**T.C.**
**HARRAN ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

# ORTALANABİLİR GRUPLAR İÇİN ERGODİK TEOREMLER

**Feyza YALÇIN**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ŞANLIURFA**
**2006**

Yrd. Doç. Dr. Seyit TEMİR danışmanlığında, Feyza YALÇIN'ın hazırladığı "Ortalanabilir Gruplar İçin Ergodik Teoremler" konulu bu çalışma 18/01/2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd.Doç.Dr. Seyit TEMİR

Üye : Doç.Dr. İrfan ŞİAP

Üye : Yrd.Doç.Dr. Hasan AKIN

**Bu tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım**

**Prof. Dr. İbrahim BOLAT**
**Enstitü Müdürü**

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa No**


ÖZ ........................................................................................................ i
ABSTRACT ............................................................................................... ii
TEŞEKKÜR ............................................................................................... iii
1. GİRİŞ .................................................................................................... 1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR ......................................................................... 4
   2.1. Metrik Uzaylar .................................................................................. 4
   2.2. Topolojik Uzaylar ............................................................................. 7
   2.3. Normlu Lineer Uzaylar ..................................................................... 9
   2.4. İç Çarpım Uzayları ........................................................................... 12
   2.5. Ölçüm Uzayları ................................................................................. 14
   2.6. Topolojik Gruplar ............................................................................. 19
   2.7. Dinamik Sistemler ve Ergodiklik ...................................................... 22
   2.8. Ortalanabilir Gruplar ........................................................................ 25
3. MATERYAL ve YÖNTEM ....................................................................... 38
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA .............................................. 40
   4.1. Banach Prensibi ................................................................................ 40
   4.2. Ortalanabilir Gruplar için Ergodik Teoremler ................................... 51
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER ..................................................................... 61
   5.1. Sonuçlar ............................................................................................ 61
   5.2. Öneriler ............................................................................................. 61
KAYNAKLAR ............................................................................................. 62
ÖZGEÇMİŞ ................................................................................................ 63
ÖZET .......................................................................................................... 64
SUMMARY ................................................................................................. 65

# ÖZ

**Yüksek Lisans Tezi**

**ORTALANABİLİR GRUPLAR İÇİN ERGODİK TEOREMLER**

**Feyza YALÇIN**

**Harran Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Yrd. Doç. Dr. Seyit TEMİR**
**Yıl: 2006, Sayfa: 65**

Bu tezde, ergodik teoride iyi bilinen noktasal ergodik teorem ortalanabilir gruplar için incelenmektedir. Ergodik teoremler için temel araç olan Banach prensibi ayrıntılı olarak açıklanarak, maksimal eşitsizlik sağlandığında, $A_n\left[f\right]\left(x\right)=\dfrac{1}{\left|\tilde{F}_n\right|}\sum_{g\in\tilde{F}_n}T_g f\left(x\right)$ ortalamasının hemen hemen her yerde yakınsadığı noktaların kümesinin Banach Prensibi gereği kapalı olduğu kullanılarak, $G\times\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}_2$ ortalanabilir grubu için noktasal ergodik teoremin sağlandığı gösterilmektedir. Ayrıca her ortalanabilir grubun bir tempered Følner dizisi içerdiğini kullanarak $\mathbb{Z}\times\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}_2$ ortalanabilir grubu içindeki Følner dizisi göz önüne alınmaktadır. Bu dizinin tempered Følner dizisi olduğu gösterilerek Lindenstrauss (1999) çalışması gereği $\mathbb{Z}\times\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}_2$ ortalanabilir grubu için noktasal ergodik teoremin sağlandığı incelenmektedir.

**ANAHTAR KELİMELER:** Ortalanabilir grup, ergodik teoremler, Banach prensibi.

# ABSTRACT

**MSc Thesis**

**ERGODIC THEOREMS FOR AMENABLE GROUPS**

**Feyza YALÇIN**

**Harran University**
**Graduate School of Natural and Applied Sciences**
**Department of Mathematics**

**Supervisor: Assist. Prof. Dr. Seyit TEMİR**
**Year: 2006, Page: 65**

In this thesis, the well-known pointwise ergodic theorem in ergodic theory is investigated for amenable groups. The Banach principle which is a fundamental tool for ergodic theorems is explained in detail, if the maximal inequality holds due to Banach principle, by using the fact that the points of the set where the average $A_n[f](x) = \frac{1}{|\tilde{F}_n|} \sum_{g \in \tilde{F}_n} T_g f(x)$ converges almost eveywhere is closed, the pointwise ergodic theorem is shown for the amenable group $G \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$. In addition, since every amenable group has a tempered Følner sequence, the Følner sequence in the amenable group $\mathbb{Z} \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ is investigated. Due to Lindenstrauss (1999), the validity of pointwise ergodic theorem for the amenable group $\mathbb{Z} \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ is investigated.

**KEY WORDS:** Amenable group, ergodic theorems, Banach principle.

# TEŞEKKÜR

Yoğun çalışmalar sonucunda oluşan bu tezin her aşamasında bana yol gösteren ve benden yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Seyit TEMİR'e, kaynak temininde yardımcı olan Sayın Yrd. Doç. Dr. Hasan AKIN'a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca hayatımın her anında bana destek olan değerli aileme ve beni hiç yalnız bırakmayan biricik eşim Öğr. Gör. Gökhan YALÇIN'a en içten duygularımla teşekkür ederim.

# 1. GİRİŞ

Ergodik teoride ( $X, \mathcal{A}, \mu$ ) olasılık ölçüm uzayı, $T : X \rightarrow X$ ölçümü koruyan dönüşüm olmak üzere $x \in X$ için $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(T^{i}x\right)$ortalaması mevcut iken bu ortalamanın nasıl yakınsadığı araştırılmaktadır. Ergodik teoriye ait ilk önemli sonuçlar G.D.Birkhoff ve Von-Neumann tarafından elde edilmiştir. Bu sonuçlar sırasıyla noktasal ergodik teorem ve ortalama ergodik teorem olarak bilinir. 1950 yılından itibaren klasik ergodik teorinin birçok sonucu ortalanabilir gruplara genelleştirilmeye başlandı.

Bir $X$ kümesi üzerine etki eden $G$ grubu için bir değişmez ortalamanın varlığı 1920-1930 yılları arasında Banach ve Tarski tarafından incelendi. Ortalanabilir terimi ilk defa 1950 yılında M.M.Day tarafından kullanıldı. Følner (1955) bir grup için Zayıf Følner Şartı'nın **(ZFŞ)** ve Kuvvetli Følner Şartı'nın **(KFŞ)** her ikisinin de grubun ortalanabilirliğine denk olduğunu ispatladı. Day (1957) kuvvetli ortalanabilirlik kavramını araştırdı. Doğal olarak bir ortalanabilir grup için verilen şartların ortalanabilir yarı gruplara nasıl genelleştirilebileceği merak edilen bir soruydu. Frey (1960) tezinde Følner Şartı'nı **(FŞ)** şartını verdi. Namioka (1964) bir yarı grubun sağ ortalanabilir olması için Zayıf Følner Şartı'ndan daha kuvvetli olan iki tane yeter şart vermiştir. Ayrıca Kuvvetli Namioka Følner Şartı'nın **(KNFŞ)** Zayıf Namioka Følner Şartı'nı **(ZNFŞ)** sağladığını ve Zayıf Namioka Følner Şartı'nın sağ ortalanabilirliği **(SO)** sağladığını ispatladı. Argabright ve Wilde (1967) ise $S$ yarı grubu sol sadeleşme özelliğine sahip iken Følner Şartı'nın Kuvvetli Følner Şartı'na denk olduğunu göstermişlerdir.

$\mathbb{Z}$ içindeki aralıkların dizileri için ortalama ergodik teorem sağlanırken, noktasal ergodik teorem sağlanmaz. Shulman (1988) çalışmasında Shulman Şartı'nı vermiştir. Shulman Şartı'nı sağlayan $\left(F_n\right)$ dizisine tempered Følner dizisi denir. Tempelman (1992) ise Zayıf Tempelman Şartı'nı vermiştir. $G$ ortalanabilir grubu içindeki $\left(F_n\right)$ Følner dizisi için Shulman Şartı'ndaki $\bigcup_{i=1}^{n-1} F_i^{-1}F_n$ ifadesine karşılık

Zayıf Tempelman Şartı'nda $\bigcup_{i=1}^{n} F_i^{-1} F_n$ ifadesi verilmiştir. Buradan Zayıf Tempelman Şartı'nın Shulman Şartı'ndan daha güçlü olduğu anlaşılmaktadır. Rosenblatt ve Wierdl (1992) makalesinde $|I_n|$ artan olmak üzere, $(I_n) \subset \mathbb{Z}$ içindeki aralıkların dizileri için noktasal ergodik teoremin sağlanması için gerek ve yeter şart olarak Zayıf Tempelman Şartı'nın sağlandığını vermişlerdir.

Shulman (1988) tempered Følner dizileri ve $L_2(X)$ içindeki fonksiyonlar için noktasal ergodik teoremi ispatlamıştır. Bununla birlikte ortalanabilir gruplar için noktasal ergodik teoremin sağlanması hususunda en önemli teoremlerden biri Lindenstrauss (1999) çalışmasında verilmiştir:

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ olasılık ölçüm uzayında ergodik etki eden bir ortalanabilir grup $G$ ve $(F_n)$ bir tempered Følner dizisi olsun. $\forall f \in L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$ için hemen hemen her yerde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|F_n|} \sum_{g\in F_n} f(gx) = \int f(x)\,d\mu(x)$$

dir. Ayrıca Lindenstrauss (1999) makalesinde her ortalanabilir grubun bir tempered Følner dizisine sahip olduğunu göstermiştir. Butkevich (2001) tezinde sol sadeleşme özelliğine sahip sol ortalanabilir sayılabilir yarı gruplar için noktasal ergodik teoremi göstermiştir.

Rosenblatt ve Wierdl (1992) çalışması gereği, noktasal ergodik teoremin sağlanması için $|I_n|$ artan olmak üzere $(I_n) \subset \mathbb{Z}$ içindeki aralıkların dizilerinin Zayıf Tempelman Şartı'nı sağladığı gerek ve yeter koşuluna göre bu şartı sağlayan ve sağlamayan dizilerin örnekleri incelenmektedir. Temir (2002) çalışmasında, $G$ herhangi bir sayılabilir ortalanabilir grup ve $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ise sayılabilir değişmeli grup olmak üzere $G \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ direkt çarpımının bir ortalanabilir grup olduğunu göstermiştir.

Bu çalışmalar göz önünde bulundurularak, sonucu ortalanabilir gruplar için noktasal ergodik teoremin ispatında kullanılacak olan Banach prensibi ayrıntılı olarak incelenmektedir. Ayrıca $G \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ortalanabilir grubu içindeki $\tilde{F}_n = \left( F_n{}' \times F_n{}'' \right)$ Følner dizisi göz önüne alınarak, maksimal eşitsizlik sağlandığında $A_n\left[ f \right]\left( x \right) = \frac{1}{\left| \tilde{F}_n \right|} \sum_{g \in \tilde{F}_n} T_g f\left( x \right)$ ortalamasının hemen hemen her yerde yakınsaklığı gösterilerek, $G \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ortalanabilir grubu için noktasal ergodik teoremin geçerliliği ifade edilmektedir. Ayrıca $\mathbb{Z} \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ortalanabilir grubu için noktasal ergodik teoremin sağlandığı incelenmektedir.

# 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

## 2.1. Metrik Uzaylar

**Tanım 2.1.1.** $X$ boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere, $X$ üzerinde tanımlı bir $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

**( M1 )** $\forall x,\ y \in X$ için $d(x,\ y) \geq 0$,

**( M2 )** $\forall x,\ y \in X$ için $d(x,\ y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

**( M3 )** $\forall x,\ y \in X$ için $d(x,\ y) = d(y,\ x)$,

**( M4 )** $\forall x,\ y,\ z \in X$ için $d(x,\ y) \leq d(x,\ z) + d(z,\ y)$ (üçgen eşitsizliği),

aksiyomlarını sağlıyorsa, $d(x, y)$ fonksiyonuna $X$ kümesi üzerinde bir *metrik* ve $(X,\ d)$ ikilisine de bir *metrik uzay* denir.

**Örnek 2.1.2.** $X = \mathbb{R}$ ve $d$ metriği $d(x,\ y) = |\ x - y\ |$ olarak alınırsa, $(X,\ d)$ bir metrik uzay olur.

**Tanım 2.1.3.** $(X,\ d)$ bir metrik uzay, $a \in X$ ve $r > 0$ olsun.

$$B(a, r) = \{x \mid d(a, x) < r\}$$

kümesine *a* merkezli, *r* yarıçaplı *açık yuvar*,

$$B[a, r] = \{x \mid d(a, x) \leq r\}$$

kümesine *a* merkezli, *r* yarıçaplı *kapalı yuvar*,

$$S(a, r) = \{x \mid d(a, x) = r\}$$

kümesine de *a* merkezli, *r* yarıçaplı *yuvar yüzeyi* denir.

**Tanım 2.1.4.** $(X,\ d)$ bir metrik uzay ve $G \subset X$ olsun. $\forall x \in G$ için $B(x, \varepsilon) \subset G$ olacak şekilde bir $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ sayısı varsa, $G$ alt kümesine bir *açık küme* denir. Eğer bir $F \subset X$ alt kümesinin tümleyeni açık ise bu $F$ kümesine *kapalı küme* denir.

**Teorem 2.1.5.** Bir metrik uzayda her açık yuvar bir açık kümedir ( Kolmogorov ve Fomin, 1970 ).

**Tanım 2.1.6.** $(X,\ d)$ bir metrik uzay, $x \in X$ ve $U \subset X$ bir alt küme olsun. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $B(x,\varepsilon) \subset U$ sağlanıyorsa, bu $U$ kümesine $x$ noktasının bir *komşuluğu* denir.

**Tanım 2.1.7.** $(X,\ d)$ bir metrik uzay, $x \in X$ ve $A \subset X$ olsun. Bu takdirde,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$$

ise $x$ noktasına $A$ kümesinin bir *değme noktası* denir. $A$'nın değme noktalarının kümesine de $A$'nın *kapanışı* denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

**Tanım 2.1.8.** $(X,\ d)$ bir metrik uzay, $x \in X$ ve $A \subset X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $B(x,\varepsilon)$ ile $A$'nın $x$'den farklı en az bir ortak noktası varsa, bu $x$ noktasına $A$ kümesinin bir *yığılma noktası* denir.

**Tanım 2.1.9.** $(X,\ d)$ bir metrik uzay, $x \in X$ ve $A \subset X$ olsun. Bir $\varepsilon > 0$ için $B(x,\varepsilon)$ kümesi $A$'nın içinde kalıyorsa, bu $x$ noktasına $A$ kümesinin bir *iç noktası* denir. $A$ kümesinin iç noktalarından oluşan kümeye ise $A$'nın *içi* denir ve $A^o$ ile gösterilir.

**Örnek 2.1.10.** $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriğine göre

$$A = [0,\ 1] \cup \{2\} \subset \mathbb{R} \text{ için } \overline{A} = A \text{ ve } A^o = (0,1)\text{'dir.}$$

**Tanım 2.1.11.** $(X,\ d)$ bir metrik uzay, $(x_n)$ $X$ içinde bir dizi ve $x \in X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n > N(\varepsilon)$ olduğunda $d(x_n,\ x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısı bulunabiliyorsa, $(x_n)$ dizisi *x noktasına yakınsaktır* denir ve $x_n \to x$ ile gösterilir. Ayrıca $x$ noktasına da $(x_n)$ dizisinin *limiti* denir.

**Örnek 2.1.12.** $X = [0,\ 1)$ ve $d(x,\ y) = |\ x - y\ |$ olarak verilsin.

$$(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right) \text{ dizisi için } \lim_{n\to\infty} d(x_n,\ 0) = \lim_{n\to\infty}\left|\ \frac{1}{n} - 0\ \right| = 0$$

olduğundan bu dizi yakınsaktır.

**Teorem 2.1.13.** $(X,\ d)$ ve $(Y,\ d')$ iki metrik uzay ve $\varnothing \neq A \subset X$ olsun. Bu takdirde,

**( a )** $x \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter koşul $A$ içinde $x$ noktasına yakınsayan bir $(x_n)$ dizisinin bulunmasıdır.

**( b )** $f : X \to Y$ bir $x \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul $X$ içinde $x_n \to x$ koşulunu sağlayan her $(x_n)$ dizisi için $Y$ içinde $f(x_n) \to f(x)$ olmasıdır ( Bayraktar, 1992 ).

**Tanım 2.1.14.** $(X,\, d)$ bir metrik uzay ve $(x_n)$ $X$ içinde bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall m,\, n \geq N(\varepsilon)$ olduğunda

$$d(x_m,\, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısı bulunabiliyorsa, bu $(x_n)$ dizisine bir *Cauchy dizisi* denir.

**Teorem 2.1.15.** Her yakınsak dizi Cauchy dizisidir. Fakat bu teoremin tersi her zaman doğru değildir ( Kolmogorov ve Fomin, 1970 ).

**Tanım 2.1.16.** $(X,\, d)$ bir metrik uzay ve $A,\, B \subset X$ olsun. $\overline{A} \supset B$ ise $A$'ya $B$ içinde *yoğundur* denir. Özel olarak, $A$ kümesi $X$ içinde yoğunsa, $\overline{A} = X$ 'tir.

**Tanım 2.1.17.** $(X,\, d)$ bir metrik uzay olsun. $X$ içindeki her Cauchy dizisi $X$ 'in bir elemanına yakınsak ise $X$ uzayına *tamdır* denir.

**Örnek 2.1.18.** Kompleks sayıların sınırlı dizilerinin

$$l_\infty = \{\, z = (z_1,\, z_2, \ldots) : |\, z_i \,| \leq C,\ z_i \in \mathbb{C},\ C \in \mathbb{R} \,\} \text{ kümesi}$$

$$d(z,\, w) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \{\, |\, z_i - w_i \,| \,\}$$

metriğine göre tamdır ( Bayraktar, 1992 ).

**Tanım 2.1.19.** $(X,\, d)$ bir metrik uzay, $Y \subset X$ olsun. Bu takdirde,

**( a )** $\left(\overline{Y}\right)^o = \varnothing$ ise $Y$ kümesine $X$ içinde *hiç bir yerde yoğun olmayan küme* denir.

**( b )** $Y$ kümesi, $X$ içinde hiç bir yerde yoğun olmayan kümelerin bir sayılabilir birleşimine eşitse, $Y$ kümesine $X$ içinde *birinci kategoriden bir küme* denir.

**( c )** $X$ içinde birinci kategoriden olmayan bir $Y$ alt kümesine de *ikinci kategoriden bir küme* denir.

**Teorem 2.1.20. ( Baire Teoremi )** Boş olmayan bir $(X,\ d)$ tam metrik uzayı kendi içinde ikinci kategoriden bir kümedir ( Kolmogorov ve Fomin, 1970 ).

## 2.2. Topolojik Uzaylar

**Tanım 2.2.1.** $X$ herhangi bir küme olsun. $P(X)$, $X$ 'in kuvvet kümesi olmak üzere $\tau \subset P(X)$ ailesi

**( T1 )** $\varnothing,\ X \in \tau$

**( T2 )** $G_1,\ldots,G_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau \quad (n \in \mathbb{N})$

**( T3 )** $\Lambda$ bir indis kümesi olsun. $\lambda \in \Lambda$ için $G_\lambda \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \in \tau$

şartlarını sağlıyorsa, $\tau$ 'ya $X$ kümesi üzerinde bir *topoloji* denir. Ayrıca $(X,\ \tau)$ ikilisine bir *topolojik uzay* ve $\tau$ 'nun elemanlarına da bu topolojik uzayın *açık kümeleri* adı verilir.

