T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

βN *DEKİ NOKTA TİPLERİ ÜZERİNDE RUDİN-KEİSLER YARISIRALAMASI*

Halil ARSLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA - 1998

T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

βN DEKİ NOKTA TİPLERİ ÜZERİNDE RUDİN-KEİSLER YARISIRALAMASI

Halil ARSLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Prof. Dr. M.
Enstitü Müdürü

Bu tez 09/10/1998 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Yrd.Doç.Dr. Sabri BİRLİK	Yrd.Doç.Dr. Mehmet AÇIKGÖZ	Doç.Dr.İ.Halil MUTLU
Danışman	Üye	Üye

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlamamda büyük emeği geçen ve yardımlarını esirgemeyen G.Antep Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden değerli hocam Yrd.Doç.Dr.Sabri BİRLİK 'e teşekkür eder saygılar sunarım.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

βN DEKİ NOKTA TİPLERİ ÜZERİNDE RUDİN-KEİSLER YARISIRALAMASI

Harran Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

1998, Sayfa: 58

Bu çalışma üç bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölüm, diğer bölümler için gerekli tanım ve teoremlere ayrılmıştır.

İkinci bölümde; Stone-Čech kompaktlaması verildi. Daha sonra βX in inşaası ve βX de sıfır kümeleri ifade edildi. Ayrıca βN deki nokta tipleri ve βN de homojenlik verildi.

Son bölümde; βN de nokta tipleri üzerinde yarısıralamalar verildi. Ayrıca Rudin-Keisler yarısıralaması ifade edildi.

ANAHTAR KELİMELER : Automorfizmalar, Filtreler, Ultrafiltreler, Sıfır kümeleri, Stone-Čhech kompaktlaması, Nokta tipleri, Homojenlik, P-noktaları, Rudin-Keisler yarısıralaması

SUMMARY

Master Thesis

POINT TYPES IN THE βN OVER

RUDİN-KEİSLER SEMIORDERED

Harran Üniversity

Graduate School of Natural and Applied Sciences

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

1998, Page: 58

This study consist of three sections.

The first chapter introduces definitions and theorems necessary for the other chapters.

In the second chapter, is given compactation of Stone-Cech. After that construction of βX and zero sets in the βX were defined. In addition point types in the βN and homogenity in the βN is explained.

In the last chapter, point types in the βN over semi-ordered is explained. Besides semiordered Rudin-Keiesler is expressed.

KEYWORDS : Automorphisims, Filters, Ultrafiltres, Stone-Čhech compactification, Zero sets, Types of points, Homogeneuity, P-Points, Partial order of Rudin-Keisler.

SİMGELER DİZİNİ

IN	Doğal Sayılar
Z	Tam Sayılar
IR	Reel Sayılar
$\mathcal{V}(x)$	x in Komşuluklar Ailesi
K(X)	X in Bütün Kompaktlamalarının Kümesi
[Y]	Y nin Denklik Sınıfı
$K^*(X)$	X in Eşdeğer (denk) Kompaktlamaları Kümesi
$C^*(X)$	X den IR ye Sürekli ve Sınırlı Fonksiyonlar Kümesi
O(A)	A nın Sıfır Kümesi
$\tau(p)$	p ile Aynı Tipten Olan Noktalar Kümesi
$\mathfrak{M}$	Parçalanışlar Kümesi
$\mathcal{D}$	IN* İçinde Sayılabilir Sonsuz ve Ayrık Olan Bütün Altuzaylar Topluluğu
$\overleftarrow{f}$	f nin Tersi
Aut(X)	X in Kendi Üzerine Olan Bütün Homeomorfizmalarının Kümesi
$\mathbb{F}$	Bir Filtre
$\lvert A \rvert$	A kümesinin Kardinalliği
$\overline{F}$ veya cl F	F kümesinin kapanışı
τ	Bir Topoloji
τ_D	Diskrete Topoloji (Ayrık Topoloji)
τ_t	Trival Topoloji (İlkel Topoloji)
βX	X in Stone-Čhech Kompaktlaması
βN	IN Doğal Sayılar Kümesinin Stone-Čhech Kompaktlaması

I. BÖLÜM

TEMEL BİLGİLER

1.1. KISMİ VE TAM SIRALAMALAR

Tanım.1.1.1 Yansıyan, ters simetrik ve geçişken bir bağıntıya Sıralama Bağıntısı (veya Kısmi Sıralama Bağıntısı veyahut da buna denk bir ifade ile Yarı Sıralama Bağıntısı) denir.

Örnek 1 Z de $R=\{(a,b) : a|b \text{ ve } a,b\in Z\}$ bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

Örnek 2 Kümeler ailesinde "$\subset$" bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

Örnek 3 Bir düzlemdeki doğrular arasında paralellik bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısı değildir. Çünkü, (a//b ve b//a) iken a=b olması mümkün değildir. Yani, ters simetri özelliği yoktur.

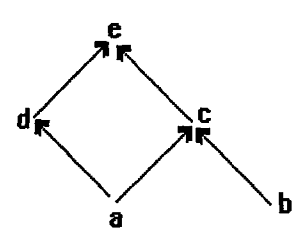
Örnek 4 IR de "$\leq$" bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır

i) R, A da bir sıralama bağıntısı ise (A, R) sıralı ikilisine bir Sıralı Küme denir ve R sıralama bağıntısı genellikle "$\leq$" ile gösterilir.

ii) $A=\{a,b,c,d,e\}$ kümesinde verilen

$$R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,d),(a,c),(d,e),(c,e),(b,c),(a,e),(b,e)\}$$

bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır. Eğer $x\leq y$ olmasını x=y ya da x den y ye oklarla birleştirerek gösterirsek verilen bağıntının şeması



biçiminde olur.

R, A da bir sıralama bağıntısı ve $a,b \in A$ ise $a \leq b$ ise a ile b ye karşılaştırılabilir elemanlar denir. Buna göre yukarıdaki sıralama bağıntısında a ile d,c,e elemanları karşılaştırılabilir, fakat a ile b elemanları karşılaştırılamaz. Çünkü $a \leq b$ ya da $b \leq a$ değildir. Aynı şekilde c ve d elemanları da karşılaştırılamaz.

Tanım.1.1.2 Bir X cümlesinde bir R sıralama bağıntısı tanımlanmış olsun. Bu cümlenin a ve b gibi iki elemanı arasında; aRb veya bRa ilişkilerinden biri muhakkak varsa, bu sıralamaya Tam Sıralama denir.

Veya bir sıralama bağıntısında her iki elemanını karşılaştırmak mümkün ise bu sıralamaya bir Tam Sıralama denir.

Tanım gereğince, sıralama bağıntısında her $a,b \in A$ için aRb veya bRa ise bu sıralama bağıntısı bir tam sıralama bağıntısıdır.

Örnek 5 Kümeler ailesinde "$\subset$" sıralama bağıntısı bir tam sıralama değildir.. Çünkü, bir E evrensel cümlenin A ve B gibi iki alt cümlesinde $A \subset B$ veya $B \subset A$ durumlarından muhakkak birinin bulunması şart değildir. Ayrık da olabilirler.

Örnek 6 Z de $R=\{(a,b) : a|b \text{ ve } a,b \in Z\}$ şeklinde tanımlanan bağıntı bir sıralama bağıntısı idi. Bu sıralama bağıntısı bir tam sıralama değildir. Çünkü, $3,5 \in Z$ olduğu halde ne $3|5$ ve ne de $5|3$ dir.

Örnek 7 IR de "$\leq$" sıralama bağıntısı bir tam sıralama bağıntısıdır.

$(A, \leq)$ bir sıralı küme ve $B \subset A$ ise B de bir sıralı küme olarak düşünülebilir.

Tanım.1.1.3 Sıralı bir kümenin tam sıralı bir alt kümesine bir Zincir denir.

Örnek 8 $A\{a,b,c,d,e\}$ kümesinde verilen

$$R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,d),(a,c),(d,e),(c,e),(b,c),(a,e),(b,e)\}$$

bağıntı bir sıralama bağıntısıdır. Buna göre $B=\{a,c,e\}$ kümesi tam sıralıdır ve B kümesi A nın bir zinciridir.

Tanım.1.1.4 $(A, \leq)$ sıralı bir küme olsun.

i) $a_0 \in A$ için A nın a_0 dan kesin büyük hiç bir elemanı yoksa, yani

$$\text{her } x \in A, \ a_0 \leq x \ \text{ ise } \ x = a_0$$

ise a_0 elemanına, A nın bir Büyük Elemanı veya bir Maksimal Elemanı denir.

ii) A daki tüm elemanlardan büyük veya eşit olan bir eleman varsa, yani her $a \in A$ için $a \leq c$ olacak şekilde bir $c \in A$ varsa c elemanına A nın En Büyük Elemanı veya Son Elemanı denir.

Tanımdan A nın en büyük elemanı varsa tek olacağı açıktır.

Tanım.1.1.5 $(A, \leq)$ sıralı bir küme olsun.

i) $a_1 \in A$ için A nın a_1 den kesin küçük hiçbir elemanı yoksa, yani

her $x \in A$, $x \leq a_1$ ise $x = a_1$

ise a_1 elemanına, A nın bir Küçük Elemanı veya bir Minimal Elemanı denir.

ii) A daki tüm elemanlardan küçük veya eşit olan bir eleman varsa, yani her $a \in A$ için $d \leq a$ olacak şekilde bir $d \in A$ varsa, d ye A nın En Küçük Elemanı veya İlk Elemanı denir.

Tanımdan A nın en küçük elemanı varsa tek olacağı açıktır.

Tanım.1.1.6 $(A, \leq)$ sıralı bir küme ve $B \subset A$ olsun.

i) Her $b \in B$ için $b \leq m$ olacak şekilde bir $m \in A$ varsa M ye B alt kümesinin bir Üst Sınır denir.

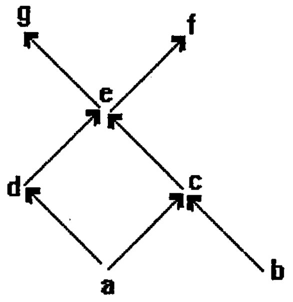
B alt kümesinin üst sınırlar kümesinin (varsa) en küçük elemanına B nin En Küçük Üst Sınır veya Supremumu denir ve supB ile gösterilir.

ii) Her $b \in B$ için $m \leq b$ olacak şekilde bir $m \in A$ varsa m ye B alt kümesinin bir Alt Sınırı denir.

B alt kümesinin alt sınırlar kümesinin (varsa) en büyük elemanına B nin En Büyük Alt Sınırı veya İnfimumu denir ve infB ile gösterilir.

iii) B nin bir üst sınırı varsa B ye üstten sınırlı, bir alt sınırı varsa alttan sınırlı ve hem üst hem de alt sınırı varsa sınırlı alt küme denir.

Örnek 9 $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ ve $B=\{c,d,e\}$ ise



sıralamasına göre;

1) A nın minimal elamanları {a,b},

2) A nın maksimal elemanları {g,f},

3) B nin tek alt sınırı {a},

4) B nin üst sınırları {e,f,g},

5) supB=e ve infB=a dır.

Örnek 10 (IR,≤) tam sıralı kümesinin bir A=[-1,1[alt kümesi verilsin.

A nın alt sınırları; a≤-1 olan tüm a reel sayılarıdır. Şu halde A nın en büyük alt sınırı -1 dir, yani infA=-1 dir.

A nın üst sınırları; 1≤b olan b reel sayılarıdır. Şu halde A nın en küçük üst sınırı 1 dir, yani supA=1 dir.

Bu örnekte infA∈A, fakat supA∉A olduğuna dikkat edelim.

Zorn Lemması Yarı sıralanmış bir (X,≤) kümesinin tam sıralanmış her alt kümesinin bir üst sınırı varsa; (X, ≤) kümesinin bir maksimal elemanı vardır.

Başka bir ifade ile; boş olmayan ve her zincirinin bir üst sınırı olan sıralı bir kümenin bir maksimal elemanı vardır.

1.2. DENKLİK BAĞINTISI

Tanım.1.2.1. R, A da bir bağıntı olsun. Eğer R nin yansıma, simetri ve geçişme özellikleri varsa R ye bir Denklik Bağıntısı denir.

Örnek 11 A bir küme ise elemanlar arasında tanımlanan "eşitlik" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Gerçekten R={(x,x): x∈A} bağıntısı yansıyan, simetrik ve geçişkendir.

Örnek 12 Z de R={(a,b) : n|a-b, n>0 ve a,b∈Z} şeklinde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Gerçekten,

her a∈Z için n|a-a ⇔ $\frac{a-a}{n} = \frac{0}{n}$ =0 Z olduğundan (a,a) ∈R, yani

yansıyan,

(a,b)∈R ise n|a-b ise $\frac{a-b}{n} = k$ Z ise $\frac{b-a}{n} = k$ Z ise (b,a)∈R, yani

simetrik,

(a,b)∈R ve (b,c) ∈R ise n|a-b ve n|b-c ise $\frac{a-b}{n} = k_1$ ∈Z ve

$\frac{b-c}{n} = k_2$ ∈Z ise a-b=nk_1 ve b-c=nk_2 ise (a-b)+(b-c)=a-c=nk_1+nk_2 ise

$\frac{a-c}{n} = k_1 + k_2$ Z ise (a,c)∈R olduğundan geçişkendir.

Tanım.1.2.2 R, A da bir denklik bağıntısı ve x∈A olsun. R bağıntısına göre x elemanına denk olan A kümesinin elemanları A nın bir alt kümesini oluştururlar. Bu kümeye x elemanının Denklik Sınıfı denir ve genelde [x] veya $\bar{x}$ ile gösterilir.

Tanım gereğince; [x]={y∈A : yRx} dir.

R, A da bir denklik bağıntısı olsun. R denklik bağıntısının belirttiği denklik sınıfları A nın bir ayrışımını belirtir.

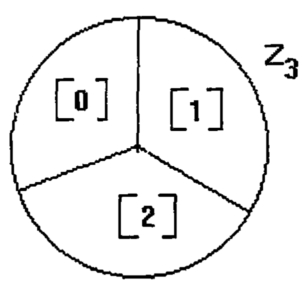
Örnek 13 Z de R={(a,b) : 3|a-b ve a,b∈Z} denklik bağıntısına göre oluşan denklik sınıfları;

[0]={...,-6,-3,0,3,6,...}

[1]={...,-5,-2,1,4,7,...}

[2]={...,-4,-1,2,5,8,...}

dir ve;



şeklinde de görüldüğü gibi {[0],[1],[2]} ailesi Z nin bir ayrışımını belirtiyor.

Tanım.1.2.3 Z de $R=\{(a,b) : n|a-b,\ n>0 \text{ ve } a,b\in Z\}$ denklik bağıntısının oluşturduğu denklik sınıflarının kümesi Z_n ile gösterilir ve Modulo n Kalan Sınıfları kümesi adını alır.

$\{A_i\}_{i\in I}$ ailesi, A kümesinin bir ayrışımı ise A da bir denklik bağıntısı belirtir. Bu denklik bağıntısına göre denklik sınıfları A_i ayrışım kümeleridir.

Bu uyarı gereğince,

$$\text{Her } a,b\in A \text{ içi } aRb \Leftrightarrow \exists\ i\in I,\ a,b\in A_i \text{ dir}$$

şeklinde daima bir R bağıntısı tanımlanabilir.

Örnek 14 A={1,2,3,4,5} ve bir ayrışımı {{1},{2,3},{4,5}} olsun. Bu ayrışımın verdiği R bağıntısı;

$$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2),(4,4),(5,5),(4,5),(5,4)\}$$

şeklinde bir denklik bağıntısı olur.

Tanım.1.2.3. R, A da bir denklik bağıntısı olsun. A nın R ye göre oluşan tüm denklik sınıfları kümesine A nın R ye göre Bölüm Kümesi denir ve A\R ile gösterilir.

Her $x\in A$ elemanına bir ve yalnız bir tek $[x]\in A\backslash R$ denklik sınıfı karşılık geldiğinden A kümesinden A\R kümesine $\psi:A\rightarrow A\backslash R$, $\psi(x)= [x]$ fonksiyonu tanımlanır. Örten fakat bire-bir olmayan bu fonksiyona Doğal Fonksiyon denir.

A\R bölüm kümesinde, her sınıftan bir ve yalnız bir eleman alarak oluşturulan kümeye bir tam Temsilciler Sistemi denir.

Örnek 15 Örnek 13 de görüldüğü gibi, Z nin mod3 kalan sınıfları kümesi Z_3 ün bir tam temsilciler sistemi olarak {0,1,2} kümesi alınabilir.

1.3. FONKSİYONLAR HAKKINDA ÖNEMLİ KAVRAMLAR

1.3.1. FONKSİYON KISITLAMASI

Tanım 1.3.1. $f:X\rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $A\subset X$ ise o zaman f nin A ya kısıtlanması $f|_A$ ile gösterilir ve her $x\in A$ için $f|_A:A\rightarrow Y$, $f|_A(x)=f(x)$ olarak tanımlanır. Daima $f|_A$ verilir verilemez $f|_A= f\cap(AxY)$ özelliğini gözönüne getirilmelidir.

1.3.2. FONKSİYON GENİŞLEMESİ

Tanım 1.3.2. $X \subset X^*$ olmak üzere $f:X \to Y$ fonksiyonu $g:X^* \to Y$ fonksiyonunun bir kısıtlanmışı ise o zaman g ye f nin bir genişlemesi denir.

Tanım gereğince $X \subset X^*$ olmak üzere $g:X^* \to Y$ fonksiyonunun her $x \in X$ için $f:X \to Y$, $f(x)=g(x)$ şeklinde tanımlanan bir kısıtlanmışı var ise g fonksiyonu f nin bir genişlemesidir.

1.3.3. HOMEOMORFİZMALAR

Tanım 1.3.3. (X,τ) ve $(Y,\mathcal{S})$ iki topolojik uzay olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $f:X \to Y$ fonksiyonuna bu topolojik uzaylar arasında bir homeomorfizm (veya topolojik eşyapı) adı verilir.

i) f, bire-bir ve örtendir.

ii) f, süreklidir.

iii) f^{-1}, süreklidir.

Eğer iki topolojik uzay arasında en az bir homeomorfizm varsa bu iki topolojik uzaya Homeomorf vaya Topolojik Denk Uzaylar denir.

Yukarıdaki tanımda (iii) aksiyomundaki "f^{-1} süreklidir" koşulu yerine "f açık" veya " f kapalı" koşulu da kullanılabilir.

