T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİNEER OLMAYAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN ORTALAMA ERGODİK TEOREMLER

Özlem GÜL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2005

Yrd. Doç. Dr. Seyit TEMİR danışmanlığında Özlem GÜL’ ün hazırladığı “ Lineer Olmayan Dönüşümler için Ortalama Ergodik Teoremler ”konulu bu çalışma 05/07/2005 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’ nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Seyit TEMİR

Üye: Doç. Dr. Nurhayat İSPİR

Üye: Yrd. Doç. Dr. Hasan AKIN

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Prof. Dr. İbrahim BOLAT
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZ.......... i
ABSTRACT.......... ii
TEŞEKKÜR.......... iii
GİRİŞ.......... 1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.......... 4
2.1. Diziler.......... 4
2.2. Metrik Uzaylar.......... 6
2.3. Normlu Lineer Uzaylar.......... 8
2.4. Banach Uzayları.......... 10
2.5. İç Çarpım Uzayları.......... 10
2.6. Hilbert Uzayları.......... 13
2.7. Lineer ve Lineer Olmayan Dönüşümler.......... 17
2.8. Zayıf ve Kuvvetli Yakınsaklık.......... 22
2.9. Ölçüm Uzayları.......... 27
3. MATERYAL ve YÖNTEM.......... 32
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.......... 33
4.1. Lineer Olmayan Dönüşümler için Kuvvetli Ergodik Teoremler.......... 33
4.2. Lineer Olmayan Dönüşümler için Zayıf Ergodik Teoremler.......... 41
4.3. Uygulamalar.......... 52
4.4. I-Nonexpansive Dönüşümler için Ortalama Ergodik Teoremler.......... 65
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.......... 69
KAYNAKLAR.......... 70
ÖZGEÇMİŞ.......... 71
ÖZET.......... 72
SUMMARY.......... 73

ÖZ

Yüksek Lisans Tezi

LİNEER OLMAYAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN ORTALAMA ERGODİK TEOREMLER

Özlem GÜL

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Seyit TEMİR
Yıl: 2005, Sayfa: 73

Bu tezde, Banach uzaylarında lineer olmayan dönüşümler için ortalama ergodik teoremler incelenmektedir. Miyadera (1997)' nın verdiği şartlar altında $\mathscr{H}$ Hilbert uzayının herhangi bir alt kümesi üzerinde tanımlanan lineer olmayan T dönüşümleri için $A_n\left(x\right)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}T^i x$ ortalamasının kendi asimtotik merkezine hemen hemen kuvvetli ve zayıf yakınsaklılığı ile ilgili bazı önemli sonuçlar elde edilmektedir. Bu şartlar altında kuvvetli ve zayıf lineer olmayan ergodik teoremlerin L^p $\left(p\geq 2\right)$ uzaylarına genişletilmesi verilmekte ve özel olarak L^4 ve l_4 uzayları üzerinde incelenmektedir. Ayrıca lineer olmayan ortalama ergodik teoremler hakkında son yapılan çalışmalardan hareketle, lineer olmayan I-nonexpansive dönüşümler için, elde edilen bazı şartlar altında zayıf ergodik teorem ispatlanmaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: Asimtotik merkez, hemen hemen zayıf ve kuvvetli yakınsaklık, lineer olmayan ortalama ergodik teoremler, nonexpansive dönüşüm, I- nonexpansive dönüşüm .

ABSTRACT

MSc Thesis

MEAN ERGODIC THEOREMS FOR NONLINEAR MAPPINGS

Özlem GÜL

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assits. Prof. Dr. Seyit TEMİR
Year: 2005, Page: 73

In this thesis, it is investigated the nonlinear mean ergodic theorems on Banach spaces. It is obtained some important results which $A_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i x$ is strongly and weakly almost convergent to its asymptotic center under Miyadera (1997) ' s conditions of nonlinear operator T defined on any subset of $\mathscr{H}$ Hilbert space. Under this conditions, extending the L^p $(p \geq 2)$ spaces of the weak and strong ergodic theorems for nonlinear operators are given and particularly applied to L^4 and l_4 spaces. Moreover, in the lights of recently papers about nonlinear mean ergodic theorems it is proved that the nonlinear weak ergodic theorem for I-nonexpansive mappings under some conditions.

KEY WORDS: Asymptotic center, weak and strong almost-convergences, nonlinear mean ergodic theorems, nonexpansive mapping, I-nonexpansive mapping .

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım tez danışmanın sayın Yrd. Doç. Dr. Seyit TEMİR' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu çok emek verilen tezin hazırlanmasında her zaman manevi desteğini hissettiğim sevgili eşime, bana çalışmanın ve başarmanın önemini öğreten, her zaman yanımda olan canım annem ve babama sonsuz teşekkürler...

1. GİRİŞ

Bu tezde, C, Banach uzayının bir alt kümesi olmak üzere $T:\ C\to C$ lineer dönüşümleri için iyi bilinen $A_n\left(x\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}T^i x$ ($x\in C$) ortalamasının yakınsaklığı lineer olmayan $T:\ C\to C$ dönüşümleri için incelenmektedir.

İlk olarak, Baillon (1975), C, $\mathscr{H}$ Hilbert uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi olmak üzere, y gibi sabit noktaya sahip olan $T:\ C\to C$ lineer olmayan nonexpansive dönüşümü ve $k\geq 0$ için $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}T^{i+k}x=y$ (hemen hemen zayıf yakınsak) olduğunu göstermiştir. Genel olarak Baillon (1975)' un bu teoremine *lineer olmayan ergodik teorem* denir.

Bruck ve Reich (1979), Baillon (1975)' un bu teoremini X düzgün konveks Banach uzayına genişletmişlerdir. Ayrıca Baillon (1976), C, $\mathscr{H}$ Hilbert uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi olmak üzere, y gibi sabit noktaya sahip $T:\ C\to C$ lineer olmayan nonexpansive tek dönüşümü ve $\forall\, x\in C$ için $\left\{\ T^n x\ \right\},\ \left(n>0\right)$ dizisinin T dönüşümünün sabit noktasına hemen hemen kuvvetli yakınsak olduğunu göstermiştir.

Brezis ve Browder (1976), T dönüşümünün tek dönüşüm olması şartının yerine $u,\ v\in C$ ve c negatif olmayan bir sabit olmak üzere;

$$\|\ Tu+Tv\ \|^2\leq\|\ u+v\ \|^2+c\Big[\ \|\ u\ \|^2-\|\ Tu\ \|^2+\|\ v\ \|^2-\|\ Tv\ \|^2\Big] \tag{1}$$

şartını alarak lineer olmayan ergodik teoremi ispatlamışlardır.

Bruck (1978), T nonexpansive ve (1) şartını sağladığında $u,\ v\in C$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\ T^{n+i}u-T^n v\ \right\|,\ \left(i\geq 0\right) \tag{2}$$

limitinin varlığını göstermiş ve C, $\mathscr{H}$ Hilbert uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi olmak üzere, y gibi sabit noktaya sahip olan $T:\ C\to C$ lineer olmayan nonexpansive dönüşümü için (2) limiti mevcut ise $\forall\, x\in C$ için $\left\{\ T^n x\ \right\}$ dizisinin T dönüşümünün sabit noktasına hemen hemen kuvvetli yakınsadığını ispatlamıştır.

Hirano, Takahashi (1979) ve Oka (1989), T dönüşümünün nonexpansive olma şartı yerine $u, v \in C$, $k \geq 0$ ve a_k negatif olmayan sabitleri için $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$ olmak üzere, $\left\| T^k u - T^k v \right\| \leq a_k \left\| u - v \right\|$ şartını alarak lineer olmayan ergodik teoreminin sağlandığını göstermişler ve asimtotik nonexpansive dönüşümler için lineer olmayan ergodik teoremi ispatlamışlardır.

Wittmann (1990), $\mathscr{H}$ Hilbert uzayının herhangi bir C alt kümesi, (kapalı konveks olması gerekmez) $T: C \to C$ $\forall\, u, v \in C$, $k \geq 0$, a_k negatif olmayan sabitler ve $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$ için, $\left\| T^k u + T^k v \right\| \leq a_k \left\| u + v \right\|$ olmak üzere, $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i x$ ortalamasının kuvvetli yakınsak olduğunu göstermiştir.

Miyadera (1997), Wittmann (1990)' ın şartı yerine B, C' nin sınırlı bir alt kümesi ve $\lim_{k\to\infty} \delta_k(B) = 0$ olmak üzere,

$$\left\| T^k u + T^k v \right\|^p \leq a_k \left\| u + v \right\|^p + c\left[a_k \left\| u \right\|^p - \left\| T^k u \right\|^p + a_k \left\| v \right\|^p - \left\| T^k v \right\|^p \right] + \delta_k\left(B\right) \quad (3)$$

şartını alarak $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i x$ ortalamasının $\forall\, x \in C$ için $\left\{ T^n x \right\}$ dizisinin asimtotik merkezine hemen hemen zayıf ve kuvvetli yakınsaklıklarını göstermiştir.

Bu tezde, ilk olarak Krengel (1985)' den lineer olmayan ortalama ergodik teoremler için temel tanım ve teoremler incelenmiştir. Daha sonra, Wittmann (1990) ve Miyadera (1997)' nın çalışmalarından yararlanılarak $\mathscr{H}$ Hilbert uzayının, C herhangi bir alt kümesi ve $T: C \to C$ lineer olmayan dönüşümünün bazı şartlar altında, $k \geq 0$ için $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^{i+k} x$ ortalamasının $\forall\, x \in C$ için $\left\{ T^n x \right\}$ dizisinin asimtotik merkezine hemen hemen zayıf ve kuvvetli yakınsak olduğu gösterilerek bu teoremi gerçekleyen lineer olmayan T dönüşümlerinin örnekleri verilmektedir. Ayrıca Miyadera (1997)' de L^p $\left(p \geq 2\right)$ uzaylarına uygulaması yapılan lineer olmayan ortalama ergodik teorem, l_4 uzayına uygulanarak lineer olmayan ergodik teoremin l_4 uzayı için geçerliliği gösterilmektedir.

Son olarak, Shahzad (2004)' ın yaptığı çalışmadan hareketle (3) şartının yerine, B, C kümesinin sınırlı bir alt kümesi, $T: C \to C$ lineer olmayan bir dönüşüm, $I: C \to C$ lineer olmayan sınırlı bir dönüşüm ve T, I değişmeli olmak üzere, aşağıdaki (4) ve (5) şartları alınarak, I-nonexpansive dönüşümler için lineer olmayan ortalama ergodik teorem ispatlanmaktadır. Keyfi $u, v \in B$ ve a_k, c, p negatif olmayan sabitleri ve $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$ için

$$\left\|T^k u - T^k v\right\|^p \le a_k \left\|I^k u - I^k v\right\|^p + c\left[\, a_k \left\| I^k u \right\|^p - \left\|T^k u\right\|^p + a_k \left\|I^k v\right\|^p - \left\|T^k v\right\|^p \right] + \delta_k\left(B\right)$$

(4)

olacak şekilde bir $\delta_k\left(B\right) \ge 0,\ \lim_{k\to\infty} \delta_k\left(B\right) = 0$

ve her $x, y \in C$ için

$$\left\| T^n I^k x - I^k T^n y \right\| \le R_k \left\| T^n x - I^k y \right\| \tag{5}$$

olacak şekilde bir $R_k \ge 0,\ \lim_{k\to\infty} R_k = 1$ vardır.

Ayrıca bu teoremi gerçekleyen I-nonexpansive T dönüşümüne örnek verilerek teoremin uygulaması yapılmaktadır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Diziler

Tanım 2.1.1. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinden $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesine tanımlanan her fonksiyona bir reel *terimlı dizi* veya kısaca *dizi* denir ve (x_n) şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.2. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (x_n) dizisine *üstten sınırlıdır* denir. M sayısına bu dizinin bir *üst sınırı* adı verilir. Üst sınırların en küçüğüne de dizinin *en küçük üst sınırı* veya *supremum*' u denir. $\sup x_n$ veya $\text{eküs}\, x_n$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq K$ olacak şekilde bir K reel sayısı varsa (x_n) dizisine *alttan sınırlıdır* denir. K sayısına da bu dizinin bir *alt sınırı* adı verilir. Alt sınırların en büyüğüne dizinin *en büyük alt sınırı* veya *infimumu* denir. $\inf x_n$ veya $\text{ebas}\, x_n$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq A$ olacak şekilde bir A pozitif reel sayısı varsa (x_n) dizisine *sınırlı dizi* denir.

Tanım 2.1.5. (x_n) bir reel sayı dizisi ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall\, \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|x_n - x_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x_0' a *yakınsaktır* denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ veya $(x_n) \to x_0$ şeklinde gösterilir.

Yakınsak her dizi sınırlıdır ve limiti tektir (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Tanım 2.1.6. Bir (x_n) dizisi verilsin. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x_n < x_{n+1}$ ise bu diziye *monoton artan dizi* denir. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x_n > x_{n+1}$ ise diziye *monoton azalan dizi* denir.

Tanım 2.1.7. $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ x(n) = x_n$ dizisi verilsin. $n: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n(k) = n_k$ dizisi bir artan dizi olmak üzere $(xon): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bileşke fonksiyonuna (x_n) dizisinin bir *alt dizisi* denir ve $(xon)(k) = x(n(k)) = x(n_k) = x_{n_k}$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.8. Reel değerli bir (x_n) dizisinin yakınsak ve limitinin L olması için gerekli ve yeterli koşul (x_n) dizisinin bütün (x_{n_k}) alt dizilerinin de aynı L limitine yakınsamasıdır. Her sınırlı reel sayı dizisinin en az bir yakınsak alt dizisi vardır (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Tanım 2.1.9. Herhangi bir X uzayında (x_n) dizisi verilsin. O zaman

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim\ \sup x_n = \inf_{m\geq 1}\left(\sup_{n\geq m}\ (x_n)\right)$$

şeklinde tanımlanan limit değerine (x_n) dizisinin *üst limiti* denir.

Benzer olarak

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim\ \inf\ x_n = \sup_{m\geq 1}\left(\inf_{n\geq m}\ (x_n)\right)$$

şeklinde tanımlanan limit değerine (x_n) dizisinin *alt limiti* denir.

Teorem 2.1.10. (x_n) sınırlı bir dizi ise $\lim\ \sup x_n$ ve $\lim\ \inf\ x_n$ sırasıyla (x_n) dizisinin en büyük ve en küçük limit noktalarıdır ve

$$\lim\ \inf\ x_n \leq \lim\ \sup\ x_n \text{ ve } \lim\ \inf\ (-x_n) = -\lim\ \sup\ x_n$$

dir (Royden, 1978).

Teorem 2.1.11. (x_n) reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. O zaman

$$\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = x \Leftrightarrow \lim\ x_n = x$$

dir (Royden, 1978).

Tanım 2.1.12. (x_n) reel terimli bir dizi olsun. $\forall\ \varepsilon > 0$ için $m,\ n \geq 0$ olduğunda $|x_m - x_n| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

2.2. Metrik Uzaylar

Tanım 2.2.1. X boş olmayan bir küme olsun. $d: X\times X\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x, y, z\in X$ için

(M_1) $d(x,y)\geq 0$

(M_2) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

(M_3) $d(x,y)=d(y,x)$

(M_4) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyona X üzerinde bir *metrik* adı verilir. (X, d) ikilisine de bir *metrik uzay* denir.

Tanım 2.2.2. Bir (X, d) metrik uzayı ile bu uzayın bir x_0 noktası ve pozitif bir r reel sayısı verilsin. Bu durumda,

$$B(x_0, r)=\{x\in X: d(x_0, x)<r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı *açık yuvar*,

$$\overline{B}\ (\mathrm{x}_0, r)=\{x\in X: d(x_0, x)\leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı *kapalı yuvar* ve

$$S(x_0, r)=\{x\in X: d(x_0, x)=r\}$$

kümesine de x_0 merkezli ve r yarıçaplı *yuvar yüzeyi* denir.

Tanım 2.2.3. (X, d) bir metrik uzay, $x\in X$ ve r pozitif bir reel sayı olsun. $B(x, r)$ açık yuvarına x noktasının bir $r-$*komşuluğu* denir. X metrik uzayının x noktasının bir $r-$komşuluğunu içine alan herhangi bir alt kümesine de x noktasının bir *komşuluğu* adı verilir.

Tanım 2.2.4. Bir (X, d) metrik uzayının bir A alt kümesi, $x\in X$ noktasının bir komşuluğu ise x noktasına A kümesinin bir *iç noktası* denir.

$A\subset X$ kümesinin bütün iç noktalarının kümesine A kümesinin *içi* adı verilir ve $\overset{0}{A}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.5. (X, d) bir metrik uzay, bu uzay içinde bir dizi (x_n) ve $x\in X$ olsun. Her $\varepsilon>0$ için $n_0\leq n$ olduğunda $d(x_n, x)<\varepsilon$ ya da $x_n\in B(x, \varepsilon)$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa (x_n) dizisi x noktasına *yakınsıyor* denir. Bu durum $x_n \to x$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde ifade edilir..

Önerme 2.2.6. Bir $(X,\ d)$ metrik uzayında yakınsak her dizi sınırlıdır ve limiti tektir (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Tanım 2.2.7. $(X,\ d)$ metrik uzay ve bu uzay içinde bir dizi (x_n) olsun. $\forall\ \varepsilon > 0$ için $n_0 \leq n,\ m$ olduğunda

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisi* denir.

Bir $(X,\ d)$ metrik uzayında yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Tanım 2.2.8. Bir $(X,\ d)$ metrik uzayında alınan her Cauchy dizisi X içinde yakınsak ise $(X,\ d)$ metrik uzayına *tam metrik uzay* denir.

Tanım 2.2.9. $1 \leq p < \infty$ koşulunu sağlayan p bir reel sayı olsun. Terimlerinin $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ toplamı yakınsak olan, yani $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ olacak şekilde reel ya da karmaşık $x = (x_i)$ dizilerinin oluşturduğu küme ℓ_p ile gösterilir. Bu durumda, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\ell_p = \left\{ x = (x_i) :\ \mathrm{x_i} \in \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^{\infty} |\mathrm{x_i}|^p < \infty \right\}$$

dir.

Önerme 2.2.10. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere ℓ_p uzayı,

$$d_p(x,\ y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

metriğine göre tamdır (Kolmogorov, Fomin, 1970).

2.3. Normlu Lineer Uzaylar

Tanım 2.3.1. X boş olmayan bir küme ve $\mathbb{K}$ bir sayı cismi olsun. Her $x,\ y,\ z \in X$ ve her $\alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$ için

(1) $x+y=y+x$

(2) $x+(y+z)=(x+y)+z$

(3) $x+\theta=x$ olacak biçimde bir $\theta\in X$ öğesi var,

(4) $x+x^{'}=\theta$ olacak biçimde bir $x^{'}\in X$ öğesi var,

(5) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

(6) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

(7) $(\alpha\beta(x)=\alpha(\beta x)$

(8) $1x=x$

koşulları sağlanıyorsa, X kümesine $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir *lineer uzay (vektör uzayı)* denir.

Tanım 2.3.2. X bir lineer uzay olsun. $N:\ X\to\mathbb{R}$ dönüşümü her $x,\ y\in X$ ve her $\alpha\in\mathbb{K}$ için

N$_1$) $N(x)\geq 0$ ve $N(x)=0 \Leftrightarrow x=\theta$

N$_2$) $N(\alpha x)=|\alpha|N(x)$

N$_3$) $N(x+y)\leq N(x)+N(y)$

koşullarını sağlıyorsa bu dönüşüme *norm* ve üzerinde bir norm tanımlanmış olan X lineer uzayına da *normlu lineer uzay* denir. Genel olarak, N norm dönüşümü yerine $\|\ .\ \|$ sembolü kullanılır.

X normlu bir lineer uzay olmak üzere,

$$d:\ X\times X\to\mathbb{R}\ ;\ d(x,\ y)=\|\ x-y\ \|$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü X uzayı üzerinde bir metriktir. Bu metriğe norm metriği denir. Bu nedenle her normlu uzay bir metrik uzaydır (Bayraktar, 1992).

Tanım 2.3.3. $(X,\ \|\ .\ \|)$ normlu uzayının bir alt kümesi A olsun. Eğer

$$R_A=\sup\ \{\|x-y\|:\ \mathrm{x}\in\mathrm{A},\ \mathrm{y}\in\mathrm{A}\}<\infty$$

oluyorsa A kümesine X içinde *sınırlı küme* denir.

Tanım 2.3.4. $(X, \|\,.\,\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi (x_n) ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \leq n$ olduğunda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_o doğal sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x noktasına *yakınsaktır* denir ve $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.3.5. $(X, \|\,.\,\|)$ normlu uzayının bir A alt kümesinin sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul $x_0 \in X$ iken

$$A \subset \overline{B}(x_0, r)$$

biçiminde bir $r > 0$ sayısının var olmasıdır (Bayraktar, 1992).

Önerme 2.3.6. $(X, \|\,.\,\|)$ normlu uzayı içinde yakınsak her dizi sınırlıdır ve limiti tektir (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Tanım 2.3.7. $(X, \|\,.\,\|)$, bir normlu uzay ve bu uzay içinde bir dizi (x_n) olsun.

$$\forall\ \varepsilon > 0 \text{ için } n_0 \leq n,\ m \text{ olduğunda } \|\, x_n - x_m \,\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 2.3.8. $(X, \|\,.\,\|_1)$, $(Y, \|\,.\,\|_2)$ normlu uzaylar, $x_0 \in X$ ve X uzayından Y uzayının içine bir f fonksiyonu tanımlansın. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\|\, x - x_o \,\|_1 < \delta \ \Rightarrow \|\, f(x) - f(x_0) \,\|_2 < \varepsilon$$

ya da buna denk olarak;

$$f\big(B(x_0, \delta)\big) \subset B\big(f(x_0), \varepsilon\big)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna x_o noktasında *süreklidir* denir.

Bir $(X, \|\,.\,\|)$ normlu uzayının her noktasında sürekli olan f fonksiyonuna X üzerinde *sürekli fonksiyon* denir.

2.4. Banach Uzayları

Tanım 2.4.1. X normlu lineer uzay olsun. X, norm metriğine göre tam ise X uzayına *Banach uzayı* denir.

Örnek 2.4.2. Karmaşık terimli ve sınırlı $x=(x_n)$ dizilerinin kümesi ℓ_∞ ile gösterilir. ℓ_∞ uzayı

$$\| x \|_\infty = \sup\left\{ \; |x_n| : \text{ n=1, 2, . . . } \right\} < \infty$$

normuna göre bir Banach uzayıdır (Bayraktar, 1992).

Örnek 2.4.3. $\ell_p \quad (1 \le p < \infty)$ uzayı

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır (Bayraktar, 1992).

2.5. İç Çarpım Uzayları

Tanım 2.5.1. X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\varphi = (. \, , \, .) : X \times X \to \mathbb{K}$$

fonksiyonu her $x, \, y, \, z \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ için,

I$_1$) $(x, \, x) \ge 0$ ve $(x, \, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

I$_2$) $(x, \, y) = \overline{(y, \, x)}$

I$_3$) $(\alpha x, \, y) = \alpha (x, \, y)$

I$_4$) $(x + y, \, z) = (x, \, z) + (y, \, z)$

koşullarını sağlıyorsa bu $\varphi = (\; . \, , .)$ fonksiyona bir *iç çarpım* ve $(X, \; (. \, , \, .))$ ikilisine de bir *iç çarpım uzayı* denir ve kısaca X ile gösterilir.