**Tanım 2.2.2.** $X$ herhangi bir küme olmak üzere, $\tau = \{\varnothing,\ X\}$ ailesi $X$ üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye *ilkel topoloji* denir. $\tau = P(X)$ ailesi de $X$ üzerinde bir topoloji olup, bu topolojiye *diskret veya ayrık topoloji* denir.

**Tanım 2.2.3.** $(X,\ \tau)$ bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. Verilen bir $U \subset X$ kümesi için $x \in G \subset U$ olacak şekilde bir $G \in \tau$ varsa, $U$ alt kümesine $x$ noktasının bir *komşuluğu* denir.

**Tanım 2.2.4.** $(X,\ \tau)$ ve $(Y,\ \tau')$ iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Bu takdirde, $f(x_0)$'ın $\tau'$ topolojisine göre her $V$ komşuluğu için $f(U) \subset V$ olacak şekilde $x_0$'ın $\tau$ topolojisine göre bir $U$ komşuluğu mevcutsa, $f$ fonksiyonuna $x_0 \in X$ *noktasında süreklidir* denir.

**Tanım 2.2.5.** $(X,\ \tau)$ bir topolojik uzay olsun. $d$ metriğine göre açık kümelerin ailesi $\tau$ olacak şekilde $X$ üzerinde bir $d$ metriği tanımlanabilirse, $(X,\ \tau)$ uzayına *metriklenebilir* denir.

**Tanım 2.2.6.** $X$ bir küme ve $A \subset X$ olsun. Eğer bir $\mathcal{U} \subset P(X)$ ailesi için $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ sağlanıyorsa, $\mathcal{U}$ ailesine $A$ alt kümesinin bir *örtüsü* denir. Eğer $A = X$ ise $\mathcal{U}$ , $X$ 'in bir örtüsü olur.

**Tanım 2.2.7.** $X$ bir küme ve $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ ($I$ bir indis kümesi) $X$ 'in bir örtüsü olsun. Eğer $\mathcal{U}$ 'nun bir alt ailesi, yani $I' \subset I$ olmak üzere $\mathcal{U}' = (U_i)_{i \in I'}$ $X$ 'in yine bir örtüsü oluyorsa, $\mathcal{U}'$ ailesine $\mathcal{U}$ 'nun bir *alt örtüsü* adı verilir.

**Tanım 2.2.8.** Bir örtünün eleman sayısı sonlu veya sayılabilir ise bu örtüye sırasıyla *sonlu örtü* veya *sayılabilir örtü* denir.

**Tanım 2.2.9.** $(X,\ \tau)$ bir topolojik uzay ve $\mathcal{Y}$, $X$ 'in bir örtüsü olsun. Eğer $\mathcal{Y}$'nin her elemanı bu uzayda açık ise $\mathcal{Y}$'ye bir *açık örtü* denir.

**Tanım 2.2.10.** $(X,\ \tau)$ bir topolojik uzay olsun. $X$ 'in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, bu topolojik uzaya *kompakttır* denir.

**Teorem 2.2.11.** $(X,\ \tau)$ bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A$'nın kompakt olması için gerek ve yeter koşul $A$'nın $(X,\ \tau)$ uzayındaki her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü bulunmasıdır ( Lipschutz, 1965 ).

**Tanım 2.2.12.** Bir topolojik uzayın her noktasının bir kompakt komşuluğu varsa, bu topolojik uzaya *lokal kompakt uzay* denir.

**Teorem 2.2.13. ( Heine-Borel Teoremi )** Kapalı ve sınırlı $A = [a,\ b]$ aralığının her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır ( Lipschutz, 1965 ).

**Önerme 2.2.14.** Her kompakt uzay lokal kompakttır. Fakat bu önermenin tersi daima doğru değildir ( Lipschutz, 1965 ).

**Örnek 2.2.15.** $\mathbb{R}$ kümesi alışılmış topolojisi ile göz önüne alınırsa, her bir $p \in \mathbb{R}$ noktası $[p-\delta,\ p+\delta]$ kapalı aralığının içindedir ve bu aralık Heine-Borel Teoremi gereği kompakttır. Böylece $\mathbb{R}$ lokal kompakt uzaydır. Ancak $\mathbb{R}$ bir kompakt uzay değildir. Çünkü

$$\mathcal{P} = \{\ldots,(-3,-1),\ (-2,0),\ (-1,1),\ (0,2),\ (1,3),\ldots\}$$

ailesi $\mathbb{R}$ 'nin bir açık örtüsü olmasına rağmen sonlu bir alt örtü içermez ( Lipschutz, 1965 ).

## 2.3. Normlu Lineer Uzaylar

**Tanım 2.3.1.** $L$ boş olmayan bir cümle ve **F**, reel (veya kompleks) sayılar cismi olsun. $L$ içinde toplama adı verilen fonksiyon $\forall x,\ y \in L$ için

$$+ : L \times L \to L\,,\ +\left(x,\ y\right) = x + y$$

ile tanımlansın ve $L$ içinde çarpma adı verilen fonksiyon $\forall \alpha \in \mathbf{F},\ \forall x \in L$ için

$$\cdot\ :\ \mathbf{F} \times L \to L\,,\ \cdot\left(\alpha,\ x\right) = \alpha . x$$

ile tanımlansın. Eğer "+" ve "$\cdot$" fonksiyonları $\forall x,\ y,\ z \in L$ ve $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbf{F}$ için

**( L1 )** $x + y \in L$,

**( L2 )** $x + \left(y + z\right) = \left(x + y\right) + z$,

**( L3 )** $\forall x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak biçimde bir $\theta \in L$ elemanı var,

**( L4 )** $\forall x \in L$ için $x + x' = \theta$ olacak biçimde bir $x' \in L$ elemanı var,

**( L5 )** $x + y = y + x$,

**( L6 )** $\alpha . x \in L$,

**( L7 )** $\alpha . \left(x + y\right) = \alpha . x + \alpha . y$,

**( L8 )** $\left(\alpha + \beta\right) . x = \alpha . x + \beta . y$,

**( L9 )** $\left(\alpha . \beta\right) . x = \alpha . \left(\beta . x\right)$,

**( L10 )** $1 . x = x$ ( $1 \in \mathbf{F}$ ),

koşullarını sağlıyorsa, $L$ kümesine **F** cismi üzerinde bir *lineer uzay* veya *vektör uzayı* denir.

**Örnek 2.3.2.** $X$ herhangi bir küme, $\mathbf{F} = \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) olmak üzere

$L = \{ f \mid f : X \to \mathbf{F} \}$ kümesi

$$\left(f + g\right)\left(x\right) = f\left(x\right) + g\left(x\right) \text{ ve } \left(\alpha . f\right)\left(x\right) = \alpha . f\left(x\right)$$

ile tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre **F** cismi üzerinde bir lineer uzaydır ( Bayraktar, 1992 ).

**Tanım 2.3.3.** $L$, **F** cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $M \subset L$ alt kümesi, $\forall \alpha \in \mathbf{F}$ ve $\forall x,\ y \in M$ için

**( 1 )** $x+y \in M$

**( 2 )** $\alpha . x \in M$

şartlarını sağlıyorsa, $M$ kümesine $L$'nin bir *alt uzayı* denir.

**Tanım 2.3.4.** $L$, **F** cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\| \ \| : L \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x,\ y \in L$ ve $\forall \alpha \in \mathbf{F}$ için

**( N1 )** $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

**( N2 )** $\| \alpha . x \| = |\alpha| \| x \|$,

**( N3 )** $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$,

şartlarını sağlıyorsa, $\| \ \|$ fonksiyonuna $L$ üzerinde bir *norm* denir. $(L, \| \ \|)$ ikilisine de bir *normlu uzay* denir.

**Tanım 2.3.5.** $(L, \| \ \|)$ bir normlu uzay olsun.

$$d(x,\ y) = \| x - y \|$$

ile tanımlanan $d : L \times L \to \mathbb{R}$ metriğine *norm metriği* denir.

**Tanım 2.3.6.** $L$ bir normlu lineer uzay olsun. $L$, norm metriğine göre tam ise $L$'ye *Banach uzayı* denir.

**Örnek 2.3.7.** $p$, $1 \leq p < \infty$ şartını sağlayan bir reel sayı olsun.

$$l_p = \left\{ x = (x_1,\ x_2, \ldots) \middle| \ x_i \text{ skaler} \right\}$$

kümesi

$$\| x \|_p = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır ( Bayraktar, 1992 ).

**Tanım 2.3.8.** $L$ ve $L'$, aynı **F** cismi üzerinde birer lineer uzay olmak üzere, $T : L \to L'$ operatörü verilsin. $T$ operatörü, $\forall x,\ y \in L$ ve $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbf{F}$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha\ T(x) + \beta\ T(y)$$

şartını sağlıyorsa, $T$'ye *lineer operatör* denir.

**Tanım 2.3.9.** $L$, **F** cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Bu uzayın bir vektörüne bir skaler sayı karşılık getiren $f : L \to$ **F** lineer operatörüne, *lineer fonksiyonel* denir.

**Tanım 2.3.10.** Lineer fonksiyonellerin oluşturduğu $\tilde{L} = \mathrm{L}(L, \mathbf{F})$ operatörler vektör uzayına, $L$ uzayının *cebirsel duali* adı verilir.

**Tanım 2.3.11.** $L$, **F** cismi üzerinde bir normlu lineer uzay olsun. $f : L \to \mathbf{F}$ lineer fonksiyoneli verilsin. $\forall x \in L$ için

$$\left| f(x) \right| \leq K \| x \|$$

olacak biçimde $K \geq 0$ reel sayısı varsa, $f$'ye *sınırlı lineer fonksiyonel* denir.

**Tanım 2.3.12.** $L$, **F** cismi üzerinde bir normlu lineer uzay olsun. $f : L \to \mathbf{F}$ lineer fonksiyonelinin normu

$$\| f \| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\left| f(x) \right|}{\| x \|}$$

ile tanımlanır.

**Teorem 2.3.13.** $L$, **F** cismi üzerinde bir normlu lineer uzay olsun. $f : L \to \mathbf{F}$ lineer fonksiyoneli verilsin. $f$'nin $L$ üzerinde sürekli olması için gerek ve yeter koşul $f$'nin sınırlı olmasıdır ( Kolmogorov ve Fomin, 1970 ).

**Tanım 2.3.14.** $L$ bir normlu uzay ve $T : L \to L$ bir lineer operatör olsun. $T$ operatörünün *normu*

$$\| T \| = \sup_{x \neq \theta} \left\{ \frac{\| T(x) \|}{\| x \|} \right\}$$

ile tanımlanır.

**Tanım 2.3.15.** $X$ ve $Y$ aynı **F** cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $X$'den $Y$'ye tanımlı birebir ve üzerine bir $T$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbf{F}$ için

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \text{ ve } T(\alpha x) = \alpha \, T(x)$$

şartlarını sağlıyorsa, $T$'ye bir *izomorfizma* denir.

**Teorem 2.3.16.** $L$, **F** cismi üzerinde bir lineer uzay ve $\tilde{\tilde{L}}$, $L$'nin ikinci cebirsel duali olsun. $x_0 \in L$ keyfi sabit bir nokta olmak üzere $g_{x_0}(f) = f(x_0)$ ile tanımlı $g_{x_0} : \tilde{L} \to F$ dönüşümü bir lineer fonksiyoneldir. Bu takdirde, $g_{x_0} \in \tilde{\tilde{L}}$'dir.

$$k : L \to \tilde{\tilde{L}}, \; k(x) = g_x$$

olarak tanımlanan kanonik dönüşüm içine bir izomorfidir ( Bayraktar, 1992 ).

Bu teoreme göre $L$ uzayı $\tilde{\tilde{L}}$ içine gömülebilir.

**Tanım 2.3.17.** $X$ bir normlu uzay olsun. $\forall x \in X$ için $\phi_x : X^* \to \mathbb{R}\ (\text{veya}\ \mathbb{C})$ tüm $\phi \in X^*$ için $\phi_x(\phi) = \phi(x)$ ile tanımlanan fonksiyoneli sürekli yapan topolojiye $X^*$ üzerinde *zayıf* $^*$ *topoloji* denir.

## 2.4. İç Çarpım Uzayları

**Tanım 2.4.1.** $X$, **F** cismi üzerinde bir lineer uzay olmak üzere, $\langle\ ,\ \rangle : X \times X \to \mathbf{F}$ fonksiyonu tanımlansın. $\forall x,\ y \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbf{F}$ için

**( İ1 )** $\langle x + y,\ z \rangle = \langle x,\ z \rangle + \langle y,\ z \rangle$,

**( İ2 )** $\langle \alpha x,\ y \rangle = \alpha \langle x,\ y \rangle$,

**( İ3 )** $\langle x,\ y \rangle = \overline{\langle y,\ x \rangle}$,

**( İ4 )** $\langle x,\ x \rangle \geq 0$ ve $\langle x,\ x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

şartları sağlanıyorsa, $\langle\ ,\ \rangle$ fonksiyonuna $X$ üzerinde bir *iç çarpım fonksiyonu* denir. Bu takdirde, $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ ikilisine de *iç çarpım uzayı* denir.

**Örnek 2.4.2.** $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\langle x,\ y \rangle = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \ldots + x_n\, y_n$$

olarak tanımlanırsa, $\mathbb{R}^n$ bir iç çarpım uzayı olur ( Kolmogorov ve Fomin, 1970 ).

**Tanım 2.4.3.** $X$ bir iç çarpım uzayı olsun.

$$\|\ \| : X \to \mathbb{R}\ ,\ \| x \| = \sqrt{\langle x,\ x \rangle}$$

ile tanımlanan $\|\ \|$ dönüşümü bir norm fonksiyonudur. Buna *iç çarpım normu* denir.

**Tanım 2.4.4.** $X$ bir iç çarpım uzayı ve $\|\ \|$, iç çarpım normu olsun.

$$d(x,\ y) = \| x - y \| = \sqrt{\langle\, x - y,\ x - y\, \rangle}$$

olarak tanımlanırsa, $(X,\ d)$ bir metrik uzay olur. İç çarpım normuyla tanımlanan bu $d$ metriğine göre $X$ uzayı tam ise $X$'e *Hilbert uzayı* denir.

**Örnek 2.4.5.** $l_2 = \left\{ (x_i) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty,\ x_i \in \mathbb{R}\ (\text{veya } \mathbb{C}) \right\}$ kümesi göz önüne alınırsa, $x,\ y \in l_2$ olmak üzere

$$d(x,\ y) = \| x - y \| = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$$

ile tanımlanan norm metriğine göre $l_2$ uzayı tamdır. Dolayısıyla $l_2$ bir Hilbert uzayıdır ( Bayraktar, 1992 ).

**Tanım 2.4.6.** $\mathrm{H}$ bir iç çarpım uzayı ve $M$, $\mathrm{H}$'nin kapalı alt uzayı olsun.

$$M^{\perp} = \{\ u \in \mathrm{H} \mid \langle u, v \rangle = 0,\ \forall v \in M\ \}$$

kümesine $M$ 'nin *dik komplemanı* denir.

**Tanım 2.4.7.** $\mathrm{H}$ bir Hilbert uzayı ve $Y$, $\mathrm{H}$'nin bir kapalı alt uzayı olsun. $x \in \mathrm{H}$ ise $y \in Y$ ve $z \in Y^{\perp}$ olmak üzere $x = y + z$ tek türlü ifade edilebilir. Bu $y$ vektörüne $x$'in $Y$ üzerindeki *dik izdüşümü* denir.

$x = y + z$ eşitliğinde $y$, $x$ tarafından tek türlü belirtildiği için $p : \mathrm{H} \rightarrow Y$, $p(x) = y$ şeklinde bir dönüşüm tanımlanabilir. $p$'ye *dik izdüşüm operatörü* denir.

**Teorem 2.4.8.** $\mathrm{H}$ bir Hilbert uzayı ve $M$, $\mathrm{H}$'nin bir kapalı alt uzayı olsun. Bu takdirde, $\mathrm{H} = M \oplus M^{\perp}$ direkt toplamı geçerlidir ( Bayraktar, 1992 ).

**Tanım 2.4.9.** $\mathrm{H}$ ve $\mathrm{Y}$ birer Hilbert uzayı ve $T : \mathrm{H} \rightarrow \mathrm{Y}$ bir sınırlı lineer operatör olsun. $T^* : \mathrm{Y} \rightarrow \mathrm{H}$ dönüşümü $\langle Tx,\ y \rangle = \langle x,\ T^* y \rangle$ eşitliğini sağlıyorsa, $T^*$ dönüşümüne *adjoint operatör* denir.

**Tanım 2.4.10.** $\mathrm{H}_1$, $\mathrm{H}_2$ birer Hilbert uzayı olsun. $T : \mathrm{H}_1 \rightarrow \mathrm{H}_2$ ile tanımlı 1-1 lineer dönüşümü normu koruyorsa yani $\forall u,\ v \in \mathrm{H}_1$ için $\langle Tu,\ Tv \rangle = \langle u,\ v \rangle$ ise $T$ 'ye bir *izomorfizma* denir. Eğer $T$ bir Hilbert uzayından kendi üzerine bir izomorfizma ise $T$ 'ye *üniter operatör* denir.

## 2.5. Ölçüm Uzayları

**Tanım 2.5.1.** $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{A}$, $X$ 'in alt kümelerinin bir ailesi olsun. $\mathcal{A}$ ailesi,

**( 1 )** $X \in \mathcal{A}$,

**( 2 )** $\forall A \in \mathcal{A}$ için $X \setminus A \in \mathcal{A}$,

**( 3 )** $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$,

şartlarını sağlıyorsa, $\mathcal{A}$ ailesine $X$ üzerinde bir $\sigma$*-cebir* denir.

**Örnek 2.5.2.** $X = \mathbb{N}$ ve $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 3, \ldots, 2n-1, \ldots\}, \{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}, \mathbb{N}\}$ olarak alınırsa $\mathcal{A}$ ailesi $X$ kümesi üzerinde bir $\sigma$-cebir olur.

**Tanım 2.5.3.** $X$ bir küme ve $\mathcal{A}$, $X$ üzerinde bir $\sigma$-cebir olsun. $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $\mu$ küme fonksiyonuna bir *ölçüm* denir.

**( Ö1 )** $\mu(\emptyset) = 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$,

**( Ö2 )** $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}$ ve $i, j \in I$, $i \neq j$ için

$A_i \cap A_j = \emptyset$ olmak üzere, $\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(A_i)$,

( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) üçlüsüne *ölçüm uzayı*, ( $X$, $\mathcal{A}$ ) ikilisine de *ölçülebilir uzay* denir. Ayrıca $\mathcal{A}$'nın elemanlarına *ölçülebilir küme* adı verilir.

**Tanım 2.5.4.** ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) bir ölçüm uzayı olsun. Bu takdirde,

**( a )** $\mu(X) < +\infty$ ise $\mu$'ye *sonlu ölçüm* denir. Ayrıca $\mu(X) = 1$ ise $\mu$'ye *olasılık ölçümü*, ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ )'ye de *olasılık ölçüm uzayı* denir.

**( b )** $X$ kümesi, $\mathcal{A}$'nın her biri sonlu ölçüme sahip olan $A_1, A_2, \ldots$ kümelerinin birleşimi olarak yazılabiliyorsa, $\mu$'ye $\sigma$*-sonlu ölçüm* ve ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ )'ye de $\sigma$*-sonlu ölçüm uzayı* denir.