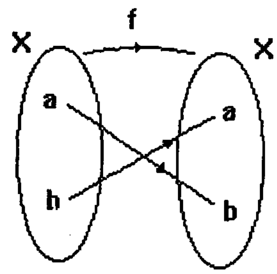
Örnek 16 X en az iki noktalı bir küme olmak üzere $i:(X, \tau_D) \to (X,\tau_t)$, $i(x)=x$ özdeşlik fonksiyonu bir homeomorfizm değildir. Çünkü, i birim fonksiyonu bire-bir, örten ve süreklidir, fakat açık değildir.

(X,τ_1) ve (X,τ_2) nin birbirine homeomorf olması özdeşlik fonksiyonunun bir homeomorfizm olmasını gerektirmez.

Örnek 17 $X=\{a,b\}$, $\tau_1=\{\phi,X,\{a\}\}$ ve $\tau_2=\{\phi,X,\{b\}\}$, X üzerinde iki topoloji,

$f:X \to X$, $f(a)=b$ ve

$f(b)=a$ yani



fonksiyonu bir homeomorfizm olduğundan (X,τ_1) ve (X,τ_2) topolojik uzayları homeomorftur, fakat $i:X\rightarrow X$, $i(x)=x$ özdeşlik fonksiyonu bir homeomorfizm değildir. Çünkü, $i(\{a\})=\{a\}\notin\tau_2$ olduğundan i birim fonksiyonu açık değildir.

1.3.4. GÖMME FONKSİYONU

Tanım 1.3.4 (X,τ) ve (Y,S) iki topolojik uzay olsun. Eğer bir $f:X\rightarrow f(X)\subset Y$ fonksiyonu bire-bir, sürekli ve ayrıca $f^{-1}:f(X)\rightarrow X$ sürekli ise bu f fonksiyonuna X den Y içine bir Gömme Fonksiyonu adı verilir.

Burada f(X) alt uzay topolojisi ile gözönüne alınmıştır. Böyle bir f fonksiyonu varsa X, f ile Y içine gömülmüştür deriz.

Buna göre, eğer (X,τ) ve (Y,S) nın bir alt uzayına homeomorf ise X, Y içine gömülmüş olur.

1.3.5. SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Tanım 1.3.5. (X,τ) ve (Y,S) iki topolojik uzay, $x_0\in X$ ve

$$f: X\rightarrow Y$$
$$x_0\rightarrow f(x_0)$$

bir fonksiyon olsun. Bu durumda

i) Her $V\in\mathcal{V}(f(x_0))$ için $\exists U\in\mathcal{V}(x_0)$, $\ni$ $f(U)\subset V$ ise (en az bir $U\in\mathcal{V}(x_0)$ için f(U), her $V\in\mathcal{V}(f(x_0))$ in içine itilebiliyor ise) f fonksiyonuna $x_0\in X$ noktasında süreklidir denir.

ii) Eğer f fonksiyonu her $x\in X$ noktasında sürekli ise bu f fonksiyonuna X üzerinde süreklidir denir.

Örnek.18 $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{1,2,3\}$ ve $\tau_X=\{\phi,X,\{a\},\{a,b\}\}$ ve $\tau_Y=\{\phi,Y,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ olsun. Bu durumda $f:X\to Y$, $f(a)=1$, $f(b)=2$ ve $f(c)=3$ olarak tanımlansın. f nin sürekli olup olmadığını belirtiniz.[1]

Çözüm $X \xrightarrow{f} Y$

$a \to 1$

a nın her U	1 in her V
komşulukları;	komşulukları;
$\{a\},\{a,b\},X$	$\{1\},\{1,2\},\{1,3\}$ve Y

Bu durumda a nın komşuluklarından sadece $\{a\}$ açık kümesini alalım(Çünkü, a nın en az bir komşuluğu ile şartın sağlanmasını görmek yeterlidir). Şu halde $f(\{a\})\subset\{1\},\{1,2\},\{1,3\},Y$ olduğundan f fonksiyonu a noktasında süreklidir.

$X \to Y$

$b \to 2$

b nın her U	2 in her V
komşulukları;	komşulukları;
$\{a,b\},X$	$\{2\},\{1,2\},\{2,3\}$ve Y

b nin en az bir komşuluğunun f tarafından 2 nin bütün komşuluklarının içine itilip itilmediğini araştırıyoruz.

Açıkça görülüyor ki, b nin hiçbir komşuluğu $\{2\}$ açık cümlesinin içine itilemez. 2 nin diğer komşuluklarını bile kontrol etmemize gerek kalmıyor. Dolayısıyla f, b noktasında sürekli değildir.

$X \to Y$

$c \to 3$

c nın her U	3 in her V
komşulukları;	komşulukları;
X dir	$\{3\},\{1,3\},\{2,3\}$ve Y dir.

Bu durumda $f(X)=\{1,2,3\}$ ve $f(X)\not\subset\{3\},\{1,3\},\{2,3\},Y$ olduğundan f, x=c noktasında da sürekli değildir. Dolayısıyla f, X üzerinde sürekli değildir.

1.4. FİLTRE VE ULTRAFİLTRELER

Herhangi bir topolojik uzayda amaca uygun bir yakınsaklık teorisini kurmak için diğer bir araç da "filtre" adı verilen ve literatürde çok daha sıkça kullanılan yapılardır.

Tanım 1.4.1. X herhangi bir küme ve S de X in alt kümelerinden oluşan bir aile olsun. Eğer S ailesi sonlu sayıda arakesit ve sonlu sayıda birleşime göre kapalı ise o zaman bu aileye X uzayının bir Kümeler Halkası denir.

Tanım gereğince; S, X in bir kümeler halkası ve her $i \in I$ için $A_i \in S$ $(i=1,2,3,...,n)$ ise, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in S$ ve $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in S$ dir.

Örnek 1.4.1. X herhangi bir küme ise X in bütün alt kümelerinden oluşan P(X) kuvvet kümesi(ailesi) X üzerinde bir kümeler halkasıdır.

Tanım 1.4.2. S, X in bir kümeler halkası ve $\mathbb{F}$, S nin alt kümelerinden oluşan ve boş olmayan bir ailesi olsun. Eğer $\mathbb{F}$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu $\mathbb{F}$ ailesine X üzerinde bir S-filtre denir.

1) $\varnothing \notin \mathbb{F}$,

2) $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$ ise $F_1 \cap F_2 \in \mathbb{F}$

3) $F \in \mathbb{F}$, $F' \in S$ ve $F \subset F'$ ise $F' \in \mathbb{F}$ dir

(S deki F' cümlelerinden $\mathbb{F}$ deki F cümlesini kapsayan varsa o F' cümlesi mutlaka $\mathbb{F}$ ye aittir.).

S=P(X) ve $\mathbb{F}$ bir S-filtre ise $\mathbb{F}$ ye kısaca X üzerinde bir filtre denir.

Örnek 1.4.2. $X=\{a,b,c\}$ ve $S=\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ olsun. Bu taktirde $\mathbb{F}=\{\{a\},\{a,b\},X\}$ ailesi X üzerinde bir filtredir.

Çünkü,

1) $\varnothing \notin \mathbb{F}$ dir.

2) $\{a\}\cap\{a,b\}=\{a\} \in \mathbb{F}$, $\{a\}\cap X=\{a\} \in \mathbb{F}$ ve $\{a,b\}\cap X=\{a,b\} \in \mathbb{F}$ dir.

3) $\{a\} \in \mathbb{F}$ $\{a\} \in S$ ve $\{a\}=F\subset F'=\{a\}$ iken $F'=\{a,b\} \in \mathbb{F}$ dir.

$\{a,b\} \in \mathbb{F}$ $\{a,b\} \in S$ ve $\{a,b\}=F\subset F'=\{a,b\}$ iken $F'=\{a,b\} \in \mathbb{F}$ dir.

$X \in \mathbb{F}$ $X \in S$ ve $X=F\subset F'=X$ iken $F'=X \in \mathbb{F}$ dir.

Ayrıca,

$\{a\} \in \mathbb{F}$ $\{a,b\} \in S$ ve $\{a\} = F \subset F' = \{a,b\}$ iken $F' = \{a,b\} \in \mathbb{F}$ dir.

$\{a\} \in \mathbb{F}$ $X \in S$ ve $\{a\} = F \subset F' = X$ iken $F' = X \in \mathbb{F}$ dir.

$\{a,b\} \in \mathbb{F}$ $X \in S$ ve $\{a,b\} = F \subset F' = X$ iken $F' = X \in \mathbb{F}$ dir.

şeklinde filtre aksiyomları sağlandığından dolayı $\mathbb{F}$, X üzerinde bir filtredir.

Örnek 1.4.3. (X, τ) bir topolojik uzay ve $a \in X$ olsun. $\mathbb{F} = \mathcal{V}(a)$ olarak alalım. Bu takdirde $\mathbb{F}$ bir filtredir.

İspat

1) a noktasının her V komşuluğunda en azından a noktasının kendisi bulunduğundan $\emptyset \notin \mathcal{V}(a)$ dir.

2) $F_1, F_2 \in \mathbb{F} \Rightarrow F_1, F_2 \in \mathcal{V}(a)$ dir.

Bu takdirde $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{V}(a)$ dir. (komşuluklar bahsi ilgili teorem gereğidir.)

3) $N \in \mathbb{F}$, $M \in P(X)$ ve $N = F \subset F' = M$ iken $M = F' \in \mathbb{F} = \mathcal{V}(a)$ dir. (komşuluklar bahsi ilgili teorem gereğincedir.)

Yine filtre aksiyomları sağlandığı için $\mathbb{F}$ bir filtredir.

Örnek 1.4.4. X bir küme ve $x_0 \in X$ olsun. Bir $\mathbb{F}$ kümesini

$\mathbb{F} = \{A \mid x_0 \in A, A \in P(X)\}$ biçiminde tanımlayalım. Bu takdirde $\mathbb{F}$ bir filtredir.

İspat

1) $A \in \mathbb{F}$ için $x_0 \in A$ olacağından $A \neq \emptyset$ dir. Dolayısıyla $\emptyset \notin \mathbb{F}$ dir.

2) Her $F_1, F_2 \in \mathbb{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \overset{?}{\in} \mathbb{F}$

$F_1 \in \mathbb{F} \Rightarrow x_0 \in F_1$

$F_2 \in \mathbb{F} \Rightarrow x_0 \in F_2$. Bu iki ifadeden $F_1 \cap F_2$ alınırsa $x_0 \in F_1 \cap F_2$ olur. Bu da $F_1 \cap F_2 \in \mathbb{F}$ demektir.

3) Herhangi bir $F \in \mathbb{F}$ ve $F \subset F'$ koşulunu sağlayan bir $F' \in P(X)$ verilsin. $F \in \mathbb{F} \Rightarrow x_0 \in F$ dir. $x_0 \in F$ olduğunda $F \subset F'$ kapsaması kullanılırsa $x_0 \in F'$ olur. Bu da $F' \in \mathbb{F}$ olduğunun ifade eder. Dolayısıyle $\mathbb{F}$ bir filtredir.

1.4.1. FİLTRE TABANI

Tanım.1.4.1.1. $\mathbb{F}$,X üzerinde bir filtre, $\mathbb{F}_0 \subset \mathbb{F}$ ve bir filtre $\mathbb{F}_0 \subset P(X)$ olsun. Eğer her $F \in \mathbb{F}$ için $F_0 \subset F$ olacak şekilde bir $F_0 \in \mathbb{F}_0$ varsa bu $\mathbb{F}_0$ alt ailesine $\mathbb{F}$ nin bir tabanı (filtre tabanı) adı verilir.

veya,

$\mathbb{F}$ bir S-filtre olsun. Her $F \in \mathbb{F}$ için $F_0 \subset F$ olacak şekilde bir $F_0 \in \mathbb{F}_0$ varsa ; $\mathbb{F}_0$ ailesine $\mathbb{F}$ nin bir S-filtre bazı denir.

Örnek.1.4.1.1.

X bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x in bütün komşuluklar ailesini $\mathcal{V}(x)$, ve bu komşuluklar ailesinin bazını da $\mathbb{F}_0(x)$ ile gösterelim.

Komşuluklar tabanı tanımı gereğince her $F \in \mathcal{V}(x)$ için $F_0 \subset F$ olacak şekilde bir $F_0 \in \mathbb{F}_0(x)$ bulunduğundan $\mathbb{F}_0(x)$, $\mathcal{V}(x)$ filtresinin bir bazıdır.

Teorem.1.4.1.1. S, X uzayı üzerinde bir kümeler halkası ve $\mathbb{F}_0 \subseteq S$ alt ailesi de S nin boş olmayan alt kümelerinden oluşsun.

$\mathbb{F}_0$ in bir S-filtre tabanı olması için $\Leftrightarrow$ 1) Her $F \in \mathbb{F}_0$ için $F \neq \varnothing$ dir.

2) Her F_1, $F_2 \in \mathbb{F}_0$ için $F_3 \subset F_1 \cap F_2$ olacak şekilde bir $F_3 \in \mathbb{F}_0$ bulunmasıdır.[1]

İspat

(⇒)$\mathbb{F}_0$ bir S-filtre tabanı olsun. Bu durumda $\mathbb{F}_0$,$\mathbb{F}$ gibi bir S-filtresinin tabanıdır.

1) Her $F \in \mathbb{F}_0$ için $F \neq \varnothing$?

$F \in \mathbb{F}_0 \subseteq \mathbb{F}$ olduğundan $F \in \mathbb{F}$ dir. $\mathbb{F}$ bir S-filtre olduğundan $\varnothing \notin \mathbb{F}$ dir. Dolayısıyle $F \neq \varnothing$ dir.

2) $F_1, F_2 \in \mathbb{F}_0 \subseteq \mathbb{F}$ olduğundan $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$ dir. $\mathbb{F}$ bir S-filtre olduğundan $F_1 \cap F_2 \in \mathbb{F}$ dir. $\mathbb{F}_0$, $\mathbb{F}$ nin tabanı olduğundan Tanım.1.4.1.1. gereğince her

$F=F_1\cap F_2\in\mathbb{F}$ için $F_3\subset F_1\cap F_2=F$ olacak şekilde bir $F_3\in\mathbb{F}_0$ vardır. Bu da her $F_1,F_2\in\mathbb{F}_0$ için $F_3\subset F_1\cap F_2$ olacak şekilde bir $F_3\in\mathbb{F}_0$ vardır, ifadesini doğrular.

($\Leftarrow$)$\mathbb{F}_0$ alt ailesi (1) ve (2) şıklarını sağlasın. Şimdi de bir $\mathbb{F}$ ailesini,

$$\mathbb{F}=\{F\in S : \exists F'\in\mathbb{F}_0 \text{ için } F'\subset F\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\mathbb{F}$ nin bir filtre olduğunu göstermek çözümdür;

1) $F\in\mathbb{F}$ alalım. $F'\subset F$ olacak şekilde bir $F'\in\mathbb{F}_0$ vardır. Bu ise $F'\neq\varnothing$ demektir. $\phi\neq F'\subset F$ olduğundan $F\neq\varnothing$ dir. Dolayısıyle $\varnothing\notin\mathbb{F}$ dir.

2) $F_1,F_2\in\mathbb{F}$ ise $F_1\cap F_2\in\mathbb{F}$?

$F_1,F_2\in\mathbb{F}$ ise $F_1\subset F_1'$ ve $F_2\subset F_2'$ olacak şekilde F_1', $F_2'\in\mathbb{F}_0$ vardır. Dolayısıyle $\mathbb{F}_0$ in bir F' elemanı için $F'\subset F_1'\cap F_2'\subset F_1\cap F_2$ dir. Bu da $F_1\cap F_2\in\mathbb{F}$ olmasını ifade eder.

3) $F\in\mathbb{F}$, $F'\in S$ ve $F\subset F'$ ise $F'\in\mathbb{F}$ *?*. $F\in\mathbb{F}$ alalım. $\exists F'\in\mathbb{F}_0$ için $F'\subset F$ dir. Bu durumda; $F\subset F'$ verilmiş demek, $F'\subset F$ $\mathbb{F}$ nın tanımı gereğidir.

$\Rightarrow F'=F\in\mathbb{F}$ olur. O halde $F'\in\mathbb{F}$ bulunmuş olur. Dolayısıyle $\mathbb{F}$ bir filtredir. $\mathbb{F}_0$ alt ailesi de $\mathbb{F}$ yi oluşturan bir tabandır.

Sonuç.1.4.1.1. $\mathbb{F}_0$ bir S-filtre tabanı olsun. Bu takdirde $\mathbb{F}=\{F\in S : \exists F'\in\mathbb{F}_0$ için $F'\subset F\}$ şeklinde tanımlayalım. Yani, $\mathbb{F}_0$ ailesinin elemanlarını kapsayan bütün üst kümelerin $\mathbb{F}$ ailesini alıyoruz. Bu $\mathbb{F}$ ailesi bir filtredir.[1]

Tanım.1.4.1.2. $\mathbb{F}_0$ bir S-filtre tabanı olsun. Bu takdirde;

$\mathbb{F}=\{F\in S : \exists F'\in\mathbb{F}_0$ için $F'\subset F\}$ şeklinde tanımlanan filtreye $\mathbb{F}_0$ in Doğurduğu Filtre adı verilir.

$S=P(X)$ ve $\mathbb{F}_0$ da bir S-filtre tabanı ise $\mathbb{F}_0$ a kısaca filtre tabanı denir.

Örnek.1.4.1.2. X herhangi bir küme ve $\varnothing\neq A\subset X$ olsun. $\mathbb{F}_0=\{A\}$, X üzerinde bir filtre tabanıdır. ve bu taban tarafından doğurulan filtrede;

$\mathbb{F}=\{F\subset X : A\subset F\}$ ailesidir.

Not: $\mathbb{F}_0$ bir filtre tabanı olsun. $\mathbb{F}_0$ tarafından doğurulan filtre $\mathbb{F}$ ise $\mathbb{F} = <\mathbb{F}_0>$ biçiminde gösterilir.

Örnek.1.4.1.3. (x_n), X de bir dizi olsun. Her $k \in N$ için $F_k = \{x_n : n \geq k\}$ şeklinde tanımlanan F_k ların $\mathbb{F}_0 = \{F_k : k \in N\}$ ailesi X üzerinde bir filtre tabanıdır. Bu şekilde elde edilen $\mathbb{F} = <\mathbb{F}_0>$ filtresine (x_n) dizisi ile üretilen filtre denir.

Örnek.1.4.1.4. $\mathbb{F}_0 = \{(a,+\infty) : a \in R\}$ ailesi R üzerinde bir filtre tabanıdır. Buna göre $\mathbb{F} = <\mathbb{F}_0>$ filtresine R üzerinde Frechet Filtresi adı verilir.

