HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# BANACH UZAYLARINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Aydın İZGİ



YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



1996
ŞANLIURFA

T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# *BANACH UZAYLARINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK*

*Aydın İZGİ*

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 25.06.1996 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek oybirliği ~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

| | | |
|---|---|---|
| Doç.Dr. Fatih NURAY (Danışman) | Yrd.Doç.Dr. Aslan GÜLCÜ | Yrd.Doç.Dr. Bünyamin AYDIN |

*TEŞEKKÜR*

Bu yüksek lisans çalışmasını yöneten ve çalışma süresince karşılaştığım güçlüklerde değerli yardımlarını esirgemeyen hocam sayın Doç.Dr. Fatih NURAY'a ve çalışma esnasında yardımcı olan hocam sayın Y. Doç.Dr. Aslan GÜLCÜ'ye teşekkür eder, saygılar sunarım.

Aydın İZGİ

# İÇİNDEKİLER

**ÖZET**

**Yüksek Lisans Tezi**

**BANACH UZAYLARINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK**

*Aydın İZGİ*

*Harran Üniversitesi*

*Fen Bilimleri Enstitüsü*

*Matematik Anabilim Dalı*

*1996; sh:63*

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmaya kaynaklık eden bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde, istatistiksel yakınsaklıkla ilgili yapılan çalışmaların kısa bir özeti verildi.

Üçüncü bölümde, istatistiksel yakınsaklık bir X Banach uzayına genelleştirildi. Yine bir X Banach uzayında A-istatistiksel yakınsak ve A-istatistiksel Cauchy dizi cümlelerinin çakıştığı gösterildi. Ayrıca A-istatistiksel yakınsaklık ile bir f modülüs fonksiyonu yardımı ile tanımı kuvvetli A-toplanabilirlik arasındaki bağıntı incelendi.

Son bölümde, st(A), A-istatistiksel yakınsak dizilerin, $st_0(A)$ A-istatistiksel sıfır dizilerin, X kesit-kapalı dizilerin uzayı ve Y keyfi bir dizi uzayı olmak üzere $(st(A)\cap X,Y)$ ve $(st_0(A)\cap X,Y)$ matris sınıfları karekterize edildi.

__**Anahtar Kelimeler:**__ Banach uzayı, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy dizisi, A-istatistiksel yakınsaklık, A-istatistiksel Cauchy dizisi, matris dönüşümü.

**ABSTRACT**

**Master Thesis**

**THE STATISTICAL CONVERGENCE IN BANACH SPACES**

*Aydın İzgi*

*Harran University*

*Graduate School of Natural and Applied Sciences*

*Department of Mathematics*

*1996; Page:63*

This thesis consist of four chapters.

In the first chapter, some fundemental definitions and theorems have been given as a references to this study.

In the second chapter, a summary of statistical convergence have been given.

In the third chapter, the statistical convergence have been generalized to a Banach space X. Also, it was proved that, in a Banach space X the set of A-istatistically convergent and A-statistically Cauchy sequences coincide. Furthermore, the relations between A,statistically convergence and strong A-summability defined by a sequence of moduli were studied.

In the final chapter, we characterized the matrix classes (st(A)$\cap$X,Y) and ($st_0$(A)$\cap$X,Y) where st(A) is the set of A-statistically convergent sequences, $st_0$(A) is the set of A-statistically null sequences, X is a section-closed sequence space and Y is an arbitrary sequence space.

**Key Words:** Banach space, statistical convergence, statistical Cauchy sequence, A-statistical convergence, A-statistical Cauchy sequence, matrix transformations.

# SİMGELER

| | |
|---|---|
| **IN** | :Doğal sayılar cümlesi |
| **IR** | :Reel sayılar cümlesi |
| $\mathbb{C}$ | :Kompleks sayılar cümlesi |
| s | :Reel veya kompleks değerli bütün dizilerin uzayı |
| m | :Reel veya kompleks değerli bütün sınırlı dizilerin uzayı |
| c | :Reel veya kompleks değerli bütün yakınsak dizilerin uzayı |
| $c_0$ | :Reel vya kompleks değerli sıfıra yakınsak bütün dizilerin uzayı |
| $\varphi$ | :Reel veya kompleks değerli bütün sonlu dizilerin uzayı |
| **st** | :Reel veya kompleks değerli bütün istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı |
| **$st_0$** | :Reel veya kompleks değerli bütün sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı |
| **st(A)** | :Reel veya kompleks değerli bütün A-istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı |
| **$st_0(A)$** | : Reel veya kompleks değerli bütün sıfıra A-istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı |
| **(E,F)** | :E dizi uzayını F dizi uzayına dönüştüren bütün matrislerin sınıfi |
| $\tau$ | :Bütün regüler matrislerin cümlesi |
| $\tau^+$ | :Negatif olmayan bütün regüler matrislerin cümlesi, $\tau^+=\{(a_{nk})\in\tau:\ a_{nk}\geq 0\}$ |
| **U$\tau$** | :Bütün düzgün regüler matrislerin cümlesi |
| **U$\tau^+$** | :Negatif olmayan bütün düzgün regüler matrislerin cümlesi, $U\tau^+=U\tau\cap\tau^+$ |
| **Q** | :Sürekli yarınormların cümlesi |
| **h.h.k** | :Hemen hemen tüm k' lar |
| **$x_n$=o(n)** | $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=0$ |
| **$x_n$=O(n)** | $=\sup\dfrac{\lvert x_n\rvert}{n}<\infty$ |

**Not:** *X, K=(IR* veya *$\mathbb{C}$)* cismi üzerinde bir Banach uzayı olsun. Yukarıdaki dizi uzayları, terimleri *X* in birer elemanı olan dizilerden oluşuyorsa, örneğin *s,c,st,st(A)* yerine sırasıyla *s(X), c(X),st(X), st(A , X)* yazılır.

# 1.BÖLÜM
# TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

**Tanım 1.1:** $A$ bir lineer nokta cümlesi olsun. Eğer $A$ cümlesinin her $x$ elemanı için $x \geq a$ olacak şekilde bir $a$ sayısı varsa, A cümlesine **alttan sınırlıdır** , $a$ sayısına da A cümlesinin bir **alt sınırı** denir. Benzer şekilde, eğer A cümlesinin her $x$ elemanı için $x \leq b$ olacak şekilde bir $b$ sayısı varsa, $A$ cümlesine **üstten sınırlıdır**, $b$ sayısına da $A$ cümlesinin bir **üst sınırı** denir.

Alttan ve üstten sınırlı cümlelere, kısaca **sınırlı cümleler** denir[1].

**Tanım 1.2:** $X$ ve $Y$ herhangi iki cümle olsun. $X$ in herbir elemanına $Y$ nin bir ve yalnız bir elemanını karşılık getiren $f$ kuralına $X$ den $Y$ ye bir **fonksiyon** denir ve

$$f{:}X \to Y \quad \text{veya} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

şeklinde gösterilir[1].

$X$; $f$ nin **tanım cümlesi**, $Y$; $f$ nin **değer cümlesi**, $f(X)=Y$ ise, $f$ **örten**; $f(X) \subset Y$ ise, $f$ ye **içine** fonksiyondur denir.

Herbir $x_1, x_2 \in X$ ve $x_1 \neq x_2$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise, $f$ ye **bire-birdir** denir.

**Tanım 1.3:** Bir $A$ cümlesinden $IN=\{1,2,3,...,n,...\}$ veya $M \subseteq IN$ sonlu cümlesine bire-bir bir $f$ fonksiyonu tanımlanabilirse, $A$ cümlesine **sayılabilir cümle** denir[1].

$f{:}A \to IN$ ise, $A$ **sayılabilir sonsuz cümledir.**

$f{:}A \to M$ ise, $A$ **sayılabilir sonlu cümledir.**

**Tanım 1.4:** Tanım cümlesi $IN$ olan fonksiyona **dizi** denir[1].

Değer cümlesi $IR$ olan diziye **reel terimli dizi** ve değer cümlesi $C$ olan diziye **kompleks terimli dizi** denir.

**Tanım 1.5:** $X$ boş olmayan bir cümle olsun. $d{:}X\text{x}X \to IR$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $d$ ye $X$ de **metrik** (veya **uzaklık fonksiyonu**) denir. $(X,d)$ çiftine **metrik uzay** denir[2].

M1) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

M2) $d(x,y)=d(y,x)$

M3) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(y,z)$.

**Tanım 1.6:** $L$ boş olmayan bir cümle ve $K$, reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, $L$ ye $K$ cismi üzerinde **lineer(veya vektör) uzay** denir[2].

A) $L$, + işlemine göre değişmeli gruptur. Yani;

G1) Her $x,y \in L$ için $x+y \in L$

G2) Her $x,y,z \in L$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$

G3) Her $x \in L$ için $x+\theta=\theta+x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.

G4) Her $x \in L$ için $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.

G5) Her $x,y \in L$ için $x+y=y+x$ dir.

B) $x,y \in L$ ve $\alpha$, $\beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

L1) $\alpha.x \in L$

L2) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

L3) $(\alpha+\beta)=\alpha x+\beta x$

L4) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$

L5) $1.x=x$

**Tanım 1.7:** $L$, $K$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $L$ nin bir $M$ altcümlesi, $L$ deki işlemlere göre $K$ cismi üzerinde lineer uzay ise $M$ ye $L$ nin **altuzayı** denir. Yani, her $\alpha,\beta \in K$, $x,y \in M$ için

$$\alpha x+\beta y \in M$$

ise, $M$ ye $L$ nin **lineer altuzayı** denir.[2].

**Tanım 1.8:** $X$ bir lineer uzay olsun. $p:X \to IR$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa $p$ ye $X$ üzerinde bir **yarınorm** denir.

1) $p(\theta)=0$ ($\theta$, $X$ in sıfır elemanıdır)

2) $p(\lambda x)=|\lambda|p(x)$ ($\lambda \in K$)

3) $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ (Üçgen Eşitsizliği)

**Tanım 1.9:** $N$ bir lineer uzay ve $\| \; \|: N \to IR$ fonksiyonu bir yarınorm olsun. $\| \; \|$ fonksiyonunun $x$ deki değerini $\| x \|$ ile gösterelim. Eğer

$$\| x \| =0 \Leftrightarrow x=\theta$$

şartı sağlanıyorsa $\| \; \|$ ya $N$ de **norm** denir.

Lineer bir uzay üzerinde bir norm tanımlanmışsa, bu uzaya **normlu lineer uzay** denir.

Her $x \in N$ için $\| x \| \geq 0$ dır.

**Tanım 1.10:** $(N, \| \; \|)$ normlu bir uzay olsun.

$$d: N \text{x} N \to IR, \quad d(x,y)=\| x-y \|$$

biçiminde tanımlanan metriğe **norm metriği** denir[2].

**Tanım 1.11:** (1) $(X,d)$ bir metrik uzay ve $(x_n)$, $X$ de bir dizi olsun. Bu dizinin terimlerinin cümlesi $X$ in sınırlı bir altcümlesi ise, $(x_n)$ dizisine **sınırlı dizi** denir. Demek ki, $(x_n)$ sınırlı ise, her $m,n \in IN$ için

$$d(x_m, x_n) \leq K$$

olacak şekilde bir $K \geq 0$ sayısı vardır[2].

(2): $(x_n)$ $(X,\|\ \|)$ de bir dizi olsun. Her $n$ için $\|x_n\| \leq K$ olacak şekilşde bir $K \geq 0$ sayısı varsa, $(x_n)$ dizisine **sınırlı dizi** denir[2].

**Tanım 1.12:** (1): $(X,d)$ bir metrik uzay ve $(x_n)$, $X$ de bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa, $(x_n)$ dizisine $X$ de **yakınsak** ve $x_0$ a da **dizinin limiti** denir. Bu durum

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ \ x_n \to x_0 \text{ veya } n \to \infty \text{ iç in } x_n \to x_0$$

sembollerinden biri ile ifade edilir.

Yakınsak olmayan diziye **ıraksak dizi** denir[2].

(2): $(X,\|\ \|)$ de $(x_n)$ dizisi verilmiş olsun. Her ε>0 için $n \geq n_0$ olduğunda $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa $(x_n)$ dizisi $x_0$ a ($x_0$ vektörüne) **yakınsaktır** denir[2].

**Tanım 1.13:**(1): $(X,d)$ bir metrik uzay ve $(x_n)$X de bir dizi olsun. her ε>0 için $m,n > n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa $(x_n)$ dizisine **Cauchy dizisi** denir[2].

(2): $(X,\|\ \|)$ de bir dizi $(x_n)$ olsun. Her ε>0 için $m,n > n_0$ olduğunda $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa $(x_n)$ dizisine **Cauchy dizisi** denir[2].

$X$ deki her Cauchy dizisi yakınsak ise, uzaya **tam** denir[2].

**Tanım 1.14:** $X$ normlu lineer uzay olsun. $X$ norm metriğine göre tam ise $X$ ye **Banach uzayı** denir[2].

**Tanım 1.15:** Bir $(r_n)$ rasyonel sayı dizisini gözönüne alalım. ε>0 ne kadar küçük olursa olsun. Eğer $n \geq n_0$ için $|r_n| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 > 0$ tamsayısı varsa, $(r_n)$ dizisi **sıfıra yakınsar** veya bir **sıfır dizisidir** denir[3].

**Tanım 1.16:** $X$ boş olmayan bir cümle olsun. $X$ in altcümlelerinin, aşağıdaki özellikleri sağlayan, bir τ sınıfına **topoloji** denir:

i) $X$ ve Φ, τ nun elemanlarıdır.

ii) τ nun elemanlarının herhangi bir topluluğunun birleşimi yine τ nun elemanıdır.

iii) τ nun sonlu sayıdaki elemanlarının kesişimi yine τ nun bir elemanıdır.

$(X,\tau)$ ikilisine **topolojik uzay** denir[4].

τ nun elemanlarına $X$ in τ - açık cümleleri veya herhangi bir karışıklık sözkonusu olmadığında $X$ in **açık cümleleri** denir.

**Örnek 1.1:** Eğer $(X,d)$ bir metrik uzay ise, $X$'*in* $d$-açık cümleleri $X$ üzerinde bir topoloji oluşturur. $X$ üzerinde $d$ tarafından oluşturulan bu topolojiye **metrik topoloji** denir.

$(X,\tau)$ bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. Eğer, $(X/A)\in\tau$ ise, yani $A$ nın X e göre tümleyeni açık ise, A ya $\tau$-kapalı veya kısaca **kapalı cümle** denir.

**Tanım 1.17:** $(X,\tau)$ topolojik bir uzay ve $A\subset X$ olsun.

a) A yı kapsayan bütün kapalı cümlelerin kesişimine **A nın kapanışı** denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

b) A tarafından kapsanan bütün açık cümlelerinin birlerşimine **A nın içi** denir ve $A^0$ ile gösterilir.[4].

Kapalı cümlelerin kesişimi kapalı, açık cümlelerin birleşimi açık olduğundan, $\overline{A}$ kapalı bir cümle ve $A^0$ açık bir cümledir. O halde

a) A kapalı ise, $\overline{A}$=A

b) A açık ise, $A^0$=A

dır.

**Tanım 1.18:** $(X,\tau)$ topolojik bir uzay ve $A\subset X$ olsun. Eğer,

$$(\overline{A})^0 \neq \emptyset$$

ise, yani A nın kapanışı en az bir açık cümle kapsıyorsa, A ya **bazı yerlerde yoğun cümle**, aksi halde yani,

$$(\overline{A})^0 = \emptyset$$

ise, **hiç bir yerde yoğun olmayan cümle** denir. Eğer $\overline{A}$=X ise, A ya X'de **her yerde yoğun cümle** denir[4].

**Tanım 1.19:** $(X,\tau)$ bir topolojik uzay ve $x\neq y$ olmak üzere x,y $\in$X olsun. x$\in$G, y$\in$H ve G$\cap$H=$\emptyset$ olacak şekilde X de G ve H açıkları bulunabiliyorsa, X' e $T_2-Uzay\imath$ veya Hausdorff uzayı denir[4].

**Örnek 1.2:** Her metrik uzay bir Hausdorff uzayıdır.

**Tanım 1.20:**L bir lineer uzay ve $A\subset L$ olsun. Her x,y$\in$A için

$$B=\{z\in L:\ z=\alpha x+(1-\alpha)y,\ \ 0\leq\alpha<1\}\subset A$$

oluyorsa A ya **konveks cümle** denir.[2].

**Tanım 1.21:** $(X,\tau)$ bir topolojik uzay ve x$\in$X olsun. x' i içeren $\tau$ nun elemanlarının bir sınıfı $\beta_x$ olsun. Eğer her $U\in\beta_x$ için $V\subseteq U$ olacak şekilde en az bir $V\in\beta_x$ varsa, bu taktirde $\beta_x$ sınıfına $x$ noktasındaki **lokal(yerel) taban** denir.[4].

Her bir noktası, konveks cümlelerden oluşan bir lokal tabana sahip ise lineer topolojik uzaya **lokal konveks uzay** denir.

X topolojik uzayı, toplama ve skalerle çarpma işlemleri sürekli olacak şekilde bir vektör uzayı ise, X uzayına **topolojik vektör uzayı** denir[5].

**Tanım 1.22:** X lineer (vektör) uzayı, topolojik Hausdorff uzayı olsun. Eğer X lokal konveks bir uzay ise, X uzayına Hausdorff lokal konveks topolojik vektör uzayı denir. Kısaca Hausdorff l.k.t.v.u. ile belirteceğiz.

**Tanım 1.23:** $x=(x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her bir q∈Q için, n≥k ve n/k→1 olduğunda

$$\lim_{n\to\infty} q(x_n - x_k) = 0$$

ise, x dizisine **yavaş salınımlı dizi** denir.[6].

Her Cauchy dizisi yavaş salınımlı bir dizidir;fakat tersi doğru değildir.

**Tanım 1.24:** $x=(x_k)$ bir dizi ve $K\subset IN$ bir sonsuz cümle olsun. Eğer her ε>0 için $n\geq n_0$ ve $n\in K$, $|x_n - x_0| < \varepsilon$ olmasını gerektiren bir $n_0 \in IN$ varsa $x, x_0$'a **K boyunca yakınsaktır** denir. Eğer her ε>0 için $j,k\in K$ ve $j,k > n_0, |x_k - x_j| < \varepsilon$ olmasını gerektiren bir $n_0 \in IN$ varsa, x dizisine **K-boyunca Cauchy dizisi** denir[7].

