer,

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

mevcut ise buna A kümesinin asimtotik yoğunluğu denir. $A(n) = |\{a \le n; a \in A\}|$ şeklinde tanımlıdır.

***Tanım 1.23.(Sıfır Yoğunluk):*** Eğer $\delta(A) = 0$ ise bu A kümesine sıfır yoğunluklu küme denir.

***Tanım 1.24. [8] (Doğal Yoğunluk):*** Pozitif tamsayılardan oluşan bir K cümlesinin doğal yoğunluğu,

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : k \in K\}|$$

ile tanımlanır. Burada $|\{k \le n : k \in K\}|$, K 'nın n 'den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir. (Buck,1953)

***Tanım. 1.25. [8] :*** $A \subseteq IN$ olmak üzere $\delta(A)=0$ olsun. Eğer $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k \ge N$ ve her $k \notin A$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in IN$ varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına hemen hemen her k için yakınsaktır denir ( [8] Buck 1953). Zaten bu tanım istatistiksel yakınsaklık tanımından farklı bir tanım değildir.

***Tanım 1.26. [17] (İstatistiksel yakınsaklık):*** Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \le n : |x_k - L| \ge \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Yani; her $\varepsilon > 0$ için,

$$\text{h.h.k için, } |x_k - L| < \varepsilon$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st - \lim x_k = L$$

biçiminde gösterilir.

Eğer L=0 ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir. (Fast1951)

Burada küme sembolü dışındaki dikey çizgiler kümenin eleman sayısını göstermektedir. Şimdi istatistiksel yakınsak diziye bir kaç örnek verelim.

***Örnek 1.1:***

$$x_k = \begin{cases} 1, & k \text{ bir kare ise } (k = m^2) \\ 0, & \text{diğer durumlarda } (k \ne m^2) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. Bu dizinin istatistiksel yakınsak olduğunu gösterelim. Bu dizi,

İstatistiksel yakınsaklığın;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : |x_k - L| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

tanımından;

$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ \ldots$

şeklindedir. Buradan her $\varepsilon > 0$ için,

$$\left|\left\{k \le n : |x_k| \ge \varepsilon\right\}\right| \le \left|\left\{k \le n : x_k \ne 0\right\}\right| \le \sqrt{n}$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : x_k \ne 0\right\}\right| \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Demekki $\left\{k \in IN : |x_k - 0| \ge \varepsilon\right\}$ cümlesinin elemanları hariç diğer bütün k 'lar için $|x_k - 0| < \varepsilon$, (her $\varepsilon > 0$) olduğundan $x_k \to 0$ 'a istatistiksel yakınsaktır.

***Örnek 1.2.:***

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2, m = 1,2,3,\ldots \\ 3, & k \ne m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için st-lim x = 3 'dir.

Burada, istatistiksel yakınsaklık ile adi yakınsaklık arasında nasıl bir ilişki olabileceği sorusu akla gelebilir. Hemen belirtelim ki, adi anlamda yakınsak olan her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat örnek 1.1. ve 1.2. 'den görüleceği gibi sınırlı ıraksak yada sınırsız ıraksak bazı diziler de istatistiksel yakınsak olabilmektedir.

***Tanım 1.27.(Cauchy Dizisi) :*** X=(X,d) bir metrik uzay ve $(x_n)$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için m,n> $n_0$ olduğunda

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa $(x_n)$ dizisine Cauchy dizisi denir.

***Tanım 1.28. [12] (İstatistiksel Cauchy dizisi):*** Eğer her $\varepsilon > 0$ için, bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı mevcut ve h.h.k için,

$$|x_k - x_N| < \varepsilon$$

ise, yani her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \le n : |x_k - x_N| \ge \varepsilon\}| = 0$$

ise, $x = (x_k)$ dizisine İstatistiksel Cauchy dizisi denir. ( Fridy 1985)

***Tanım 1.29. [6] (Tamlık) :*** X 'deki her Cauchy dizisi yakınsak ise, yani

$x_n \longrightarrow x \in X$

ise, (X,d) metrik uzayına tamdır denir.

***Tanım 1.30. [21] (Regüler Matris):*** Bir $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin. Eğer bu A matrisi yakınsak dizileri, yakınsak dizilere limiti koruyarak dönüştürüyorsa A 'ya regülerdir denir ve $A \in (c,c,P)$ ile gösterilir. Bir matrisin regüler olması için gerek ve yeter şartlar Toeplitz tarafından aşağıdaki teorem ile verilmiştir. (Maddox, 1970)

***Teorem 1.1. [21] (Silverman Toeplitz):*** $A \in (c,c,p)$ olması için gerek ve yeter şart;

*i)* $\quad \mathrm{Sup}_n \sum |a_{nk}| < \infty$

*ii)* $\quad a_{nk} \to 0 \quad (n \to \infty, k \quad \text{sabit})$

iii) $\quad \sum a_{nk} \to 1 \quad (n \to \infty)$

olmasıdır. Bir matris bu üç şartı sağlıyorsa buna Toeplitz matrisi denir.

***Tanım 1.31.(Cesaro Matrisi) :*** Cesaro matrisi (C.1) aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1 \leq k \leq n \text{ ise} \\ 0, & k > n \text{ ise} \end{cases}$$

Cesaro matrisi regüler bir matristir.

***Tanım 1.32.(Kuvvetli p-Cesaro Toplanabilirlik):*** $x=(x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve p pozitif reel bir sayı olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir kompleks L sayısı varsa x dizisi L 'ye kuvvetli p-Ceséro toplanabilirdir denir. Kuvvetli p-Cesaro toplanabilir diziler uzayı $w_p$ ile gösterilecektir. O halde p >0 için,

$$w_p = \left\{ x=(x_k) : \exists \ L \in C, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p \to 0, \ n \to \infty \right\}$$

dir.

***Teorem 1.2. :*** p∈IR ve 0 < p <∞ olsun.

*(i)* Bir dizi bir L sayısına kuvvetli p-Cesaro toplanabilir ise L sayısına istatistiksel yakınsaktır.

*(ii)* Sınırlı bir dizi L sayısına istatistiksel yakınsak ise L sayısına kuvvetli p-Cesaro toplanabilirdir. ([9] Connor 1988). Bu sonuç Zygmund tarafindan da elde edildi. ([30] vol II, sh. 181). Fakat Zygmund istatistiksel yakınsaklığı, hemen hemen yakınsaklık olarak adlandırmaktadır.

***İspat:*** *(i)* Bir x dizisi, L sayısına kuvvetli p-Cesaro toplanabilir olsun. O halde her $\varepsilon$ >0 için,

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k - L|^p = \sum_{\substack{1\le k\le n \\ |x_k - L| < \varepsilon}}|x_k - L|^p + \sum_{\substack{1\le k\le n \\ |x_k - L| \ge \varepsilon}}|x_k - L|^p$$

$$\ge \sum_{\substack{1\le k\le n \\ |x_k - L| \ge \varepsilon}}|x_k - L|^p$$

$$\ge \sum_{\substack{1\le k\le n \\ |x_k - L| \ge \varepsilon}}\varepsilon^p$$

$$= \varepsilon^p \left|\left\{k \le n : |x_k - L| \ge \varepsilon\right\}\right|$$

elde edilir.

Böylece $x = (x_k)$ dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

*(ii)* Şimdi sınırlı $x = (x_k)$ dizisi, L sayısına istatistiksel yakınsak ve $K = \|x\|_\infty + |L|$ olsun . $\varepsilon$ >0 verilsin. Her

$n > N_\varepsilon$ için,

$$L_n := \left\{k \le n : |x_k - L| \ge (\tfrac{\varepsilon}{2})^{1/p}\right\}$$

ve

$$\frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : |x_k - L| \ge (\tfrac{\varepsilon}{2})^{1/p}\right\}\right| < \frac{\varepsilon}{2K^p}$$

olacak şekilde bir $N_\varepsilon > 0$ sayısı seçelim.

$x = (x_k)$ dizisi sınırlı olduğundan $\|x\|_\infty = \sup|x|_k$ ise her k için ,

$$|x_k - L| \le \|x - L\|_\infty \le \|x\|_\infty + |L| = K \quad \text{olup her } k \text{ için } |x_k - L|^p \le K^p$$

dir.

Şimdi $n > N_\varepsilon$ için,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k - L|^p = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\substack{k\in L_n\\ k\le n}}|x_k - L|^p + \sum_{\substack{k\notin L_n\\ k\le n}}|x_k - L|^p\Big)$$

$$\le \frac{1}{2}\left(|L_n|K^p + (n - |L_n|)\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$< \frac{1}{n}\left(\frac{n\varepsilon}{2K^p}K^p + n\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir.

Buradan $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli p-Cesaro toplanabilirdir.

***Sonuç 1.1. :*** Sınırlı diziler üzerinde kuvvetli p-Cesaro toplanabilme ile istatistiksel yakınsaklık denktir, yani p > 0 için $w_p \cap l_\infty = st \cap l_\infty$ dir.

Eğer $A = (a_{nk})$ negatif olmayan bir regüler matris toplanabilme metodu ise

$$w_0(A) = \left\{ x \in w : \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}|x_k| = 0 \right\}$$

ile tanımlanır. $w_0(A)$, sıfira kuvvetli A-toplanabilir dizilerin uzayıdır.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $s(x;\varepsilon)=\{k \in N: |x_k| \geq \varepsilon\}$ ile tanımlanır.

Şimdi A-istatistiksel yakınsak dizi tanımını verebiliriz.

***Tanım1.33. [11] ( A-İstatistiksel Yakınsak Dizi):*** A negatif olmayan regüler toplanabilme metodu olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$$\chi_{s(x-Le;\varepsilon)} \in w_0(A)$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L sayısına A-istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $x_k \xrightarrow{st_A} L$ ile gösterilir. A-istatistiksel yakınsak dizilerin uzayını $st_A$ ile göstereceğiz. ( Connor 1989)

Burada $\chi$, s 'nin karekteristik fonksiyonunu göstermektedir. Yani,

$$\chi_s^{(k)} = \begin{cases} 1, & k \in s \quad ise \\ 0, & k \notin s \quad ise \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

A matrisi (C,1) -cesaro matrisi alındığında A-istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

***Tanım 1.34. (Kuvvetli Toplanabilme):*** Herhangi bir A matrisi $p_k > 0$ olacak şekilde $p=(p_k)$ dizisi alınsın. Her $n \to \infty$ iken $A_n(|x-l_e|^p)=\sum_k a_{nk}|x_k - L|^{pk} \to 0$ ise x dizisine (A,p) toplanabilirdir denir.

***Tanım 1.35.(Matris Dönüşümü):*** w kompleks terimli bütün dizilerin uzayını göstermek üzere E ve F, w 'nın iki gerçek altuzayı ve $A=(a_{nk})$ $(k, n = 1,2,3,.....)$ sonsuz bir matris olsun. Eğer her $x=(x_k) \in E$ dizisi için,

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

her n için yakınsak ve $(Ax=A_n(x))\in F$ ise $A=(a_{nk})$ matrisine E 'den F 'ye bir matris dönüşümü tanımlıyor denir ve bu $A\in(E,F)$ ile gösterilir.

Matris dönüşümleri (King,1966), (Eizen ve Laush,1969), (Maddox,1970), (Savaş,1987), ve daha bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Bu matematikçiler bilinen dizi uzayları arasında pek çok matris dönüşümü karekterize etmişlerdir.