(X, τ) bir topolojik uzay ve $S=\tau$ alalım. Bu durumda S-filtre yerine Açık Filtre tabiri kullanılır.

Örnek.1.4.1.5. X bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. $\mathcal{V}(x)$, x in açık komşulukları ailesi ise $\mathcal{V}(x)$ bir açık filtredir.

Tanım.1.4.1.3. $\mathbb{F}_0$ ve $\mathbb{F}_0'$ birer filtre tabanı ve $\mathbb{F}$ ile $\mathbb{F}'$ de bu tabanlar tarafından doğurulan birer filtre olsun. Eğer $\mathbb{F} = \mathbb{F}'$ ise bu iki filtre tabanına Denk Filtre Tabanları denir.

Bu durumda iki filtre tabanına Aynıdırlar gözüyle bakılabilir.

1.4.2 BİR FİLTRENİN GÖRÜNTÜSÜ VE TERS GÖRÜNTÜSÜ

Teorem.1.4.2.1. X ve Y iki küme $f : X \to Y$ bir fonksiyon, $\mathbb{F}$,Y üzerinde bir filtre ve $\mathbb{F}_0$ da $\mathbb{F}$ nin bir tabanı olsun. Her $F_0 \in \mathbb{F}_0$ için $f^{-1}(F_0) \neq \varnothing$ olmak üzere $f^{-1}(\mathbb{F}_0)$ kümesini $f^{-1}(\mathbb{F}_0) = \{ f^{-1}(F_0) : F_0 \in \mathbb{F}_0 \}$ şeklinde tanımlayalım. Bu zaman $f^{-1}(\mathbb{F}_0)$ bir filtre tabanıdır.[6]

İspat

1) Kabulümüz gereği $\varnothing \notin f^{-1}(\mathbb{F}_0)$ dir.

2) Herhangi $f^{-1}(F_1)$, $f^{-1}(F_2) \in f^{-1}(\mathbb{F}_0)$ verilsin. $\mathbb{F}_0$ bir filtre tabanı olduğundan $F_3 \subset F_1 \cap F_2$ olacak şekilde bir $F_3 \in \mathbb{F}_0$ vardır. Buradan $f^{-1}(F_3) \subset f^{-1}(F_1 \cap F_2) = f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2)$

yazılır. Ayrıca $F_3 \in \mathbb{F}_0$ olduğundan $f^{-1}(F_3) \in f^{-1}(\mathbb{F}_0)$ elde edilir. O halde; $f^{-1}(\mathbb{F}_0)$ bir filtre tabanıdır.

Tanım.1.4.2.1. X ve Y iki küme $f:X \to Y$ bir fonksiyon, $\mathbb{F}$,Y üzerinde bir filtre ve $\mathbb{F}_0$ da $\mathbb{F}$ nin bir tabanı olsun. Bu takdirde $f^{-1}(\mathbb{F}_0)$ kümesine $\mathbb{F}_0$ filtre tabanının f altındaki ters görüntüsü ve $f^{-1}(\mathbb{F}_0)$ tarafından X üzerinde doğurulan $f^{-1}(\mathbb{F}) = \langle f^{-1}(\mathbb{F}_0) \rangle$ filtresine de $\mathbb{F}$ filtresinin ters görüntüsü denir.

Teorem.1.4.2.2. X ve Y iki küme $f:X \to Y$ bir fonksiyon ve $\mathbb{F}_0$ da X üzerinde bir filtre tabanı olsun. Bir $f(\mathbb{F}_0)$ kümesini $f(\mathbb{F}_0) = \{ f(F_0) : F_0 \in \mathbb{F}_0 \}$ biçiminde tanımlarsak bu da Y üzerinde bir filtre tabanıdır.[6]

İspat

1) $\varnothing \notin (\mathbb{F}_0)$ olduğundan $f(\varnothing) = \varnothing \notin f(\mathbb{F}_0)$ dir.

2) Herhangi $f(F_1)$, $f(F_2) \in f(\mathbb{F}_0)$ verilsin. $\mathbb{F}_0$ bir filtre tabanı ve $F_1, F_2 \in \mathbb{F}_0$ olduğundan $F_3 \subset F_1 \cap F_2$ olacak şekilde bir $F_3 \in \mathbb{F}_0$ vardır. Buna göre,

$f(F_3) = f(F_1 \cap F_2) \subset f(F_1) \cap f(F_2)$ yazılır. Ayrıca $F_3 \in \mathbb{F}_0$ olduğundan $f(F_3) \in f(\mathbb{F}_0)$ olur. O halde; $f(\mathbb{F}_0)$ de bir filtre tabanıdır

Tanım.1.4.2.2. X ve Y iki küme $f:X \to Y$ bir fonksiyon, $\mathbb{F}_0$ da X üzerinde bir filtre tabanı ve de bu taban tarafından doğurulan filtre de $\mathbb{F}$ filtresi olsun. Bu takdirde $f(\mathbb{F}_0)$ kümesine $\mathbb{F}_0$ filtre tabanının f altındaki görüntüsü, $f(\mathbb{F}_0)$ tarafından Y üzerinde doğurulan $f(\mathbb{F}) = \langle f(\mathbb{F}_0) \rangle$ filtresine ise $\mathbb{F}$ filtresinin f altındaki görüntüsü denir.

1.4.3. FİLTRELERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Tanım.1.4.3.1. $\mathbb{F}_1$ ve $\mathbb{F}_2$, X üzerinde iki filtre olsunlar. Eğer $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_1$ ise $\mathbb{F}_1$ filtresine $\mathbb{F}_2$ filtresinden daha ince (veya $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_1$ den kaba) denir.

X üzerindeki bütün filtrelerin ailesini $\mathbb{F}$ ile gösterirsek; $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2 \in \mathbb{F}$ olmak üzere;

$\mathbb{F}_1 \leq \mathbb{F}_2 \Leftrightarrow \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}_2$ biçiminde verilen (tanımlanan) " $\leq$ " bağıntısının bir kısmi sıralama bağıntısı olduğunu göstermek kolaydır.

Teorem.1.4.3.1. $(\mathbb{F}_i)_{i\in I}$,X üzerindeki filtrelerin boş olmayan bir ailesi olsun. Bu takdirde $\mathbb{F} = \bigcap_{i\in I} \mathbb{F}_i$ ailesi de X üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir filtredir.

i) $\mathbb{F}$, $\forall \mathbb{F}_i$ filtresinden daha kabadır.

ii) Eğer bir $\mathbb{F}'$ filtresi $\forall i \in I$ için $\mathbb{F}_i$ filtresinden kaba ise bu takdirde $\mathbb{F}$ filtresi $\mathbb{F}'$ filtresinden incedir.

İspat

1) $\forall \mathbb{F}_i$ bir filtre olduğundan $\forall i \in I$ için $\varnothing \notin \mathbb{F}_i$ dir. Dolayısıyle $\varnothing \notin \bigcap_{i\in I} \mathbb{F}_i = \mathbb{F}$ den $\varnothing \notin \mathbb{F}$ dir.

2) Herhangi $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$ verilsin. $\forall i \in I$ için $F_1, F_2 \in \mathbb{F}_i$ olduğundan yine $\forall i \in I$ için $F_1 \cap F_2 \in \mathbb{F}_i$ yazılır. Buna göre $F_1 \cap F_2 \in \mathbb{F}$ bulunur.

3) Herhangi $F \in \mathbb{F}$ ve $F \subset F'$ şartını sağlayan $F' \subset X$ verilsin. $F' \in \mathbb{F}$?

$F \in \mathbb{F}$ olduğundan $\forall i \in I$ için $F \in \mathbb{F}_i$ yazılır. Yine $F \subset F'$ ve $F \in \mathbb{F}_i$ olduğundan $\forall i \in I$ için $F' \in \mathbb{F}_i$ olup, buradan $F' \in \mathbb{F}$ elde edilir.

Şimdi de $\mathbb{F}$ filtresinin (i) özelliğini sağladığını gösterelim;

$\bigcap_{i\in I} \mathbb{F}_i = \mathbb{F}$ olduğundan $\forall i \in I$ için $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}_i$ dir. Bu da $\mathbb{F}$ nin $\mathbb{F}_i$ den kaba olduğunu ifade eder.

(ii) özelliğini sağladığını gösterelim;

Bir $\mathbb{F}'$ filtresinin $\forall i \in I$ için $\mathbb{F}_i$ filtresinden kaba olduğunu kabul edelim. (Yani, $\mathbb{F}' \subset \mathbb{F}_i$ olduğunu kabul edelim.) Buna göre $\mathbb{F}' \subset \bigcap_{i\in I} \mathbb{F}_i = \mathbb{F}$ olup, $\mathbb{F}' \subset \mathbb{F}$ elde edilir. Bu da $\mathbb{F}$ nin $\mathbb{F}'$ den ince olduğunu ifade eder.

Teoremdeki $\mathbb{F} = \bigcap_{i\in I} \mathbb{F}_i$ ifadesi için $\mathbb{F}$ filtresi $(\mathbb{F}_i)_{i\in I}$ filtre ailesinin 1.5.3.1. tanımındaki sıralama bağıntısına göre En Büyük Alt Sınırdır.

Teorem.1.4.3.2. X üzerindeki filtrenin boş olmayan bir $(\mathbb{F}_i)_{i\in I}$ ailesi verilsin Bu ailenin bir En Küçük Üst Sınıra sahip olması için $\Leftrightarrow$ $\forall i\in I$ için $\mathbb{F}_i$ filtrelerinden ince bir filtrenin bulunmasıdır.

İspat

($\Rightarrow$) Eğer böyle bir $\mathbb{F}$ nin en küçük üst sınırı varsa hemen $\forall i\in I$ için $\mathbb{F}'\subset \mathbb{F}$ olduğu görülür. Bu da $\mathbb{F}$ nin $\mathbb{F}'$ lerden ince olduğunu ifade eder.

($\Leftarrow$) $\forall i\in I$ için $\forall \mathbb{F}_i$ filtrelerinden ince olan filtrelerin ailesi olan $\mathbb{F}'$ nin boştan farklı olduğunu kabul edelim. Bu takdirde bu $\mathbb{F}'$ailesinin en büyük alt sınırını $\overline{\mathbb{F}}$ ile gösterirsek; bu $\overline{\mathbb{F}}$, $(\mathbb{F}_i)_{i\in I}$ ailesinin en küçük üst sınırı olur.

1.4.4. FİLTRELERİN YAKINSAKLIĞI

Tanım.1.4.4.1. X topolojik bir uzay $x_0\in X$ ve (x_n) herhangi bir dizi olsun. (x_n) dizisinin $n_0\in N$ doğal sayısından büyük n lere karşılık gelen elemanlarının cümlesini $A_n=\{x_n,x_{n+1},x_{n+2},...\}$ ile ve dizinin bütün elemanlarının cümlesini de $A=\{x_1,x_2,...,x_{n_0},x_n,x_{n+1},x_{n+2},...\}$ ile gösterirsek; $A_n\subset A$ dir. Şu halde $\forall V\in \mathcal{V}(x_0)$ için $\exists n_0\in \mathbb{N}$, $\ni n\geq n_0 \Rightarrow A_n\subset V \Leftrightarrow (x_n)\rightarrow x_0$ dir.

Tanım.1.4.4.2. X topolojik bir uzay, $x_0\in X$ ve (x_n), X de bir dizi olsun. Bu takdirde, $\forall V\in \mathcal{V}(x_0)$ ve $\forall n\in \mathbb{N}$ için $V\cap A_n \neq \varnothing$ ise x_0 noktasına (x_n) dizisinin bir yığılma noktası denir başka bir deyişle, $\forall V\in \mathcal{V}(x_0)$ ve $\forall n\in \mathbb{N}$ için en az bir $m\geq n$ doğal sayısı $x_m\in V$ olacak şekilde bulunuyorsa x_0 noktasına (x_n) dizisinin bir yığılma noktası denir.

Bir dizinin her limit noktası bir Yığılma noktasıdır, fakat her yığılma noktası bir limit noktası değildir.

Örnek.1.4.4.1. $(x_n) = (1/n,n)= (1,1,1/2,2,1/3,3,...,1/n,n)$ dizisi veriliyor. Bu dizinin bir limit noktası olmamakla beraber ''0'' bu dizinin bir yığılma noktasıdır.

Tanım.1.4.4.3. X topolojik bir uzay, $x \in X$ ve $\mathbb{F}$ de X üzerinde bir filtre olsun. Eğer $\mathcal{V}(x) \subset \mathbb{F}$ oluyorsa $\mathbb{F}$ filtresi x noktasına yakınsıyor denir ve $\mathbb{F} \to x$ şeklinde gösterilir.

Tanım gereğince;

$(\mathbb{F} \to x) \Leftrightarrow (\mathcal{V}(x) \subset \mathbb{F})$ ifadesi gerçeklenir.

Tanım.1.4.4.4. X topolojik bir uzay, $x \in X$ ve $\mathbb{F}$ de X üzerinde bir filtre olsun. Eğer $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ ve $\forall F \in \mathbb{F}$ için $V \cap F \neq \varnothing$ ise x noktasına $\mathbb{F}$ filtresinin bir yığılma noktası adı verilir. Buna göre x, $\mathbb{F}$ nin bir yığılma noktasıdır. $\Leftrightarrow x \in \bigcap_{F \in \mathbb{F}} \bar{F}$ dir.

$\mathbb{F}$ nin bütün yığılma noktalarının kümesini ad($\mathbb{F}$) ile göstereceğiz.

Teorem.1.4.4.1. X topolojik bir uzay ve $\mathbb{F}$, X üzerinde bir filtre olsun. Bu takdirde, $ad(\mathbb{F}) = \bigcap_{F \in \mathbb{F}} \bar{F}$ dir. Ayrıca $\mathbb{F}_0$, $\mathbb{F}$ nin bir tabanı ise $ad(\mathbb{F}) = \bigcap_{F_0 \in \mathbb{F}_0} \bar{F}_0$ dir.[1]

İspat $\bigcap_{F \in \mathbb{F}} \bar{F} = B$ ve $\bigcap_{F_0 \in \mathbb{F}_0} \bar{F}_0 = A$ olsun. $x \in ad(\mathbb{F})$ ve $F \in \mathbb{F}$ için $\mathcal{V}(x) \cap F \neq \varnothing$ olduğundan $x \in \bar{F}$ dir. Dolayısıyla $x \in B$ olur. Böylece $ad(\mathbb{F}) \subseteq B$ olduğu görülür.

$x \in A$, $V \in \mathcal{V}(x)$ ve $F \in \mathbb{F}$ olsun. Bir $F_0 \in \mathbb{F}_0$ için $F_0 \subset F$ dır. $x \in A \subseteq \bar{F}_0$ olduğundan $V \cap F_0 \neq \varnothing$ olur. dolayısıyla $V \cap F \neq \varnothing$ olur, aynı zamanda. Bundan dolayı $x \in ad(\mathbb{F})$ olduğu görülür. Bu durum ise $A \subseteq ad(\mathbb{F})$ olduğunu ifade eder. Ayrıca $B \subseteq A$ olduğu da açıktır. Buna göre, $ad(\mathbb{F}) \subseteq B$, $B \subseteq A$ ve $A \subseteq ad(\mathbb{F})$ elde edildiğinden $ad(\mathbb{F}) = B = A$ bulunur.

Teorem 1.4.4.2 X bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $\mathbb{F}$, X üzerinde bir filtre olsun. Eğer $\mathbb{F} \to x$ ise $\mathbb{F}$ den daha ince filtreler de aynı x noktasına yakınsar.

İspat $\mathbb{F} \to x$ olduğundan $\mathcal{V}(x) \subset \mathbb{F}$ yazılır. Şimdi, $\mathbb{F}'$ filtresinin $\mathbb{F}$ den ince olduğunu kabul edelim. O halde $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}'$ olup, $\mathcal{V}(x) \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{F}'$ bulunur. Buradan da $\mathcal{V}(x) \subset \mathbb{F}'$ açık yazılır ki bu da $\mathbb{F}' \to x$ demektir.

Teorem 1.4.4.3. X bir Hausdorrf uzayı ve $\mathbb{F}$, X üzerinde bir filtre olsun. $\mathbb{F} \to x \in X \Rightarrow ad(\mathbb{F})=\{x\}$ dir.

İspat $y \in ad(\mathbb{F})$ ve $y \neq x$ olsun. X H-uzayı olduğundan bir takım $U \in \mathcal{V}(y)$, $V \in \mathcal{V}(x)$ için $U \cap V=\varnothing$ dir.

$\mathbb{F} \to x$ olduğundan $\mathcal{V}(x) \subset \mathbb{F}$ dir. Dolayısıyla $V \in \mathbb{F}$ dir. Bu durumda $y \in ad(\mathbb{F})$ olup $U \cap V \neq \varnothing$ olmak zorundadır. Bu ise, $U \cap V=\varnothing$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $ad(\mathbb{F})=\{x\}$ dir.

Tanım 1.4.4.5 X bir topolojik uzay ve $\mathbb{F}$, X üzerinde bir filtre olsun. $ad(\mathbb{F}) \neq \varnothing$ ise $\mathbb{F}$ ye Sabit Filtre, aksi halde yani, $ad(\mathbb{F}) = \phi$ ise $\mathbb{F}$ ye Serbest Filtre adı verilir.

Başka bir deyişle, eğer $\cap\{F: F \in \mathbb{F}\} \neq \varnothing$ ise bu $\mathbb{F}$ filtresine Sabit Filtre; eğer $\cap\{F: F \in \mathbb{F}\}=\varnothing$ ise Serbest Filtre adı verilir.

1.4.5. ULTRAFİLTRELER

Tanım.1.4.5.1. Bir X kümesi verilsin. X üzerinde bir çok filtreler olabilir. Bunların Maksimaline ultrafiltre denir.

Tanım gereğince; $\mathbb{F}$ filtresinin bir ultrafiltre olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{F}$ den tam manasıyla daha ince bir $\mathbb{F}'$ filtresinin olmamasıdır. Başka bir deyişle;

$\mathbb{F}$ bir S-filtre olsun. $\mathbb{F}$ yi kapsayan bir $\mathbb{F}'$ filtresi için $\mathbb{F} = \mathbb{F}'$ oluyorsa $\mathbb{F}$ ye bir S-ultrafiltre denir.

Bir küme üzerinde birden fazla ultrafiltre bulunabilir. Çünkü, bir küme üzerindeki bütün filtrelerden oluşan aile üzerinde ''$\leq$'' bağıntısı bir yarı-sıralama bağıntısıdır.