Yukarıdaki şartlar sağlanıyorsa;

$$(x, \, y+z) = (x, \, y) + (x, \, z),$$
$$(x, \, \alpha y) = \overline{\alpha} (x, \, y) \text{ ve}$$
$$(x, \, \theta) = (\theta, \, y) = 0$$

özellikleri de sağlanır.

Önerme 2.5.2. X bir iç çarpım uzayında

$$|\ (x,\ y)\ | \leq \|x\|\|y\|,\quad \|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$$

eşitsizlikleri geçerlidir. (Bayraktar, 1992).

İspat: x ve y elemanlarından en az biri θ ise $(x,\ \theta)=0$ olacağından ifade doğrudur. $x \neq \theta,$ $y \neq \theta$ olsun. O zaman her $\alpha \in \mathbb{K}$ için;

$$0 \leq \|x-\alpha y\|^2 = (x-\alpha y,\ x-\alpha y) = (x,\ x) - \overline{\alpha}(x,\ y) - \alpha(y,\ x) + \alpha\overline{\alpha}(y,\ y)$$

$y \neq \theta$ olduğundan $\alpha = \dfrac{(x,\ y)}{(y,y)}$ alınırsa,

$$0 \leq (x,\ x) - \overline{\frac{(x,\ y)}{(y,\ y)}}(x,\ y) - \frac{(x,\ y)}{(y,\ y)}\overline{(x,\ y)} + \frac{|\ (x,\ y)\ |^2}{((y,\ y))^2}(y,\ y)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \|x\|^2 - \frac{|\ (x,\ y)\ |^2}{\|y\|^2}$$

$$\Rightarrow |\ (x,\ y)\ |^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$$

bulunur.

Önerme 2.5.3. Bir X iç çarpım uzayı üzerinde

$$x \rightarrow N(x) = (x,\ x)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan N dönüşümü X üzerinde bir normdur (Bayraktar, 1992).

Dolayısıyla her iç çarpım uzayı bir normlu uzaydır.

Önerme 2.5.4. X bir iç çarpım uzayı ve $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, (x_n) ve (x_m), X' de reel değerli iki dizi olmak üzere

$$\|\ x_n + x_m\ \|^2 = \|\ x_n\ \|^2 + 2(x_n,\ x_m) + \|\ x_m\ \|^2$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned}\|\ x_n + x_m\ \|^2 &= (x_n + x_m,\ x_n + x_m) = (x_n,\ x_n) + (x_n,\ x_m) + (x_m,\ x_n) + (x_m,\ x_m)\\ &= \|\ x_n\ \|^2 + 2(x_n,\ x_m) + \|\ x_m\ \|^2\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 2.5.5. Bir X iç çarpım uzayı üzerindeki

$\|\ .\ \| = (.\ ,\ .)^{1/2}$ normu her $x, y \in X$ için

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right)$$

eşitsizliğini sağlar. Bu eşitsizliğe iç çarpım uzaylarında *paralel kenar kuralı* denir (Bayraktar, 1992).

Bir normlu uzay paralel kenar kuralını gerçeklemezse iç çarpım uzayı olamaz.

Teorem 2.5.6. ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ uzayı $p = 2$ için

$$(x, y) = \sum x_i \overline{y_i}$$

dönüşümü ile bir iç çarpım uzayıdır (Bayraktar, 1992).

Tanım 2.5.7. Bir X iç çarpım uzayında $x,\ y \in X$ için $(x,\ y) = 0$ oluyorsa x elemanı y elemanına *dikeydir (ortogonaldir*) denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir. Bir X iç çarpım uzayının bir A alt kümesinin bütün elemanları ikişer ikişer dikey ise, bu A kümesine *dikey küme (ortogonal küme*) denir**.**

Eğer A dikey kümesindeki her elemanın normu 1;
yani her $x,\ y \in A$ için

$$(x,\ y) = \begin{Bmatrix} 0, & x \ne y \\ 1, & x = y \end{Bmatrix}$$

ise A kümesine *birim dikey küme (ortonormal küme)* denir.

Örnek 2.5.8. $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \ldots$ sıfırdan farklı birer gerçel ya da karmaşık sayı olmak üzere

$$\{(\alpha_1,\ 0, 0, \ldots, 0, \ldots),\ (0,\ \alpha_2, 0, \ldots, 0, \ldots),\ \ldots,\ (0,\ 0, 0, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots),\ \ldots\}$$

kümesi ℓ_2 uzayında dikey bir kümedir ve özel olarak $\alpha_i = 1$ ve i=1, 2, . . . seçilirse;

$$\{(1,\ 0, 0, \ldots, 0, \ldots),\ (0,\ 1, 0, \ldots, 0, \ldots),\ \ldots,\ (0,\ 0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots),\ \ldots\}$$

kümesi de ℓ_2 uzayında birim dikey bir kümedir.

2.6. Hilbert Uzayları

Tanım 2.6.1. X bir iç çarpım uzayı ve $\| \,.\, \|$, iç çarpım normu olsun.

$$d(x,\, y) = \| \, x - y \, \| = \sqrt{(x - y \;,\; x - y)}$$

olarak tanımlanırsa $(X,\, d)$ bir metrik uzay olur. İç çarpım normu ile tanımlanan bu d metriğine göre X iç çarpım uzayı tam ise X ' e *Hilbert uzayı* denir ve $\mathscr{H}$ ile gösterilir.

Hilbert uzayları, özel Banach uzaylarıdır (Bayraktar, 1992).

Örnek 2.6.2. $(.\,,\,.): \ell_2 \times \ell_2 \to \mathbb{K},\ (\mathrm{x}\,,\,\mathrm{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$ dönüşümü ℓ_2 uzayı uzerinde bir iç çarpım dönüşümüdür ve bu iç çarpıma göre ℓ_2 uzayı bir Hilbert uzayıdır (Bayraktar, 1992).

Çözüm: $x_n = \left(x_i^{(n)}\right) \in \ell_2$ olmak üzere (x_n) bir Cauchy dizisi olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \le m,\ n$ olduğunda

$$\| \, x_n - x_m \, \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \right|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı vardır. Burada $i = 1,\ 2,\ \ldots$ olmak üzere,

$$\left| x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \right| < \varepsilon \ ; \quad n_0 \le m,\ n$$

olur. Yani sabit bir i için

$$\left(x_i^{(1)},\ x_i^{(2)},\ \ldots \right)$$

dizisi $\mathbb{R}$ içinde bir Cauchy dizisi olur. $\mathbb{R}$ tam olduğundan $x_i^{(n)} \to x_i$ olacak biçimde bir $x_i \in \mathbb{R}$ vardır. $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots)$ olsun. O zaman $n_0 \le n,\ m$ için doğru olan

$$\sum_{i=1}^{k} \left| x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \right|^2 < \varepsilon^2$$

eşitsizliğinden, $m \to \infty$ için limit alınırsa

$$\sum_{i=1}^{k} \left| x_i^{(n)} - x_i \right|^2 < \varepsilon^2 ;$$

$n_0 \le n$ ve $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i^{(n)}-x_i\right|^2<\varepsilon^2$$

elde edilir. O halde bu son eşitsizlikten $x_n - x = \left(x_i^{(n)} - x_i\right) \in \ell_2$ olduğu görülür.

Ayrıca;

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i-x_i^{(n)}+x_i^{(n)}\right|^2\right)^{1/2}\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i-x_i^{(n)}\right|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i^{(n)}\right|^2\right)^{1/2}$$

ifadesinden $x=(x_i)\in\ell_2$ elde edilir. Böylece ℓ_2 uzayı bir Hilbert uzayı olur.

Ancak, $1\le p<\infty$ ve $p\neq 2$ olmak üzere, ℓ_p uzayı bir iç çarpım uzayı değildir. Bu nedenle bir Hilbert uzayı olamaz. Çünkü ℓ_p uzayında $x=(-1,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots)$ ve $y=(1,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots)$ elemanları göz önüne alınırsa bu elemanlar için paralel kenar kuralı sağlanmaz. Paralel kenar kuralını sağlamayan bir normlu uzay iç çarpım uzayı olamayacağından ℓ_p bir iç çarpım uzayı dolayısıyla bir Hilbert uzayı olamaz.

Tanım 2.6.3. X bir Banach uzayı olsun. Eğer $x,\ y\in X$ ve herhangi bir $\varepsilon>0$ için

$\| x \|\le 1,\ \ \| y \|\le 1$ ve $\| x - y \|\ge\varepsilon$ olduğunda

$\| x+y \|\le 2(1-\delta)$

olacak biçimde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulunabiliyorsa X uzayına *düzgün konveks Banach uzayı* denir.

Örnek 2.6.4. Hilbert uzayı düzgün konveks bir Banach uzayıdır. Gerçekten, herhangi bir Hilbert uzayında paralelkenar kuralı her zaman sağlandığından,

$$\|\mathrm{x}+\mathrm{y}\|^2=2(\| x \|^2+\| y \|^2)-\| x-y \|^2\le 2(1+1)-\varepsilon^2=4-\varepsilon^2$$

$$\| x+y \|^2\le 4-\varepsilon^2$$

$$\| x+y \|\le\sqrt{4(1-\frac{\varepsilon^2}{4})}=2\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}\Rightarrow\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}=1-\delta$$

$$\delta=1-\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}>0$$

bulunur.

Tanım 2.6.5. $\mathscr{H}$ bir Hilbert uzayı ve (x_n), $\mathscr{H}$ uzayında sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda her $z \in \mathscr{H} \setminus \{y\}$ için

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \parallel x_n - y \parallel < \overline{\lim_{n\to\infty}} \parallel x_n - z \parallel$$

koşulunu sağlayan $y \in \mathscr{H}$ elemanına (x_n) dizisinin *asimtotik merkezi* denir.

Örnek 2.6.6. $C = [0,1]\times[0,1]$ ve $T : C \to C$, ϑ Cantor fonksiyonu olmak üzere

$\vartheta(s) = \dfrac{2k-1}{2^n}$, $s \in \left(a_k^{(n)},\ b_k^{(n)}\right)$ $k = 1,\ 2,\ .\ .\ .\ ,\ 2^{n-1}$ olsun.

$$T(u,\ v) = \begin{cases} (u,\ v) & 0 \le v \le \dfrac{1}{2} \\ (u,\ \vartheta(v)) & \dfrac{1}{2} < v \le 1 \end{cases}$$

dönüşümü verilsin. Buna göre $(x_n) = T^n(u,\ v)$ dizisinin asimtotik merkezi $a = \left(u,\ \min\left\{\vartheta^n(v)\right\}\right)$ dir.

Çözüm: $\mathscr{H} = \mathbb{R}^2$ ve $(x_n) = T^n(u,\ v)$ dizisi ve $\forall\ \mathrm{b} = (\mathrm{b}_1,\ b_2) \in \mathscr{H} \setminus \{a\}$ için

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \parallel T^n(u,\ v) - (a_1,\ a_2) \parallel \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \parallel T^n(u,\ v) - (b_1,\ b_2) \parallel \tag{2.6.1}$$

olacak biçimde bir $a = (a_1,\ a_2) \in \mathbb{R}^2$ elemanının var olduğu gösterilirse bu dizinin asimtotik merkezi bulunur. $0 \le v \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{T}^n(u,\ v) = (u,\ v)$ olur. O zaman eğer (2.6.1) eşitsizliğinin sol tarafı “0” yapılırsa eşitsizliğin sağ tarafı $\forall\ \mathrm{b} \in \mathbb{R}^2$ için sol taraftan büyük olur. O zaman

$$\overline{\lim} \parallel (u,\ v) - (a_1,\ a_2) \parallel = 0 \Rightarrow \mathrm{a}_1 = u,\ \mathrm{a}_2 = v$$

bulunur. O halde $a = (u,\ v)$, $T^n(u,\ v)$ dizisinin asimtotik merkezidir. $\dfrac{1}{2} < v \le 1 \Rightarrow \mathrm{T}^n(u,\ v) = (u,\ \vartheta^n(v))$ dir ve $\forall\ \dfrac{1}{2} < v \le 1$ için $\vartheta^n(v) \le \dfrac{1}{2}$ dir. Tümevarımla;

$k = 2$ için $\vartheta^2(v) = \vartheta(\vartheta(v)) \le \dfrac{1}{2}$ doğrudur.

$k = n$ için doğru olsun.

$\vartheta^{n+2}(v) = \vartheta^n(v)\vartheta^2(v) \leq \frac{1}{2}$ olur. O zaman $k = n+2$ için doğru olduğu görülür.

O halde, $a_1 = u$ ve $a_2 = \min\left\{\vartheta^n(v) \leq \frac{1}{2},\ \mathrm{n} \geq 2\right\}$ seçilirse; $a = \left(u,\ \min\left\{\vartheta^n(v)\right\}\right)$,

$T^n(u,\ v)$ dizisinin asimtotik merkezi olur.

Teorem 2.6.7. $\mathscr{H}$ bir Hilbert uzayı ve (x_n), H uzayında bir dizi olsun. Bu durumda (x_n) dizisi yakınsak ise (x_n)' in yakınsadığı nokta, (x_n)' in asimtotik merkezidir.

İspat: $(x_n) \to y$ olsun. O zaman $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\forall\ \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0$ olduğunda $\| x_n - y \| < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı vardır. Diğer taraftan $\inf \| x_n - z \| = \delta$ olsun. O zaman $y \neq z$ olduğundan $\delta \neq 0$ dır. Eğer $\varepsilon < \delta$ seçilirse

$\overline{\lim} \| x_n - y \| < \overline{\lim} \| x_n - z \|$ elde edilir. O halde y, (x_n) dizisinin asimtotik merkezidir.

Tanım 2.6.8. X bir lineer uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer $x, y \in A$ için $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$ oluyorsa A kümesine *konveks küme* denir.

Örnek 2.6.9. $\mathscr{H}$ bir Hilbert uzayı olmak üzere $\mathscr{H}$ uzayının her açık ve kapalı yuvarı birer konveks kümedir (Banchman, Narici, 1966).

Çözüm: $\mathscr{H}$ Hilbert uzayının açık yuvarı; $B(f,\ r) = \left\{g \in H :\ \|f-g\| < r,\ r > 0\right\}$ formundadır. $g_1, g_2 \in B(f, r)$ için

$$\| f - (tg_1) - (1-t)g_2 \| = \| f - tg_1 - g_2 + tg_2 \| \leq \| f - g_2 \| + t \| g_2 - g_1 \| \leq r + t(r+r) < r'$$
$$\left(\| g_2 - g_1 \| = \| g_2 - g_1 + f - f \| \leq \| f - g_1 \| + \| f - g_2 \| < r + r \right)$$

olduğundan $tg_1 + (1-t)g_2 \in B(f,\ r')$ olduğu görülür. O halde $B(f, r)$ konveks bir kümedir. Benzer şekilde $\overline{B}(f,\ r) = \left\{g \in H :\ \|f-g\| \leq r\right\}$ kapalı yuvarının da konveks bir küme olduğu gösterilebilir.

Tanım 2.6.10. X bir lineer uzay ve $W \subset X$ olsun. X de W kümesini içeren bütün konveks kümelerin arakesitine W kümesinin *konveks hull* ‘u denir

Önerme 2.6.11. X bir lineer uzay ve $W \subset X$ olsun. O zaman W' nin konveks hull kümesi $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ ve $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ olmak üzere $x_i \in W$ için $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$ vektörlerini içerir. Yani W kümesinin konveks hull' u

$$\left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i : x_i \in W,\ 0 \leq \alpha_i,\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1,\ \mathrm{m} \in \mathbb{N} \right\}$$

dir (Bachman , Narici, 1966).

Tanım 2.6.12. X normlu lineer uzay ve W, X uzayının herhangi bir alt kümesi olsun. W kümesinin konveks hull ‘ unun kapanışına, W kümesinin *kapalı konveks hull*' u denir ve *clco* W ile gösterilir.

Önerme 2.6.13.

$E = \bigcap_i \{ K_i : K_i \supset S,\ K_i \text{ kapalı ve konveks} \}$ olsun. S_c, S'nin konveks hull' unu göstersin. O zaman $E = \overline{S_c}$ dir. Yani E, S kümesinin kapalı konveks hull' udur (Bachman , Narici, 1966).

2.7. Lineer ve Lineer Olmayan Dönüşümler

Tanım 2.7.1. X ve Y aynı bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T : X \to Y$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ için

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

ya da, buna denk olarak her $x, y \in X$ ve $\alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

şartını sağlıyorsa T dönüşümüne *lineer dönüşüm* denir.

Eğer T dönüşümü yukarıdaki şartlardan herhangi birini gerçeklemezse T dönüşümüne *lineer olmayan dönüşüm* denir.

Kompleks ya da reel değerli bir $T : X \to \mathbb{C}$ ya da $T : X \to \mathbb{R}$ dönüşümüne lineer fonksiyonel adı verilir.

Tanım 2.7.2. $(X,\ \|\ .\ \|)$ ve $(Y,\ \|\ .\ \|)$ iki normlu uzay ve $T : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için

$$\| Tx \| \leq M \| x \|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti varsa, T dönüşümüne *sınırlı dönüşüm* denir.

Tanım 2.7.3. T, $\mathbb{R}$ uzayından $\mathbb{R}$ içine tanımlı bir dönüşüm olmak üzere $F = \{x \in \mathbb{R};\ \mathrm{T}(x) = x\}$ şeklinde bir küme tanımlansın. F kümesinin her bir x elemanına T dönüşümünün *sabit noktası*, F kümesine de T dönüşümünün *sabit noktalarının kümesi* denir.

Örnek 2.7.4.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$ dönüşümünün sabit noktalarından biri;

$g(\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ dir.

Tanım 2.7.5. X Banach uzayı ve C, X' in kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Eğer $T : C \to C$ lineer olmayan dönüşümü, $\forall\ x,\ y \in C$ için $\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$ eşitsizliğini gerçekliyorsa T dönüşümüne C üzerinde *nonexpansive dönüşüm* denir.

Örnek 2.7.6. X Banach uzayı ve C, X' in kapalı ve konveks bir altkümesi olsun. $T : C \to C$ dönüşümü, $T(x) = \dfrac{x}{2} + a$, $(a \ne 0)$ şeklinde tanımlansın. O zaman T nonexpansive bir dönüşümdür. Gerçekten $\forall\ x, y \in C$ ve $y \ne 0$ için

$$\| T(x) - T(y) \| = \left\| \frac{x}{2} + a - \frac{y}{2} - a \right\| = \left\| \frac{x-y}{2} \right\| \le \| x - y \|$$

dir.

Tanım 2.7.7. $X = (X,\ \| . \|)$ bir Banach uzayı ve C, X uzayının herhangi bir alt kümesi olsun. $T,\ I : C \to C$ lineer olmayan dönüşümleri verilsin. Her $x,\ y \in C$ için

$$\| Tx - Ty \| \le \| Ix - Iy \|$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa T dönüşümüne I *-nonexpansive dönüşüm* denir.

Tanım 2.7.8. $X = (X,\ \| . \|)$ bir Banach uzayı ve C, X uzayının herhangi bir alt kümesi olsun. $T,\ I : C \to C$ lineer olmayan dönüşümleri verilsin. Her $x,\ y \in C$ için $ITx = TIx$ oluyorsa T ve I dönüşümleri C kümesi üzerinde *değişmelidir* denir.

Tanım 2.7.9. X bir Banach uzayı ve C, X' in kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Eğer her bir $x,\ y \in C$ ve $k \ge 0$ için

$$\| T^k x - T^k y \| \le a_k \| x - y \|$$

olacak biçimde bir $\left(a_k\right)_{k\geq n}$, $\left(\ \lim_{k\to\infty} a_k = 1\ \right)$ dizisi bulunabiliyorsa T dönüşümüne *asimtotik nonexpansive dönüşüm* denir.

Tanım 2.7.10. X Banach uzayı ve C, X' in kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Eğer $T : C \to C$ dönüşümü için her $x,\ y \in C$ olduğunda

$$\| Tx - Ty \| \leq L \| x - y \|$$

olacak biçimde bir L tamsayısı bulunabiliyorsa bu T dönüşümüne *Lipschitz dönüşümü* ve L sabitine de *Lipschitz sabiti* denir.

Örnek 2.7.11. $\mathscr{H} = \mathbb{R}^2$ reel Hilbert uzayı olsun. Bu uzayın kapalı ve konveks bir alt kümesi, $\mathscr{H}$ uzayı içindeki K kapalı birim yuvarı ve

$K_1 = \left\{x :\ \| x \| \leq \dfrac{1}{2}\right\}$, $K_2 = \left\{x :\ \dfrac{1}{2} < \| x \| \leq 1\right\}$, $K_1 \bigcup K_2 = K$ olmak üzere $T : K \to K$

$$T\left(x\right) = \left\{\begin{array}{cc} x + x^{\perp} & x \in K_1 \\ \dfrac{x}{\| x \|} - x + x^{\perp} & x \in K_2 \end{array}\right\}$$

dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm bir Lipschitz dönüşümüdür**.**

Çözüm: $x = \left(a,\ b\right) \in \mathscr{H}$ ve $x^{\perp} = \left(b,\ -a\right) \in \mathscr{H}$ olsun.