***Tanım: 1.36.(A-Toplanabilirlik):*** Bir $A=(a_{nk})$ matrisi verilmiş olsun. Her n için,

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

yakınsak ise $(x_k)$ dizisi a 'ya A-Toplanabilirdir yada A-limitlenebilirdir denir. Ve

$$A\text{-}lim\ x_k = a \ (lim\ Ax = a)$$

şeklinde yazılır.

***Tanım 1.37. (Üçgensel Matris) :*** $A=(a_{nk})$ matrisi verilmiş olsun. Eğer k>n için $a_{nk}=0$ ve $n=1,2,3,.....$ için $a_{nn}\neq 0$ ise A matrisine üçgensel matris denir. Yani alttan veya üstten üçgensel olmak üzere aşağıda belirtilen biçimdeki matrislerdir.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{veya} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & . & . & . \\ 0 & 0 & a_{33} & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Alttan üçgensel matris. Üstten üçgensel matris.

***Tanım 1.38. [21] (Euler-Knopp Matrisi):***

$\binom{n}{k} = n!/k!(n-k)!$ olmak üzere,

$a_{nk} = \binom{n}{k} r^k (1-r)^{(n-k)} (0 \le k \le n), \quad a_{nk} = 0 (k > n)$

ile tanımlanan $A=(a_{nk})$ matrisine Euler-Knopp matrisi denir.

0<r<1 olması durumunda A Toeplitzdir. r. dereceden Euler-Knopp matrisini (E,r) ile göstereceğiz.

***Teorem 1.3. [3] (Ortalama Değer teoremi) :*** $f:[a,b] \longrightarrow IR$ fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebiliyorsa $\exists$ c $\in$ (a,b) için,

$$f(b)-f(a) = (b-a) f'(c)$$

dir.

***Teorem 1.4.(Bolzano-Weierstrass Teoremi):*** Her sınırlı reel sayı dizisinin en az bir yakınsak alt dizisi vardır.

***İspat :*** $(x_n)$ bir sınırlı reel sayı dizisi olsun. Şu halde her $n \in IN$ için $|x_n| \le M$ olacak şekilde bir M reel sayısı vardır. $S = \{s \,/\, \text{sonsuz çoklukta ki n 'ler için } x_n \ge s\}$ cümlesini gözönüne alalım. Bu cümle boş değildir. Çünkü en azından M$\in$S 'dir. S cümlesi üstten sınırlıdır. Zira M bu cümle için bir üst sınırdır. S 'nin en küçük üst sınırına u diyelim. Şimdi şu önermenin doğruluğunu gösterelim.

" *her* $\varepsilon$ >0 için $u-\varepsilon \le x_n \le u+\varepsilon$ "

olacak şekilde sonsuz çoklukta n bulunabilir. Kabul edelim ki bu iddia doğru olmasın. Yani, sonlu sayıdaki n 'ler için,

$$u-\varepsilon \leq x_n \leq u+\varepsilon$$

olsun. u, S cümlesinin bir üst sınırı olduğundan $u+\varepsilon \notin S$ 'dir. Dolayısıyla

$$x_n \geq u+\varepsilon$$

eşitsizliği sadece sonlu sayıdaki n 'ler için gerçeklenir. Şu halde S 'nin bir $y \geq u-\varepsilon$ eşitsizliğini gerçekleyen bir y elemanı yoktur. Böylece $u-\varepsilon$, S 'nin bir üst sınırı olur ki, bu u 'nun en küçük üst sınır olmasıyla çelişir. Demekki Yukarıdaki önerme doğrudur. $u-\varepsilon \leq x_n \leq u+\varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan doğal sayıları küçükten büyüğe doğru;

$$n_1, n_2, n_3, .. n_k, ...$$

ile gösterelim. Buna göre herbir k için,

$$u-\varepsilon \leq x_n \leq u+\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Bu da $(x_{nk})$ dizisinin u sayısına yakınsadığını gösterir. $(x_{nk})$ dizisi $(x_n)$ dizisinin bir alt dizisi olduğundan ispat tamamlanmıştır.

***Teorem 1.5.(Bolzano-Weierstrass Teoremi(Yığılma noktaları ile ilgili)):*** Her sınırlı, sonsuz bir kümenin en az bir yığılma noktası vardır.

***ispat:*** Bütün reel sayıları A ve B gibi iki sınıfa ayıralım. A sınıfına öyle a sayıları dahil edelim ki, bunların solunda en fazla sonlu sayıda x elemanları için x < a olsun. B sınıfına öyle b sayıları dahil edelim ki, bunların solunda kümenin sonsuz sayıda x elemanları için x < a olsun.

Bu kesimle tanımlanan $\gamma$ sayısı bir yığılma noktasıdır. Çünkü $\gamma-\varepsilon$, A sınıfına aittir ve bunun solunda kümenin en fazla sonlu sayıda noktaları vardır.

$\gamma + \varepsilon$, B sınıfina ait olup bunun solunda kümenin sonsuz sayıda noktası vardır. Böylece

$\gamma - \varepsilon$ ile $\gamma + \varepsilon$

arasında kümenin sonsuz noktası bulunur ve $\gamma$ yığılma noktası olur.

***Teorem 1.6. [29] (Heine-Borel Teoremi):*** Sınırlı ve kapalı bir E cümlesinin sonlu sayıda öyle a noktaları vardır ki, bunlara tekabül eden $\varepsilon_a$ civarları (aralıkları), E cümlesini tamamiyle örterler.

***İspat:*** Lineer E nokta kümesi sınırlı olduğundan bir AB=1 aralığı içine alınabilir.
AB 'yi orta noktası ile iki eşit aralığa bölelim. Eğer, E kümesini sonlu sayıda $\varepsilon_a$ civarları ile örtmek mümkün olmasaydı hüküm bu iki aralıktan en az biri için de doğru olmayacaktı. Varsayalım ki, $1_1$ aralığı sonlu sayıda $\varepsilon_a$ civarları ile örtülemesin. $1_1$ 'i aynı şekilde iki aralığa bölelim. Bu defa sonlu sayıda $\varepsilon_a$ civarları ile örtülemeyen aralık $1_2$ olsun. Böyle devam edilerek iç içe $1_n$ aralıklarının sonsuz bir dizisi elde edilir. Bu dizi iç içe aralıkların hepsinde ortak olan bir$\alpha$ noktasına yakınsar. $\alpha$, E cümlesinin bir yığılma noktasıdır. Küme kapalı olduğundan bu nokta kümeye aittir. Böylece $\alpha$ ' ya bir $\varepsilon_\alpha$ civarı tekabül ettirilebilir. $\varepsilon_\alpha$ civarı, bir $n_0$ 'dan itibaren ( n > $n_0$ için) bütün $1_n$ aralıklarını örter. Bu da $1_n$ aralıklarının sonlu sayıda $\varepsilon_\alpha$ civarları ile örtülemeyeceği farzına aykırıdır.

***Teorem 1.7. [29] (Monoton Dizi Teoremi):*** Monoton artan bir dizi ancak sağdan sınırlı ise ve monoton azalan bir dizi ancak soldan sınırlı ise yakınsaktır.

# *2.BÖLÜM*

# *İSTATİSTİKSEL LİMİT NOKTALARI*

## *2.1.GİRİŞ*

Fast [17] 'de reel sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımladı. İstatistiksel yakınsaklık kavramı, Fonksiyonel Analizde ve Toplanabilme Teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. İstatistiksel yakınsaklığın Toplanabilme Teorisi ile ilk bağlantısı, Schoenberg tarafından 1959 'da verildi. Zygmund [30] 'da istatistiksel yakınsaklık kavramını " hemen hemen yakınsaklık " diye adlandırdı, ve kuvvetli toplanabilirlik ile istatistiksel yakınsaklık arasında bir ilişki elde etti.

Bu çalışmalara 1985 yılında J.A.Fridy ve H.Miller, 1991 yılında J.A.Fridy ve C.Orhan tarafından devam edildi. [9,10,12,13,28] 'da bu kavram bir matris toplanabilme metodu olmadığı gözönüne alınarak çalışıldı.

İstatistiksel yakınsak diziler sınıfının bazı Topolojik özelliklerinin incelenmesi ise ilk defa T.Salat tarafından, daha sonra Kent State Üniversitesinde 1985 yılında yapılan doktora çalışmasında, J.Connor tarafından devam edildi. Yine J.Connor, 1988 ve 1989 yıllarında yaptığı ilk çalışma ile konunun Fonksiyonel Analiz açısından ne kadar önemli olduğunu ortaya koydu.

İstatistiksel yakınsaklık; Sayılar Teorisi, Ölçü Teorisi ve İstatistik ile de çok yakından ilgilidir. Bu ilişkiler, 1981 yılında Freedman ve Sember, 1990 yılında da J.Connor tarafından yapılmıştır.

1993 yılında J.A.Fridy istatistiksel yakınsaklık kavramından hareketle, istatistiksel limit noktaları üzerine bir çalışma yaptı.

Bu yüksek lisans tezinde, yukarıdaki çalışmalar derlenerek, istatistiksel yakınsaklık kavramını dizisel limit kavramı olarak ele alıp bir sayı dizisinin yığılma noktaları veya limit noktaları kümesinin istatistiksel benzerlerini doğal bir yolla tanımlayacağız. Daha sonra istatistiksel yığılma noktaları ve istatistiksel limit noktalarının temel özelliklerini vereceğiz. Ayrıca bu bölümde adi limit noktaları ile istatistiksel limit noktaları ve istatistiksel yığılma noktaları arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları ortaya koyacağız. Bu bölümün son kısmında reel sayıların bazı iyi bilinen tamlık özelliklerinin istatistiksel benzerlerini vereceğiz.

Aynı zamanda bu bölümde bir dizinin İstatistiksel yakınsak olması tanımından hareketle İstatistiksel limit noktası tanımını vereceğiz. {k(j) : j∈ IN} kümesi sıfır yoğunluğa sahip olmayacak şekilde x 'in bir $\{x_{k(j)}\}$ alt dizisinin limiti $\lambda$ ise bu $\lambda$ 'ya x 'in istatistiksel limit noktası denir. Benzer olarak her $\varepsilon$>o için $\{k \in K:|x_k - \gamma|< \varepsilon\}$ kümesi sıfır yoğunluğa sahip olmayacak şekilde $\gamma$ sayısına x 'in İstatistiksel yığılma noktası denir. Denk olmayan bu kavramlar bir dizinin alışılmış limit noktası kavramı ile karşılaştırılabilir limit noktalarının İstatistiksel benzerleri elde edilebilir. Örneğin x sınırlı bir dizi ise, x istatistiksel yığılma noktasına sahiptir, fakat istatistiksel limit noktasına sahip olması gerekmez. Ayrıca eğer M=$\{k \in IN: x_k > x_{k+1}\}$ kümesi 1 yoğunluğuna sahip ve x, M 'de sınırlı ise bu takdirde x istatistiksel yakınsaktır.