**Tanım 2.5.5.** $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin kuvvet kümesi üzerinde $|A|$, $A$ kümesinin eleman sayısını göstermek üzere,

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|, & A \text{ sonlu ise} \\ +\infty, & A \text{ sonlu değilse} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\mu$ fonksiyonu bir ölçümdür. Bu ölçüme *sayma ölçümü* denir. Bu ölçüm sonlu olmayıp $\sigma$-sonludur. Çünkü $A_n = \{n\}$ alınırsa, $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ olup, her bir $n$ için $\mu(A_n) = 1$'dir.

**Teorem 2.5.6.** ( $X, \mathcal{A}, \mu$ ) bir ölçüm uzayı olsun.

**( a )** $(A_n)$, $\mathcal{A}$ içindeki elemanların bir artan dizisi ise

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

dir.

**( b )** $(B_n)$, $\mathcal{A}$ içindeki elemanların bir azalan dizisi ve $\mu(B_1) < \infty$ ise

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

dir ( Kolmogorov ve Fomin, 1970 ).

**Önerme 2.5.7.** $\mathbb{R}$'nin boş olmayan tüm açık (kapalı) alt kümelerinin sınıfı tarafından üretilen aile σ-cebirdir ( Cohn, 1980 ).

**Tanım 2.5.8. ( a )** Önerme 2.5.7.'den elde edilen σ-cebire *Borel σ-cebiri* denir ve bu σ-cebir $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

**( b )** ($\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) ikilisine *topolojik ölçülebilir uzay* denir.

**( c )** $\mathcal{B}(\mathbb{R})$'nin elemanlarına *Borel kümeleri* denir.

**Tanım 2.5.9.** ($\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) bir topolojik ölçülebilir uzay olsun.

$$\lambda : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to \overline{\mathbb{R}^+}$$

$$\lambda([a,b)) = \begin{cases} b-a, & a \neq b \\ 0 \quad , & a = b \end{cases}$$

ile tanımlanan küme fonksiyonu ($\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) üzerinde bir ölçüm olur. $\lambda$'ya *uzunluk ölçümü* veya *Lebesgue ölçümü* denir. ($\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda$) üçlüsüne de *topolojik ölçüm uzayı* denir.

**Tanım 2.5.10.** $X$ bir kompakt metriklenebilir uzay ve $d$ $X$ üzerinde bir metrik olsun. $m$, $X$ uzayında bir Borel olasılık ölçümü olmak üzere $\forall B \in \mathcal{B}(X)$, $\forall \varepsilon > 0$

için $C_\varepsilon \subseteq B \subseteq U_\varepsilon$ ve $m(\mathrm{U}_\varepsilon \setminus \mathrm{C}_\varepsilon) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $U_\varepsilon$ açık kümesi ve bir $C_\varepsilon$ kapalı kümesi varsa, *m*'ye *regüler ölçüm* denir.

**Tanım 2.5.11.** ( $X$, $\mathcal{A}$ ), ( $Y$, $\mathcal{B}$ ) iki ölçülebilir uzay olsun ve $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. $\forall B \in \mathcal{B}$ için $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ oluyorsa, $f$ 'ye *ölçülebilir fonksiyon* denir.

**Önerme 2.5.12.** ( $X, \mathcal{A}$ ) bir ölçülebilir uzay olsun.

$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}((\alpha,+\infty)) = \{\, x \in X : f(x) > \alpha \,\} \in \mathcal{A}$$

olmasıdır ( Cohn, 1980 ).

$X$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli $\mathcal{A}$-ölçülebilir tüm fonksiyonların kümesi M( $X, \mathcal{A}$ ) ile gösterilir.

**Tanım 2.5.13.** Bir $E$ kümesi için

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \text{ ise} \\ 0, & x \notin E \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanan $\chi_E$ fonksiyonuna $E$ kümesinin *karakteristik fonksiyonu* denir.

**Tanım 2.5.14.** Görüntü kümesi sonlu elemandan meydana gelen $\varphi$ fonksiyonuna bir *basit fonksiyon* denir.

Bir reel değerli basit $\varphi$ fonksiyonu, $a_k \in \mathbb{R}$ ve $\chi_{E_k}$, $E_k$ kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$$

biçiminde yazılabilir. $X$ üzerinde tanımlı, reel değerli, $\mathcal{A}$-ölçülebilir basit fonksiyonların kümesi S=S( $X, \mathcal{A}$ ) ile gösterilir.

**Tanım 2.5.15.** ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) bir ölçüm uzayı olsun. $a_k \in \mathbb{R}^+$, $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ ayrık kümeler olmak üzere $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$ pozitif ölçülebilir basit fonksiyonunun $\mu$ ölçüsüne göre integrali

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)$$

ile tanımlı genişletilmiş reel sayıdır.

**Tanım 2.5.16.** ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) bir ölçüm uzayı ve $f$, bir ölçülebilir fonksiyon olsun. Eğer ölçülebilir bir $A$ kümesi üzerinde $f$ fonksiyonuna düzgün yakınsayan integrallenebilir basit fonksiyonların $(f_n)$ dizisi varsa, $f$ fonksiyonu $A$ kümesi üzerinde *integrallenebilirdir* veya *toplanabilirdir* denir. Bu takdirde,

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, d\mu(x)$$

limitine $f$ fonksiyonunun *A kümesi üzerinde Lebesgue integrali* denir ve

$$\int_A f(x)\, d\mu(x)$$

ile gösterilir.

**Teorem 2.5.17. ( Tchebichev Eşitsizliği )** ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) bir ölçüm uzayı ve $f: X \to [0, +\infty]$ fonksiyonu ölçülebilir olsun. $\alpha > 0$ için

$$A_\alpha = \{x \in X:\ f(x) \geq \alpha\}$$

denirse,

$$\mu(A_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{A_\alpha} f(x)\, d\mu(x) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

dir ( Kolmogorov ve Fomin, 1970 ).

**Tanım 2.5.18.** Bir P($x$) önermesi sıfır ölçümlü bir kümenin dışındaki tüm $x$'ler için doğruysa, P($x$) önermesi *hemen hemen her x için doğrudur* denir.

**Tanım 2.5.19.** ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) bir ölçüm uzayı ve $f: X \to \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$ ) bir ölçülebilir fonksiyon olsun. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_p = \{ f : \int_X |f(x)|^p\, d\mu(x) < \infty \}$$

kümesine *p. kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı* denir.

**Tanım 2.5.20.** $\mathcal{L}_p$ üzerinde

$$f \sim g \Leftrightarrow \text{hemen hemen her yerde } f = g$$

biçiminde tanımlanan “$\sim$” bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Dolayısıyla bu bağıntı $\mathcal{L}_p$ uzayını denklik sınıflarına ayırır. Bu denklik sınıflarının kümesi $L_p$ ile gösterilir. $L_p$ uzayı,

$$[f]+[g]=[f+g],\ \lambda[f]=[\lambda f]$$

ile tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır.

**Önerme 2.5.21.** $p \geq 1$ olmak üzere,

$$\|\ [f]\ \|_p = \|f\|_p = \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

biçiminde tanımlanan $\|\ \|_p$ fonksiyonu $L_p$ üzerinde bir normdur ( Kolmogorov ve Fomin, 1970 ).

**Tanım 2.5.22.** ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) bir ölçüm uzayı ve $f : X \to \mathbb{R}$ ölçülebilir olsun. Hemen hemen her yerde sınırlı olan ölçülebilir fonksiyonların kümesi $\mathcal{L}_\infty$ ile gösterilir.

$$\|f\|_\infty = ess\ \sup|f(x)| = \inf\left\{M : \mu\left\{x \in X : |f(x)| > M\right\} = 0\right\}$$

dır.

**Tanım 2.5.23.** ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) bir ölçüm uzayı ve $\left(f_n(x)\right)$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. $\left(f_n(x)\right)$ dizisinin bir $f(x)$ fonksiyonuna yakınsamadığı noktaların ölçümü sıfır ise $\left(f_n(x)\right)$ dizisi $f(x)$’e *hemen hemen her yerde yakınsaktır* denir.

**Tanım 2.5.24.** ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) bir ölçüm uzayı ve $f_n, f$ fonksiyonları $L_p$( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) uzayının elemanları olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall n \geq n_0$ için $\|f_n - f\ \|_p < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, $(f_n)$ dizisi $f$ fonksiyonuna *ortalama içinde yakınsaktır* denir.

**Tanım 2.5.25.** ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) bir ölçüm uzayı, $f_n$ ve $f$ fonksiyonları $X$ üzerinde tanımlı, reel değerli ve $\mathcal{A}$-ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

ise $(f_n)$ dizisi $f$ fonksiyonuna *ölçüm içinde yakınsaktır* denir. $(f_n)$ dizisi $f$ fonksiyonuna ölçüm içinde yakınsak ise $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ile gösterilir.

**Teorem 2.5.26.** ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) bir ölçüm uzayı, $f_n$ ve $f$ fonksiyonları $X$ üzerinde tanımlı, reel değerli ve $\mathcal{A}$-ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $(f_n)$ fonksiyon dizisi $f$ fonksiyonuna ölçüm içinde yakınsak ise $(f_n)$ dizisi $f$ fonksiyonuna hemen hemen her yerde yakınsayan bir $\left(f_{n_k}\right)$ alt dizisi içerir ( Kolmogorov ve Fomin, 1970 ).

## 2.6. Topolojik Gruplar

**Tanım 2.6.1.** $G \neq \varnothing$ ve "$\circ$" $G$ kümesi üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Eğer

**( G1 )** $\forall a, b \in G$ için $a \circ b \in G$ (kapalılık),

**( G2 )** $\forall a, b, c \in G$ için $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (birleşme),

**( G3 )** $\forall a \in G$ için $a \circ e = e \circ a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır.

**( G4 )** $\forall a \in G$ için $a \circ a' = a' \circ a = e$ olacak şekilde bir $a' \in G$ vardır.

aksiyomları sağlanırsa, $(G, \circ)$ ikilisine *grup* denir. Bu aksiyomlara ek olarak;

**( G5 )** $\forall a, b \in G$ için $a \circ b = b \circ a$

ise $(G, \circ)$ ikilisine *Abel grubu* veya *değişmeli grup* denir.

**Örnek 2.6.2.** $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi, üzerinde tanımlı olan toplama işlemine göre bir Abel grubu olmasına rağmen çarpma işlemine göre grup değildir.

**Tanım 2.6.3.** $A \neq \varnothing$ herhangi bir küme ve $(G, .)$ bir grup olsun. $x \in G$, $s \in A$ olmak üzere

$G \times A \to A$
$(x, s) \to xs$ fonksiyonu

**( i )** $\forall x \in G$, $\forall s \in A$ için $xs \in A$

**( ii )** $\forall x, y \in G$, $\forall s \in A$ için $(xy)s = x(ys)$

**( iii )** $1 \in G$, $\forall s \in A$ için $1s = s$

şartlarını sağlıyorsa, *G grubu A kümesi üzerine etki ediyor* denir.

**Tanım 2.6.4.** $(G, \circ)$ ve $(G', *)$ iki grup ve $f : G \to G'$ bir fonksiyon olsun. $\forall a, b \in G$ için $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$ ise $f$ 'ye $G$ 'den $G'$ 'ye bir *homomorfizma* denir.

**Tanım 2.6.5.** Örten ve 1-1 bir homomorfizmaya *izomorfizma* denir.

**Tanım 2.6.6.** Bir $G$ grubunun kendi üzerine bir izomorfizmasına bir *otomorfizma* denir. $G$'nin tüm otomorfizmaları kümesi Aut($G$) ile gösterilir.

$G$'nin tüm otomorfizmalar kümesi Aut($G$) bileşke işlemi altında bir grup oluşturur.

**Tanım 2.6.7.** $G$ bir grup ve $M \subset G$ olsun. $M$ 'yi kapsayan $G$'nin tüm alt gruplarının ara kesitine $M$ *'nin ürettiği alt grup* denir ve $\langle M \rangle$ ile gösterilir. $M$ 'nin elemanlarına da $\langle M \rangle$ grubunun *üreteçleri* denir.

**Teorem 2.6.8.** $(G,+)$ bir grup ve $M \subset G$ olsun. $M$ 'nin ürettiği alt grup;

$$\langle M \rangle = \{\ n_1a_1 + n_2a_2 + \ldots + n_ra_r : a_i \in M,\ r \in \mathbb{N},\ n_i \in \mathbb{Z},\ i = 1,2,\ldots,r\ \}$$

dir ( Hungerford, 1974 ).

**Tanım 2.6.9.** Bir $G$ grubu için $G = \langle M \rangle$ olacak şekilde bir $M \subset G$ bulunabiliyorsa, $G$'ye $M$ ile *üretilmiş grup* denir. Eğer $M$ sonlu bir küme ise $G$'ye *sonlu üreteçli grup* ve $M = \{a\}$ tek elemanlı bir küme ise $G$'ye $a$ ile üretilmiş *devresel grup* denir ve $G = \langle a \rangle$ yazılır.

**Örnek 2.6.10.** $(\mathbb{Z},+)$ ve $(\mathbb{Z}_n,+)$ birer sonlu üreteçli devresel değişmeli gruptur ( Hungerford, 1974 ).

**Tanım 2.6.11.** $G \neq \varnothing$ ve "$\circ$", $G$ kümesi üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Eğer **( G1 )** ve **( G2 )** şartları sağlanıyorsa, $(G,\circ)$ ikilisine bir *yarı grup* denir.

**Örnek 2.6.12.** $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi toplama işlemine göre bir yarı gruptur.

**Tanım 2.6.13.** $S$ bir yarı grup ve $A,\ B \subset S$ olsun.

$$A^{-1}B = \{\ x \mid Ax \cap B \neq \varnothing\ \}$$

$$A^{-1}Bc = \{\ x \mid Ax \cap Bc \neq \varnothing\ \}$$

şeklinde tanımlanır.

Yarı gruplarda genelde $A^{-1}$ 'i içeren ifadelerde birleşme özelliği yoktur.

**Örnek 2.6.14.** $\mathbb{N}$ toplamsal yarı grubu göz önüne alınırsa,

$$-[50,60] + [3,10] = \{\ x \mid [50,60] + x \ \cap\ [3,10] \neq \varnothing\ \} = \varnothing$$

olduğundan

$\left(-[50,60]+[3,10]\ \right)+200=\varnothing$ 'dir. Ancak

$$-[50,60]+\left(\ [3,10]+200\ \right)=-[50,60]+[203,210]$$

$$=\left\{\ x\ \middle|\ [50,60]+x\ \cap\ [203,210]\neq\varnothing\ \right\}$$

$$=[143,160]$$

dır. Yani, birleşme özelliği yoktur.

**Tanım 2.6.15.** $S$ bir yarı grup olsun. $\forall a,b,x\in S$ için $xa=xb$ iken $a=b$ sağlanıyorsa, $S$ 'ye *sol sadeleşme özelliğine sahiptir*, $ax=bx$ iken $a=b$ sağlanıyorsa, $S$ 'ye *sağ sadeleşme özelliğine sahiptir* denir.

**Tanım 2.6.16.** $(G,.)$ bir grup ve $(G,\ \tau)$ bir topolojik uzay olsun.

$\forall r,s\in G$ için $(s,\ r)\to sr$ ile tanımlı $G\times G\to G$ grup çarpma işlemi ve $s\to s^{-1}$ ile tanımlı $G\to G$ grup ters işlemi sürekli ise $G$'ye *topolojik grup* denir.

**Örnek 2.6.17.** Ayrık topoloji ile birlikte her grup bir topolojik grup oluşturur.

**Tanım 2.6.18.** Lokal kompakt topolojiye sahip olan topolojik gruba *lokal kompakt grup* denir.

**Örnek 2.6.19.** Her ayrık grup bir lokal kompakt gruptur.

**Örnek 2.6.20.** $\mathbb{R}$ kümesi toplama işlemi ve alışılmış topolojisi ile bir lokal kompakt gruptur.

**Tanım 2.6.21.** $G$ bir lokal kompakt grup olsun. $G$'nin Borel alt kümelerinden oluşan $\mathcal{B}(G)$ $\sigma$-cebiri üzerinde $\forall x\in G$ ve $\forall E\in\mathcal{B}(G)$ için $m(\ xE\ )=m(E)$ olacak şekilde tanımlanan regüler $m$ olasılık ölçümüne *sol Haar ölçümü* denir. Burada $m(\ xE\ )={}_{x}m(\ E\ )$ olarak tanımlıdır.

## 2.7. Dinamik Sistemler ve Ergodiklik

**Tanım 2.7.1.** ( $X_1$, $\mathcal{A}_1$, $\mu_1$ ), ( $X_2$, $\mathcal{A}_2$, $\mu_2$ ) birer ölçüm uzayı ve $T : X_1 \to X_2$ bir ölçülebilir dönüşüm olsun. $\forall A_2 \in \mathcal{A}_2$ için $\mu_2(A_2) = \mu_1(T^{-1}A_2)$ ise $T$ 'ye *ölçümü koruyan dönüşüm* denir.

**Tanım 2.7.2.** ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) bir ölçüm uzayı ve $T : X \to X$ ölçümü koruyan dönüşüm ise ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$, $T$ ) dörtlüsüne *dinamik sistem* denir.

**Örnek 2.7.3.** $X = [0, 1)$ olsun. $\mathcal{B}$, $X$ 'in alt kümelerinden oluşan Borel $\sigma$-cebiri ve $\lambda$ Lebesgue ölçümü olsun. $T(x) = 2x \ (mod\ 1)$ ile tanımlı $T : X \to X$ ölçümü koruyan dönüşümdür. Böylece ( $X$, $\mathcal{B}$, $\lambda$, $T$ ) bir dinamik sistemdir.

**Tanım 2.7.4.** ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) bir olasılık ölçüm uzayı ve $T : X \to X$ ölçümü koruyan dönüşüm olsun. $T^{-1}(A) = A$ şartını sağlayan $\forall A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) = 0$ veya $\mu(A) = 1$ ise ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$, $T$ )'ye *ergodiktir* denir.

**Örnek 2.7.5.** $X = \{a, b, c\}$ ve $\mathcal{A} = P(X)$ olmak üzere $\mu$ ölçümü

$$\mu(\varnothing) = 0 \text{ ve } \mu(X) = 1,$$

$$\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = \mu(\{c\}) = \frac{1}{3},$$

$$\mu(\{a, b\}) = \mu(\{a, c\}) = \mu(\{b, c\}) = \frac{2}{3},$$

olarak tanımlansın. $\mu(X) = 1$ olduğundan ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) bir olasılık ölçüm uzayıdır. Ayrıca $T : X \to X$ dönüşümü

$$T(a) = b,\ T(b) = c,\ T(c) = a$$

ile verilsin. $\forall A \in \mathcal{A}$ için $T^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ olduğundan $T$ ölçülebilir dönüşümdür.

$$\forall A \in \mathcal{A} \text{ için } \mu(A) = \mu(T^{-1}A)$$

olduğundan $T$ ölçümü koruyan dönüşümdür. $T^{-1}(A) = A$ eşitliğini sağlayan $\mathcal{A}$'nın elemanları $\varnothing$ ve $X$ 'dir.

$A = \varnothing \Rightarrow \mu(\varnothing) = 0$ 'dır.

$A = X \Rightarrow \mu(X) = 1$ 'dir. Böylece $T$ dönüşümü ergodiktir.