Teorem.1.4.5.1. Her filtre bir ultrafiltrenin içindedir.[2]

İspat $\mathbb{F}$, X üzerinde bir filtre ve $\mathbb{F}$ den ince olan bütün filtrelerin kümesi;

$\varnothing = \{\mathcal{G} : \mathcal{G}$ bir filtre ve $\mathbb{F} \subset \mathcal{G}\}$

olsun. $\varnothing$ de $\mathbb{F}_1 \leq \mathbb{F}_2 \Leftrightarrow \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}_2$ olacak şekilde tanımlanan ''$\leq$'' bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Şu halde kısmi sıralanmış $(\varnothing,\leq)$ kümesinin bir tam sıralanmış $\varnothing_1$ alt kümesini alalım. Bu şartlar altında $\mathcal{G}= \bigcup_{\mathbb{F}\in\varnothing_1} \mathbb{F}$ de bir filtredir. Çünkü; $\varnothing_1$ tam sıralanmış olduğundan herhangi iki $F_1,F_2\in\mathcal{G}$ aynı bir $\mathbb{F}\in\varnothing_1$ filtresinin içindedir. Şu halde $\mathcal{G}$, $\varnothing_1$ in bir üst sınırıdır. Buna göre $\varnothing$ nin tam sıralanmış her alt kümesinin bir üst sınırı bulunmaktadır. Zorn Lemması gereğince $\varnothing$ nin $\mathcal{G}^*$ gibi bir maksimal elemanı vardır. İşte bu $\mathcal{G}^*$ bir ultrafiltredir ve $\mathbb{F}\subset\mathcal{G}^*$ sağlanır.

Teorem.1.4.5.2. $\mathbb{F}$ nin X üzerinde bir ultrafiltre olması için $\Leftrightarrow \forall A\subset X$ için $A\in\mathbb{F}$ ya da $X\setminus A\in\mathbb{F}$ olmasıdır. [1]

İspat

($\Rightarrow$) $\mathbb{F}$,X üzerinde bir ultrafiltre olsun. Eğer $A=\varnothing$ ise $X\setminus\varnothing=X\in\mathbb{F}$ olduğundan iddia doğrudur.

Eğer $\varnothing \neq A\subset X$ ve $F\in\mathbb{F}$ ise $F\cap A \neq \varnothing$ veya $F\cap(X\setminus A) \neq \varnothing$ dir. Diğer yandan $A\cap(X\setminus A) = \varnothing$ olduğundan $\mathbb{F}$ de $F_1\subset A$ ve $F_2\subset X\setminus A$ olacak şekilde herhangi iki $F_1,F_2\in\mathbb{F}$ mevcut değildir. Çünkü $F_1\cap F_2\neq\varnothing$ dir (filtre aksiyomları gereği). O halde $\mathbb{F}$ nin bütün F elemanları için ya $F\cap A\neq\varnothing$ veya $F\cap(X\setminus A)\neq\varnothing$ sağlanır.

Her $F\in\mathbb{F}$ için $F\cap A\neq\varnothing$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{ F\cap A: F\in\mathbb{F} \}$ ailesi X üzerinde A yı içeren ve $\mathbb{F}$ den daha ince olan bir $\mathcal{G}$ filtresinin filtre tabanıdır. $\mathbb{F}$ bir ultrafiltre olduğundan buradan $\mathbb{F}=\mathcal{G}$ ve dolayısıyla $A\in\mathbb{F}$ elde edilir.

($\Leftarrow$) Her $A\subset X$ için $A\in\mathbb{F}$ veya $X\setminus A\in\mathbb{F}$ olsun. Eğer $\mathbb{F}$ den kesin olarak daha ince olan bir $\mathcal{G}$ filtresi mevcut olsaydı; $\exists\ G\in\mathcal{G}$, $\ni G\notin\mathbb{F}$ sağlanırdı. Buradan da $X\setminus G\in\mathbb{F}\subset\mathcal{G}$ olması gerekirdi. Bu durum ise, $\mathcal{G}$ nin bir filtre olması ile çelişir. Çünkü, $G\cap(X\setminus G)=\varnothing$ dir. O halde $\mathbb{F}$ den kesin olarak ince olan bir filtre mevcut değildir. Yani, $\mathbb{F}$ bir ultrafiltre olmak zorundadır.

Teorem 1.4.5.3. X bir topolojik uzay, $\mathbb{F}$, X üzerinde bir ultrafiltre olsun. $\mathbb{F}$ sabit bir filtre ve $x \in ad(\mathbb{F})$ ise,

$$\mathbb{F} \to x$$

dir.

İspat $x \in ad(\mathbb{F})$ ise x, $\mathbb{F}$ filtresinin bir yığılma noktasıdır. Teorem 1.4.4.2. gereğince $\mathbb{F}$ filtresinden ince olan ve x noktasına yakınsayan X üzerinde bir $\mathbb{F}'$ filtresi vardır. öte yandan $\mathbb{F}$ bir ultrafiltre olduğundan $\mathbb{F}' \subset \mathbb{F}$ olur. O halde $\mathbb{F} = \mathbb{F}'$ bulunur. Bu nedenle $\mathbb{F} \to x$ dir.

Teorem 1.4.5.4 X ve Y iki küme $f:X \to Y$ örten bir fonksiyon ve $\mathbb{F}$ de X üzerinde bir ultrafiltre olsun. Bu takdirde $f(\mathbb{F})$ de Y üzerinde bir filtre tabanı olup, bunun oluşturduğu filtreyi $\mathbb{F}'$ ile gösterirsek $\mathbb{F}'$ de bir ultrafiltredir.

İspat $\mathbb{F}$, X üzerinde bir ultrafiltre olduğundan bir filtredir. Bu nedenle Teorem.1.5.2.2. gereğince $f(\mathbb{F})$ bir filtre tabanıdır. Şimdi $\mathbb{F}'$ nin bir ultrafiltre olduğunu göstermek için herhangi bir $B \subset Y$ alalım.

Eğer $B \in \mathbb{F}'$ veya $Y \setminus B \in \mathbb{F}'$ olduğunu gösterirsek Teorem.1.5.4.5. gereğince $\mathbb{F}'$ bir ultrafiltre olur. O halde $\mathbb{F}$, X üzerinde bir ultrafiltre olduğundan,

$$f^{-1}(B) \in \mathbb{F} \qquad \text{veya} \quad f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(B) \in \mathbb{F} \text{ dir.}$$

Şu halde $f^{-1}(B) \in \mathbb{F}$ olsun. Bu takdirde $f(f^{-1}(B)) = B \in \mathbb{F}'$ elde edilir. Eğer $X \setminus f^{-1}(B) \in \mathbb{F}$ ise buna göre,

$$\begin{aligned} f(X \setminus f^{-1}(B)) &= f(X) \setminus f(f^{-1}(B)) \\ &= f(X) \setminus B \\ &= Y \setminus B \in \mathbb{F}' \text{ elde edilir. O halde;} \end{aligned}$$

$\mathbb{F}'$, Y üzerinde bir ultrafiltredir.

X topolojik bir uzay ve $\mathbb{F}$, X üzerinde bir filtre olsun. Tanım.1.4.4.4. gereğince $ad(\mathbb{F})=\{x\in X : \forall V\in \mathcal{V}(x),\ \forall F\in \mathbb{F} \text{ için } V\cap F \neq \emptyset\}$ şeklinde de ifade edilebilir.

II. BÖLÜM

βX İN İNŞAASI VE βN DE NOKTA TİPLERİ

2.1. KOMPAKTLAMALARIN İNŞAASI

Bundan böyle bütün uzaylarımızı aksi belirtilmedikçe Tychonoff Uzay olarak kabul edeceğiz.

Tanım 2.1.1 X i yoğun bir alt uzay olarak içeren kompakt Hausdorff Y uzayına, X uzayının bir kompaktlaması denir.

Örnek.2.1. Y=[0,1], X=]0,1[uzaylarını IR nin alışılmış topolojisi ile düşünelim. Bu durumda Y, X in bir kompaktlamasıdır.[7]

X in bütün kompaktlamalarının kümesini K(X) ile göstereceğiz.

Teorem.2.1.1. Eğer bir X uzayı bir kompaktlamaya sahip ise X Tychonoff uzayıdır.[12]

İspat X in bir kompaktlaması Y olsun. Bu zaman $X \subset Y$ dir. X in kompaktlaması kompakt ve Hausdorff olduğundan Y normal ve Hausdorff tur. Çünkü; Y Hausdorff ise $\forall x \neq y \in Y$ için $x \in G$, $y \in H$ ve $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde $G, H \in \tau$ vardır. Buradan da $F_1 \subset G$ ve $F_2 \subset H$ kapalı kümeleri alınırsa; Y nin Normal uzay olması sağlanır.

Şimdi de her T_2-uzayı (Hausdorff Uzayı) bir T_1-uzayı olduğundan Y Normal T_1-uzayı olur ki bu da Y nin T_4-uzayı olduğunu ifade eder. T_4-uzayının her alt uzayıda Tychonoff olduğundan X Tychonoff uzayıdır.

Teorem.2.1.1. gereğince sadece Tychonoff uzaylar kompaktlamalara sahip olabilir.

Tanım.2.1.2. $Y, Z \in K(X)$ olsun.(yani Y ve Z, X in iki kompaktlaması olsun.) Eğer $f: Y \to Z$ gibi $\forall x \in X$ için $f(x)=x$ koşulunu sağlayan (yani X i sabit bırakan) bir f homeomorfizması var ise bu iki kompaktlamaya Eşdeğer Kompaktlamalar adı verilir. X in eşdeğer kompaktlamaları arasında hiçbir fark gözetilmediğinden $Y =_X Z$ yazılır.

Bu eşdeğerlik bağıntısı aynı zamanda bir Denklik Bağıntısı demektir. Bunun doğurduğu denklik sınıflarının kümesini $K^*(X)$ ile göstereceğiz.

$Y \in K(X)$ ise Y nin eşdeğerlik sınıfını (denklik sınıfını) [Y] ile göstereceğiz. Şu halde;

$[Y]=\{ Z\in K(X) : Y=_X Z \}$ dir.

Ayrıca $[Y],[Z]\in K^*(X)$ ve $Y\geq Z$ ise,

$[Y] \geq [Z]$ olarak tanımlayacağız.

Teorem.2.1.2. X topolojik bir uzay, Y_1 ve Y_2 birer Hausdorff uzay vede X, Y_2 uzayında yoğun olsun. Ayrıca $f:Y_2\to Y_1$ içine bir sürekli fonksiyon olsun.

Eğer $f|_X:X\to f(X)$ bir homeomorfizma ise $f(Y_2\backslash X)\subseteq Y_1\backslash f(X)$ dir.

Teorem.2.1.3. A, X in yoğun bir altuzayı ve Y Hausdorff olsun. Eğer $f:A\to Y$ sürekli fonksiyon genişlemesi $g:X\to Y$ ise g tektir.

İspat $h:X\to Y$, f nin g den başka bir genişlemesi olsun. O zaman $\{x\in X : g(x)=h(x) \}$ kümesi A yı yoğun bir altküme olarak içeren X in kapalı bir altkümesidir. Buradan,

$X=\{ x\in X : g(x)=h(x) \}$ dir. Böylece g=h olur.

K(X) üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı tanımlamaya çalışalım;

$Y_1,Y_2\in K(X)$ olsun. Eğer $f:Y_1\to Y_2$ gibi $\forall x\in X$ için $f(x)=x$ koşulunu sağlayan sürekli bir f fonksiyonu var ise $Y_1\geq Y_2$ yazılır. Bu koşulları sağlayan bir f fonksiyonu ister istemez örtendir.

Eğer $f,g : Y_1\to Y_2$ iki sürekli fonksiyon ve $\forall x\in X$ için $f(x)=x$, $g(x)=x$ oluyorsa o zaman f=g dir. Çünkü, X hem Y_1, ve hemde Y_2 içinde yoğun ve Y_1,Y_2 Hausdorff uzaylarıdır.

Dolayısıyla $Y_1\geq Y_2$ olmasını ve X in noktalarını sabit bırakan bir ve bir tek $f : Y_1\to Y_2$ sürekli fonksiyonu vardır. f böyle bir fonksiyon ise Teorem.2.1.2. gereğince $f(Y_1)=Y_2$ ve $f(Y_1\backslash X) = Y_2\backslash f(X)$ dir.

Teorem.2.1.4. ''≥'' bağıntısı $K^*(X)$ üzerinde bir yarı-sıralamadır.[1]

İspat

1) $Y\in K(X)$ ise $Y\geq Y$ dir. $\Rightarrow$ $[Y] \geq [Y]$ yazılır. O halde ''≥'' bağıntısı Yansıyandır.

2) $Y,Z\in K(X)$, $Y\geq Z$ ve $Z\geq Y$ olsun. O zaman $f:Y\to Z$ ve $g:Z\to Y$ fonksiyonları X i sabit bırakan sürekli fonksiyonlardır (yani $f(x)=x$ ve $g(x)=x$ koşulunu $\forall x\in X$ için sağlayan fonksiyonlardır.) Buna göre,

$$Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$$

$$x \longrightarrow g(x)=x \longrightarrow f(g(x))=f(x)=x \qquad \text{den}$$

$fog : Z\to Z$, $(fog)(x)=x$ şeklinde X i sabit bırakan bir fonksiyondur. Aynı zamanda $I_Z : Z\to Z$, $I_Z(x)=x$ şeklinde X i sabit bırakan bir fonksiyon olduğundan $fog=I_Z$ demektir.

Benzer şekilde $gof=I_Y$ olur. Dolayısıyle $Y=_X Z$ dir. Böylece $[Y]\geq[Z]$, $[Z]\geq[Y]$ ise $[Y]=[Z]$ elde edildi. O halde ''≥'' bağıntısı Ters Simetri özelliğine sahiptir.

3) $V,Y,Z\in K(X)$ ve,

$$\left.\begin{matrix} V\geq Y \\ Y\geq Z \end{matrix}\right\} \Rightarrow V\geq Z \qquad ? \qquad \text{Bu ifade ise,}$$

$$\left.\begin{matrix} f: V\to Y, & \begin{matrix} f(x)=x \\ \textit{sürekli} \end{matrix} \\ g: Y\to Z, & \begin{matrix} g(x)=x \\ \textit{sürekli} \end{matrix} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} h: V\to Z, h(x)=x \\ \textit{sürekli fonksiyonu} \text{ var } \textit{mıdır} \,? \end{matrix}$$

şeklinde demektir.

$$V \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$x \longrightarrow f(x)=x \longrightarrow g(f(x))=g(x)=x \qquad \text{den}$$

dolayı $gof : V\to Z$, $(gof)(x)=x=I_Z$ dir. Bu durumda $gof=h$ dersek, $V\to Z$, $gof=h=I_Z$ dir.

Dolayısıyle $V\geq Z$ olur. Buna göre,

$$\left.\begin{matrix} [V]\geq[Y] \\ [Y]\geq[Z] \end{matrix}\right\} \Rightarrow [V]\geq[Z] \qquad \text{olur. Bu da ''≥'' bağıntısının geçişken}$$

olduğunu ifade eder.

Tanım.2.1.3. X herhangibir Tychonoff uzayı ise $K^*(X)$ in bir Maksimal Elemanı vardır. Bu eleman [Z] ise [Z] eşdeğerlik sınıfında (denklik sınıfında) bulunan bütün elemanlara X in STONE-ČECH KOMPAKTLAMASI denir.

[Z] de bulunan herhangi iki eleman arasında X i sabit bırakan bir homeomorfizma olduğundan bu sınıfta bulunan iki elemanı birbirinden ayırt etmeyeceğiz. Bu en büyük sınıfın (bu maksimal sınıfın) bir temsilcisi βX ile gösterilir.

$$[Z]=\{Y\in K(X) : Z=_X Y\} \text{ dir.}$$

X ayrık topoloji ile donatılmış bir sonsuz küme olsun. M ile X üzerindeki bütün ultrafiltrelerin kümesini gösterelim.

M_1 ile M nin sabit ultrafiltrelerinin kümesini ve M_2 ile M nin serbest ultrafiltrelerinin kümesini gösterelim. Böylece,

$$M=M_1\cup M_2 \qquad \text{ve} \qquad M_1\cap M_2\neq\varnothing \text{ olur.}$$

Tanım.2.1.4. X ve Z birer topolojik uzay, $f : X\to Z$ sürekli bir fonksiyon ve $Y\in K(X)$ olsun. Eğer $f^Y:Y\to Z$, $f^Y|_X = f$ olacak şekilde f^Y sürekli fonksiyonu var ise f bir Genişlemeye sahiptir denir.

Eğer f böyle bir genişlemeye sahip ise X, Y de yoğun olduğundan tektir. $Y\in K(X)$ için.

$C_Y = \{f\in C^*(X) : f \text{ bir } f^Y : Y\to IR \text{ genişlemesine sahiptir.}\}$ olarak tanımlanır.

Teorem.2.1.5. Eğer $F\subseteq G\subseteq C^*(X)$ ve F, X de kapalı kümelerden noktaları ayırıyorsa; o zaman $FX\subseteq GX$ dir. Ayrıca $Y,Z\in K(X)$ olmak üzere $Y\subseteq Z$ olması için $\Leftrightarrow$ $C_Y\subseteq C_Z$ olması dır.

Teorem.2.1.6. $\beta X = C^*(X)X$ tir.[7]

İspat $C^*(X)X\subseteq\beta X$ olması açıktır. (1)

Ayrıca , $C_{\beta X} = \{f \in C^*(X) : f \text{ bir } f^{\beta X} : \beta X\to IR \text{ genişlemesine sahiptir.}\}$ ifadesi gözönüne alınırsa, daima $C_{\beta X}\subseteq C^*(X)$ dir. Bu nedenle Teorem.2.1.5 gereğince

$$\beta X\subseteq C^*(X)X \quad \text{tir.} \tag{2}$$

(1) ve (2) den $C^*(X)X=\beta X$ elde edilir.

Sonuç.2.1.1. X, βX e C^*- gömülmüştür.[11]

İspat $\beta X = C^*(X)X$ olduğundan $\beta X\subseteq C^*(X)X$ ve $C^*(X)X\subseteq\beta X$ dir. Yine bu ifadeleri ilgilendiren Teorem.2.1.5 gereğince $C_{\beta X}\subseteq C^*(X)$ ve $C^*(X)\subseteq C_{\beta X}$ olur. Bu durum;

$f:X \to IR$ sürekli, sınırlı her f fonksiyonunun $f^{\beta X}|_X = f$ olacak şekilde bir $f^{\beta X}:X \to IR$ sürekli, sınırlı genişlemesinin var olduğunu ifade eder. O halde X, βX e C^*- gömülmüştür.