K, IN pozitif tam sayılarının bir alt kümesi ise, bu takdirde $K_n = \{k \in K: k \le n\}$ kümesi $K_n$ ile gösterilir ve $K_n$ 'deki elemanların sayısı, $|K_n|$ ile gösterilecektir. K 'nın doğal yoğunluğu, $\delta(K) = \lim_{n\to\infty} n^{-1}|K_n|$ ile verilir. Eğer $\delta(K)$=0 ise K cümlesi sıfır yoğunlukludur denir. $x = (x_k)$ reel sayı dizisinin L 'ye istatistiksel yakınsak olması için,

her $\varepsilon > 0$ için;

$\delta\{k \in IN: |x_k - L| \ge \varepsilon\}$

kümesinin doğal yoğunluğunun sıfır olması gerekir. Bu durum,

st-lim x = L

ile yazılır. Fridy 1985 yılında;

st-lim x = L

olması için gerek ve yeter şart lim y = L ve $\delta\{(k \in IN: x_x \neq y_k)\} = 0$ olacak şekilde bir yakınsak dizisinin var olması gerçeğini ispatladı. Sıfır yoğunluk özelliği kısaca; " hemen hemen her k için $x_k = y_k$ " ile tanımlanır.

İstatistiksel yakınsaklıkta sıfır yoğunluğa sahip cümleler önemli bir rol oynar, bu nedenle bunlara ilişkin bazı önemli terminoloji ve notasyonları vereceğiz. Bunlara geçmeden aşağıdaki denklik teoremini verelim.

***TEOREM 2.1.1.*** *:* Aşağıdaki ifadeler denktir.

***(i)*** x istatistiksel yakınsak dizidir.

***(ii)*** x istatistiksel Cauchy dizisidir.

***(iii)*** h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir y dizisi vardır.

([12] Fridy 1985)

***İspat:***

$(i) \Rightarrow (ii)$;

(i) 'nin (ii) 'yi gerektirdiğini ispatlamak için, "yakınsak bir dizi Cauchy dizisidir." teoreminin ispatına benzer yol takip edilecektir.

$st-\lim x_k = L$ olduğunu kabul edip $\varepsilon > 0$ alalım. Bu durumda h.h.k için $|x_k - L| < \varepsilon/2$ ve eğer N, $|x_N - L| < \varepsilon/2$ olacak şekilde seçilirse ,

$$
\begin{aligned}
|x_k - x_N| &= |x_k - L + L + x_N| \\
&\leq |x_k - L| + |x_N - L| \quad \text{(h.h.k için)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

olur. Yani,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \left|x_k - x_N\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

olduğundan $x=(x_k)$ bir istatistiksel Cauchy dizisidir.

$(ii)\Rightarrow(iii)$;

Şimdi de (ii) 'nin doğru olduğunu kabul edelim.

$I=\left[x_N-1, x_N+1\right]$ aralığı , h.h.k için x terimini içerecek şekilde bir N sayısı seçelim.

Yine,

$$I=\left[x_M-\frac{1}{2}, x_M+\frac{1}{2}\right]$$

aralığı h.h.k için $x_k$ terimini içerecek şekilde bir M seçelim.

Şimdi iddia ediyoruz ki ,

$I_1 = I \cap I'$

aralığı h.h.k için $x_k$ 'ları içerir. Bunun için ,

$$\{k \le n : x_k \notin I \cap I'\} = \{k \le n : x_k \notin I\} \cup \{k \le n : x_k \notin I'\}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\left|\left\{k \le n : x_k \notin I \cap I'\right\}\right| &= \left|\left\{k \le n : x_k \notin I\right\} \cup \left\{k \le n : x_k \notin I'\right\}\right| \\ &\le \left|\left\{k \le n : x_k \notin I\right\}\right| + \left|\left\{k \le n : x_k \notin I'\right\}\right|\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\le n: x_k \notin I\cap I'\}|$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\le n: x_k \notin I\}| + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\le n: x_k \notin I'\}|$$

$$=0$$

olur. O halde,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\le n: x_k \notin (I\cap I')\}\right| = 0$$

dır. Dolayısıyla I, uzunluğu 1 'den küçük veya eşit ve h.h.k için $x_k$ 'ları içeren ve boyu,

$$|I_1| = \left|x_M + \frac{1}{2} - x_M + \frac{1}{2}\right| = 1$$

olan kapalı bir aralıktır. Şimdi de N(2) 'yi seçerek,

$$I'' = \left[x_{N(2)} - \tfrac{1}{4}, x_{N(2)} + \tfrac{1}{4}\right]$$

h h k için $x_k$ 'ları içerir. ve $I_2 = I_1 \cap I''$ h h k için $x_k$ terimini içeren ve boyu,

$$|I_2| = \left|x_{N(2)} + \frac{1}{4} - x_{N(2)} + \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}$$

olan kapalı bir aralıktır. Bu şekilde düşünerek her m için , $I_m \supseteq I_{m+1}$ olacak şekilde kapalı aralıkların bir $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini oluştururuz. Bu durumda $I_m$, $x_k$ terimini içeren ve boyu,

$$|I_m| = \left|x_{N(m)} + \frac{1}{2} - x_{N(m)} + \frac{1}{2^m}\right| = 2.\frac{1}{2^m} = 2^{1-m}$$

olan kapalı bir aralıktır.

Burada $I_m$ 'nin uzunluğu $2^{1-m}$ 'den büyük değildir, ve h.h.k için $x_k \in I_m$ 'dir. İç içe aralıklar teoreminden bir $\lambda$ sayısı vardır ve bu $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$ 'ye eşittir. h.h.k için $x_k \in I_m$ gerçeğini kullanarak artan pozitif tam sayıların öyle bir $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini seçebiliriz ki,

$$\frac{1}{n}|\{k \leq n: x_k \notin I_m\}| < \frac{1}{m} \quad , n > T_m \quad \text{ise} \qquad (1)$$

dir. Şimdi,

$$k > T_1 \quad \text{ve} \quad T_m < k < T_{m-1} \quad \text{ise} \quad x_k \notin I_m$$

olacak şekilde x 'in bütün $x_k$ terimlerini içeren bir z alt dizisini tanımlayalım.

Ayrıca y dizisini de,

$$y_k = \begin{cases} \lambda & , \text{ eğer } x_k \text{ z'nin bir terimi ise} \\ x_k & , \text{ diğer duru ml arda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım.

Bu durumda $\lim y_k = \lambda$ 'dır.

$$\varepsilon > \frac{1}{m} > 0 \quad \text{ve} \quad k > T_m \quad \text{ise}$$

bu durumda ya $y_k = \lambda$ olacak şekilde $x_k$ , z 'nin bir terimidir. Ya da $y_k = x_k \in I_m$ ve $|y_k - \lambda| \leq I_m$ 'nin uzunluğu $\leq 2^{1-m}$ 'dir. Şimdi biz iddia ediyoruz ki, h.h.k için $y_k = x_k$ dır. Bunu göstereceğiz. Eğer $T_m < n < T_{m+1}$ ise bu durumda,

$$\{k \leq n: y_k \neq x_k\} \subseteq \{k \leq n: x_k \notin I_m\}$$

yazılır.

$$\frac{1}{n}|\{k \le n: x_k \notin I_m\}| < \frac{1}{m} \quad , \text{ n} > \text{T}_\text{m} \text{ ise}$$

'den,

$$\frac{1}{n}|\{k \le n: y_k \neq x_k\}| \le \frac{1}{n}|\{k \le n: x_k \notin I_m\}| < \frac{1}{m}$$

olur. Buradan $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\{k \le n: y_k \neq x_k\}\right| = 0$$

elde edilir ve h.h.k için, $x_k = y_k$ olur. Böylece x istatistiksel cauchy dizisi ise, h.h.k $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir y dizisi var olduğu görülür.

$(iii) \Rightarrow (i)$;

Son olarak *( iii )* ' nün sağlandığını kabul edelim, h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir y dizisi mevcut olsun, ve lim $y_k = L$ diyelim. $\varepsilon > 0$ olsun . Her n için,

$$\{k \le n: |x_k - L| \ge \varepsilon\} \subseteq \{k \le n: x_k \neq y_k\} \cup \{k \le n: |y_k - L| > \varepsilon\}$$

olup ve $\lim y_k = L$ olduğundan son kümemiz sabit sayıda tam sayı içerir, buna ***l=l(ε)*** diyelim. Böylece h.h.k için $x_k = y_k$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\{k \le n: |x_k - L| \ge \varepsilon\right|$$
$$\le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\{k \le n: x_k \neq y_k\}\right| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

bulunur. Buradan da h.h.k için,

$$|x_k - L| < \varepsilon$$

elde edilir. Buradan ( $i$ ) sağlanır.

Böylece ispat tamamlanır. ( Fridy , 1985)

Bu teoremin sonucu olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

***SONUÇ 2.1.1.:*** Eğer x, $st - \lim x_k = L$ olacak şekilde bir dizi ise bu takdirde x, $\lim x_k = L$ olacak şekilde bir y alt dizisine sahiptir.

$x = (x_k)$ bir dizi ise, x 'in değer kümesini $\{x_k : k \in IN\}$ olarak göstereceğiz. $K = \{k(j) : j \in IN\}$ ve $x = (x_k)$ dizisinin bir alt dizisi $\{x_{k(j)}\}$ ise , bu takdirde $\{x_{k(j)}\}$ 'yi kısaca $\{x\}_K$ ile göstereceğiz. $\delta(K)$=0 olması durumunda; $\{x\}_K$ dizisine sıfır yoğunluklu bir alt dizi veya ince alt dizi denir. Diğer yandan K sıfır yoğunluğa sahip değil ise; $\{x\}_K$ dizisine, $x = (x_k)$ dizisinin bir ince olmayan alt dizisi denir.

Burada, $\delta(K)$ bir pozitif sayı yada K 'nın doğal yoğunluğa sahip olmadığına dikkat edilmelidir.

### *2.2. Tanımlar ve Temel Özellikler*

Eğer x dizisinin bir alt dizisi L 'ye yakınsak ise, L sayısı x dizisinin adi limit noktasıdır. Bundan dolayı böyle bir alt dizinin yoğunluğu gözönüne alınarak bir istatistiksel limit noktasını şöyle tanımlayacağız.

***Tanım 2.2.1.*** Bir sayı dizisi x 'in $\lambda$ 'ya yakınsayan ince olmayan bir alt dizisi varsa; $\lambda$ sayısına x sayı disinin bir istatistiksel limit noktası denir.

***Notasyon :*** Herhangi bir x sayı dizisi için ;

$\Lambda_X$ ; x 'in istatistiksel limit noktalarının kümesini,

$L_X$ ; x 'in adi limit noktalarının kümesini

gösterecektir.

***Örnek 2.2.1.***

$$x_k = \begin{cases} 1, & k \text{ bir kare } \quad (k = m^2, m = 1,2,\ldots) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \quad (k \neq m^2) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için,

$L_x = \{0,1\}$ ve $\Lambda_x = \{0\}$ olur.

Bu dizi aynı zamanda yakınsak olmayan fakat istatistiksel yakınsak olan diziye bir örnektir.

Herhangi bir x dizisi için $\Lambda_x \subseteq L_x$ olduğu açıktır. Reel sayılar kümesinde $\Lambda_x$ ve $L_x$ çok farklı olabilir, örneğin; $\Lambda_x = \varnothing$ ve $L_x = IR$ olacak şekilde bir x dizisini aşağıda verelim.

***Örnek 2.2.2. :*** Rasyonel sayılar kümesinde $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ bir dizi ve $x = (x_k)$ dizisini,

$$x_k = \begin{cases} r_n, & k=n^2 \text{ ise } n=1,2,3,\ldots \\ k, & \text{diğer durumlarda } (k \neq n^2) \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece karelerin kümesi sıfır yoğunluklu olduğundan $\left(\{K := n^2, n \in IN\} \text{ olmak üzere } \delta(K)=0\right)$ $\Lambda_x = \varnothing$ ve $\{r_k ; k \in IN\}$ cümlesi IR 'de yoğun olduğundan $L_x = IR$ olur.