**Örnek 2.7.6.** $X=[0,\ 1)$ olsun. $\mathcal{B}$, $X$ 'in alt kümelerinden oluşan Borel $\sigma$-cebiri ve $\lambda$ Lebesgue ölçümü olsun. $0\leq\alpha<1$ olmak üzere $T(x)=x+\alpha\ (mod\,1)$ ile tanımlı $T:X\rightarrow X$ dönüşümü ergodik değildir.

**Çözüm:** $\alpha=\frac{1}{2}$ olsun. $T(x)=x+\frac{1}{2}\ (mod\,1)$ olur. $T^{-1}(B)=B$ eşitliğini sağlayan $B\in\mathcal{A}$ elemanları göz önüne alınmalıdır.

$B=\left(\frac{1}{12},\frac{1}{11}\right)\cup\left(\frac{7}{12},\frac{13}{22}\right)\in\mathcal{A}$ olsun.

$T^{-1}(x)=x-\frac{1}{2}\ (mod\,1)=x+\frac{1}{2}\ (mod\,1)$ ’dir.

$$T^{-1}(B)=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{2},\ \frac{1}{11}+\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{12}+\frac{1}{2},\ \frac{13}{22}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{7}{12},\ \frac{13}{22}\right)\cup\left(\frac{13}{12},\ \frac{24}{22}\right)=\left(\frac{1}{12},\frac{1}{11}\right)\cup\left(\frac{7}{12},\frac{13}{22}\right)=B$$

dir.

$$\mu(B)=\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\frac{13}{22}-\frac{7}{12}=\frac{1}{66}$$

olur. $\mu(B)\neq 0$ veya 1 olduğundan $T$ dönüşümü ergodik değildir.

**Teorem 2.7.7.** ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) bir olasılık ölçüm uzayı ve $T:X\rightarrow X$ ölçümü koruyan dönüşüm ise aşağıdakiler denktir:

**( i )** $T$ ergodiktir.

**( ii )** $f$ ölçülebilir ve $\forall x\in X$ için $(f\ o\ T)(x)=f(x)$ iken $f$ hemen hemen her yerde sabittir.

**( iii )** $f$ ölçülebilir ve hemen hemen her yerde $(f\ o\ T)(x)=f(x)$ iken $f$ hemen hemen her yerde sabittir.

**( iv )** $f\in L_2(\mu)$ ve $\forall x\in X$ için $(f\ o\ T)(x)=f(x)$ iken $f$ hemen hemen her yerde sabittir.

**( v )** $f\in L_2(\mu)$ ve $(f\ o\ T)(x)=f(x)$ hemen hemen her yerde sabit iken $f$ hemen hemen her yerde sabittir ( Walters, 1982 ).

**Teorem 2.7.8. ( Birkhoff Ergodik Teoremi )** ( $X, \mathcal{A}, \mu, T$ ) bir dinamik sistem, ( $X, \mathcal{A}, \mu$ ) bir $\sigma$-sonlu ölçüm uzayı ve $f \in L_1$ ( $X, \mathcal{A}, \mu$ ) olsun. $x \in X$ için

**( i )** $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(T^i x\right)$ ortalaması $f^* \in L_1$ ( $X, \mathcal{A}, \mu$ ) şeklinde bir fonksiyona hemen hemen her yerde yakınsaktır.

**( ii )** hemen hemen her yerde $f^* \circ T = f^*$'dır.

**( iii )** $\mu(X) < \infty$ ise $\int_X f^*(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$'dir.

**( iv )** $T$ ergodik ise $f^*$ hemen hemen her yerde sabittir. $T$ ergodik ve $\mu(X) < \infty$ ise hemen hemen her yerde $f^*(x) = \frac{1}{\mu(X)}\int f(x) d\mu(x)$'dir. Ayrıca $\mu(X)=1$ ise $f^*(x) = \int f(x) d\mu(x)$'dir ( Walters, 1982; Krengel 1985 ).

**Teorem 2.7.9. ( Von-Neumann Ortalama Ergodik Teoremi )**

$T$, ( $X, \mathcal{A}, \mu$ ) olasılık ölçüm uzayında bir ölçümü koruyan dönüşüm ve $1 \le p < \infty$ olsun. $f \in L_p$ ( $X, \mathcal{A}, \mu$ ) ise hemen hemen her yerde $f^* \circ T = f^*$'dır ve

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(T^i x\right) - f^*(x) \right\|_p \to 0$$

dır ( Walters, 1982; Krengel, 1985 ).

**Tanım 2.7.10** $U : L^1_{\mathbb{R}}(\mu) \to L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ operatörü verilsin. $f \ge 0$ iken $Uf \ge 0$ oluyorsa, *U operatörü pozitiftir* denir.

**Teorem 2.7.11. ( Maksimal Ergodik Teorem )** $U : L^1_{\mathbb{R}}(\mu) \to L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ pozitif lineer operatör ve $\| U \| \le 1$ olsun. $N > 0$ bir tamsayı ve $f \in L^1(\mu)$ olsun. $n \ge 1$ için $f_0 = 0,\ f_n = f + Uf + U^2 f + \ldots + U^{n-1} f$ ve $F_N = \max_{0 \le n \le N} f_n \ge 0$ olarak tanımlansın. Bu takdirde,

$$\int_{\{x:\, F_N(x) > 0\}} f(x) d\mu(x) \ge 0$$

dır ( Walters, 1982; Petersen, 1983 ).

**Sonuç 2.7.12.** $T : X \to X$ ölçümü koruyan dönüşümü için

$$f^*(x) = \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right) \text{ olsun.}$$

$f \in L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ ise

$$\int_{\{f^*(x) > \alpha\}} f(x)\, d\mu(x) \geq \alpha\ \mu\{x \mid f^*(x) > \alpha\}$$

dır ( Walters, 1982; Petersen, 1983 ).

## 2.8. Ortalanabilir Gruplar

Bu bölümde *G* bir grubu, *S* ise bir yarı grubu göstermektedir.

**Tanım 2.8.1.** *G* bir küme ve $B(G)$, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in G}\{\ |f(x)|\ \}$ normu ile oluşturulmuş *G* üzerindeki tüm sınırlı, kompleks değerli fonksiyonların uzayı ve *X*, sabit fonksiyonları içeren kompleks eşlenik altında kapalı olan $B(G)$'nin kapalı alt uzayı olsun. $m : X \to \mathbb{C}$ lineer fonksiyoneli,

**( 1 )** $\forall f \in X$ için $m\left(\overline{f}\right) = \overline{m(f)}$,

**( 2 )** Reel değerli her $\forall f \in X$ için

$\inf_{x\in G}\{f(x)\} \leq m(f) \leq \sup_{x\in G}\{f(x)\}$,

şartlarını sağlıyorsa, *m*'ye $X$ üzerinde bir *ortalama* denir.

Burada **( 2 )** şartı,

**( 2′ )** $f \geq 0 \Rightarrow m(f) \geq 0$ ve $m(I) = 1$

şartına denktir ( Greenleaf, 1969 ).

**Tanım 2.8.2.** $G$ bir grup olsun. $\forall f \in X$, $\forall t,\ x \in G$ için ${}_x f(t) = f\left(x^{-1}t\right)$ olmak üzere $m\left({}_x f\right) = m(f)$ ise *m*'ye *sol değişmez ortalama* denir. Benzer olarak, $f_x(t) = f(tx)$ olmak üzere $\forall f \in X$, $\forall t,\ x \in G$ için $m\left(f_x\right) = m(f)$ ise *m*'ye *sağ değişmez ortalama* denir.

**Tanım 2.8.3.** *G* bir grup olsun. *X* üzerinde bir sol (veya sağ) değişmez ortalama varsa, *G*'ye bir *ortalanabilir grup* denir.

Genel olarak, $X$ kümesi üzerinde bir ve yalnız bir değişmez ortalama olmadığından uygulamalarda değişmez ortalamanın tekliği önemsizdir. Fakat ortalanabilirlikten söz edebilmek için $X$ üzerinde en az bir değişmez ortalama var olmalıdır.

**Uyarı 2.8.4.** $G$ bir lokal kompakt grup olsun. $G$ üzerinde bir $\lambda$ sol Haar ölçümü vardır. $L_\infty(G)$ üzerindeki tüm ortalamaların kümesi $\mathrm{M}(G)$ ile gösterilsin. $G$ bir ayrık grup ise $L_1(G)=l_1(G)$ ve $L_\infty(G)=l_\infty(G)$'dir. Ayrıca $\forall x\in G$ elemanı, $x\to\chi_{\{x\}}=\delta_x$ eşleştirmesiyle $l_1(G)$'nin elemanı olarak göz önüne alınabilir

**Teorem 2.8.5.** ( $X, \mathcal{A}, \mu$ ) bir ölçüm uzayı olsun. $L_1$( $X, \mathcal{A}, \mu$ ) uzayı, ikinci duali olan $L_\infty^*$( $X, \mathcal{A}, \mu$ ) uzayı içine $\hat{f}(\phi)=\phi(f)$ şeklinde tanımlanan $f\to\hat{f}$ dönüşümü ile izometrik olarak gömülebilir ( Kolmogorov ve Fomin, 1970; Paterson, 1988 ).

**Önerme 2.8.6. ( i )** $m\in L_\infty^*(G)$ elemanının bir ortalama olması için gerek ve yeter koşul $m(1)=1$ ve $L_\infty(G)$ uzayı içinde $\phi\geq 0$ oldukça $m(\phi)\geq 0$ olmasıdır. Ayrıca $m\in\mathrm{M}(G)$ ve $\phi\in L_\infty(G)$ reel değerli ise

$$\underset{x\in G}{ess}\inf\phi(x)\leq m(\phi)\leq\underset{x\in G}{ess}\sup\phi(x)\text{'dir.}$$

**( ii )** $P(G)=\left\{f\in L_1(G): f\geq 0,\ \int fd\lambda=1\right\}$'dır. Bir önceki teoremde tanımlanan $\hat{f}\in L_\infty^*(G)$ fonksiyonellerinden oluşan $P(G)^\wedge$ kümesi $\mathrm{M}(G)$ kümesi içinde zayıf$^*$ topolojiye göre yoğundur ( Paterson,1988 ).

**Örnek 2.8.7.** $G=\mathbb{Z}$ bir ortalanabilir gruptur ( Paterson, 1988 ).

**Çözüm:** $\mathbb{Z}$ ayrık grup olduğundan $L_1(\mathbb{Z})=l_1(\mathbb{Z})$ ve $L_\infty(\mathbb{Z})=l_\infty(\mathbb{Z})$'dir.

$$P(G)=\left\{\sum_{r=-\infty}^{\infty}a_r\delta_r\in l_1(\mathbb{Z})\,\middle|\ \forall r,\ a_r\geq 0;\ \sum_{r=-\infty}^{\infty}a_r=1\right\}$$

şeklindedir. $\mathbb{Z}$'nin bir ortalanabilir grup olduğunu gösterebilmek için Önerme 2.8.6. (ii) gereği $\hat{f}\in l_\infty^*(\mathbb{Z})$ fonksiyonellerinden oluşan $P(G)^\wedge$ kümesi $l_\infty(\mathbb{Z})$ üzerindeki tüm ortalamaların kümesi olan $\mathrm{M}(\mathbb{Z})$ kümesi içinde zayıf$^*$ topolojiye göre yoğun olduğundan $\forall f\in\mathrm{M}(\mathbb{Z})$ için $\hat{f}_n\to f$ olacak biçimde $P(G)^\wedge$ kümesi içinde bir $(\hat{f}_n)$

dizisi vardır. Bunun için öncelikle $P(G)$ kümesi içinde bir $(f_n)$ dizisi oluşturulmalıdır. $\mathbb{Z}$ içindeki $[-n,n]$ aralığında

$$f_n = \frac{1}{2n+1}\sum_{r=-n}^{n}\delta_r$$

ortalaması göz önüne alınsın. $\phi \in l_\infty(\mathrm{Z})$ ve $\mathbb{Z}$ içinde $s \geq 0$ için

$$\begin{aligned}
\left|\hat{f}_n\left({}_s\phi\right)-\hat{f}_n(\phi)\right| &= \left|{}_s\phi(f_n)-\phi(f_n)\right| \\
&= \left|{}_s\phi\left(\frac{1}{2n+1}\sum_{r=-n}^{n}\delta_r\right)-\phi\left(\frac{1}{2n+1}\sum_{r=-n}^{n}\delta_r\right)\right| \\
&= \left|\phi\left(\frac{1}{2n+1}\sum_{r=-n+s}^{n+s}\delta_r\right)-\phi\left(\frac{1}{2n+1}\sum_{r=-n}^{n}\delta_r\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2n+1}\left(\sum_{r=-n+s}^{n+s}\phi(r)-\sum_{r=-n}^{n}\phi(r)\right)\right| \\
&= \frac{1}{2n+1}\left|\sum_{r=-n}^{n}\left(\phi(r+s)-\phi(r)\right)\right|
\end{aligned}$$

Örneğin $s=2$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n+1}\left|\sum_{r=-n}^{n}\left(\phi(r+2)-\phi(r)\right)\right| &= \frac{1}{2n+1}\left|\begin{array}{l}\phi(-n+2)-\phi(-n)+\phi(-n+3)-\phi(-n+1)+\\ \phi(-n+4)-\phi(-n+2)+\ldots+\phi(n)-\phi(n-2)+\\ \phi(n+1)-\phi(n-1)+\phi(n+2)-\phi(n)\end{array}\right| \\
&= \frac{1}{2n+1}\left|\phi(n+1)+\phi(n+2)-\phi(-n)-\phi(-n+1)\right| \\
&= \frac{1}{2n+1}\left|\sum_{r=n+1}^{n+2}\phi(r)-\sum_{r=-n}^{-n+1}\phi(r)\right|
\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitlik $\mathbb{Z}$ içindeki tüm $s \geq 0$ için genelleştirilirse,

$$\left|\hat{f}_n\left({}_s\phi\right)-\hat{f}_n(\phi)\right| = \frac{1}{2n+1}\left|\sum_{r=-n}^{n}\left(\phi(r+2)-\phi(r)\right)\right| = \frac{1}{2n+1}\left|\sum_{r=n+1}^{n+s}\phi(r)-\sum_{r=-n}^{-n+s-1}\phi(r)\right|$$

elde edilir. Bu halde

$$\begin{aligned}
\left|\hat{f}_n\left({}_s\phi\right)-\hat{f}_n(\phi)\right| &= \frac{1}{2n+1}\left|\sum_{r=n+1}^{n+s}\phi(r)-\sum_{r=-n}^{-n+s-1}\phi(r)\right| \leq \frac{1}{2n+1}\left(\sum_{r=n+1}^{n+s}\left|\phi(r)\right|+\sum_{r=-n}^{-n+s-1}\left|\phi(r)\right|\right) \\
&\leq \frac{2s\left\|\phi\right\|_\infty}{2n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0
\end{aligned}$$

olur. Buradan $\lim_{n\to\infty}\left|\hat{f}_n\left({}_s\phi\right)-\hat{f}_n\left(\phi\right)\right|=0$ elde edilir. $\lim_{n\to\infty}\hat{f}_n=f$ olsun. Benzer işlemler $s<0$ için de yapılabilir.

$$\left|f\left({}_s\phi\right)-f\left(\phi\right)\right|\le\left|f\left({}_s\phi\right)-f_n\left({}_s\phi\right)\right|+\left|f_n\left({}_s\phi\right)-f_n\left(\phi\right)\right|+\left|f_n\left(\phi\right)-f\left(\phi\right)\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Buradan $\left(\hat{f}_n\right)$ dizisinin zayıf* topolojiye göre M(□) içindeki bir yığılma noktası sol değişmez ortalama olur. Böylece □ bir ortalanabilir gruptur.

**Uyarı 2.8.8.** Yarı gruplar için sol ortalanabilir **( LO )** veya sağ ortalanabilir **( RO )** terimleri kullanılır. Çünkü yarı grup üzerindeki bir sol değişmez ortalama sağ değişmez ortalama olmayabilir.

**Örnek 2.8.9.** $S\neq\varnothing$ olsun. *S* üzerinde $x,\ y\in S$ için $xy=y$ çarpımı tanımlansın. Böylece *S* bir yarı grup olur. $f\in B\left(S\right)$ ise $x,\ t\in S$ için

$${}_xf\left(t\right)=f\left(xt\right)=f\left(t\right)$$

olduğundan $B\left(S\right)$ uzayı üzerindeki her ortalama sol değişmez olur. Fakat

$$f_x\left(t\right)=f\left(tx\right)=f\left(x\right)$$

olduğundan $B\left(S\right)$ üzerindeki bir ortalama sağ değişmez olmaz. $B\left(S\right)$ uzayı üzerindeki bir ortalamanın sağ değişmez olması ancak *S* tek elemanlı iken mümkündür ( Greenleaf, 1969 ).

**Tanım 2.8.10.** *S* yarı grubu içinde “.” birleşmeli ikili işlemi verilsin. $l_1\left(S\right)$ ise

$$\sum\left\{\ \left|f\left(s\right)\right|:\ s\in S\ \right\}<\infty$$

olacak şekilde *S* üzerindeki tüm reel değerli $f$ fonksiyonlarının kümesi olsun. $l_1\left(S\right)$ içindeki her bir $f$ için

$$\left\|f\right\|=\sum\left\{\ \left|f\left(s\right)\right|:\ s\in S\ \right\}$$

tanımlansın. $f_1,f_2\in l_1\left(S\right)$ için $f_1\cdot f_2$ konvolüsyonu

$$f_1\cdot f_2\left(t\right)=\sum\left\{f_1\left(s_1\right)f_2\left(s_2\right):\ s_1.s_2=t\right\}$$

ile tanımlanır ( Namioka, 1964 ).

**Önerme 2.8.11.** $I\left(s\right)\left(s'\right)=\begin{cases}1, & \mathrm{s}=\mathrm{s}'\\ 0, & \mathrm{s}\neq\mathrm{s}'\end{cases}$ ile tanımlanan $I\colon S\to l_1\left(S\right)$ fonksiyonu

$S$ ’den $l_1(S)$ içine bir izomorfizmadır. Ayrıca $\forall s_1, s_2 \in S$ için

$$I(s_1.s_2) = I(s_1) \cdot I(s_2)$$

’dir ( Day, 1957 ).

$I$ fonksiyonu $S$ ’den $l_1(S)$ içine bir izomorfizma olduğundan $S$ içinde çarpma işleminde gösterimde karışıklık oluşturmaması için hem $S$ içindeki $s$, hem de $l_1(S)$ içindeki $I(s)$, $s$ ile gösterilecektir.

**Tanım 2.8.12.** $f \in l_1(S)$ olsun.

**( a )** $\forall s \in S$ için $f(s) \geq 0$,

**( b )** $\{s : f(s) > 0\}$ kümesi sonlu,

**( c )** $\| f \| = \sum \{ f(s) : s \in S \} = 1$,

şartları sağlanıyorsa, $f$ ’ye bir *sonlu ortalama* denir ( Namioka, 1964 ).

Tüm sonlu ortalamaların kümesi $\Phi$ ile gösterilecektir.

**Tanım 2.8.13.** $N$ bir yönlü küme olmak üzere $\{f_\gamma : \gamma \in N\} (\subset \Phi)$ kümesine $\Phi$ içinde bir *net* denir.

**Teorem 2.8.14.** $S$ yarı grubunun sağ ortalanabilir olması için gerek ve yeter koşul $\forall s \in S$ ve $\Phi$ içinde bir $\{f_\gamma\}$ neti için

$$\lim_{\gamma \to \infty} \| f_\gamma \cdot s - f_\gamma \| = 0$$

olacak şekilde bir $\{f_\gamma \cdot s - f_\gamma\}$ netinin bulunmasıdır ( Day, 1957 ).