2.2. βX in TOPOLOJİK YAPISI

Tanım.2.2.1. M_1, X üzerindeki tüm sabit ultrafiltrelerin kümesi idi. Buna göre bir $x \in X$ için $\mathcal{A}_X$, X üzerinde bir sabit ultrafiltre olmak üzere;

$$M_1 = \{ \mathcal{A}_X : x \in X \} \text{ dir. Yani,}$$

$$\left.\begin{array}{l} X \to M_1 \\ x \to \mathcal{A}_X \end{array}\right\} \text{ bir bakıma X, } M_1 \text{ i indeksleyen bir kümedir.}$$

Benzer olarak M_2, X üzerindeki tüm serbest ultrafiltrelerin kümesi idi. Buna göre $I \cap X = \varnothing$ olacak şekilde I indeks kümesini alalım.

Bir $p \in I$ için $\mathcal{A}_p$, X üxerinde bir serbest ultrafilre olmak üzere;

$$M_2 = \{\mathcal{A}_p : p \in I \} \text{ yani,}$$

$$\left.\begin{array}{l} I \to M_2 \\ p \to \mathbb{A}_p \end{array}\right\} \text{ bir bakıma I, } M_2 \text{ i indeksleyen bir kümedir.}$$

Dolayısıyle X, M_1 i indeksleyen bir küme ve I, M_2 yi indeksleyen bir küme ve de $I \cap X = \varnothing$ olmak üzere $\beta X = X \cup I$ şeklinde tanımlanır.

Tanım.2.2.2. $A \subseteq X$ için A nın sıfır kümesi O(A) ile gösterilir ve $\mathcal{A}_p$, X üxerindeki tüm ultrafilreler ailesi olmak üzere;

$$O(A) = \{ p \in \beta X : A \in \mathcal{A}_p \} \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

Tanım gereğince; O(A) kümesi A kümesini içeren ultrafiltrelerine karşılık gelen $p \in \beta X$ noktalarından oluşur. Buna göre $O(A) \subset \beta X$ dir.

Açıklama:

$\mathcal{A}_p$, X üzerindeki tüm ultrafiltreler ailesi olmak üzere,

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A} \in A_{P_1} \Rightarrow P_1 \in O(A) \ \text{dir.} \\ \mathcal{A} \in A_{P_2} \Rightarrow P_2 \in O(A) \ \text{dir} \\ \quad\quad \dots \\ \mathcal{A} \in A_{P_n} \Rightarrow P_n \in O(A) \ \text{dir} \end{array}\right\}$$

Buna göre $P_1, P_2, \dots, P_n \in \beta X$

ve

$O(A)=\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ *anlamını taşır.*

Teorem.2.2.1. $x \in X$ için $\mathcal{A}_X = \{A \subseteq X : x \in A\}$ bir sabit ultrafiltredir. Ayrıca $x \rightarrow \mathcal{A}_X$ fonksiyonu X den M_1 e 1-1 ve örten bir fonksiyondur.[1]

İspat $\mathcal{A}_X$ aynı zamanda x in açık komşuluklar ailesidir. Buna göre,

1) $\varnothing \notin \mathcal{A}_X$ dir.

2) $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_X$ için $x \in A_1 \cap A_2$ ve $A_1 \cap A_2 \in \tau$ olduğundan $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}_X$ olur.

3) $A \in \mathcal{A}(x)$ ve $A \subseteq A' \in \tau$ olsun. Bir $x \in A \subseteq A' \in \tau$ için $A' \in \mathcal{A}_X$ dir. dolayısıyla $\mathcal{A}_X$ bir açık filtredir.

Şimdi de $\mathcal{A}_X$ in bir ultrafiltre olduğunu görelim;

Bunun için Teorem 1.4.5.2. ifadesinin sağlandığını yani $A \subseteq X$ olduğundan ya $A \in \mathcal{A}_X$ ya da $X \setminus A \in \mathcal{A}_X$ olduğunu göstermeliyiz.

$A \subseteq X$ ise ya $x \in A$ ya da $x \in X \setminus A$ dir. Bu nedenle ya $A \in \mathcal{A}_X$ ya da $X \setminus A \in \mathcal{A}_X$ dir. Dolayısıyla $\mathcal{A}_X$ bir ultrafiltredir.

Ayrıca $\cap \mathcal{A}_X = \{x\}$ olduğundan $\mathcal{A}_X$ bir sabit ultrafiltredir.

Şimdi de

$X \rightarrow M_1$

$x \rightarrow \mathcal{A}_X$

fonksiyonunun bire-bir ve örten olduğunu görelim.

Her $x, y \in X$ için $\mathcal{A}_X = \mathcal{A}_y \Rightarrow x = y$ ***?***

$$\mathcal{A}_X = \mathcal{A}_y \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \{x\} \in \mathbb{A}_x = \mathbb{A}_y \Rightarrow \{x\} \in \mathbb{A}_y \\ \{y\} \in \mathbb{A}_y = \mathbb{A}_x \Rightarrow \{y\} \in \mathbb{A}_x \end{array}\right\} \Rightarrow \{x\}, \{y\} \in \mathcal{A}_X \text{ yazılabilir.}$$

$\{x\}\cap\{y\}\neq\varnothing$ olduğundan x=y dir. Böylece $x\to\mathcal{A}_x$ fonksiyonu bire-bir dir.

Şimdi de $\mathbb{F}$, X üzerinde herhangi bir sabit ultrafiltre(yani $\mathbb{F}\in M_1$) ve $x\in ad(\mathbb{F})$ olsun.

$\mathcal{A}_x=\mathbb{F}$. **?**

Her kapalı F için clF=F idi. Teorem 1.4.4.1. gereğince, $ad(\mathbb{F})=\cap\{clF:\ F\in\mathbb{F}\}$ idi. $x\in ad(\mathbb{F})=\cap\{clF:\ F\in\mathbb{F}\}=\cap\{F:\ F\in\mathbb{F}\}$ den dolayı $x\in\cap\{F:\ F\in\mathbb{F}\}$olur. Bu da $x\in F$ demektir. Bu ise $F\in\mathcal{A}_x$ anlamını taşır. O halde $\mathbb{F}\subseteq\mathcal{A}_x$ dir.

Ayrıca $\mathbb{F}$ bir ultrafiltre olduğundan ancak $\mathcal{A}_x=\mathbb{F}$ .dir. Bu da $x\to\mathcal{A}_x$ fonksiyonunun örten olduğunu ifade eder.

i) O(X) tanımında $\mathcal{A}_p$ olarak sabit ultrafiltreleri alırsak, O(X)=X, eğer $\mathcal{A}_p$ olarak serbest ultrafiltreleri alırsak, O(X)=I olur.

ii) $A\subseteq X$ olmak üzere O(A) nın tanımında dikkat edilirse; O(A) kümesi A dan daha geniş bir kümedir. Dolayısıyla $A\subset O(A)$ dir. Fakat $O(A)\subseteq X$ olması gerekmez. Ancak $O(A)\subset\beta X$ dir.

Teorem 2.2.2 a) $O(X)=\beta X$ ve $O(\varnothing)=\varnothing$ dir.

b) $A\subseteq B\subseteq X$ ise $O(A)\subseteq O(B)$ dir.

c) $A,B\subseteq X$ ise $O(A\cap B)=O(A)\cap O(B)$ ve +

$O(A\cup B)=O(A)\cup O(B)$ dir.

d) $A\subseteq X$ ise $O(A)\cap X=A$ dir.

e) $O(X\backslash A)=\beta X\backslash O(A)$ dir.

İspat

a) $O(X)=\{\ p\in\beta X :,\ X\in\mathcal{A}_p\}$ demektir. X, tüm filtrelere ait olduğundan O(X) kümesi βX in tüm p noktalarını içerir. Bu nedenle $O(X)=\beta X$ dir. $O(\varnothing)=\{p\in\beta X :,\ \varnothing\in\mathcal{A}_p\}$ yazılabilmelidir. Oysa filtre tanımı gereği $\varnothing\notin\mathcal{A}_p$ dir. Bu nedenle $O(\varnothing)=\varnothing$ dir.

b) $A\subseteq B\subseteq X$, $p\in O(A)$ ise, $O(A)$ tanımından $A\in\mathcal{A}_p$ dir. $A\subseteq B$ ve $\mathcal{A}_p$ bir filtre olduğundan $B\in\mathcal{A}_p$ dir. Bu da $p\in O(B)$ demektir. Dolayısıyla $O(A)\subseteq O(B)$ dir.

c) Ön bilgi: $A,B\subset X$ olsun.

1) $X\setminus(A\cap B)=(X\setminus A)\cup(X\setminus B)$

$X\setminus(A\cup B)=(X\setminus A)\cap(X\setminus B)$ dir.

2) $(p\notin A \vee p\notin B)\Leftrightarrow p\notin A\cap B$

$(p\notin A \wedge p\notin B)\Leftrightarrow p\notin A\cup B$ dir.

Şimdi şıkkın ispatına geçelim.

$$O(A\cup B)\overset{?}{=}O(A)\cup O(B)$$

$\subset$: $\underbrace{\forall p\in O(A\cup B)}_{r}\Rightarrow\underbrace{p\in O(A)\cup O(B)}_{s}$ **?**

Ergi yönteminden $s'\Rightarrow r'$:

$\forall p\notin O(A)\cup O(B)\Rightarrow p\notin O(A\cup B)$ **?**

$p\in[O(A)\cup O(B)\Rightarrow p\in[O(A)\cap[O(B)\Rightarrow p\notin O(A)\wedge p\notin O(B)$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l} A\notin A_p\wedge B\notin\mathcal{A}_p \\ X\setminus A\in A_p\wedge X\setminus B\in\mathcal{A}_p\end{array}\right\}\ \mathcal{A}_p \text{ bir ultrafiltre olduğundan}$$

$\Rightarrow p\in O(X\setminus A)\wedge p\in O(X\setminus B)\Rightarrow p\in O(X\setminus A)\cap O(X\setminus B)=O(X)\setminus O(A\cup B)$

$\Rightarrow p\in O(X)\setminus O(A\cup B)\Rightarrow p\notin O(A\cup B)$

elde edilir. Dolayısıyla $p\in O(A)\cup O(B)$ demektir. O halde $O(A\cup B)\subset O(A)\cup O(B)$ dir.

$\supset$: $A\subset A\cup B\Rightarrow O(A)\subset O(A\cup B)$

$B\subset A\cup B\Rightarrow O(B)\subset O(A\cup B)$

taraf tarafa birleşimleri alınırsa;

$$O(A)\cup O(B)\subset O(A\cup B)$$

olur. O halde,

$$O(A\cup B)=O(A)\cup O(B)$$

dir.

$O(A\cap B) \overset{?}{=} O(A)\cap O(B)$ için

$\subset$: $A\cap B\subset A \Rightarrow O(A\cap B)\subset O(A)$

$A\cap B\subset B \Rightarrow O(A\cap B)\subset O(B)$

taraf tarafa kesişimleri alınırsa;

$O(A\cap B)\subset O(A)\cap O(B)$ elde edilir.

$\supset$: $\forall \underbrace{p\in O(A)\cap O(B)}_{r} \Rightarrow \underbrace{p\in O(A\cap B)}_{s}$?

Yine Ergi yönteminden $s' \Rightarrow r'$: $\forall p\notin O(A\cap B)\Rightarrow p\notin O(A)\cap O(B)$?

$$\left.\begin{array}{r} A\cap B\notin \mathcal{A}_p \\ X\setminus(A\cap B)\in \mathcal{A}_p \end{array}\right\} (\mathcal{A}_p \text{ bir ultrafiltre olduğundan})$$

$\Rightarrow (X\setminus A)\cup(X\setminus B)\in \mathcal{A}_p$

$\Rightarrow p\in O((X\setminus A)\cup(X\setminus B)) = O(X\setminus A)\cup O(X\setminus B)$

$\Rightarrow p\in O(X\setminus A)\cup O(X\setminus B) \Rightarrow p\in O(X\setminus A) \vee p\in O(X\setminus B)$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} X\setminus A\in \mathcal{A}_p \vee X\setminus B\in \mathcal{A}_p \\ A\notin \mathcal{A}_p \vee B\notin \mathcal{A}_p \end{array}\right\} (\mathcal{A}_p \text{ bir ultrafiltre olduğundan})$$

$\Rightarrow p\notin O(A) \vee p\notin O(B)$ $\Rightarrow p\notin O(A)\cap O(B)$ elde edilir.

Dolayısıyle $p\in O(A\cap B)$ demektir. O halde $O(A)\cap O(B)\subset O(A\cap B)$ dir.

Bu nedenle eşitlik vardır. Yani, $O(A\cap B)=O(A)\cap O(B)$ dir.

d) $A\subseteq X$ ise $O(A)\cap X=A$ olduğunu gösterelim.;

$\forall p\in O(A)\cap X \Leftrightarrow p\in O(A) \wedge p\in X$

$\Leftrightarrow A\in \mathcal{A}_p \wedge p\in X$

$\Leftrightarrow p\in A \wedge p\in X$

$\Leftrightarrow p\in A\cap X=A$

$\Leftrightarrow p\in A$ olur.

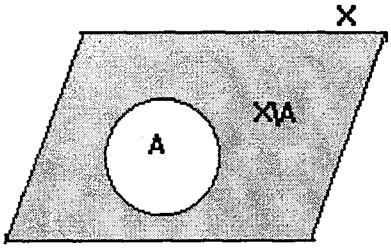
e) $O(X\setminus A) = \beta X\setminus O(A)$ olduğunu gösterelim.

Ön Bilgi: 1) $M\cap N=\varnothing$ ise

$M\setminus N = M$ ve $N\setminus M = N$ dir.

2) $(M\cup N)\setminus C = (M\setminus C)\cup(N\setminus C)$ dir.

Şimdi şıkkın ispatına geçelim;



$A \cap (X \setminus A) = \varnothing$ olduğundan. $(X \setminus A) \cup A = X$ dir.

Buna göre;

$O(A \cap (X \setminus A)) = O(\varnothing)$ olduğundan,

$O((X \setminus A) \cup A) = O(X)$ dir.

Şu halde $O(X) = \beta X$ ve $O(\varnothing) = \varnothing$ kullanılırsa,

$O((X \setminus A) \cap O(A) = \varnothing$ olduğundan,

$O((X \setminus A) \cup O(A) = \beta X$ olur.

Bu son eşitliğin her iki yanının O(A) farkını alalım.;

$(O(X \setminus A) \cup O(A)) \setminus O(A) = \beta X \setminus O(A)$

$\|$

$(\underbrace{O(X \setminus A) \setminus O(A))}_{O(X \setminus A)} \cup \underbrace{(O(A) \setminus O(A))}_{\varnothing}$

$\|$

$O(X \setminus A) \cup \varnothing$

$\|$

$O(X \setminus A)$ den dolayı,

$O(X \setminus A) = \beta X \setminus O(A)$ olur.

Tanım.2.2.3. $\mathcal{B} = \{O(A) : A \subseteq X\}$ kümesi βX üzerinde bir topolojik tabandır.

i) Gerçekten $\mathcal{B} = \{O(A) : A \subseteq X\}$ kümesinin βX üzerinde bir topolojinin tabanı olduğunu gösterelim. Teorem 2.2.2 nin (c) şıkkı gereğince;

1) $O(A) = \{p \in \beta X . A \in \mathcal{A}_p\}$ ve $\mathcal{A}_p$, X üzerindeki tüm ultrafiltreleri temsil ettiğinden $\varnothing \notin \mathcal{A}_p$ ve de $p \in \beta X = X \cup I$ olduğundan $\varnothing \notin \mathcal{B}$ dir.

2) $\forall O(A_1), O(A_2) \in \mathcal{B}$ için $O(A_3) \subset O(A_1) \cap O(A_2)$ olacak şekilde $O(A_3) \in \mathcal{B}$ var mıdır.?

$O(A_1) \cap O(A_2) = O(A_1 \cap A_2) = O(A_3)$ alınabildiğinden $O(A_3) \in \mathcal{B}$ vardır.

O halde $\mathcal{B}$ kümesi βX üzerinde bir topolojinin tabanıdır.

ii) $\mathcal{B}$ nın elemanları açık kümeler olduğundan$O(A)$ açık kümedir. $O(A)$ nın tümleyeni $\beta X \backslash O(A)$ şeklinde ifade edilir ve kapıldır. Teorem 2.2.2 gereğince;

$\beta X \backslash O(A) = O(X \backslash A)$ olduğundan $O(A)$ nın tümleyeni $O(X \backslash A)$ şeklinde de ifade edilebilir. $O(X \backslash A) = \{ p \in \beta X \ . \ X \backslash A \in \mathcal{A}_p \}$ olması cihetiyle $O(X \backslash A) \in \mathcal{B}$ dir. Bu da $O(X \backslash A)$ nın bu yönüyle de açık küme olduğunu ifade eder. Bu şartlar altında ise bunun tümleyeni olan $o(A)$ kapalı olur. Sonuç olarak;

$O(A)$ ve $O(X \backslash A)$ hem açık hem de kapalı alt kümelerdir.

iii) $\mathcal{B}$, βX için bir topolojik taban olduğundan βX üzerinde bir topoloji doğurur ki hep βX' i bu topoloji ile düşüneceğiz.

Teorem.2.2.3. X ayrık topoloji ile donatılmış bir sonsuz uzay olsun.

a) βX kompakt ve Hausdorff bir uzaydır.

b) X in βX den gelen altuzay topolojisi ayrık topolojidir.

c) $A \subseteq X$ ise $cl_{\beta X} A = O(A)$ dir.

Özel olarak $cl_{\beta X} X = \beta X$ dir. Dolayısıyle βX, X in bir Hausdorff kompaktlamasıdır.

d) $A \subseteq X$ ise $O(A)$ kümesi βX içinde hem kapalı hem de açıktır. H, βX in hem açık hem de kapalı bir alt kümesi ise bir $A \subseteq X$ için $H = O(A)$ dir.

e) Y herhangi bir kompakt ve Hausdorff uzay ve $f: X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Öyle bir ve bir tek $f^{\beta}: \beta X \to Y$ sürekli fonksiyonu vardır ki $f^{\beta}|_X = f$ dir. f^{β} ye f nin STONE-CECH Genişlemesi denir.