Bir x dizisinin L limit noktası " L 'de merkezlenmiş her açık aralık x dizisinin sonsuz sayıdaki terimini içerir " ifadesiyle karakterize edilebilir. Bu kriterin istatistiksel benzeri bu aralığın ince olmayan bir alt diziyi içermesidir. Fakat aralığın merkezini istatistiksel limit noktası olarak adlandırmayız. Bu kriterin istatistiksel bir benzerini verelim.

***Tanım 2.2.2 :*** Her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in IN : |x_k - \gamma| < \varepsilon\}$ kümesi sıfır yoğunluğa sahip değilse, $\gamma$ sayısına; x sayı dizisinin istatistiksel yığılma noktası denir.

Verilen x dizisi için; x 'in istatistiksel yığılma noktalarının kümesini $\Gamma_x$ göstersin. Her x dizisi için $\Gamma_x \subseteq L_x$ olduğu açıktır. $\Gamma_x$ *ve* $\Lambda_x$ arasındaki kapsama bağıntısı üzerinde durulması gerekir. Bunu aşağıdaki önerme ile verelim.

***Önerme 2.2.1. :*** Herhangi bir x sayı dizisi için $\Lambda_X \subseteq \Gamma_X$ dır.

***İspat :*** $\lambda \in \Lambda_X$ olduğunu farzedelim.

$\lim_j x_{k(j)} = \lambda$ diyelim ve $\lim_n \sup \frac{1}{n} |\{k(j) \leq n\}| = d > 0$ olsun. Herbir $\varepsilon > 0$ için $\{j : |x_{k(j)} - \lambda| \geq \varepsilon\}$ bir sonlu kümedir.

Böylece,

$$|\{k \in N : |x_k - \lambda| < \varepsilon\}| \supseteq \{k(j) : J \in N\} \setminus \{\text{Sonlu küme}\}$$

olur. Buradan da sonsuz tane n için ,

$$\frac{1}{n} \left| \{k \leq n : |x_k - \lambda| < \varepsilon\} \geq \frac{1}{n} |\{k(j) \leq n\}| \right| - \frac{1}{n} O(1) \geq \frac{d}{2}$$

olur. O halde,

$$\delta\{k \in N : |x_k - \lambda| < \varepsilon\} \neq 0$$

dır ki, bu da $\lambda \in \Gamma_x$ olması demektir.

Adi limit noktalarıyla ilgili deneyimlerimizden $\Lambda_x$ *ve* $\Gamma_x$' in denk olması beklenir. Ancak aşağıdaki örnek bunun daima doğru olmadığını gösterir.

***Örnek 2.2.3. :*** $x = (x_k)$ dizisini,

$$x_k = \frac{1}{p}$$

ile tanımlayalım, burada $k = 2^{p-1}(2q+1)$ ' dir.

Yani p-1 , k 'nın asal çarpanlarına ayrılmasında 2 çarpanın sayısıdır. Her p için,

$$\delta\{k : x_k = \frac{1}{p}\} = 2^{-p} > 0$$

olduğunu görmek kolaydır. Buradan $\frac{1}{p} \in \Lambda_x$ elde edilir. Aynı zamanda

$$\delta\{k : 0 < x_k < 1/p\} = 2^{-p} \quad \text{ol up} \quad 0 \in \Gamma_x$$

'dir. Herhangi bir x dizisi için $\Lambda_X \subseteq \Gamma_X$ olduğundan her bir p için $\frac{1}{p} \in \Lambda_x$ olup,

$$\Gamma_x = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{p}\right\}_{p=1}^{\infty}$$

elde edilir. Şimdi, $0 \notin \Lambda_x$ olduğunu iddia ediyoruz. Bu iddiamızı göstermek için, eğer $\{x\}_K$ sıfir limitine sahip bir alt dizi ise, bu takdirde $\delta(K)=0$ olduğunu gösterebiliriz.. Bu her p için,

$$\begin{aligned}
|K_n| &= \left|\{k \in K_n : x_k \geq \frac{1}{p}\}\right| + \left|\{k \in K_n : x_k < \frac{1}{p}\}\right| \\
&\leq O(1) + \left|\{k \in IN : x_k < \frac{1}{p}\}\right| \\
&\leq O(1) + \frac{n}{2^p}
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\delta(K) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|K_n| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{O(1)}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\frac{n}{2^p} \\
&= 2^{-p}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece $\delta(K) \leq 2^{-p}$ ve p keyfi olduğundan $\delta$(K)=0 olmasını gerektirir.

Eğer x istatistiksel limiti $\lambda$ olan bir dizi ise bu takdirde $\Lambda_x$ ve $\Gamma_x$ 'in tek nokta cümlesi $\{\lambda\}$ 'ya eşit ( yani, $\Lambda_x = \Gamma_x = \{\lambda\}$)olduğunu ispatlamak kolaydır. Bunun tersi doğru değildir. Çünkü $x_k = [1+(-1)^k]K$ şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. $K = \{k \in IN : x_k = 0\}$ cümlesi için,

$$\delta(K) = \frac{1}{2} \text{ ve } \{x\}_K \to 0$$

olduğundan $0 \in \Lambda_x$ 'dir. Ayrıca her $\varepsilon > 0$ için, $K = \{k \in IN : |x_k| < \varepsilon\}$ olmak üzere

$\delta(K) = \frac{1}{2}$ olduğundan $0 \in \Gamma_x$ 'dir. O halde $\Lambda_x = \Gamma_x = \{0\}$ 'dir. Fakat $st - \lim x \neq 0$ 'dir.

Aşağıdaki örnek x dizisi için $\Lambda_x = \varnothing$ iken $\Gamma_x$ ' in bir aralık olduğunu gösterir.

***Örnek2.2.4.:*** x, $\{0,0,1,0,\frac{1}{2},1,0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,.......\}$ dizisi olsun. Bu dizi [ 0,1] kapalı aralığında düzgün dağılımlıdır.

Biz $L_x = [0,1]$ kapalı aralığı ile birlikte x ' in d uzunluğu ve herhangi bir alt aralıktaki $x_k$ 'nın yoğunluğunun da d ' nin kendisi olduğunu elde ederiz.

Bu yüzden [ 0,1 ] kapalı aralığındaki herhangi bir $\gamma$ için,

$$\delta\{k \in IN : x_k \in (\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon\} \geq \varepsilon > 0$$

'dır. Bu nedenle $\Gamma_x = [0,1]$ 'dir. Öte yandan eğer $\lambda \in [0,1]$ aralığı ve $\{x\}_K$ , $\lambda$ 'ya yakınsayan bir alt dizi ise $\delta(K)=0$ olduğunu iddia ederiz. Bu iddiayı ispatlamak için $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun, ve her n için,

$$\begin{aligned} |K_n| &\leq \left|\{k \in K_n : |x_k - \lambda| < \varepsilon\}\right| + \left|\{k \in K_n : |x_k - \lambda| \geq \varepsilon\}\right| \\ &\leq 2\varepsilon n + O(1) \end{aligned}$$

yazılır.

Böylece $\delta\{k_{(j)}\} \leq 2\varepsilon$ ve $\varepsilon$ keyfi olduğundan $\delta\{k_{(j)}\}=0$ sonucunu çıkarırız.

Buradan da $\Lambda_x = \varnothing$ 'dir.

Örnek 2.2.3 'ten $\Lambda_x$ 'in bir kapalı nokta kümesi olması gerekmediğini görürüz. Bir sonraki önerme $\Gamma_x$'in , $L_x$ gibi daima kapalı bir küme olduğunu ifade eder.

***ÖNERME 2.2.2.:*** Herhangi bir x sayı dizisi için x 'in istatistiksel yığılma noktalarının $\Gamma_x$ kümesi, kapalı bir nokta kümesidir.

***İspat:*** p, $\Gamma_x$ 'in bir yığılma noktası olsun. Eğer $\varepsilon > 0$ ise $\Gamma_x$ *cümlesinin* $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ arasında $p \neq \gamma$ olacak şekilde en az bir $\gamma$ noktası vardır. O halde $(\gamma-\varepsilon', \gamma+\varepsilon') \subseteq (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ olacak şekilde $\varepsilon' > 0$ sayısı seçelim. $\gamma \in \Gamma_x$ olduğundan, $\delta\{k: x_k \in (\gamma-\varepsilon', \gamma+\varepsilon')\} \neq 0$ dır.

$$\{k: x_k \in (\gamma-\varepsilon, \gamma+\varepsilon)\} \subseteq \{k: x_k \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)\}$$

olduğundan,

$$\delta\{k: x_k \in (\gamma-\varepsilon, \gamma+\varepsilon)\} \leq \delta\{k: x_k \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)\}$$

olur. Bu ise,

$$\delta\{k: x_k \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)\} \neq 0$$

olmasını gerektirir. Buradan $p \in \Gamma_x$ 'dir.

Verilen bir x dizisinin istatistiksel yakınsaklığı veya istatistiksel yakınsak olmayışı, x dizisinin ince bir alt dizisinin değerlerini değiştirmekle değişmez. Şimdi aynı durumun istatistiksel limit noktaları ve istatistiksel yığılma noktaları için doğru olduğunu göstereceğiz.

***TEOREM 2.2.1.:*** Hemen hemen k için $x_k = y_k$ olacak şekilde x ve y iki dizi ise , bu taktirde $\Lambda_x = \Lambda_y$ ve $\Gamma_x = \Gamma_y$ 'dir.

***İspat:*** $\delta\{k: x_k \neq y_k\} = o$ ve $\lambda \in \Lambda_x$ olduğunu kabul edelim. $\{x\}_{K'}$, $\lambda$ 'ya yakınsayan x 'in bir ince olmayan alt dizisi olsun.

$\delta\{k: k \in K \text{ ve } x_k \neq y_k\} = 0$ olduğu için buradan hareketle $\{k: k \in K \text{ ve } y_k = x_k\}$ sıfır yoğunluğa sahip olmadığı ortaya çıkar. Bu nedenle ikinci küme ince olmayan bir $\{y\}_K$ nın $\lambda$ 'ya yakınsayan $\{y\}_{K'}$ ince olmayan alt dizisi olur. Böylece $\lambda \in \Lambda_y$ ve $\Lambda_x \subseteq \Lambda_y$ 'dır. Simetriden $\Lambda_y \subseteq \Lambda_x$ olduğu görülür. Buradan $\Lambda_x = \Lambda_y$ 'dir.

$\Gamma_x = \Gamma_y$ olduğu da benzer şekilde ispatlanır.

Aşağıdaki teoremde istatistiksel yığılma noktaları ve adi limit noktaları arasında kuvvetli bir ilişki elde edeceğiz.

***Teorem 2.2.2.:*** $x=(x_k)$ bir sayı dizisi ise, hemen hemen k için $y_k = x_k$ ve $L_y = \Gamma_x$ olacak şekilde bir y dizisi mevcuttur. Ayrıca y 'nin tanım aralığı x 'in tanım aralığının bir alt kümesidir.

***İspat:*** $\Gamma_x$, $L_x$ 'in bir özalt kümesi ise, bu takdirde $L_x \setminus \Gamma_x$ cümlesindeki herbir $\xi$ *için* $\delta\{k : x_k \in I_\xi\} = 0$ olacak şekilde, ξ merkezli bir $I_\xi$ açık aralığı seçelim. Bu şekildeki $I_\xi$ 'lerin topluluğu $L_x \setminus \Gamma_x$ cümlesinin açık bir örtüsüdür. Lindelöf Örtme Özelliğinden sayılabilir bir alt örtü mevcuttur. Buna $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ diyelim. Böylece $I_j$ , x dizisinin bir ince alt dizisini kapsar.