O zaman

$$\left(x,\ x^{\perp}\right) = \left(\left(a,\ b\right), \left(b,\ -a\right)\right) = ab - ab = 0 \text{ ve}$$

$$\left\|x^{\perp}\right\| = \sqrt{b^2 + \left(-a\right)^2} = \sqrt{b^2 + a^2} = \left\|x\right\| \text{ ve}$$

$$\left(x^{\perp},\ y^{\perp}\right) = \left(x,\ y\right) \text{ ve } \forall\ x,\ y \in X \text{ için}$$

$$\left\|x^{\perp} - y^{\perp}\right\| = \left\|x - y\right\|,\ \ \left(x^{\perp}, y\right) + \left(x, y^{\perp}\right) = 0 \text{ dır.}$$

$x,\ y \in K_1$ için $x = \left(a,\ b\right)$, y=$\left(c,\ d\right) \in$ H alınırsa

$$\begin{aligned}\left\|Tx - Ty\right\| &= \left\| T\left(a,\ b\right) - T\left(c,\ d\right) \right\| = \left\| \left(a,\ b\right) + \left(b,\ -a\right) - \left(c,\ d\right) - \left(d,\ -c\right) \right\| \\ &= \left\| \left(a + b - c - d,\ b - a - d + c\right) \right\| = \sqrt{\left(a + b - c - d\right)^2 + \left(b - a - d + c\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(a - c\right)^2 + 2\left(a - c\right)\left(b - d\right) + \left(b - d\right)^2 + \left(-a + c\right)^2 + 2\left(-a + c\right)\left(b - d\right)} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{\left(a - c\right)^2 + \left(b - d\right)^2} = \sqrt{2} \| x - y \| < 2 \| x - y \|\end{aligned}$$

elde edilir. O halde T, K_1 üzerinde bir Lipschitz dönüşümüdür. $x,\ y \in K_2$ için

$$
\begin{aligned}
\| Tx - Ty \| &= \left\| \frac{x}{\| x \|} - x + x^{\perp} - \frac{y}{\| y \|} - y + y^{\perp} \right\| \\
&\leq \left\| \frac{x}{\| x \|} - \frac{y}{\| y \|} \right\| + \| x - y \| + \| x^{\perp} - y^{\perp} \| \\
&= \left\| \frac{x}{\| x \|} - \frac{y}{\| y \|} \right\| + 2 \| x - y \| \\
&= \sqrt{2}\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = \sqrt{2} \| x - y \|
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{x}{\| x \|} - \frac{y}{\| y \|} \right\|^2 &= \left(\frac{x}{\| x \|} - \frac{y}{\| y \|},\ \frac{x}{\| x \|} - \frac{y}{\| y \|} \right) \\
&= \left(\frac{x}{\| x \|},\ \frac{x}{\| x \|} \right) - 2\left(\frac{x}{\| x \|}, \frac{y}{\| y \|} \right) + \left(\frac{y}{\|y\|}, \frac{y}{\|y\|} \right) \\
&= \left\| \frac{x}{\| x \|} \right\|^2 + \left\| \frac{y}{\| y \|} \right\|^2 - 2\left(\frac{x}{\| x \|},\ \frac{y}{\| y \|} \right) \\
&= \frac{2}{\| x \| \| y \|}\left(\| x \| \| y \| - (x,\ y) \right) = \frac{1}{\| x \| \| y \|}\left(2\| x \| \| y \| - 2(x,\ y) \right) \\
&= \frac{1}{\| x \| \| y \|}\left[\left(\| x \| + \| y \| \right)^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2 - 2(x,\ y) \right] \\
&= \frac{1}{\| x \| \| y \|}\left[-\left(\| x \| - \| y \| \right)^2 + \| x \|^2 + \| y \|^2 - 2(x,\ y) \right] \\
&= \frac{1}{\| x \| \| y \|}\left[\| x - y \|^2 - \left(\| x \| - \| y \| \right)^2 \right] \\
&\leq \frac{1}{\| x \| \| y \|}\left[\| x - y \|^2 + \left(\| x \| - \| y \| \right)^2 \right] \\
&\leq \frac{1}{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} 2 \| x - y \|^2 = 8 \| x - y \|^2
\end{aligned}
$$

olur. Sonuç olarak;

$$
\begin{aligned}
\| Tx - Ty \| &\leq \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| + 2 \| x - y \| \\
&\leq \sqrt{8 \| x - y \|^2} + 2 \| x - y \|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sqrt{2}\| x-y \| + 2\| x-y \| \\
&\leq 3\| x-y \| + 2\| x-y \| \\
&= 5\| x-y \|
\end{aligned}
$$

bulunur. O halde T, K_2 üzerinde bir Lipschitz dönüşümüdür. $x \in \overset{o}{K}_1$ ve $y \in \overset{o}{K}_2$ olsun. O zaman K konveks olduğundan $\lambda \in [\ 0,\ 1\ ]$ için $z = \lambda x + (1-\lambda) y$ olacak biçimde bir $z \in K_1 \cap K_2$ vardır. O zaman

$$
\begin{aligned}
\| Tx - Ty \| &\leq \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| + 2\| x-y \| \\
&< \sqrt{8\| x\text{-} y \|^2} + 2\| x-y \| \\
&= 2\sqrt{2}\| x-y \| + 2\| x-y \| \\
&< 3\| x-y \| + 2\| x-y \| \\
&= 5\| x-y \|
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla her $x,\ y \in K$ için T dönüşümü bir Lipschitz dönüşümüdür.

Örnek 2.7.12. K, ℓ_∞ uzayı içinde birim yuvar ve (k_n), $k_1 > 1$ ve $k_n \downarrow 1$ olmak üzere gerçel sayıların herhangi bir dizisini göstersin. $T : K \to K$, $\| T_n \| = k_n$ ve $f : [-1,\ 1] \to [-1,\ 1]$ Lipschitz sabiti k_1 ve $f(0) = 0$ koşulunu sağlayan herhangi bir dönüşüm olsun ve

$$
T(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots) = \left(0,\ f(x_1),\ \frac{k_2}{k_1} x_2,\ \frac{k_3}{k_2} x_3,\ \ldots \right)
$$

şeklinde tanımlansın. O zaman

$$
\begin{aligned}
T\big(T(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots)\big) &= T\left(0,\ f(x_1),\ \frac{k_2}{k_1} x_2,\ \frac{k_3}{k_2} x_3,\ \ldots \right) \\
&= \left(0,\ f(0),\ \frac{k_2}{k_1} f(x_1),\ \frac{k_3}{k_2} x_2,\ \ldots \right) \\
&= \left(0,\ 0,\ \frac{k_2}{k_1} f(x_1),\ \frac{k_3}{k_2} x_2,\ \ldots \right)
\end{aligned}
$$

$$T\left(T^2\left(x_1, x_2, x_3, \ldots\right)\right)=\left(0, f(0), \frac{k_2}{k_1}0, \frac{k_3}{k_2}\frac{k_2}{k_1}f(x_1), \ldots\right)$$

.

.

.

Sonuç olarak,

$$T^n\left(x_1, x_2, x_3, \ldots\right)=\left(0, 0, 0, \ldots, 0, \frac{k_n}{k_1}f(x_1), \frac{k_{n+1}}{k_1}x_2 \ \frac{k_{n+2}}{k_2}x_3, \ldots\right)$$

olur. Ayrıca $\| T_n \| = \sup_{i\geq 0}\left\{k_n, \frac{k_{n+1}}{k_i}\right\}=k_n$ olmak üzere;

$$\| T^n x - T^n y \| = \| T^n(x_1, x_2, x_3, \ldots) - T^n(y_1, y_2, y_3, \ldots) \|$$

$$=\left\| \left(0,0,0, \ldots, \frac{k_n}{k_1}f(x_1), \frac{k_{n+1}}{k_1}x_2, \frac{k_{n+2}}{k_2}x_3, \ldots\right)-\left(0,0,0, \ldots, \frac{k_n}{k_1}f(y_1), \frac{k_{n+1}}{k_1}y_2, \frac{k_{n+2}}{k_2}y_3, \ldots\right)\right\|$$

$$=\left\| 0, 0, 0, \ldots, \frac{k_n}{k_1}\left(f(x_1)-f(x_2)\right), \frac{k_{n+1}}{k_1}(x_2-y_2), \frac{k_{n+2}}{k_2}(x_3-y_3), \ldots \right\|$$

$$\leq\left\| \frac{k_n}{k_1}k_1(x_1-y_1), \frac{k_{n+1}}{k_1}(x_2-y_2), \frac{k_{n+2}}{k_2}(x_3-y_3), \ldots \right\|$$

$$\leq k_n \|x-y\|$$

elde edilir. O halde T asimtotik nonexpansive dönüşümdür.

2.8. Zayıf ve Kuvvetli Yakınsaklık

Tanım 2.8.1. $(X, \|\cdot\|)$) bir normlu uzay ve (x_n), X 'de herhangi bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty}\| x_n - x \| = 0$ olacak biçimde bir $x \in X$ elemanı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x noktasına *kuvvetli yakınsaktır* denir.

Kuvvetli yakınsaklığın diğer bir ifadesi de norma göre yakınsaklıktır.

Tanım 2.8.2. X normlu lineer uzayı üzerinde tanımlı bütün lineer ve sınırlı fonksiyonelleri içeren normlu lineer uzayına X uzayının *eşlek uzayı* denir ve $\widetilde{X}$ ile gösterilir.

Tanım 2.8.3. X normlu lineer uzay, (x_n), X uzayında bir dizi ve $x \in X$ olsun**.** Eğer $\forall f \in \widetilde{X}$ için $f(x_n) \to f(x)$ oluyorsa (x_n) dizisi x noktasına "*zayıf yakınsaktır*" denir.

Her kuvvetli yakınsak dizi zayıf yakınsaktır. Ancak zayıf yakınsaklık kuvvetli yakınsaklığı gerektirmez. Aşağıdaki örnek bu durumu açıklar.

Örnek 2.8.4. $X = L^2[0,\ 2\pi] = \left\{ f : \int_0^{2\pi} f^2(x)\, d\mu < \infty \right\}$ olsun. $(x_n) = \dfrac{\sin nt}{\pi}$ dizisi 0 noktasına zayıf yakınsak ancak kuvvetli yakınsak değildir.

Çözüm: (x_n) dizisinin zayıf yakınsak olduğunu göstermek için $\forall f \in \widetilde{X}$ için $f(x_n) \to f(x)$ olduğu gösterilmelidir. $X = L^2\left[0,\ 2\pi\right]$ olsun. O zaman $\widetilde{X} = L^2\left[0,\ 2\pi\right]$ olur. Bu durumda Riesz Temsil Teoremi gereği yani;

"X bir iç çarpım uzayı ve f , X' de lineer bir fonksiyonel ise $\forall\ \mathrm{x} \in X$ için $f(x) = (x, y)$ olacak biçimde tek bir sabit $y \in X$ vardır."

O halde $f \in L^2\left[0,\ 2\pi\right],\ \forall\ x \in L^2\left[0,\ 2\pi\right]$ için

$$f(x) = (x, g) = \int_0^{2\pi} x(t) g(t) dt$$

olacak biçimde bir $g \in L^2\left[0, 2\pi\right]$ vardır. O zaman

$$f(x_n) = (x_n,\ g) = \int_0^{2\pi} x_n(t)\, g(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sin nt}{\pi} g(t) dt$$

olur Riemann Lebesgue Lemmasına göre yani;

$L^2\left[0, 2\pi\right]$ reel değerli Hilbert uzayı ve

$$(x_n) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\dfrac{n}{2} t\right) & n \text{ çift ise} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\dfrac{n+1}{2} t\right) & \text{n tek ise} \end{array} \right\}$$

dizisi verilsin. O zaman $f \in L^2(0,\ 2\pi)$, $\alpha_n = (f,\ x_n)$ için

$$\alpha_0 = (f,\ x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

$$\alpha_1 = (f,\ x_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt$$

.

.

.

olur. Fourier katsayıları

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\left(\frac{n}{2}t\right)dt, \quad \text{n çift ise}$$

$$\mathrm{b_n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,c\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)dt, \quad \text{n tek ise}$$

dır. Bu katsayılar $\alpha_n = (f,\, x_n)$ dizisi ile karşılaştırılırsa;

$$\alpha_0 = a_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$
$$\alpha_1 = b_1\sqrt{\pi}$$
$$\alpha_2 = a_2\sqrt{\pi}$$
$$\vdots$$

elde edilir. Ayrıca, X bir iç çarpım uzayı ve A, X ' in ortonormal bir kümesi ise herhangi bir $y \in X$ ve A ' nın her bir $x_1,\ \mathrm{x}_2,\ \ldots,\ x_n$ elemanı için

$$\sum_{i=1}^{n}\left|(y, x_i)\right|^2 \le \| y \|^2 \quad \text{(Bessel eşitsizliği)}$$

dir. Buna göre, $\alpha_n = (f, x_n)$ ve (x_n) dizisi ortonormal olduğundan

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|(f,\, x_i)\right|^2 \le \| f \|^2 \quad \text{yani;}$$

$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2 \le \| f \|^2$ elde edilir. O halde, eğer $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x$ ise bu x_i ' lerin sayılabilir sayıdaki terimi sıfırdır. Yukarıdaki eşitsizlikte,

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_n|^2 = a_0{}^2\frac{\pi}{2} + \pi\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 + b_n{}^2\right) \le \int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

olur. O halde,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)dt = 0$$
$$\Rightarrow f(x_n) \to 0$$

bulunur. Bu durumda, $f(0)=0$ dır. Ancak, $(x_n)=\dfrac{\sin nt}{\pi}$ dizisi 0’ a kuvvetli yakınsak değildir. Çünkü

$$\| x_n - 0 \|^2 = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \sin^2 ntdt = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos^2 nt}{2}dt$$
$$= \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{2}2\pi - \frac{1}{4n}\sin 2nt\right)_{(0,2\pi)} = \frac{1}{\pi^2}\left(\pi - \frac{1}{4n}0\right) = \frac{1}{\pi} \neq 0$$

olur.

Tanım 2.8.5. $\mathscr{H}$, $(\,.\,,\,.\,)$ iç çarpımı ve $\|\,.\,\|$ normu ile gerçel bir Hilbert uzayı ve (x_n), $\mathscr{H}$ uzayında bir dizi olsun. Herhangi bir $y \in \mathscr{H}$ için

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - x,\, y) = 0$$

olacak biçimde bir $x \in \mathscr{H}$ bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x noktasına *zayıf yakınsaktır* denir.

Örnek 2.8.6. $(x_n)=(e_n)$, $\mathscr{H} = \ell_2$ olsun. O zaman $(e_n)\to 0$ (zayıf yakınsak) dır. Çünkü bir $y_n \in \ell_2$ için

$$(x_n, y_n) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(n)} y_k$$

şeklinde tanımlanır. $x_n = (0,\ 0,\ ...,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots)$, $y_n = (y_1,\ y_2,\ \ldots)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^{\,n} y_k = (0y_1,\ 0y_2,\ ...,0y_{n-1},\ 1y_n,\ 0,\ 0,\ \ldots)$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ y_n,\ 0,\ldots)$$

ve $y \in \ell_2$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty \Leftrightarrow |y_n|^2 \to 0 \Leftrightarrow |y_n| \to 0$$
$$\Rightarrow (x_n,\ y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(n)} y_k = |y_n| \to 0$$
$$\Rightarrow (x_n,\ y) \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\ (x_n - 0,\ y) = 0$$

bulunur. O halde (x_n) dizisi 0’ a zayıf yakınsaktır.

Ancak, (e_n) dizisi ℓ_2 de 0’ a kuvvetli yakınsak değildir. Çünkü

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - 0 \|_2 = \lim_{n\to\infty} \| x_n \|_2 = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{0+0+\ \ldots\ +1+0+\ \ldots} = 1 \neq 0$$

olur.

Teorem 2.8.7. X normlu lineer uzay ve (x_n), x' e zayıf yakınsak olsun. O zaman $\| x_n \| < M$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı vardır (Banchman, Narici, 1966).

Tanım 2.8.8. $\mathscr{H}$ bir Hilbert uzayı ve (x_n), $\mathscr{H}$ uzayında herhangi bir dizi olsun. Eğer $k = 1,\ 2,\ \ldots$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+k} = x$$

olacak biçimde bir $x \in \mathscr{H}$ bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x noktasına *hemen hemen yakınsaktır* denir.

Her kuvvetli yakınsak dizi hemen hemen yakınsaktır. Ancak bunun tersi doğru değildir. Aşağıdaki örnek bu durumu açıklar.

Örnek 2.8.9. $(x_n) = (-1)^n$ dizisi hemen hemen yakınsaktır. Ancak bu dizi kuvvetli yakınsak değildir.

Çözüm: $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ olmak üzere,

$k = 0$ için $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(1-1+1-1+\ldots) = 0$

$k = 1$ için $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(1-1+1-1+\ldots) = 0$

.

.

.

dir. Buradan $(\text{-}1)^n \to 0$ (hemen hemen yakınsak) olduğu görülür. Ancak, bu dizi kuvvetli yakınsak değildir.

2.9. Ölçüm Uzayları

Tanım 2.9.1. X kümesinin alt kümelerinin herhangi bir ailesine X ' in alt kümelerinin bir *sınıfı* denir.

Tanım 2.9.2. X kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir $\boldsymbol{A}$ sınıfı

H1. Her $A,\ B \in \boldsymbol{A}$ için $A \setminus B \in \boldsymbol{A}$

H2. Her $A,\ B \in \boldsymbol{A}$ için $A \bigcup B \in \boldsymbol{A}$

özelliklerini sağlıyorsa bu $\boldsymbol{A}$ sınıfına bir *halka* denir.

Tanım 2.9.3. X herhangi bir küme olsun. X ' in bir $\boldsymbol{A}$ sınıfı,

C1. $X \in \boldsymbol{A}$

C2. Her $E \in \boldsymbol{A}$ için $E^t \in \boldsymbol{A}$

C3. $k = 1,2,...,n$ için $E_k \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \boldsymbol{A}$

şartlarını sağlıyorsa $\boldsymbol{A}$ sınıfına X üzerinde bir *cebir* denir.

Yukarıdaki tanımda C3 şartının yerine

(C3)' Her $k \in \mathbb{N}$ için $k = 1,\ 2,\ ...$ için $E_k \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \boldsymbol{A}$

şartı sağlanırsa $\boldsymbol{A}$ cebirine X üzerinde bir $\sigma-$*cebir* denir.

Örnek 2.9.4.

$X = \mathbb{N}$ olmak üzere,

$\boldsymbol{A} = \left\{ \varnothing,\ \{1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2n-1,\ \ldots\},\ \{2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots\},\ \mathbb{N} \right\}$ olsun.

O zaman $\boldsymbol{A}$, X üzerinde bir $\sigma-$cebirdir.

Tanım 2.9.5. X bir küme ve $\boldsymbol{A}$, X üzerinde bir $\sigma-$cebir olsun. ($X, \boldsymbol{A}$) ikilisine bir *ölçülebilir uzay* denir.

Tanım 2.9.6. ($X, \boldsymbol{A}$) bir ölçülebilir uzay olsun. Ω üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu,

Ö1. $\mu(\varnothing) = 0$

Ö2. Her $A \in \boldsymbol{A}$ için $\mu(\mathrm{A}) \geq 0$

Ö3. Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona *ölçüm* denir ve ($X, \boldsymbol{A}$, μ) üçlüsüne de bir *ölçüm uzayı* denir.

Örnek 2.9.7. $X \neq \emptyset$ ve $\boldsymbol{A} = P(X)$ olsun. $E \in \boldsymbol{A}$ için

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \mathrm{E} = \emptyset \\ +\infty, & \mathrm{E} \neq \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan μ fonksiyonu bir ölçümdür.

Örnek 2.9.8. $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ ...\}$ doğal sayılar kümesinin kuvvet kümesi üzerinde $n(E)$, E ' nin eleman sayısını göstermek üzere

$$\mu(E) = \begin{cases} n(E), & \text{E sonlu ise} \\ +\infty, & \text{E sonlu değilse} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan μ fonksiyonu bir ölçümdür.

Tanım 2.9.9. ($X, \boldsymbol{A}$) bir ölçülebilir uzay olsun. $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}\left((\alpha, +\infty)\right) = \{x \in X :\ f(\mathrm{x}) > \alpha\} \in \boldsymbol{A}$$

olmasıdır.

Örnek 2.9.10. Her sabit fonksiyon bir ölçülebilir fonksiyondur.

Tanım 2.9.11. X üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli $\boldsymbol{A}$- ölçülebilir bütün fonksiyonların kümesi M ($X, \boldsymbol{A}$) ile gösterilir.

Tanım 2.9.12. $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,\ +\infty]$ ile genişletilmiş reel sayılar kümesi gösterilsin. f, X den $\overline{\mathbb{R}}$ kümesine bir fonksiyon olsun.

$$f^{+} = \text{maks } \{f(x),\ 0\}$$
$$f^{-} = \text{maks } \{-f(x),\ 0\}$$

şeklinde tanımlanan f^{+} ve f^{-} fonksiyonları X üzerinde tanımlı ve negatif olmayan fonksiyonlardır. f^{+} fonksiyonuna f ' nin *pozitif kısmı*, f^{-} fonksiyonuna da f ' nin *negatif kısmı* denir.

$$f = f^{+} - f^{-},\ |f| = f^{+} + f^{-}$$
$$f^{+} = \frac{1}{2}\left(|f| + f\right), f^{-} = \frac{1}{2}\left(|f| - f\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.9.13. $f :\ X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart, f^{+} ve f^{-} fonksiyonlarının ölçülebilir olmasıdır (Cohn, 1980; Royden, 1978).

Tanım 2.9.14. $(X, \boldsymbol{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve $f \in M(X, \boldsymbol{A})$ olsun. Eğer $\int_X f^+ \, d\mu$ ve $\int_X f^- \, d\mu$ integrallerinin her ikiside sonlu ise f fonksiyonu X üzerinde μ ölçümüne göre *integrallenebilirdir* denir ve bu integral

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$$

dir. X üzerinde μ ölçümüne göre integrallenebilen fonksiyonların sınıfı $L = L(X, \boldsymbol{A}, \mu)$ ile gösterilir.

Teorem 2.9.15. $(X, \boldsymbol{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı f, g X üzerinde integrallenebilen reel değerli fonksiyonlar ve α herhangi bir reel sayı olsun. O zaman

a) $\alpha f \in L$

b) $f + g \in L$

dir (Cohn, 1980).

Teorem 2.9.16. (Fatou Lemması) $(X, \boldsymbol{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve (f_n) pozitif ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise

$$\int_X \lim_{n \to \infty} \inf \mathrm{f_n} d\mu \leq \lim_{n \to \infty} \inf \int_X \mathrm{f_n} d\mu$$

dır (Cohn, 1980; Royden, 1978).

Tanım 2.9.17. $(X, \boldsymbol{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L^p = \{ f \in M(X, \boldsymbol{A}) : \ |f|^p \in L(X, \boldsymbol{A}, \mu) \}$$

kümesine *p-ninci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı* denir. $p \geq 1$ için

$$\| f \|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

dir.

Teorem 2.9.18. (Riesz-Fischer Teoremi) $(X, \boldsymbol{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı olsun. $L^p(X, \boldsymbol{A}, \mu)$ uzayı

$$\| f \|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

normu ile tamdır (Cohn, 1980; Royden, 1978).

Tanım 2.9.19. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve $\mu(X) < \infty$ olsun. O zaman $\int_X f^2(x) d\mu < \infty$ özelliğindeki gerçel değerli fonksiyonların kümesi $L^2(X, \mu)$ ya da kısaca $L^2(X)$ ile gösterilir.

Teorem 2.9.20. $f, g \in L^2(X)$ ise αf, f+g ve fg öğeleride (α keyfi bir sabit) $L^2(X)$ uzayının içindedir. Bu nedenle $L^2(X)$ uzayı lineer uzaydır (Kolmogorov, Fomin 1970).

Teorem 2.9.21. $L^2(X)$ uzayı üzerinde tanımlanan $(f, g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu$ fonksiyonu bir iç çarpımdır ve $L^2(X)$ uzayı $\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_X f^2(x) d\mu}$ normu ile tamdır (Kolmogorov, Fomin 1970).