**Tanım 1.25:** *m,n∈IN ve 1≤i≤m, 1≤j≤n* olmak üzere bütün *(i,j)* çiftlerinin cümlesi $M\subseteq IN x IN$ olsun. Bir *K* cisminde değerler alan M deki bir

$$f: M\to K$$

fonksiyonu

$$(i,j)\to f(i,j) = a_{ij}$$

biçiminde tanımlayalım. $a_{ij} \in K$ değerlerini

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ veya } A = [a_{ij}]$$

biçiminde düzenleyelim. K dan seçilen bu m.n tane elemanın A tablosuna **K üzerinde mxn matris** denir. Her *(i,j)* , *1≤i≤m, 1≤j≤n* çiftine karşılık gelen $a_{ij} \in K$ elemanına A matrisinin *(i,j)*, elemanı denir.[8].

*m=n* ise, A matrisine **kare matris** denir.

Matrislerin toplama ve skalerle çarpma işlemleri

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \text{ veya } c[a_{ij}] = [ca_{ij}]$$

biçiminde tanımlanır. Bu iki işlemle lineer (vektör) uzayı aksiyomları sağlanır.

**Teorem 1.1 :** Bir K cismi üzerinde bütün mxn tipindeki matrislerin cümlesi K cismi üzerinde bir lineer uzaydır.

Bu uzaya **matris uzayı** denir.

**Tanım 1.26:** $E$ ve $F$, $s$ nin iki alt cümlesi ve $A=\left(a_{nk}\right)$, $a_{nk} \in K$ olmak üzere bir sonsuz matris olsun. Her bir $x=\left(x_k\right) \in E$ için

$$A_n x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serisi her n için yakınsak ve

$$Ax = \left(A_n x\right)$$

dizisi $F$' ye ait ($Ax \in F$) ise, $A=\left(a_{nk}\right)$matrisine $E$ den $F$ içine bir matris dönüşümü denir.

$E$ den $F$ içine bütün matris dönüşümlerinin cümlesi $(E,F)$ ile gösterilir.

Matris dönüşümleri (King, 1966), (Petersen, 1966), (Eizen ve Laush, 1969), (Maddox, 1970), (Savaş, 1987) ve daha bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Bu matematikçiler bilinen dizi uzayları arasında pek çok matris dönüşümü karakterize etmişler.

**Tanım 1.27:** $A=\left(a_{nk}\right)$ bir sonsuz matris olsun.

$s_A=\{x:\ Ax\ tanımlı\}$ cümlesine **A nın alanı** denir.

$c_A=\{x:\ Ax \in c\}$ cümlesine **A nın yakınsaklık alanı** denir. Ayrıca $c_A^0=\{x: Ax \in c_0\}$biçiminde tanımlanır[5].

**Tanım 1.28:** Sıfır olmayan bütün sonlu dizilerin cümlesi $\phi$ olsun. $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisinin her bir satırı $\phi$ de ise, $A$ ya **satır-sonlu** denir[5].

Eğer $A$ satır-sonlu ise $s_A=s$ dır. Bunun terside doğrudur.

**Tanım 1.29:** $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisi, yakınsak dizileri yakınsak dizilere dönüştürüyorsa, $A$ ya **konservatif matris** denir. Konservatif matrislerin sınıfı $(c,c)$ ile gösterilir.

A konservatif bir matris olması için gerek ve yeter şart $c \subset c_A$ olmasıdır.

Eğer her $x \in c$ için $\lim Ax = m.\lim x$ $(m \in IR)$ ise, A ya **m çarpımsal** denir. $m=1$ durumunda aşağıdaki tanımı elde ederiz.

**Tanım 1.30:** $A \in (c,c)$ ve her $x \in c$ için

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = \lim_{k\to\infty} x_k$$

ise, $A$ matrisine **regüler matris** denir[5].

Bir başka ifade ile: Bir $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisi yakınsak dizileri yakınsak dizilere limiti koruyarak dönüştürüyorsa, $A$ ya **regüler matris** denir. Regüler matrislerin sınıfı $(c,c,p)$ ile gösterilir.

**Örnek 1.3:** $x=(x_k)$ bir dizi olsun. $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisi,

$$A_n x = \begin{cases} x_1, & n=1 \text{ ise} \\ \dfrac{x_{n-1}+x_n}{2}, & n>1 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde verilsin. Bu taktirde $A$ regülerdir. Ayrıca $y=\{(-1)^k\}$ ıraksak dizisini toplar. $Ay=(-1,0,0,0,...)$.

Bir matrisin regüler olması için gerek ve yeter şartlar Silverman-Toeplitz tarafından verilmiştir.

**Teorem 1.2. (Silverman-Toeplitz):** $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisi $s$ üzerinde regüler olması için gerek ve yeter şart

R1) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \quad (k \in IN)$

R2) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{nk} = 1$

R3) $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$

olmasıdır.

Bu teoremin ispatı Petersen'in (1966, sh.8-9) ve Maddox'un (1970, sh.165-166) kitaplarında verilmiştir.

Yukarıdaki teoremin üç şartını sağlayan matrise **Toeplitz matrisi** denir.

**Tanım 1.31:** (R2), (R3) ve

R4) $\lim_n \sup_k |a_{nk}| = 0$

şartlarını sağlıyorsa matrise **düzgün regüler matris** denir.

**Tanım 1.32:**

$$a_{nk}=\begin{cases}\frac{1}{n}, & 1\le k\le n \text{ ise}\\ 0, & k>n \text{ ise}\end{cases}$$

biçiminde tanımlanan sonsuz matrise **Cesaro matrisi $C_1$** denir.

Cesaro matrisi $C_1$, negatif olmayan düzgün regüler bir matristir, kısaca $C_1 \in U\tau^+$ dır.

**Tanım 1.33:** $n,k\geq 0$ olmak üzere $a_{nk}=\frac{n^k}{k!e^n}$ biçiminde tanımlanan sonsuz matrise **Borel matrisi** denir. [9].

**Tanım 1.34:** $k>n$ için $a_{nk}=0$ ve her n için $a_{nn}\neq 0$ biçiminde tanımlanan sonsuz matrise **normal matris** denir. [10].

Brundo, aşağıdaki sonucu ispatladı(Bak. Cooke, 1960).

**Teorem 1.3:** Her $A\in\tau^+$ için

$$c_{A'}\cap m=c_A\cap m$$

ve

$$\lim_n A'_n x=\lim_n A_n x \qquad (x\in c_A\cap m=c_{A'}\cap m)$$

olacak şekilde bir $A'\in\tau^+$ **normal matrisi** vardır.

Eğer $c_B\supset c_A$ ise, $B$, $A$ dan **kuvvetlidir** denir. Eğer **B, A dan kuvvetli** ve $\lim Ax=\lim Bx$ ise, **B, A yı içerir** denir. Eğer $c_B=c_A$ ise, $A$ ve $B$ **eş kuvvetlidir** denir.

**Tanım 1.35:** $A=(a_{nk})$ bir sonsuz matris ve $x=(x_k)\in s$ olsun. Her $n$ için

$$A_n x=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k$$

serisi yakınsak ve $\lim_{n\to\infty}A_n x=x_0$ ise, $x$ dizisi $x_0$ a **A-toplanabilirdir** ya da **A-limitlenebilirdir** denir.

$$A-\lim_k x_k=x_0$$

yazılır[10].

$c_A$ nın her bir elemanı A-toplanabilir bir dizidir.

Aşağıdaki tanımlarda $x=(x_k)\in s$, $x_0\in K(=IR$ veya $\mathbb{C})$ ve $A\in\tau^+$ olarak alınacak.

**Tanım 1.36:** $\lim_n \frac{1}{n}\sum_k |x_k - x_0| = 0$

oluyorsa, $x$ dizisi $x_0$ a **kuvvetli Cesaro toplanabilirdir** denir. Bu dizilerin uzayı $W$ ile $x_0=0$ ise $W_0$ ile gösterilir.

$$\lim_n \sum_k a_{nk}|x_k - x_0| = 0$$

ise $x$ dizisi $x_0$ a **kuvvetli A-toplanabilirdir** denir. Bu dizilerin uzayı $W(A)$ ile, $x_0=0$ ise, $W_0(A)$ ile gösterilir[11].

**Tanım 1.37:** $p>0$ sabiti için

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum |x_k - x_0|^p = 0$$

ise, $x$ dizisi $x_0$ a **kuvvetli p-Cesaro toplanabilirdir** denir. Bu dizileri uzayı $W^p$ ile, $x_0=0$ ise, $W_0^p$ ile gösterilir.

$$\lim_n \sum a_{nk}|x_k - x_0|^p = 0$$

ise, $x$ dizisi $x_0$ a **p indisi ile kuvvetli A-toplanabilirdir** denir. Bu dizilerin uzayı $W^p(A)$ ile, $x_0=0$ ise $W_0^p(A)$ ile gösterilir[12].

Şimdi yukarıdaki toplanabilirlik tanımlarını bir modülüse bağlı olarak vereceğiz. Önce modülüs tanımını verelim.

**Tanım 1.38:** Bir f: $[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonu için

i) $f(t)=0 \Leftrightarrow t=0$

ii) $f(t+u)\le f(t)+f(u)$, bütün $t\ge0$, $u\ge0$ için

iii) $f$, artandır

iv) $f$, 0 da sağdan süreklidir.

şartları gerçekleniyorsa, $f$ fonksiyonuna bir **modülüs fonksiyonu** denir[13].

Aşağıdaki tanımlarda $x=(x_k)\in s$, $x_0\in K$, $A\in\tau^+$, $f$ bir modülüs ve $p>0$ bir sabittir.

**Tanım 1.39:** $\lim_n \frac{1}{n}\sum_k f(|x_k - x_0|) = 0$

ise, $x$ dizisi $x_0$ a **$f$ modülüsüne göre kuvvetli Cesaro toplanabilirdir** denir. Bu dizilerin uzayı $W(f)$ ile, $x_0=0$ ise $W_0(f)$ ile gösterilir[13].

$$\lim_n \sum a_{nk}(f(|x_k - x_0|)) = 0$$

ise, x dizisi $x_0$ a **f modülüsüne bağlı olarak kuvvetli A-toplanabilirdir** denir.Bu dizilerin uzayı $W(A,f)$ ile, $x_0$=0 ise $W_0(A,f)$ ile gösterilir[11].

**Tanım 1.40:** $\lim_n \frac{1}{n}\sum_k (f(|x_k - x_0|))^p = 0$

ise, $x$ dizisi $x_0$ a $f$ **modülüsüne göre kuvvetli p-Cesaro toplanabilirdir** denir. Bu dizilerin uzayı $W^p(f)$ ile, $x_0$=0 ise $W_0^p(f)$ ile gösterilir[13].

$$\lim_n \sum_k a_{nk}(f(|x_k - x_0|))^p = 0$$

ise, $x$ dizisi $x_0$ a $f$ **modülüsüne göre p indisi ile kuvvetli A-toplanabilirdir** denir. Bu dizilerin uzayı $W^p(A,f)$ ile, $x_0$=0 ise, $W_0^p(A,f)$ ile gösterilir[14].

**Tanım 1.41:** Her $k \in IN$ için $f_k$ bir modülüs olmak üzere $F=(f_k)$ dizisine **modülüs dizisi** denir.

Yukarıda bir $f$ modülüsüne bağlı olarak verilen toplanabilirlik tanımları, $f$ modülüsü yerine bir $F=(f_k)$ modülüs dizisi alınarak daha genel tanımlar yapılabilir. Örneğin aşağıdaki tanımı Kolk[15] yapmıştır.

**Tanım 1.42:** $x=(x_k) \in s$, $x_0 \in K$, $p>0$ sabit ve $F=(f_k)$ bir modülüs dizisi olsun.

$$\lim_n \sum_k a_{nk}(f_k(|x_k - x_0|))^p = 0$$

ise, $x$ dizisi $x_0$ a $F=(f_k)$ **modülüs dizisine göre p indisi ile kuvvetli A-toplanabilirdir** denir. Bu dizilerin uzayı $W^p(A,F)$ ile, $x_0$=0 ise $W_0^p(A,F)$ ile gösterilir[14].

Bu tanımda $A=C_1$ alarak aşağıdaki tanımı verebiliriz.

**Tanım 1.43:** $\lim_n \frac{1}{n}\sum_k (f_k(|x_k - x_0|))^p = 0$

ise, $x$ dizisi $x_0$ a **F=($f_k$) modülüs dizisine göre kuvvetli p-Cesaro toplanabilirdir** denir. Bu dizilerin uzayı $W^p(F)$ ile, $x_0$=0 ise $W_0^p(F)$ ile gösterilir.

Buraya kadar yapılan tanımlarda dizilerin terimleri hep $IK$ (=$IR$ veya $\mathbb{C}$) cisminden alınarak yapılmıştır.

$X$, $IK$ cismi üzerinde bir Banach uzayı olsun. Eğer, $x=(x_k)$ terimleri $X$ in birer elemanı olan bir dizi, yani $x \in s(X)$ ise, buraya kadar yapılan tanımlarda kullanılan

$$|x_k - x_0|$$

ifadesi yerine

$$\|x_k - x_0\|$$

yazılır. Benzer şekilde, dizi uzaylarının gösterimide değişmektedir. Örneğin, W yerine W(X), W(A) yerine W(A,X), $W^p(A,F)$ yerine $W^p(A,F,X)$ v.b. yazılır.

$0<p<\infty$ olmak üzere p sabiti için

$$l_p=\{x=(x_k)\in s : \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < \infty\}$$

$$l_\infty=\{x=(x_k)\in s: \|x\|_\infty = \sup_k |x_k| < \infty\}$$

biçiminde tanımlanır.

$e=(1,1,1,...)$ ve 1, k. ıncı terim olmak üzere $e^k=(0,0,...,0,1,0,...)$ olsun.

**Tanım 1.44:** Bir $x=(x_k)$ dizisi için, $n\in IN$ olmak üzere

$$x^{[n]} = \sum_{k=1}^{n} x_k e^k = (x_1,x_2,...,x_n,0,0,...)$$

biçiminde tanımlanan diziye $x$ dizisinin **n-inci kesiti** denir. Daha genel olarak keyfi bir K indis cümlesi için

$$y_k=\begin{cases} x_k, & k\in K \text{ ise} \\ 0, & k\in IN/K \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $x^{[K]}=(y_k)$ dizisine x dizisinin **K-kesiti** denir[16].

**Tanım 1.45:** $U$ herhangi bir dizi uzayı olsun. Her K indis cümlesi ve $x\in U$ dizisi için

$$x^{[K]}\in U$$

ise, $U$ dizi uzayına **kesit-kapalı dizi uzayı** denir.

$x=(x_k)$ dizisinin her $(x_{k_i})$ alt dizisi için $(x_{k_i})\in U$ ise, $U$ dizi uzayına **alt dizi-Kapalı (subsequence-closed) dizi uzayı** denir[16].

Örneğin, $s, m, c_0$, $\varphi$, ve $l_p$ uzayları kesit-kapalı dizi uzaylarıdır. $c$ ve $W^p$ uzayları alt dizi-kapalı dizi uzayları olup kesit-kapalı dizi uzayı değiller.

**Tanım 1.46:** $K=\{k_i\}$ sabit bir indis cümlesi, $A=(a_{nk})$ bir matris ve

$$d_{nk}=\begin{cases} a_{nk}, & k \in K \\ 0, & k \notin K \end{cases}$$

olmak üzere

$$A^{[K]}=(d_{nk})$$

biçiminde tanımlanan $A^{[K]}$ matrisine, A matrisinin **K-sütun kesiti** denir[16].

Aşağıda $k_i<k_{i+1}$ iken $IN$ nin sonlu veya sonsuz bir $\{k_i\}$ alt cümlesini bir indis cümlesi olarak düşünelim. $k\leq n$ iken bütün $k\in K$ ların cümlesini $K(\leq n)$ ile gösterelim.

$K=\{k_i\}$ bir indis cümlesi olsun.

$$\phi_j^{K_i}=\begin{cases} 1, & j \in K \text{ ise}, \\ 0, & j \notin K \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\phi^K=(\phi_j^K)$ dizisine, K cümlesinin **karekteristik dizisi** denir.

**Tanım 1.47:** Eğer $\phi^K$, $C_1$-toplanabilir ise,

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\phi_j^k$$

limitine K cümesinin asimptotik yoğunluğu denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir[17].

$K(\leq n)$ cümlesinin eleman sayısı $K(n)$ ile gösterilmek üzere, yani $K(n)=|K(\leq n)|=|\{k\leq n:\ k\in K\}|$,

$$\delta(K)=\lim_{n\to\infty}\frac{K(n)}{n}$$

biçiminde de tanımlanır. Buna bazen de **doğal yoğunluk** denir.

**Tanım 1.48:** $K=\{k_i\}$ bir indis cümlesi ve $A\in\tau^+$ olsun. $\phi^K$, A-toplanabilir, yani $A\phi^K\in c$ ise,

$$\lim_n A_n\phi^K=\lim_n\sum_{j=1}^{\infty}a_{nj}\phi_j^K$$

limitine $K$ cümlesinin A-yoğunluğu denir ve $\delta_A(K)$ ile gösterilir[18].

Böylece,

$$\delta_A(K)=\lim_n A_n\phi^K$$
$$=\lim_n\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\phi_k^K$$

$$= \lim_n \sum_{k\in K} a_{nk}\phi_k^K + \lim_n \sum_{k\notin K} a_{nk}\phi_k^K$$
$$= \lim_n \sum_{k\in K} a_{nk}\phi_k^K \qquad (k \notin K \text{ için } \phi_k^K = 0)$$
$$= \lim_n \sum_i a_{nk_i} \qquad (k \in K \text{ için } \phi_k^K = 1).$$

Bu son ifadede her $i\in IN$ için $k_i\in K$ olduğuna dikkat edilmelidir. Ayrıca, $B=(a_{nk_i})$ matrisi, A matrisinin K-sütun kesiti $A^{[K]}$ dan başka bir şey değildir. O halde K cümlesinin A-yoğunluğu $n\to\infty$ için $A^{[K]}$ matrisinin n-inci satırının bütün terimlerinin toplamının limitine eşittir.