Connor [10] 'daki sonuç 9 'a göre; kümelerin sayılabilir topluluğunun hepsi sıfır yoğunluğuna sahip olup,

$\delta(\Omega)=0$ ve her J için, $\{k : x_k \in I_j\} \setminus \Omega$

sonlu küme olacak şekilde Ω tek nokta cümlesi olur.

$IN \setminus \Omega = \{ j(k) : k \in IN \}$ kümesi olsun. y dizisini ,

$$y_k = \begin{cases} x_{j(k)} & ,k \in \Omega \text{ ise} \\ x_k & ,k \in IN \setminus \Omega \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlayalım .

$\delta\{k : y_k \neq x_k\} = 0$ olduğu açık olup Teorem 2.2.1; $\Gamma_y = \Gamma_x$ olmasını gerektirir. $\{y\}_\Omega$ alt dizisi, y 'nin istatistiksel limit noktası olamayan hiçbir limite sahip olmadığı için $L_y = \Gamma_y$ olduğu ve buradan da $L_y = \Gamma_x$ olduğu ortaya çıkar.

***Uyarı:*** Eğer $\Gamma_x$ , $\Lambda_x$ ile yer değiştirirse Teorem 2.2.2 'deki sonuç geçerli değildir. Çünkü $\Lambda_x$ 'in kapalı olması gerekmediği halde ( örnek 2.2.3 'te olduğu gibi) $L_y$ daima kapalı kümedir.

## 2.3. TAMLIK TEOREMLERİNİN İSTATİSTİKSEL BENZERLERİ

Gerçel sayı sisteminin tamlığına denk olan bazı iyi bilinen teoremler vardır. Böyle bir teorem dizilerle alakalı olduğu zaman adi limitleri, istatistiksel limitlerle yer değiştirerek bu teoremin istatistiksel bir benzerini ispatlayabiliriz. Mesela Teorem 2.1.1 ([12] Fridy, 1985) 'de, bir sayı dizisinin istatistiksel olarak yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu dizinin istatistiksel Cauchy dizisi olduğu gösterilir. $IR$ 'deki enküçük üstsınır teoreminin dizisel versiyonu monoton dizi teoremidir; " Eğer reel $x=(x_k)$ sayı dizisi azalan değilse ve yukarıdan sınırlı ise, x yakınsaktır. " Teorem 2.1.1 ([12] Fridy, 1985) 'in kolay bir sonucu olan aşağıdaki önerme bu teoremin istatistiksel bir benzerdir.

***ÖNERME 2.3.1.:*** x, bir sayı dizisi ve $M:=\{k\in IN: x_k\leq x_{k+1}\}$ olduğunu farzedelim. Eğer δ ( M) =1 ve x, M 'de sınırlı ise $x=(x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsaktır.

$IR$ 'deki diğer bir tamlık teoremi sınırlı bir x dizisi için $L_x\neq\emptyset$ olduğunu iddia eden Bolzano-Weirstrass Teoremidir. Örnek 2.2.4, sınırlı bir dizi için $\Lambda_x=\emptyset$ olabileceğini gösterir. Bolzano-Weirstrass Teoreminin istatistiksel yığılma noktalarını kullanan bir benzeri vardır. Bu teoremden hareketle aşağıdaki teoremi verebiliriz.

***TEOREM 2.3.1.:*** Eğer x dizisi sınırlı, ince olmayan bir alt diziye sahip bir sayı dizisi ise, x 'in bir istatistiksel yığılma noktası vardır.

***İspat:*** Böyle bir x verilsin. Teorem 2.2.2 'den $L_y=\Gamma_x$ ve $\delta\{k\in IN: y_k\neq x_k\}=0$ olacak şekilde bir $y=(y_k)$ dizisi vardır. O halde h.h.k için $\delta\{k\in IN: y_k=x_k\}\neq 0$ olup $K\subseteq IN$ olmak üzere $\delta\{k\in IN: y_k=x_k\}\neq 0$ dır. $\{x\}_K$ sınırlı ve ince olmayan bir alt dizidir.

Bu takdirde y 'nin sınırlı ince olmayan bir alt diziye sahip olması gerekir. Böylece Bolzano -Weirstrass Teoremi gereği $L_y \neq \emptyset$ ve buradan $\Gamma_x \neq \emptyset$ olduğu görülür.

***Sonuç 2.3.1.:*** Eğer x, sınırlı bir sayı dizisi ise, x istatistiksel bir yığılma noktasına sahiptir.

Aşağıdaki sonuç, Heine -Borel Örtme Teoreminin istatistiksel bir benzeridir. Eğer x sınırlı bir sayı dizisi ise, $\overline{X};\{x_k:\in IN\}\cup L_x$ kompakt kümesini göstersin Heine-Borel Teoreminin bir dizisel versiyonundan; $\{J_n\}$, $\overline{X}$ 'yi örten açık kümelerin kolleksiyonu ise $\overline{X}$ 'yi örten $\{J_n\}$ 'nin sonlu bir alt topluluğu vardır. Bu sonucun istatistiksel bir benzerini oluşturmak için $L_x$ 'i $\Gamma_x$ ile yer değiştirelim, ve

$$X:=\{x_k:k\in IN\}\cup\Gamma_x$$

kümesini tanımlayalım.

Buna x 'in ***istatistiksel kapanışı*** denir.

X 'in kapalı bir küme olması gerekmez. Çünkü, X 'in kapalı olması için gerek ve yeter şart X 'in $\{x_k:k\in IN\}\cup L_x$ olmasıdır, yani X 'in adi kapanışa eşit olmasıdır.

***TEOREM 2.3.2.:*** Eğer x sınırlı bir sayı dizisi ise, bu taktirde;

$$X;\{x_k:k\in IN\setminus K\}\cup\Gamma_x$$

kompakt küme olacak şekilde $\{x\}_K$ ince alt dizisine sahiptir.

***İspat:*** Teorem 2.2.2 'yi kullanarak $L_y=\Gamma_x$, $\{y_k:k\in IN\}\subseteq\{x_k:k\in IN\}$ ve $\delta(K)=0$ olacak şekilde bir y dizisi seçebiliriz. Burada $K=\{k\in IN: x_k\neq y_k\}$ 'dir. Buradan da,

$$\{x_k:k\in IN\setminus K\}\cup\Gamma_x=\{y_k:k\in IN\}\cup L_y$$

yazılır, ve eşitliğin sağındaki küme kompakt bir kümedir. x 'in h.h.k için sınırlı olması durumunda, Teorem 2.3.2 'nin ispatının sınırlı olamayan x 'ler için bile geçerli olduğunu kolaylıkla görebiliriz. Yani $\{x_k:k\in IN\setminus M\}$ sınırlı bir küme olacak şekilde ince bir $\{x\}_M$ dizisi vardır.

Son olarak, Teorem 2.3.2 'deki kompakt küme için $\Lambda_x$'i, $\Gamma_x$ yerine kullanamayız. Örnek 2.2.3 'deki $\Lambda_x=\{\frac{1}{p}:p\in IN\}$ ve $IN$ 'deki her p için

$$\delta\{k\in IN:x_k=\frac{1}{p}\}=2^{-p}$$

dir. Eğer $\{x\}_K$ herhangi ince bir alt dizi ise, bu taktirda her bir p için;

$$\delta\left\{k\in IN\backslash K:x_k=\frac{1}{p}\right\}=2^{-p}$$

'dir. Böylece $\{x_k:k\in IN\backslash \mathrm{K}\}$ hala bir limit noktası olarak sıfır değerine sahiptir. Sonuç olarak;

$$\{x_k:k\in IN\backslash \mathrm{K}\}\cup\Lambda_x$$

kompakt değildir.

# *3.BÖLÜM*

## *İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞIN MATRİS KAREKTERİZASYONU*

İstatistiksel yakınsaklığın herhangi bir matris metodu tarafından kapsanmadığı bilinir. Fakat sınırlı diziler için Cesaro matris metodu $C_1$ tarafından kapsanır. Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık toplanabilme matrislerinin bir $\mathcal{T}$ kolleksiyonunun arakesiti ile karşılaştırılarak, bu sonuçlar genelleştirilecektir. Bir sınırlı dizinin istatistiksel yakınsak olması için, gerek ve yeter şartın $\mathcal{T}$ ' daki her matris ile toplanabilir olması olduğu gösterilecektir. Diğer yandan matrislerin hiçbir sayılabilir kolleksiyonu sınırsız diziler için istatistiksel yakınsaklığı kapsamaz. Ayrıca hangi klasik toplanabilir matrislerin $\mathcal{T}$ ' ya ait olduğunu belirlemek için $\mathcal{T}$ sınıfı incelenecektir.

Bu kısımda klasik matris metodlarının özel bir sınıfının arakesiti ile matris toplanabilme ve istatistiksel yakınsaklık arasında kuvvetli bir ilişki kurulacaktır.

$x=(x_k)$ bir sayı dizisi ve A sonsuz bir matris ise bu takdirde $Ax$, n. terimi

$$(Ax)_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$$

ile verilen bir dizidir. Böylece $x=(x_k)$ dizisi L ' ye " A- toplanabilirdir " (yada A-limitlenebilir) demek, $\lim_{n\to\infty}(Ax)_n=L$ demektir.

Bu çoğu zaman $A$-$lim\ x$ $L$ ile gösterilir.

Schoenberg ([28], 1959), birinci mertebeden Cesaro ortalamasının her sınırlı istatistiksel yakınsak diziyi topladığını göstermiştir. Bu (C,1) metodunun istatistiksel yakınsaklık metodunu içerip içermediğini sorusunu akla getirmektedir. Cevap olumsuzdur, bu bir teoremle gösterilecektir. Bundan dolayı önce aşağıdaki lemmayı vereceğiz.

***Lemma 3.1.1 :*** Eğer t , sonsuz tane k için $t_k \neq 0$ olacak şekilde bir sayı dizisi ise, bu taktirde h.h.k için,

$$x_k = 0 \text{ ve } \sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k = \infty$$

olacak şekilde bir x dizisi vardır. ([12] Fridy, 1985)

***İspat:*** Her bir k için,
$m(k) > k^2$ *ve* $t_{m(k)} \neq 0$ olacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir $\{m(k)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisini seçelim. x dizisini $x_{m(k)} = \dfrac{1}{t_{m(k)}}$ ve diğer durumlarda $x_k = 0$ ile tanımlayalım Bu durumda,

$$\left|\{k \leq n : x_k \neq 0\}\right| \leq \sqrt{n}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : x_k \neq 0\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt{n} = 0$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : x_k \neq 0\}\right| = 0$$

elde edilir. O halde h.h.k için $x_k = 0$ 'dır.

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k = \sum_{k=1} t_{m(k)} x_{m(k)} = \infty \qquad (1+1+1+\ldots = \infty)$$

elde edilir.