İspat: (f_n), $L^2(X)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O zaman tanım gereği $m, n \to \infty$ iken $\|f_m - f_n\| \to \infty$ olur. Üçgen eşitsizliği gereği $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$ olduğundan

$$\sqrt{\int [f(x)+g(x)]^2 d\mu} \le \sqrt{\int f^2(x) d\mu} + \sqrt{\int g^2(x) d\mu}$$

olur. Bu eşitsizlikte f yerine $|f_m(x) - f_n(x)|$ ve $g(x) = 1$ alınırsa

$$\int |f_m(x) - f_n(x)| d\mu \le \sqrt{\mu(X)} \sqrt{\int [f_m(x) - f_n(x)]^2 d\mu} < \varepsilon \sqrt{\mu(X)} = \varepsilon$$

elde edilir. O halde (f_n) dizisi $L^1(X)$ uzayında da bir Cauchy dizisidir. O halde (f_n) dizisinin hemen hemen heryerde bazı f fonksiyonlarına yakınsayan bir (f_{n_k}) alt dizisi vardır. Açıktır ki verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\int |f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)|^2 d\mu < \varepsilon$$

dır. Bu son eşitsizlikte limit alınırsa Fatou Lemması gereği $\int |f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)|^2 d\mu < \varepsilon$ olur. O halde $f_{n_k} \to f$ dir. Ayrıca bir Cauchy dizisinin alt dizisi bir f limitine sahipse bu dizinin kendisi de aynı limite yakınsayacağından $f_n \to f$ olur. Son olarak

$$\int |f(x) - f_n(x) + f_n(x)|^2 \le 2\left[\int |f_n(x) - f(x)|^2 + \int |f_n(x)|^2\right] < \infty$$

olduğundan $f \in L^2(X)$ dir. $L^2(X)$ uzayı tam bir iç çarpım uzayı olduğundan bir Hilbert uzayıdır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu tezde öncelikle lineer olmayan dönüşümler için ortalama ergodik teoremler konusu ile ilgili çalışmaların literatür taraması yapılmıştır. Elde edilen kaynaklar incelenerek, konunun temel tanım ve teoremlerinin açık olarak görülmesi için uygulanan metodlar araştırılmıştır. Daha önce yapılmış makalelerde, $\mathscr{H}$ Hilbert uzayının alt kümesinin bazı özelliklerine göre metodların geliştirildiği ve $\mathscr{H}$ Hilbert uzayının bu alt kümesi üzerinde tanımlanan lineer olmayan T dönüşümüne göre uygun şartlar konularak T lineer olmayan dönüşümü için ortalamanın yakınsaklığının araştırıldığı görülmüştür. Bu incelenen kaynaklar değerlendirilerek, ilave sonuçlar elde edilmiştir. Özellikle bu incelenen çalışmalardan yararlanılarak lineer olmayan ergodik teoremlerin bazı uzaylar üzerinde geçerliliği araştırılmıştır. Ayrıca son yıllarda yapılan çalışmalar gözönüne alınarak bazı şartlar elde edilmiş ve bu şartların $\mathscr{H}$ Hilbert uzayının herhangi bir alt kümesi üzerinde tanımlı lineer olmayan I - nonexpansive dönüşümlere göre ortalamanın yakınsaklığı araştırılmış ve bu elde edilen şartlar altında lineer olmayan zayıf ergodik teoremin ispatı yapılarak, bu şart üzerinde geçerliliği görülmüştür.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Lineer Olmayan Dönüşümler için Kuvvetli Ergodik Teoremler

Bu bölümde, (Wittmann, 1990) ve (Miyadera, 1997) çalışmalarından hareketle, lineer olmayan dönüşümler için kuvvetli ergodik teoremin ifadesi verilecek ve teoremin ispatı, yardımcı önermeler ile desteklenerek açık bir şekilde yapılacaktır.

Bu bölümde; $\mathscr{H}$, $(.\,,\,.)$ iç çarpımı ve $\|\,.\,\|$ normu ile reel bir Hilbert uzayını, C bu Hilbert uzayının herhangi bir alt kümesini , $T: C \to C$ lineer olmayan bir dönüşümü ve $F(T)$, T dönüşümünün sabit noktalarının kümesini göstermektedir.

Teorem 4.1.1. B, C ' nin sınırlı bir alt kümesi olsun. a_k ve c negatif olmayan sabitler olmak üzere, $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$, $p \geq 1$, $k \geq 0$ tamsayısı ve $u,\ v \in B$ için

$$\left\|T^k u + T^k v\right\|^p \leq a_k \left\|u+v\right\|^p + c\left[a_k \ \left\|u\right\|^p - \left\|T^k u\right\|^p + a_k \ \left\|v\right\|^p - \left\|T^k v\right\|^p\right] + \delta_k(B) \qquad (4.1.1)$$

olacak biçimde $\lim_{k\to\infty} \delta_k(B) = 0$ olmak üzere bir $\delta_k(B) \geq 0$, bulunabiliyorsa $\forall\ x \in C$ için $\{\ T^n x\ \}$ dizisi kendi asimtotik merkezi olan y gibi bir noktaya hemen hemen kuvvetli yakınsaktır. Bir başka ifade ile $\{\ T^n x\ \}$ dizisinin asimtotik merkezi y olmak üzere;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^{i+k}x = y \ \text{ (kuvvetli yakınsaktır)}$$

dir (Miyadera, 1997).

Önerme 4.1.2. $\{x_n\}$, $\mathscr{H}$ uzayında bir dizi ve $\{\ \|\ x_n\ \|\ \}$ yakınsak olsun. O zaman n, m, i≥ 0 için (i), (ii) ve (iii) birbirine denktir.

(i) $\overline{\lim}_{m\to\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty} \sup_{i\geq 0}\left[(x_{n+i},\ x_n) - (x_{m+i},\ x_m)\right] \leq 0,$

(ii) $\overline{\lim}_{m\to\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty} \sup_{i\geq 0}\left[\left\|x_{n+i}+x_n\right\|^2 - \left\|x_{m+i}+x_m\right\|^2\right] \leq 0,$

(iii) $\overline{\lim}_{m\to\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty} \sup_{i\geq 0}\left[\left\|x_{m+i}-x_m\right\|^2 - \left\|x_{n+i}-x_n\right\|^2\right] \leq 0$

Ayrıca, $\{x_n\}$ dizisi yukarıdaki denk koşullardan birini sağlıyorsa kendi asimtotik merkezine hemen hemen kuvvetli yakınsaktır (Baillon, 1976).

Teorem 4.1.1' in ispatı: $x \in C$ olsun. $B = \{ x \}$ ve $u,\ v \in B$ için (4.1.1) eşitsizliği yazılırsa; $B = \{ x \}$ olduğunda $u = v = x$ olacaktır ve $k \geq 0$ için

$$\left\|T^k x + T^k x\right\|^p \leq a_k \left\|x + x\right\|^p + c\left[a_k \ \left\|x\right\|^p - \left\|T^k x\right\|^p + a_k \ \left\|x\right\|^p - \left\|T^k x\right\|^p\right] + \delta_k\left(\{x\}\right)$$

$$2^p \left\|T^k x\right\|^p \leq a_k 2^p \left\|x\right\|^p + c\left[a_k \ \left\|x\right\|^p - \left\|T^k x\right\|^p + a_k \ \left\|x\right\|^p - \left\|T^k x\right\|^p\right] + \delta_k\left(\{x\}\right)$$

$$\left\|T^k x\right\|^p \left(2^p + 2c\right) \leq \left\|x\right\|^p \left(a_k 2^p + 2a_k c\right) + \delta_k\left(\{x\}\right)$$

$$\left\|T^k x\right\|^p \leq \frac{a_k \left\|x\right\|^p \left(2^p + 2c\right) + \delta_k\left(\{x\}\right)}{2^p + 2c}$$

$$\left\|T^k x\right\|^p \leq a_k \left\|x\right\|^p + \frac{\delta_k\left(\{x\}\right)}{2^p + 2c}$$

bulunur. O halde $\left\{T^n x:\ n \geq 0\right\}$ dizisi sınırlıdır. (4.1.1) eşitsizliğinde $u,\ v \in B$ için $u = v = T^n x \in B$ alınırsa $k,\ n \geq 0$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\left\|T^{n+k} x + T^{n+k} x\right\|^p &\leq a_k \left\|T^n x + T^n x\right\|^p \\ &\quad + c\left[a_k \ \left\|T^n x\right\|^p - \left\|T^{n+k} x\right\|^p + a_k \ \left\|T^n x\right\|^p - \left\|T^{n+k} x\right\|^p\right] + \delta_k\left(\left\{T^n x\right\}\right)\end{aligned}$$

$$2^p \left\|T^{n+k} x\right\|^p \leq a_k 2^p \left\|T^n x\right\|^p + c\left[2a_k \ \left\|T^n x\right\|^p - 2\left\|T^{n+k} x\right\|^p\right] + \delta_k\left(\left\{T^n x\right\}\right)$$

$$\left\|T^{n+k} x\right\|^p \left(2^p + 2c\right) \leq \left\|T^n x\right\|^p \left(a_k 2^p + 2a_k c\right) + \delta_k\left(\left\{T^n x\right\}\right)$$

$$\left\|T^{n+k} x\right\|^p \leq \frac{a_k \left\|T^n x\right\|^p \left(2^p + 2c\right) + \delta_k\left(\left\{T^n x\right\}\right)}{2^p + 2c}$$

$$\left\|T^{n+k} x\right\|^p \leq a_k \left\|T^n x\right\|^p + \frac{\delta_k\left(\left\{T^n x\right\}\right)}{2^p + 2c}$$

bulunur. $k \to \infty$ için limit alınırsa, $n \geq 0$ olmak üzere;

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \left\|T^k x\right\|^p \leq \left\|T^n x\right\|^p$$

eşitsizliği elde edilir. O halde, bu eşitsizlikten $\left\{ \ \left\|T^k x\right\| \ \right\}$ dizisinin yakınsak olduğu görülür. Çünkü,

$$\overline{\lim}_{k\to\infty}\left\|T^k x\right\|^p+\overline{\lim}_{k\to\infty}\left\|-T^n x\right\|^p\le 0$$
$$\overline{\lim}_{k\to\infty}\left\|T^k x\right\|^p-\underline{\lim}_{k\to\infty}\left\|T^n x\right\|^p\le 0$$
$$\overline{\lim}_{k\to\infty}\left\|T^k x\right\|^p\le\underline{\lim}_{k\to\infty}\left\|T^n x\right\|^p$$

eşitsizliği elde edilir ve Teorem 2.1.10. gereği

$$\underline{\lim}_{k\to\infty}\left\|T^k x\right\|^p\le\overline{\lim}_{k\to\infty}\left\|T^n x\right\|^p$$

eşitsizliği her zaman doğru olduğundan $\left\{\ \left\|T^k x\right\|\ \right\}$ dizisi yakınsaktır. Böylece, $k=n$ için $\left\{\ \left\|T^n x\right\|\ \right\}$ dizisi yakınsaktır.

Şimdi $n>m\ge 0$, $k=n-m$, $u=T^{m+i}x$ ve $v=T^m x$ için (4.1.1) eşitsizliği $M=\sup_{l\ge 0}\left\|T^l x\right\|$ olmak üzere yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\left\|T^{n+i}x+T^n x\right\|^p &\le a_{n-m}\left\|T^{m+i}x+T^m x\right\|^p \\
&\quad +c\left[a_{n-m}\ \left\|T^{m+i}x\right\|^p-\left\|T^{n-m+m+i}x\right\|^p+a_{n-m}\ \left\|T^m x\right\|^p-\left\|T^{n-m+m}x\right\|^p\right]+\delta_{n-m}\left(B\right) \\
&\le a_{n-m}\left(\left\|T^{m+i}x+T^m x\right\|^p+c\left\|T^{m+i}x\right\|^p+c\left\|T^m x\right\|^p\right)+c\left(-\left\|T^{n+i}x\right\|^p-\left\|T^n x\right\|^p\right) \\
&= a_{n-m}\left(\left(2M\right)^p+2cM^p\right) \\
&\quad +\left\|T^{m+i}x+T^m x\right\|^p+c\left[\left\|T^m x\right\|^p-\left\|T^{n+i}x\right\|^p+\left\|T^{m+i}x\right\|^p-\left\|T^n x\right\|^p\right] \\
&\quad -\left\|T^{m+i}x+T^m x\right\|^p-c\left(\left\|T^m x\right\|^p+\left\|T^{m+i}x\right\|^p\right)+\delta_{n-m}\left(B\right) \\
&\le\left|a_{n-m}\left(\left(2M\right)^p+2cM^p\right)-\left(2M\right)^p-2cM^p\right| \\
&\quad +c\left(\left\|T^m x\right\|^p-\left\|T^{n+i}x\right\|^p+\left\|T^{m+i}x\right\|^p-\left\|T^n x\right\|^p\right)+\left\|T^{m+i}x+T^m x\right\|^p+\delta_{n-m}\left(B\right) \\
&=\left\|T^{m+i}x+T^m x\right\|^p+\left[\left(2M\right)^p+2cM^p\right]\left|a_{n-m}-1\right| \\
&\quad +c\left[\left\|T^{m+i}x\right\|^p-\left\|T^{n+i}x\right\|^p+\left\|T^m x\right\|^p-\left\|T^n x\right\|^p\right]+\delta_{n-m}\left(B\right)
\end{aligned}$$

bulunur. $\left\{\ \left\|T^n x\right\|\ \right\}$ dizisinin yakınsak olduğu bilindiğinden, yukarıdaki ifadede limit alınırsa,

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \sup_{i\ge 0}\left\|T^{m+i}x\right\|^p\text{ - }\left\|T^{n+i}x\right\|^p=0$$

olur. $\lim_{k\to\infty}a_k=1$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty}\ \lim_{m\to\infty}\ a_{n-m}=1$ ve $\lim_{n\to\infty}\ \lim_{m\to\infty}\ \delta_{n-m}\left(B\right)=0$ dir. O zaman

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \sup_{i\geq 0}\left[\left\|T^{n+i}x+T^{n}x\right\|^{p}-\left\|T^{m+i}x+T^{m}x\right\|^{p}\right]\leq 0$$

bulunur. O halde $p=2$ için

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \sup_{i\geq 0}\left[\left\|T^{n+i}x+T^{n}x\right\|^{2}-\left\|T^{m+i}x+T^{m}x\right\|^{2}\right]\leq 0$$

elde edilir. Önerme 4.1.2. (ii) gereği yukarıdaki son eşitsizlik sağlandığından $\{\ T^{n}x\ \}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen kuvvetli yakınsaktır.

Teorem 4.1.3. B, C' nin sınırlı bir alt kümesi olsun. a_k, c, p negatif olmayan sabitler olmak üzere, $\lim_{k\to\infty}a_k=1$, $k\geq 0$ tamsayısı ve $u,\ v\in B$ için

$$\left\|T^{k}u-T^{k}v\right\|^{p}\leq a_k\left\|u-v\right\|^{p}+c\left[a_k\left\|u\right\|^{p}-\left\|T^{k}u\right\|^{p}+a_k\left\|v\right\|^{p}-\left\|T^{k}v\right\|^{p}\right]+\delta_k(B)\quad(4.1.2)$$

olacak biçimde, $\lim_{k\to\infty}\delta_k(B)=0$ olmak üzere bir $\delta_k(B)\geq 0$ var olsun. Bu durumda $\forall x\in C$ için

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \sup_{i\geq 0}\left[\left\|T^{n+i}x-T^{n}x\right\|^{2}-\left\|T^{m+i}x-T^{m}x\right\|^{2}\right]\leq 0$$

eşitsizliği gerçekleniyor ve (4.1.2) eşitsizliğinde $c>0$ ya da $F(T)\neq\emptyset$ ise $\forall x\in C$ için $\{\ T^{n}x\ \}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen kuvvetli yakınsaktır (Miyadera, 1997).

Önerme 4.1.4. $x\in C$ ve $w\in\mathscr{H}$ olsun. O zaman;

(i) $\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \sup_{i\geq 0}\left[\left\|T^{n+i}x+T^{n}x+2w\right\|^{2}-\left\|T^{m+i}x+T^{m}x+2w\right\|^{2}\right]\leq 0$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\{\ T^{n}x\ \}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen kuvvetli yakınsaktır.

(ii) $\{\ \left\|T^{n}x-w\right\|\ \}$ dizisi yakınsak ve

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \sup_{i\geq 0}\left[\left\|T^{m+i}x-T^{m}x\right\|^{2}-\left\|T^{n+i}x-T^{n}x\right\|^{2}\right]\leq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\{\ T^{n}x\ \}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen kuvvetli yakınsaktır (Miyadera, 1997).

İspat: (i) : $n\geq 0$ için $x_n=T^{n}x+w$ olarak alınırsa $\{x_n\}$ dizisi Önerme 4.1.2. (ii) şartını sağlar. Gerçekten (i)' de

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \sup_{i\geq 0}\left[\left\|T^{n+i}x+T^{n}x+2w\right\|^{2}-\left\|T^{m+i}x+T^{m}x+2w\right\|^{2}\right]\leq 0$$

$$\Rightarrow \overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \sup_{i\geq 0}\left[\left\|T^{n+i}x+w+T^{n}x+w\right\|^{2}-\left\|T^{m+i}x+w+T^{m}x+w\right\|^{2}\right]\leq 0$$

olur. O halde Önerme 4.1.2. gereği, $\{T^n x+w\}$ dizisi kendi asimtotik merkezi olan z gibi bir değere hemen hemen kuvvetli yakınsaktır. O zaman $z-w$ de $\{\ T^n x\ \}$ dizisinin asimtotik merkezi olur. Böylece ispat tamamlanır.

(ii) : $n\geq 0$ için $x_n=T^n x-w$ olsun. O zaman $\{x_n\}$ dizisi Önerme 4.1.2. (iii) şartını sağlar. Gerçekten Önerme 4.1.2 (iii)' de $x_n=T^n x-w$ alınırsa $n\geq 0$ için

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \sup_{i\geq 0}\left[\left\|T^{m+i}x-w-T^{m}x+w\right\|^{2}-\left\|T^{n+i}x-w+T^{n}x+w\right\|^{2}\right]\leq 0$$

bulunur. O halde Önerme 4.1.2. gereği $\{x_n\}=\{T^n x-w\}$ dizisi kendi asimtotik merkezi olan z gibi bir değere hemen hemen kuvvetli yakınsaktır. O zaman $\{\ T^n x\ \}$ dizisi de $z-w$ asimtotik merkezine hemen hemen kuvvetli yakınsak olur.

Teorem 4.1.3' ün ispatı: (4.1.2) eşitsizliğinde $c=0$ ve $F(T)\neq\varnothing$ olsun. O zaman;

$$\left\|T^k u-T^k v\right\|^p\leq a_k\left\|u-v\right\|^p+\delta_k(B) \tag{4.1.3}$$

olur. $x\in C$ ve $w\in F(T)$ olsun. B kümesi özel olarak $B_0=\{x,\ \mathrm{w}\}$ seçilirse ve (4.1.3) eşitsizliğinde $u=x$, $v=w$ yazılırsa $w\in F(T)$ olduğundan $T^k w=w$ dir ve $k\geq 0$ için

$$\left\|T^k x-T^k w\right\|^p=\left\|T^k x-w\right\|^p\leq a_k\left\|x-w\right\|^p+\delta_k(B_0)$$

elde edilir. O halde $\{T^n x-w\}$ dizisi sınırlıdır. Dolayısıyla, $\{\ T^n x-w+w\ \}=\{\ T^n x\ \}$ dizisi sınırlıdır. Şimdi $B=\{T^n x:\ n\geq 0\}\cup\{w\}$ olarak seçilsin. $u=T^n x$, $v=w$ ve $k,\ n\geq 0$ için (4.1.3) eşitsizliği yazılırsa,

$$\left\|T^{n+k}x-T^k w\right\|^p=\left\|T^{n+k}x-w\right\|^p\leq a_k\left\|T^n x-w\right\|^p+\delta_k(B)$$

bulunur. $k\to\infty$ için yukarıdaki eşitsizlikte limit alınırsa $\lim_{k\to\infty}\delta_k(B)=0$ ve $\lim_{k\to\infty}a_k=1$, $n\geq 0$ ve $p\geq 1$ için

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \left\|T^k x - w\right\| \le \left\|T^n x - w\right\|$$

elde edilir. O halde

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \left\|T^k x - w\right\| + \overline{\lim}_{k\to\infty} \left\|-\left(T^n x - w\right)\right\| \le 0$$

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \left\|T^k x - w\right\| - \underline{\lim}_{k\to\infty} \left\|-\left(T^n x - w\right)\right\| \le 0$$

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \left\|T^k x - w\right\| \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \left\|T^n x - w\right\|$$

olur. Ayrıca limit tanımından son elde edlilen eşitsizliğin tersi her zaman doğru olduğundan $\left\{ \left\|T^n x - w\right\| \right\}$ dizisi yakınsaktır. Sonuç olarak, Önerme 4.1.4. (ii) gereği, $\left\{ T^n x \right\}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen kuvvetli yakınsaktır.

Şimdi $F(T)$=Ø ve (4.1.2) eşitsizliğinde $c > 0$ durumu ele alınsın**.** $x \in C$ için (4.1.2) eşitsizliğinde $B = \{x\}$ olarak alınırsa $k \ge 0$ için

$$\left\|T^k x\right\|^p \le a_k \left\|x\right\|^p + \delta_k\left(\{x\}\right)/2c$$

bulunur. O halde $\left\{T^n x : n \ge 0\right\}$ sınırlı bir kümedir. $B = \left\{T^n x : n \ge 0\right\}$ alınırsa ve (4.1.2) eşitsizliğinde $u = v = T^n x$ yazılırsa, $\left\{ \left\|T^n x\right\| \right\}$ dizisinin yakınsak olduğu görülür. O halde Önerme 4.1.4. (ii) gereği $\left\{ T^n x \right\}$ dizisinin kendi asimtotik merkezine hemen hemen kuvvetli yakınsaktır.

Teorem 4.1.5. $u, v \in C$, $k \ge 0$ için $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$ olsun. a_k, c, p negatif olmayan sabitler olmak üzere,

$$\left\|u - v\right\|^p \le a_k \left\|T^k u - T^k v\right\|^p + c\left[a_k \left\| T^k u \right\|^p - \left\| u \right\|^p + a_k \left\| T^k v \right\|^p - \left\| v \right\|^p\right] \quad (4.1.4)$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman;

(i) $x \in C$ ve $\left\{ \left\|T^n x\right\| \right\}$ dizisi yakınsak ise $\left\{T^n x\right\}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen kuvvetli yakınsaktır.

(ii) $F(T) \ne$ Ø ya da (4.1.4) eşitsizliğinde $c > 0$ ise $\forall x \in C$ için $\lim_{n\to\infty}\left\|T^n x\right\| = \infty$ ya da $\left\{T^n x\right\}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen kuvvetli yakınsaktır (Miyadera, 1997).

İspat (i) : $n > m \geq 0$ olsun. (4.1.4) eşitsizliğinde $u = T^{m+i}x$, $v = T^m x$ ve $k = n - m$ olarak alınırsa,

$$\left\|T^{m+i}x - T^m x\right\|^p \leq a_{n-m} \left\|T^{n-m+m+i}x - T^{n-m+m}x\right\|^p$$

$$+c\left[a_{n-m} \left\|T^{n-m+m+i}x\right\|^p - \left\|T^{m+i}x\right\|^p + a_{n-m} \left\|T^{n-m+m}x\right\|^p - \left\|T^m x\right\|^p\right]$$

$$= a_{n-m}\left[\left\|T^{n+i}x - T^n x\right\|^p + c\left\|T^{n+i}x\right\|^p + c\left\|T^n x\right\|^p\right] + c\left[-\left\|T^{m+i}x\right\|^p - \left\|T^m x\right\|^p\right]$$

$$= a_{n-m}\left[\left\|T^{n+i}x - T^n x\right\|^p + c\left\|T^{n+i}x\right\|^p + c\left\|T^n x\right\|^p\right] + c\left[-\left\|T^{m+i}x\right\|^p - \left\|T^m x\right\|^p\right]$$

$$+\left\|T^{n+i}x - T^n x\right\|^p - \left\|T^{n+i}x - T^n x\right\|^p + c\left[\left\|T^{n+i}x\right\|^p + \left\|T^n x\right\|^p\right] - c\left[\left\|T^{n+i}x\right\|^p + \left\|T^n x\right\|^p\right]$$

$M = \sup_{l\geq 0} \| T^l x \|$ olarak alınırsa,

$$\leq \left\|T^{n+i}x - T^n x\right\|^p + \left|a_{n-m} - 1\right| \left[(2M)^p + 2cM^p\right]$$

$$+c\left[\left\|T^{n+i}x\right\|^p - \left\|T^{m+i}x\right\|^p + \left\|T^n x\right\|^p - \left\|T^m x\right\|^p\right]$$

bulunur. $\left\{ \left\|T^n x\right\| \right\}$ dizisi yakınsak olduğundan, $i \geq 0$ ve $n > m \geq 0$ için, $\left\{ \left\|T^{n+i}x\right\| \right\}$, $\left\{ \left\|T^{m+i}x\right\| \right\}$, $\left\{ \left\|T^m x\right\| \right\}$ dizileri de yakınsaktır ve limitleri $\left\{ \left\|T^n x\right\| \right\}$ dizisinin limiti ile aynı olacağından $c\left[\left\|T^{m+i}x\right\|^p - \left\|T^{m+i}x\right\|^p + \left\|T^m x\right\|^p - \left\|T^n x\right\|^p\right]$ ifadesinin limiti '0' olur. Son elde edilen eşitsizlikte limit alınırsa $\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{n-m} = 1$ olduğundan;

$$\overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \sup_{i\geq 0} \left\|T^{m+i}x - T^m x\right\|^p - \left\|T^{n+i}x - T^n x\right\|^p \leq 0$$

bulunur. Özel olarak $p = 2$ alınırsa;

$$\overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \sup_{i\geq 0} \left\|T^{m+i}x - T^m x\right\|^2 - \left\|T^{n+i}x - T^n x\right\|^2 \leq 0$$

elde edilir. O halde Önerme 4.1.2. (iii) sağlandığından $\left\{ T^n x \right\}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen kuvvetli yakınsaktır.