**Tanım 2.8.15.** $\varnothing \neq A \subset S$ sonlu olsun. $A$ kümesinin kardinalitesi $|A|$ olmak üzere $\Phi$ ’nin bir $\mu_A$ elemanı

$$\mu_A(s) = \begin{cases} |A|^{-1}, & s \in A \text{ ise} \\ 0, & s \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanır. Böylece $\mu_A = |A|^{-1} . \chi_A$ olur.

**Önerme 2.8.16.** $f \in \Phi$ olsun. Bu takdirde her sonlu $A_i$; $i = 1, \ldots, n-1$ için $A_i \supset A_{i+1}$; $i = 1, \ldots, n$ için $\lambda_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ olmak üzere $f \in \Phi$,

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{A_i}$$

şeklinde yazılabilir ( Namioka, 1964 ).

Aşağıdaki önermelerin ispatı Namioka(1964) tarafından verilmiştir. Bu ispatları açıklayıcı bilgiler kullanarak ifade edeceğiz:

**Önerme 2.8.17.** $\varnothing \neq A \subset S$ sonlu ve $s \in S$ olsun. Bu takdirde,

$$\left(\mu_A \cdot s - \mu_A\right)(t) = \begin{cases} \geq |A|^{-1}, & t \in A.s \ \backslash \ A \text{ için} \\ < \ 0, & t \in A \ \backslash \ A.s \text{ için} \\ \geq \ 0, & \text{diğer } t \text{ için} \end{cases} \qquad (2.8.1.)$$

dir ( Namioka, 1964 ).

**İspat:** $s' \in A \Rightarrow \mu_A(s') = |A|^{-1}$'dir. Ayrıca $s = s_1 \Rightarrow I(s)(s_1) = 1$ olduğundan

$$\mu_A \cdot s(t) = \mu_A \cdot I(s)(t) = \sum \left\{ \mu_A(s') \cdot I(s)(s_1) : \ s'.s = t \right\}$$
$$= \sum \left\{ \mu_A(s') : s' \cdot s = t \right\}$$

'dir. Buradan

$$\mu_A \cdot s(t) = |A|^{-1} \left| A \cap \{ s' : \ s'.s = t \} \right|$$

olur. Bu halde

$$\left(\mu_A \cdot s\right)(t) = \begin{cases} |A|^{-1}, & t \in A.s \text{ ise} \\ = 0, & t \notin A.s \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

$$t \in A.s \ \backslash \ A \Rightarrow t \in A.s \text{ ve } t \notin A$$
$$\Rightarrow \mu_A \cdot s(t) \geq |A|^{-1} \text{ ve } \mu_A(t) = 0$$
$$\Rightarrow \mu_A \cdot s(t) - \mu_A(t) = \left(\mu_A \cdot s - \mu_A\right)(t) \geq |A|^{-1} \qquad (2.8.2.)$$

olur.

$$t \in A \ \backslash \ A \cdot s \Rightarrow t \in A \text{ ve } t \notin A \cdot s$$
$$\Rightarrow \mu_A \cdot s(t) = 0 \text{ ve } \mu_A(t) \geq |A|^{-1}$$

$$\Rightarrow \left(\mu_A \cdot s - \mu_A\right)(t) \leq -|A|^{-1} < 0 \qquad (2.8.3.)$$

olur. (2.8.2.), (2.8.3.) eşitsizlikleri gereği (2.8.1.) ifadesi elde edilir.

**Önerme 2.8.18.** $f \in \Phi$, Önerme 2.8.16.'daki gibi tanımlanırsa, her bir $s \in S$ için

$$\|f \cdot s - f\| \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left|A_i \cdot s \setminus A_i\right| \ / \ \left|A_i\right|$$

dir ( Namioka, 1964 ).

**İspat:** $f \in \Phi$ ise Önerme 2.8.16. gereği

$$f \cdot s - f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\mu_{A_i} \cdot s - \mu_{A_i}\right)$$

dir.

$$B = \bigcup \left\{ \left(A_j \setminus A_j . s\right) : j = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

olsun. $\lambda_i > 0$ ve Önerme 2.8.17. gereği her bir $\lambda_i \left(\mu_{A_i} \cdot s - \mu_{A_i}\right)$, $S \setminus B$ üzerinde negatif değildir. Ya $A_j \subset A_i$ ya da $A_i \subset A_j$ olduğundan $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere her $i, j$ için

$$\left(A_j \setminus A_j \cdot s\right) \cap \left(A_i \cdot s \setminus A_i\right) = \varnothing$$

dir. Böylece her bir $A_i . s \setminus A_i$ kümesi $S \setminus B$ içinde kapsanır. Buradan

$$\begin{aligned}
\|f \cdot s - f\| &\geq \sum \left\{ \left(f \cdot s - f\right)(t) : \ t \in S \setminus B \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum \left\{ \left(\mu_{A_i} \cdot s - \mu_{A_i}\right)(t) : \ t \in S \setminus B \right\} \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum \left\{ \left(\mu_{A_i} \cdot s - \mu_{A_i}\right)(t) : \ t \in A_i \cdot s \setminus A_i \right\}
\end{aligned}$$

olur. Önerme 2.8.17. gereği

$$t \in A_i \cdot s \setminus A_i \Rightarrow \left(\mu_{A_i} \cdot s - \mu_{A_i}\right)(t) \geq \left|A_i\right|^{-1}$$

olduğundan

$$\|f \cdot s - f\| \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left|A_i . s \setminus A_i\right| \ / \ \left|A_i\right|$$

elde edilir.

**Tanım 2.8.19. ( Zayıf Følner Şartı )** $S$ 'nin birbirinden farklı olması gerekmeyen $s_1, \ldots, s_n$ elemanları için

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|A \setminus s_i . A\right| \le k\left|A\right|$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir sonlu $A$ alt kümesi için $0 < k < 1$ sayısı varsa, $S$ yarı grubu *Zayıf Følner Şartı'nı sağlar* denir.

**Tanım 2.8.20. ( Kuvvetli Følner Şartı )** $S$ 'nin verilen bir sonlu alt kümesi $F$ olsun. Her pozitif $\varepsilon$ sayısı ve $\forall s \in F$ için

$$\left|A \setminus s.A\right| \le \varepsilon\left|A\right|$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir sonlu $A$ alt kümesi varsa, $S$ yarı grubu *Kuvvetli Følner Şartı'nı sağlar* denir.

Zayıf Følner Şartı ve Kuvvetli Følner Şartı sırasıyla **ZFŞ** ve **KFŞ** ile gösterilecektir. Eğer $S$ bir grupsa, **ZFŞ**'nin ve **KFŞ**'nin her ikisi $S$ 'nin ortalanabilir oluşuna denktir.

**Tanım 2.8.21. ( Følner Şartı )** $S$ 'nin verilen bir sonlu alt kümesi $F$ olsun. Her pozitif $\varepsilon$ sayısı ve $\forall s \in F$ için

**( FŞ )** $\quad \left|A.s \setminus A\right| \le \varepsilon\left|A\right|$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir sonlu $A$ alt kümesi varsa, $S$ yarı grubu *Følner Şartı'nı sağlar* denir.

Namioka(1964) çalışmasında ispatı verilen aşağıdaki teorem bir yarı grubun sağ ortalanabilir oluşunun Følner Şartı'na denkliğini gösterir. Bu teorem açıklayıcı bilgiler kullanılarak aşağıdaki şekilde ispatlanmaktadır:

**Teorem 2.8.22.** $S$ bir sağ ortalanabilir yarı grup olsun. Bu takdirde, $S$ 'nin verilen bir sonlu alt kümesi $F$, pozitif $\varepsilon$ sayısı ve $\forall s \in F$ için

$$\left|A.s \setminus A\right| < \varepsilon\left|A\right|$$

eşitsizliğini sağlayan, $S$ 'nin bir sonlu $A$ alt kümesi vardır ( Namioka, 1964 ).

**İspat:** $F = \{s_1, \dots, s_k\}$ olsun. Teorem 2.8.14. gereği,

$j = 1, 2, \dots, k$ için $\left\|f \cdot s_j - f\right\| < \dfrac{\varepsilon}{k}$ olacak şekilde bir $f \in \Phi$ vardır. Önerme 2.8.16. gereği, $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{A_i}$ formunda yazılabilir. $N = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. $N$ 'nin tüm alt kümelerinin ailesi üzerindeki $m$ ölçümü

$K \subset N$ için $m(K) = \sum\{ \lambda_i : i \in K \}$

şeklinde tanımlansın. $K = \varnothing$ ise $m(K) = 0$ 'dır. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ olduğundan $m(N) = 1$ 'dir.

Her bir $j = 1, 2, \ldots, k$ için

$$K_j = \left\{ i \middle| \ |A_i \cdot s_j \setminus A_i| \,/\, |A_i| < \varepsilon \right\}$$

olsun. Bu takdirde, her bir $i \in N \setminus K_j$ için

$$|A_i \cdot s_j \setminus A_i| \,/\, |A_i| \geq \varepsilon$$

olur. Önerme 2.8.18. gereği her bir $j = 1, 2, \ldots, k$ için

$$\frac{\varepsilon}{k} > \|f \cdot s_j - f\| \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |A_i \cdot s_j \setminus A_i| \,/\, |A_i|$$

dir.

$$\frac{\varepsilon}{k} > \varepsilon \cdot \sum\{ \lambda_i : i \in \mathrm{N} \setminus \mathrm{K_j} \} = \varepsilon \cdot m(\mathrm{N} \setminus \mathrm{K_j})$$

olur. Böylece her bir $j = 1, 2, \ldots, k$ için

$m(N \setminus K_j) < k^{-1}$ olur. Buradan

$$1 - m\left( \bigcap_{j=1}^{k} K_j \right) = m\left( N \setminus \bigcap_{j=1}^{k} K_j \right)$$

$$= m\left( \bigcup_{j=1}^{k} (N \setminus K_j) \right) \leq \sum_{j=1}^{k} m(N \setminus K_j) < k^{-1}k = 1$$

olur. Böylece $m\left( \bigcap_{j=1}^{k} K_j \right) > 0$ elde edilir.

$$m\left( \bigcap_{j=1}^{k} K_j \right) > 0 \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{k} K_j \neq \varnothing$$

dir. $i \in \bigcap_{j=1}^{k} K_j$ seçilirse ve $A = A_i$ alınırsa, teoremin şartı sağlanır.

**Sonuç 2.8.23.** $S$ sağ sadeleşme özelliğine sahip bir sağ ortalanabilir yarı grup olsun. Bu takdirde, $S$ 'nin verilen bir sonlu alt kümesi $F$, $0 < k < 1$ olacak şekilde $k$ sayısı ve $\forall s \in F$ için

$$|A \cdot s \cap A| \geq k|A|$$

olacak şekilde $S$ ’nin bir sonlu $A$ alt kümesi vardır ( Namioka, 1964 ).

**Teorem 2.8.24. ( Zayıf Namioka Følner Şartı )** $S$ ’nin sağ ortalanabilir olması için $S$ ’nin birbirinden farklı olması gerekmeyen $s_1,\ldots,s_n$; $s_1',\ldots,s_n'$ elemanlarının bir seçimi ve bir sonlu $A$ alt kümesi için

**( ZNFŞ )** $$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left|A\cdot s_i \cap A\cdot s_i'\right| \geq r\cdot|A|$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $0<r<1$ sayısının bulunması yeterlidir ( Namioka, 1964 ).

Kuvvetli Namioka Folner Şartı Namioka(1964) çalışmasında ispatlanmıştır. Bu ispat açık olarak aşağıda verilmektedir:

**Teorem 2.8.25. ( Kuvvetli Namioka Folner Şartı )** $S$ ’nin sağ ortalanabilir olması için $S$ ’nin birbirinden farklı olması gerekmeyen $s_1,\ldots,s_n$ elemanlarının bir seçimi ve bir sonlu $A$ alt kümesi için

**( KNFŞ )** $$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left|A \setminus A\cdot s_i\right| \leq \varepsilon\cdot|A|$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ sayısının bulunması yeterlidir ( Namioka, 1964 ).

**İspat:** $s_1,\ldots,s_n$; $s_1',\ldots,s_n'$ elemanları verilsin. Kabulden dolayı,

$$(2n)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\ \left|A \setminus A\cdot s_i\right| + \left|A \setminus A\cdot s_i'\right|\ \right) \leq \varepsilon|A|$$

olacak biçimde bir sonlu $A$ alt kümesi vardır.

$$\begin{aligned}\left|A \setminus A\cdot s_i\right| + \left|A \setminus A\cdot s_i'\right| &\geq \left|A \setminus \left(A\cdot s_i \cap A\cdot s_i'\right)\right| \\ &= |A| - \left|A\cdot s_i \cap A\cdot s_i'\right| \qquad (2.8.4)\end{aligned}$$

dir. (2.8.4) gereği,

$$2\varepsilon\cdot|A| \geq n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\ |A| - \left|A\cdot s_i \cap A\cdot s_i'\right|\ \right) = |A| - n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left|A\cdot s_i \cap A\cdot s_i'\right|$$

olur. Buradan

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left|A\cdot s_i \cap A\cdot s_i'\right| \geq (1-2\varepsilon)|A|$$

dır. $0<1-2\varepsilon<1$ olduğundan Teorem 2.8.24.'ün şartı sağlanır. Böylece $S$ sağ ortalanabilirdir.

**Örnek 2.8.26.** $S=\{a,\ b\}$ yarı grubu aşağıdaki çarpma tablosu ile göz önüne alınsın.

| $\cdot$ | a | b |
|---|---|---|
| a | a | b |
| b | a | b |

Burada $S \setminus S\cdot a=\{b\}$ ve $S \setminus S\cdot b=\{a\}$ olduğundan $|S \setminus S\cdot a|=|S \setminus S\cdot b|=1$'dir.

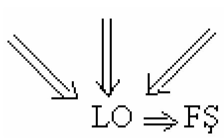
$$\frac{1}{2}\left(\ |S \setminus S\cdot a|+|S \setminus S\cdot b|\ \right)\leq \varepsilon\cdot|S|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 2\leq \varepsilon\cdot 2$$

eşitsizliği $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ için sağlanır ( Namioka, 1964 ).

Aşağıdaki diyagram bir yarı grup için yukarıda bahsedilen çeşitli Følner tipi şartları özetler:

KFŞ$\Rightarrow$ KNFŞ$\Rightarrow$ ZNFŞ$\Rightarrow$ ZFŞ




**Teorem 2.8.27.** $S$ bir sol ortalanabilir yarı grup ise Følner Şartı'nı sağlar ( Paterson, 1988 ).

**Teorem 2.8.28.** $S$ yarı grubu Kuvvetli Følner Şartı'nı sağlıyorsa, $S$ bir sol ortalanabilir yarı gruptur ( Paterson, 1988 ).

**Uyarı 2.8.29.** $S$ sol sadeleşme özelliğine sahipse her sonlu $A\subset S$ ve $\forall s\in S$ için $|A \setminus s\cdot A|=|s\cdot A \setminus A|$'dır. Böylece Følner Şartı Kuvvetli Følner Şartı'na denk olur ( Argabright ve Wilde, 1967 ).

**Teorem 2.8.30.** Sol sadeleşme özelliğine sahip bir $S$ yarı grubunun sol ortalanabilir olması için gerek ve yeter koşul Kuvvetli Følner Şartı'nı sağlamasıdır ( Paterson, 1988).

Şimdi bir $S$ yarı grubu içindeki sol Følner dizisinin tanımı verilecektir.

**Tanım 2.8.31.** $\forall x \in S$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|F_n \Delta x F_n|}{|F_n|} = 0$$

olacak şekilde $S$ 'nin sonlu alt kümelerinin dizisi olan $(F_n)$'e $S$ içinde bir *sol Følner dizisi* denir.

**Teorem 2.8.32.** Sol sadeleşme özelliğine sahip bir $S$ yarı grubunun sol ortalanabilir olması için gerek ve yeter koşul bir sol Følner dizisi içermesidir ( Paterson, 1988 ).

**Tanım 2.8.33. ( Tempelman Şartı )** $(F_n)$, $S$ içinde bir Følner dizisi olsun. Eğer $(F_n)$ dizisi

**( 1 )** $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \dots$

**( 2 )** $\forall n$ ve $a \in S$ için $\left|F_n^{-1} F_n a\right| \leq C\left|F_n\right|$ olacak şekilde bir $C$ sabiti vardır.

şartlarını sağlıyorsa, $(F_n)$ Følner dizisi *Tempelman Şartı'nı sağlar* denir.

**Tanım 2.8.34. ( Zayıf Tempelman Şartı )** $(F_n)$, $S$ içinde bir Følner dizisi olsun. $\forall n > 0$ ve $a \in S$ için

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} F_k^{-1} F_n a\right| < C\left|F_n\right|$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C$ sabiti varsa, $(F_n)$ Følner dizisi *Zayıf Tempelman Şartı'nı sağlar* denir.

**Uyarı 2.8.35.** $S$ bir grup ise $\left|F_n^{-1}F_n a\right| = \left|F_n^{-1}F_n\right|$ 'dır ( Butkevich, 2001 ).

**Tanım 2.8.36. ( Shulman Şartı )** $G$ bir grup ve $(F_n)$, $G$ içinde bir Følner dizisi olsun. $\forall n$ için

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n-1} F_k^{-1}F_n\right| < C\left|F_n\right|$$

olacak şekilde bir $C$ sabiti varsa, $(F_n)$ dizisine *tempered Følner dizisi* denir.

**Teorem 2.8.37.** Bir ortalanabilir grup içindeki her Følner dizisinin bir tempered alt Følner dizisi vardır. Özel olarak, her ortalanabilir grubun bir tempered Følner dizisi vardır ( Lindenstrauss, 1999 ).

# 3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu çalışmamızda, öncelikli olarak bu konu ile ilgili yapılmış olan tüm çalışmalar, internet üzerinden ve değişik kütüphanelerden temin edilmiştir. Bu elde edilen kaynaklar incelenerek, yapılmış olan çalışmalar doğrultusunda konu hakkında detaylı bilgi edinilmiştir. Özellikle yararlanılan çalışmalar Lindenstrauss (1999) ve Temir (2002)'dir.

Öncelikle ergodik teoremler için bir araç olan Banach prensibi detaylı olarak incelenmiştir. Bilindiği üzere $\mathbb{Z}$ içindeki aralıkların dizileri için ortalama ergodik teorem sağlanırken, noktasal ergodik teorem sağlanmayabilir. Rosenblatt ve Wierdl (1992) çalışmasında, noktasal ergodik teoremin sağlanması için gerek ve yeter şart olarak $|I_n|$ artan olmak üzere $(I_n) \subset \mathbb{Z}$ içindeki aralıklar dizisinin Zayıf Tempelman Şartı'nı sağladığını vermişlerdir. Bu çalışmada, teoremi sağlayan ve sağlamayan birer dizi örneği incelenmektedir. $G$ herhangi bir sayılabilir ortalanabilir grup ve $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ise sayılabilir değişmeli grup olmak üzere $G \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ direkt çarpımının bir ortalanabilir grup olduğu Temir (2002) çalışmasından bilinmektedir. $(F_n')$, $G$ içinde bir Følner dizisi ve $(F_n'')$ ise $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ içinde bir Følner dizisi olmak üzere $\tilde{F}_n = (F_n' \times F_n'')$ dizisi için maksimal eşitsizlik sağlanırsa $A_n[f](x) = \frac{1}{|\tilde{F}_n|} \sum_{g \in \tilde{F}_n} T_g f(x)$ ortalamasının hemen hemen her yerde yakınsaklığı Banach prensibi kullanılarak gösterilmektedir. Lindenstrauss (1999) çalışmasında $G$, ( $X$, $\mathcal{B}$, $\mu$ ) olasılık ölçüm uzayında ergodik etki eden bir ortalanabilir grup ve $(F_n)$ bir tempered Følner dizisi olmak üzere $\forall f \in L_1$( $X$, $\mathcal{B}$, $\mu$ ) için hemen hemen her yerde $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} f(gx) = \int f(x) d\mu(x)$ olduğunu göstermiştir. Lindenstrauss (1999) çalışmasından hareketle her ortalanabilir grubun bir tempered Følner dizisine sahip olduğu göz önüne alınarak, $\mathbb{Z} \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ortalanabilir grubu içindeki tempered Følner dizisi için noktasal ergodik teoremin sağlandığı incelenmektedir.