*TEOREM 3.1.1.:* Hiç bir matris toplanabilme metodu, istatistiksel yakınsaklık metodunu içermez. ( Yani $A \in (st,c,p)$ olacak şekilde hiçbir matris yoktur.) ([12] Fridy, 1985)

***İspat:*** Bir önceki lemma bir matrisin istatistiksel yakınsaklığı içermesi için onun satır-sonlu olmak zorunda olduğunu gösterir. A keyfi bir satır-sonlu matris olsun ve A matrisinin sıfir olmayan bir elemanını seçelim. A matrisinin sıfırdan farklı bir $a_{n(1),k'(1)} \neq 0$ bileşenini, $k(1) \geq k'(1)$ ise; $a_{n(1),k(1)} \neq 0$ , ve eğer $k > k(1)$ ise; $a_{n(1),k} = 0$ olacak şekilde seçelim.

Şimdi her bir m için ,

$k(m) \geq m^2$ ise $a_{n(m),k(m)} \neq 0$ ve eğer $k > k(m)$ ise $a_{n(m),k} = 0$ olacak şekilde satır ve sütun indislerinin artan bir dizisini seçelim ve x dizisini de aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$X_{k(1)} = \frac{1}{a_{n(1),k(1)}}$$

$$\vdots$$

$$X_{k(m)} = \frac{1}{a_{n(m),k(m)}} \left[ m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} \right]$$

$$\vdots$$

Diğer durumlarda $x_k = 0$ .

Bu taktirde,

$$
\begin{aligned}
(Ax)_{n(m)} &= \sum_{i=1}^{m} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} + a_{n(m),k(m)} x_{k(m)} \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} + a_{n(m),k(m)} \cdot \frac{1}{a_{n(m),k(m)}} \left[ m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} \right] \\
&= m
\end{aligned}
$$

olduğundan Ax dönüşüm dizisi sınırlı değildir, dolayısıyla yakınsak değildir. Yani, x dizisi A- toplanabilir değildir.

Öte yandan

$k(m) \geq m^2$ olduğundan $\left|\{k \leq n : X_k \neq 0\}\right| \leq \sqrt{n}$

olup

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : x_k \neq 0\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt{n} = 0
$$

olduğundan h.h.k için $x_k = 0$ olur.

Böylece *st lim* $x_k = 0$ ve buradan A 'nın istatistiksel yakınsaklığı içermediği sonucu çıkar.

İstatistiksel yakınsaklık tanımı gereğince istatistiksel yakınsaklık $\{(-1)^k\}$ gibi herhagi bir periyodik diziyi toplayamaz. Yani $\{(-1)^k\}$ dizisi istatistiksel yakınsak değildir. Böylece istatistiksel yakınsaklık, klasik toplanabilme metotlarının hiçbirini içermez.

Bu ve önceki teoremden istatistiksel yakınsaklığın herhangi bir aşikar olmayan matris metodu ile mukayese edilemeyeceğini düşünebiliriz. Fakat durumun böyle olmadığını görmek için aşağıdaki örneği gözönüne alalım.

***Örnek 3.1.1. :***

$$a_{nk}=\begin{cases}1, & \text{eğer } k=n \text{ ve } n \text{ kare değilse}\\ \frac{1}{2}, & \text{eğer } n=m^2 \text{ ve } k=n \text{ veya } k=(m-1)^2 \text{ ise}\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

şeklinde bir $A=(a_{nk})$ matrisi tanıyalım.

Herhangi bir x dizisi için ,

$$(Ax)_n=\begin{cases}\frac{x_1}{2} & , n=1\\ \frac{\left[x_{(m-1)^2}+x_{m^2}\right]}{2} & , n=m^2\,(m=1,2,3...)\\ x_n & , n\neq m^2\end{cases}$$

elde edilir. Böylece $A=(a_{nk})$ matrisi aşikar olarak regüler ve üçgensel bir matristir. A 'nın istatistiksel yakınsaklık tarafindan içerildiğini görmek için,

$$\lim_{n\to\infty}(Ax)_n=L$$

olduğunu kabul edelim. Bu taktirde,

$$\lim_{n\neq m^2} x_n=L$$

ve aşikar olarak

$$\left|\{k\leq n; (Ax)_n\neq x_n\}\right|\leq\sqrt{n}$$

olup

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\leq n: (Ax)_n\neq x_n\}\right|\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt{n}=0$$

yazılır.

Böylece yukarıdaki teoremden $(Ax)_n = x_n$ olup *st-lim* $x_k = L$ elde edilir. $A = (a_{nk})$ matrisinin adi yakınsaklığa denk olmadığını görmek için,

$$x_k = \begin{cases} (-1)^m, & k = m^2 \quad (m = 1,2,\ldots) \text{ ise} \\ 0 & , k \text{ kare değilse } (k \neq m^2) \end{cases}$$

ile verilen x dizisini gözönüne alalım. Bu taktirde n >1 için $(Ax)_n = 0 \quad (n \to \infty)$ olur. Fakat x dizisi yakınsak değildir.

### *3.2. ESAS SONUÇLAR*

İstatistiksel yakınsaklık ve matris toplanabilme arasında bir kapsam elde etmek için aşağıdaki matris sınıfını tanıtacağız. $\mathcal{T}$ alt üçgensel negatif olmayan ve aşağıdaki şartları sağlayan $A=(a_{nk})$ toplanabilme matrislerinin kolleksiyonunu göstersin;

(*i*) $\sum_{k=1}^{n} a_{n_k} = 1$, her $n$ için

(*ii*) $\delta(K)=0$ olacak şekilde $K \subseteq N$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in k} a_{n_k} = 0$$

dır.

$\mathcal{T}$ ' daki herbir A, negatif olmayan elemanlara sahip olduğundan *(i)* , *(ii)* özellikleri A 'nın Silverman-Toeplitz regülerlik şartlarını sağlamasını gerektirir.

Esas teoremi ispatlamak için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

***LEMMA 3.2.1.*** *:* Reel terimli sınırlı bir $x=(x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak değilse $\{n \in IN: x_n < \lambda\}$ ve $\{n \in IN: x_n > \mu\}$ kümeleri sıfır doğal yoğunluğa sahip olmayacak şekilde $\lambda < \mu$ gerçel sayıları mevcuttur. ([13] Fridy, Miller 1991)

***İspat:*** Tüm n 'ler için $-\beta < x_n < \beta$ olacak şekilde β seçilsin .

Her m doğal sayısı için $(-\beta, \beta]$ 'yi $2^m$ tane eşit uzunlukta birbirine bitişik yarı-açık aralıklara bölelim. $S_k^m = \{n \in IN: x_n \in I_k^m\}$ ile tanımlansın, burada $I_k^m$, $2^m$ aralığın k. 'ıncı aralığıdır. Bazı m 'ler için |j-k| > 1 ve her ikisininde doğal yoğunluğu sıfır olmayan, $S_j^m$ ve $S_k^m$ mevcutsa, bu takdirde yapılır. Bu durumla hiçbir zaman karşılaşmadığımızı kabul edelim. Her m için, en fazla iki tane birleşik $I_k^m$ 'ler hariç bütün k 'lar için $\delta(S_k^m)$ =0 'dır. Bu iki aralığın birleşimi, $2\beta/2^{m-1}$ uzunluğunda bir aralıktır. Bu iki aralığın kapanışı $I_m$ aralığı olsun. Her m için,

$$I_m \supseteq I_{m+1}$$
$$I_m \text{ uzunluğu } \leq \beta/2^{m-2}$$
$$ve$$
$$\{n \in IN : x_n \notin I_m\}$$

'nin sıfır doğal yoğunluğuna sahip olduğu anlaşılır.

Böylece L,

$\cap I_m$ ' deki tek sayı ise, bu halde $st\text{-}lim\ x_k = L$ olur ki bu bir çelişkidir.

***TEOREM 3.2.1:*** Bir sınırlı $x=(x_k)$ dizisinin L 'ye istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{T}$ ' daki her A için $x=(x_k)$ dizisinin L sayısına A-toplanabilir olmasıdır. ([13] Fridy ve Miller 1991)

***İspat:*** Gereklilik:

İlk önce $st\text{-}lim\ x_k = L$ , $\varepsilon > 0$ ve A ' nın $\mathcal{T}$ ' da olduğunu farz edelim.
K={k∈$IN$:$|x_k - L| \geq \varepsilon$ } ile tanımlansın.
Böylece δ (K)=0 ve k∉K olduğunda, $|x_k - L| < \varepsilon$ olur.
Bu verilerden,

$$
\begin{aligned}
\left|(Ax)_n - L\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} a_{nk}(x_k - L)\right| \\
&= \left|\sum_{k\notin K} a_{nk}(x_k - L) + \sum_{k\in K} a_{nk}(x_k - L)\right| \\
&\le \left|\sum_{k\notin K} a_{nk}(x_k - L)\right| + \left|\sum_{k\in K} a_{nk}(x_k - L)\right| \\
&\le \sum_{k\notin K} a_{nk}\left|x_k - L\right| + \sum_{k\in K} a_{nk}\left|x_k - L\right| \\
&\le \varepsilon \sum_{k\notin K} a_{nk} + (\sup_k \left|x_k - L\right|) \sum_{k\in K} a_{nk}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Her iki tarafın $n \to \infty$ limiti alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|(Ax)_n - L\right| &\le \lim_{n\to\infty} \left( \varepsilon \sum_{k\notin K} a_{nk} + \sup_k \left|x_k - L\right| \sum_{k\in K} a_{nk} \right) \\
&= \left( \varepsilon \lim_{n\to\infty} \sum_{k\notin K} a_{nk} + \sup_k \left|x_k - L\right| \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in K} a_{nk} \right) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

bulunur. Diğer yandan A regüler olduğundan,

$$
\begin{aligned}
1 &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{nk} = \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{k\notin K} a_{nk} + \sum_{k\in K} a_{nk} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\notin K} a_{nk} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in K} a_{nk}
\end{aligned}
$$

de ederiz. Böylece (ii),

$$
\lim_{n\to\infty} \sum_{k\notin K} a_{nk} = 1
$$

olmasını gerektirir. O halde (2) 'den, $\varepsilon$ keyfi olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty}|(Ax)_n - L| = 0$ olur. Yani, $\lim\limits_{n\to\infty}(Ax)_n = L$ bulunur.

Yeterlilik:

Tersine olarak $st\ lim\ x_k = L$ olmadığı farz edilsin. $x = (x_k)$ dizisi $M \neq L$ sayısına istatistiksel yakınsak olsaydı, gereklilikten $\mathcal{T}$ 'daki herbir A için $\lim\limits_{n\to\infty}(Ax)_n = M \neq L$ olacaktı. O halde $x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel yakınsak olmadığını kabul edelim. Bu durumda yukarıdaki lemmadan $U = \{k \in IN : x_k < \lambda\}$ ve $V = \{k \in IN : x_k > \mu\}$ cümleleri sıfır yoğunluğa sahip olmayacak şekilde $\lambda < \mu$ reel sayıları vardır.

Bu nedenle her $k \in IN$ için,

$$\frac{1}{u_k}\left|n \in U : n \leq u_k\}\right| > \varepsilon$$

*ve*

$$\frac{1}{v_k}\left|\{n \in V : n \leq v_k\}\right| > \varepsilon$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ ve $U^{l} = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset U$ *ve* $V^{l} = \{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset V$ alt kümeleri vardır.