(ii): $x \in C$ ve $\underline{\lim}_{n\to\infty} \left\|T^n x\right\| < \infty$ olsun. İlk olarak, $F(T) \neq \emptyset$ ve $c = 0$ için (4.1.4) eşitsizliği $u, v \in B$ olmak üzere yazılırsa;

$$\left\|u - v\right\|^p \leq a_k \left\|T^k u - T^k v\right\|^p$$

bulunur. $w \in F(T)$ olsun. $u = T^n x$ ve $v = w$ elemanları için (4.1.4) eşitsizliği $k,\ n \geq 0$ olmak üzere,

$$\left\|T^n x - w\right\|^p \leq a_k \left\|T^{n+k} x - T^k w\right\|^p = a_k \left\|T^{n+k} x - w\right\|^p$$

olur. Bu eşitsizlikte $k \to \infty$ için limit alınırsa $\underline{\lim}_{\,n\to\infty} \left\|T^n x\right\| < \infty$ ve $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$ olduğundan $\left\{ \left\|T^n x - w\right\| \right\}$ dizisinin yakınsak olduğu görülür. Yukarıdaki eşitsizlikte, $u = T^{m+i} x$, $v = T^m x$, $M = \sup_{l\geq 0} \left\| T^l x \right\|$ ve $k = n - m$ için, $n > m \geq 0$, $i \geq 0$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\left\|T^{m+i} x - T^m x\right\|^p &\leq a_{n-m} \left\|T^{n+i} x - T^n x\right\|^p \leq a_{n-m} (2M)^p + \left\|T^{n+i} x - T^n x\right\|^p - \left\|T^{n+i} x - T^n x\right\|^p \\ &\leq \left|a_{n-m} - 1\right| \, (2M)^p + \left\|T^{n+i} x - T^n x\right\|^p\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve limit alınırsa

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \sup_{i\geq 0} \left\|T^{m+i} x - T^m x\right\|^p - \left\|T^{n+i} x - T^n x\right\|^p \leq 0$$

bulunur. $p = 2$ için Önerme 4.1.4 (ii) sağlanır. O halde $\left\{ T^n x \right\}$ dizisi yakınsaktır.

Şimdi $c > 0$, $F(T) = \varnothing$ olsun. O zaman (4.1.4) eşitsizliğinde $u = v = T^n x$ alınırsa $k,\ n \geq 0$ olmak üzere,

$$\left\|T^n x - T^n x\right\|^p \leq a_k \left\|T^{n+k} x - T^{n+k} x\right\|^p + c\left(a_k \left\|T^{n+k} x\right\|^p - \left\|T^n x\right\|^p + a_k \left\|T^{n+k} x\right\|^p - \left\|T^n x\right\|^p\right)$$

$$2c\left\|T^n x\right\|^p \leq 2c a_k \left\|T^{n+k} x\right\|^p$$

$$\left\|T^n x\right\|^p \leq a_k \left\|T^{n+k} x\right\|^p$$

bulunur. Her iki tarafın limiti alınırsa $\left\{ \left\|T^n x\right\| \right\}$ dizisinin yakınsak olduğu görülür. O halde (i) gereği $\left\{ T^n x \right\}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen kuvvetli yakınsaktır.

4.2. Lineer Olmayan Dönüşümler için Zayıf Ergodik Teoremler

Bu bölümde, lineer olmayan dönüşümler için zayıf ergodik teoremin ifadesi, (Wittmann, 1990) ve (Miyadera, 1997)' nın çalışmalarından hareketle verilecek ve teoremlerin ispatları açık olarak yapılacaktır.

Teorem 4.2.1. B, C' nin sınırlı bir alt kümesi olsun. a_k, c negatif olmayan sabitler olmak üzere, $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$, $p \geq 1$, $k \geq 0$ tamsayısı ve $u,\ v \in B$ için

$$\left\|T^k u - T^k v\right\|^p \leq a_k \left\|u - v\right\|^p + c\left[a_k \ \left\|u\right\|^p - \left\|T^k u\right\|^p + a_k \ \left\|v\right\|^p - \left\|T^k v\right\|^p \right] + \delta_k(B) \qquad (4.2.1)$$

olacak biçimde $\lim_{k\to\infty} \delta_k(B) = 0$ olmak üzere bir $\delta_k(B) \geq 0$ var olsun.

Bu durumda $F(T) \neq \emptyset$ veya (4.2.1) eşitsizliğinde $c > 0$ ise $\forall x \in C$ için $\{ T^n x \}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen zayıf yakınsaktır (Miyadera, 1997).

Bu teoremin ispatını vermeden önce ispat için temel teşkil eden aşağıdaki önerme verilmelidir.

Önerme 4.2.2. $\{x_n\}$, $\mathscr{H}$ Hilbert uzayında bir dizi ve $\{ \|x_n\| \}$ yakınsak olsun.

O zaman n, m, i$\geq$ 0 için (i), (ii), (iii) karşılıklı olarak denktir.

$$(i)\ \overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \overline{\lim}_{i\to\infty} \left[(x_{m+i},\ x_m) - (x_{n+i},\ x_n) \right] \leq 0$$

$$(ii)\ \overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \overline{\lim}_{i\to\infty} \left[\left\|x_{m+i} + x_m\right\|^2 - \left\|x_{n+i} + x_n\right\|^2 \right] \leq 0$$

$$(iii)\ \overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \overline{\lim}_{i\to\infty} \left[\left\|x_{n+i} - x_n\right\|^2 - \left\|x_{m+i} - x_m\right\|^2 \right] \leq 0$$

Ayrıca $\{ x_n \}$ yukarıdaki denk koşullardan birini sağlıyor ve $\{ \|x_n\| \}$ yakınsak ise $\{ x_n \}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen zayıf yakınsaktır (Bruck, 1978).

İspat: (i)$\Rightarrow$(ii): (i) sağlansın. O zaman (ii)' de $\left\|x_{n+i} + x_n\right\|^2 = \left\|x_{n+i}\right\|^2 + 2(x_{n+i}, x_n) + \left\|x_n\right\|^2$ yazılırsa;

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \overline{\lim}_{i\to\infty} \left[\left\|x_{m+i} + x_m\right\|^2 - \left\|x_{n+i} + x_n\right\|^2 \right]$$

$$= \overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \overline{\lim}_{i\to\infty} \left[\left\|x_{m+i}\right\|^2 + 2(x_{m+i},\ x_m) + \left\|x_m\right\|^2 - \left\|x_{n+i}\right\|^2 - 2(x_{n+i},\ x_n) - \left\|x_n\right\|^2 \right]$$

$$= \overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \overline{\lim}_{i\to\infty} 2\left[(x_{m+i},\ x_m) - (x_{n+i},\ x_n) \right]$$

$$+ \overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \overline{\lim}_{i\to\infty} \left[\left\|x_{m+i}\right\|^2 - \left\|x_{n+i}\right\|^2 + \left\|x_m\right\|^2 - \left\|x_n\right\|^2 \right]$$

bulunur. $\{\ \| x_n \|\ \}$ yakınsak olduğundan n, m, i≥ 0 için $\{\ \| x_{m+i} \|\ \}$, $\{\ \| x_m \|\ \}$, $\{\ \| x_{n+i} \|\ \}$ dizileri de aynı limite sahip olacağından

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \overline{\lim}_{i\to\infty}\ \left[\|x_{m+i}\|^2-\|x_{n+i}\|^2+\|x_m\|^2-\|x_n\|^2\right]=0$$

olur ve (i) gereği

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \overline{\lim}_{i\to\infty}\ \left[(x_{m+i},\ x_m)-(x_{n+i},\ x_n)\right]\leq 0$$

olduğundan

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \overline{\lim}_{i\to\infty}\ 2\left[(x_{m+i},\ x_m)-(x_{n+i},\ x_n)\right]\leq 0$$

bulunur. Bu sonuçlar yukarıda yerine yazılırsa, (ii) elde edilir. Benzer şekilde $\|x_{n+i}-x_n\|^2=\|x_{n+i}\|^2-2(x_{n+i},x_n)+\|x_n\|^2$ ifadesi (iii) de yerine yazılırsa (i)$\Rightarrow$(iii) ve (iii) $\Rightarrow$(i) olduğu görülür.

Son olarak $\{\ x_n\ \}$' nin bu koşullardan birini örneğin (i) koşulunu sağladığını ve $\{\ \| x_n \|\ \}$ dizisinin yakınsak olduğunu kabul ederek $\{\ x_n\ \}$' nin kendi asimtotik merkezine zayıf yakınsadığı gösterilmelidir. Bunu göstermek için aşağıdaki yardımcı önermeyi ispatlamak yeterlidir.

Yardımcı Önerme 4.2.3. $\mathscr{H}$ reel Hilbert uzayı olmak üzere $\{\ x_n\ \}$, $\mathscr{H}$ Hilbert uzayında sınırlı bir dizi ve

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \sup_{i\geq 0}\left[\ (x_m,\ x_{m+i})-(x_n,\ x_{n+i})\ \right]\leq 0 \tag{4.2.2}$$

sağlansın. W, $\{\ x_n\ \}$'nin hemen hemen zayıf yakınsak alt dizilerinin limitlerinin kümesini göstersin. O zaman n, m, i≥ 0 olmak üzere;

(i) $\{x_n\}$, $clco\ W$ kümesinin c gibi bir noktasına hemen hemen zayıf yakınsaktır.

(ii) $\lim_{n\to\infty}(x_n,\ c)=\|\ c\ \|^2$ dir.

(iii) c, $W-c$ ile ortogonaldir

(iv) $\{\ \| x_n \|\ \}$ yakınsak ise c, $\{x_n\}$ dizisinin asimtotik merkezidir.

İspat: (4.2.2) eşitsizliğinden, limit tanımı gereği;

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \sup_{i\geq 0}\ \varepsilon(m,\ n,\ i)=0 \tag{4.2.3}$$

olduğunda,

$$(x_m,\ x_{m+i})-(x_n,\ x_{n+i})\le\varepsilon(m,\ n,\ i) \qquad (4.2.4)$$

olacak biçimde bir $\varepsilon(m,\ n,\ i)>0$ vardır. $0\le i,\ \mathrm{j}<\infty$ olmak üzere $Q=[q_{ij}]$ sonsuz reel matrislerin bir sınıfını göstersin öyle ki $\lim_n\sum_k q_{nk}=1,\ \ \sup_n\sum_k|q_{nk}|<\infty$, $\lim_n q_{nk}=0$ ve $\lim_n\sum_k|q_{n,\,k+1}-q_{n,\,k}|=0$ olsun. O zaman $\{x_n\}$ sınırlı olduğundan $\lim_n(\sum_k \mathrm{q_{nk}}x_k-\sum_k q_{nk}x_{k+1})=0$ olur. Bu özellikleri sağlayan $Q=[q_{ij}]$ matrisleri kısaca $Q\in(\boldsymbol{E})$ ile gösterilecektir. $Q\in(\boldsymbol{E})$ olsun.

$$\begin{aligned}&(x_m,\ x_{m+i})-(x_n,\ x_{n+i})\\&=(x_m,\ x_{m+i})-(x_n,\ x_{n+i})+(x_m,\ x_i)-(x_m,\ x_i)\\&+(x_n,\ x_i)-(x_n,\ x_i)\le\varepsilon(m,\ n,\ i)\end{aligned}$$

O zaman,

$$(\mathrm{x_m},\ x_i)-(x_n,\ x_i)\le\varepsilon(m,\ n,\ i)+(x_m,\ x_i)-(x_m,\ x_{m+i})-(x_n,\ x_i)+(x_n,\ x_{n+i})$$

olur. Her iki taraf q_{ki} ile çarpılıp i üzerinden toplam alınırsa,

$$\begin{aligned}&\sum_i q_{ki}(x_m,\ x_i)-\sum_i q_{ki}(x_n,\ x_i)\le\sum_i q_{ki}\ \ \varepsilon(m,\ n,\ i)\\&+\sum_i q_{ki}\left[(x_m,\ x_i)-(x_m,\ x_{m+i})\right]-\sum_i q_{ki}\left[(x_n,\ x_i)-(x_n,\ x_{n+i})\right]\end{aligned} \qquad (4.2.5)$$

bulunur.

$$y_n=\sum_k q_{nk}x_k$$

şeklinde tanımlanırsa $Q\in(\ \boldsymbol{E}\ )$ ve $\{\ x_n\ \}$ sınırlı olduğundan $\{\ y_n\ \}$ dizisi de sınırlıdır. (iv)' i ispatlamak ve $\{\ x_n\ \}$ dizisinin yakınsak olduğunu göstermek için $\{\ y_n\ \}$' nin yakınsak olduğu gösterilmelidir. A ile $\{\ y_n\ \}$ dizisinin zayıf yakınsak alt dizilerinin limitlerinin kümesi gösterilsin. $\{\ y_n\ \}$' in yakınsak olduğunu göstermek için $\{\ y_n\ \}$ dizisinin bütün alt dizilerinin limitlerinin aynı olduğunu yani A kümesinin tek elemandan oluştuğunu göstermek yeterlidir. $y_k=\sum_i q_{ki}x_i$ için (4.2.5) eşitsizliğinden,

$$\left(x_m - x_n,\ y_k\right) = \left(x_m - x_n,\ \sum_i q_{ki} x_i\right) = \sum_i q_{ki}\left(x_m,\ x_i\right) - \sum_i q_{ki}\left(x_n,\ x_i\right)$$
$$\le \sum_i q_{ki}\ \varepsilon(m,\ n,\ i) + \sum_i q_{ki}\left[\left(x_m,\ x_i\right) - \left(x_m,\ x_{m+i}\right)\right] - \sum_i q_{ki}\left[\left(x_n,\ x_i\right) - \left(x_n,\ x_{n+i}\right)\right]$$

elde edilir. $\{\ x_n\ \}$ sınırlı bir dizi ise

$$\lim_n \sum_k \left|q_{n,k+1} - q_{n,k}\right| = 0$$

olduğunda,

$$\lim_n \left(\sum_{\mathrm{k}} \mathrm{q}_{\mathrm{nk}} x_k - \sum_k q_{nk} x_{k+1}\right) = 0 \qquad (4.2.6)$$

olur. Limit alınırsa;

$$\begin{aligned}\lim\ \sup_k \left(x_m - x_n,\ y_k\right) \le{}& \lim\ \sup_k \sum_i q_{ki}\ \varepsilon\left(m,\ n,\ i\right)\\ &+ \lim\ \sup_k \sum_i q_{ki}\left[\left(x_m,\ x_i\right) - \left(x_m,\ x_{m+i}\right)\right]\\ &- \lim\ \sup_k \sum_i q_{ki}\left[\left(x_n,\ x_i\right) - \left(x_n,\ x_{n+i}\right)\right]\end{aligned}$$

bulunur. (4.2.6) eşitsizliği gereği,

$$\lim\ \sup_k \sum_i q_{ki}\left[\left(x_n,\ x_i\right) - \left(x_n,\ x_{n+i}\right)\right] = 0$$

ve

$$\lim\ \sup_k \sum_i q_{ki}\left[\left(x_m,\ x_i\right) - \left(x_m,\ x_{m+i}\right)\right] = 0$$

dır. O halde;

$$\lim\ \sup_k \left(x_m - x_n,\ y_k\right) \le \lim\ \sup_i\ \varepsilon\left(m,\ n,\ i\right) \qquad (4.2.7)$$

elde edilir. $c' \in A$ olsun. Bu durumda $\{\ y_k\ \}$ dizileri $\{\ y_n\ \}$ dizisinin alt dizileri olmak üzere $y_k \to c'$ olacağından (4.2.7) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\left(x_m - x_n,\ c'\right) \le \lim\ \sup_i\ \varepsilon\left(m,\ n,\ i\right)$$

bulunur. Her iki tarafın sırasıyla n ve m üzerinden limitleri alınırsa;

$$\lim\ \sup_m \lim\ \sup_n \left(x_m - x_n,\ c'\right) \le \lim\ \sup_m \lim\ \sup_n \lim\ \sup_i\ \varepsilon\left(m,\ n,\ i\right)$$

olur. (4.2.3) gereği bu eşitsizliğin sağ tarafı 0' dır. Yani,

$$\lim_{m\to\infty}\ \sup_m \left(x_m,\ c'\right) + \lim\ \sup_n \left(-x_n,\ c'\right) \le 0$$

bulunur. Tanım 2.1.9. gereği,

$$\underline{\lim}\, x_n = \sup_k \inf_{k \geq n} \mathrm{x_n} \text{ ve } \overline{\lim}\, \mathrm{x_n} = \inf_k \sup_{k \geq n} \mathrm{x_n}$$

olmak üzere

$$\overline{\lim}\,(-x_n) = -\underline{\lim}\, x_n$$

dır. O halde,

$$\lim \sup_n \left(-x_n,\ c'\right) = \overline{\lim}\,\left(-x_n,\ c'\right) = -\lim \inf_n \left(x_n,\ c'\right)$$

olmak üzere

$$\lim \sup_m \left(x_m,\ c'\right) + \lim \sup_n \left(-x_n,\ c'\right) \leq 0$$

$$\lim \sup_m \left(x_m,\ c'\right) - \lim \inf_n \left(x_n,\ c'\right) \leq 0$$

$$\lim \sup_m \left(x_m,\ c'\right) \leq \lim \inf_n \left(x_n,\ c'\right)$$

bulunur. Ayrıca (4.2.3) eşitsizliğinden

$$\lim \sup_n \left(x_n,\ c'\right) \leq \lim \inf_n \left(x_n,\ c'\right)$$

olur. $\{x_n\}$ sınırlı bir dizi iken

$$\lim \inf_n \left(x_n,\ c'\right) \leq \lim \sup_n \left(x_n,\ c'\right)$$

olduğundan $\lim \inf_n (x_n,\ c') = \lim \sup_n (x_n,\ c')$ bulunur. O halde alt limit ve üst limit eşit bulunduğundan her bir $c' \in A$ için $\lim_{n\to\infty} \left(x_n,\ c'\right)$ mevcuttur ve $x_n \to x',\ x' \in W$ dir. x' limitinin *clco W* de olduğu gösterilmelidir. $W \subset clco\ W$ olduğundan $x' \in W$ iken $x' \in clco\ W$ dir.. Böylece (i) ispatlanmış olur.

Şimdi (ii) için ispat yapılmalıdır. Önerme 1.6.13. gereği $clco\ \mathrm{W} = \bigcap clco\ \{\mathrm{x_k},\ \mathrm{k} \geq \mathrm{n}\}$ dir. O halde $x' \in clco\,\mathrm{W}$ iken $\lim\limits_n q_{nk} = 0$ olduğundan $c' \in clco\,\mathrm{W}$ dir. Yani, $Q \in (\boldsymbol{E})$ olduğundan $\lim\limits_n \sum\limits_k q_{nk} = 1$ olur. O zaman,

$$c' = \lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} \sum_i q_{ki} x_i = \lim_{i\to\infty} x_i = x'$$

ve $x' \in clco\,\mathrm{W}$ olduğundan $c' \in clco\ W = \bigcap clco\ \{x_k,\ k \geq n\}$ elde edilir. c' elemanının tek olduğu gösterilmelidir. Bunun için;

“ $\mathscr{H}$ bir Hilbert uzayı olsun. O zaman $\mathscr{H}$ içindeki her kapalı konveks C kümesi minimum norma sahip tek bir eleman içerir. Yani; $\forall\, x \in C$ için $\| x_0 \| \leq \| x \|$ olacak biçimde bir tek $x_0 \in C$ vardır. " önermesinden yararlanılacaktır. Bu önermeden ve $clco\ W$, $\mathscr{H}$ ' nin kapalı ve konveks bir alt kümesi olduğundan $\forall\ x \in clco\ W$ için $\| c^{'} \| \leq \| x \|$ olacak biçimde bir tek $c' \in clco\ W$ vardır. Çünkü $c^{'} \in \bigcap clco\ \{x_k : k \geq n\}$ iken

$$\left(c^{'},\ c^{'}\right) = \left(x^{'},\ c^{'}\right) \leq \left(x^{'},\ x^{'}\right)$$

$$\| c^{'} \|^2 \leq \| x^{'} \|^2$$

olur. O halde c', $clco\ W$ ' nin minimum norma sahip bir tek elemanı olduğundan bu c' elemanı tektir. Dolayısıyla $A = \left\{c^{'}\right\}$ dir. Özel olarak, $a(c^{'}) = (x^{'},\ c^{'}) = (c^{'},\ c^{'})$ yazılabilir. Sonuç olarak;

$$(W - c^{'},\ c^{'}) = (x^{'} - c^{'},\ c^{'}) = (c^{'} - c^{'},\ c^{'}) = 0$$

bulunur. O halde $W - c^{'}$ ile $c^{'}$ ortogonaldir. Böylece (ii) ispatlanır. $c^{'}$ elemanının tek olduğunu göstermek için;

" X tam bir uzay olsun. O zaman aşağıdakiler denktir. "

(i) $\{x_n\}$ bir x noktasına hemen hemen yakınsaktır.

(ii) $\forall\ Q \in (\boldsymbol{E})$ için $\lim_n \sum_k q_{nk} x_k = x$

önermesinden yararlanılacaktır. Bu önermenin $\mathscr{H}$ Hilbert uzayı için sağlandığı açıktır. $\forall\ Q \in (\boldsymbol{E})$ için

$$\lim_k \sum_i q_{ni} x_i = \lim_k y_k = x^{'} = c^{'}$$

dir. Buradan $\{y_n\}$'in $\{y_k\}$ alt dizilerinin limitlerinin tek nokta olduğunu görülür. Yani $A = \left\{c^{'}\right\}$ dir. O halde $y_n \to c$ (zayıf yakınsak) olur.