# 4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

## 4.1. Banach Prensibi

( $\Omega$, $\mathcal{F}$, $\mu$ ) bir sonlu ölçüm uzayı olsun. ***B*** ise $\Omega$ üzerindeki tüm reel değerli, $\mathcal{F}$ 'ye göre ölçülebilir ve $p \geq 1$ için *p*. kuvveti integrallenebilir fonksiyonların uzayı yani $L_p$( $\Omega$, $\mathcal{F}$, $\mu$ ) olsun.

Bu bölümde ***B*** üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan *T* lineer operatörleri göz önüne alınacaktır:

**( a )** $\forall f \in \boldsymbol{B}$ için $\Omega$ içinde hemen hemen her yerde $\left|Tf\left(x\right)\right| < \infty$ 'dur.

**( b )** $T$ ölçüm içinde süreklidir, yani $f_n, f \in \boldsymbol{B}$ ve $\left\|f_n - f\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ise herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\mu\left\{x : \left|Tf_n\left(x\right) - Tf\left(x\right)\right| > \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

dır. Burada

$$\left\|f\right\| = \left(\int_{\Omega} \left|f\right|^p d\mu\right)^{1/p} \text{ ile tanımlıdır.}$$

**Tanım 4.1.1. ( a )** ve **( b )** özelliklerini sağlayan operatörlerin $\left(T_n\right)$ dizisi verilsin. $\forall f \in \boldsymbol{B}$ için

$$T^* f\left(x\right) = \sup_{n\geq 1}\left|T_n f\left(x\right)\right|,\ T_N^* f\left(x\right) = \max_{1\leq n\leq N}\left|T_n f\left(x\right)\right|$$

olarak tanımlanır.

**Önerme 4.1.2.** $T^*$ operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

**( i )** $T^*\left(f+h\right) \leq T^*\left(f\right) + T^*\left(h\right)$

**( ii )** $T^*\left(\alpha f\right) = \alpha T^*\left(f\right)$

**İspat: ( i )** $T^*\left(f+h\right) = \sup_{n\geq 1}\left|T_n\left(f+h\right)\right|$

$$= \sup_{n\geq 1}\left|T_n f + T_n h\right|$$

$$\leq \sup_{n\geq 1}\left\{\ \left|T_n f\right| + \left|T_n h\right|\ \right\}$$

$$\le \sup_{n\ge1}\left|T_n f\right| + \sup_{n\ge1}\left|T_n h\right|$$

$$= T^*\left(f\right) + T^*\left(h\right)$$

**( ii )** $T^*\left(\alpha f\right) = \sup_{n\ge1}\left|T_n\left(\alpha f\right)\right| = \sup_{n\ge1}\left|\alpha T_n\left(f\right)\right|$

$$= \alpha \sup_{n\ge1}\left|T_n\left(f\right)\right| = \alpha\ T^*\left(f\right)$$

Şimdi Banach Prensibi'nin ispatında kullanılacak olan önermeler verilecektir:

**Önerme 4.1.3.** $T$ ve $H$ ölçüm içinde sürekli, lineer operatörler olsun. Bu takdirde,

$$\left\{x : \left|\ \max\left\{Tf_n\left(x\right),\ Hf_n\left(x\right)\right\} - \max\left\{Tf\left(x\right),\ Hf\left(x\right)\right\}\ \right| > \varepsilon\right\}$$

$$\subset \left\{x : \left|\ Tf_n\left(x\right) - Tf\left(x\right)\ \right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x : \left|\ Hf_n\left(x\right) - Hf\left(x\right)\ \right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

dir.

**İspat:** $f_n > 0$ olsun.

$$x \notin \left\{x : \left|\ Tf_n\left(x\right) - Tf\left(x\right)\ \right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x : \left|\ Hf_n\left(x\right) - Hf\left(x\right)\ \right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

olsun. Bu takdirde,

$$\left|\ Tf_n\left(x\right) - Tf\left(x\right)\ \right| \le \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } \left|\ Hf_n\left(x\right) - Hf\left(x\right)\ \right| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

dir.

$$\max\left\{Tf_n\left(x\right), Hf_n\left(x\right)\right\} - \max\left\{Tf\left(x\right), Hf\left(x\right)\right\}$$

$$= \max\left\{\ Tf_n\left(x\right) - \max\left\{Tf\left(x\right),\ Hf\left(x\right)\right\}, Hf_n\left(x\right) - \max\left\{Tf\left(x\right),\ Hf\left(x\right)\right\}\ \right\}$$

$$\le \max\left\{Tf_n\left(x\right) - Tf\left(x\right),\ Hf_n\left(x\right) - Hf\left(x\right)\right\}$$

$$\le Tf_n\left(x\right) - Tf\left(x\right) + Hf_n\left(x\right) - Hf\left(x\right) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (4.1.1.)$$

$$\max\left\{Tf\left(x\right),\ Hf\left(x\right)\right\} - \max\left\{Tf_n\left(x\right),\ Hf_n\left(x\right)\right\}$$

$$= \max\left\{\ Tf\left(x\right) - \max\left\{Tf_n\left(x\right),\ Hf_n\left(x\right)\right\}, Hf\left(x\right) - \max\left\{Tf_n\left(x\right),\ Hf_n\left(x\right)\right\}\ \right\}$$

$$\le \max\left\{Tf\left(x\right) - Tf_n\left(x\right),\ Hf\left(x\right) - Hf_n\left(x\right)\right\}$$

$$\leq Tf(x) - Tf_n(x) + Hf(x) - Hf_n(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{4.1.2.}$$

(4.1.1.), (4.1.2.) eşitsizlikleri gereği,

$$\left| \max\{Tf_n(x),\, Hf_n(x)\} - \max\{Tf(x),\, Hf(x)\} \right| \leq \varepsilon$$

elde edilir. Bu durumda

$$x \notin \left\{ x : \left| \max\{Tf_n(x),\, Hf_n(x)\} - \max\{Tf(x),\, Hf(x)\} \right| > \varepsilon \right\}$$

olur.

**Önerme 4.1.4.** ***B*** bir Banach uzayı ve *M*, ölçülebilir fonksiyonların uzayı ve $T : \boldsymbol{B} \to M$, $H : \boldsymbol{B} \to M$ ölçüm içinde sürekli, lineer operatörler olsun. $\psi f = \max\{Tf,\, Hf\}$ ile tanımlansın. Bu takdirde, $\psi$ ölçüm içinde süreklidir.

**İspat:** $f_n > 0$ ve $\|f_n - f\| \to 0$ olsun. Önerme 4.1.3.'deki ifadenin her iki tarafının ölçümü alınırsa,

$$\mu\left\{ x : \left| \psi f_n(x) - \psi f(x) \right| > \varepsilon \right\} \leq \mu\left\{ x : \left| Tf_n(x) - Tf(x) \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

$$+\mu\left\{ x : \left| Hf_n(x) - Hf(x) \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa, *T* ve *H* ölçüm içinde sürekli olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left\{ x : \left| \psi f_n(x) - \psi f(x) \right| > \varepsilon \right\} = 0$$

elde edilir. Bu ise $\psi$ 'nin ölçüm içinde sürekli olduğunu gösterir.

**Önerme 4.1.5.** $T_N^*$ ölçüm içinde süreklidir.

**İspat:** $N = 1$ için $T_N^* = T_1$'dir. $T_1$ ölçüm içinde sürekli olduğundan $T_N^*$ da ölçüm içinde süreklidir.

$N = K$ için $T_N^*$'ın ölçüm içinde sürekli olduğu kabul edilsin.

$N = K + 1$ için de $T_N^*$'ın ölçüm içinde sürekli olduğu gösterilmelidir.

$$T_{K+1}^* f(x) = \max_{1 \leq n \leq K+1} \left| T_n f(x) \right|$$

$$= \max\left\{ \max_{1 \leq n \leq K} \left| T_n f(x) \right|,\ \left| T_{K+1} f(x) \right| \right\} = \max\left\{ T_K^* f(x),\ \left| T_{K+1} f(x) \right| \right\}$$

Keyfi $n$ için $T_n$'ler ölçüm içinde sürekli olduğundan $T_{K+1}$ de ölçüm içinde süreklidir. $T_K^*$'ın da ölçüm içinde sürekli olduğu kabulünden Önerme 4.1.4. gereği $T_{K+1}^*$ ölçüm içinde sürekli olur. Dolayısıyla tümevarım metodu gereği, $\forall N$ için $T_N^*$ ölçüm içinde süreklidir.

**Önerme 4.1.6.** $\forall f_n \in \boldsymbol{B}$ ve bir $c$ sayısı için $\mu\{x : f_n(x) > c\} \leq \varepsilon$ ve $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ise $\mu\{x : f(x) > c\} \leq \varepsilon$'dur.

**İspat:** $f_n \geq 0$ olsun. $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ise Teorem 2.5.26. gereği $(f_n)$ dizisinin $f$'ye hemen hemen her yerde yakınsayan bir $(f_{n_k})$ alt dizisi vardır. Tanım 2.5.23.'e göre $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\Omega$'nın $\mu(A) = 0$ olacak şekilde bir $A$ alt kümesi ve $x \in \Omega \setminus A$ için bir $n_0(\varepsilon, x)$ vardır öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $\left|f_{n_k}(x) - f(x)\right| < \varepsilon$'dur.

$$f_n(x) > c \Rightarrow f_{n_k}(x) > c$$

dir.

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x : f_n(x) > c\} \Rightarrow x \notin A \text{ için } f(x) > c\text{'dir.}$$

Keyfi $\varepsilon > 0$ ve $\forall x \in \Omega \setminus A$ için

$$\begin{aligned}\left|f_{n_k}(x) - f(x)\right| < \varepsilon &\Rightarrow -\varepsilon < f_{n_k}(x) - f(x) < \varepsilon \\ &\Rightarrow -\varepsilon + f(x) < f_{n_k}(x) < \varepsilon + f(x) \\ &\Rightarrow f_{n_k}(x) > f(x) - \varepsilon > c - \varepsilon\end{aligned}$$

dur. Buradan

$$x \in \{x : f_{n_k}(x) > c\} \Rightarrow x \in \{x : f(x) > c - \varepsilon\} \setminus A$$

olur. Böylece

$$\{x : f_{n_k}(x) > c\} \subset \{x : f(x) > c - \varepsilon\} \setminus A$$

dır. Ölçüm alınırsa, $\mu(A) = 0$ ve $\varepsilon$ keyfi olduğundan

$$\mu\{x : f_{n_k}(x) > c\} \leq \mu\{x : f(x) > c\}$$

elde edilir.

$$\left|\ \mu\left\{x : f_{n_k}\left(x\right) > c\right\} - \mu\left\{x : f\left(x\right) > c\right\}\ \right|$$
$$\leq \mu\left\{\left(\left\{x : f_{n_k}\left(x\right) > c\right\} \Delta \left\{x : f\left(x\right) > c\right\}\right)\right\}$$
$$= \mu\left\{\ x :\ f_{n_k}\left(x\right) > c,\ f\left(x\right) \leq c\ \right\} + \mu\left\{\ x :\ f_{n_k}\left(x\right) \leq c,\ f\left(x\right) > c\ \right\}$$

dir.

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x : f_{n_k}\left(x\right) > c,\ f\left(x\right) \leq c\right\} \subset A \text{ ve } \bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x : f_{n_k}\left(x\right) \leq c,\ f\left(x\right) > c\right\} \subset A$$

dır. Bu takdirde, $\mu\left(A\right) = 0$ olduğundan $\forall k > k_0$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\mu\left\{x : f_{n_k}\left(x\right) > c,\ f\left(x\right) \leq c\right\} < \frac{\varepsilon}{4} \text{ ve } \mu\left\{x : f_{n_k}\left(x\right) \leq c,\ f\left(x\right) > c\right\} < \frac{\varepsilon}{4}$$

olur. Bu halde

$$\left|\ \mu\left\{x : f_{n_k}\left(x\right) > c\right\} - \mu\left\{x : f\left(x\right) > c\right\}\ \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. $\forall k > k_0$ için

$$\left|\ \mu\left\{x : f_{n_k}\left(x\right) > c\right\} - \mu\left\{x : f\left(x\right) > c\right\}\ \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < \mu\left\{x : f_{n_k}\left(x\right) > c\right\} - \mu\left\{x : f\left(x\right) > c\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow \mu\left\{x : f\left(x\right) > c\right\} - \frac{\varepsilon}{2} < \mu\left\{x : f_{n_k}\left(x\right) > c\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow \mu\left\{x : f\left(x\right) > c\right\} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow \mu\left\{x : f\left(x\right) > c\right\} < \varepsilon$$

olur.

**Önerme 4.1.7.** ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) bir ölçüm uzayı ve $f$, $u$, $v$ ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $f \leq u + v$ ise $c > 0$ reel sayısı için

$$\mu\left\{x : f\left(x\right) > c\right\} \leq \mu\left\{x :\ u\left(x\right) > \frac{c}{2}\right\} + \mu\left\{x :\ v\left(x\right) > \frac{c}{2}\right\}$$

dir.

**İspat:** $x \notin \left\{x :\ u\left(x\right) > \frac{c}{2}\right\} \cup \left\{x :\ v\left(x\right) > \frac{c}{2}\right\}$ olsun. Bu takdirde,

$$x \in \left\{ x:\ u(x) \le \frac{c}{2} \right\} \text{ ve } x \in \left\{ x:\ v(x) \le \frac{c}{2} \right\} \qquad (4.1.3.)$$

dir. $\forall x \in X$ için $f(x) \le u(x) + v(x)$ olduğundan (4.1.3.) gereği

$$f(x) \le \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$$

dir. Bu halde

$$x \notin \{ x: f(x) > c \}$$

olur. Böylece

$$\{ x: f(x) > c \} \subset \left\{ x:\ u(x) > \frac{c}{2} \right\} \cup \left\{ x:\ v(x) > \frac{c}{2} \right\}$$

elde edilir. Ölçüm alınırsa,

$$\mu\{ x: f(x) > c \} \le \mu\left\{ x:\ u(x) > \frac{c}{2} \right\} + \mu\left\{ x:\ v(x) > \frac{c}{2} \right\}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur.

Şimdi Garsia(1970) çalışmasında ispatı bulunan Banach prensibinin önceki verilen önermeler yardımıyla ispatı incelenecektir:

**Teorem 4.1.8. ( Banach Prensibi )** $\forall f \in \boldsymbol{B}$ için hemen hemen her yerde $T^* f(x) < \infty$ ise $\lambda > 0$ için tanımlanan ve $\lambda \to \infty$ iken sıfıra yakınsayan, pozitif azalan $C(\lambda)$ fonksiyonu vardır ve $\forall \lambda > 0, \forall f \in \boldsymbol{B}$ için

$$\mu\{ x:\ T^* f(x) > \lambda \|f\| \} \le C(\lambda) \qquad (4.1.4.)$$

dır ( Garsia, 1970 ).

**İspat:** (4.1.4.) eşitsizliği, $\|f\| = 1$ için göz önüne alınsın. Hemen hemen her $x$ için $T^* f(x) < \infty$ olduğundan sabit $\varepsilon > 0$, $\forall f \in \boldsymbol{B}$ ve $f$'ye bağlı olması mümkün olan bir $n$ için

$$\mu\{ x: T^* f(x) > n \} \le \varepsilon$$

dur. Başka bir deyişle, $f \in L_p(\ \Omega, \mathcal{F}, \mu\ )$ olduğundan

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ f: \mu\{ x: T^* f(x) > n \} \le \varepsilon \right\} \subset \boldsymbol{B} \qquad (4.1.5.)$$

olduğu aşikardır.

$f \in \boldsymbol{B} \Rightarrow T^* f(x) < \infty$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\mu\{x : T^* f(x) > n\} \leq \varepsilon$ olur. Buradan

$$f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ f : \mu\{x : T^* f(x) > n\} \leq \varepsilon \}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ f : \mu\{x : T^* f(x) > n\} \leq \varepsilon \} \tag{4.1.6.}$$

olur. (4.1.5.), (4.1.6.) gereği,

$$\boldsymbol{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ f : \mu\{x : T^* f(x) > n\} \leq \varepsilon \}$$

eşitliği elde edilir. $\forall n$ için

$$\{ f : \mu\{x : T^* f(x) > n\} \leq \varepsilon \} = \bigcap_{N=1}^{\infty} \{ f : \mu\{x : T_N^* f(x) > n\} \leq \varepsilon \} \tag{4.1.7.}$$

eşitliği vardır. Bu eşitliğin gösterilmesi için $f \in \bigcap_{N=1}^{\infty} \{ f : \mu\{x : T_N^* f(x) > n\} \leq \varepsilon \}$ ve $\forall N$ için $A_N = \{x : T_N^* f(x) > n\}$ olsun.

$x \in A_N$ alınırsa, $\max\{ T_N^* f(x), T_{N+1} f(x) \} > n$ olduğundan $T_{N+1}^* f(x) > n$ olur. Bu halde $x \in A_{N+1}$ elde edilir.

$$A_N \subset A_{N+1} \subset \dots$$

dir. Teorem 2.5.6. gereği $\forall N$ için

$$\mu\left( \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N \right) = \lim_{N \to \infty} \mu(A_N) \leq \varepsilon$$

olur. Buradan

$$\mu\left( \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N \right) \leq \varepsilon \Rightarrow \mu\{x : T^* f(x) > n\} \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow f \in \{ f : \mu\{x : T^* f(x) > n\} \leq \varepsilon \}$$

olur. Bu halde

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} \{ f : \mu\{x : T_N^* f(x) > n\} \leq \varepsilon \} \subset \{ f : \mu\{x : T^* f(x) > n\} \leq \varepsilon \}$$

(4.1.8.)

dur. Tersine, $f \in \left\{ f:\ \mu\left\{x:\ T^* f\left(x\right) > n\right\} \le \varepsilon \right\}$ olsun.

$A = \left\{x:\ T^* f\left(x\right) > n\right\}$ alınırsa, $A = \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N$ olur. $\forall N$ için $\mu\left(A\right) \le \varepsilon$ ve $A_N \subset A$ olduğundan $\mu\left(A_N\right) \le \mu\left(A\right) \le \varepsilon$ olur. Bu halde $\forall N$ için $\mu\left(A_N\right) \le \varepsilon$ 'dur. Böylece

$$\forall N \text{ için } \mu\left\{x:\ T_N^* f\left(x\right) > n\right\} \le \varepsilon \Rightarrow f \in \bigcap_{N=1}^{\infty} \left\{ f:\ \mu\left\{x:\ T_N^* f\left(x\right) > n\right\} \le \varepsilon \right\}$$

elde edilir. Buradan

$$\left\{ f:\ \mu\left\{x:\ T^* f\left(x\right) > n\right\} \le \varepsilon \right\} \subset \bigcap_{N=1}^{\infty} \left\{ f:\ \mu\left\{x:\ T_N^* f\left(x\right) > n\right\} \le \varepsilon \right\}$$

(4.1.9.)