**Örnek 1.4:** Sonlu her cümlenin asimptotik yoğunluğu ve A-yoğunluğu sıfırdır. Fakat bunun tersi doğru değildir.

$K=\{k_i\}$ sonlu indis cümlesi ve $|K| = m$ olsun.

$$\delta(K)= \lim_{n\to\infty} \frac{K(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = 0$$

olduğunu biliyoruz. (R1), (R2) şartları ve bu sonuç kullanılarak $\delta_A(K)=0$ bulunur. Özel olarak

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{k}{\frac{n(n+1)}{2}}, & 1\le k \le n \text{ ise,} \\ 0, & k>n \quad \text{ise,} \end{cases}$$

$A=(a_{nk})\in \tau^+$ matrisini aldığımızda

$$\delta_A(K)= \lim_{n\to\infty} \frac{m(m+1)}{n(n+1)} = 0$$

olduğu görülür.

Yalnız, $K=\{1^2,2^2,3^2,...\}$ cümlesi için $\delta(K)=0$ ve $\delta_A$ $(K)=0$ olmasına rağmen $K$ sonlu bir cümle değildir.

**Tanım 1.49:** $K\subset IN$ olmak üzere $\delta(K)=0$ olsun. Eğer $\varepsilon>0$ verildiğinde her $k\ge n_0$ ve her $k\notin K$ için $|x_k - x_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0\in IN$ varsa, $x=(x_k)$ dizisi $x_0$ a **hemen hemen yakınsaktır** denir[17].

$x=(x_k)$ bir dizi ve $y=(y_j)$, x in bir alt dizisi olsun. $K=\{j: y_j$, $y$ nin bir terimi$\}$ olsun. $\delta(K)=0$ olması durumunda $y=(y_j)$ dizisine **sıfır yoğunluklu bir**

**alt dizi** veya **ince alt dizi** denir. $\delta(K)\neq 0$ ise $y=(y_j)$ dizisine $x=(x_k)$ dizisinin bir **ince olmayan alt dizisi** denir.

**Tanım 1.50:** $x=(x_k)$ bir sayı dizisi olsun. $x$ in $x_0$ a yakınsayan ince olmayan bir alt dizisi varsa, $x_0$ sayısına $x$ dizisinin bir istatistiksel limit noktası denir[19].

$\Lambda_x$ ile, $x$ in istatistiksel limit noktalarının cümlesi,

$L_x$ ile, $x$ in adi limit noktalarının cümlesi

gösterilecektir. Buna göre, $x=(x_k)$

$$x_k=\begin{cases}1, & k \text{ bir kare,}\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

dizisi için $L_x=\{0,1\}$ ve $\Lambda_x=\{0\}$ olur.

# 2.BÖLÜM
# İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

## 2.1.Giriş

Reel sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı orjinal olarak ilk defa (Fast, 1951) tarafından tanımlandı. Daha sonraki yıllarda istatistiksel yakınsaklık kavramı farklı isimler altında incelenmiştir. (Buck, 1953) Fast' in tanımına özdeş bir tanım yaparak bunu 'hemen hemen yakınsaklık' olarak adlandırmıştır. (Schoenberg, 1959) Fast ile aynı tanımı vermekle beraber, bunu D- yakınsaklık olarak adlandırdı. İstatistiksel yakınsaklığı bir toplanabilme metodu olarak çalıştı ve istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özelliklerini verdi. Fast ve Schoenberg 'bir dizi $x_0$ sayısına istatistiksel yakınsak ise, bu taktirde $x_0$ a Cesaro toplanabilir' olduğunu gösterdiler. (Zygmund, 1979), trigonometrik serilerde 'istatistiksel yakınsaklık' kavramını Buck gibi 'hemen hemen yakınsaklık' olarak adlandırdı ve kuvvetli toplanabilirlik ile istatistiksel yakınsaklık arasında bir ilişki elde etti.

İstatistiksel yakınsak dizilerin sınıfı(uzayı) nın topolojik özelliklerini ilk olarak inceleyen (Salat, 1980), reel sayıların bütün sınırlı istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesinin, lineer normlu bir uzayın kapalı bir alt uzayı olduğunu, reel sayıların bütün sınırlı istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesinin lineer normlu bir cümlenin hiç bir yerinde yoğun olmadığını; reel sayıların bütün istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesinin, Frechet uzayında birinci Baire kategorisinin bir alt cümlesinde yoğun olduğunu gösterdi.

(Fridy, 1985) bir istatistiksel Cauchy dizi genişlemesini (Cauchy yakınsaklık kriterinin istatistiksel benzerini)-istatistiksel Cauchy dizi tanımını vererek, bunun istatistiksel yakınsaklığa denkliğini gösterdi. Hiç bir matris toplanabilme metodunun istatistiksel yakınsaklık metodunu içermediğini gösterdikten sonra istatistiksel yakınsaklık için kurulmuş Bazı Tauberian teoremlerinin ispatlarını verdi.(Maddox,1986) bir modülüse göre kuvvetli Cesaro toplanabilir dizilerin sınıfını, kuvvetli Cesaro toplanabilir tanımının bir uzantısı gibi verdi. Yine, (Maddox, 1989) istatistiksel yakınsaklık için bir Tauberian şartı olmak üzere, $a_n=O(c_n)$ bir dizi bağıntısı olması için gerek ve yeter şart verdi.

(Connor, 1988) kuvvetli p-Cesaro tolanabilme ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiyi inceledi. $st \cap l_\infty$ cümlesinin ya 'sınırlı istatistiksel yakınsak' ya da 'sınırlı kuvvetli p-Cesaro toplanabilme' ile eş anlamlı olarak gözönüne alınabileceğini gösterdi. Yine (Connor, 1989) Cesaro matrisi $C_1$ yerine negatif olmayan regüler keyfi bir A matris toplanabilme metodu alarak, (Maddox, 1986) un tanımını genişletti ve kuvvetli A-toplanabilirlik, A-İstatistiksel yakınsaklık ve A-istatistiksel Cauchy dizi tanımlarını vererek bunların arasındaki bazı temel bağıntıları verdi;Skalerlerin sınırlı dizileri ve herhangi bir modülüse göre kuvvetli A-toplanabilirliği ihtiva eden A-istatistiksel yakınsaklık için yukarıda verilen üç notasyonun denkliğini gösterdi.

Reel veya kompleks terimli dizilere sınırlanan istatistiksel yakınsaklığı (Maddox, 1988) herhangi bir Hausdorff lokal konveks topolojik vektör uzyındaki dizilere uyguladı;bir modülüs ile verilen kuvvetli toplanabilirlik terimleri ile istatistiksel yakınsaklığın bir benzerini verdi. Benzer şekilde (Kolk, 1988) istatistiksel yakınsaklığı normlu uzaylarda çalıştı. Maddox ' un çalışmasına bağlı olarak (Rath ve Tripathy, 1994) istatistiksel yakınsaklığı ve istatistiksel Cauchy dizilerini çalıştılar. Bu çalışmalarında (Connor, 1988) un 'ayrışım teoremi' ne benzer bir 'ayrışım teoremi' ni Hausdorff l,k,t,v,u, nda verdiler. Ayrıca, 'bir dizinin istatistiksel Cauchy olması için' bazı alternatif denklik şartları verdiler.

(Nuray ve Savaş, 1994) σ-istatiksel yakınsaklık ve A-invaryant istatistiksel yakınsaklık tanımlarını vererek bazı kapsam bağıntılarını elde ettiler.

(Connor, Fridy ve Kline, 1994) istatistiksel ön-Cauchy dizi tanımını vererek, istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizileri ile ilişkilerini incelediler. Ayrıca, istatistiksel yakınsaklığın bazı topolojik özelliklerini inceleyerek 'bir sınırlı istatistiksel ön-Cauchy dizisinin limit noktalarının cümlesi hiç bir yerde yoğun değilse, bu taktirde istatistiksel yakınsaktır.' olduğunu gösterdiler. son olarak, bir istatistiksel ön-Cauchy dizisinin istatistiksel yakınsak olması gerekmediğini gösterdiler.

Bu tez için esas teşkil eden (Kolk, 1991) un 'Banach uzaylarında istatistiksel yakınsaklık' adlı çalışmasıdır. Kolk, bu çalışmasında A-istatistiksel yakınsak ve A-istatistiksel Cauchy dizilerinin cümlelerinin çakıştığını gösterdi. A-istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli A-toplanabilirlik arasındaki ilişkileri inceledi.

## 2.2 Tanım ve Teoremler

**Tanım 2.1:** $x = (x_k) \in s$ dizisi verilsin. Eğer her ε>0 için

$$K_\varepsilon = \{k : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere $\delta(K_\varepsilon) = 0$ yani,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise, x dizisi $x_0$' a **istatistiksel yakınsaktır** denir.

Bütün istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi st ile, $x_0$=0 ise $st_0$ ile gösterilir.x dizisi $x_0$ a istatistiksel yakınsak ise,

$$st - \lim_k x_k = x_0$$

yazılır.[20].

Bu gösterim Schoenberg tarafından

$$D - \lim_k x_k = x_0$$

biçiminde kullandı ve buna D-Yakınsaklık denildi. Buck' un 'hemen hemen yakınsaklık' tanımı(Bak. Tanım 1.49) 'istatistiksel yakınsaklık' tanımından başka bir şey değildir.

**Tanım 2.2:** Bir $x = (x_k) \in s$ dizisi verilsin. Eğer her ε>0 için

$$K_{n(\varepsilon)} = \{k : |x_k - x_{n(\varepsilon)}| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere $\delta(K_{n(\varepsilon)}) = 0$ olacak şekilde bir n(ε) sayısı mevcut ise, x dizisine **istatistiksel Cauchy dizisi** denir.[21].

(Kolk, 1988) ve (Connor, 1989) yukarıdaki tanımlarda kullanılan asimptotik yoğunluk yerine A-yoğunluk alarak aşağıdaki tanımları verdiler.

**Tanım 2.3:** Bir $x = (x_k) \in s$ dizisi verilsin. Eğer her ε>0 için,

$$L_{\varepsilon}=\{k: |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere $\delta_A(L_\varepsilon)=0$, yani

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\phi_k^{L_\varepsilon} = 0$$

ise, $x$ dizisi $x_0$ a **A-istatistiksel yakınsaktır** denir.

Bütün A-istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi **st(A)** ile, $x_0$=0 ise, **st$_0$(A)** ile gösterilir. $x$ dizisi $x_0$ a A-istatistiksel yakınsak ise,

$$st(A)-\lim_k x_k = x_0$$

yazılır.

**Tanım 2.4:** Bir $x=(x_k) \in s$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon>0$ için,

$$L_{n(\varepsilon)}=\{ k : |x_k - x_{n(\varepsilon)}| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere $\delta_A(L_{n(\varepsilon)})=0$ olacak şekilde bir $n(\varepsilon)$ sayısı varsa, $x$ dizisine **A-istatistiksel Cauchy dizisi** denir.

**Tanım 2.5:** Bir $x=(x_k)$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n^2}\left|\{(j,k): |x_k - x_j| \geq \varepsilon, \ \ j,k \leq n\}\right| = 0$$

ise, x dizisine **istatistiksel ön-Cauchy dizisi** denir[7].

Yukarıdaki tanımlar bir $X$ Banach uzayında tanımlanmaları durumunda $|x_k - x_0|$ $|x_k - x_{n(\varepsilon)}|$, ve $|x_k - x_j|$ ifadeleri yerine $\|x_k - x_0\|$, $\|x_k - x_{n(\varepsilon)}\|$ ve $\|x_k - x_j\|$ yazılır. Bu durumda tanımlanan diziler sırasıyla; 'Banach istatistiksel yakınsak dizi', 'Banach istatistiksel Cauchy dizisi', 'Banach A-istatistiksel yakınsak dizi', 'Banach A-istatistiksel Cauchy dizisi' ve 'Banach istatistiksel ön-Cauchy dizisi' diye adlandırılabilir. Yine $st$, $st_0$, $st(A)$ ve $st_0(A)$ yerine sırasıyla $st(X)$, $st_0(X)$, $st(A,X)$ ve $st_0(A,X)$ yazılır.

(Maddox, 1988) bir $X$ Hausdorff l.k.t.v.u nda istatistiksel yakınsaklık tanımını yaparken $|x_k - x_0|$ ifadesi yerine, $q \in Q$ olmak üzere $q(x_k - x_0)$ ifadesini kullanmaktadır.

$c \subset st(A)$ olduğu açıktır.

**Lemma 2.1:** $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ dizileri için

$$st-\lim_k x_k = x_0, \ st-\lim_k y_k = y_0 \ \text{ ve } \ \alpha \in IR$$

olsun.

i) $st-\lim_k (x_k+y_k)= x_0+y_0$

ii) $st-\lim_k (\alpha . x_k)= \alpha . x_0$

iii) $st-\lim_k x_k = st-\lim_k y_k$ ise $x_0=y_0$ [20], [22].

Yakınsak her dizinin istatistiksel yakınsak ve A-istatistiksel yakınsak olduğunu biliyoruz. Şimdi bu durumlara örnekler verelim.

**Örnek 2.1:** $x=(x_k)=(\frac{k+1}{k})$ dizisini gözönüne alalım. Adi yakınsaklık anlamında $\lim_k x_k = 1$ olduğu açıktır. Şimdi, $st-\lim_k x_k = 1$ ve $st(A)-\lim_k x_k = 1$ olduğunu gösterelim.

$K=\{k: |x_k-1|\geq \varepsilon\}$ cümlesini teşkil etmek için ε=1/100 seçelim. Bu durumda

$$\left|\frac{k+1}{k}-1\right| \geq \frac{1}{100} \Rightarrow k\leq 100$$

bulunur. O halde $K=\{k: k\leq 100\}=\{1,2,\ldots,100\}$.

$$\phi^K=(1,1,\ldots,\underset{\substack{\downarrow \\ 100.\ \text{Terim}}}{1},0,0,\ldots)$$

$C_1\phi^K=(1,1,\ldots,1, 100/101, 100/102,\ldots, 100/n,\ldots\}$ $(n>100)$

$$\delta(K)=\lim_{n\to\infty}(C_1)_n\phi^K = \lim_{n\to\infty}\frac{100}{n}=0$$

O halde $st-\lim_k x_k = 1$ .

Cesaro matrisi $C_1$ yerine

$$a_{nk}=\begin{cases} \frac{2k-1}{n^2}, & 1\leq k\leq n \\ 0, & k>n \end{cases}$$

biçiminde tanımladığımız $A=(a_{nk})\in\tau^+$ matrisini alalım.

$A\phi^K=(1,1,\ldots,1, (100/101)^2, (100/102)^2,\ldots,(100/n)^2,\ldots)$ $(n>100)$

$$\delta_A(K)=\lim_{n\to\infty} A_n\phi^K = \lim_{n\to\infty}(\frac{100}{n})^2=0$$

O halde $st(A)-\lim_k x_k = 1$.

**Örnek 2.2:** $x_k = \begin{cases} 1, & k \text{ bir kare ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

olmak üzere $x=(x_k)$ dizisini gözönüne alalım. $K=\{k: x_k \neq 0\} = \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\}$, $K(n) = |\{k \leq n: k \in K\}|$ ise, $K(n) \leq \sqrt{n}$ olduğu açıktır.

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

olduğundan $st - \lim_k x_k = 0$.

Cesaro matrisi $C_1$ yerine

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{2k}{n^2}, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

biçiminde tanımladığımız $A=(a_{nk}) \in \tau^+$ matrisini alalım.

$$A_n \phi^K = \begin{cases} \dfrac{t(t+1)(2t+1)}{3n^2}, & n \text{ bir kare}, t = \sqrt{n} \\ \dfrac{t(t+1)(2t+1)}{3n^2}, & n \text{ kare değil ve } t \in IN, \\ & t^2 < n \text{ olan en büyük sayı} \end{cases}$$

$$\delta_A(K) = \lim_{n\to\infty} A_n \phi^K = 0$$

olduğundan $st(A) - \lim_k x_k = 0$.

$x$ dizisi hem istatistiksel yakınsak hem de A- istatistiksel yakınsak olmasına rağmen, yakınsak olmayan bir dizidir.

Benzer şekilde $a \in IR$ sabit olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k \text{ bir kare} \\ a, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$x=(x_k)$ dizisi, $st - \lim_k x_k = a$, $st(A) - \lim_k x_k = a$ olmasına rağmen, yakınsak olmayan bir dizidir. Aynı zamanda sınırlı da değildir. O halde istatistiksel yakınsak ve A-istatistiksel yakınsak diziler sınırlı olmak zorunda değildir.

$IR^n = \{x: x=(x_1, x_2, \ldots x_n), \ x_i \in IR\}$ cümlesinin bileşen bileşen toplama, skalerle çarpma ve

$$\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}$$

normuna göre bir reel Banach uzayı olduğunu biliyoruz(Bak. [2] Teorem 3.40).

Şimdi $n$ sonsuz bir sayı olmak üzere $IR^n$ Banach uzayından alınan bir dizinin istatistisel ve A-istatistiksel yakınsaklığına örnek verelim.

**Örnek 2.3:** $x_k^n = \frac{n}{(n+1)^k}$, $(x_k^n) = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_k^n, \ldots)$ olmak üzere $x = ((x_k^n)) = ((x_k^1), (x_k^2), (x_k^3), \ldots, (x_k^n), \ldots)$ dizisini alalım. $x$ vektör dizisi $x_0 = (1,0,0,\ldots)$ noktasına yakınsayan bir dizidir.

$$\|(x_k^n) - (y_k^m)\| = (\sum_{K01}^{\infty} |x_k^n - x_k^m|^2)^{1/2}$$

normuna göre ε=1/100 seçerek

$$L = \{n: \|(x_k^n) - x_0\| \geq \varepsilon\}$$

cümlesini belirleyelim. $\|(x_k^n) - x_0\| \geq \frac{1}{100}$ den gerekli işlemler sonucunda $-144 \leq n \leq 138$ bulunur. $n \in IN$ olduğundan $L = \{1,2,\ldots,138\}$ olur.

$$\delta(L) = \lim_{n\to\infty} \frac{138}{n} = 0$$

olduğundan $st - \lim_n (x_k^n) = x_0$ dır.

Her $A \in \tau^+$ için $\delta_A(L) = 0$ olduğunu biliyoruz.(Bak. Örnek 1.4.). Ohalde $st(A)\text{-}\lim_k (x_k^n) = x_0$ dır.