Ayrıca,

$$\lim_n \left(x_n,\ c^{'}\right) = \left(x^{'},\ c^{'}\right) = \left(c^{'},\ c^{'}\right) = \| c \|^2$$

olduğu açıktır. Böylece (iii) de ispatlanmış olur. $\{\ \| x_n \|\ \}$ yakınsak ve $y \in \mathscr{H}$ olmak üzere $r\left(y\right) = \lim\ \sup_{\mathrm{n}} \|x_n - y\|^2$ olsun. Bu durumda

$$\|x_n - c\|^2 = \|x_n\|^2 - 2(x_n, c) + \|c\|^2$$

olduğundan,

$$\sum_k q_{nk} \|x_k - y\|^2 = \sum_k q_{nk} \|x_k - c + c - y\|^2$$
$$= \sum_k q_{nk} \|x_k - c\|^2 + 2\left(\sum_k q_{nk} x_k - c,\ c - y\right) + \|c - y\|^2$$

olur. (iii)' den $r(c) = \lim_n \ \|x_n - c\|^2$ yazılabilir (çünkü limit mevcuttur.). Şimdi c noktasının asimtotik merkez olduğu gösterilmelidir. Bunun için $r(c) \le r(y)$ yani $\|x_n - c\|^2 \le \|x_n - y\|^2$ olduğu gösterilmelidir. $\{ t_n \}$ reel değerli sınırlı bir dizi ve $\lim_n \sum_k q_{nk} = 1$ ise

$$\lim\ \inf_n\ t_n \le \lim\ \inf_n\ \sum_k q_{nk} t_k \le \lim\ \sup_n\ \sum_k q_{nk} t_k \le \lim\ \sup_n\ t_n$$

dir. $\{ \| x_n \| \}$ sınırlı olduğundan, $t_n = \|x_n - y\|^2$ sınırlı olacaktır ve

$$r(y) = \lim\ \sup_n \|x_n - y\|^2 \ge \lim\ \sup_n \sum_k q_{nk} \|x_k - y\|^2$$
$$= \lim\ \sup_n \left(\sum_k q_{nk} \|x_k - c\|^2 + 2(y_n - c,\ c - y) + \|c - y\|^2 \right)$$
$$= \lim_n \|x_n - c\|^2 + \|c - y\|^2 = r(c) + \|c - y\|^2$$

bulunur. O zaman,

$$r(c) + \|c - y\|^2 \le r(y) \Rightarrow \|x_n - c\|^2 \le \|x_n - y\|^2 - \|c - y\|^2$$

olur. O halde c, $\{ x_n \}$ dizisinin asimtotik merkezidir.

Önerme 4.2.4. T dönüşümü (4.2.1) eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda $x \in C$ ve $\{ \|T^n x\| \}$ dizisi yakınsak ise

$$\overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \sup_{i\ge 0} \|T^{n+i}x - T^n x\|^2 - \|T^{m+i}x - T^m x\|^2 \le 0 \tag{4.2.8}$$

olur.

İspat: $B = \{T^n x :\ n \ge 0\}$ olsun. (4.2.1) eşitsizliğinde $u = T^{m+i}x$, $v = T^m x$, $k = n - m$ alınırsa, $M = \sup_{l\ge 0} \|T^l x\|$ olmak üzere;

$$\|T^{n+i}x - T^n x\|^p \le a_{n-m} \|T^{m+i}x - T^m x\|^p$$
$$+c\left[a_{n-m} \|T^{m+i}x\|^p - \|T^{n+i}x\|^p + a_{n-m} \|T^m x\|^p - \|T^n x\|^p \right] + \delta_{n-m}(B)$$

$$\leq \left\|T^{m+i}x - T^m x\right\|^p + |a_{n-m} - 1|\left[(2M)^p + 2cM^p\right]$$
$$+c\left[\ \left\|T^{m+i}x\right\|^p - \left\|T^{n+i}x\right\|^p + \left\|T^m x\right\|^p - \left\|T^n x\right\|^p\right] + \delta_{n-m}(B)$$

bulunur. $\left\{\ \left\|T^n x\right\|\ \right\}$ yakınsak olduğundan $i \geq 0$ ve $n > m \geq 0$ için $\left\{\ \left\|T^{n+i}x\right\|\ \right\}$, $\left\{\ \left\|T^{m+i}x\right\|\ \right\}$, $\left\{\ \left\|T^m x\right\|\ \right\}$ dizileri de yakınsaktır ve limiti $\left\{\ \left\|T^n x\right\|\ \right\}$ dizisinin limiti ile aynı olacağından, $c\left[\left\|T^{m+i}x\right\|^p - \left\|T^{m+i}x\right\|^p + \left\|T^m x\right\|^p - \left\|T^n x\right\|^p\right]$ ifadesinin limiti '0' olur. O halde yukarıdaki eşitsizlikte limit alınırsa;

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \sup_{i\geq 0}\ \left\|T^{n+i}x - T^n x\right\|^p - \left\|T^{m+i}x - T^m x\right\|^p \leq 0$$

bulunur. $p = 2$ için (4.2.8) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.1' nin İspatı: $x \in C$, $w \in F(T)$ ve $c = 0$ olsun. $B_0 = \{x,\ \mathrm{w}\}$ için (4.2.1) eşitsizliği yazılırsa;

$$\left\|T^k u - T^k v\right\|^p \leq a_k \left\|u - v\right\|^p + \delta_k(B) \qquad (4.2.9)$$

bulunur. Bu eşitsizlikte $u = x$, $v = f$ alınırsa

$$\left\|T^k x - T^k w\right\|^p = \left\|T^k x - w\right\|^p \leq a_k \left\|x - w\right\|^p + \delta_k(B_o)$$

elde edilir. O halde $\left\{T^n x - w\right\}$ sınırlıdır ve dolayısıyla $\left\{T^n x - w + w\right\} = \left\{T^n x\right\}$ dizisi sınırlıdır. $B = \left\{T^n x:\ n \geq 0\right\} \cup \{w\}$ ve $u, v \in B$ için $u = T^n x$ ve $v = w$, $k,\ n \geq 0$ (4.2.1) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\left\|T^{n+k}x - T^k w\right\|^p = \left\|T^{n+k}x - w\right\|^p \leq a_k \left\|T^n x - w\right\|^p + \delta_k(B)$$

olur. $k \to \infty$ için limit alınırsa $\lim_{k\to\infty} \delta_k(B) = 0$ ve $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$, $n \geq 0$, $p \geq 1$ olmak üzere

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \left\|T^{n+k}x - w\right\|^p \leq \left\|T^n x - w\right\|^p$$

bulunur. O halde $\left\{\ \left\|T^n x - w\right\|\ \right\}$ yakınsaktır ve $\left\{\ \left\|T^n x - w + w\right\|\ \right\} = \left\{\ \left\|T^n x\right\|\ \right\}$ yakınsaktır. $B = \left\{T^n x:\ n \geq 0\right\}$ olmak üzere , (4.2.9) eşitsizliğinde $u = T^{m+i}x$, $v = T^m x$, k=n-m alınırsa $n > m \geq 0$ ve $i \geq 0$ için

$$\left\|T^{n+i}x - T^n x\right\|^p \leq a_{n-m}\left\|T^{m+i}x - T^m x\right\|^p + \delta_{n-m}(B)$$

elde edilir. Limit alınırsa

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\ \sup_{i\geq 0}\ \left\|T^{n+i}x-T^{n}x\right\|^{p}-\left\|T^{m+i}x-T^{m}x\right\|^{p}\leq 0$$

bulunur. $p=2$ için (4.2.8) eşitsizliği elde edildiğinden $x_n=T^n x-w$ için Önerme 4.2.6. gerçeklenir. Gerçekten

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty}\overline{\lim}_{i\to\infty}\left[\left\|x_{n+i}-x_n\right\|^2-\left\|x_{m+i}-x_m\right\|^2\right]=$$

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty}\overline{\lim}_{i\to\infty}\left[\left\|T^{n+i}x-w-T^{n}x+w\right\|^2-\left\|T^{m+i}x-w-T^{m}x+w\right\|^2\right]\leq 0$$

dir. O halde $\left\{\ \left\|T^n x-w\right\|\ \right\}$ yakınsak olduğundan Önerme 4.2.6. gereği $\left\{\ x_n\ \right\}=\left\{\ T^n x-w\ \right\}$ dizisi kendi asimtotik merkezi olan z gibi bir değere hemen hemen zayıf yakınsaktır. Dolayısıyla, $\left\{\ T^n x\ \right\}$ dizisi de asimtotik merkezi $z+w$ olan değere hemen hemen zayıf yakınsaktır.

Şimdi (4.2.1) eşitsizliğinde $c>0$ olarak alınsın. Bu durumda $x\in C$ için $B=\left\{\ x\ \right\}$ alınırsa $u=v=x$ olmak üzere (4.2.1) eşitsizliği $k\geq 0$ için

$$0\leq a_k 0+c\left[2a_k\left\|\ x\ \right\|^p-2\left\|\ T^k x\ \right\|^p\right]+\delta_k(B)$$

$$\left\|\ T^k x\ \right\|^p\leq a_k\left\|\ x\ \right\|^p+\delta_k\left(\{x\}\right)/2c$$

bulunur. O halde $\left\{T^n x:\ n\geq 0\right\}$ sınırlı bir kümedir. B kümesi de C' nin sınırlı bir alt kümesi olduğundan $B=\left\{T^n x:\ n\geq 0\right\}$ alınabilir. Bu durumda (4.2.1) eşitsizliğinde $u=v=T^n x\in B$ için,

$$\left\|T^{k+n}x\right\|^p\leq a_k\left\|T^n x\right\|^p+\delta_k\left(B\right)/2c$$

bulunur. $n\geq 0$ için limit alınırsa

$$\lim_{k\to\infty}\ \left\|T^k x\right\|^p\leq\lim_{k\to\infty}\ \left[a_k\left\|T^n x\right\|^p+\delta_k\left(B\right)/2c\right]$$

olduğundan $\left\{\ \left\|T^n x\right\|\ \right\}$ yakınsaktır. O halde, Önerme 4.2.6 gereği

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \sup_{i\geq 0}\left\|T^{n+i}x-T^n x\right\|^2-\left\|T^{m+i}x-T^m x\right\|^2\leq 0$$

olur. Bir başka ifadeyle

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty}\ \overline{\lim}_{i\to\infty}\ \left\|T^{n+i}x-T^n x\right\|^2-\left\|T^{m+i}x-T^m x\right\|^2\leq 0$$

sağlanır. O halde, $\{ x_n \} = \{ T^n x \}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen zayıf yakınsaktır.

Teorem 4.2.5. $u,\ v \in B$ ve $k \geq 0$ için $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$ olmak üzere $a_k,\ c,\ p$ negatif olmayan sabitleri için T dönüşümü,

$$\|u+v\|^p \leq a_k \left\|T^k u + T^k v\right\|^p + c\left[a_k \left\|T^k u\right\|^p - \|u\|^p + a_k \left\|T^k v\right\|^p - \|v\|^p \right] \tag{4.2.10}$$

eşitsizliğini sağlasın. O zaman $\forall\, x \in C$ için ya $\lim_{n\to\infty} \left\|T^n x\right\| = \infty$ ya da $\{ T^n x \}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen zayıf yakınsaktır (Miyadera, 1997).

İspat: $x \in C$ ve $\underline{\lim}_{n\to\infty} \left\|T^n x\right\| < \infty$ olsun. T dönüşümü (4.2.10) eşitsizliğini sağlasın. Bu eşitsizlikte $u = v = T^n x$ alınırsa $k,\ n \geq 0$ için

$$\left\|2T^n x\right\|^p \leq a_k \left\|2T^{n+k} x\right\|^p + c\left[2a_k \left\|T^{n+k} x\right\|^p - 2\left\|T^n x\right\|^p \right]$$

$$\left\|T^n x\right\|^p \left(2^p + 2c\right) \leq \left(a_k 2^p + 2a_k c\right) \left\|T^{n+k} x\right\|^p$$

$$\left\|T^n x\right\|^p \leq \frac{a_k (2^p + 2c)}{(2^p + 2c)} \left\|T^{n+k} x\right\|^p = a_k \left\|T^{n+k} x\right\|^p$$

$$\overline{\lim} \left\|\mathrm{T}^n x\right\|^p + \overline{\lim} \left(-\left\|T^{n+k} x\right\|^p\right) \leq 0$$

$$\overline{\lim} \left\|\mathrm{T}^n x\right\|^p - \underline{\lim} \left(\left\|T^{n+k} x\right\|^p\right) \leq 0$$

olur. buradan,

$$\overline{\lim} \left\|\mathrm{T}^n x\right\|^p \leq \underline{\lim} \left\|T^{n+k} x\right\|^p \tag{4.2.11}$$

bulunur. O halde $\underline{\lim}_{n\to\infty} \left\|T^n x\right\| < \infty$ ve (4.2.11) eşitsizliğinden $\{ \left\|T^n x\right\| \}$ yakınsaktır.

Şimdi n>m≥ 0, $i \geq 0$ için (4.2.10) eşitsizliğinde $u = T^{m+i} x,\ \ v = T^m x$ olarak alınırsa, $M = \sup_{l\geq 0} \left\|T^l x\right\|$ olmak üzere;

$$\left\|T^{m+i} x + T^m x\right\|^p \leq a_{n-m} \left\|T^{n-m+m+i} x + T^{n-m+m} x\right\|^p$$

$$+ c\left[a_{n-m} \left\|T^{n-m+m+i} x\right\|^p - \left\|T^{m+i} x\right\|^p + a_{n-m} \left\|T^{n-m+m} x\right\|^p - \left\|T^{m+i} x\right\|^p \right]$$

$$\Rightarrow \left\|T^{m+i} x + T^m x\right\|^p \leq a_{n-m} \left\|T^{n+i} x + T^n x\right\|^p + c\left[a_{n-m} \left\|T^{n+i} x\right\|^p - \left\|T^{m+i} x\right\|^p + a_{n-m} \left\|T^n x\right\|^p - \left\|T^m x\right\|^p \right]$$

$$\leq a_{n-m}\left[\left\|T^{n+i}x+T^{n}x\right\|^{p}+2c\left(\left\|T^{n+i}x\right\|^{p}+\left\|T^{n}x\right\|^{p}\right)\right]$$
$$+c\left[-\left\|T^{m+i}x\right\|^{p}-\left\|T^{m}x\right\|^{p}\right]+\left\|T^{n+i}x+T^{n}x\right\|^{p}-\left\|T^{n+i}x+T^{n}x\right\|^{p}$$
$$+c\left(\left\|T^{n+i}x+T^{n}x\right\|^{p}\right)-c\left(\left\|T^{n+i}x+T^{n}x\right\|^{p}\right)$$

$$\leq a_{n-m}\left[\left(2M\right)^{p}+2cM^{p}\right]-c2M^{p}-\left(2M\right)^{p}$$
$$+c\left[\left\|T^{n+i}x\right\|^{p}-\left\|T^{m+i}x\right\|^{p}+\left\|T^{n}x\right\|^{p}-\left\|T^{m}x\right\|^{p}\right]+\left\|T^{n+i}x+T^{n}x\right\|^{p}$$

$$\leq\left\|T^{n+i}x+T^{n}x\right\|^{p}+\left|a_{n-m}-1\right|\left[\left(2M\right)^{p}+2cM^{p}\right]+c\left[\left\|T^{n+i}x\right\|^{p}-\left\|T^{m+i}x\right\|^{p}+\left\|T^{n}x\right\|^{p}-\left\|T^{m}x\right\|^{p}\right]$$

bulunur ve limit alınırsa $\left\{\ \left\|T^{n}x\right\|\ \right\}$ yakınsak olduğundan

$$c\left(\left\|T^{n+i}x\right\|^{p}-\left\|T^{m+i}x\right\|^{p}+\left\|T^{n}x\right\|^{p}-\left\|T^{m}x\right\|^{p}\right)\to 0$$

olur. Sonuç olarak;

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty}\overline{\lim}_{i\to\infty}\left[\left\|T^{m+i}x+T^{m}x\right\|^{p}-\left\|T^{n+i}x+T^{n}x\right\|^{p}\right]\leq 0$$

elde edilir. p=2 için

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty}\overline{\lim}_{i\to\infty}\left[\left\|T^{m+i}x+T^{m}x\right\|^{2}-\left\|T^{n+i}x+T^{n}x\right\|^{2}\right]\leq 0$$

bulunur. O halde $\{\ x_n\ \}=\{\ T^n x\ \}$ alınırsa, Önerme 4.2.2 (ii) sağlandığından $\{\ x_n\ \}=\{\ T^n x\ \}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen zayıf yakınsaktır.

4.3. Uygulamalar

Bu bölümde, 4.1 ve 4.2 bölümlerinde ispatlanan lineer olmayan dönüşümler için kuvvetli ve zayıf ergodik teoremlerin, $L^p(X)$ uzaylarına ve özel olarak $L^4(X)$ ve l_4 uzaylarına uygulaması yapılacaktır. Ayrıca kuvvetli ve zayıf ergodik teoremleri gerçekleyen lineer olmayan T dönüşümlerine örnekler verilecektir.

Önerme 4.3.1. $\{x_n\}$, $L^p(X)$ uzayı içinde sınırlı, reel değerli fonksiyonların bir dizisi ve

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty}\overline{\lim}_{i_1,i_2,\dots,i_{p-1}\geq 0}\begin{bmatrix}\int\limits_{\Omega} x_{n+i_1}(s)x_{n+i_2}(s)\dots x_{n+i_{p-1}}(s)x_n(s)d\mu \\ -\int\limits_{\Omega} x_{m+i_1}(s)x_{m+i_2}(s)\dots x_{m+i_{p-1}}(s)x_m(s)d\mu\end{bmatrix}\leq 0 \quad (4.3.1)$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman W, $\{x_n\}$ dizisinin zayıf yakınsak alt dizilerinin kümesini ve $clco\ W$, W ‘ nin kapalı konveks hull’unu göstermek üzere;

(i): p çift ise $\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=0}^{n-1}x_{i+k}$, $k=1,2,\dots$ ortalaması, $clco\ W$ ’ nin bir elemanına hemen hemen zayıf yakınsaktır.

(ii): p tek ve her bir x_n negatif değilse $\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=0}^{n-1}x_{i+k}$, $k=1,2,\dots$ ortalaması, $clco\ W$ ‘ nin bir elemanına hemen hemen zayıf yakınsaktır.

İspat: $\{x_n\}$, $L^p(X)$ uzayında reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. O zaman $L^p(X)$ uzayında iç çarpım,

$$(x_n,\, x_m)=\int x_n(s)x_m(s)\ d(s)$$

şeklinde tanımlanır. O halde,

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \overline{\lim}_{i_1,\,i_2,\,\dots,\,i_{p-1}\geq 0}\begin{bmatrix}\int\limits_{\Omega} x_{n+i_1}(s)x_{n+i_2}(s)\dots x_{n+i_{p-1}}(s)x_n(s)d\mu \\ -\int\limits_{\Omega} x_{m+i_1}(s)x_{m+i_2}(s)\dots x_{m+i_{p-1}}(s)x_m(s)d\mu\end{bmatrix}$$

$$=\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \sup_{i_1,\,i_2,\,\dots,\,i_{p-1}\geq 0}\begin{bmatrix}\left(x_{n+i_1},\, x_{n+i_2},\, \dots,\, x_{n+i_{p-1}},\, x_n\right) \\ -\left(x_{m+i_1},\, x_{m+i_2},\, \dots,\, x_{m+i_{p-1}},\, x_m\right)\end{bmatrix}\leq 0$$

elde edilir. $\{ x_n \}$, $L^p(X)$ uzayındaki reel değerli fonksiyonlar dizisi olduğundan sınırlıdır. O halde Yardımcı önerme 4.2.3. gereği $\{ x_n \}$ dizisi $clco\ W$ ' nin ' c ' gibi bir elemanına (minimum normuna göre) hemen hemen zayıf yakınsaktır. Burada p çift ise yukarıdaki son limitte $p-1$ sayıda yani tek sayıda terim olur ve bu terimler x_m terimiyle çarpılırsa limitte toplam p tane terim olur. p çift olduğundan x_m terimleri negatif değerli olsa bile sonucu değiştirmez. Ancak p tek alınırsa $p-1$ çift olacaktır ve $p-1$ tane x_{m+i_k} terimi x_m terimi ile çarpılırsa toplam p terim birbiriyle çarpılmış olacağından sonuç negatif olacaktır. Bu nedenle sonucun negatif olmaması için p tek iken x_n dizisinin negatif olmaması gerekir.

Önerme 4.3.2. $\{ x_n \}$, $L^4(X)$ uzayında bir dizi olsun. O zaman

A. $\overline{\lim}_{m\to\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty}\sup_{i\geq 0}\|x_{n+i}+x_n\|_4^{\ 4}-\|x_{m+i}+x_m\|_4^{\ 4}\leq 0$

B. $\overline{\lim}_{m\to\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty}\sup_{i\geq 0}\|x_{n+i}-x_n\|_4^{\ 4}-\|x_{m+i}-x_m\|_4^{\ 4}\leq 0$

şartları sağlanıyorsa $\{ x_n^{\ 2} \}$, $L^2(X)$ uzayında kendi asimtotik merkezine hemen hemen kuvvetli yakınsaktır (Miyadera, 1997).

Şimdi $L^p(X)$ uzayı için geçerli olan hemen hemen yakınsaklık durumlarının l_4 dizi uzayı için de doğru olduğu gösterilecektir.

Teorem 4.3.3. $\{ x_n \}$, l_4 uzayında reel değerli sınırlı bir dizi ve

(i) $\overline{\lim}_{m\to\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty}\sup_{i\geq 0}\|x_{m+i}+x_m\|_4^{\ 4}-\|x_{n+i}+x_n\|_4^{\ 4}\leq 0$

(ii) $\overline{\lim}_{m\to\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty}\sup_{i\geq 0}\|x_{m+i}-x_m\|_4^{\ 4}-\|x_{n+i}-x_n\|_4^{\ 4}\leq 0$

eşitsizlikleri sağlansın. O zaman $\{ x_n^{\ 2} \}$, l_2 uzayında kendi asimtotik merkezine hemen hemen zayıf yakınsaktır. .

Önerme 4.3.4. X, Y, X', $Y' \in l_4$ ve $\delta \to 0$ olsun. Eğer

i) $\|X\|_4^{\ 4} \leq \|X'\|_4^{\ 4} + \delta/2$

ii) $\|Y\|_4^{\ 4} \leq \|Y'\|_4^{\ 4} + \delta/2$

iii) $\|X+Y\|_4^{\ 4} \leq \|X'+Y'\|_4^{\ 4} + \delta$

iv) $\|X-Y\|_4^4 \le \|X'-Y'\|_4^4 + \delta$

eşitsizlikleri gerçekleniyorsa,

$$\left\|X^2+Y^2\right\|_2^2 \le \left\|X'^2+Y'^2\right\|_2^2+\delta$$

olur.