(4.1.8.), (4.1.9.) eşitsizliklerinden (4.1.7.) eşitliği elde edilmiş olur.

Şimdi, $\left\{ f:\ \mu\left\{x:\ T_N^* f\left(x\right) > n\right\} \le \varepsilon \right\}$ kümelerinin her birinin kapalı olduğu gösterilmelidir. Bunun için $f \in \overline{\left\{ f:\ \mu\left\{x:\ T_N^* f\left(x\right) > n\right\} \le \varepsilon \right\}}$ olsun. Teorem 2.1.14. gereği $m \to \infty$ iken $\left\| f_m - f \right\| \to 0$ olacak şekilde $\left\{ f:\ \mu\left\{x:\ T_N^* f\left(x\right) > n\right\} \le \varepsilon \right\}$ kümesi içinde bir $\left(f_m\right)$ dizisi vardır. Bu takdirde,

$$\mu\left\{ x:\ T_N^* f_m\left(x\right) > n \right\} \le \varepsilon$$

olur. $m \to \infty$ iken $\left\| f_m - f \right\| \to 0$ olduğunda Önerme 4.1.5. gereği, $T_N^* f_m \xrightarrow{\mu} T_N^* f$ 'tır. Önerme 4.1.6. gereği

$\mu\left\{ x:\ T_N^* f\left(x\right) > n \right\} \le \varepsilon$ 'dur. Buradan $f \in \left\{ f:\ \mu\left\{x:\ T_N^* f\left(x\right) > n\right\} \le \varepsilon \right\}$

elde edilir. Böylece $\left\{ f:\ \mu\left\{x:\ T_N^* f\left(x\right) > n\right\} \le \varepsilon \right\}$ kümesi kapalıdır. (4.1.7.) eşitliği gereği $\left\{ f: \mu\left\{x:\ T^* f\left(x\right) > n\right\} \le \varepsilon \right\}$ kümesi de kapalıdır. Baire teoremi gereği bir tam metrik uzay hiç bir yerde yoğun olmayan kümelerin sayılabilir birleşimi olarak yazılamayacağından $\left\{ f: \mu\left\{x:\ T^* f\left(x\right) > n\right\} \le \varepsilon \right\}$ kümelerinden en az biri boş olmayan bir içe sahiptir ve bir kapalı yuvar içerir. Bu yuvarın merkezi $f_0 \in \boldsymbol{B}$ ve yarıçapı $\delta > 0$ ise $\forall \left\| f - f_0 \right\| \le \delta$ için

$$\mu\left\{ x:\ T^* f(x) > n \right\} \le \varepsilon \qquad (4.1.10.)$$

dur. $h = \dfrac{f - f_0}{\delta}$ alınırsa, $\|h\| = \dfrac{\|f - f_0\|}{\delta} \le 1$ olur.

$$f - f_0 = \delta h \Rightarrow f = f_0 + \delta h$$

olduğundan eşitsizlik (4.1.10.) gereği $\forall \|h\| \le 1$ için

$$\mu\left\{ x : T^*\left[f_0 + \delta h\right](x) > n \right\} \le \varepsilon \qquad (4.1.11.)$$

dur. Teorem 4.1.2. gereği

$$T^* h = T^*\left(\delta \frac{h}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta} T^*\left(\delta h\right)$$

$$= \frac{1}{\delta} T^*\left(\delta h + f_0 - f_0\right) \le \frac{1}{\delta} T^*\left(f_0 + \delta h\right) + \frac{1}{\delta} T^*\left(f_0\right)$$

dır. Buradan

$$T^* h \le \frac{1}{\delta} T^*\left(f_0 + \delta h\right) + \frac{1}{\delta} T^*\left(f_0\right)$$

olur. Önerme 4.1.7. gereği, tüm $\|h\| \le 1$ için

$$\mu\left\{ x:\ T^* h(x) > \frac{2n}{\delta} \right\} \le \mu\left\{ x:\ T^*\left[f_0 + \delta h\right](x) > n \right\} + \mu\left\{ x:\ T^* f_0(x) > n \right\}$$

dir. $\forall \|h\| \le 1$ için (4.1.11.) sağladığından $h = 0$ alınırsa,

$$\mu\left\{ x:\ T^* f_0(x) > n \right\} \le \varepsilon$$

olur. Bu takdirde, tüm $\|h\| \le 1$ için

$$\mu\left\{ x:\ T^* h(x) > \frac{2n}{\delta} \right\} \le 2\varepsilon$$

elde edilir. Böylece $\forall \lambda > \dfrac{2n}{\delta}$ için

$\mu\left\{ x: T^* h(x) > \lambda \right\} \le 2\varepsilon$ olur. $C(\lambda)$ fonksiyonu

$$C(\lambda) = \sup_{\|h\| \le 1} \mu\left\{ x:\ T^* h(x) > \lambda \right\}$$

olacak şekilde seçilirse, $\lim\limits_{\lambda \to \infty} C(\lambda) = 0$ olur. Ayrıca

$$\mu\left\{ x:\ T^{*}f(x)>\lambda\|f\| \right\}=\mu\left\{x:\ \frac{T^{*}f(x)}{\|f\|}>\lambda\right\}=\mu\left\{x:\ T^{*}\left(\frac{f}{\|f\|}\right)(x)>\lambda\right\}$$

dır. $h(x)=\dfrac{f(x)}{\|f\|}$ olsa, $\|h\|=\dfrac{\|f\|}{\|f\|}=1$ olur ve

$$\mu\left\{x:\ T^{*}\left(\frac{f}{\|f\|}\right)(x)>\lambda\right\}\le\sup_{\|h\|\le1}\mu\left\{x:\ T^{*}h(x)>\lambda\right\}=C(\lambda)$$

olur. Buradan $\forall\lambda>0$ için

$$\mu\left\{ x:\ T^{*}f(x)>\lambda\|f\| \right\}\le C(\lambda)$$

dır.

Şimdi Garsia(1970)'de ispatı yapılmış olan aşağıdaki teorem açık olarak incelenecektir:

**Teorem 4.1.9.** $(T_n)$ operatörleri (4.1.4.) eşitsizliğini sağlarsa, $T_n f(x)$ dizisinin hemen hemen her yerde yakınsadığı $f\in\boldsymbol{B}$ fonksiyonlarının kümesi kapalıdır ( Garsia, 1970 ).

**İspat:** $T_n f(x)$ dizisinin hemen hemen her yerde yakınsadığı $f\in\boldsymbol{B}$ fonksiyonlarının kümesi $\mathcal{C}$ olsun. $\mathcal{C}$ kümesinin kapalı olduğunun gösterilmesi için $f\in\overline{\mathcal{C}}$ alınsın. Bu takdirde, bir $\varepsilon>0$ için $\|f-h\|<\varepsilon$ olacak şekilde $h\in\mathcal{C}$ vardır. $\forall f\in\boldsymbol{B}$ için

$$R(x,f)=\limsup_{n,m\to\infty}\left| T_n f(x)-T_m f(x) \right|$$

fonksiyonu tanımlansın.

$$\begin{aligned}R(x,f)&=\limsup_{n,m\to\infty}\left| T_n f(x)-T_m f(x) \right|\\&\le\limsup_{n,m\to\infty}\left|T_n f(x)\right|+\limsup_{n,m\to\infty}\left|T_m f(x)\right|\\&\le\sup_n\left|T_n f(x)\right|+\sup_m\left|T_m f(x)\right|=2T^{*}f(x)\end{aligned}$$

olduğundan $R(x,f)\le 2T^{*}f(x)$ olur. Buradan

$$\mu\left\{ x:R(x,f)>\lambda\|f\| \right\}\le\mu\left\{x:\ T^{*}f(x)>\frac{\lambda}{2}\|f\| \right\}\le C\left(\frac{\lambda}{2}\right)\qquad(4.1.12.)$$

elde edilir. Bir $f \in \boldsymbol{B}$ ve bir $h \in \mathcal{C}$ için

$$R(x, f-h) = \limsup_{n,m\to\infty} \left| T_n(f-h)(x) - T_m(f-h)(x) \right|$$

$$= \limsup_{n,m\to\infty} \left| T_n f(x) - T_n h(x) - T_m f(x) + T_m h(x) \right|$$

$$\le \limsup_{n,m\to\infty} \left| T_n f(x) - T_m f(x) \right| + \limsup_{n,m\to\infty} \left| T_n h(x) - T_m h(x) \right| \qquad (4.1.13.)$$

$h \in \mathcal{C}$ olduğundan hemen hemen her $x$ için

$$\limsup_{n,m\to\infty} \left| T_n h(x) - T_m h(x) \right| = 0$$

dır. Böylece hemen hemen her $x$ için (4.1.13.) eşitsizliği gereği,

$$R(x, f-h) \le R(x, f) \qquad (4.1.14.)$$

tir. Ayrıca hemen hemen her $x$ için

$$R(x, f-h) = \limsup_{n,m\to\infty} \left| T_n f(x) - T_n h(x) - T_m f(x) + T_m h(x) \right|$$

$$\ge \limsup_{n,m\to\infty} \left| \left| T_n f(x) - T_m f(x) \right| - \left| T_m h(x) - T_n h(x) \right| \right|$$

$$= R(x, f)$$

tir. Buradan

$$R(x, f-h) \ge R(x, f) \qquad (4.1.15.)$$

tir. (4.1.14.), (4.1.15.) eşitsizlikleri gereği, hemen hemen her $x$ için $R(x, f-h) = R(x, f)$ eşitliği vardır. Bu eşitlik (4.1.12.) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\mu\left\{ x : R(x, f) > \lambda \|f-h\| \right\} \le C\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

olur. Ayrıca $\lambda = \frac{1}{\varepsilon}$ ve $\|f-h\| \le \varepsilon^2$ seçilirse,

$$\mu\left\{ x : R(x, f) > \varepsilon \right\} \le C\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)$$

olur. $\varepsilon$ keyfi olduğundan hemen hemen her yerde $R(x, f) = 0$ 'dır.

Hemen hemen her yerde $R(x, f) = 0$ ise $T_n f(x)$ hemen hemen her yerde yakınsaktır. Bu halde $f \in \mathcal{C}$ olur. Böylece $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$ elde edilir. Bunun tersi de her zaman doğru olduğundan $\mathcal{C}$ kapalıdır.

## 4.2. Ortalanabilir Gruplar için Ergodik Teoremler

$G$ herhangi bir sayılabilir ortalanabilir grup ve $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ise sayılabilir değişmeli grup olmak üzere $G \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ direkt çarpımının bir ortalanabilir grup olduğu bilinmektedir ( Temir, 2002 ). Bu bölümde noktasal ergodik teorem $G \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ortalanabilir grubu için incelenmektedir.

$S$, ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) olasılık ölçüm uzayı üzerinde etki eden, sol sadeleşme özelliğine sahip bir sayılabilir ortalanabilir yarı grup olsun. $(F_n)$, $S$ içinde bir Følner dizisi, $(q_n)$ pozitif sayıların bir dizisi olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \frac{|F_n|}{q_n}$ limiti mevcut ve sonlu iken $f \in L_1$ ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) için $A_n\left(F_{n,}q_n\right)[f](x) = \frac{1}{q_n}\sum_{g\in F_n} T_g f(x)$ ergodik ortalamasının hemen hemen her yerde yakınsaklığı incelenmiştir ( Butkevich, 2001 ). Bu ortalama kısaca $A_n[f]$ ile gösterilsin.

$S$ ’nin kendi üzerindeki $L$ sol etkisi $L_g x = gx$ ile verilir. Burada cebirsel anlamdaki grup etkisi göz önüne alınır. Bu etki, $\varphi : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar kümesi üzerinde bir sağ etki belirler.

$$\widetilde{A}_n[\varphi] = \frac{1}{q_n}\sum_{g\in S} L_g \varphi$$

$\widetilde{M}[\varphi](x) = \sup_n \widetilde{A}_n[|\varphi|](x)$ şeklinde tanımlıdır.

**Tanım 4.2.1.** ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) olasılık ölçüm uzayı olsun. $S$ yarı grubundan $T_g : X \to X$ ölçümü koruyan dönüşümlerin yarı grubu içine $T : g \to T_g$ ile tanımlı homomorfizmaya $S$ yarı grubunun ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) olasılık ölçüm uzayı üzerindeki $T$ *etkisi* denir.

**Tanım 4.2.2.** $S$ yarı grubunun ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) olasılık ölçüm uzayı üzerinde her $T$ etkisi için $T_g f(x) = f(T_g x)$ ile tanımlanan temsile $\mathrm{H} = L_2(X)$ uzayı üzerinde bir *üniter temsil* denir.

**Tanım 4.2.3.** $\mathrm{H}$ bir Hilbert uzayı ve $S$, $\mathrm{H}$ içinde bir sol sadeleşme özelliğine sahip sol ortalanabilir yarı grup olsun. $T_g$, $S$ yarı grubu için $\mathrm{H}$ uzayında bir üniter temsil olsun. $\forall g \in S$ için $T_g(v) = v$ ise $v \in \mathrm{H}$ vektörüne $T_g$-değişmez vektör denir.

**Tanım 4.2.4.** ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$, $T$ ) bir dinamik sistem olsun. 0< $\mu(A)$<1 şartını sağlayan $\forall A \in \mathcal{A}$ için $\mu\left(\left(T_g^{-1}A\right)\Delta A\right)$>0 olacak şekilde $g \in S$ varsa, ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$, $T$ )'ye *ergodiktir* denir.

**Önerme 4.2.5. ( Maksimal Eşitsizlik )** $(F_n)$ dizisine bağlı olan fakat $X$ 'e bağlı olmayan öyle bir $c > 0$ sayısı vardır ki $\forall f \in L_1(X)$, $\forall \lambda > 0$ için

$$\mu\left\{x \,\middle|\, \sup_n A_n\left[|f|\right](x) > \lambda\right\} \leq \frac{c}{\lambda}\|f\|_1$$

eşitsizliği gerçeklenir ( Butkevich, 2001 ).

**Önerme 4.2.6. ( $S$ üzerindeki Maksimal Eşitsizlik )** $(F_n)$ dizisine bağlı olan $c$ sabiti vardır öyleki $\varphi : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\forall \lambda > 0$ için

$$\left|\left\{a \in S \,\middle|\, \tilde{M}[\varphi](a) > \lambda\right\}\right| \leq \frac{c}{\lambda}\|\varphi\|_1$$

eşitsizliği gerçeklenir ( Butkevich, 2001 ).

**Önerme 4.2.7.** $S$ yarı grubu üzerinde maksimal eşitsizlik sağlanır ise maksimal eşitsizlik sağlanır ( Butkevich, 2001 ).

**Uyarı 4.2.8.** Önerme 4.2.7, "Transfer Prensibi" olarak bilinir( Butkevich, 2001 ).

**Teorem 4.2.9.** $T_g$, $\mathrm{H}$ Hilbert uzayı içinde sol sadeleşme özelliğine sahip bir sol ortalanabilir $S$ yarı grubu için bir üniter temsil olsun. $(F_n)$, $S$ içinde bir sol Følner dizisi ve $P$, $\mathrm{H}$'den $T_g$-değişmez vektörlerin alt uzayına bir dik izdüşüm olsun. Bu takdirde, $\forall f \in \mathrm{H}$ için

$$\left\|\frac{1}{|F_n|}\sum_{g \in F_n} T_g f - Pf\right\|_{\mathrm{H}} \to 0$$

dır ( Butkevich, 2001 ).

**Teorem 4.2.10.** ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) olasılık ölçüm uzayında ergodik etki eden bir ortalanabilir grup $G$ ve $(F_n)$ bir tempered Følner dizisi olsun. $\forall f \in L_1$( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) için hemen hemen her yerde

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|F_n|}\sum_{g\in F_n} f(gx)=\int f(x)d\mu(x)$$

dir ( Lindenstrauss, 1999 ).

$\mathbb{Z}$ içindeki her Følner dizisi için ortalama ergodik teorem sağlanır ancak noktasal ergodik teorem $\mathbb{Z}$ üzerinde bazı şartlar altında sağlanır. Aşağıda verilen teorem bu şartı açıklamaktadır:

**Teorem 4.2.11.** $(I_n)$, $\mathbb{Z}$ içindeki aralıkların bir dizisi ve $|I_n|$ artan olsun. $(I_n)$ dizisi boyunca noktasal ergodik teoremin sağlanması için gerek ve yeter koşul $(I_n)$ dizisinin Zayıf Tempelman Şartı'nı sağlamasıdır ( Rosenblatt ve Wierdl, 1992 ).

**Tanım 4.2.12.** Zayıf Tempelman Şartı'nı sağlayan diziye *iyi dizi*, Zayıf Tempelman Şartı'nı sağlamayan diziye ise *kötü dizi* denir.

**Örnek 4.2.13.** $\mathbb{Z}$ içinde $I_n=[0,n]$ iyi dizi olmasına rağmen $I_n=[n^2,n^2+n]$ kötü dizidir.

**Çözüm:** $I_n=[0,n]$'in iyi dizi olduğunu göstermek için

$$\forall n>0 \text{ için } \left|\bigcup_{k=1}^{n} I_k^{-1}I_n\right|<C|I_n|$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C$ sayısı bulunmalıdır.

$$I_k^{-1}=[-k,0] \text{ ve } I_k^{-1}I_n=[-k,0]+[0,n]=[-k,n]$$

dir.

$$\bigcup_{k=1}^{n} I_k^{-1}I_n=[-1,n]\cup[-2,n]\cup\ldots\cup[-n,n]$$

dir. $[-1,n]\subset[-2,n]\subset\ldots\subset[-n,n]$ olduğundan

$$\bigcup_{k=1}^{n} I_k^{-1}I_n=[-n,n]$$

olur. Buradan

$$\frac{\left|\bigcup_{k=1}^{n} I_k^{-1}I_n\right|}{|I_n|}=\frac{|[-n,n]|}{|[0,n]|}=\frac{2n+1}{n+1}=2-\frac{1}{n+1}<2=C$$

bulunur. $(I_n)$ dizisi $C=2$ için Zayıf Tempelman Şartı'nı sağlar. Böylece $(I_n)$ dizisi boyunca noktasal ergodik teorem sağlanır.

$I_n=\left[n^2,\, n^2+n\right]$ dizisi göz önüne alınırsa, $I_k^{-1}=\left[-k^2-k,-k^2\right]$ ve

$$I_k^{-1}I_n=\left[-k^2-k,-k^2\right]+\left[n^2,\, n^2+n\right]=\left[n^2-k^2-k,\, n^2+n-k^2\right]$$

dir.

$$\bigcup_{k=1}^{n} I_k^{-1}I_n=\left[n^2-2,\, n^2+n-1\right]\cup\left[n^2-6,\, n^2+n-4\right]\cup\ldots\cup\left[-n,\, n\right]$$

dir. $n=3$ alınırsa,

$$\bigcup_{k=1}^{3} I_k^{-1}I_3=[7,11]\cup[3,8]\cup[-3,3]=[-3,11]$$

$$\Rightarrow\bigcup_{k=1}^{n} I_k^{-1}I_n=\left[-n,n^2+n-1\right]$$

olur. Buradan

$$\frac{\left|\bigcup_{k=1}^{n} I_k^{-1}I_n\right|}{|I_n|}=\frac{n^2+2n}{n+1}<C$$

olacak biçimde bir $C$ sayısı bulunamadığından Zayıf Tempelman Şartı sağlanmaz. Yani $I_n=\left[n^2,n^2+n\right]$ bir kötü dizidir.