**Örnek 2.4:** $x_k^n = \begin{cases} 1, & k=(n+m)^2, m=0,1,2,\ldots \text{ise}, \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

olmak üzere $x = ((x_k^n))$ vektör dizisi de istatistiksel yakınsak olup, yakınsak olmayan vektör dizisine bir örnektir. $st - \lim_n (x_k^n) = \theta$ $(\theta = (0,0,0,\ldots))$

Reel terimli bir dizinin istatistiksel yakınsak olması için, aşağıdaki Lemmada bir 'gerek ve yeter şart' verilmektedir. Bir sonraki bölümde, terimleri bir Banach uzayından alınan bir dizi için, aşağıdaki lemmada ufak bir değişiklik yapılarak aynı işlemler uygulanacak ve A-istatistiksel yakınsak ile A-istatistiksel Cauchy dizi cümlelerinin çakıştığını göstermek için önemli bir lemma verilecek.

**Lemma 2.2:** $x = (x_k)$ reel dizi ve $x_0 \in IR$ olsun.

$$st-\lim_k x_k = x_0$$

olması için gerek ve yeter şart $\delta(K)=1$ ve

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0$$

olacak şekilde bir $K=\{k_1<k_2<...<k_n<...\}\subseteq IN$ cümlesinin mevcut olmasıdır.

**İspat:** Eğer verilen özelliklerde bir cümle mevcut ve $\varepsilon>0$ verilmişse, bu taktirde öyle bir $n_0\in IN$ seçebiliriz ki her $n>n_0$ için,

$$\left|x_{k_n}-x_0\right|<\varepsilon \qquad (2.1)$$

elde ederiz.

$$A_\varepsilon=\{n\in IN:\ \left|x_n-x_0\right|\geq\varepsilon\}$$

alalım. Bu taktirde *(2.1)* den

$$A_\varepsilon\subset IN-\{k_{n_0+1},k_{n_0+2},...\}$$

elde edilir. Sağ trafın asimptotik yoğunluğu sıfır olduğundan $\delta(A_\varepsilon)=0$ dır. O halde,

$$st-\lim_k x_k = x_0$$

dır.

Tersine $st-\lim_k x_k = x_0$ olsun ve

$$K_j=\{n\in IN: \left|x_n-x_0\right|<\frac{1}{j}\} \qquad (j=1,2,...)$$

alalım. Bu taktirde Tanım 2.1. e göre $\delta(K_j)=1$ $(j=1,2,...)$ elde edilir. $K_j$ nin tanımından

$$K_1\supset K_2\supset...\supset K_j\supset K_{j+1}\supset... \qquad (2.2)$$

ve

$$\delta(K_j)=1 \qquad (j=1,2,...) \qquad (2.3)$$

olduğu aşikardır.

Keyfi bir $v_1\in K_1$ sayısı seçelim. *(2.3)* e göre $v_2>v_1$ olacak şekilde bir $v_2\in K_2$ sayısı vardır ki her bir $n\geq v_2$ için $K_2(n)/n > 1/2$ dır. Yine *(2.3)* e göre $v_3>v_2$ olacak şekilde öyle bir $v_3\in K_3$ vardır ki, her bir $n\geq v_3$ için $K_3(n)/n > 2/3$ dır. Benzer şekilde devam ederek $v_j\in K_j$ $(j=1,2,...)$ ve her bir $n\geq v_j$ $(j=1,2,...)$ için

$$K_j(n)/n > j-1/j \qquad (2.4)$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların bir

$$v_1<v_2<\ldots<v_j<v_{j+1}<\ldots$$

dizisini tümevarım ile oluşturabiliriz.

Aşaşğıdaki gibi bir $K$ cümlesini inşa edelim: Her bir doğal sayı $(1,v_1)$ aralığı $K$ ya aittir. Ayrıca, herhangi bir doğal sayı $(p_j,p_{j+1})$ aralığı $K$ ya ait olması için gerek ve yeter şart $K_j$ $(j=1,2,\ldots)$ ye ait olmasıdır.

*(2.2)* ve *(2.3)* e göre her bir $n$, $p_j\leq n\leq p_{j+1}$ için

$$\frac{K(n)}{n}\geq\frac{K_j(n)}{n}>\frac{j-1}{j}$$

elde edilir. Bundan dolayı $\delta(K)=1$ olduğu aşikardır.

$\varepsilon>0$ ve $1/j<\varepsilon$ olacak şekilde bir $j$ seçelim. $n\geq v_1$, $n\in K$ olsun. Bu taktirde bir $l\geq j$, $p_j\leq n\leq p_{j+1}$ sayısı mevcuttur. Fakat bu taktirde $K$ nın kuruluş tanımından $n\in K$ olur. Buradan

$$|x_n-x_0|<\frac{1}{l}\leq\frac{1}{j}<$$

bulunur. Böylece, her bir $n\in K$, $n\geq v_1$ için $|x_n-x_0|<\varepsilon$ , yani $\lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ (k\in K)}} x_k=x_0$ bulunur (Salat, 1980).

$A\subseteq IN$ olmak üzere $A'=IN/A$ olsun. $\delta(A')=1-\delta(A)$ olduğunu biliyoruz. O halde, $\delta(A')=0$ ise, $\delta(A)=1$ olduğu açıktır. Örneğin, $A=\{\ a\in IN : a$ bir kare değil$\}$ olsun. $A'=\{1^2,2^2,3^2,\ldots\}$ ve $\delta(A')=0$ olduğundan $\delta(A)=1$.

Ayrıca $B\subseteq A$ ise $\delta(B)\leq\delta(A)$ olduğunu ve sonlu her $K$ cümlesi için $\delta(K)=0$ olduğunu biliyoruz. $A$ sonsuz bir cümle, $B\subseteq A$ olsun. $A/B$ sonlu ve $\delta(A)=1$ ise, $0=\delta(A/B)=\delta(A)-\delta(B)$ olduğundan $\delta(B)=1$.

Şimdi, $A\subseteq IN$ olmak üzere '$A$ boyunca Cauchy dizisi' ile bağlantılı olarak bir dizinin 'istatistiksel yakınsak' olması için bir 'gerek ve yeter şart' verilecek.

**Önerme 2.1:** Bir $x=(x_k)\in s$ dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\delta(A)=1$ olacak şekilde bir $A\subset IN$ cümlesinin ve her $\varepsilon>0$ için $A/B$ sonlu ve $BxB=\{(j,k): |x_k-x_j|<\varepsilon\}$ olacak şekilde bir $B\subset A$ cümlesinin var olmasıdır. [7].

Yukarıdaki sonuca göre, Önerme 2.1. de tanımlanan $B$ cümlesi için $\delta(B)=1$. O halde 'hemen hemen bütün $j$ ve $k$ ları $\delta(A)=1$ olan bir $A\subset IN$ cümlesinden seçtiğimiz taktirde, göstermiş oluruz ki, 'bir $x$ dizisi istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart hemen hemen bütün $j$ ve $k$ lar için $\left|x_k - x_j\right|$ nın keyfi küçüklükte yapılabilmesidir'.

Aşağıda 'istatistiksel yakınsaklık' ile ' istatistiksel ön-Cauchy dizileri' arasındaki ilişkileri veren sonuçları ispatsız olarak vereceğiz.

**Teorem 2.1:** $x$ bir sınırlı istatistiksel ön-Cauchy dizisi olsun. Eğer $x$ in limit noktalarının cümlesi $\Lambda_x$, hiç bir yerde yoğun değilse, bu taktirde $x$ istatistiksel yakınsaktır[7].

**Sonuç 2.1:** 0 ve 1 lerin bir istatistiksel ön-Cauchy dizisi istatistiksel yakınsaktır[7].

**Teorem 2.2:** $x=(x_p)$ istatistiksel ön-Cauchy olduğunu kabul edelim. Eğer $x$ $\lambda$ ya yakınsak olan bir $(x_{p_k})$ alt dizisine sahip ve

$$\liminf_n \frac{1}{n}\left|\{p_k \leq n : k \in IN\}\right| = 0$$

ise bu taktirde $st-\lim_p x_p = \lambda$ dır[7].

**Örnek 2.5:** İstatistiksel yakınsak olmayan bir dizi, istatistiksel ön-Cauchy dizi olabilir.

Gerçekten, $m,k \in IN$, $(m-1)! < k \leq m!$ olmak üzere $x_k = \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{p}$ biçiminde tanımlanan $x=(x_k)$ dizisi isattistiksel yakınsak olmamakla birlikte, bir istatistiksel ön-Cauchy dizisidir[7].

$m_0 = st \cap m$ olmak üzere $m$ ve $m_0$ arasındaki ilişkileri (Salat, 1980) aşağıdaki iki teoremle ifade edip ispatladı. Burada ispatlarını vermiyoruz.

**Teorem 2.3:** $m_0$ cümlesi $m$ cümlesinin kapalı bir lineer alt uzayıdır.

**Teorem 2.4:** $m_0$ cümlesi $m$ cümlesinin hiç bir yerinde yoğun değildir.

Pek çok yakınsaklık teorisinde, limit değeri kullanılmaksızın yakınsaklığı sağladığını göstermek için bir kritere ihtiyaç duyulur. Bu amaçla (Fridy, 1985) istatistiksel yakınsaklık tanımının ve kendi verdiği istatistiksel Cauchy tanımının denkliğini göstermek için üçüncü bir denk özellik kullanarak aşağıdaki teoremi verip ispatladı.

**Teorem 2.5:** Aşağıdaki ifadeler denktir:

i) $x$ istatistiksel yakınsak bir dizidir.

ii) $x$ bir istatistiksel Cauchy dizisidir.

iii) h.h.k. için $x_k=y_k$ olacak şekilde yakınsak bir y dizisi vardır.

**İspat:** *(i)⇒(ii);* Bunu göstermek için 'yakınsak bir dizi Cauchy dizisidir.' teoreminin isaptına benzer bir uyarlama yapılacaktır.

$st-\lim_k x_k = x_0$ olduğunu kabul edelim ve ε>0 alalım. Bu taktirde h.h.k. için $|x_k - x_0| < \varepsilon/2$ ve h.h.m. için $|x_m - x_0| < \varepsilon/2$ olacak şekilde m seçilirse,

$$\begin{aligned} |x_k - x_m| &= |x_k - x_0 + x_0 - x_m| \\ &\le |x_k - x_0| + |x_m - x_0| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. O halde $x$ bir istatistiksel Cauchy dizisidir.

*(ii)⇒(iii);* Şimdi (ii) nin doğru olduğunu kabul edelim. $I=[x_p-1, x_p+1]$ aralığı h.h.k. için $x_k$ ları içerecek şekilde bir $p$ ve benzer şekilde $I'=[x_r -1/2, x_r +1/2]$ aralığı h.h.k. ları içerecek şekilde bir $r$ seçelim.

İddia ediyoruz ki,

$$I_1=I\cap I'$$

aralığı h.h.k. için $x_k$ ları içerir. Bunun için

$$\begin{aligned} \left|\{k \le n: x_k \notin I \cap I^1\}\right| &= \left|\{k \le n: x_k \notin I\} \cup \{k \le n: x_k \notin I^1\}\right| \\ &\le \left|\{k \le n: x_k \notin I\}\right| + \left|\{k \le n: x_k \notin I^1\}\right| \end{aligned}$$

olup

$$\lim_n \frac{1}{n}\left|\{k \le n:\ x_k \notin I\}\right| + \lim_n \frac{1}{n}\left|\{k \le n: x_k \notin I^1\}\right| = 0$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n}\left|\{k \le n: x_k \notin I \cap I^1\}\right| = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $I_1$, h.h.k. için $x_k$ ları içeren ve uzunluğu 1 den küçük veya eşit olan kapalı bir aralıktır. Şimdi,

$$I''=[x_{p(2)}-1/4,\ x_{p(2)}+1/4]$$

arlığı h.h.k. için $x_k$ ları içerecek şekilde bir p(2) seçelim. Yukarıdakine benzer şekilde

$$I_2=I_1\cap I''$$

aralığı için $x_k$ ları içerir ve uzunluğu 1/2 den küçük veya eşit olan kapalı aralıktır. Aynı düşünce ile devam edildiğinde her m için $I_m \supseteq I_{m+1}$ olacak şekilde kapalı aralıkların bir $\{I_m\}^{\infty}_{m=1}$ dizisini oluştururuz. Burada $I_m$ uzunluğu $1/2^{m-1}$ den büyük değildir ve h.h.k. için $x_k \in I_m$ dir. İçiçe aralıklar teoreminden bir $\lambda$ sayısı vardır ve bu $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$ ye eşittir. h.h.k. için $x_k \in I_m$ gerçeğini kullanarak

$$\frac{1}{n}\left|\{k \le n: x_k \notin \mathrm{I_m}\}\right| < \frac{1}{m} \qquad n > T_m \text{ ise} \tag{2.5}$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir $\{T_m\}^{\infty}_{m=1}$ dizisini seçebiliriz. Şimdi

$$k>T_1 \text{ ve } T_m<k<T_{m+1} \text{ ise, } x_k \notin I_m$$

olacak şekilde $x$ in bütün $x_k$ terimlerini içeren bir $z$ alt dizisini tanımlayalım. Ayrıca, $y$ dizisini de

$$y_k=\begin{cases}\lambda, & x_k \ z \text{ nin bir terimi ise}\\ x_k, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\lim_k y_k = \lambda$ dır. Bunun göstermek için

$$\varepsilon>1/m>0 \quad \text{ve} \quad k>T_m$$

ise, bu durumda ya $x_k$, $z$ nin bir terimidir ki bunun anlamı $y_k=\lambda$ dır, ya da $y_k=x_k \in I_m$ ve $|y_k-\lambda| \le |I_m| \le \frac{1}{2^{m-1}}$ dır. Şimdi, h.h.k. için $x_k=y_k$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu göstermek için

$$T_m<n<T_{m+1}$$

ise, bu taktirde $\{k \le n: y_k \ne x_k\} \subseteq \{k \le n: x_k \notin I_m\}$ yazılır ve (2.5) den

$$\frac{1}{n}\left|\{k \le n: y_k \ne x_k\}\right| \le \frac{1}{n}\left|\{k \le n: x_k \notin I_m\}\right| < \frac{1}{m}$$

olur. Bu durumda $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k \leq n: y_k \neq x_k\}\right| = 0$$

elde edilir ve h.h.k. için $x_k=y_k$ olur ki bu yakınsak bir $y$ dizisinin varlığını gösterir.

*(iii)⇒(i)* : Son olarak (iii) nün sağlandığını kabul edelim. h.h.k. için $x_k=y_k$ olacak şekilde bir $y$ dizisi mevcut ve $\lim_k y_k = y_0$ diyelim. ε>0 olsun. Her $n$ için

$$\{k \leq n: |x_k - y_0| \geq \varepsilon\} \subseteq \{k \leq n: x_k \neq y_k\} \cup \{k \leq n: |y_k - y_0| \geq \varepsilon\}$$

olup $\lim_k y_k = y_0$ olduğundan son cümle sabit sayıda tamsayı içerir, buna $l=l(\varepsilon)$ diyelim. Böylece h.h.k. için $x_k=y_k$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k \leq n: |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}\right| \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k \leq n: x_k \neq y_k\}\right| + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

bulunur. Buradan h.h.k. için

$$|x_k - x_0| < \varepsilon$$

elde edilir ve böylece (i) sağlanır (Fridy, 1985).

Bu teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

**Sonuç 2.2:** Eğer $x$, $st-\lim_k x_k = x_0$ olacak şekilde bir dizi ise, bu taktirde $x$ in $\lim_k y_k = x_0$ olacak şekilde bir $y$ alt dizisi vardır[21].

Eğer $x$ yakınsak bir dizi ve $\lim_k x_k = x_0$ ise, $x$ in her $y$ alt dizisi için $\lim_k y_k = x_0$ ve $st-\lim_k x_k = x_0$ olduğunu biliyoruz.

$x$ yakınsak bir dizi ise, Sonuç 2.2 açıktır. Yakınsak olmayan fakat istatistiksel yakınsak olan bir dizi için Sonuç 2.2 ye bir örnek verelim.

**Örnek 2.6:** $x_k = \begin{cases} \dfrac{k}{k+\sqrt{k}}, & k \text{ bir kare ve çift ise} \\ \dfrac{k+\sqrt{k}}{2k}, & k \text{ bir kare ve tek ise} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

olacak şekilde bir $x=(x_k)$ dizisini tanımlayalım. Burada $x$ yakınsak olmayan fakat $st-\lim_k x_k = 1$ olan bir dizidir. $k(t)=(2t)^2$ ve $y_t=x_{k(t)}$ olacak şekilde $x$ in $y=(y_t)$ alt dizisi için $\lim_t y_t = 1$ olduğu açıktır.

Aşağıda kuvvetli toplanabilirlik ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz. Göreceğiz ki, isttistiksel yakınsaklık *W(f)* metodundan daha zayıf değildir.

**Teorem 2.6:** *f* herhangi bir modülüs ve $x=(x_k)\in s$ olsun.

$$(W(f)-\lim_k x_k = x_0)\Rightarrow(st-\lim_k x_k = x_0)$$

dır[6].

**Teorem 2.7:** $st=W(f)$ olması için gerek ve yeter şart *f* nin sınırlı olmasıdır[6].

Yukarıdaki iki teoremin ispatı aşağıdaki teoremin ispatına benzer olduğu için aşağıdaki teoremi ispatı ile birlikte veriyoruz.