İspat: $(x+y)^4+(x-y)^4 = 2x^4+2y^4+12x^2y^2$ eşitliği her zaman doğrudur. $Z \in l_4$ için $E(Z)=\sum_i Z_i$ ve $\|Z\|_4 = \left(\sum Z_i^4\right)^{1/4} = \left(E\left(Z^4\right)\right)^{1/4}$ şeklinde tanımlansın. O zaman

$$E\left((X+Y)^4\right)+E\left((X-Y)^4\right)=\sum_i (X_i+Y_i)^4+\sum_i (X_i-Y_i)^4$$
$$=2\sum_i X_i^4+2\sum_i Y_i^4+12\sum_i X_i^2Y_i^2 = 2E\left(X^4\right)+2E\left(Y^4\right)+12E\left(X^2Y^2\right)$$

olur. Diğer taraftan (iii) ve (iv) den

$$E\left((X+Y)^4\right)+E\left((X-Y)^4\right)\le E\left((X'+Y')^4\right)+\delta+E\left((X'-Y')^4\right)+\delta$$
$$=2E\left((X')^4\right)+2E\left((Y')^4\right)+12E\left(X'^2Y'^2\right)+2\delta$$

bulunur. O halde

$$E\left((X+Y)^4\right)+E\left((X-Y)^4\right)=2E\left(X^4\right)+2E\left(Y^4\right)+12E\left(X^2Y^2\right)$$
$$\le 2E\left(X'^4\right)+2E\left(Y'^4\right)+12E\left(X'^2Y'^2\right)+2\delta$$

ve

$$E\left((X+Y)^4\right)+E\left((X-Y)^4\right)=2E\left(X^4\right)+2E\left(Y^4\right)+12E\left(X^2Y^2\right)$$
$$\le 2E\left(X'^4\right)+2E\left(Y'^4\right)+12E\left(X'^2Y'^2\right)+2\delta$$

dir. Ayrıca,

$$\left\|X^2+Y^2\right\|_2^2=\sum_i\left(X_i^2+Y_i^2\right)^2=\sum_i X_i^4+\sum_i 2X_i^2Y_i^2+\sum_i Y_i^4$$
$$=E\left(X^4\right)+E\left(Y^4\right)+2E\left(X^2Y^2\right)$$
$$=\frac{2}{3}\left(E\left(X^4\right)+E\left(Y^4\right)\right)+\frac{1}{6}\left(2E\left(X^4\right)+2E\left(Y^4\right)+12E\left(X^2Y^2\right)\right)$$

$$\leq \frac{2}{3}\left(E\left(X^{'4}\right) + \frac{\delta}{2} + E\left(Y^{'4}\right) + \frac{\delta}{2} \right) + \frac{1}{6}\left(2E\left(X^{'4}\right) + 2E\left(Y^{'4}\right) + 12E\left(X^{'2}Y^{'2}\right) + 2\delta \right)$$

$$\Rightarrow \left\| X^2 + Y^2 \right\|_2^2 \leq E\left(X^{'4}\right) + E\left(Y^{'4}\right) + 2E\left(X^{'2}Y^{'2}\right) + \frac{\delta}{3} + \frac{2\delta}{3}$$

$$\Rightarrow \left\| X^2 + Y^2 \right\|_2^2 \leq \left\| X^{'2} + Y^{'2} \right\|_2^2 + \delta$$

bulunur.

Teorem 4.3.3' nin ispatı: $\{ x_n \}$ sınırlı ve (i) sağlandığından $\{ \| x_n \| \}$ yakınsaktır. Çünkü

$$\overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \sup_{i\geq 0} \left\| x_{m+i} + x_m \right\|_4^4 - \left\| x_{n+i} + x_n \right\|_4^4 \leq 0$$

$$\overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \sup_{i\geq 0} \left\| x_{m+i} + x_m \right\|_4^4 \leq \overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \sup_{i\geq 0} \left\| x_{n+i} + x_n \right\|_4^4$$

$$\overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \sup_{i\geq 0} \left\| x_{m+i} + x_m \right\|_4 \leq \overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \sup_{i\geq 0} \left\| x_{n+i} + x_n \right\|_4$$

$$\overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \sup_{i\geq 0} \left\| x_{m+i} + x_m \right\|_4 + \overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \sup_{i\geq 0} - \left\| x_{n+i} + x_n \right\|_4 \leq 0$$

$$\overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \sup_{i\geq 0} \left\| x_{m+i} + x_m \right\|_4 - \underline{\lim}_{m\to\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} \sup_{i\geq 0} \left\| x_{n+i} + x_n \right\|_4 \leq 0$$

$$\overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \sup_{i\geq 0} \left\| x_{m+i} + x_m \right\|_4 \leq \underline{\lim}_{m\to\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} \sup_{i\geq 0} \left\| x_{n+i} + x_n \right\|_4$$

olur. Dolayısıyla $m = n$ için $\{ \| x_{m+i} + x_m \| \}$ yakınsaktır. $i = 0$ alınırsa $\{ \| x_n \| \}$ dizisinin yakınsak olduğu görülür. Önerme 4.3.3. de $X = x_{m+i}$, $Y = x_m$, $X^{'} = x_{n+i}$, $Y^{'} = x_n$ alınırsa, (iii) ve (iv) sağlanır. Ayrıca $\{ \| x_n \| \}$ dizisi yakınsak olduğundan (i) ve (ii) de sağlanmış olur. O halde Önerme 4.3.4. gereği

$$\overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \sup_{i\geq 0} \left\| x^2{}_{m+i} + x^2{}_m \right\|_2^2 - \left\| x^2{}_{n+i} + x^2{}_n \right\|_2^2 \leq 0 \qquad (4.3.2)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda $\left\{ \left\| x_n^2 \right\|_2^2 \right\}$ yakınsak ve (4.3.2) eşitsizliği gerçeklendiğinden l_2 Hilbert uzayında Önerme 4.2.2 nin hipotezleri sağlanmış olur. Sonuç olarak, $\{ x_n^2 \}$ dizisi l_2 uzayında kendi asimtotik merkezine hemen hemen zayıf yakınsaktır.

Örnek 4.3.5. $T(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{\max\left(x_1^2, x_2^2\right)}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)} (x_2, x_1) & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus (0,0) \\ (0, 0) & (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$

ise $\{ T^n x \}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen zayıf yakınsaktır.

Çözüm: $\{ T^n x \}$ dizisinin hemen hemen zayıf yakınsak olduğunu göstermek için

$$\left\|T^k u - T^k v\right\| \le a_k \left\|u - v\right\|^p + c\left[a_k \left\|u\right\|^p - \left\|T^k u\right\|^p + a_k \left\|u\right\|^p - \left\|T^k v\right\|^p \right] + \delta_k(B) \quad (4.3.3)$$

eşitsizliğinin gerçeklendiğini ve $F(T)$, T' nin sabit noktalar kümesini göstermek üzere $F(T)$ kümesinin boş olmadığı ya da $c > 0$ olduğu gösterilmelidir.

$T(0,\ 0) = (0,\ 0)$ olduğundan $F(T)$ kümesi boş değildir. $k = 1,\ c = 1,\ p = 2$, $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$ ve $x = (x_1,\ x_2),\ y = (y_1,\ y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\left\|T(x_1,\ x_2) - T(y_1,\ y_2)\right\|_2^2 \le \left\| (x_1,\ x_2) - (y_1,\ y_2) \right\|^2$$
$$+\left[\left\|(x_1,\ x_2)\right\|^2 - \left\|T(x_1,\ x_2)\right\|^2 + \left\|(y_1,\ y_2)\right\|^2 - \left\|T(y_1,\ y_2)\right\|^2 \right]$$

eşitsizliğinin varlığı gösterilmelidir.

$$\left\|Tu + Tv\right\|_2^2 \le \left\|u + v\right\|_2^2 \quad (4.3.4)$$

eşitsizliği doğru olduğundan (Wittmann, 1990) $v = (0,\ 0)$ için

$$\left\| Tu \right\|_2^2 \le \left\| u \right\|_2^2 \Rightarrow \left\| u \right\|_2^2 - \left\| Tu \right\|_2^2 \ge 0 \quad (4.3.5)$$

olur. (4.3.5) eşitsizliğinin sağ tarafına pozitif bir sayı olan $c\left(\left\|u\right\|_2^2 - \left\|Tu\right\|_2^2 \right)$ eklenirse

$$\left\| Tu \right\|_2^2 \le \left\| u \right\|_2^2 + c\left[\left\| u \right\|_2^2 - \left\| Tu \right\|_2^2 \right]$$

bulunur. O halde (4.3.3) eşitsizliği $v = (0,\ 0)$ için sağlanmış olur. Diğer taraftan,

$$T\left(-(x_1,x_2)\right) = T(-x_1,-x_2) = \begin{cases} \dfrac{\max\left((-x_1)^2,(-x_2)^2\right)}{(-x_1)^2 + (-x_2)^2}(-x_2,-x_1) & (\mathrm{x}_1,x_2) \in \mathbb{R}_+^{\,2} /\ (0,0) \\ (0,0) & (\mathrm{x}_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$$

$$= -\begin{cases} \dfrac{\max\left(x_1^2,x_2^2\right)}{x_1^2 + x_2^2}(x_2,x_1) & (\mathrm{x}_1,x_2) \in \mathbb{R}_+^{\,2} /\ (0,0) \\ (0,0) & (\mathrm{x}_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$$

$$= -T(x_1,x_2)$$

bulunur. O halde T fonksiyonu tek bir fonksiyondur. (4.3.4) eşitsizliğnde $k = 1,\ c = 1,\ p = 2$ olmak üzere v yerine $-v$ yazılırsa,

$$\left\|Tu+T\left(-v\right)\right\|^2=\left\|Tu-Tv\right\|^2\leq\left\|u-v\right\|^2$$
$$\left\|Tu-Tv\right\|^2\leq\left\|u-v\right\|^2+c\left[\left\|u\right\|^2-\left\|Tu\right\|^2+\left\|v\right\|^2-\left\|Tv\right\|^2\right]$$

elde edilir. O halde $\left\{ T^n x \right\}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen zayıf yakınsaktır.

Örnek 4.3.6. ϑ bir Cantor ternary fonksiyonu olmak üzere

$f:\ [0,\ 1]\rightarrow[0,\ 1]$, $g:\ [-1,\ 1]\rightarrow[-1,\ 1]$

$$f(s)=\begin{cases} s & 0\leq s\leq\dfrac{1}{2} \\ \vartheta(s) & \dfrac{1}{2}<s\leq 1 \end{cases} \qquad g(s)=\begin{cases} -f(-s) & -1\leq s\leq 0 \\ f(s) & 0<s\leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman

$C=[0,\ 1]\times[0,\ 1]\subset\mathbb{R}^2=(-\infty,\ \infty)\times(-\infty,\ \infty)$ kapalı konveks bir küme olmak üzere

$$T:\ C\rightarrow C,\ (u,\ v)\in C$$

için

$$T(u,\ v)=(u,f(v))$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümü süreklidir. Ayrıca $F\left(T\right)\neq\emptyset$ ve (4.2.1). eşitsizliğini sağlar. Ancak T dönüşümü asimtotik nonexpansive değildir. Ayrıca, $[-1,\ 1]\times[-1,\ 1]\subset\mathbb{R}^2=(-\infty,\ \infty)\times(-\infty,\ \infty)$ ve $T:\ C\rightarrow C$

$$T(u,\ v)=(u,g(v))$$

şeklinde tanımlansın. O zaman; T süreklidir ve asimtotik nonexpansive değildir. Ayrıca T tek fonksiyondur ve T dönüşümü (4.1.1) eşitsizliğini sağlar.

Çözüm: $u,\ v\in C$ için $\|\ (u,\ v)\ \|^2=u^2+v^2$ şeklinde tanımlansın. Öncelikle T dönüşümünün sürekli olduğu gösterilmelidir. $u,\ v\in C,\ \forall\ \varepsilon>0$ için

$$\|\ u-v\ \|^2=\|\ (u_1,\ v_1)-(u_2,\ v_2)\ \|^2<\delta$$

olduğunda

$$\|\ (T(u)-T(v)\ \|^2=\|\ T(u_1,\ v_1)-T(u_2,\ v_2)\ \|^2<\varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta>0$ sayısının var olduğu gösterilmelidir.

$0 \le v_1 \le \frac{1}{2}$ ve $0 \le v_2 \le \frac{1}{2}$ için

$$\| T(u_1, v_1) - T(u_2, v_2) \|^2 = \| (u_1, f(v_1)) - (u_2, f(v_2)) \|^2 = \| (u_1, v_1) - (u_2, v_2) \|^2 < \delta$$
$$\Rightarrow \varepsilon = \delta > 0$$

bulunduğundan bu aralıkta T sürekli olur. $\frac{1}{2} < v_1 \le 1$ ve $0 \le v_2 \le \frac{1}{2}$ olsun. O zaman bu aralıkta her zaman $\vartheta(v_1) \le v_1$ doğrudur ve

$$\| T(u_1, v_1) - T(u_2, v_2) \|^2 = \| (u_1, \vartheta(v_1)) - (u_2, v_2) \|^2 = (u_1 - u_2)^2 + (\vartheta(v_1) - v_2)^2$$
$$\le (u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 = \| (u_1, v_1) - (u_2, v_2) \|^2 < \delta$$
$$\Rightarrow \varepsilon = \delta > 0$$

bulunur. Dolayısıyla bu aralıkta T dönüşümü süreklidir. Benzer şekilde, $0 \le v_1 \le \frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2} < v_2 \le 1$ aralığında $\vartheta(v_2) \le v_2$ olur ve böylece T dönüşümünün sürekli olduğu görülür. Son olarak $\frac{1}{2} < v_1 \le 1$ ve $\frac{1}{2} < v_2 \le 1$ alınırsa;

$$\| T(u_1, v_1) - T(u_2, v_2) \|^2 = \| (u_1, \vartheta(v_1)) - (u_2, \vartheta(v_2)) \|^2 = (u_1 - u_2)^2 + (\vartheta(v_1) - \vartheta(v_2))^2$$
$$= (u_1 - u_2)^2 + (\vartheta(v_1))^2 - 2\vartheta(v_1)\vartheta(v_2) + (\vartheta(v_2))^2$$
$$\le (u_1 - u_2)^2 + 2((\vartheta(v_1))^2 - 2\vartheta(v_1)\vartheta(v_2) + 2(\vartheta(v_2))^2$$
$$\le (u_1 - u_2)^2 + 2\left((\vartheta(v_1))^2 - 2\vartheta(v_1)\vartheta(v_2) + (\vartheta(v_2))^2\right) \le (u_1 - u_2)^2 + 2(v_1^2 - v_1 v_2 + v_2^2)$$
$$= (u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + v_1^2 + v_2^2 \le \| (u_1, v_1) - (u_2, v_2) \|^2 + v_1^2 + v_2^2 < \delta + K < \varepsilon$$

olur. O halde T dönüşümü süreklidir. Ancak, T dönüşümü asimtotik nonexpansive değildir. Bunun için $u, v \in C$, $k \ge 0$ için $\lim_{k \to \infty} a_k = 1$ olmak üzere,

$$\| T^k u - T^k v \| \le a_k \| u - v \|$$

eşitsizliğinin sağlanmadığı gösterilmelidir. $k = 1$ için bu eşitsizliğin sağlanmadığını göstermek yeterlidir. Yani,

$$\|Tu - Tv\|^2 \le a_1^2 \|u - v\|^2$$

sağlanmadığı gösterilmelidir. $v_1 = \frac{4}{6}$, $v_2 = \frac{16}{18}$ olsun. $f(v_1) = \frac{1}{2}$, $f(v_2) = \frac{3}{4}$ olur. O zaman

$$\| T(u_1, v_1) - T(u_2, v_2) \|^2 = (u_1 - u_2)^2 + \left(f(v_1) - f(v_2)\right)^2 = (u_1 - u_2)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)^2$$

ve

$$a_1^2 \| u - v \|^2 = a_1^2 \left(u_1 - u_2\right)^2 + \left(v_1 - v_2\right)^2 = a_1^2 \left(u_1 - u_2\right)^2 + \left(\frac{4}{6} - \frac{16}{18}\right)^2$$

$$= a_1^2 \left(u_1 - u_2\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2$$

bulunur. $a_1 = 1$ için $\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \le \left(\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{81}$ eşitsizliği doğru olmadığından T dönüşümü asimtotik nonexpansive değildir.

Şimdi, T dönüşümünün (4.2.1) eşitsizliğini sağladığı gösterilsin. ϑ Cantor fonksiyonu $\frac{1}{2} < s \le 1$ aralığında,

$$\vartheta(s) = \frac{2k-1}{2^n}, \qquad s \in \left[a_k^{(n)},\ b_k^{(n)}\right] \ ; \ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2^{n\text{-}1}$$

$$\vartheta(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \frac{4}{6} \le s \le \frac{5}{6} \\ \frac{1}{4}, & \frac{10}{18} \le s \le \frac{11}{18} \\ \frac{3}{4}, & \frac{16}{18} \le s \le \frac{17}{18} \\ \frac{1}{8}, & \frac{28}{54} \le s \le \frac{29}{54} \\ \frac{3}{8}, & \frac{34}{54} \le s \le \frac{35}{54} \\ \frac{5}{8}, & \frac{46}{54} \le s \le \frac{47}{54} \\ \frac{7}{8}, & \frac{52}{54} \le s \le \frac{53}{54} \\ . \\ . \\ . \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. O zaman tanımdan açıkça görüldüğü gibi $f(v_1) = v_1$ veya $f(v_1) = \vartheta(v_1)$ iken $f(v_1) \le v_1$ her zaman doğrudur. Ayrıca,

$$f^2(v_1) - f(v_1)f(v_2) + f^2(v_2) \le v_1^2 - v_1 v_2 + v_2^2\ v_1 \qquad (4.3.6)$$

eşitsizliği de ϑ' nin tanımı gereği her zaman sağlanır. Örneğin, $v_1,\ v_2 \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right]$

olsun. O zaman;

$$v_1 = \frac{4}{6},\ v_2 = \frac{16}{18},\ f(v_1) = \frac{1}{2},\ f(v_2) = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2}.\frac{3}{4} + \frac{9}{16} \ \leq\ \frac{16}{36} - \ \frac{4}{6}.\frac{16}{18} + \left(\frac{16}{18}\right)^2$$

eşitsizliği bulunur. Benzer şekilde, $v_1 \in \left(0,\ \frac{1}{2}\right],\ v_2 \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right]$ olmak üzere $v_1 = \frac{1}{4},\ v_2 = \frac{4}{6}$ olarak alınırsa yukarıdaki (4.3.6) eşitsizliğinin doğru olduğu görülür.

Bu verilerden yararlanarak;

$$\begin{aligned}
&\| T(u_1,\ v_1) - T(u_2,\ v_2) \|^2 = (u_1 - u_2)^2 + \left(f(v_1) - f(v_2)\right)^2 \\
&= (u_1 - u_2)^2 + f^2(v_1) - 2f(v_1)f(v_2) + f^2(v_2) \\
&= (u_1 - u_2)^2 + f^2(v_1) - 2f(v_1)f(v_2) + f^2(v_2) + f^2(v_1) - f^2(v_1) + f^2(v_2) - f^2(v_2) \\
&= (u_1 - u_2)^2 + 2f^2(v_1) - 2f(v_1)f(v_2) + 2f^2(v_2) - f^2(v_1) - f^2(v_2) \\
&\leq (u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + v_1^{\ 2} + v_2^{\ 2} - f^2(v_1) - f^2(v_2) \\
&= (u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + v_1^{\ 2} + u^2{}_1 - u^2{}_1 + v_2^{\ 2} + u^2{}_2 - u^2{}_2 - f^2(v_1) - f^2(v_2) \\
&= (u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + v_1^{\ 2} + u^2{}_1 - u^2{}_1 - f^2(v_1) + v_2^{\ 2} + u^2{}_2 - u^2{}_2 - f^2(v_2) \\
&= \| (u_1,\ v_1) - (u_2,\ v_2) \|^2 + \left[\ \| (u_1,\ v_1) \|^2 - \| T(u_1,\ v_1) \|^2 + \| (u_2,\ v_2) \|^2 - \| T(u_2,\ v_2) \|^2 \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (4.2.1) eşitsizliğinin $a_k = 1$, $p = 2$, $c = 1$ için sağlandığı bulunur..

Ayrıca $v \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ için

$$T(u,\ v) = (u,\ f(v)) = (u,\ v)$$

olduğundan T dönüşümü sabittir ve $(u,\ v) \in F(T)$ dolayısıyla $F(T) \neq \varnothing$ dır.

$$\text{(ii)}\ T(u,\ v) = \left(u,\ g(v)\right) = \begin{cases} (u,\ -f(-v)) & -1 \leq v \leq 0 \\ (u, f(v) & 0 < v \leq 1 \end{cases}$$

$0 < v \leq 1 \Rightarrow\ T(u,\ v) = \left(u, f(v)\right)$ olduğundan T dönüşümü bu aralık için (i) gereği süreklidir.

$$-1 \leq v \leq 0\ \Rightarrow T(u,\ v) = (u,\ -f(-v))$$

ve

$$f(-v) = \begin{cases} -v & -\frac{1}{2} \leq v \leq 0 \\ \vartheta(-v) & -1 \leq v < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

olduğundan $-1 \le v \le 0$ aralığında da T dönüşümü (i) gereği süreklidir ve yine (i) gereği T dönüşümü asimtotik nonexpansive değildir ve (4.2.1) eşitsizliğini sağlar. Şimdi T dönüşümünün tek fonksiyon olduğu gösterimelidir. Bunun için $T\left(-(u,\ v)\right) = -T(u,\ v)$ olduğu gösterilmelidir.

$$T\left(-(u,\ v)\right) = T\left((-u, -v)\right) = (-u,\ g(-v))$$

$$= \begin{cases} (-u,\ -f(-(-v)) & -1 \le -v \le 0 \\ (-u, f(-v)) & 0 < -v \le 1 \end{cases} = -\begin{cases} (u, f(v)) & -1 \le -v \le 0 \\ (u,\ -f(-v)) & 0 < -v \le 1 \end{cases}$$

$$= -\begin{cases} (u,\ -f(-v)) & -1 \le v \le 0 \\ (u, f(v)) & 0 < v \le 1 \end{cases}$$

$$= -T(u,\ v)$$

bulunur. T tek fonksiyon olduğundan,

$$\| T^k u + T^k v \| = \| T^k u - T^k(-v) \| \le a_k \| u - (-v) \| = a_k \| u + v \|$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. T dönüşümü tek ve (4.2.1) eşitsizliğini sağladığından, $-v = \left(-u_2,\ v_2\right),\ u = \left(u_1,\ v_1\right) \in C$ için

$$\| T(u_1,\ v_1) - T(-u_2,\ v_2) \|^2 = \| T(u_1,\ v_1) + T(u_2,\ v_2) \|^2$$

$$\le \|(u_1,\ v_1) - (-u_2,\ v_2)\|^2 + \left[\| (u_1,\ v_1) \|^2 - \| T(u_1,\ v_1) \|^2 + \| (-u_2,\ v_2) \|^2 - \| T(-u_2,\ v_2) \|^2 \right]$$

o zaman,

$$\| T(u_1, v_1) + T(-u_2, v_2) \|^2 \le \| (u_1,\ v_1) + (u_2,\ v_2) \|^2$$

$$+ \left[\| (u_1,\ v_1) \|^2 - \| T(u_1,\ v_1) \|^2 + \| (u_2,\ v_2) \|^2 - \| T(u_2,\ v_2) \|^2 \right]$$

elde edilir. T dönüşümü (4.1.1) eşitsizliğini sağlar bu nedenle T dönüşümü lineer olmayan kuvvetli ortalama ergodik teoremi gerçekler.

Örnek 4.3.7. $C = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$ olsun. $f : [0,1] \to [0,1]$

$$f(v) = \begin{cases} v, & 0 \le v \le \dfrac{1}{2} \\ \vartheta(v), & \dfrac{1}{2} < v \le 1 \end{cases}$$

$T:\ C \to C$, $u_1,\ u_1',\ v_1 \in C$, $T\left(u_1,\ u_1',\ v_1\right) = \left(u_1,\ u_1', f\left(v_1\right)\right)$, $\| (u,\ v) \|^2 = u^2 + v^2$

olsun. O zaman $\left\{ T^n x \right\}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen zayıf yakınsaktır.