$U^{l}$ ve $V^{l}$'nın ayrık olduğuna dikkat edelim. Çünkü $U \cap V = \emptyset$ 'dır. Şimdi $A = (a_{nk})$ matrisini,

$$a_{nk} = \begin{cases} 0 \quad , & k > n \text{ ise} \\ \dfrac{1}{n} \quad , & n \notin U^{l} \cup V^{l} \text{ ve } k \leq n \text{ ise} \\ \dfrac{1}{|u_n|} \quad , & n \in U^{l} \text{ ve } k \in U_n \text{ ise} \\ \dfrac{1}{|v_n|} \quad , & n \in V^{l} \text{ ve } k \in V_n \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda A 'nın τ 'da olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca,

$n \in U^l$ ise $(Ax)_n < \lambda$
fakat,
$n \in V^l$ için $(Ax)_n > \mu$

olur.

Böylece A, τ ' dadır. Fakat $(Ax)_n$ yakınsak değildir. Bu da ispatı tamamlar.

τ kolleksiyonunun açık bir şekilde düzenlenebileceği ve Teorem 3.2.1.'in halen geçerli olduğunu görmek zor değildir, fakat (ii) 'nci özellik, matrisler ve doğal yoğunluk kavramı arasındaki ilişkiyi açıklayıcı ve doğal göründüğünden yukarıdaki şekil kullanılır.

Maalesef önceki teorem sınırsız dizilerin istatistiksel yakınsaklığı hakkında bir şey söylemez, ve böyle bir bağıntının ispatlanmasının çok az bir şansı vardır. Teorem 3.1.1 'de hiç bir matrisin sınırsız diziler için istatistiksel yakınsaklığı kapsamadığı gösterilir, ve biz, sonsuz matrislerin bir dizisi ile bile böyle bir kapsamın olmadığını göstereceğiz.

***TEOREM 3.2.2:*** Eğer $\mathcal{A} = \{A^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ matrislerin sayılabilir bir kolleksiyonu ve, " $\mathcal{A} - \lim x = L$ ", x 'in $\mathcal{A}$ 'daki A 'lar için A-toplanabilir olduğunu göstermek üzere $\mathcal{A}$*-lim*, *st-lim* 'i içeremez.

***İspat:***.Teorem 3.1.1. 'yi aşağıdaki gibi düzenleyebiliriz. İspatta sıfır olamayan $a_{n(m)}, k(m)$ elemanlar A 'da seçilir, öyleki, n(m) ve k(m); ∞ 'a artar ve k(m)≥ $m^2$ 'dir. Şimdi $A^{(1)}$ 'i kullanarak [n(1),k(1)] ve [n(2),k(2)] seçelim, sonra $A^{(2)}$ 'yi kullanarak [n(3), k(3)] seçelim. Daha sonra $A^{(1)}$ 'i kullanarak [n(4),k(4)], $A^{(2)}$ 'yi kullanarak [n(5),k(5)] ve $A^{(3)}$ 'ü kullanarak [n(6),k(6) ] seçelim. Örneğin; [n(6),k(6)] n(6)>n(5), k(6)>k(5) ve k(6)>$6^2$ ayrıca, k>k(6) için $a^{(3)}_{n(6),k(6)} \neq 0$ ve $a^{(1)}{}_{n(6),k} = a^{(2)}_{n(6),k} = a^{(3)}_{n(6),k} = 0$ olacak şekilde seçelim, ve uygun olarak,

$$x_{k(6)} = \frac{1}{a^{(3)}_{n(6),k(6)}} \quad [6 - \sum_{i=1}^{5} a^{(3)}_{n(6),k(i)} x_{k(i)}]$$

tanımlayalım.

Eğer $i \leq j$ ise $A^{(j)}$ bir n(m) satır içerir, öyleki, n(j [j+1] /2)≤n(m) < n( [j+1] )[j+2]/2) ve $(A^{(i)}x)_{n(m)} = m$ 'dir. Böylece her i için, $A^{(i)}x$ sınırsızdır, fakat k≠k(m) için $x_k$ =0 dır. Dolayısıyla *st-lim* $x=0$ olur.

Önceki ifadelerde herbir $A^{(j)}$ satır-sonlu olduğu kabul edilir. Satır-sonsuz durumlarda Teorem 3.1.1 'den önceki Lemma 3.1.1 'i ispatlayan method ile bu tekniği birleştirerek elde edilir.

Son olarak, bu $\mathcal{A}$ kolleksiyonu üzerinde Teorem 3.1.1 'de bazı kısıtlamalar koymak gereklidir (Sayılabilirlik gibi). Diğer durumda her x istatistiksel yakınsak dizisi için bir $A^{(x)}$ matrisini içine alan $\mathcal{A}$ 'yı oluşturabiliriz. Böyle bir $A^{(x)}$ bulunabilir. Böylece $A^{(x)}x$ verilmiş herhangi bir sınırlı dizidir. Bununla birlikte $\mathcal{K} := \{A^{(K)} : K \subseteq IN ve\, \delta(K) = 0\}$ matris kolleksiyonunun bir birleşimini kullanarak istatistiksel yakınsaklığı karakterize edebiliriz. Böyle herbir $\boldsymbol{K}$ için, $A^{(K)}$

$$(A^{(K)}x)_n = \begin{cases} x_n & , n \notin K \text{ ise} \\ x_{n^*} & , n \in K \text{ ise} \end{cases}$$

dönüşümü ile tanımlı matris olsun.

Burada $n^* = min\ \{j > n : j \notin K\}$ 'dir. Teorem 2.1.1 'den, x 'in istatistiksel yakınsak dizi olması için gerek ve yeter şart böyle bir $\boldsymbol{K}$ kümesinin var olması ve tüm $n \notin \boldsymbol{K}$ için $x_n = y_n$ olacak şekilde bir y yakınsak dizisinin var olmasıdır.

Böylece aşağıdaki teoremi yazarız.

***TEOREM 3.2.3.:*** x dizisinin L ' ye istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart; x 'in L ' ye $A^{(K)}$- toplanabilir olacak şekilde, $K$ 'da bir $A^{(K)}$ matrisinin var olmasıdır. ([13], Fridy ve Miller 1991)

***İspat:*** Gereklilik:

*st-lim* $x = L$ olsun. Bu durumda h.h.n için $x_n = y_n$ ve $\lim_{n\to\infty} y_n = L$ 'dir (Teorem 2.1.1).

$n^{*} := \min\{j > n : j \notin K\}$ olmak üzere $A^{(K)}$ 'nın tanımından

$$\left(A^{(K)}x\right)_n = \begin{cases} x_n = y_{n^*}; & n \notin K \\ y_{n^*} & , n \in K \end{cases}$$

yazılabilir. O halde

$$\lim_{n\to\infty}\left(A^{(K)}x\right)_n = \lim_{n\to\infty} y_n = L$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\left(A^{(K)}x\right)_n = L$$

'dir.

Yeterlilik:

$A^{(K)} \in K$ için $\lim_{n\to\infty}\left(A^{(K)}x\right)_n = L$ olsun. Bu durumda her $n \notin K$ için, $\left(A^{(K)}x\right)_n = x_n$ ve $\delta(K)$=0 olduğundan *st-lim* $x = L$ 'dir. Bu da ispatı tamamlar.

δ doğal yoğunluğu, keyfi negatif olmayan regüler bir A matrisi ile $C_1$ 'in rolü değiştirilerek [7] ve[16] 'de genelleştirilmiştir. Bu istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirilmesine yol açmıştır ( [9] ve [16] ).

" $st_A$-*lim* $x=L$ " 'in anlamı her $\varepsilon>0$ için $\{ k\in IN: |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ kümesinin karakteristik fonksiyonu $\chi$ 'in sıfıra A-toplanabilir olması demektir. Bu, $A = C_1$ olduğu zaman istatistiksel yakınsaklığa indirgenir. $st_A$-toplanabilirliği için Teorem 3.2.1 'in yukarıdaki ispatını adapte edebiliriz.

Bunu ispatsız olarak vereceğiz

A negatif olmayan regüler bir matris olsun ve $\tau_A$,

(*a*) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} = 1$, her $n$ için

(*b*) $\delta_A(K)=0$ olacak şekilde $K \subseteq IN$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in K} t_{nk} = 0$$

özelliklerini sağlayan negatif olmayan T matrislerinin kolleksiyonu olarak tanımlansın.

Aşağıdaki teorem, Teorem 3.2.1 'deki gibi ispatlanabileceği için burada ispatını vermeyeceğiz.

***TEOREM 3.2.4.:*** Sınırlı x dizisinin $st_A - \lim x = L$ 'yi sağlaması için gerek ve yeter şart $\tau_A$ 'daki her T için x 'in L 'ye " T -toplanabilir " olmasıdır. ([13], Fridy ve Miller 1991)

### *3.3. τ 'ya ait MATRİSLER*

Bu kısımda hangi matrislerin $\tau$ 'ya ait olduğu sorusunu gözönüne alacağız. Pek çok klasik toplanabilme matrisleri negatif değildir ve (i) özelliğini sağlarlar. Dolayısıyla araştırmamızı (ii) özelliği üzerine yoğunlaştıracağız. [1] 'de R.P.Agnew;

(*) $\lim_{n\to\infty}\{\max_k |a_{n_k}|\} = 0$

regüler matrisi A 'nın adi yakınsaklıktan daha kuvvetli olmasını gerektirdiğini gösterdi. (*ii*) özelliğinin bu özelliği gerektirdiğini ve bundan dolayı bu özelliğin $\tau$ 'daki matrisler için gerekli olduğunu gösterdik.

***Önerme 3.3.1. :*** Eğer negatif olmayan A matrisi (ii) 'yi sağlıyorsa, bu takdirde A, $\lim_{n\to\infty}\{\max_k |a_{n_k}|\} = 0$ 'ı sağlar.

***İspat:*** $\lim_{n\to\infty}\{\max_k |a_{n_k}|\} = 0$ 'ın yanlış olduğunu farzedelim. Her m için,

$$a_{n(m),k(m)} \geq \varepsilon \rangle 0$$

olacak şekilde $\{n(m)\}$ ve $\{k(m)\}$ satır ve sütun indis dizilerini seçelim.

Eğer gerekiyorsa K=$\{k(m)\}_{m=1}^{\infty}$ 'nin yoğunluğu sıfır olacak şekilde alt diziler seçelim.

Bu, her m için,

$$\sum_{k\in K} a_{n(m),k} \geq a_{n(m),k(m)} \geq \varepsilon$$

'nu sağlar. Bu durumda A, (b) özelliğini sağlamaz.

Önerme 3.3.1 'deki gerektirmenin tersinin yanlış olduğu gösterilebilir. Mesela A 'yı,

$$a_{nk}=\begin{cases}\dfrac{1}{[\sqrt{n}\,]} & \text{, eğer } n-\dfrac{[\sqrt{n}\,]}{2}<k\le n \quad \text{ise}\\[2ex] \dfrac{1}{2n-[\sqrt{n}\,]} & \text{, eğer } k\le n-\dfrac{[\sqrt{n}\,]}{2} \quad \text{ise}\\[2ex] 0 & \text{, eğer } k>n \quad \text{ise}\end{cases}$$

ile tanımlayalım.

A 'nın $\lim\limits_{n\to\infty}\{\max\limits_{k}|a_{n_k}|\}=0$ 'ı sağladığı açıktır. Fakat

$$K=\{1,4,15,16,61,62,63,64,.,.,.,.,.,.,.\}$$

kümesini gözönüne alalım.