2.3. βX de NOKTA TİPLERİ

Tanım.2.3.1. X bir topolojik uzay olsun. X in Automorfizması Aut(X) ile gösterilir ve $Aut(X) = \{f: f: X \to X$ bir homeomorfizma $\}$ şeklinde tanımlanır.

Yani, Aut(X) ; X in kendi üzerine olan bütün homeomorfizmalarının kümesidir.

Teorem.2.3.1. X bir topolojik uzay olsun. ''o'' işlemi, fonksiyonların bileşke işlemi olmak üzere (Aut(X),o) sistemi bir gruptur.

Tanım.2.3.2. X bir topolojik uzay olsun. $p,q \in X$ için $f(p)=q$ olacak şekilde bir $f \in Aut(X)$ varsa p ve q ya Aynı Tipten denir ve $p \approx q$ şeklinde gösterilir.

Teorem.2.3.2. X bir topolojik uzay olsun. $p,q \in X$ aynı tipten $(p \approx q)$ ise ''≈'' bağıntısı bir eşdeğerlik (bir denklik) bağıntısıdır.[1]

İspat

1) $\forall p \in X$ için $p \approx p$?

$I_X : X \to X$, X in birim fonksiyonu olduğuna göre $I_X \in Aut(X)$ ve $I_X(p)=p$ dir. Dolayısıyla $p \approx p$ dir. O halde ''≈'' bağıntısı yansıyandır.

2) $\forall p,q \in X$ için $p \approx q \Rightarrow q \approx p$?

$p \approx q \Rightarrow$ bir $f \in Aut(X)$ için $f(p)=q$ dir.

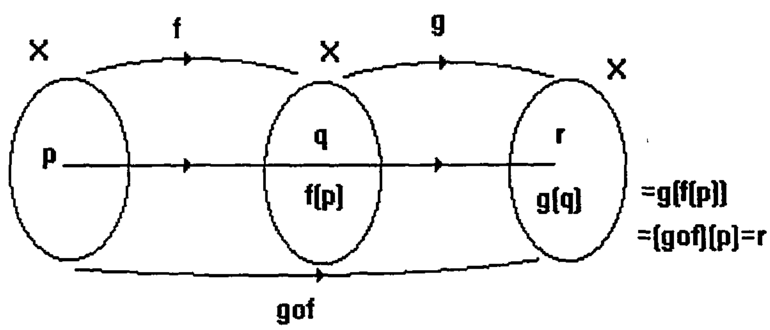
$\Rightarrow f$ homeomorfizma olduğundan $f^{-1} \in Aut(X)$ dir ve $f^{-1}(q)=p$ dir

$\Rightarrow q \approx p$ demektir. O halde ''≈'' bağıntısı simetriktir.

3) $\forall p,q,r \in X$ için $(p \approx q , q \approx r) \Rightarrow p \approx r$?

$p \approx q \Rightarrow$ bir $f \in Aut(X)$ için $f(p)=q$ dir.

$q \approx r \Rightarrow$ bir $g \in Aut(X)$ için $g(q)=r$ dir. Buradan,



gof=h dersek ; h=gof$\in$Aut(X) ve h(p)=(gof)(p)=g(f(p))=g(q)=r den dolayı h(p)=r elde ediliyor demek. O halde $p\approx r$ dir. Dolayısıyle ''$\approx$'' bağıntısı geçişkendir.

Bu nedenlerden dolayı ''$\approx$'' bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

Tanım.2.3.3. X bir topolojik uzay ve $p\in X$ ise $\tau(p)$ ile X in p ile aynı tipten olan bütün elemanların kümesi gösterilir ve $\tau(p)$ ye p nin Tipi denir.

Teorem.2.3.3. X bir topolojik uzay ve $p\in X$ ise $\tau(p) = \{f(p) : f\in Aut(X)\}$ dir.

İspat

$\subset$: $b\in \tau(p) \Rightarrow$ bir $f\in Aut(X)$ için $f(p) = b$ dir. Bu da $b\in\{f(p) : f\in Aut(X)\}$ demektir. O halde, $\tau(p) \subset\{f(p) : f\in Aut(X)\}$ dir.

$\supset$: $b\in\{f(p) : f\in Aut(X)\}$ olsun. O zaman $f(p)=b$ demektir. $\Rightarrow\tau(p)=\tau(b)=\{p,b\}$ ve $b\in\tau(p)$ demek olur. O halde, $\{f(p) : f\in Aut(X)\}\subset\tau(p)$ dir.

Örnek 2.3.1. $X=\{a,b,c\}$, $\tau=\{\varnothing,X,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ olsun. $\tau(a)=\tau(b)=\{a,b\}$ ve $\tau(c)=\{c\}$ dir. Bunu görmek için, $f:X\to X$ fonksiyonunu $f(a)=b$, $f(b)=a$ ve $f(c)=c$ olarak tanımlayalım.

Topolojinin yapısında kolayca görüleceği gibi $f\in Aut(X)$ dir. Dolayısıyla $a\approx b$ dir. $\{c\}\notin\tau$ olduğundan X in a elemanını c elemanına götüren hiçbir homeomorfizma yoktur. Çünkü,

$f:X\to X$

$a\to f(a)=b$

durumunda $\exists U\in\mathcal{V}(a)$, $\ni$ $\forall V\in\mathcal{V}(f(a))$ için $f(U)\subset V$ sağlanır ve

$f:X\to X$

$b\to f(b)=a$

durumunda, yine $\exists U\in\mathcal{V}(b)$, $\ni$ $\forall V\in\mathcal{V}(f(b))$ için $f(U)\subset V$ sağlanır.Fakat, $g(a)=c$, $g(c)=a$ ve $g(b)=b$ şeklinde bir $g\in Aut(X)$ alınırsa,

$g:X\to X$

$c \rightarrow g(c)=a$ durumunda

$X \in \mathcal{V}(c) \quad \{a\},\{a,b\},X \in \mathcal{V}(g(c)) = \mathcal{V}(a)$

$g(X) \subset \{a\}$

olamaz. Eğer $\{c\} \in \tau$ olsaydı $U=\{c\} \in \mathcal{V}(c)$ şeklinde en az bir U komşuluğuna karşı $g(\{c\}) \subset \{a\},\{a,b\},X$ olurdu. Oysa, $\{c\} \notin \tau$ dir. Bu demektir ki ancak X üzerinde $\tau(a)= \tau(b)$ olmasını sağlayan f(a)=b, f(b)=a ve f(c)=c olacak şekilde bir tek $f \in Aut(X)$ vardır.

Dolayısıyla, $\{c\} \notin \tau(a)$ dir. O halde $\tau(a)=\{a,b\}$ ve $\tau(c)=\{c\}$ dir.

Örnek 2.3.2 IR gerçel sayılar kümesini gözönüne alalım. $a,b \in IR$ için

$f:IR \rightarrow IR, \quad f(x)=x-a+b$

şeklinde tanımlayalım. f fonksiyonu her $a \in IR$ için f(a)=b koşulunu sağlayan bir homeomorfizmadır. Dolayısıyla IR de herhangi iki eleman aynı tiptendir.Buradan $a \in IR$ için $\tau(a)=IR$ olduğu görülür.

Örnek 2.3.3. X=[0,1] kapalı aralığını alalım. $f:X \rightarrow X$, f(x)=1-x şeklinde tanımlanan f fonksiyonu X in bir homeomorfizmasıdır. X in bu f homeomorfizması f(0)=1 ve f(1)=0 koşullarını sağladığından $\tau(0)= \tau(1)$ dir. Ayrıca, $\tau(0)= \tau(1)=\{0,1\}$ dir.

Bunu görmek için 0<r<1 ise $r \notin \tau(0)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Aksine 0<r<1 için $r \in \tau(0)$ kabul edelim. Bu durumda, bir $g \in Aut(X)$ için g(0)=r dir. Dolayısıyla, $g(X \setminus \{0\})=X \setminus \{r\}$ olur. $X \setminus \{0\}=]0,1]$ bağlantılı ve $X \setminus \{r\}=[0,r[\cup]r,1]$ olduğundan $X \setminus \{r\}$ bağlantısız bir uzaydır. Diğer yandan bağlantılılık homeomorfizmalar altında değişmez bir özelliktir ve $g(X \setminus \{0\})=X \setminus \{r\}$ olduğundan $X \setminus \{r\}$ bağlantılı olmak zorundadır. Bu çelişkiden dolayı $r \notin \tau(0)$ dir. O halde $\tau(0)=\tau(1)=\{0,1\}$ dir.

Örnek 2.3.3. de aşağıdaki Y.Teoremler gözönüne alınmıştır.

Y.Teorem.2.3.4.: X topolojik bir uzay olsun. X in bağlantılı olması için $\Leftrightarrow$ birbirine denk olan aşağıdaki ifadelerden birinin sağlanmasıdır.[2]

i) X, boş cümleden farklı ayrık, açık iki cümlenin birleşimi değildir.

ii) X in hem açık hem kapalı alt kümeleri yalnızca $\varnothing$ ve X kümeleridir. Aksi halde X bağlantısız uzay olur.

Y.Teorem.2.3.5. X topolojik uzayı verilsin. X in bağlantısız olması için $\Leftrightarrow$ $X=G\cup H$ ve $G\cap H=\varnothing$ olacak şekilde $\varnothing$ den farklı G,H açık altcümlelerin var olmasıdır.[2]

Örnek.2.3.4. Ayrık topoloji ile donatılmış olarak IN doğal sayılar kümesini göz önüne alalım. $m,n\in \mathbb{N}$ olmak üzere;

$$f_{m,n}(x)=\begin{cases} x; \ x\neq m,n \ \ ise \\ m; \ x=n \ \ ise \\ n; \ x=m \ \ ise \end{cases}$$

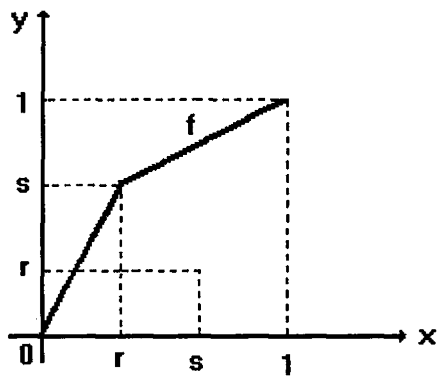
olarak tanımlayalım. IN ayrık topolojiye sahip olduğundan $f_{m,n}\in Aut(\mathbb{N})$ dir. Ayrıca $f_{m,n}(m)=n$ olduğundan $\tau(m)=\tau(n)$ olur. O halde IN içinde bir tek tip vardır ve bu tip $\tau(1)=\mathbb{N}$ dir diyebiliriz. Çünkü; $f_{m,n}(x)$ fonksiyonu $f_{1,n}(x)=\begin{cases} x; \ x\neq 1,n \ \ ise \\ 1; \ x=n \ \ ise \\ n; \ x=1 \ \ ise \end{cases}$ biçiminde m=1 alınarak seçilebilir. Bu durumda $f_{1,n}(1)=n\in \mathbb{N}$ dir ve $\tau(1)=\tau(n)=\{1,n\}=\mathbb{N}$ $(n\in\mathbb{N})$ demektir. Dolayısıyla $\tau(1)=\mathbb{N}$ dir.

Örnek.2.3.5. X=[0,1] kapalı aralığını alalım. $0<r<1$ ise $\tau(r)=\,]0,1[$ olduğunu gösterelim.[1]

$0,1\notin\tau(r)$ olduğu örnek 2.3.3. den dolayı açıktır. Genelliği bozmaksızın $0<r<s<1$ olduğunu kabul edelim.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{s}{r}x & ; 0\leq x\leq r \ \ ise \\ \frac{1-s}{1-r}x+\frac{s-r}{1-r} & ; r<x\leq 1 \ \ ise \end{cases}$$

olarak tanımlanan f fonksiyonu X in homeomorfizmasıdır.



$x=r$ için $f(r)=s$ olduğundan $\tau(r)=\tau(s)$ dir. Dolayısıyla $\tau(r)=]0,1[$ olur.

Tanım.2.3.4. X bir topolojik uzay olsun. X içinde bir tek tip var ise X uzayına Homojen denir.

Örnek.2.3.6. Örnek.2.3.2. den $\tau(a)=\mathbb{R}$ ve örnek 2.3.4.den $\tau(1)=\mathbb{N}$ olduğundan $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{N}$ uzayları homojen uzaylardır.

X uzayı homojen ve A,X in bir alt uzayı ise A nın homojen olması gerekmez. Örneğin; $\mathbb{R}$ homojen olduğu halde $\mathbb{R}$ nin $[0,1]$ alt uzayı homojen değildir.(örnek.2.3.5. en dolayı)

Doğal olarak ilk akla gelen sorulardan bir tanesi; A homojen ve A, X içinde yoğun ise A içinde aynı tipten olan iki elemanın X içinde aynı tipten olup olmamasıdır.

Örnek.2.3.7. $X = \{a,b,c,d\}$ ve $\tau=\{\varnothing,X,\{c\},\{b,c\},\{c,d\},\{a,c,d\}\}$ olsun. τ, X üzerinde bir topolojidir. $A=\{a,b,c\}$ alt uzayını alalım;

$G\neq\varnothing$ olmak üzere $\forall G\in\tau$ için $G\cap A\neq\varnothing$ olduğundan A, X içinde yoğundur.

A nın altuzay topolojisi ise,

$$\tau_A=\{G\cap A : G\in\tau\}$$
$$=\{\varnothing,A,\{c\},\{b,c\},\{a,c\}\} \text{ dir.}$$

Kolayca görüleceği gib; A içinde $\tau(a)=\tau(b)$ dir, fakat X içinde $\tau(a)\neq\tau(b)$ dir. Çünkü;

$f: A\to A$, $f(a)=b$, $f(b)=a$ ve $f(c)=c$ alınırsa; $f\in Aut(A)$ olur, fakat $f:X\to X$ bir fonksiyon bile olamaz (d elemanı karşılıksız kalır, yani $f(d)$ yoktur.)

2.4. βN de NOKTA TİPLERİ ve βN de HOMOJENLİK

Tanım.2.4.1. Eğer S bir küme ve Ω, S nin boş olmayan alt kümelerinin bir ailesi ise, o zaman Ω aşağıdaki şartları sağlayan S üzerinde bir ultrafiltre olarak ifade edilir.

i) Ω nin herhangi iki elemanının kesişimi Ω ya aittir.

ii) Ω, (i) şıkkı ile ilgili olarak maksimaldir.

IN üzerindeki ultrafiltrelerler βN nin aşağıdaki gibi kuruluşu olarak IN nin βN Stone-Cech kompaktlaması arasında yakın bir bağlantı (ilişki) vardır.

i) IN üzerindeki tüm ultrafiltreler βN nin noktalarıdır.

ii) $n \in IN$ ve $\mathcal{A}_n$, IN üzerinde bir sabit ultrafiltre olmak üzere IN nin alt kümelerinden oluşmaktadır. Buna göre $\forall n \in IN$ için $n \to \mathcal{A}_n$ yi tanımlayalım.

$$\left.\begin{array}{l} IN \to \beta N \\ n \to \mathcal{A}_n \end{array}\right\}$$ bir bakıma $IN \cup I$ kümesi, βN i indeksleyen bir kümedir.

ve $\beta N = IN \cup I$ dir.

iii) $\forall E \subset IN$ kümesi için βN de açık olan $E \in \Omega$ olacak şekilde bütün $\Omega \in \beta N$ kümesini ifade edelim. βN deki her açık küme böylesi E lerin birleşimidir.

Tanım 2.4.2. $\mathcal{B} = \{O(M) : M \subseteq IN\}$ kümesi βN üzerinde bir topolojik tabandır.

Tanım 2.4.3. Ω ve θ , βN üzerinde birer ultrafiltre olsunlar. Ω ve θ , βN de aynı tipten olması için gerek ve yeter şart $f(\Omega)=\theta$ olacak şekilde IN in bir permütasyonunun olmasıdır.

Ω ve θ , βN de aynı tipten olsunlar. Bu durumu $\Omega \approx \theta$ biçiminde göstereceğiz.

Ω ile aynı tipten olan IN üzerindeki bütün ultrafiltrelerin kümesini de $\tau(\Omega)$ ile göstereceğiz.

Teorem 2.4.1. . Ω ve $\theta \in \beta N$ olsun. Eğer Ω ile θ aynı tipten ($\Omega \approx \theta$) ise "$\approx$" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.[10]

Tanım 2.4.4. F, IN den IN ye bütün örten fonksiyonların kümesi olsun. Eğer $\Omega\in\beta N$ ve $f\in F$ ise $f(\Omega)=\{f(M) : M\in\Omega\}$ olarak tanımlanır.

Teorem 2.4.2 βN de $\tau(1) = IN$ dir.

İspat $f_n : IN\rightarrow IN\subset \beta N$ fonksiyonunu;

$$f_n(x)=\begin{cases} x; & x\neq 1,n \text{ ise} \\ 1; & x=n \text{ ise} \\ n; & x=1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Teorem..2.3 e-şıkkı gereğince $f_n^{\beta}:\beta N\rightarrow\beta N$ genişlemesi bir homeomorfizmadır. O halde $f_n^{\beta}\in Aut(\beta N)$ ve $f_n^{\beta}(1)=f_n(1)=n\in IN$ dir. Dolayısıyla $\tau(1)=\tau(n)=\{1,n\}$ ve $n\in\tau$ (1) olur. Ayrıca $p\in\beta N\setminus IN$ için $\tau(1)\neq\tau$ (p) olduğundan ancak $\tau(1)=IN$ dir.

Teorem 2.4.3. Aut(IN) den Aut(βN) ye $f\rightarrow f^{\beta}$ olarak tanımlanan fonksiyon iyi tanımlanmış bir izomorfizmadır.[1]

İspat Topolojik uzaylar için izomorfizma kavramı homeomorfizmadan başka birşey değildir.

IN ayrık ve sonsuz bir topolojik uzay olduğundan yine Teorem 2.2.3 gereğince $f:IN\rightarrow IN\subset\beta N$ bir homeomorfizma ise $f^{\beta} : \beta N\rightarrow\beta N$, βN üzerinde bir homeomorfizmadır. Bu nedenle $f\rightarrow f^{\beta}$ fonksiyonu iyi tanımlıdır.

Verilenlere göre;

$$\begin{array}{ccc} Aut(IN) & \xrightarrow{g} & Aut(\beta N) \\ f & \rightarrow & g(f)= f^{\beta} \end{array}$$

ifadesini ele alalım. Bu durumda g nin bire-bir olduğunu görelim:

$\forall f_1,f_2\in Aut(IN)$ için

$g(f_1)=g(f_2) \Rightarrow f_1=f_2$ ***?***

$g(f_1)=g(f_2)$ alalım. $\Rightarrow f_1^{\beta}=f_2^{\beta}$ demektir.