**Teorem 2.8:** $p\in IR$, $0<p<\infty$ ve $x=(x_k)\in s$ olsun.

i) $(W^p-\lim_k x_k = x_0)\Rightarrow(st-\lim_k x_k = x_0)$

ii) ($x$ sınırlı ve $st-\lim_k x_k = x_0)\Rightarrow(W^p-\lim_k x_k = x_0)$

**İspat:** i) $\varepsilon>0$ için $|x_k-x_0|\geq\varepsilon$ ise $|x_k-x_0|^p\geq\varepsilon^p$ dır. Ayrıca her $n$ için $\left|\{k\leq n:|x_k-x_0|\geq\varepsilon\}\right|\leq n$ dır. O halde,

$$|x_k-x_0|^p\geq\varepsilon^p$$

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_0|^p\geq n.\varepsilon^p$$

$$\geq\left|\{k\leq n:|x_k-x_0|\geq\varepsilon\}\right|\varepsilon^p$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_0|^p\geq\frac{1}{n}\left|\{k\leq n:|x_k-x_0|\geq\varepsilon\}\right|\varepsilon^p$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_0|^p\geq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\leq n:|x_k-x_0|\geq\varepsilon\}\right|\varepsilon^p$$

olur. Eğer $W^p-\lim_k x_k = x_0$ ise, eşitsizliğin sol tarafı sıfır olur. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\leq n:|x_k-x_0|\geq\varepsilon\}\right|=0$$

olur ki, bunun anlamı $st-\lim_k x_k = x_0$ demektir.

ii) Kabul edelim ki, $x$ sınırlı ve $st-\lim_k x_k = x_0$ olsun. $K=\|x\|_\infty+|x_0|$ diyelim ve $\varepsilon>0$ verilsin. Her $n>N_\varepsilon$ için

$$L_n=\{k\leq n:\ |x_k-x_0|\geq(\varepsilon/2)^{\frac{1}{p}}\}$$

olmak üzere

$$\frac{1}{n}|L_n| < \frac{\varepsilon}{2.K^p}$$

olacak şekilde bir $N_\varepsilon$ sayısını seçelim.

$x$ dizisi sınırlı olduğundan

$$|x_k - x_0| \leq \|x_k - x_0\|_\infty \leq \|x\|_\infty + |x_0| = K$$

olur. O halde her $k$ için

$$|x_k - x_0|^p \leq K^p$$

dır. Şimdi $n>N_\varepsilon$ için

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k - x_0|^p = \sum_{k\in L_n}|x_k - x_0|^p + \sum_{\substack{k\notin L_n \\ k\leq n}}|x_k - x_0|^p$$

$$\leq \frac{n.\varepsilon}{2.K^p}.K^p + \frac{n.\varepsilon}{2} = n.\varepsilon$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k - x_0|^p \leq \varepsilon$$

bulunur.Bu son durum $W^p - \lim_k x_k = x_0$ olduğunu göstermektedir(Connor, 1988).

Bu teoreme göre aşağıdaki sonucu verebiliriz.

**Sonuç 2.3:** $W^p \subset st$ ve $W^p \cap l_\infty = st \cap l_\infty$ dır.

**Sonuç 2.4:** $p,q \in IR$, $0\leq p<q<\infty$ olsun. Bu taktirde $W^q \subseteq W^p$ *ve* $W^p \cap l_\infty = W^q \cap l_\infty$ dır[23].

Esasında bu sonuç daha önce (Kuttner, 1946) ve (Maddox,1967,1974) tarafından verilmiştir. Teorem 2.8 bu sonuçları p=0, q>0 durumuna genelleştirir.

Teorem 2.6, 2.7 de $f(t)=t$ ve Sonuç 2.3 de $p$=1 alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 2.5:** $W \subset st$ *ve* $W \cap l_\infty = st \cap l_\infty$ dır.

Yine Teorem 2.6 ve 2.7 de Cesaro matrisi $C_1$ yerine herhengi bir $A \in \tau^+$ matrisi alındığı taktirde aşağıdaki teoremi elde ederiz.

**Torem 2.9:** $A \in \tau^+$, f bir modülüs ve $x=(x_k) \in s$ olsun.

i) $(W(A,f) - \lim_k x_k = x_0) \Rightarrow (st(A) - \lim_k x_k = x_0)$

ii) ($x$ sınırlı ve $st(A) - \lim_k x_k = x_0) \Rightarrow (W(A,f) - \lim_k x_k = x_0)$[11].

**Sonuç 2.6:** Eğer $x=(x_k)\in s$ için

$$W(A,f)\text{-}\lim_k x_k = x_0$$

ise, bu taktirde $\lim_k y_k = x_0$ olacak şekilde $x$ in bir $y$ alt dizisi vardır[11].

Bu sonuç, Sonuç 2.2 ile benzerliği vardır.

Teorem 2.9 ve Sonuç 2.6 dan $f(t)=t$ olmak üzere $x=(x_k)\in s$ için

$$(st-\lim_k x_k = x_0 \text{ ve } x=O(n)) \Rightarrow (W(A)-\lim_k x_k = x_0)$$

sonucu tahmin edilebilir. Oysa

$$x_k=\begin{cases}\sqrt{k}, & \text{k bir kare}\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ile tanımlanan $x=(x_k)$ dizisi, $x=o(n)$ ve $st\text{-}\lim_k x_k = 0$ olmasına rağmen;

$L=\{k\in IN\text{: } k \text{ bir kare}\}$ ve özel olarak

$$a_{nk}=\begin{cases}\dfrac{k}{\dfrac{n(n+1)}{2}}, & 1\le k\le n\\ 0, & k>0\end{cases}$$

$A=(a_{nk})$ matrisini alırsak

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk}|x_k-0| = \sum_{\substack{k\in L\\ k\le n}} a_{nk}|x_k| + \sum_{\substack{k\notin L\\ k\le n}} a_{nk}|x_k|$$

$$=\sum_{\substack{k\notin L\\ k\le n}} a_{nk}|x_k|$$

$$=a_{n1}.1+a_{n4}.2+a_{n9}.3+\ldots+a_{nt^2}.t \quad (t^2\le n)$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}(1^3+2^3+3^3+\ldots+t^3)$$

$$=\frac{t^2(t+1)^2}{2n(n+1)} \le \frac{n+2\sqrt{n}+1}{2(n+1)}$$

olur ve

$$0<\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{nk}|x_k-0| \le \frac{1}{2}$$

olur ki, bu dizisinin 0 a kuvvetli A-toplanabilir olmadığını gösterir.

Aşağıdaki önerme Teorem 2.9(i) a bir kısmi karşıttır. Dizinin $x_0$ a istatistiksel yakınsak olmasını mecbur kılar.

**Önerme 2.2:** $x\in s$, $x=O(\sqrt{n})$ ve her ε>0 için

(*) $$\lim_{n}\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\{k\le n:|x_k-x_0|\ge\varepsilon\}\right|=0$$

olsun. Bu taktirde $W\text{-}\lim_{k} x_k=x_0$ dır.

**İspat:** Her $n$ için $|x_n-x_0|\le M.\sqrt{n}$ ise, bu taktirde her ε>0 için

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_0|\le\varepsilon+M.\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\{k\le n:|x_k-x_0|\ge\varepsilon\}\right|$$

dır ve (*) dan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_0|\le\varepsilon$$

bulunur. Bu da $W\text{-}\lim_{k} x_k=x_0$ olduğunu gösterir(Connor, 1989).

İstatistiksel yakınsaklıkla ilgili literatürde, aşağıdaki teoremin benzeri, fakat özdeş olmayan versiyonları sıkça kullanılmıştır ve (Salat, 1980), (Fridy, 1985) ve (Connor, 1985) tarafından bağımsız olarak çalışılmıştır. Teorem 2.8 bunları kuvvetli p-Cesaro toplanabilirliğe genişletir(Bak. Teorem 2.5).

**Teorem 2.10(Ayrışım Teoremi):** Eğer $x\in s$, $x_0$ a kuvvetli p-Cesaro toplanabilir veya istatistiksel yakınsak ise, bu taktirde $x=y+z$ ve

$$\lim_{n}\frac{1}{n}\left|\{k\le n:z_k\ne 0\}\right|=0$$

olacak şekilde yakınsak bir $y$ dizisi ve sıfıra istatistiksel yakınsak bir $z$ dizisi vardır ki, $y$ $x_0$ a yakınsar. Bundan başka eğer $x$ sınırlı ise, bu taktirde $z$ de sınırlıdır ve

$$\|z\|_\infty\le\|x\|_\infty+|x_0|$$

**İspat:** Teorem 2.8 dan $W^p\text{-}\lim_{k} x_k=x_0$ ise, $st\text{-}\lim_{k} x_k=x_0$ olduğunu biliyoruz.

Şimdi özel olarak $N_0=0$ ve $n>N_j$ için

$$\frac{1}{n}\left|\{k\le n:|x_k-x_0|\ge\frac{1}{j}\}\right|<\frac{1}{j}$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların $N_1<N_2<\dots$ artan bir dizi seçilsin. Bu taktirde $y$ ve $z$ aşağıdaki gibi tanımlanabilir: $j\ge 1$ ve $N_j<k\le N_{j+1}$ olsun.

$$|x_k-x_0|<\frac{1}{j}\quad \text{ise}\qquad \begin{cases} y_k=x_k\\ z_k=0\end{cases}$$

$$|x_k - x_0| \geq \frac{1}{j} \text{ ise} \qquad \begin{cases} y_k = x_0 \\ z_k = x_k - x_0 \end{cases}$$

biçiminde seçelim. Her iki durumda $x=y+z$ olduğu açıktır. $x$ sınırlı ise

$$\|z\|_\infty \leq \|x\|_\infty + |x_0|$$

olacağı açıktır. Şimdi iddia ediyoruz ki,

$$\lim_k y_k = x_0$$

dır. $\in>0$ ve $\in>1/j$ olacak şekilde seçelim. $k>N_j$ için $|x_k - x_0| < \frac{1}{j}$ ise, bu durumda

$$|y_k - y_0| = |x_k - x_0| < \varepsilon$$

olur ve $|x_k - x_0| \geq \frac{1}{j}$ ise, bu durumda

$$|y_k - y_0| = |x_k - x_0| = 0$$

olur ve buradan $|y_k - x_0| < \varepsilon$ elde edilir. ε keyfi olduğundan iddiamız doğrudur.

Şimdi iddia ediyoruz ki, $z$ istatistiksel sıfır dizisidir. Yani, $st\text{-}\lim_k z_k = 0$.

İddiamızı ispatlamak için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : z_k \neq 0\}| = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bu iddia, herhangi bir $n$ doğal sayısı ve ε>0 için

$$|\{k \leq n : z_k \neq 0\}| \geq |\{k \leq n : |z_k| \geq \varepsilon\}|$$

ifadesinden çıkar.

Şimdi gösterelim ki, eğer δ>0 ve $1/j < \delta$ olacak şekilde bir $j \in IN$ var ise, bu taktirde her $n>N_j$ için

$$|\{k \leq n : z_k \neq 0\}| < \delta$$

olduğunu gösterir. Eğer $N_j<k\leq N_{j+1}$ ise, bu taktirde $|x_k - x_0| \geq \frac{1}{j}$ olduğundan $z_k \neq 0$ elde edilir. Eğer $N_l<n\leq N_{l+1}$ ise, bu taktirde

$$\left|\left\{k \leq n : z_k \neq 0\right\}\right| \leq \left|\left\{k \leq n : |x_k - x_0| > \frac{1}{l}\right\}\right|$$

olduğu çıkar. Netice olarak, eğer $N_l<n<N_{l+1}$ ve $l>j$ ise, bu taktirde

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : z_k \neq 0\}| \leq \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |x_k - x_0| > \frac{1}{l}\}\right| < \frac{1}{l} < \frac{1}{j} < \delta$$

olur ki, bu iddianın doğruluğunu gösterir(Connor, 1988).

**Sonuç 2.7:** $x=(x_k)\in s$ olsun. Eğer $x$ dizisi

$$W^p\text{-}\lim_k x_k = x_0 \quad \text{veya} \quad st\text{-}\lim_k x_k = x_0$$

ise, bu taktirde $\lim_k y_k = x_0$ olacak şekilde $x$ in bir y alt dizisi vardır[23].

Teorem 2.8 dan $W^p\text{-}\lim_k x_k = x_0$ ise $st\text{-}\lim_k x_k = x_0$ olduğunu biliyoruz. O halde bu sonuç, Sonuç2.2 ile aynı anlamdadır. Ayrıca Sonuç 2.6 ile de bir bağlantısı vardır.

Yukarıdaki sonuç, sınırlı Cesaro toplanabilir fakat istatistiksel yakınsak olmayan dizilerin varlığını göstermede kullanılabilir. Örneğin, (0,1,0,1,0,...) dizisi 1/2 ye Cesaro toplanabilirdir, fakat 1/2 ye yakınsayan herhangi bir alt diziye sahip değildir.

T6eorem 2.9 dan şu iddia ortaya çıkar:

İstatistiksel yakınsak diziler h.h.k. için yakınsaktır[23].

Şimdi Sonuç 2.7 nin kısmen tersi olan aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

**Önerme 2.3:** $x\in s$ olsun. Eğer

$$\liminf_k x_n = x_0 \quad \text{ya da } W^p - \lim_k x_k = x_0$$

ise, bu taktirde $st\text{-}\lim_k x_k = x_0$ dır[23].

Aşağıdaki teorem istatistiksel yakınsak bir dizi hangi şart ile yakınsak olduğunu gösterir. Ayrıca $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$ anlamındadır.

**Teorem 2.11:** Eğer $x=(x_k)\in s$

$$st\text{-}\lim_k x_k = x_0 \quad ve \quad \Delta x_k = o(1/k)$$

olacak şekilde bir dizi ise, bu taktirde

$$\lim_k x_k = x_0$$

olur[21].

Aşağıdaki sonuç gösteriyor ki, yavaş salınımlı dizi, herhangi bir $W(f)$ metodu için bir Tauberian şartıdır ve istatistiksel yakınsaklık için de durum budur.

**Teorem 2.12:** $f$ herhangi bir modülüs olsun. Eğer $W(f)\text{-}\lim_k x_k = x_0$ $ve$ $x=(x_k)$ yavaş salınımlı ise, bu taktirde $\lim_k x_k = x_0$ dır[6].

Teorem 2.6 den $W(f)$- $\lim_k x_k = x_0$ ise, $st$-$\lim_k x_k = x_0$ olduğunu biliyoruz. O halde Teorem 2.11 de $\Delta x_k=o(1/k)$ şartı yerine '$x=(x_k)$ dizisi yavaş salınımlıdır' şartı alınarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

**Sonuç 2.8:** $x=(x_k)\in s$ dizisi için

$st$-$\lim_k x_k = x_0$ ve $x$ yavaş salınımlı

ise, $\lim_k x_k = x_0$ dır.

Aşağıdaki teoremlerde (Rath ve Tripathy, 1994) $X$ i bir Hausdorff l.k.t.v.u. olarak almaktadırlar. $x=(x_k)\in s(X)$ için sup $px=\{k\in IN: x_k\neq\theta\}$ dır.

Aşağıdaki teoremlerde istatistiksel yakınsaklık için benzerleri iyi bilinen bazı denk şartlar verildi. Bunun benzerleri Lemma 2.2, Teorem 2.5 ve Teorem 2.10 dir.

**Teorem 2.13:** Eğer $x=(x_k)\in s(X)$ ise, aşağıdaki şartlar denktir.

i) $st$-$\lim_k x_k = x_0$

ii) Herhangi bir $q\in Q$ için, $x=y+z$, $q(y_k-x_0)\to 0$ ve $\delta(\sup pz)=0$, $x_0\in X$ olacak şekilde $s(X)$ de $y=(y_k)$ ve $z=(z_k)$ dizileri mevcuttur.

iii) Herhangi bir $q\in Q$ için, $\delta(K)=1$, $q(x_n-x_0)\to 0$ ve $x_0\in X$ olacak şekilde $IN$ nin bir $K=\{k_n\}$ alt dizisi vardır[24].

Aşağıdaki teoremde, bir dizi istatistiksel Cauchy olması için gerek ve yeter şartlar verildi. İspatı, Lemma 2.2 nin ispatına benzer bir uyarlama ile yapıldı.

**Teorem 2.14:** Herhangi bir $x=(x_k)\in s(X)$ için aşağıdaki şartlar denktir.

i) $x$, bir istatistiksel Cauchy dizisidir

ii) Herhangi bir $q\in Q$ için $m,n\to\infty$ iken $q(x_{k_m} - x_{k_n})\to 0$ olacak şekilde $\delta(K)=1$ olan $IN$ nin bir $K=(k_n)$ alt dizisi mevcuttur.

iii)Herhangi bir $q\in Q$ için, $m,n\to\infty$ iken $x=y+z$ , $q(y_m-y_n)\to 0$ ve $\delta(\sup pz)=0$ olacak şekilde $s(X)$ de $y=(y_k)$ ve $z=(z_k)$ dizileri mevcuttur[24].

İstatistiksel yakınsak her dizinin bir istatistiksel Cauchy dizisi olduğunu biliyoruz. İstatistiksel Cauchy dizinin, bir Cauchy dizi olması için Sonuç 2.8. dekine benzer bir gerek ve yeter şart aşağıdaki Tauberian teoreminde verilmektedir.

**Teorem 2.15:** Eğer $x=(x_k)\in s(X)$ istatistiksel Cauchy dizisi ise, bu taktirde $x$ in Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $x$ in yavaş salınımlı olmasıdır[24].

# 3.BÖLÜM

# BANACH UZAYLARINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bir önceki bölümde, istatistiksel yakınsaklığın özellikleri, kuvvetli toplanabilirlik ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiler, terimleri reel veya kompleks olan diziler için incelendi. Bu yapılanlar, terimleri bir X Banach uzayından alınan diziler için bu bölümde yapılacaktır.

## 3.1 Banach Uzaylarında A-İstatistiksel Yakınsaklık ve A-İstatistiksel Cauchy Dizileri

Lemma 2.2 de yapılanları biraz değiştirerek aşağıdaki lemmayı elde edeceğiz.

**Lemma 3.1:** $y=(y_{k,j})$ bir X Banach uzayında çift indisli bir dizi olsun. Aşağıdaki iki önerme denktir.

i) Her $\varepsilon>0$ için $M=\{k: \|y_{k,n(\varepsilon)}\| < \varepsilon\}$ olmak üzere $\delta_A(M)=1$ olacak şekilde bir $n(\varepsilon)$ indisi mevcuttur.

ii) $\delta_A(K)=1$ olmak üzere bir $K=\{k_i\}$ sonsuz indis cümlesi ve her $\varepsilon>0$ için

$$\|y_{k,l(\varepsilon)}\| < \varepsilon \qquad (k\in K,\ k\geq k_0)$$

olacak şekilde bir $l(\varepsilon)$ ve $k_0=k_0(\varepsilon)$ indisleri mevcuttur.

**İspat:** Kabul edelim ki, (ii) doğru olsun. Bu taktirde

$$K_0=\{k\in K: k\geq k_0\}\subset\{k: \|y_{k,l(\varepsilon)}\| < \varepsilon\} \text{ ve } \delta_A(K_0)=1$$

den

$$\delta_A(\{k: \|y_{k,l(\varepsilon)}\| < \varepsilon\})=1$$

elde ederiz.