Buradaki K, herbiri 4' ün kuvvetini aşan ardışık tamsayı bloklarından oluşur. $4^m$ 'yi ihtiva eden blok $2^{m-1}$ tamsayısından oluşur. Böylece n, 4 'ün bir kuvveti olduğu zaman $n^{-1}|K_n|$ maksimaldir. Bu durumda $|K_n|=\sqrt{n}$ dir. Böylece $\delta(K)=0$ dır. Ayrıca n, 4 'ün bir kuvveti olduğu zaman,

$$\sum_{k\in K}a_{nk}\ \ge \sum_{n-\frac{[\sqrt{n}]}{2}<k\le n}a_{nk}=\frac{[\sqrt{n}\,]}{2}\cdot\frac{1}{[\sqrt{n}\,]}=\frac{1}{2}$$

elde edilir.

Buradan A, (ii) 'yi sağlamaz.

Benzer bir düşünce Borel matrisi ve Euler-Knopp matrislerinin (0<r<1 için), $\lim\limits_{n\to\infty}\{\max\limits_{k}|a_{n_k}|\}=0$ özelliğini sağladığını, fakat (ii) özelliğini sağlamadığını göstermek için kullanılabilir. Her iki durumda da $\max_k |a_{nk}| = O(n^{-1/2})$ 'dir ki, bu $\lim_{n\to\infty} \{ \max_k |a_{n_k}| \} = 0$ özelliğini sağlar. Fakat n.satır yaklaşık olarak $O(\sqrt{n})$ tane terimden oluşan bir blok içerir. Bu durumda ise her terim $\backslash(2\Pi n)^{-1/2}$ dir. ([15], Teorem 5) Bu önceki örnekteki aynı K için (ii) 'nin sağlanmamasına sebep olur.

Böylece (ii) özelliğinin, $\max_k |a_{nk}|$ 'nın sıfıra yaklaşma hızıyla ilgili olduğu anlaşılır. Gerçekten de (ii) 'nin üçgensel A matrisleri için $\max_k |a_{nk}| = O(n^{-1})$ ise, sağlandığını ispatlamak kolaydır. Bu,

$$\sum_{k\in K} a_{nk} = O(|K_n| \max_k a_{nk}) = n^{-1} |K_n| \, O(n \max_k a_{nk})$$

'den elde edilir..

Bu gözlem, 1 'den daha büyük dereceli her Cesaro matrisinin (ii) özelliğini sağladığını söyler. Çünkü,

$\max_k C_1[n,k] = O(n^{-1})$ olduğu bilinir. [24, p.50]

A 'nın üçgensel olması $\max_k |a_{nk}| = O(n^{-1})$ 'nin (ii) 'yi gerektirmesi için gereklidir. Bu gerekliliği aşağıdaki üçgensel olmayan matris ile gösterelim. K, IN 'nin $\delta(K) = 0$ olacak şekilde sonsuz bir alt kümesi olsun, ve

$$b_{nk} = \begin{cases} n^{-1} & \text{, eğer } k \in \{ K \text{'nın ilk n elemanı} \} \text{ ise} \\ 0 & \text{, diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlayalım.

$\max_k b_{nk} = n^{-1}$ olduğu, fakat her n için $\sum_{k\in K} b_{nk} = 1$ olduğu ve böylece (ii) 'nin sağlanmadığı açıktır.

(ii) ve (*) özelliklerinin karşılaştırılmasını tamamlamak için üçgensel olmayan matrisler için (ii) 'nin, (*) 'daki yakınsama hızı hakkında hiçbirşey gerektirmediğini göstereceğiz.

***Önerme 3.3.2.*** : $\tau$ 'da, $A=(a_{nk})$ şeklinde matrisleri mevcuttur öyleki, n sonsuza giderken, $\max_k a_{nk}$ keyfi olarak yavaşça sıfıra gider.

***İspat*** : u, her n için $u_1 = 1$ ve $0<u_n\leq 1$ olacak şekilde sıfır dizisi olsun. A matrisini,

$$a_{nk} = \begin{cases} u_n & , \text{ eğer } k=n \text{ ise} \\ \dfrac{1-u_n}{n-1} & , \text{ eğer } k<n \text{ ise} \\ 0 & , \text{ eğer } k>n \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlayalım.

Bu takdirde $\max_k a_{nk} = \max\ \{(1-u_n)/(n-1),\ u_n\}$ dir, bu ise, $u_n$ 'de daha hızlı bir şekilde sıfıra gider. A 'nın $\tau$ 'da olduğunu görmek için, (i) 'nin sağlandığına ve $K\subseteq IN$ için,

$$\sum_{k\in K} a_{nk} \leq |K_n|\frac{1-u_n}{n-1}+u_n = \frac{n(1-u_n)}{n-1}.\frac{|K_n|}{n}+u_n$$

olduğuna dikkat edelim.

En son ifade, $n\to\infty$ iken $\delta(K)$ 'ya gider, buradan A 'nın (ii) özelliğini sağladığı görülür.

## *KAYNAKLAR*

[1] Agnew, R.P.: *A simple sufficient condition that a method of summability estronger than convergence*. Bull. Amer.Math.Soc. 52,122-132 (1946).

[2] Aslım G. : *Genel Topoloji*, Ege Üniversitesi.

[3] Aydın S. : *Analize giriş* 1.cilt, Hacettepe Üniversitesi. 1975.

[4] Balcı M. : *Matematik Analizi* 1.cilt, Ankara üniversitesi. (1985)

[5] Bayraktar M. : *Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi*, Atatürk Üniversitesi. Erzurum, 988.

[6] Bayraktar M. : *Fonksiyonel Analiz*, Atatürk Üniversitesi. Erzurum, 1992

[7] Buck, R.C. : *The measure theoretic approach to density*. Amer. J. Math. 68(1946), 560-580

[8] Buck, R.C.: *Generalized asymptotic densty*. American J. Math.75(1953)335-46.

[9] Connor, J.S. : *The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences*, Analysis 8(1988),47-63

[10] Connor, J.S. : *R-Type Summability methods. Cauchy criteria p-Sets and statistical convergence*, Proc.Amer. Math. Soc. 115 (1992). 319-324

[11] Connor J. S.: *On strong Matrix Summability With Respect to A modulus and Statistical Convergence*, Canad. Math. Bull. Vol.32(2), 1989.

[12] Fridy, J.A. : *On statistical convergence*, Analysis 5 (1985), 301-313

[13] Fridy J.A and Miller, H.I. : *A matrix Characterization of statistical convergence*, Anallysis 11 (1991) , 59-66

[14] Fridy, J.A. : *Statistical Limit Points*, Amer. Math. Soc. Vol. 118, N4 (1993).

[15] Fridy, J.A. : *Tauberian Theorems via block dominated matrices*, pcific J. Math. (81-91)(1979).

[16] Fredman, A.R.and Sember, J.J. :*Densities and summability.* pacific J.Math. 95, 293-305 (1981).

[17] Fast H. : *Sur la Convergence Statistique*, Colloq. Math. 2 (1951),241-244.

[18] Halbestram, H. and Roth, K.F. : *Sequences*, vol. 1, Oxford, clarendon press, 1966.

[19] Kuppers, L. and Niederreiter, M. : *Uniform distribution of sequences* Wiley, New York. 1974.

[20] Kolk Enno : *Matris Summability of statistically Convergent sequences,* Analysis 13, 77-83 (1993).

[21] Maddox I.J. : *Elements of Functional Anallysis*, Cambridge University Press (1970).

[22] Neubrunn, T. and Smital, J. and Salat, T. : *On the structure of the space* M(0,1) Rev. Roumaine Math. pures et appl. 13, 1968,377-386.

[23] Niven, I. and Zuckerman, H.S. : *An introduction to the theorem of numbers*, 4th ed., Wiley, New York. 1980.

[24] Powell, R.E. and Shah, S.M. : *Summability theory and its Applications.* Van Nostrand Rheinhold, London, 1972.

[25] Renyi, A. : *Summability methods and probability theory.* MTA Mat. Kut Int. Kozl. 4, 1385-1388 (1959).

[26] Petersen, G.M. : *Regular Matrix Transformations*. McGraw -Hill, NewYork (1966)

[27] Salat, T. : *On Statistically Convergent Sequences of real numbers* . math.Slovaca , 30,(1980) No:2 ,139-150.

[28] Schoenberg ,I.J. : *The Integrability of certain functions and related summability methods.* Amer. Math .Monthly, 66, (1959), 361-375.

[29] San, Necdet. : *Analiz Dersleri*. Ankara, 1973

[30] Zygmund, A. : *Trigonometric series*, 2nd ed., vol.II. Cambridge Univ. Press, London and New York, 1979.

**İNGİLİZCE ABSTRAKT (en fazla 250 sözcük) :**

II

*SUMMARY*

Masters Thesis

STATISTICAL LIMIT POINTS

Ismail YILDIZ

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

1995, Page : 56

This theis consists of three chapter

In the first chapter some fundemental definations and theorems have been given as a references to this study

In the second chapter, following the concept of a statistically convergent sequence x we define a statistical limit points of x

In this chapter, we return to the view of statistical convergence as a sequential limit concept and we extend this concept in a natural way to define a statistical analogue of the set of limit points or cluster points of a number sequence. Also, we give the basic properties os statistical limit points and cluster points, and the similarities and differences between these points and ordinary limit points were given. Finally, in the second chapter, statistical analogues of some of the well-known completeness properties of the real numbers were given.

It is known that statistical convergence can not be included by any matrix method but for bounded sequences it is included by the cesaro matrix method. In the third chapter, these result are extended by comparing statistical convergence with the intersection of a collection of summability matrices. Also, A matrix characterization of statistical convergence has been introduced.

*KEY WORDS:* Matrix transformation, regular matrix, triangular matrix, natural density, summability, statistical convergence, statistical Cauchy sequence, statistical limit points, statistical cluster points, statistical closure, A-summability, A-statistical convergence.

TÜRKÇE ABSTRAKT (en fazla 250 sözcük) :

(TÜBİTAK/TÜRDOK'un Abstrakt Hazırlama Kılavuzunu kullanınız.)


### *ÖZET*

Yüksek Lisans Tezi

İSTATİSTİKSEL LİMİT NOKTALARI

İsmail YILDIZ

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

1995, Sayfa : 56

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde çalışmaya kaynaklık eden bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde bir dizinin istatistiksel yakınsak olması tanımından hareketle, x 'in istatistiksel limit noktası tanımı verildi. İstatistiksel yakınsaklık kavramı dizisel limit kavramı olarak ele alınıp bir sayı dizisinin yığılma noktaları veya limit noktaları kümesinin istatistiksel benzerleri doğal bir yolla tanımlandı. Ayrıca yığılma noktaları ve istatistiksel limit noktalarının temel özellikleri verildi. Adi limit noktaları ile istatistiksel limit noktaları ve istatisiksel yığılma noktaları arasındaki benzerlikler ve farklılıklar ortaya koyuldu. Son olarak da bazı iyi bilinen tamlık özelliklerinin istatistiksel benzerleri verildi.

İstatistiksel yakınsaklığın hiç bir matris metodu tarafından içerilmediği, ancak sınırlı diziler için Cesaro matrisi tarafından içerildiği bilinir. Üçüncü bölümde, toplanabilme matrislerinin bir sınıfının arakesiti ile istatistiksel yakınsaklık mukayese edilerek bu sonuçlar genelleştirildi. İstatistiksel yakınsaklığın bir matrix karekterizasyonu tanıtıldı.



***ANAHTAR KELİMELER:*** Matris dönüşümü, regüler matris, üçgensel matris doğal yoğunluk, toplanabilme, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel cauchy dizisi, istatistiksel limit noktaları, istatistiksel yığılma noktaları, istatistiksel kapanış A-toplanabilme, A-istatistiksel yakınsaklık.