$\Rightarrow f_1^{\beta}|_{IN}=f_2^{\beta}|_{IN}$ dir.

$\Rightarrow f_1^{\beta}$,f_1 in ve f_2^{β} ,f_2 nin genişlemesi olduklarından $f_1^{\beta}|_{IN}=f_1$ ve $f_2^{\beta}|_{IN}=f_2 \Rightarrow f_1=f_2$ dir.

Şimdi de g nin örten olduğunu görelim:

$\forall f^{\beta} \in Aut(\beta N)$ e karşı bir $f \in Aut(IN)$ var mıdır. ?

$n \in N$ ise $\{n\}$ cümlesi βN de açıktır. Çünkü, IN cümlesi βN de yoğun ve $\{n\} \cap IN \neq \varnothing$ dir. Bu durumda bir $h \in Aut(\beta N)$ alalım; $n \in IN$ ise $h(\{n\}) = \{h(n)\}$ cümlesi βN de açıktır. Bu şartlar altında βN de açık ve bir tek elemandan oluşan kümeler IN ye dahildir. Bu da $h(IN) \subseteq IN$ demektir.

Benzer şekilde $\overleftarrow{h}(IN) \subseteq IN$ olup $h(\overleftarrow{h}(IN)) \subseteq h(IN)$ den $IN \subseteq h(IN)$ olur. O halde $h(IN)=IN$ dir. Buna göre $h|_{IN} = f \in Aut(IN)$ dir. Ayrıca $f^{\beta}|_{IN} = f = h|_{IN}$ olduğundan $h = f^{\beta}$ demektir ki bu da $\forall f^{\beta} \in Aut(\beta N)$ için bir $f \in Aut(IN)$ var demektir. Dolayısıyle $f \to f^{\beta}$ örtendir.

Şimdi de $g(f)=f^{\beta}$ olduğundan dolayı; f^{β} sürekli olduğundan $g(f)$ süreklidir ve f sürekli olduğundan $g^{-1}(f^{\beta})$ süreklidir.

Netice olarak $f \to f^{\beta}$ bir homeomorfizmadır. Dolayısıyla bir izomorfizmadır demektir.

Bir önceki bölümde X uzayının yoğun bir alt uzayının homojen olması halinde X in homojen olması gerekmediğini gördük. Fakat özel bir takım durumlarda yoğun altuzayın homojenliğinin, üstuzayın homojenliğini gerektireceği akla gelebilir. Bilhassa X bir Hausdorff ve tamamen regüler uzay ve X in bir Hausdorff kompaktlaması ise X in homojenliğinin Y nin homojenliğini gerektirip gerektirmediği çalışmaya değer görülmektedir. Şüphesiz en genel halde bu sorunun cevabı negatiftir. Örneğin $X=]0,1[$, $Y=[0,1]$ alınırsa; Y,X in bir kompaktlaması, X homojen bir uzay, fakat Y homojen olmayan bir uzaydır.

Dolayısıyla X in çok özel bir kompaktlamasının, homojenliği koruyup korumadığını incelemek daha akla yatkındır. Böyle bir kompaktlama için, en elverişli aday X in Stone-Cech kompaktlaması olacaktır. Fakat bu çok özel durumun bile homojenliği koruyamadığı görülür.

Teorem.2.4.4. βN homojen değildir.

İspat $\beta N = IN \cup I$ idi. $n \in IN$ olsun. $\{n\}$ cümlesi βN de açıktır. Çünkü IN cümlesi βN içinde yoğun ve $\{n\} \cap IN \neq \varnothing$ dir, fakat $p \in \beta N \backslash IN$ ise $\{p\}$ cümlesi βN içinde yoğun değildir. Çünkü; IN cümlesi βN içinde yoğun ve $\{p\} \cap IN = \varnothing$ dir. O halde p noktası IN in hiçbir noktası ile aynı tipten olmaz. Bu nedenle βN homojen değildir.

Teorem.2.4.5. βN de en az 2^c tane tip vardır.

2.5. IN^* DEKİ NOKTA TİPLERİ VE IN^* DE HOMOJENLİK

Tanım.2.5.1. $IN^* = \beta N \setminus IN$ uzayı olmak üzere IN^* uzayının noktaları, IN üzerindeki serbest ultrafiltreler olarak adlandırılır.

Eğer $IN^* \to IN^*$, f(p)=q olacak şekilde bir homeomorfizma var ise p ve q ultrafiltrelerine aynı tiptendir denir.

Tanım.2.5.2. $\forall E \subset IN$ için $O(E) = \{\Omega \in IN^* : E \in \Omega\}$ yı koyalım. O(E) kümeleri IN^* in açık-kapalı kümeleridir ve IN^* daki açık kümeler için bir temel şekildir. $O(E_1) \subset O(E_2)$ olması için gerek ve yeter şart $E_1 \setminus E_2$ nin sonlu olmasıdır.

Teorem.2.5.1. Eğer $M \cup N$, IN^* in sayılabilir ayrık bir alt kümesi ise ve

$\Omega \in \bar{M}$ ve $\Omega \in \bar{N} \Rightarrow \Omega \in \overline{M \cap N}$ dir.

βN in homojen olmaması, βN in altuzayı olan IN^* ın homojen olmamasını gerektirmez. Çünkü, IN^* in βN in automorfizmaları tarafından elde edilmeyen automorfizmaları olabilir. Teorem.2.4.3 ün ispatı sırasında $g \in Aut(\beta N)$ ise $g|_{IN^*} = g^* \in Aut(IN^*)$ benzerinde bir ifade kullanılmıştı. Fakat IN^* in bütün automorfizmalarının g^* şeklinde olması gerekmez. Bu nedenle $p \in IN^*$ ise p nin IN^* deki tipi, p nin βN deki tipinden daha büyük olabilir.

Teorem.2.5.2. IN^* homojen değildir.

Teorem.2.5.3. $p \in \beta N$ olsun.

$|\{\tau(q) : IN^*$ ın ayrık ve sayılabilir sonsuz bir X alt kümesi için $\tau(q,X) = \tau(p)\}| = 2^c$ dir.

III.BÖLÜM

βN de NOKTA TİPLERİ ÜZERİNDE YARISIRALAMALAR

3.1. RUDİN-KEİSLER YARISIRALAMASI

βN deki nokta tiplerinin daha iyi incelenebilmesi ve IN nin ultrafiltreleri hakkında daha iyi bilgi edinebilmesi amacıyla Rudin-Keisler ve Frolik tarafından βN ve IN^* deki nokta tipleri üzerinde bir takım yarısıralamalar tanımlanmıştır. Böylece nokta tiplerinin bu yarısıralamalarda aldığı yere bakarak tiplerin karakterleri üzerinde karar vermenin incelemeye bir kolaylık getireceği düşünülmüştür. Bu bölümde Rudin-Keisler tarafından tanımlanan Rudin-Keisler Yarısıralamasını inceleyeceğiz.

Önce bu bölümde faydalı olabilecek aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem.3.1.1. $f:A\rightarrow A$ bir fonksiyon, $p\in\beta N$, $A\subseteq IN$ ve $\forall a\in A$ için $f(a)\neq a$ olsun. Bu takdirde A nın aşağıdaki koşulları sağlayan A_0,A_1,A_2 alt kümeleri vardır.[1]

i) $A= A_0\cup A_1\cup, A_2$

ii) $0\leq I\leq 2$ ve $0\leq i\neq j \leq 2$ için

$A_i\cap A_j=\varnothing$ dir.

ii) $A_i\cap f(A_i)=\varnothing$ dir.

Tanım.3.1.1. $p\in\beta N$ ve f: $IN\rightarrow IN$ örten bir dönüşüm olsun. Bu takdirde, $f(\mathcal{A}_p) = \{ f(A) : A\in\mathcal{A}_p \}$ cümlesi IN de bir ultrafiltredir. Bu ultrafiltre bir $q\in\beta IN$ için $\mathcal{A}_q$ şeklindedir. Böylece $f(\mathcal{A}_p) = \mathcal{A}_q$ olur.

F, IN den IN ye bütün örten fonksiyonların kümesi olsun.

Tanım.3.1.2. (Rudin-Keisler Yarısıralaması) **:** $p,q\in\beta N$ olsun. Eğer $f(\mathcal{A}_p) = \mathcal{A}_q$ olacak şekilde bir $f\in F$ varsa; $\tau(q)\geq\tau(p)$ olarak tanımlanır.

Teorem.3.1.2. "$\geq$" iyi tanımlıdır.[1]

İspat $p, q, p', q' \in \beta N$ için $\tau(p) = \tau(p')$, $\tau(q) = \tau(q')$, ve $f(\mathcal{A}_q) = \mathcal{A}_p$ olsun. Bu takdirde $\tau(p)$ $\quad$ $\tau(q)$ olduğundan q ve p ile aynı tipten olan noktaların sıralamayı koruyup korumadığını araştıralım;

$\tau(p) = \tau(p')$ ve $\tau(q) = \tau(q')$ olduğundan bir takım $\pi_1, \pi_2 \in Aut(I\!N)$ için,

$\pi_1(\mathcal{A}q') = \mathcal{A}_q$ ve $\pi_2(\mathcal{A}p') = \mathcal{A}_p$ dir.

$\pi_2^{-1}(\mathcal{A}_p) = \mathcal{A}p'$ olduğuna göre;

$$\begin{array}{ccccccc}
I\!N & \xrightarrow{\pi_1} & I\!N & \xrightarrow{f} & I\!N & \xrightarrow{\pi_2^{-1}} & I\!N \\
\mathcal{A}_{q'} & \longrightarrow & \mathcal{A}_q & \longrightarrow & f(\mathcal{A}_q) = \mathcal{A}_p & \longrightarrow & \pi_2^{-1}(f(\mathcal{A}_q)) \\
 & & \| & & \| & & \| \\
 & & \pi_1(\mathcal{A}q') & & f(\pi_1(\mathcal{A}q')) & & \pi_2^{-1}(f(\pi_1(\mathcal{A}q'))) \\
 & & & & & & \| \\
 & & & & & & \pi_2^{-1}(\mathcal{A}_p) \\
 & & & & & & \| \\
 & & & & & & \mathcal{A}p'
\end{array}$$

den dolayı,

$\pi_2^{-1} o f o \pi_1 : I\!N \to I\!N$ $\qquad$ örten ve,

$$\begin{array}{c}
\mathcal{A}q' \to \pi_2^{-1} o f o \pi_1(\mathcal{A}q') \\
\| \\
\mathcal{A}p'
\end{array}$$

elde edilir. Bu da $\tau(p') \gtrsim \tau(q')$ demektir.

Y.Teorem.3.1.3. $f \in F$ ve $p, q \in \beta N$ için $f(\mathcal{A}_p) = \mathcal{A}_q$ olsun. Bu takdirde,

i) p=q olması için $\Leftrightarrow$ $\{n \in I\!N : f(n) = n\} \in \mathcal{A}_p$ olmasıdır.

ii) $\tau(p) = \tau(q)$ olması için $\Leftrightarrow$ bir $A \in \mathcal{A}_p$ için $f|_A$ nın 1-1 ve örten olmasıdır.

Teorem.3.1.4. "$\gtrsim$" bağıntısı tipler üzerinde bir yarısıralamadır.[1]

İspat

1) F de $I_{IN}(\mathcal{A}_p) = \mathcal{A}_p$ olduğundan $\tau(p) \gtrapprox \tau(p)$ dir. O halde yansıma özelliği vardır.

2)

$$\left.\begin{array}{c}\tau(p) \gtrapprox \tau(q) \\ ve \\ \tau(q) \gtrapprox \tau(p)\end{array}\right\} \Rightarrow \qquad \tau(p) \overset{?}{=} \tau(q)$$

Bir takım f,g∈F için $f(\mathcal{A}_q) = \mathcal{A}_p$ ve $g(\mathcal{A}_p) = \mathcal{A}_q$ dir. Bu da

$$IN \xrightarrow{f} IN \xrightarrow{g} IN$$

$$\mathcal{A}_q \longrightarrow \underset{\underset{f(\mathcal{A}_q)}{\|}}{\mathcal{A}_p} \longrightarrow \underset{\underset{g(\mathcal{A}_p)}{\|}}{\mathcal{A}_q} = g(f(\mathcal{A}_q))$$

çatısından dolayı,

$$gof : IN \longrightarrow IN$$

$$\mathcal{A}_q \rightarrow \quad gof(\mathcal{A}_q) = g(f(\mathcal{A}_q))$$
$$= g(\mathcal{A}_p) = \mathcal{A}_q$$

olduğundan Y.Teorem.3.1.3 gereğince $A = \{ n : gof(n) = n \} \in \mathcal{A}_q$ dir.

Ayrıca $A \in \mathcal{A}_q$ ve $f(\mathcal{A}_q) = \mathcal{A}_p$ ve de $f|_A$, 1-1 ve örtendir. Yine Y.Teorem.3.1.3 gereğince

$\tau(p) = \tau(q)$ demektir. O halde ters simetri özelliği vardır.

3)

$$\left.\begin{array}{c}\tau(p) \gtrapprox \tau(q) \\ ve \\ \tau(q) \gtrapprox \tau(r)\end{array}\right\} \Rightarrow \qquad \tau(p) \overset{?}{\gtrapprox} \tau(r)$$

Yine bir takım f,g∈F için,

$f(\mathcal{A}_q) = \mathcal{A}_p$ ve $\quad g(\mathcal{A}_r) = \mathcal{A}_q$ dir. Bu na göre,

$$\begin{array}{ccccc} I\!N & \xrightarrow{g} & I\!N & \xrightarrow{f} & I\!N \\ \mathcal{A}_r & \longrightarrow & \mathcal{A}_q & \longrightarrow & \mathcal{A}_p = f(g(\mathcal{A}_r)) \\ & & \| & & \| \\ & & g(\mathcal{A}_r) & & f(\mathcal{A}_q) \end{array}$$

şeklinde bir çatı oluşur. Bu çatıdan dolayı;

$$\begin{aligned} fog : I\!N &\to I\!N \\ \mathcal{A}_r &\to fog(\mathcal{A}_r)=\mathcal{A}_p \end{aligned}$$

örten fonksiyonu vardır. Bu da $\tau(p) \gtrsim \tau(r)$ dir demek. O halde "$\gtrsim$" bağıntısı geçişkendir.

Dolayısıyla "$\gtrsim$" bağıntısı tipler üzerinde bir yarısıralamadır.

Tanım 3.1.3. IN in $\{M_n : n \in I\!N\}$ şeklinde $\forall n \in I\!N$ için $|M_n|=\aleph_0$ şartını sağlayan parçalanışların kümesi $\mathcal{M}$ ile ve $I\!N^*$ içindeki sayılabilir sonsuz ve ayrık olan bütün alt uzayların topluluğunu da $\mathcal{D}$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.1.4. $p,q \in \beta N$ olsun. Bir $X \in \mathcal{D}$ için $\tau(p,X) = \tau(q)$ ise $\tau(q),\tau(p)$ yi üretiyor denir.

Teorem 3.1.5. $p,q \in \beta N$ olsun. Eğer $\tau(q),\tau(p)$ yi üretiyor ise $\tau(q) \leq \tau(p)$ dir.

Sonuç 3.1.1. $p \in \beta N$ olsun.

i) $|\{\tau(q) : \tau(p) \leq \tau(q)\}|=2^c$ dir

ii) $|\{\tau(q) : \tau(q) \leq \tau(p)\}| \leq c$ dir

İspat i) Teorem 2.5.3. den $\tau(p)$, 2^c tane tip üretir. Bu nedenle,

$$|\{\tau(q) : \tau(p) \leq \tau(q)\}|=2^c \text{ dir.}$$

ii) Teorem 3.1.5. den dolayı böylesi her $\tau(q)$,tipi için $\tau(q) \leq \tau(p)$ dir Dolayısıyla,

$$|\{\tau(q) : \tau(q) \leq \tau(p)\}| \leq c \text{ dir}$$

$p \in \beta N$ için $\overset{o}{p}$ bir ultrafiltredir.

Tanım 3.1.5. $p \in \beta N$ ve f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ örten bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $f(\overset{o}{p})=\{f(A) : A \in \overset{o}{p}\}$ cümlesi bir ultrafiltredir. Böylece $\exists\ q \in \beta N$ için $f(\overset{o}{p})=\overset{o}{q}$ olur.

Tanım 3.1.6. (Rudin-Keisler Yarısıralaması) : $p,q \in \beta N$ olsun. Eğer $\exists\ f \in F$ için $f(\overset{o}{q}) = \overset{o}{p}$ ise $\tau(p) \lneqq \tau(q)$ olarak tanımlanır.

Teorem 3.1.6. Eğer $p,q \in \beta \mathbb{N}$ ve $\tau(q) \leq \tau(p)$ ise o zaman $\tau(q) \lneqq \tau(p)$ dir.[14]

İspat $\tau(q) \leq \tau(p) \Rightarrow \underline{\bar{X}}$ ayrık ve $\Psi^{\beta}_{\underline{\bar{X}}}(q)=p$ olacak şekilde $\exists\ \underline{\bar{X}}=(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \beta N$ vardır. $E_n=\overset{o}{p}$ olacak şekilde $\mathbb{N}$ nin ayrık alt kümelerinin bir ailesi $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olsun. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ fonksiyonu

$$f(k)=\begin{cases} 1; & k \in \mathbb{N}\setminus(\cup E_n)=E_1' \\ n; & k \in E_n \end{cases}$$ olarak tanımlansın.

$$B \in \overset{o}{p} \Leftrightarrow \{n : B \in \overset{o}{\xi}\} \in \overset{o}{q}$$

$$\Leftrightarrow \widetilde{B}=\{n : B \cap E_n \in \overset{o}{\xi}\} \in \overset{o}{q}.$$

$f(B)=f(B\cap E_1')\cup f(B\cap E_n) \supseteq \bigcup_{n\in\widetilde{B}} f(B \cap E_n)=\{n : B\cap E_n \in \overset{o}{\xi}\} \in \overset{o}{q}$. dir.

Böylece $f(\overset{o}{p})=\overset{o}{q}$ dir.