Böylece (ii) $n(\varepsilon)=l(\varepsilon)$ ile (i) yi gerektirir.

Şimdi kabul edelim ki, (i) doğru olsun. Bu taktirde

$$K_m=\{k: \|y_{k,n(1/m)}\| < \frac{1}{m}\}$$

olmak üzere $\delta_A(K_m)=1$ dir($m\in\mathbb{N}$). Eğer

$$S_j = \bigcap_{m=1}^{j} K_m \qquad (j \in \mathbb{N})$$

olarak tarif edersek, bu taktirde $S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_j \supset \ldots$ ve,

$$\delta_A(S_j)=1 \qquad (j \in \mathbb{N}); \text{ yani } \quad A_n(S_j) = \sum_{k \in S_j} a_{nk}$$

olmak üzere

$$\lim_n A_n(S_j) = 1 \tag{3.1}$$

dır. $v_1>1$ olmak üzere keyfi bir $v_1 \in S_1$ sayısı seçelim. (3.1) e göre $v_2>v_1$ olacak şekilde bir $v_2 \in S_2$ sayısı vardır ki, her bir $n \geq v_2$ için

$$A_n(S_2)>1/2$$

dir. Yine (3.1) e göre $v_3>v_2$ olacak şekilde bir $v_3 \in S_3$ sayısı vardır ki, her bir $n \geq v_3$ için

$$A_n(S_3)>2/3$$

dür. Benzer şekilde devam ederek $v_j \in S_j$ $(j=1,2,3,\ldots)$ ve her bir $n \geq v_j$ $(j \in \mathbb{N})$ için

$$A_n(S_j) > \frac{j-1}{j} \tag{3.2}$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların artan $(v_j<v_{j+1})$ bir $(v_j)$ dizisini tümevarımla oluşturabiliriz.

Şimdi $v_0=1$ ve $S_0=\mathbb{N}$ iken bir K cümlesini

$$K = \bigcup_{j=0}^{\infty} (S_j \cap [v_j, v_{j+1}))$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu taktirde $v_j \leq n \leq v_{j+1}$ için $K(\leq n) \supset S_j(\leq n)$ elde edilir. Böylece (3.2) den

$$A_n(K) = \sum_{k \in K} a_{nk} > \sum_{k \in S_j} a_{nk} = A_n(S_j) > \frac{j-1}{j}$$

elde edilir ki, buradan $\delta_A(K)=1$ olduğu çıkar.

$\varepsilon>0$ ve $1/j_0 \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $j_0$ sayısını seçelim. $k_0$, $S_j \cap [v_{j_0}, v_{j_0+1})$ de en küçük eleman ise, bu taktirde

$$S_j \subset S_{j_0} \subset K_{j_0} \qquad (j \geq j_0)$$

den

$$\left\| y_{k,n(\varepsilon/j_0)} \right\| < \frac{1}{j_0} \leq \varepsilon \qquad (k \in K,\ k \geq k_0)$$

elde edilir. Böylece $l(\varepsilon)=n(1/j_0)$ alınarak (ii) elde edilir(Kolk, 1991).

Yakınsak her dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu biliyoruz. X bir Banach uzayı olsun. Eğer $x=(x_k)\in s(X)$ bir Cauchy dizisi ise, X in tamlığından yakınsak olduğunu biliyoruz. O halde bir Banach uzayında yakınsak dizilerin cümlesi ile Cauchy dizilerinin cümlesi çakışır. Bu düşünceye benzer şekilde Kolk, yukarıdaki Lemma 3.1 i kullanark bir Banach uzayında A-istatistiksel yakınsak ve A-istatistiksel Cauchy dizilerinin cümleleri arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir.

X bir Banach uzayı ve $x=(x_k)\in s(X)$ olsun. $y_{k,j}=x_k-x_j$ için Lemma 3.1 in (İ) kısmının anlamı, x bir A-istatistiksel Cauchy dizisidir. Aynı zamanda denk (ii) önermesinin anlamı x, $\delta_A(\{k_i\})=1$ olmak üzere bir $(x_{k_j})$ Cauchy alt dizisi ihtiva eder. X in tamlığından $\left(x_{k_j}\right)$ altdizisi bir $x_0\in X$ elemanına yakınsamalıdır. $y_{k,j}=x_k-x_j$ için (ii) aynı anlama sahiptir. Fakat (i) şu durumda x, $x_0$ a A-istatistiksel yakınsak olduğunu ifade eder. Buradan aşağıdaki teoremleri ispatlamış oluruz(Kolok, 1991).

**Teorem 3.1:** Bir X Banach uzayında A-istatistiksel yakınsak ve A-istatistiksel Cauchy dizilerinin cümleleri çakışır[15].

**Teorem 3.2:** $x=(x_k)$ dizisi bir X Banach uzayında $x_0$ a A-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\delta_A(K)=1$ olmak üzere $\left(x_{k_j}\right)$ altdizisi $x_0$ a yakınsayacak şekilde bir $K=\{k_j\}$ indis cümlesinin mevcut olmasıdır[15].

Yukarıdaki iki teoemde özel olarak $A=C_1$ alırsak, aşağıdaki sonuçları ifade edebiliriz.

**Sonuç 3.1:** Bir X Banach uzayında istatistiksel yakınsak ve istatistiksel Cauchy dizilerinin cümleleri çakışır.

**Sonuç 3.2:** X bir Banach uzayı ve $x=(x_k)\in s(X)$ olsun.

$$\text{st(X)-}\lim_k x_k = x_0$$

olması için gerek ve yeter şart $\delta(K)=1$ olmak üzere $\left(x_{k_j}\right)$ altdizi $x_0$ a yakınsayacak şekilde bir $K=\{k_j\}$ indis cümlesinin mevcut olmasıdır.

Sonuç 3.2, X=(IR veya $\mathbb{C}$) olması durumunda Lemma 2.2 den başka bir şey değildir.

### 3.2.A-İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli A-Toplanabilirlilik

Bu kısımda A-istatistiksel yakınsaklık ile bir $F=(f_k)$ modülüs dizisine bağlı olarak tanımlanan kuvvetli A-toplanabilirlik arasındaki ilişkiler incelenecek.

$F=(f_k)$ bir modülüs dizisi olsun. Esas sonuçlar

(F1) $\inf_k f_k(t) > 0 \quad (t>0)$

(F2) $\sup_k f_k(t) < \infty \quad (t>0)$

(F3) $\lim_{t\to 0^+} \sup_k f_k(t) = 0$

şartları kullanılarak verileceğinden, bu şartlar ile ilgili iki lemmayı verdikten sonra esas sonuçlara geçeceğiz.

**Lemma 3.2:** (F1) şartı doğru olması için gerek ve yeter şart $\inf_k f_k(t_0) > 0$ olacak şekilde bir $t_0>0$ sayısının mevcut olmasıdır.

**İspat:** $t_0>0$ için $\inf_k f_k(t_0) > 0$ olsun. Her $t<t_0$ için $t \geq \frac{t_0}{2^n}$ olacak şekilde bir $n\in IN$ vardır. Tanım 1.38 (modülüs tanımı) dan $f_k(t/2^n) \geq f_k(t_0).\frac{1}{2^n}$ elde edilir. Buradan $t<t_0$ için $\inf_k f_k(t_0) > 0$.

Ayrıca, $f_k$ artan olduğundan her bir $t>t_0$ için $f_k(t) \geq f_k(t_0)$. Bu yine $t>t_0$ için $\inf_k f_k(t_0) > 0$ olduğunu gösterir(Kolk, 1993).

**Lemma 3.3:** (F2) şartı doğru olması için gerek ve yeter şart $\sup_k f_k(t_0) < \infty$ olacak şekilde bir $t_0>0$ sayısının mevcut olmasıdır.

**İspat:** $\sup_k f_k(t_0) < \infty$ olsun. Her $t>0$ için $t \leq n.t_0$ olacak şekilde bir $n$ doğal sayısı vardır. Tanım 1.38 den

$$f_k(t) \leq f_k(n.t_0) \leq n.f_k(t_0)$$

elde edilir. Netice olarak $\sup_k f_k(t_0) < \infty$ bulunur(Kolk, 1993).

Lemma 3.3 den (F3) ün (F2) yi gerektirdiği anlaşılır.

**Teorem 3.3:** $X$ bir Banach uzayı ve $F=(f_k)$ bir modülüs dizisi olsun. Bu taktirde $p>0$, $A\in\tau^+$ olmak üzere

$$(W^p(A,F)\text{-}\lim_k x_k = x_0) \Rightarrow (st\text{-}\lim_k x_k = x_0) \tag{3.3}$$

olması için gerek ve yeter şart (F1) in sağlanmasıdır.

**İspat:** ε>0 olsun. Eğer (F1) in sağlanmasıdır. Lemma 3.2 den $t$>0 ve $k \in IN$ için

$$f_k(t) > s_0$$

olacak şekilde bir $s_0$>0 sayısı vardır.

Eğer $W^p(A;F)$- $\lim_k x_k = x_0$ ise, $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}(f_k(\|x_k - x_0\|))^p$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$ dır. ε>0 sayısını her $k \in IN$ için $f_k(\varepsilon) \geq s_0 > 0$ olacak şekilde seçelim ve

$$L_\varepsilon = \{k: \|x_k - x_0\| \geq \varepsilon\}$$

alalım.

$$\|x_k - x_0\| \geq \varepsilon$$

$$f_k(\|x_k - x_0\|) \geq f_k(\varepsilon) \geq s_0$$

$$[f_k(\|x_k - x_0\|)]^p \geq s_0^p$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk}[f_k(\|x_k - x_0\|)]^p \geq s_0^p . \sum_{k=1}^{n} a_{nk}$$

$$\sigma_n \geq s_0^p\Big(\sum_{k \in L_\varepsilon} a_{nk} + \sum_{k \notin L_\varepsilon} a_{nk}\Big)$$

$$\sigma_n \geq s_0^p \sum_{k \in L_\varepsilon} a_{nk}$$

olur, buradan

$$\sum_{k \in L_\varepsilon} a_{nk} \leq s_0^{-p} \sigma_n \qquad (n \in IN)$$

elde edilir. $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$ olduğundan

$$\delta_A(L_\varepsilon) = \sum_{k \in L_\varepsilon} a_{nk} = 0$$

bulunur. O halde $st(A)$- $\lim_k x_k = x_0$ ve (F1) in yeterlilik kısmı ispatlanır.

Gereklilik kısmını ispatlamak için (3.3) ün sağlandığı fakat (F1) in sağlanmadığını kabul edelim. Bu taktirde $k_{i+1} > k_i + 1$ ve

$$\lim_i f_{k_i}(t_0) = 0 \tag{3.4}$$

olacak şekilde bir $t_0$>0 sayısı ve bir $K=\{k_i\}$ sonsuz indis cümlesi mevcuttur. $k_n < l_n < k_{n+1}$ olmak üzere keyfi bir $l_n$ indislerinin dizisi için

$$b_{nk}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & k=k_n \text{ veya } k=l_n \text{ ise}\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olacak şekilde $B=(b_{nk})$ sonsuz matrisini gözönüne alalım. $B\in\tau^+$ ve

$$\delta_A(K)=1/2 \tag{3.5}$$

olduğunu görmek zordur.

Bir $y=(y_k)$ dizisini $z\in X$ ve $\|z\|=1$ olmak üzere

$$y_k=\begin{cases}t_0 z, & k=k_j\\ \theta, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ile tanımlayalım. Bu taktirde

$$\|y_{k_j}\|=\|t_0 z\|=|t_0|\|z\|=t_0$$

ve (3.4) den

$$\lim_k f_k(\|y_k\|)=0$$

elde edilir, buradan

$$\lim_k [f_k(\|y_k\|)]^p=0$$

bulunur. B nin regülerliğinden

$$\lim_n \sum_k b_{nk}[f_k(\|y_k\|)]^p=0$$

olduğu anlaşılır. Yani

$$W^p(B,F)\text{-}\lim_k y_k=\theta$$

dır. Aynı zamanda $0<\varepsilon\leq t_0$ olacak şekilde her bir ε için

$$L_\varepsilon=\{k: \|y_k\|\geq\varepsilon\}=K$$

olur. $\delta_B(L_\varepsilon)=1/2\neq 0$ olduğu (3.5) den analşılır, bu

$$st(A)\text{-}\lim_k y_k\neq\theta$$

olmasını gerektirir ki, bu (3.3) ile çelişir. Böylece (F1) sağlanmalıdır(Kolk, 1991).

Bir $f$ modülüsü için $f_k=f$ $(k\in IN)$ ise, bu taktirde (F1) otomatikman sağlanmış olur. Böylece aşağıdaki sonuç ispatlanmış olur.

**Sonuç 3.3:** f bir modülüs olsun. Bu taktirde bir X Banach uzayında p>0, $A\in\tau^+$ için

$$(W^p(A,F)\text{-}\lim_k x_k = x_0) \Rightarrow (st(A)\text{-}\lim_k x_k = x_0)$$

dır[15].

Bu sonuç Teorem 2.6 de bir X Hausdorff l.k.t.v.u da p=1 ve $A=C_1$ durumunda verildi. Ayrıca Teorem 2.8 da X=K, $A=C_1$ ve f(t)=t için bu sonuç incelendi. Teorem 2.9 (i) kısmında X=K ve p=1 için incelendi.

**Teorem 3.4:** Bir X Banach uzayında p>0, $A\in\tau^+$ için

$$(st(A)\text{-}\lim_k x_k = x_0) \Rightarrow (W^p(A,F)\text{-}\lim_k x_k = x_0) \tag{3.6}$$

gerektirmesinin doğru olması için gerek ve yeter şart (F2) ve (F3) ün sağlanmasıdır.

İspat: İlk olarak (F3) ün gerekliğini ispatlayacağız. E birim matrisi için $st_0(E,X)=c_0(X)$ ve $W_0^p(E,F,X)=c_0(F,X)$ olur. O halde (3.6) gerektirmesi $c_0\subset c_0(F)$ ye indirgenir ki, buda (F3) ü gerektirir.

(F2) nin gerekliliğini çelişki ile ispatlayalım. $A\in\tau^+$ olsun. Kabul edelim ki, A normaldir ve böylece $\lim_n a_{nn}=0$ dır. Eğer (F2) doğru değilse, bu taktirde $\delta_A(K)=0$ olacak şekilde bir $K=\{k_i\}$ indis cümlesi ve $0<t_1<t_2<\ldots<t_i<t_{i+1}<\ldots$ olacak şekilde sayılar bulunur ki,

$$f_{K_i}(t_i)\geq\left(\frac{1}{a_{K_iK_i}}\right)^{1/p} \qquad (i\in IN) \tag{3.7}$$

olur.

Teorem 3.2 den $z\in X$, $\|z\|=1$ olmak üzere

$$x_k=\begin{cases} t_i z, & k=k_i \text{ ise} \\ \theta, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ile tanımlı $x=(x_k)$ dizisi $st(A)\text{-}\lim_k x_k=\theta$ dır. (3.6) nın kabulünden

$$\lim_n a_{nn}[f_{k_n}(\|x_{k_n}\|)]^p=0 \tag{3.8}$$

elde edilir ki, bu

$$\lim_n \sum_k a_{nk}[f_k(\|x_k\|)]^p=0$$

olmasını gerektirir. Fakat (3.7) den

$$a_{K_iK_i}[f_{k_i}(\|x_{k_i}\|)]^p=a_{K_iK_i}[f_{k_i}(t_i)]^p\geq 1 \qquad (i\in IN)$$

elde edilir ki, bu (3.8) ile çelişir. Böylece (F2) nin gerekliliği de ispatlanır.

st(A)- $\lim_k x_k = x_0$ olsun ve ε>0 seçilsin. Teorem 3.3 te verilen $\sigma_n$ toplamını $L_\varepsilon$ $=\{k: \|x_k - x_0\| \geq \varepsilon\}$ ve $M_\varepsilon=\{k: \|x_k - x_0\| < \varepsilon\}$ üzerinde sırasıyla $\Sigma_1$ ve $\Sigma_2$ toplamlarına ayıralım. (F2) den dolayı $f_k(t) \leq M$ ($k \in \mathbb{N}$, $t>0$) olacak şekide bir $M>0$ sabiti mevcut olacağından

$$\sum\nolimits_1 \leq M^p \sum_{k \in L_\varepsilon} a_{nk}$$

olur(Bak. Teorem 3.3 ün ispatı). Ayrıca $h(t)=\sup_k f_k(t)$ yazarsak, bu taktirde $f_k$ artan olduğundan $\|x_k - x_0\| < \varepsilon$ için

$$f_k(\|x_k - x_0\|) < f_k(\varepsilon)$$

olur ve

$$\sum\nolimits_2 \leq h(\varepsilon) . \sum_{k \in M_\varepsilon} a_{nk}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\delta_A(L_\varepsilon)=0$ ve (R2) den $\lim_n \sigma_n \leq h(\varepsilon)$ elde edilir. (F3) den $\lim_n \sigma_n = 0$ olduğu anlaşılır. Yani, $W^p(A,F)$- $\lim_k x_k = x_0$(Kolk, 1991).

Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 den aşağıdaki sonuç çıkar.

**Sonuç 3.4:** X bir Banach uzayı ve $F=(f_k)$ bir modülüs dizisi olsun. Bu taktirde $p>0$, $A \in \tau^+$ için

$$st(A,X)=W^p(A,F,X)$$

olması için gerek ve yeter şart (F1), (F2) ve (F3) şartlarının sağlanmasıdır[15].

$f_k=f$ ($k \in \mathbb{N}$) durumunda (F1) ve (F3) şartları sağlanır. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 3.5:** X bir Banach uzayı ve f bir modülüs olsun. $p>0$ ve $A \in \tau^+$ için

$$st(A,X)=W^p(A,f,X)$$

olması için gerek ve yeter f nin sınırlı olmasıdır[15].

Bu sonuç, bir X Hausdorff l.k.t.v.u nda $p=1$ ve $A=C_1$ için Teorem 2.7 de verildi.