Çözüm:

$$\| T(u_1, u_1', v_1) - T(u_2, u_2', v_2)\|^2 = \|(u_1, u_1', f(v_1)) - (u_2, u_2', f(v_2))\|^2$$
$$= (u_1 - u_2)^2 + (u_1' - u_2')^2 + (f(v_1) - f(v_2))^2$$
$$= (u_1 - u_2)^2 + (u_1' - u_2')^2 + f^2(v_1) - 2f(v_1)f(v_2) + f^2(v_2)$$
$$= (u_1 - u_2)^2 + (u_1' - u_2')^2$$
$$+ f^2(v_1) + f^2(v_1) - f^2(v_1) - 2f(v_1)f(v_2) + f^2(v_2) + f^2(v_2) - f^2(v_2)$$
$$\leq (u_1 - u_2)^2 + (u_1' - u_2')^2 + 2v_1^2 - 2v_1v_2 + 2v_2^2 - f^2(v_1) - f^2(v_2)$$
$$= (u_1 - u_2)^2 + (u_1' - u_2')^2 + (v_1 - v_2)^2$$
$$+ v_1^2 - f^2(v_1) + v_2^2 - f^2(v_2) + u_1'^2 - u_1'^2 + u_2'^2 - u_2'^2 + u_1^2 - u_1^2 + u_2^2 - u_2^2$$
$$= \|(u_1, u_1', v_1) - (u_2, u_2', v_2)\|^2 + \|(u_1, u_1', v_1)\|^2 - \|T(u_1, u_1', v_1)\|^2$$
$$+ \|(u_2, u_2', v_2)\|^2 - \|T(u_2, u_2', v_2)\|^2$$

bulunur. Ayrıca $T(u, v) = (u, v)$, $\left(0 \leq v \leq \frac{1}{2}\right)$ olduğundan T dönüşümünün sabit noktalar kümesi olan $F(T)$ boş değildir. O halde $\{ T^n x \}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen zayıf yakınsaktır.

Örnek 4.3.8. B, ℓ_∞ uzayı içinde birim yuvar ve $\{k_n\}$, $k_1 > 1$ ve $k_n \downarrow 1$ olmak üzere gerçel sayıların herhangi bir dizisini göstersin. $T : B \to B$, $\| T_n \| = k_n$ ve $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ Lipschitz sabiti k_1 ve $f(0) = 0$ koşulunu sağlayan tek bir fonksiyon olsun ve

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left(0, f(x_1), \frac{k_2}{k_1}x_2, \frac{k_3}{k_2}x_3, \ldots\right)$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $\| T_n \| = \sup_{i \geq 0} \left\{k_n, \frac{k_{n+1}}{k_i}\right\} = k_n$ olmak üzere $\{T^n x\}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen zayıf yakınsaktır.

Çözüm: $\left\{ T^n x \right\}$ dizisinin kendi asimtotik merkezine hemen hemen zayıf yakınsak olduğunu göstermek için (4.2.1) eşitsizliğinin $p=2$ ve $c=1$ için sağlandığını göstermek yeterlidir.

$$T\left(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\right) = \left(0,\, f\left(x_1\right),\; \frac{k_2}{k_1}x_2,\; \frac{k_3}{k_2}x_3,\; \ldots\right)$$

$$T^n\left(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\right) = \left(0,\; 0,\ldots\, 0,\; \frac{k_n}{k_1} f\left(x_1\right),\; \frac{k_{n+1}}{k_1}x_2,\; \frac{k_{n+3}}{k_2}x_3,\; \ldots\right)$$

dir. T dönüşümünün asimtotik nonexpansive olduğu Örnek 1.7.12' de gösterilmiştir. O halde $x,\, y \in B$ için

$$\| T^n x - T^n y \| \le k_n \| x - y \| \tag{4.3.7}$$

ve

$$\| T^n x - T^n y \|^2 \le k_n^{\,2} \| x - y \|^2$$

eşitsizlikleri mevcuttur. Diğer taraftan;

$$\| x \|^2 + \| y \|^2 - \| T^n x \|^2 - \| T^n y \|^2 \ge 0$$

olduğu gösterilirse, (4.3.7) eşitsizliğinin sağ tarafına pozitif olan son eşitsizliğin eklenmesi (4.3.7) eşitsizliğini bozmaz. Paralelkenar eşitliğinden;

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2\right)$$

$$\|T^n x\|^2 + \|T^n y\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|T^n x - T^n y\|^2 + \|T^n x + T^n y\|^2\right)$$

dir. O halde,

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 - \left(\|T^n x\|^2 + \|T^n y\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2\right) - \frac{1}{2}\left(\|T^n x - T^n y\|^2 + \|T^n x + T^n y\|^2\right) \ge 0$$

olduğu yani,

$$\frac{1}{2}\left(\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2\right) \ge \frac{1}{2}\left(\|T^n x - T^n y\|^2 + \|T^n x + T^n y\|^2\right)$$

$$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 \ge \|T^n x - T^n y\|^2 + \|T^n x + T^n y\|^2$$

olduğu gösterilmelidir. (4.3.7) eşitsizliğinden,

$$\|T^n x - T^n y\|^2 \le \|x-y\|^2$$

olduğu bilinmektedir. O zaman;

$$\left\| T^n x + T^n y \right\|^2 \le \left\| x + y \right\|^2$$

olduğu gösterilirse çözüm tamamlanır.

$$\left\| T^n x + T^n y \right\|^2 = \left\| \ T^n \left(x_1, x_2, ... \right) + T^n \left(y_1, y_2, ... \right) \ \right\|^2$$

$$= \left\| \ \left(0, 0, ..., 0, \frac{k_n}{k_1} f\left(x_1\right), \frac{k_{n+1}}{k_1} x_2, ... \right) + \left(0, 0, ..., 0, \frac{k_n}{k_1} f\left(y_1\right), \frac{k_{n+1}}{k_1} y_2, ... \right) \ \right\|^2$$

$$= \left\| \ \left(0, 0, ..., 0, \frac{k_n}{k_1} \left(f\left(x_1\right) + f\left(y_1\right) \right), \frac{k_{n+1}}{k_1} \left(x_2 + y_2 \right), ... \right) \ \right\|^2$$

$$\le k_n^{\ 2} \left(\ \left\| f\left(x_1\right) + f\left(y_1\right) \right\|^2 + \left\| x_2 + y_2 \right\|^2 + ... \right)$$

olur. Ayrıca f Lipschitz ve tek fonksiyon olduğundan $x_1, \ -y_1 \in \left[-1, \ 1\right]$ için

$$\left\| f\left(x_1\right) - f\left(-y_1\right) \right\| \le k_1 \left\| x_1 - \left(-y_1\right) \right\|$$

$$\left\| f\left(x_1\right) - \left(-f\left(y_1\right) \right) \right\|^2 \le k_1^{\ 2} \left\| x_1 + y_1 \right\|^2$$

$$\left\| f\left(x_1\right) + f\left(y_1\right) \right\|^2 \le k_1^{\ 2} \left\| x_1 + y_1 \right\|^2$$

dir. Sonuç olarak $\left\| \ T^n x + T^n y \ \right\|^2 \le \left\| \ x + y \ \right\|^2$ eşitsizliği gösterildiğinden (4.2.1) eşitsizliği sağlanır. O halde $\left\{ \ T^n x \ \right\}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen zayıf yakınsaktır. Ayrıca T dönüşümünün asimtotik merkezi $\left(0, \ 0, \ . . . , f\left(x_1\right), \ x_2, \ . . . \right)$ dir.

4.4. I-Nonexpansive Dönüşümler için Ortalama Ergodik Teorem

Bu bölümde 4.1. ve 4.2. bölümlerinde incelenen lineer olmayan dönüşümler için zayıf ve kuvvetli ergodik teoremlerin, I - nonexpansive dönüşümlere genişletilmesi verilerek I - nonexpansive dönüşümler için zayıf ergodik teorem ispatlanacaktır.

Teorem 4.4.1. $\mathscr{H}$, $\| \,.\, \|$ normu ve $(\,.\,,\,.\,)$ iç çarpımı ile reel bir Hilbert uzayı olsun. C, $\mathscr{H}$ Hilbert uzayının' nin herhengi bir alt kümesi ve B, C kümesinin sınırlı bir alt kümesi olarak verilsin. $T: C \to C$ lineer olmayan bir dönüşüm, $I: C \to C$ lineer olmayan sınırlı bir dönüşüm ve T, I değişmeli olsun. Ayrıca;

(i) $u, v \in B$ ve a_k, c, p negatif olmayan sabitleri için $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 1$ olmak üzere

$$\left\|T^k u - T^k v\right\|^p \le a_k \left\|I^k u - I^k v\right\|^p + c\left[a_k \left\|I^k u\right\| - \left\|T^k u\right\|^p + a_k \left\|I^k v\right\|^p - \left\|T^k v\right\|_p\right] + \delta_k(B) \quad (4.4.1)$$

olacak biçimde $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k(B) = 0$ olmak üzere bir $\delta_k(B) \ge 0$ var ve

(ii) Her $x, y \in C$ için

$$\| T^n I^k x - I^k T^n y \| \le R_k \| T^n x - I^k y \|$$

olacak biçimde bir $R_k \ge 0$, $\lim_{k\to\infty} R_k = 1$ mevcut olsun.

O zaman $F(T) \cap F(I) \ne \emptyset$ ya da $c > 0$ ise her $x \in C$ için $(T^n x)$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen zayıf yakınsaktır.

İspat: $F(T) \cap F(I) \ne \emptyset$ ve $c = 0$ olsun. O zaman

$$\left\|T^k u - T^k v\right\|^p \le a_k \left\|I^k u - I^k v\right\|^p + \delta_k(B) \quad (4.4.2)$$

olur. $B = \{x, \mathrm{w}\}$ için $u = x$, $v = w \in F(T) \cap F(I)$ değerleri (4.4.2) eşitsizliğinde yerine yazılırsa;

$$\left\|T^k x - T^k w\right\|^p \le a_k \left\|I^k x - I^k w\right\|^p + \delta_k(B)$$

$$\left\|T^k x - w\right\|^p \le a_k \left\|I^k x - w\right\|^p + \delta_k(B)$$

elde edilir. I sınırlı olduğundan $\{T^n x - w\}$ dolayısıyla $\{T^n x - w + w\} = \{T^n x\}$ sınırlıdır. O halde $B = \{T^n x\} \cup \{w\}$ alınabilir. $u = T^n x$, $v = w$ (4.4.2) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\left\|T^{n+k}x-T^{k}w\right\|^{p} &\le a_k\left\|I^kT^nx-I^kw\right\|^p+\delta_k\left(B\right)\\ &\le a_k\left\|I^kT^nx-T^nI^kw\right\|^p+\delta_k\left(B\right)\\ &\le a_kR_k{}^p\left\|T^nx-I^kw\right\|^p+\delta_k\left(B\right)\\ &= a_kR_k{}^p\left\|T^nx-w\right\|^p\end{aligned}$$

$k\to\infty$ için limit alınırsa

$$\overline{\lim}_{k\to\infty}\left\|T^{n+k}x-w\right\|^p\le\overline{\lim}_{k\to\infty}\left\|T^nx-w\right\|^p$$

$$\overline{\lim}_{k\to\infty}\left\|T^{n+k}x-w\right\|^p+\overline{\lim}_{k\to\infty}-\left\|T^nx-w\right\|^p\le 0$$

$$\overline{\lim}_{k\to\infty}\left\|T^{n+k}x-w\right\|^p-\underline{\lim}_{k\to\infty}\left\|T^nx-w\right\|^p\le 0$$

elde edilir. O halde $\left\{\ \|\ T^nx-w\ \|\ \right\}$ dizisi dolayısıyla $\left\{\ \|\ T^nx\ \|\ \right\}$ yakınsaktır.

Son olarak (4.4.2) eşitsizliğinde $k=n\text{-}m,\ u=T^{m+i}x,\ v=T^mx$ yazılırsa; $x\in C,\ M=\sup_{l\ge0}\left\{\|\ T^lx\ \|\ \right\},\ N=\sup_{j\ge0}\left\{\ \|\ I^jx\ \|\ \right\},\ \max\left\{M,\ N\right\}=K$ için

$$\|\ T^{n-m+m+i}x-T^{n-m+m}x\ \|^p\le a_{n-m}\|\ I^{n-m}T^{m+i}x-I^{n-m}T^mx\ \|^p+\delta_{n-m}\left(B\right)$$

$$\begin{aligned}\|\ T^{n+i}x-T^nx\ \|^p &\le a_{n-m}\|\ I^{n-m}T^{m+i}x-I^{n-m}T^mx\ \|^p+\delta_{n-m}\left(B\right)\\ &\le a_{n-m}R^p{}_{n-m}\|\ T^{m+i}x-I^{n-m}x\ \|^p\\ &\quad+\|\ T^{m+i}x-T^mx\ \|^p-\|\ T^{m+i}x-T^mx\ \|^p+\delta_{n-m}\left(B\right)\end{aligned}$$

$$\|\ T^{n+i}x-T^nx\ \|^p-\|\ T^{m+i}x-T^mx\ \|^p\le\left|a_{n-m}-1\right|\left(R^p{}_{n-m}\left(2K\right)^p\right)$$

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \sup_{i\ge0}\left[\|\ T^{n+i}x-T^nx\ \|^p-\|\ T^{m+i}x-T^mx\ \|^p\right]\le 0$$

bulunur. O halde $\left\{x_n\right\}=\left\{T^nx\right\}$ olarak alınırsa, Önerme 4.2.2. (iii), $p=2$ için sağlandığından $\left\{x_n\right\}=\left\{T^nx\right\}$ kendi asimtotik merkezine hemen hemen zayıf yakınsaktır.

$c\ne0$ ve $F\left(T\right)\cap F\left(I\right)=\varnothing$ olsun. $x\in C, B=\left\{x\right\}$ için (4.4.1) eşitsizliğinde $u=v=x$ yazılırsa;

$$0\le c\left[2a_k\|\ I^kx\ \|^p-2\|\ T^kx\ \|^p\right]+\delta_k\left(\left\{x\right\}\right)$$

$$\|\ T^kx\ \|^p\le a_k\|\ I^kx\ \|^p+\delta_k\left(\left\{x\right\}\right)/2c$$

lineer olmayan I dönüşümü sınırlı olduğundan $\{T^n x : n \geq 0\}$ sınırlı olur. O halde $B = \{T^n x : n \geq 0\}$ için $u = v = T^n x$ (4.4.1) eşitsizliğinde yerine yazılırsa, $k, n \geq 0$ için

$$\left\| T^{n+k} x \right\|^p \leq a_k \left\| I^k T^n x \right\|^p + \delta_k(B)/2c$$

elde edilir. $k \to \infty$ için limit alınırsa, $\{ \| T^n x \| \}$ dizisinin yakınsak olduğu görülür. Son olarak (4.4.1) eşitsizliğinde $k = n - m,\ u = T^{m+i}x,\ v = T^m x$ yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\| T^{n+i}x - T^n x \|^p &\leq a_{n-m} \| I^{n-m}T^{m+i}x - I^{n-m}T^m x \|^p \\
&\quad + c\left[a_{n-m} \| I^{n-m}T^{m+i}x \|^p - \| T^{n+i}x \|^p + a_{n-m} \| I^{n-m}T^m x \|^p - \| T^n x \|^p \right] + \delta_{n-m}(B) \\
&= a_{n-m} \| T^{m+i} I^{n-m} x - I^{n-m}T^m x \|^p \\
&\quad + c\left[a_{n-m} \| I^{n-m}T^{m+i}x \|^p - \| T^{n+i}x \|^p + a_{n-m} \| I^{n-m}T^m x \|^p - \| T^n x \|^p \right] + \delta_{n-m}(B) \\
&\leq a_{n-m} R^p{}_{n-m} \| T^{m+i}x - I^{n-m}x \|^p \\
&\quad + c\left[\| T^{m+i}x \|^p - \| T^{n+i}x \|^p + \| T^m x \|^p - \| T^n x \|^p \right] - c\left[\| T^{m+i}x \|^p + \| T^m x \|^p \right] \\
&\quad + c\left[\| I^{n-m}T^{m+i}x \|^p + \| I^{n-m}T^m x \|^p \right] + \| T^{m+i}x - T^m x \|^p - \| T^{m+i}x - T^m x \|^p \\
&\leq |a_{n-m} - 1| \left(R^p{}_{n-m} (2K)^p + 2cK^{2p} \right)
\end{aligned}$$

bulunur ve sonuç olarak;

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sup_{i\geq 0} \left[\| T^{n+i}x - T^n x \|^p - \| T^{m+i}x - T^m x \|^p \right] \leq 0$$

elde edilir. O halde $p = 2$ için Önerme 4.2.2 (iii) sağlanır. Dolayısıyla $\{ x_n \} = \{ T^n x \}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen zayıf yakınsaktır.

Örnek 4.4.2 $C = [2,\ 3] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ ve

$$T : C \to C,\ T(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1 + 1}{2},\ x_2 \right)$$

$$I : C \to C,\ I(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{2} + \varepsilon,\ x_2 \right),\ \frac{1}{2} < \varepsilon < 1$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $F(T)\bigcap F(I)=\emptyset$ dır ve $c=1,\ p=2$ için

$$\begin{aligned}
\| T(x_1,\, x_2)-T(y_1,\, y_2) \|^2 &= \left\| \left(\frac{x_1+1}{2},\, x_2\right)-\left(\frac{y_1+1}{2},\, y_2\right) \right\|^2 \\
&= \left(\frac{x_1-y_1}{2}\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2 \\
&\leq \left\| I(x_1,\, x_2)-I(y_1,\, y_2)\right\|^2 \\
&\quad +\left\|I(x_1,\, x_2)\right\|^2-\left\|T(x_1,\, x_2)\right\|^2+\left\|I(y_1,\, y_2)\right\|^2-\left\|T(y_1,\, y_2)\right\|^2 \\
&= \left(\frac{x_1-y_1}{2}\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2 \\
&\quad +\left(\frac{x_1}{2}+\varepsilon\right)^2+\left(x_2\right)^2-\left[\left(\frac{x_1+1}{2}\right)^2+\left(x_2\right)^2\right] \\
&\quad +\left(\frac{y_1}{2}+\varepsilon\right)^2+\left(y_2\right)^2-\left[\left(\frac{y_1+1}{2}\right)^2+\left(y_2\right)^2\right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\| TI(x_1,\, x_2)-IT(y_1,\, y_2) \|^2 &= \left\| T\left(\frac{x_1}{2}+\varepsilon,\, x_2\right)-I\left(\frac{y_1+1}{2},\, y_2\right) \right\|^2 \\
&= \left(\frac{x_1-y_1+1-2\varepsilon}{4}\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2 \\
&\leq \| T(x_1,\, x_2)-I(y_1,\, y_2) \|^2 \\
&= \left\|\left(\frac{x_1+1}{2},\, x_2\right)-\left(\frac{y_1}{2}+\varepsilon,\, y_2\right)\right\|^2 \\
&= \left(\frac{x_1-y_1+1-2\varepsilon}{2}\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2
\end{aligned}$$

(i) ve (ii) sağlandığından. Teorem 4.4.1. gereği $\left\{ T^n x \right\}$ dizisi kendi asimtotik merkezine hemen hemen zayıf yakınsar.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Banach uzaylarında lineer T dönüşümü için bilinen $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i x$ ortalamasının yakınsaklığı ile ilgili olarak uzun yıllardır kapsamlı araştırmalar yapılmaktadır. Ancak, Baillon (1975), ilk olarak lineer olmayan nonexpansive dönüşümlerin ortalamasının yakınsaklığını ispatlamıştır. Baillon (1975) ile birlikte konuyla ilgili birçok çalışmalar yapılarak, lineer olmayan ergodik teoremler incelenmiştir. Bu çalışmalarda Banach uzayının alt kümelerinin özelliklerine göre alınan lineer olmayan dönüşümlerin ortalamalarının yakınsaklıklarına bakılmıştır. Son yıllarda yapılan çalışmalarda $\mathscr{H}$ Hilbert uzayının herhangi bir altkümesi üzerinde bazı özelliklere sahip lineer olmayan T dönüşümlerinin ortalamalarının yakınsaklığı incelenmiştir.

Bu tezde, Banach uzayının herhangi bir altkümesi üzerinde tanımlanan lineer olmayan dönüşümler için belli koşullar altında alınan bazı Banach uzaylarında lineer olmayan dönüşümlerin ortalamasının yakınsaklıkları araştırılmıştır. Daha sonra lineer olmayan dönüşümlerin özellikleri incelenerek değişmeli ve I-nonexpansive dönüşümler için alınan belli koşullara göre lineer olmayan dönüşümlerin ortalamasının zayıf yakınsak olduğu gösterilmiştir.

Banach uzayının herhangi bir alt kümesi üzerinde tanımlanan lineer olmayan I-nonexpansive dönüşümler için alınan koşullar altında lineer olmayan kuvvetli ergodik teoremin geçerliliği benzer olarak gösterilebilir.

KAYNAKLAR

BAILLON, J. B., 1975. Un theoreme de type ergodique pour les contractions nonlineaires dan un espace de Hilbert. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B, 280, A1511-A1514.

BAILLON, J. B., 1976. Quelques proprietes de convergence asymptotique pour les contractions impaires. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B, 283, A587-590.

BAILLON, J. B., BRUCK, R. E. and REICH, S.,1978. On the asymptotic behavior of nonexpansive mappings and semigroups in Banach spaces. Houston J. Math., pp. 1-9.

BANCHMAN, G. and NARICI, L., 1966. Functional Analysis. Academic Press Inc., New York.

BAYRAKTAR, M., 1992. Fonksiyonel Analiz. Atatürk Üniversitesi Yayınları.

BREZIS, H. and BROWDER, F. E., 1976. Nonlinear ergodic theorems. Bull. Amer. Math. Soc., 82: 956-961.

BRUCK, R. E., 1978. On the almost-convergence of iterates of a nonexpansive mappings in Hilbert space and the structure of the weak w-limit set. Israel J. Math., 29: 1-16.

COHN, D. L., 1980. Measure theory. Birkhauser , Boston.

HIRANO, N. and TAKAHASHI, W., 1979. Nonlinear ergodic theorems nonexpansive mappings in Hilbert space. Kodai Math. J., pp. 11-25.

KOLMOGOROV, A.N., FOMIN, S.V., 1970. Introductory Real Analysis. Prentice-Hall Inc. , London.

KRENGEL, U., 1985. Ergodic theorems. Walter de Gruyter, New York.

MIYADERA, I., 1997. Nonlinear mean ergodic theorems. Taiwanese J. Math., 1: 433-449.

OKA, H., 1989. A nonlinear ergodic theorem for asymtotically nonexpansive mappings in Banach spaces. Proc. Japan Acad., 65 A: 284-287.

ROYDEN, H. L., 1968. Real Analysis (2nd eddition). Mcmillan, New York.

SHAHZAD, N., 2004. Generalized I-nonexpansive maps and best approximations in Banach spaces. Demonstratio Math., 3: 597-600.

WITTMANN, R., 1990. Mean ergodic theorems for nonlinear operators. Proc. Amer. Math. Soc., 108: 781-788.

ÖZGEÇMİŞ

28.09.1980’ de Şanlıurfa’ da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul’ da lise öğrenimini ise Afyon Cumhuriyet Lisesi’ nde tamamladı. 2002 yılında Gaziantep Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun olarak aynı yıl Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.