Teorem 3.1.7. $p \in \beta N$ olsun.

i) $\mathrm{Kard}\{\tau(q) : \tau(p) \lneqq \tau(q)\}=2^c$

ii) $\mathrm{Kard}\{\tau(q) : \tau(q) \lneqq \tau(p)\} \leq c$ dir.[14]

İspat i) $\{\tau(q) : \tau(p) \leq \tau(q)\} \subseteq \{\tau(q) : \tau(p) \lneqq \tau(q)\}$ olduğundan $\mathrm{Kard}\{\tau(q) : \tau(p) \lneqq \tau(q)\}=2^c$ dir.

ii) Kard$\{\tau(q) : \tau(q) \precsim \tau(p)\} \leq$ Kard$\{f(\overset{o}{p}) : f \in F\} \leq$ Kard$F = c$ dir.

Sonuç 3.1.2. "$\precsim$" tam sıralı değildir.[14]

Örnek 3.1.1. $p \in \beta N$ olsun. O zaman $\{\tau(q) : \tau(q) \precsim \tau(p),\ q \in \mathbb{N}^*\}$ in tam sıralı olması gerekmez.

İspat $p_1, p_2 \in \mathbb{N}^*$, $\tau(p_1) = \tau(p_2)$, ve $\tau(p_1)$ ve $\tau(p_2)$ "$\leq$" sırlamasına göre $\{\tau(q) ; q \in \mathbb{N}^*\}$ da minimal olsunlar. $p \in \mathbb{N}^*$, $\tau(p_i) \precsim \tau(p)$, olsun. O zaman $\tau(p_i) \in \{\tau(q) : \tau(q) \precsim \tau(p), p \in \mathbb{N}^*\}$ dir ve $\tau(p_1)$ ile $\tau(p_2)$ karşılaştırılamaz. Dolayısıyla "$\precsim$" tam sıralı değildir.

Örnek 3.1.2. $p_1, p_2 \in \mathbb{N}^*$, için $\{\tau(q) : \tau(p_1) \leq \tau(q)$, ve $\tau(p_2) \leq \tau(q)\} = \varnothing$ dir.

İspat p_1 ve p_2 yukarıdaki şekilde olsunlar. O zaman $\tau(p_i)$ "$\precsim$" sıralamasına göre minimal olduğunda $\tau(p_i)$ "$\leq$" sıralamasına göre de minimaldir. Çünkü, $\leq \subseteq \precsim$ dir. Şimdi de eğer $\exists\ q \in \beta N$ için $\tau(p_i) \leq \tau(q)$ ise o zaman $\{\tau(p) : \tau(p) \leq \tau(q)\}$ tam sıralıdır. $\Rightarrow \tau(p_1)$ ve $\tau(p_2)$ karşılaştırılabilir.

Tanım 3.1.7. $p, q \in \beta N$ ve $f \in F$ olsun. Eğer $f(\overset{o}{p}) = \overset{o}{q}$ ve $\forall M \in \overset{o}{p}$ için $\{n \in \mathbb{N} : |\overleftarrow{f(n)} \cap M| = \aleph_0\}$ ise p, f boyunca q dan daha büyüktür. Eğer $\exists f \in F$ için, p, f boyunca q dan daha büyük ise, p tamamen q dan büyüktür.

Eğer ya $\tau(q) = \tau(p)$ ya da p tamamen q dan büyük ise $\tau(q) \sqsubseteq \tau(p)$ dir.

Teorem 3.1.8. "$\sqsubseteq$" iyi tanımlıdır.[14]

İspat p ve q ile aynı tipten olan noktaların sıralamayı koruyup korumadığını araştıralım:

$$\tau(q) = \tau(q') \quad \text{ve} \quad \tau(p) = \tau(p')$$

ve p, f boyunca q dan daha büyük olsun. Bu taktirde $\tau(p) \sqsubseteq \tau(q)$ iken $\tau(p') \sqsubseteq \tau(q')$ olmasını görmeye çalışalım:

$\pi_1, \pi_2 \in Aut(IN)$ için $\pi_1(\overset{o}{q})=\overset{o}{q'}, \pi_2(\overset{o}{p})=\overset{o}{p'}$ olsun. Bu taktirde $\overleftarrow{\pi_2}(\overset{o}{p'})=\overset{o}{p}$ olduğuna göre

$$
\begin{array}{ccccccc}
IN & \xrightarrow{\overleftarrow{\pi_2}} & IN & \xrightarrow{f} & IN & \xrightarrow{\pi_1} & IN \\
\overset{o}{p'} & \longrightarrow & \overleftarrow{\pi_2}(\overset{o}{p'}) & \longrightarrow & f(\overset{o}{p}) & \longrightarrow & \pi_1(\overset{o}{q}) = \overset{o}{q'} \\
 & & \| & & \| & & \| \\
 & & \overset{o}{p} & & \overset{o}{q} & & \pi_1(f(\overset{o}{p}))=\pi_1(f(\overleftarrow{\pi_2}(\overset{o}{p'})))
\end{array}
$$

çatısından dolayı

$$
\begin{array}{ll}
\pi_1 o f o \overleftarrow{\pi_2} & : IN \to IN \\
 & \quad \Psi \quad\; \Psi \\
 & \overset{o}{p'} \to \pi_1 o f o \overleftarrow{\pi_2}(\overset{o}{p'}) = \overset{o}{q'}
\end{array}
$$

olur ve

$$M \in \overset{o}{p'} \;\Rightarrow\; \pi_2(M) \in \overset{o}{p} \;\Rightarrow\; \{n : |\overleftarrow{\pi_2}(M) \cap \overleftarrow{f}(n)| = \aleph_0\} \neq \varnothing \text{ dir.}$$

$$M \cap \left(\pi_1 o f o \overleftarrow{\pi_2}\right)^{\leftarrow}(n) = M \cap (\pi_2 o \overleftarrow{f} o \overleftarrow{\pi_1})(n) = \pi_2[\overleftarrow{\pi_2}(M) \cap \overleftarrow{f}(\overleftarrow{\pi_1}(n))] \text{ dir.}$$

Böylece $n \in IN$ için;

$$|\overleftarrow{\pi_2}(M) \cap \overleftarrow{f}(n)| = \aleph_0 \text{ dir. O zaman,}$$

$$|\overleftarrow{\pi_2}(M) \cap \overleftarrow{f}(\overleftarrow{\pi_1}(\pi_1(n)))| = \aleph_0 \qquad \Rightarrow$$

$$|M \cap \pi_1 o f o \overleftarrow{\pi_2})^{\leftarrow}(n)| = \aleph_0 \text{ dir.}$$

Bu durum $\tau(p') \sqsubseteq \tau(q')$ olduğunu belirler.

Teorem.3.1.9. p,q $\in \beta N$ için,

i) $\tau(p) \le \tau(q) \Rightarrow \tau(p) \sqsubseteq \tau(q)$ dir.

ii) $\tau(p) \sqsubseteq \tau(q) \Rightarrow \tau(p) \not\geq \tau(q)$ dir.[14]

İspat

i) $\tau(p) \leq \tau(q) \Rightarrow \Psi^{\beta}_{\bar{X}}(p) = q$ olacak şekilde βN de $\exists \bar{X} = \exists \bar{X} = (\xi_n)_{n \in IN}$

ayrık dizisi vardır. $E_n = \overset{0}{\xi_n}$ olacak şekilde IN in ayrık alt kümelerinin ailesi $(E_n)_{n \in IN}$ olsun. $(E_n)_{n \in IN}$ ailesinin IN in bir ayrışımı olduğunu ve $\tau(p) < \tau(q)$ olduğunu varsayalım. $f \in F$ yi $f(E_n)=n$ olarak tanımlayalım. $f(\overset{o}{q}) = \overset{o}{p}$ olduğunu biliyoruz. Böylece $M \in \overset{0}{q}$ için,

$\{n \in IN : |M \cap \overleftarrow{f(n)}| = \aleph_0 \} \neq \emptyset$ ise o zaman $M \cap \overleftarrow{f(n)} = M \cap E_n$, $\forall n \in IN$ için sonludur.

$M \in \overset{o}{q}$ olduğunda, o zaman;

$\{n : M \cap E_n \in \overset{o}{\xi_n} \} \in \overset{o}{p} \Rightarrow \{ n : \xi_n \in IN \} \in \overset{o}{p}$

$\Rightarrow \tau(p) = \tau(q)$ dir böylece,

$\Rightarrow \tau(p) \sqsubseteq \tau(q)$ olur.

ii) Bu şıkkın gerçekliliği tanımdan kolayca görülmektedir.

Teorem.3.1.10. '' $\sqsubseteq$ '' tiplerin bir kısmi sıralamasıdır.[14]

İspat

1) '' $\sqsubseteq$ '' bağıntısı yansıyandır;

$\forall p \in \beta IN$ için $\tau(p) = \tau(p)$ olduğundan $\tau(p) \quad \tau(p)$ dir.

2)) '' $\sqsubseteq$ ' bağıntısı antisimetriktir.

$$\left.\begin{matrix} \tau(p) \sqsubseteq \tau(q) \\ ve \\ \tau(q) \sqsubseteq \tau(p) \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \tau(p) \overset{?}{=} \tau(q)$$

Teorem 3.1.9 gereğince,

$$\left.\begin{array}{c}\tau(p)\sqsubseteq\tau(q)\Rightarrow \tau(p)\geqq\tau(q)\\ ve \\ \tau(q)\sqsubseteq\tau(p)\Rightarrow \tau(q)\geqq\tau(p)\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \tau(p)=\tau(q) \text{ olur.}$$

3) '' $\sqsubseteq$'' bağıntısı geçişkendir.

p,f boyunca q den büyük ve q,h boyunca r den büyük olsun. O zaman $f(\overset{o}{p}) = \overset{o}{q}$ ve $h(\overset{o}{q}) = \overset{o}{r}$ dir. Buna göre;

$$\begin{array}{ccccc} I\!N & \xrightarrow{f} & I\!N & \xrightarrow{h} & I\!N \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ \overset{o}{p} & \longrightarrow & \overset{o}{q} & \longrightarrow & \overset{o}{r} \\ & & \| & & \| \\ & & f(\overset{o}{p}) & & h(\overset{o}{q}) = h(f(\overset{o}{p})) \end{array}$$

çatısından dolayı;

$$\begin{array}{ccc} I\!N & \xrightarrow{hof} & I\!N \\ \Psi & & \Psi \\ \overset{o}{p} & \longrightarrow & \overset{o}{r} = (hof)(\overset{o}{p}) \end{array}$$

dir. Ayrıca, $M\in \overset{o}{p}$ ise $f(M)\in \overset{o}{q}$ dir. Böylece $\exists n\in I\!N$ için

$M\in \overset{o}{p}$ için $|M\cap \overleftarrow{f}(n)|=\aleph_0$ ve

$f(M)\in \overset{0}{q}$ için $|f(M)\cap \overleftarrow{h}(n)|=\aleph_0$ dir.

O halde,

$|M\cap \overleftarrow{f}\ o\ \overleftarrow{h}(n)|=\aleph_0$ dir.

$\Rightarrow |M\cap \overleftarrow{(hof)}(n)|=\aleph_0$ dir.

Teorem.3.1.11. $p\in\beta N$ için,

i) Kard $\{\tau(q) : \tau(p)\sqsubseteq\tau(q)\} = 2^c$

ii) Kard $\{\tau(q) : \tau(q)\sqsubseteq\tau(p)\} \le c$ dir.[14]

İspat

i) $\{\tau(q) : \tau(p) \le \tau(q)\} \subseteq \{\tau(q) : \tau(p)\sqsubseteq\tau(q)\}$ olduğundan, Kard $\{\tau(q) : \tau(p) \sqsubseteq \tau(q)\} = 2^c$ dir.

ii) $\{\tau(q) : \tau(q) \sqsubseteq \tau(p)\} \subseteq \{\tau(q) : \tau(q) \geqq \tau(p)\}$ olduğundan,

Kard $\{\tau(q) : \tau(q) \sqsubseteq \tau(p)\} \leq c$ olur.

3.2. IN^* da P-NOKTALARI

IN^* da p-noktalarının varlığı, ilk defa Rudin-Keislar tarafından ispatlanmıştır.

Tanım.3.2.1. X bir topolojik uzay ve $p \in X$ olsun. Eğer p nin komşuluklarının her sayılabilir arakesiti, p nin bir komşuluğunu kapsıyorsa o zaman p, X in bir p-Noktası olarak tanımlanır veya. Başka bir ifade ile; $p \in IN^*$ ve $\forall i \in I$ için $V_i \in \mathcal{V}(p)$ olsun. $(V_i)_{i \in I}$ ailesi p nin sayılabilir bir komşuluklar ailesi olmak üzere, $\exists V \in \mathcal{V}(p)$ için $V \subset \bigcap_{i \in I} V_i$ oluyorsa; o zaman p, IN^* in bir p-Noktası olarak adlandırılır.

Eğer $\tau(\Omega)$, ''≤'' sıralaması altında IN^* da minimal ise o zaman Ω bir p-noktasıdır.

Eğer θ, p-noktası ve $\tau(\varnothing) \leq \tau(\theta)$ ise o zaman $\varnothing$ bir p-noktasıdır veya bir sabit ultrafiltredir.

Teorem.3.2.1. $p, q \in IN^*$ olsun.

i) $\tau(1) \leq \tau(p)$ dir.

ii) Eğer $\tau(q) \leq \tau(p)$ ve p bir p-noktası ise q da bir p-noktasıdır.[1]

İspat

i) $p \in IN^*$ olduğundan bir $A \in \mathcal{A}_p$ için,

$|A| = \aleph_0$ dir ve $|IN \setminus A| = \aleph_0$ dir

$\sigma : IN \setminus A \to IN \setminus \{1\}$ kümesine 1-1 ve örten bir fonksiyon olsun. $f : IN \to IN$ fonksiyonunu,

$$f(k) = \begin{cases} 1 & ; k \in A \ \ ise \\ \sigma(k) & ; k \in IN \setminus A \ \ ise \end{cases}$$ olarak tanımlayalım.

$f(A) = \{1\} \in \mathcal{A}_1$ olduğundan $f(\mathcal{A}_p) \subseteq \mathcal{A}_1$ olduğu açıktır. Bu da $\tau(1) \leq \tau(p)$ olduğunu ifade eder.

ii) $\tau(q) \leq \tau(p)$ ve p, $\mathbb{N}^*$ da bir p-noktası olsun. $p,q \in \mathbb{N}^*$ için $\tau(q) \leq \tau(p)$ olduğundan bir $f \in F$ için $f(\mathcal{A}_p) = \mathcal{A}_q$ dur.

$n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \mathcal{A}_p$ olsun. $f(\mathcal{A}_p) \subset \mathcal{A}_q$ olduğundan $\overleftarrow{f}(E_n) \in \mathcal{A}_p$ dir. Diğer yandan p, $\mathbb{N}^*$ da bir p-noktası olduğundan bir $A \in \mathcal{A}_p$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A \setminus \overleftarrow{f}(E_n)$ sonludur. $E=f(A) \in \mathcal{A}_q$ ve $b \in E \setminus E_n$ olsun. $b \in E$ olduğundan bir $a \in A$ için $f(a)=b$ ve $b \notin E_n$ dir.

Dolayısıyla,

$a \notin \overleftarrow{f}(E_n)$ ve $a \in A \setminus \overleftarrow{f}(E_n)$ dir. O halde $f(a) \in f(A \setminus \overleftarrow{f}(E_n))$ olur. $b \in E \setminus E_n$ için,

$$b = f(a) \in f(A \setminus \overleftarrow{f}(E_n)) \text{ olduğundan,}$$

$E \setminus E_n \subseteq f(A \setminus \overleftarrow{f}(E_n))$ dir. Diğer yandan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A \setminus \overleftarrow{f}(E_n)$ sonlu olduğundan $E \setminus E_n$ de sonludur. Dolayısıyla q, $\mathbb{N}^*$ da bir p-noktadır.

Teorem.3.2.2. p, $\mathbb{N}^*$ da bir p-nokta olsun. O zaman $\mathbb{N}^*$ da p-nokta olan bir $q \in \mathbb{N}^*$ için,

$$\tau(p) \leq \tau(q) \text{ ve } \tau(q) \neq \tau(p) \text{ dir.}$$

KAYNAKLAR

[1] BİRLİK, S., "Topolojik Uzaylarda Homojenlik ve βN 'deki Nokta Tipleri Üzerinde Yarı Sıralamalar", Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, 1987

[2] BÜLBÜL, A., Genel Topoloji, K.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, Yayın No: 172, Trabzon 1994

[3] CHANDLER, R.E., Haussdorff Compactifiations

[4] COMFORT, W.W.-NEGREPONTIS, S., The Teory of Ultrafiltres Springer - Verlag Newyork Heidelberg Berlin 1974

[5] FROLIK, Z., Sums of Ultrafiltres , B411 AMS 73(1967) 87-91

[6] GILLMAN, L.-JERISON, M., Ring of Continous Functions Princetion. New Jersy 1960

[7] GÜRKANLI, T., Genel Toploji, Samsun 1993

[8] HARDY , J.P.L., -MORRIS S.A.-THOMPSON H.B., Applıcations of The Stone-Cech Compactıficatıon Free Topologıcal Groups, American Mat., Society 55, Şubat 1976

[9] LEVY , R-MCDOWELL, R.H., Dense Subsets of βX : American Math. Society. 50, Temmuz 1975

[10] RUDIN, M.E., Partıal Orders on The Types βN , American Math., Society, 155, Nisan 1971, 353

[11] RUDIN , M, E., Types of Ultrafiltres, Topoloji Semineri (Wisconsın 1965), Annn. of Math. Studier. No: 60, Princeton Univ. Yayını, Princeton, N.J.1966 , 147-151

[12] RUDIN, W., Homogenıty Problems in The Theory of Cech Compactıficatıons, Duke Math. J., (Vol) 23 Sayfa No: 409-420; 633 (1956)

[13] TZUNG, F.C., Sufficient Conditions For The Set of Hausdorff Compactıficatıons To Be a Lattıce, Doktora Tezi, Ralıgh Üni., 1976

[14] ÜNLÜ,Y., Topoloji Ders Notları, Çukurova üniversitesi. 1995.

[15] WILLARD, S., General Topology, University of Alberta

[16] YÜKSEL, Ş., Genel Topoloji, S.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, Yayın No:14 , Konya 1995

ÖZGEÇMİŞ

1954 yılında Ş.Urfa Bozova ilçesi Taşan köyünde doğdu. İlk öğrenimini Taşan köyünde ve orta öğrenimini de Ş.Urfa da tamamladı. 1980 yılında Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu.

1981 ve 1995 yılları arasında çeşitli lise ve özel dersanelerde öğretmenlik ve yöneticilik yaptı.

1995 yılından bu yana Harran Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde öğretim görevlisi olarak hizmetini sürdürmektedir.