**Teorem 3.5:** $F=(f_k)$ bir modülüs dizisi, $p>0$ ve $A \in \tau$ için

$$(st(A)\text{- } \lim_k x_k = x_0) \Rightarrow (W^p(A,F)\text{- } \lim_k x_k = x_0)$$

gerektirmesinin m(X) de sağlanması için gerek ve yeter şart (F3) ün sağlanmasıdır.

**İspat :**(F3) ün gerekliği Teorem 3.4 de ispatlanmıştır.

Farzedelim ki, (F3) sağlansın. Bu taktirde

$$h(t)=\sup_k f_k(t)<\infty \qquad (t>0) \tag{3.9}$$

dır. X de st(A)- $\lim_k x_k = x_0$ ve $\|x\|$<M ise, bu taktirde

$$f_k(\|x_k - x_0\|)\leq f_k(M+\|x_0\|)\leq h(M+\|x_0\|)<\infty$$

ve $W^p(A,F)$ $\lim_k x_k = x_0$ olduğu Teorem 3.4 den M nin yerine h(M+$\|x_0\|$) alınarak yeterliliğin ispatından çıkar(Kolk,1991).

Teorem 3.3 kullanılarak da aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 3.6:** X bir Banach uzayı ve F=($f_k$) bir modülüs dizisi olsun. p>0, $A\in\tau^+$ için

$$st(A,X)\cap m(X)=W^p(A,F,X)\cap m(X)$$

olması için gerek ve yeter şart (F1) ve (F3) ün sağlanmasıdır[15].

$f_k$=f (k∈IN) durumunda Sonuç 3.6 dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 3.7:** Herhangi bir f modülüsü için bir X Banach uzayında p>0, $A\in\tau^+$ olmak üzere

$$st(A,X)\cap m(X)=W^p(A,f,X)\cap m(X)$$

dır[15].

Bu sonuç X=K, A=$C_1$ ve f(t)=t durumunda Teorem 2.8 (ii) de ispatlandı ve bundan Sonuç 2.3 elde edildi. Bu durumlara ilaveten p=1 alındığında Sonuç 2.5 elde edilir. Ayrıca bu sonuç X=K ve p=1 durumunda Teorem 2.9 (ii) de verildi.

# 4.BÖLÜM
# İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DİZİLERİN MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

## 4.1 Giriş

Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık ile matris toplanabilme metodları arasındaki ilişkiler incelenecek. İstatistiksel yakınsaklığın matris toplanabilme metodları tarafından içerilip içerilmediği veya hangi şartlarda içerileceği gösterilecek.

Bu kısımda esas sonuçlarda kullanılacak olan bazı sonuçlar verilecek

**Teorem 4.1:** Eğer $A=(a_{nk})$ matrisi

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|<\infty \tag{4.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{k=1,2,..}|a_{nk}|=0 \tag{4.2}$$

olacak şekilde ise, bu taktirde elemanları 0 ve 1 olan A-toplanabilen ıraksak bir dizi vardır.

**İspat:** $A=(a_{nk})$ matrisi verilen şartları sağlasın.Bütün elemanları 0 ve 1, sıfıra A-toplanabilen ıraksak bir diziyi $s_n$ ile gösterelim. Pozitif tamsayıların $\alpha_1,\alpha_2,...$ dizisi 0'a $n.\alpha_n\to 0$ dan daha hızlı yakınsayan bir dizi olsun. Örneğin $\alpha_n=1/n^2$ olsun. $\beta_1,\beta_2,...$ 0 a yakınsayan pozitif tamsayıların bir dizisi olsun. (4.2) hipotezi, her bir $p$=1,2,... için

$$|a_{nk}|\le\alpha_p \qquad n\ge n_p \ \text{k=1,2,...} \tag{4.3}$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların $n_1<n_2<...$ artanbir dizinin varlığını gerektirir. Burada $(n_p)$ bir basit dizi oluyor. (4.1) hipotezi, eğer $k_1,k_2,...$ sonsuza yeter derecede ıraksayan bir diziise, bu taktirde her bir $p$=1,2,... için

$$\sum_{k=k_p+1}^{\infty}|a_{nk}|\le\beta_p \qquad n_p\le n<n_{p+1} \tag{4.4}$$

dır.

$(k_p)$, (4.4) ü sağlayan ve her bir $p$=1,2,... için $k_{p+1}>k_p+1$ olacak şekilde belirlenmiş bir dizi olsun. $(s_k)$

$$s_k = \begin{cases} 1, & k = k_1, k_2, \ldots \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlanan 0 ve 1 lerin özel bir dizisi olsun. Bu taktirde $k$ ların sonsuz bir cümlesi için $s_k$=1 ve $k$ ların sonsuz bir cümlesi için $s_k$=0; buradan dizi ıraksaktır. Bundan başka bu dizinin $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ dönüşümleri $p$=1,2,... ve $n_p \leq n < n_{p+1}$ iken

$$\begin{aligned} |\sigma_n| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k\right| = \left|\sum_{j=1} a_{nk_j}\right| \\ \leq \sum_{k=1}^{p} \left|a_{nk_j}\right| + \sum_{j=p+1}^{\infty} \left|a_{nk_j}\right| \\ \leq \sum_{j=1}^{p} \alpha_p + \sum_{k=k_p+1}^{\infty} |a_{nk}| < p\alpha_p + \beta_p \end{aligned}$$

olacak şekildedir. O halde, $p.\alpha_p \to 0$ ve $\beta_p \to 0$ olduğundan $\sigma_n \to 0$. Böylece 0 ve 1 lerin özel ıraksak dizisi 0 a A-toplanabilirdir(Agnew, 1946).

Aşağıdaki teoremde her bir $k \in IN$ için

$$a_k = \lim_n a_{nk}$$

anlamındadır. Ayrıca $\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}|$ demektir.

**Teorem 4.2:** $p$>0 olsun. Bu taktirde $A \in (W^p \cap l_\infty, c)$ olması için gerek ve yeter şart $A$ nın konservatif olmasıdır ve sıfır yoğunluklu her bir E cümlesi için

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k \in E} |a_{nk} - a_k| = 0$$

olmasıdır.

**İspat:** Yeterlilik: $x=(x_k) \in l_\infty$ ve $x_0$ a kuvvetli p-Cesaro toplanabilir olsun. $A$ konservatif olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k |a_{nk} - a_k| |x_k - x_0| = 0 \tag{4.6}$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

$\varepsilon$>0 olsun ve $E=\{k: |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}$ olsun. Sonuç 2.3 e göre $W^p \subset st$ ve özel olarak $p$=1 için Sonuç 2.5 e göre de $W \subset st$ olduğunu biliyoruz. O halde $\delta(E)$=0 dır. $x \in l_\infty$ olduğundan $\|x\|_\infty < \infty$ ve A konservatif olduğundan $\|A\| < \infty$ dır. Buradan, her n için

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{nk}-a_k||x_k-x_0| = \sum_{k\in K}|a_{nk}-a_k||x_k-x_0| + \sum_{k\notin K}|a_{nk}-a_k||x_k-x_0|$$
$$\leq 2\|x\|\sum_{k\in K}|a_{nk}-a_k| + 2\varepsilon\|A\|$$

bulunur. $n\to\infty$ için sağ tarafın limiti sıfır olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|a_{nk}-a_k||x_k-x_0| = 0$$

bulunur.

Gereklilik: $A\in(W^p\cap l_\infty, c)$ ve $c\subset W^p\cap l_\infty$ gerçeğinden $A\in(c,c)$ olduğu anlaşılır. Eğer mümkünse, kabul edelim ki, (4.5) yetersiz olmak üzere sıfır yoğunluklu bir $E$ cümlesi mevcut olsun. Bunu $E=\{e_1,e_2,...\}$ ile gösterelim. Schur teoreminin ispatından dolayı $(\sum_{k\in K}(a_{nk}-a_k)z_k)$ dizisi ıraksak olacak şekilde bir $z=(z_{e_1},z_{e_2},...)$ dizisi vardır.

( bak. Maddox, 1970, sh.169). Şimdi $x=(x_k)$ dizisini

$$x_k=\begin{cases} z_k, & k=e_i \text{ ise} \\ 0, & k\neq e_i \text{ ise}\end{cases}$$

ile tanımlayalım. Bu taktirde $x\in l_\infty$ ve $E$ sıfır yoğunluklu olduğundan $W^p\text{-}\lim_k x_k = 0$ olduğu görülür. Buradan $A\in(W^p\cap l_\infty, c)$ ye karşıt olan, $x\notin c_A$ olacak şekilde $x\in W^p\cap l_\infty$ dır(Maddox, 1974).

Borel matrisi Teorem 4.2 için bir uygulamadır.

**Teorem 4.3:** Borel matrisi $W^p\cap l_\infty$ daki bütün dizileri toplamaz[9].

(Schoenerg, 1959) birinci mertebeden Cesaro ortalamasının her sınırlı istatistiksel yakınsak diziyi toplamadığını göstermiştir. Bu, $C_1$ metodunun istatistiksel yakınsaklık metodunu içerip içermediği sorusunu akla getirmektedir. Cevap olumsuzdur, bu aşağıdaki teoremde gösterilecektir. Önce çok kullanışlı bir Lemmayı verelim.

**Lemma 4.1:** Eğer $t$ sonsuz tane $k$ için $t_k\neq 0$ olacak şekilde bir sayı dizisi ise, bu taktirde h.h.k için

$$x_k=0 \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^{\infty}t_kx_k=\infty$$

olacak şekilde bir $x$ dizisi vardır.

**İspat:** Her bir $k$ için

$$m_k > k^2 \quad \text{ve} \quad t_{m_k} \neq 0$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisini seçelim. $x$ dizisini

$$x_r = \begin{cases} 1/t_{m_k}, & r = m_k \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda $|\{k \leq n:\ x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$ olup $\lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: x_k \neq 0\}| = 0$$

elde edilir. O halde h.h.k. için $x_k$=0 ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} t_{m_k} x_{m_k} = \infty \qquad (1+1+...=\infty)$$

bulunur(Fridy, 1985).

**Teorem 4.4:** Hiç bir matris toplanabilme metodu, istatistiksel yakınsaklık metodunu içermez(Yani, $A \in (st,c,p)$ olacak şekilde hiç bir matris yoktur.).

**İspat:** Bir önceki Lemma bir matrisin istatistiksel yakınsaklığı içermesi için onun satır-sonlu olmak zorunda olduğunu göst

erir. $A$, keyfi bir satır-sonlu matris olsun ve sıfır olmayan bir elemanını seçeleim ve buna $a_{n(1),k'(1)} \neq 0$ diyelim. Bu taktirde $k(1) \geq k'(1)$ biçiminde seçelim, öyle ki

$$a_{n(1),k(1)} \neq 0 \text{ ve eğer } k > k(1) \text{ ise } a_{n(1),k} = 0$$

Şimdi herhangi bir $m$ için

$$k(m) \geq m^2 \text{ ise, } a_{n(m),k(m)} \neq 0 \text{ ve } k > k(1) \text{ ise } a_{n(m),k} = 0$$

olacak şekilde satır ve sütun indislerinin artan bir dizisini seçelim ve $x$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$x_{k(1)} = \frac{1}{a_{n(1),k(1)}}, \ldots, x_{k(m)} \frac{1}{a_{n(m),k(m)}} [m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)}], \ldots$$

ve diğer durumlarda $x_k$=0.

Bu taktirde

$$
\begin{aligned}
(Ax)_{n(m)} &= \sum_{i=1}^{m} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} + a_{n(m),k(m)} x_{k(m)} \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} + a_{n(m),k(m)} \frac{1}{a_{n(m),k(m)}} [m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)}] \\
&= m
\end{aligned}
$$

olduğundan $Ax$ dizisi sınırlı değildir; dolayısıyla yakınsak değildir. O halde $x$, A-toplanabilir değildir, ayrıca

$k(m) \geq m^2$ olduğundan $|\{k \leq n:\ x_k \neq 0\}| < \sqrt{n}$

olup

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: x_k \neq 0\}| = 0$$

olduğundan h.h.k için $x_k=0$ olur. Böylece $st\text{-}\lim_k x_k = 0$ ve buradan $A$ nın istatistiksel yakınsaklığı içermediği sonucu çıkar(Fridy, 1985).

İstatistiksel yakınsaklık tanımı gereğince, istatistiksel yakınsaklık $\{(-1)^k\}$ gibi herhangi bir periyodik diziyi toplayamaz. Böylece istatistiksel yakınsaklık, klasik toplanabilme metodlarının hiç birini içermez. Bu düşünce yukarıdaki teoremden istatistiksel yakınsaklığın aşikar olmayan hehangi bir matris metodu ile mukayese edilmeyeceğini gösterir.

**Örnek 4.1:** $A=(a_{nk})$ matrisini

$$
a_{nk} = \begin{cases} 1, & k=n \text{ ve n kare değilse} \\ \frac{1}{2}, & n=m^2,\ k=n \text{ veya } k=(m-1)^2 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}
$$

biçiminde tanımlayalım. Herhangi bir $x$ dizisi için

$$
A_n x = \begin{cases} \frac{x_1}{2}, & n=1 \text{ ise} \\ \frac{x_{(m-1)^2} + x_{m^2}}{2}, & n=m^2,\ m=2,3,\ldots \text{ ise} \\ x_n, & n \text{ kare değilse} \end{cases}
$$

elde edilir. Böylece $A$ aşikar olarak regüler üçgensel bir matristir. $A$ nın istatistiksel yakınsaklık tarafından içerildiğini göstermek için

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = x_0$$

olduğunu kabul edelim. Bu taktirde

$$\lim_{n\neq m^2} x_n = x_0$$

ve aşikar olarak

$$\left|\{k \leq n: A_n x \neq x_n\}\right| \leq \sqrt{n}$$

dır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\{k \leq n: A_n x \neq x_n\}\right| = 0$$

olduğundan yukarıdaki teoremden $st\text{-}\lim_k x_k = x_0$ elde edilir. $A$ nın adi yakınsaklığa denk olmadığını göstermek için

$$x_k = \begin{cases} (-1)^m, & \text{k}=\text{m}^2,\ m=1,2,\ldots \text{ ise} \\ 0, & \text{k bir kare değilse} \end{cases}$$

ile verilen $x=(x_k)$ dizisini gözönüne alalım. Bu taktirde

$n>1$ için $A_n x=0$

olur. Oysa x yakınsak değildir.

Aşağıdaki teorem, Teorem 4.2 nin özel bir halidir. $x_0=0$ olması durumunda Teorem 2.8 (i) den $W^p \subset st_0$ ve (ii) den $W_0^p \cap l_\infty = st_0 \cap l_\infty$ olduğunu biliyoruz. O halde Teorem 4.2 de $W^p$ yerine $st_0$ ve $c$ yerine $c_0$ alarak ispatsız vereceğimiz aşağıdaki teorem elde edilir.

**Teorem 4.5:** $A=(a_{nk})$ bir matris olsun. $A$ matrisinin sınırlı istatistiksel sıfır dizilerinden sıfır dizilerine bir dönüşüm $(A \in (st_0 \cap l_\infty, c_0))$ olması için gerek ve yeter şart $A$ nın sıfır dizilerinden sıfır dizilerine bir dönüşüm $(A \in (c_0, c_0))$ olmasıdır[23].

Ayrışım teoremi kullanılarak kolayca ispatlanabileceği için aşağıdaki teoremi ispatsız veriyoruz.

**Teorem 4.6:** $A \in \tau^+$ ve $A \in (st_0, c_0)$ olsun. Eğer x sınırlı ve $st\text{-}\lim_k x_k = x_0$ ise, bu taktirde $x$, $x_0$ a A-toplanabilir, yani $\lim_n A_n x = x_0$ dır[23].

Teorem 4.1 e denk olarak şu ifade edilebilir:

$A=(a_{nk})$ matrisi (4.1) ve (4.2) şartlarını gerçekleyen bir matris ise, $\delta_A(K)=0$ olacak şekilde sonsuz elemanlı bir $K$ indis cümlesi vardır[16].

$A$ düzgün regüler bir matris ve $K=\{k_i\}$ sonsuz bir indis cümlesi olmak üzere $A$ matrisinin $(a_{n_i k_i})$ alt matrisi (4.1) ve (4.2) şartlarını gerçekler. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

**Teorem 4.7:** $A$ düzgün regüler ise, her bir indis cümlesi, $\delta_A(K)=0$ olacak şekilde bir $K$ alt cümlesini içerir[16].

Bu düşünceler aslında Teorem 3.2. de ifade edilen A-istatistiksel yakınsaklığın karekterizasyonuna dayanır.

Teorem4.7 ve Teorem 3.2 birlikte gözönüne alınırsa düzgün regüler A matrisi için A- istatistiksel yakınsaklığın yakınsaklıktan daha kuvvetli olduğu anlaşılır.

Bir $Y$ alt dizi-kapalı dizi uzayı için aşağıdaki teorem A- yoğunluk yardımı ile $(s,Y)$ matris sınıfını karekterize eder.

**Teorem 4.8:** $Y \neq s$ bir alt dizi-kapalı dizi uzayı olsun. $A$ matrisi düzgün regülr ise, aşağıdaki ifadeler bir $B$ matrisi için denktir.

i) $B \in (s,Y)$

ii) $\delta_A(K)=0$ olacak şekilde her $K$ indis cümlesi için $B^{[K]} \in (s,Y)$ dir.

iii) $b_{nk}=0 \quad (k>k_0, \ n \in IN)$ (4.7)

olacak şekilde bir $k_0$ sayısı mevcuttur ve $Be^k \in Y \ (k \in IN)$.

**İspat:** (i) gerçeklensin. Bir $K$ indis cümlesi ve bir $x=(x_k)$ dizisi seçelim.

$x=(x_k) \in s$ dizisinin K-kesiti

$$y_k=\begin{cases} x_k, & k \in K \\ 0, & k \in (IN/K) \end{cases}$$

olmak üzere $y=(y_k)=x^{[K]}$ dır. $B \in (s,Y)$ olduğundan $B_n y \in Y$ ve

$$
\begin{aligned}
B_n y &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} y_k \\
&= \sum_{k \in K} b_{nk} y_k + \sum_{k \notin K} b_{nk} y_k \\
&= \sum_{k \in K} b_{nk} y_k = B_n^{[K]} x
\end{aligned}
$$

olduğundan $B^{[K]} x \in Y$. Böylece (ii) gerçeklenir.

Şimdi (ii) gerçeklensin. Tek bir $k$ noktası içeren $K$ cümlesi için $\delta_A(K)=0$ olduğundan ve (ii) den

$$Be^k = B^{[K]} e^k \in Y \qquad (k \in IN)$$

elde edilir.

(4.7) nin ispatı için ilk olarak $B$ matrisinin satır-sonlu olması gerektiğini göstereceğiz. Aksi taktirde

$$b_{n_0 K_i} \neq 0 \qquad (i \in IN)$$

olacak şekilde bir $n_0$ indisi ve sonsuz elemanlı bir $K=\{k_i\}$ indis cümlesi mevcut olmalıdır.

Teorem 4.7 den $\delta_A(K)=0$ kabul edebiliriz. Şimdi $x=(x_k)$ dizisi

$$x_{k_i} = \frac{1}{b_{n_0 K_i}} \quad (i \in IN) \quad \text{ve} \quad \text{diğer durumlarda} \quad x_k=0$$

ile tanımlanırsa

$$B_{n_0}^{[K]} x = \sum_i b_{n_0 K_i} x_{k_i} = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty$$

elde edilir. O halde $B^{[K]} x$ mevcut değildir. Bu ise, $B^{[K]} \in (s, Y)$ varsayımı ile çelişir. Böylece $B$ matrisi satır-sonlu olmak zorundadır.

Kabul edelim ki, (4.7) yanlış olsun. B matrisi satır-sonlu olduğundan

$$b_{n_i K_i} \neq 0 \ \text{ ve } \ b_{n_i K} = 0 \quad (k > k_i, i \in IN)$$

olacak şekilde $K=\{k_i\}$ ve $N=\{n_i\}$ sonsuz elemanlı indis cümleleri vardır. Tekrar Teorem 4.7 den $\delta_A(K)=0$ kabul edebiliriz. $z=(z_k) \in s/Y$ olmak üzere $x=(x_k)$ dizisini

$$x_{k_1} = \frac{z_1}{b_{n_1 K_1}}, \ldots, x_{k_i} = \frac{1}{b_{n_i K_i}} (z_{k_i} - \sum_{j=1}^{i-1} b_{n_i K_j} x_{k_j}) \qquad (i>1)$$

şeklinde tanımlayalım.

$$
\begin{aligned}
B_{n_i}^{[K]}x &= \sum_{j=1}^{i} b_{n_iK_j}x_{k_j} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{n_iK_j}x_{k_j} + b_{n_iK_i}x_{k_i} \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} b_{n_iK_j}x_{k_j} + b_{n_iK_i}\frac{1}{b_{n_iK_i}}(z_{K_i} - \sum_{j01}^{i-1} b_{n_iK_j}x_{k_j}) \\
&= z_i \qquad (i \in IN)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $(B_{n_i}^{[K]}x) \notin Y$ ve $Y$ alt dizi-kapalı dizi uzayı olduğundan $B^{[K]}x \notin Y$ dır. Bu ise (ii) ile çelişir. O halde (4.7) doğru olup (ii)⇒(iii).

Son olarak (iii) gerçeklensin. Her bir $x \in s$ için

$$
Bx = B(\sum_{k=1}^{k_0} x_k e^k) = \sum_{k=1}^{k_0} x_k Be^k \in Y
$$

olur. Bu nedenle (i) gerçeklenir(Kolk, 1993).

## 4.2. İstatistiksel Yakınsak Dizilerin Matris Dönüşümleri

Şimdi $X$ uzayı üzerine bazı kısıtlamalar koyarak $(st(A) \cap X, Y)$ matris sınıfi karekterize edilecek.

**Teorem 4.9:** $X$ e' yi içeren kesit-kapalı bir dizi uzayı ve $Y$ de keyfi bir dizi uzayı olsun. Bu taktirde $B \in (st(A) \cap X, Y)$ olması için gerek ve yeter şart $B \in (c \cap X, Y)$ ve $\delta_A(K)=0$ olmak üzere

$$
B^{[K]} \in (X, Y) \tag{4.8}
$$

olmasıdır.

**İspat:** $B \in (st(A) \cap X, Y)$ olsun. $c \subset st(A)$ olduğundan $c \cap X \subset st(A) \cap X$ olup $B \in (c \cap X, Y)$ dır. Şimid $x \in X$ ve$\delta_A(K)=0$ olacak şekilde bir $K \subseteq IN$ cümlesini gözönüne alalım. Ayrıca $y=(y_k)=x^{[K]}$ olsun.

$$
E=\{k \in K : y_k \neq 0\} \subseteq K
$$

olup $\delta_A(E) \leq \delta_A(K)=0$ olduğundan $\delta_A(E)=0$. O halde $st(A)\text{-}\lim_k y_k = 0$. $x \in X$ ve $X$ kesit-kapalı dizi uzayıolduğundan $y=(y_k)=x^{[K]} \in X$ dir. Buradan $y \in st(A) \cap X$ ve hipotezden $By \in Y$ dir. Böylece

$$
B_n^{[K]}x = \sum_{k \in K} b_{nk}x_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}y_k = B_n y \qquad (n \in IN)
$$

den $B^{[K]}x \in Y$ bulunur. Böylece $\delta_A(K)=0$ olacak şekildeki her $K$ indis cümlesi için

$B^{[K]} \in (X,Y)$ dır, yani (4.8) gerçeklenir.

Karşıt olarak $st(A)\text{-}\lim_k x_k = x_0$ olacak şekilde $x \in st(A) \cap X$ olsun. $Bx \in Y$ olduğunu göstereceğiz. $e \in c$ ve $X$ e' yi içeren kesit-kapalı dizi uzayı, $B \in (c \cap X, Y)$ olduğundan $Be \in Y$ dir. O halde $x_0=0$ alabiliriz. Eğer $x \in c$ ise $B \in (c \cap X, Y)$ olduğundan $Bx \in Y$ dir. Ama eğer $x \in st(A)/c$ ise Teorem 3.2 den $z=(z_k)$, $x$ in $IN/K$-kesiti olmak üzere $\lim_k z_k = 0$ olacak şekilde $\delta_A(K)=0$ olan sonsuz bir $K$ indis cümlesi vardır. $z \in X$, $Bz \in Y$, $B_x^{[K]} \in Y$ ve

$$\begin{aligned} B_n x = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} x_k &= \sum_{k \in K} b_{nk} x_k + \sum_{k \notin IK} b_{nk} x_k \\ &= B_n^{[K]} x + B_n z \end{aligned}$$

olduğundan $Bx \in Y$ elde edilir(Kolk, 1993).

Teorem 4.9 a benzer şekilde $st_0(A)$ uzayı ile ilgili benzer bir sonuç ispatlanabilir.

**Teorem 4.10:** $X$ kesit-kapalı bir dizi uzayı ve $Y$ keyfi bir dizi olsun. Bu atktirde $B \in (st_0(A) \cap X, Y)$ olması için gerek ve yeter şart $B \in (c_0 \cap X, Y)$ ve (4.8) in sağlanmasıdır[16].

Teorem 4.9 a dayanarak, eğer $A$ düzgün regüler bir matris ise, $(st(A), Y)$ ve $(st_0(A), Y)$ matris sınıflarının $(s, Y)$ sınıfi ile çakışık oldukları gösterilebilir.

**Teorem 4.11:** $Y \not\ni s$ bir alt dizi-kapalı dizi uzayı olsun. Eğer $A$ düzgün regüler bir matris ise,

$$(st(A), Y) = (st_0(A), Y) = (s, Y)$$

dır.

**İspat:** $(s, Y) \subset (st(A), Y) \subset (st_0(A), Y)$ olduğundan $(st_0(A), Y) \subset (s, Y)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $B \in (st_0(A), Y)$ ise, Teorem 4.10 dan ($X=s$ olması durumunda) $\delta_A(K)=0$ olacak şekilde her $K$ indis cümlesi için $B^{[K]} \in (s, Y)$ dir. Böylece Teorem 4.8 den $B \in (s, Y)$ elde edilir. [16]

(Connor, 1988) ' $st \subset c_A$ olması için gerek ve yeter şart $A$ nın sıfır olmayan bir çok sınırlı yakınsak kolonlara sahip olmasıdır." sonucunu verdi ve ispatladı. Teorem

4.8 deki (i) ve (ii) ifadelerinin denkliğinden bu sonucun aşağıdaki genişlemesi elde edilir.

**Sonuç 4.1:** Teorem 4.11 in hipotezinde $B \in (st_0, (A), Y)$ (ve buna denk olarak $B \in (st(A), Y)$) olması için gerek ve yeter şart $B$ nin ( en çok ) $Y$ ye ait olan, sıfır olmayan sonlu çoklukta kolona sahip olmasıdır[16].

Bu sonuç $Y=c$ alınması durumunda, Teorem 4.4 ün bir genişlemesi elde edilir.

**Sonuç 4.2:** Eğer $A$ düzgün regüler ise, bu taktirde tüm A-istatistiksel yakınsak dizileri onların limitlerine toplayabilen hiç bir $B$ matrisi yoktur[16].

## 4.3 İstatistiksel Yakınsak Sınırlı Dizilerin Matris Dönüşümleri

$X=m$ için Teorem 4.9 uygulanarak "$B \in (st(A) \cap m, Y)$ olması için gerek ve yeter şart $B \in (c, Y)$ ve $\delta_A(K)=0$ olmak üzere

$$B^{[K]} \in (m, Y) \tag{4.9}$$

olmasıdır" elde edilir. Teorem 4.10 dan "$B \in (st_0(A) \cap m, Y)$ olması için gerek ve yeter şart $B \in (c_0, Y)$ ve (4.9) un sağlanmasıdır" elde edilir.

Burada çok önemli olan $Y=c$ ve $Y=c_0$ durumlarıdır. $(m,c)$ ve $(m,c_0)$ matris sınıflarının bilinen karekterizasyonları kullanılarak (Stiegltz, 1977) aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Sonuç 4.3:** $B \in (st(A) \cap m, c)$ olması için gerek ve yeter şart $B \in (c,c)$ ve $\delta_A(K)=0$, $b_k = \lim_n b_{nk}$ olmak üzere,

$$\lim_n \sum_{k \in K} |b_{nk} - b_k| = 0 \tag{4.10}$$

olmasıdır[16].

**Sonuç 4.4:** $B \in (st_0(A) \cap m, c_0)$ olması için gerek ve yeter şart $B \in (c_0, c_0)$ ve $\delta_A(K)=0$ olmak üzere

$$\lim_n \sum_{k \in K} |b_{nk}| = 0 \tag{4.11}$$

olmasıdır[16].

Teorem 2.8, Sonuç 3.6 ve 3.7 de her p>0 için $st(A)\cap m=W^p(A)\cap m$ olduğu gösterildi. Sonuç 4.3 den Teorem 4.2 nin aşağıdaki genişlemesi elde edilir.

**Sonuç 4.5:** $B\in(W^p(A)\cap m,\ c)$ olması için gerek ve yeter şart $B\in(c,c)$ ve (4.10) un sağlanmasıdır[16].

$A=C_1$ durumunda, Sonuç 4.4, Teorem 4.5 in bir başka ifadesidir. Ayrıca regüler bir $B$ matrisi için $b_k = \lim_n b_{nk}=0$ olduğundan (4.10) şartı (4.11) şartına indirgenir. Böylece Sonuç 4.3, Teorem 4.6 nın bir genişlemesidir. Ek olarak eğer $B$ negatif değilse aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.6:** $B\in\tau^+$ olsun. $B\in(st(A)\cap m,c)$ olması için gerek ve yeter şart ($\delta_A(K)=0 \Rightarrow \delta_B(K)=0$) olmasıdır[16].

Bir başka ifade ile, bundan evvelki sonuca göre negatif olmayan regüler bir $B$ matrisi, A-istatistiksel yakınsak sınırlı dizileri toplaması için gerek ve yeter şart, $B$ nin 0 ve 1 lerden oluşan bütün A-istatistiksel sıfır dizilerini sıfır dizilerine dönüştürmesidir.

$B=A$ olması durumunda Sonuç 4.6 dan (Schoenberg, 1959) in Lemma 4 ünün genişlemesi olan aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.7:** Her $A\in\tau^+$ için $x=(x_k)\in(st(A)\cap m)$ ve $st(A)$- $\lim_k x_k = x_0$ ise, $\lim_n A_n x = x_0$ dır[16].

## KAYNAKLAR


[1] BALCİ, M., **Matematik Analiz,** Cilt I., Ankara, 1985.

[2] BAYRAKTAR, M., **Fonksiyonel Analiz,** Erzurum, 1992.

[3] YURTSEVER, B., **Matematik Analiz Dersleri,** Cilt I., D.Ü.,Fen Fak. Yay.,1978.

[4] BULUT, E.,**Topoloji,** Güven Yayıncılık.

[5] WILANSKY, A., **Summability Through Functional Analysis,** North Holland, 1984.

[6] MADDOX, I.J., **Statistical Convergence In a Locally Convex Space,** Math. Proc. Camb. Phil. Soc.. 104, 277-280, 1988.

[7] CONNOR, J., FRIDY, J., KLINE, J., **Statistically Pre-Cauchy Sequences Analysis,** 14, 311-317, 1994.

[8] HACİSALIHOĞLU, H.H..**Lineer Cebir,** Ankara, 1982.

[9] MADDOX, I. J., **Steinhaus Type Theorems For Summability Matrices,** Proc. Amer. Math. Soc., 45, 209-213, 1974.

[10] MADDOX, I.J., **Elements Of Functional Analysis,** Cambridge Univ. Press, 1970.

[11] CONNOR, J.S., **On Strong Matrix Summability With Resbect To A Modülüs And Statistical Convergence,** Canad. Math. Bull., 32(2), 194-198, 1989.

[12] MADDOX, I.J., **Spaces Of Strongly Summable Sequences,** Quart. J. Math. Oxford(2), 18, 345-355, 1967.

[13] MADDOX, I.J., **Sequences Spaces Defined By A Modulus,** Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 100, 161-166, 1986.

[14] KOLK, E., **Sequence Space Defined By A Sequence Moduli,** Abstracts Of Convergence " Problem Of Pure And Applied Mathematics" Tartu, 63-66, 1988 (Rusça).

[15] KOLK, E., **The Statistical Convergence In Banach Spaces,** Acta Et Comm. Un., Tartuensis, 928, 41-52, 1991.

[16] KOLK, E., **Matrix Summability Of Statistically Convergent Squences,** Analysis, 13, 77-83, 1993.

[17] BUCK, R.C., **Generalized Asymptotic Density,** Amer. J. Math., 75, 335-346, 1953.

[18] FREEDMAN, A.R., SEMBER, J.J., **Density And Summability**, Pas. J. Math., 95, 293-305,1981.

[19] FRIDY, J.A., **Statistical Limit Points,** Amer. Mah. Soc., 118, N4, 1993.

[20] FAST, H., **Sur La Convergence Statistique,** Collog. Math., 2, 241-244, 1951.

[21] FRIDY, J.A., **On Statistical Convergence,** Analysis, 5, 301-313, 1985.

[22] SCHOENBERG, I.J., **The Integrability Of Certain Functions And Related Summability Methods**, Amer. Math. Monthly, 66, 361-375, 1959.

[23] CONNOR, J.S., **The Statistical And Strong p-Cesaro Of Sequence**, Analysis, 8, 47-63, 1988.

[24] RAHT, D., TRIPATHY, C., **On Statistically Convergent And Statistically Cauchy Sequences,**Indian, J. Of Pure And Appl. Math., 25(4), 381-386, 1994.

[25] AGNEV, R.P., **A Simple Sufficient Condition That A Method Of Summablity Be Stronger Than Convergence**, Bull. Amer. Math. Soc., 52, 128-132, 1946.

[26] CONNOR, J.S., **Some Applications Of Functional Analysis To Summablity Theory**, Ph. D. Disserttation, Kent State Un., 1985 (Unpublished).

[27] COOKE, R.G., **Infinite Matrices And Sequence Spaces**, Moscow, 1960 (Rusça).

[28] EIZEN, E., LAUSH, G., **Infinite Matrices An Convergence,** Math. Japan, 14, 137-143, 1963.

[29] FRIDY, J.A., MILLER, H.I., **A Matrix Characterization Of Statistical Convergence**, Analysis, 11, 59-66, 1991.

[30] KING, J.P., **Almost Summable Sequences**, Proc. Amer. Math. Soc., 17, 1219-1225, 1966.

[31] KOLK, E., **Statistically Convergent Sequences In Normed Spaces**, Reports Of Convergence "Methods Of Algebra And Analysis" Tartu, 63-66, 1988.

[32] KOLK, E., **On Strong Boundedness And Summability With Respect To A Sequence Of Moduli**, Acta Et Comm. Un., Tartuensis, 960, 41-50, 1993.

[33] KUTNER, B., **Note On Strong Summability,** J. Lon. Math. Soc., 21, 118-122, 1946.

[34] MADDOX, I.J., **A Tauberian Theorem For Statistical Convergence**, Math. Proc. Camb.Phil. Soc., 106, 277-280, 1989.

[35] NURAY, F., SAVAŞ, E.,**Invariant Statistical Convergence And A-Invariant Statistical Convergence**, Indian J. Pure And Appl. Math., 25(3), 267-274, 1994.

[36] PETERSEN, G.M., **Regular Matrix Transformations**, Mc. Graw Hill, New York-Toronto-Sydney, 1966.

[37] SALAT, T., **On Statistically Convergent Sequences Of Real Numbers**, Math. Slovaca, 30, 139-150, 1980.

[38] SAVAŞ, E., **Infinite Matrices And Generalized Almost Convergent**, Doğa T.J. Math., 11(3), 167-171, 1987.

[39] STIEGLITZ, M., TIETZ, H., **Matrix Transformationen Von Folgenraumen**, Eine Ergbnisubersicht Math.Z., 154, 1-16, 1977.

[40] ZYGMUND, A., **Trigonometric Series**, 2.nd ed. Vol II Camb. Univ. Press, London and New York, 1979.

*ÖZGEÇMIŞ*

1965 yılında Mardin'in Midyat ilcesinde döğdum. İlk-orta-lise öğrenimimi ilçemde tamamladım. 1988 yılında Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdim. Şubat 1989-Şubat 1994 yılları arasında Ankara'da öğretmenlik yaptım. Şubat 1994'de Harran Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakultesi Matematik Bölümünde başladığım araştırma görevliliği görevime halen devam etmekteyim.

Aydın İZGİ