Butkevich(2001) çalışmasında ispatı bulunan aşağıdaki önerme verilecektir:

**Önerme 4.2.14.** ( $X$, $\mathcal{A}$, $\mu$ ) olasılık ölçüm uzayında etki eden sol sadeleşme özelliğine sahip bir sol ortalanabilir yarı grup $S$ olsun. Bu takdirde,

$$H_{inv}=\left\{f\in L_2(X)\,\middle|\, T_g f=f,\ \forall g\in S\right\}$$

$$H_{erg}=\overline{Sp\left\{h-T_g h\,\middle|\, h\in L_\infty(X),\ g\in S\right\}}$$

olmak üzere $L_2(X,\mathcal{A},\mu)=H_{inv}\oplus H_{erg}$ 'dir ( Butkevich, 2001 ).

**İspat:** $f\perp H_{erg}$ olsun. $\forall g\in S, \forall h\in L_\infty(X)$ için

$$f\perp H_{erg}\Rightarrow\left\langle f,\, h-T_g h\right\rangle=0\Rightarrow\left\langle f,\, h\right\rangle-\left\langle f,\, T_g h\right\rangle=0$$

$$\Rightarrow\left\langle f,\, h\right\rangle=\left\langle f,\, T_g h\right\rangle$$

elde edilir. $L_2(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir Hilbert uzayı olduğundan $T_g^*$ adjoint operatör olmak üzere

$$\langle f, h\rangle = \langle f, T_g h\rangle = \langle T_g^* f, h\rangle$$

'dır. Özel olarak $\forall A \in \mathcal{A}$ için $\int_A f d\mu = \int_A T_g^* f d\mu$ olur. Buradan $\forall g \in S$ için hemen hemen her yerde $f = T_g^* f$ elde edilir.

$L_2(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir Hilbert uzayı olduğundan

$$f = T_g^* f \Leftrightarrow f = T_g f$$

dir. Böylece $\forall g \in S$ için hemen hemen her yerde $f = T_g f$ olur. Dolayısıyla $f \in H_{inv}$'dir. $f \in H_{inv}$ olsun. Bu takdirde, $f = T_g f$ olur.

$$\langle f, h - T_g h\rangle = \langle f, h\rangle - \langle f, T_g h\rangle = \langle f, h\rangle - \langle f, h\rangle = 0 \Rightarrow f \perp H_{erg}$$

Böylece $H_{inv}$, $H_{erg}$ kapalı alt uzayının dik komplemanıdır. Bu takdirde,

$L_2(X, \mathcal{A}, \mu) = H_{inv} \oplus H_{erg}$ şeklinde yazılabilir.

Bu çalışmada, $G$ herhangi bir sayılabilir ortalanabilir grup ve $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ise sayılabilir değişmeli grup olmak üzere $G \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ortalanabilir grubu için noktasal ergodik teoremin sağlandığı gösterilecektir.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir olasılık ölçüm uzayı, $G$ bir sayılabilir ortalanabilir grup ve $G$'nin $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uzayı üzerindeki ölçümü koruyan etkisi $T$ olsun. $T : G \to \mathrm{Aut}(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir homomorfizmadır. Burada $\mathrm{Aut}(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(X, \mathcal{A}, \mu)$'nün ölçümü koruyan otomorfizmalarının grubudur. Yukarıdaki ifade $G \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ortalanabilir grubu için yazılırsa, aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ birer olasılık ölçüm uzayı olsun. $T'$, $G$ ortalanabilir grubunun $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ uzayı üzerindeki ölçümü koruyan etkisi ve $T''$

ise $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ sayılabilir değişmeli grubunun ( $X_2$, $\mathcal{A}_2$, $\mu_2$ ) uzayı üzerindeki ölçümü koruyan etkisi olsun. Bu durumda

$$T' : G \to \text{Aut}\,(X_1, \mathcal{A}_1,\ \mu_1) \ \text{ ve } \ T'' : \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2 \to \text{Aut}\,(X_2, \mathcal{A}_2,\ \mu_2)$$

birer homomorfizmadır. Dolayısıyla $G \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ direkt çarpımının ( $X_1 \times X_2$, $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, $\mu_1 \times \mu_2$) uzayı üzerindeki ölçümü koruyan etkisi $g_1 \in G,\ g_2 \in \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ için $g = (g_1,\ g_2)$ iken $T_g = T_{(g_1,\, g_2)} = \left(T_{g_1}{'} \times T_{g_2}{''}\right)$'dir.

$\left(F_n{'}\right)$, $G$ içinde bir Følner dizisi ve $\left(F_n{''}\right)$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ içinde bir Følner dizisi olsun. $\tilde{F}_n = \left(F_n{'} \times F_n{''}\right)$ dizisi Følner dizilerinin direkt çarpımıdır.

Şimdi yukarıdaki ifadelerden faydalanarak, aşağıdaki teoremin ispatı incelenecektir:

**Teorem 4.2.15.** Maksimal eşitsizlik sağlanırsa, $A_n[f](x) = \dfrac{1}{\left|\tilde{F}_n\right|} \sum_{g \in \tilde{F}_n} T_g f(x)$ ortalaması hemen hemen her yerde yakınsaktır.

**İspat:**

$$B = \left\{ f \in L_1(X_1 \times X_2) \,\middle|\, A_n[f](x) \text{ hemen hemen her yerde yakınsak} \right\}$$

$$D = \left\{ f + \left(h - T_g h\right) \,\middle|\, f \in L_1(X_1 \times X_2),\ \forall g \in G \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2,\ T_g f = f,\ h \in L_\infty(X_1 \times X_2) \right\}$$

olsun. $T_g f = \left(T_{g_1}{'} \times T_{g_2}{''}\right) f$'dir.

$B = L_1(X_1 \times X_2)$ olduğu gösterilirse, $A_n[f](x)$ toplamının $\forall f \in L_1(X_1 \times X_2)$ için hemen hemen her yerde yakınsadığı ispatlanmış olur. Bunun için

**( 1 )** $D \subset B$,

**( 2 )** $B$ kapalı,

**( 3 )** $D$ kümesi $L_1(X_1 \times X_2)$ içinde yoğun, olduğu gösterilmelidir.

**( 1 )** $D \subset B$ olduğunun gösterilmesi için $f \in D$ olsun. $\forall g \in G \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ için $f = T_g f$ 'dir. Bu takdirde,

$$\frac{1}{\left|\tilde{F}_n\right|} \sum_{g \in \tilde{F}_n} T_g f \to f$$

olur. Yani $f \in B$ 'dir. Ayrıca $h \in L_\infty\left(X_1 \times X_2\right)$ olmak üzere, $f = h - T_{g_0} h$ olsun. Burada $g_0 \in G \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ 'nin sabit bir elemanıdır. $x \in X_1 \times X_2$ için

$$\left|A_n\left[f\right](x)\right| = \left| \frac{1}{\left|\tilde{F}_n\right|} \sum_{g \in \tilde{F}_n} T_g f\left(x\right) \right| = \left| \frac{1}{\left|\tilde{F}_n\right|} \sum_{g \in \tilde{F}_n} T_g \left(h - T_{g_0} h\right)\left(x\right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\left|\tilde{F}_n\right|} \sum_{g \in \tilde{F}_n} \left(T_g h - T_{g_0 g} h\right)\left(x\right) \right| = \left| \frac{1}{\left|\tilde{F}_n\right|} \sum_{g \in \tilde{F}_n \Delta g_0 \tilde{F}_n} T_g h\left(x\right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{\left|\tilde{F}_n\right|} \sum_{g \in \tilde{F}_n \Delta g_0 \tilde{F}_n} \left|T_g h\left(x\right)\right| \leq \frac{1}{\left|\tilde{F}_n\right|} \left|\tilde{F}_n \Delta g_0 \tilde{F}_n\right| \left\|T_g h\right\| = \frac{\left|\tilde{F}_n \Delta g_0 \tilde{F}_n\right|}{\left|\tilde{F}_n\right|} \left\|h\right\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Böylece $\left(\tilde{F}_n\right)$ bir Følner dizisi olduğundan $A_n\left[f\right]\left(x\right)$ hemen hemen her yerde yakınsaktır. Bu halde $f \in B$ 'dir. Buradan $D \subset B$ elde edilir.

**( 2 )** Maksimal eşitsizlik sağlandığında Banach Prensibi gereği $A_n\left[f\right]\left(x\right)$ 'in hemen hemen her yerde yakınsadığı noktalardan oluşan $B$ kümesi kapalıdır.

**( 3 )** $D_2$ kümesi

$$D_2 = \left\{ f + \left(h - T_g h\right) \middle| \; f \in L_2\left(X_1 \times X_2\right),\ \forall g \in G \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2,\ T_g f = f,\ h \in L_\infty\left(X_1 \times X_2\right) \right\}$$

ile tanımlansın.

$$D_2 = H_{inv} \cup \overline{Sp\left\{ \left(h - T_g h\right) \middle| \; h \in L_\infty\left(X_1 \times X_2\right),\ g \in G \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2 \right\}}$$

$$\Rightarrow \overline{D_2} = \overline{H_{inv} \cup \overline{Sp\left\{\left(h - T_g h\right) \middle|\ h \in L_\infty\left(X_1 \times X_2\right),\ g \in G \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2\right\}}}\text{ 'dır.}$$

$H_{inv}$, $L_2\left(X_1 \times X_2\right)$ uzayının kapalı lineer alt uzayı olduğundan $\overline{H_{inv}} = H_{inv}$ 'dır. Bu halde Önerme 4.2.14. gereği, $L_2\left(X_1 \times X_2\right) = H_{inv} \oplus H_{erg}$ olduğundan

$$\overline{D_2} = H_{inv} \cup \overline{Sp\left\{\left(h - T_g h\right) \middle|\ h \in L_\infty\left(X_1 \times X_2\right),\ g \in G \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2\right\}} = L_2\left(X_1 \times X_2\right)$$

'dir. Buradan $D_2 \subset D$ kümesi $L_2\left(X_1 \times X_2\right)$ içinde yoğundur. $L_2 \subset L_1$ ve $L_2\left(X_1 \times X_2\right)$ kümesi $L_1\left(X_1 \times X_2\right)$ içinde yoğun olduğundan $D$ kümesi $L_1\left(X_1 \times X_2\right)$ içinde yoğundur.

$D \subset B$, $B$ kapalı ve $D$ kümesi $L_1\left(X_1 \times X_2\right)$ içinde yoğun olduğundan $B = L_1\left(X_1 \times X_2\right)$ elde edilir. Yani $\forall f \in L_1\left(X_1 \times X_2\right)$ için hemen hemen her yerde $\lim_{n \to \infty} A_n\left[f\right](x)$ limiti mevcuttur.

**Örnek 4.2.16.** $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ sayılabilir değişmeli grup olmak üzere $G = \mathbb{Z} \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ortalanabilir grubu

$$\left(g_1,\ g_2\right).\left(y,\ s\right) = \left(g_1 + y,\ g_2 + s\right)$$

işlemi ile göz önüne alınsın. $e_i = \left(0, \ldots, \underset{i}{1} \ldots, 0, \ldots\right)$ ile tanımlanır.

Her ortalanabilir grup bir tempered Følner dizisi içerir ve buna bağlı olarak Teorem 4.2.10. gereği noktasal yakınsaklık sağlanır. Bunun için öncelikle $G$ grubu içinde bir Følner dizisi oluşturulmalıdır:

$$\tilde{F}_n = \left\{\left(y,\ s\right) \in G \,\middle|\, \left|y\right| \le n,\ s = \sum_{i=1}^{2n} \xi_i e_i,\ \xi_i = 0 \vee 1\right\}$$

olsun. $\left(\tilde{F}_n\right)$ dizisinin $G$ içinde bir sol Følner dizisi olduğunu göstermek için $g \in G$ keyfi elemanı alınırsa, $g_1 \in \mathbb{Z}$ ve $g_2 = \sum_{i=1}^{2m} \theta_i e_i$ olmak üzere $g = \left(g_1,\ g_2\right)$ 'dir.

$$a \in \tilde{F}_n \Rightarrow a = \left(y,\ s\right),\ s = \sum_{i=1}^{2n} \xi_i e_i \text{ 'dir.}$$

$$ga=(g_1,\ g_2).(y,\ s)=\left(g_1+y,\ \sum_{i=1}^{2n}\xi_i e_i+\sum_{i=1}^{2m}\theta_i e_i\right)$$

dir. $n>m \Rightarrow 2n>2m$ olduğundan $\gamma_i=0$ veya 1 olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{2n}\xi_i e_i+\sum_{i=1}^{2m}\theta_i e_i=\sum_{i=1}^{2n}\gamma_i e_i$$

dir. Böylece

$$ga=(g_1,\ g_2).(y,\ s)=\left(g_1+y,\ \sum_{i=1}^{2n}\gamma_i e_i\right)$$

olarak yazılabilir. $|g_1+y|\le n$ ise $ga\in\tilde{F}_n$'dır. $|g_1+y|>n$ ise sabit bir $g_0\in G$ ve $\tilde{F}_n$ için

$$\left|g_0\tilde{F}_n\Delta\tilde{F}_n\right|\le|g_1|2^{2n}$$

dir. Ayrıca $\left|\tilde{F}_n\right|=(2n+1)2^{2n}$'dir. Buradan

$$\frac{\left|g_0\tilde{F}_n\Delta\tilde{F}_n\right|}{\left|\tilde{F}_n\right|}\le\frac{|g_1|}{2n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

olur. Böylece $\left(\tilde{F}_n\right)$ dizisinin $G$ içinde bir sol Følner dizisi olduğu görüldü. Şimdi noktasal yakınsaklığı gerçeklemek için Teorem 4.2.10. gereği $\left(\tilde{F}_n\right)$ dizisinin Shulman Şartı'nı sağladığı gösterilmelidir.

$g_2=\sum_{i=1}^{2m}\theta_i e_i$ olmak üzere $g=(g_1,\ g_2)\in G$ olsun.

$$g^{-1}=(g_1,\ g_2)^{-1}=(-g_1,\ g_2)$$

dir. Buradan

$$\tilde{F}_m^{-1}=\left\{(g_1,\ g_2)\ \middle|\ |g_1|\le m,\ g_2=\sum_{i=1}^{2m}\theta_i e_i,\ \theta_i=0\vee 1\right\}$$

olur. $\tilde{F}_n=\left\{(y,\ s)\in G\ \middle|\ |y|\le n,\ s=\sum_{i=1}^{2n}\xi_i e_i,\ \xi_i=0\vee 1\right\}$ idi.

$$\tilde{F}_m^{-1}\tilde{F}_n=\left\{(g_1+y,\ g_2+s)\ \middle|\ |g_1|\le m,\ |y|\le n,\ g_2=\sum_{i=1}^{2m}\theta_i e_i,\ s=\sum_{i=1}^{2n}\xi_i e_i\right\}$$

dir. $n>m$ ise $2n>2m$'dir. Bu takdirde,

$$\sum_{i=1}^{2m}\theta_i e_i + \sum_{i=1}^{2n}\xi_i e_i = \sum_{i=1}^{2n}\gamma_i e_i$$

ve

$$\tilde{F}_m^{-1}\tilde{F}_n = \left\{ (k,\ l) \,\middle|\, |k| \le m+n,\ l = \sum_{i=1}^{2n}\gamma_i e_i \right\}$$

olur. Bu halde

$$\left|\tilde{F}_m^{-1}\tilde{F}_n\right| = (2m+2n+1)\,2^{2n}$$

’dir ve

$$\frac{\left|\tilde{F}_m^{-1}\tilde{F}_n\right|}{\left|\tilde{F}_n\right|} = 1 + \frac{2m}{2n+1}$$

olur. Bu eşitlikten faydalanarak $\left(\tilde{F}_n\right)$ Følner dizisinin bir tempered alt dizisinin varlığını inceleyelim. Bunun için $n_k = 2^k$ olmak üzere $\tilde{G}_k = \tilde{F}_{n_k}$ olsun. Bu takdirde, $n_k = 2n_{k-1}$’dir. $n > m$ olmak üzere yukarıdaki eşitlik kullanılırsa,

$$\frac{\left|\bigcup_{i=1}^{k-1}\tilde{G}_i^{-1}\tilde{G}_k\right|}{\left|\tilde{G}_k\right|} = \frac{\left|\tilde{G}_{k-1}\tilde{G}_k\right|}{\left|\tilde{G}_k\right|} = \frac{\left|\tilde{F}_{n_{k-1}}\tilde{F}_{n_k}\right|}{\left|\tilde{F}_{n_k}\right|} = 1 + \frac{2.2^{k-1}}{2.2^k + 1} < 2$$

olduğundan $\left(\tilde{G}_k\right)$ Følner dizisi Shulman Şartı’nı sağlar. Yani $\left(\tilde{F}_n\right)$ Følner dizisinin bir tempered alt dizisi bulunmuş olur. Teorem 4.2.10. gereği $\left(\tilde{G}_k\right)$ dizisi boyunca noktasal ergodik teorem sağlanır.

# 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

## 5.1. Sonuçlar

Ergodik teori günümüzde hızlı gelişen bir daldır. Ergodik teorinin en önemli sorusu $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right)$ ortalamasının hangi durumlarda var olup olmadığıdır. Ergodik teoride ilk önemli sonuçlar G.D. Birkhoff ve Von-Neumann tarafından ispatlanmıştır. Bunlar sırasıyla noktasal ergodik teorem ve ortalama ergodik teorem olarak bilinir. Bu sonuçların yıllardır devam eden genelleştirilmelerinden birisi Lindenstrauss(1999) tarafından verilen ortalanabilir grupların ölçümü koruyan etkileri için noktasal ergodik teoremin ispatıdır.

Bu çalışmada ortalanabilir gruplar için ergodik teoremlerle ilgili son yıllarda yapılan çalışmalar göz önüne alınarak, Banach prensibinden yararlanarak $G$ herhangi bir sayılabilir ortalanabilir grup ve $\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}_2$ ise sayılabilir değişmeli grup olmak üzere bu grupların direkt çarpımının ortalanabilirliğinden hareketle $G\times\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}_2$ ortalanabilir grubu için maksimal eşitsizlik sağlanırsa noktasal ergodik teoremin sağlandığı gösterilmiştir.

## 5.2. Öneriler

Daha genel ortalanabilir gruplar ve ortalanabilir yarı gruplar için noktasal ergodik teoremin sağlanıp sağlanmadığı araştırılan bir konudur. $\mathbb{Z}$ içindeki her Følner dizisi için noktasal ergodik teoremin sağlanmadığı bilinmektedir. $\mathbb{Z}$ içindeki her Følner dizisi için noktasal ergodik teoremin sağlanmasını garanti eden gerekli ve yeterli koşulların var olup olmadığı hala incelenen bir konudur.

## KAYNAKLAR


ARGABRIGHT, L.N., and WILDE C.O., 1967. Semigroups satisfying a strong Følner condition. Proc. Amer. Math. Soc., 18: 587-591.

BAYRAKTAR, M., 1992. Fonksiyonel Analiz. Atatürk Üniversitesi Yayınları, 316s.

BUTKEVICH, S., 2001. Convergence of Averages in Ergodic Theory. Thesis, Ohio State University.

COHN, D.L., 1980. Measure Theory. Birkhauser, Boston, 373p.

DAY, M.M., 1957. Amenable semigroups. Illinois J. Math, 1: 509-544.

FØLNER, E., 1955. On groups with full Banach mean values. Math. Scand., 3: 243-254.

FREY, A.H., 1960. Studies on Amenable Semigroups. Thesis, University of Washington.

GARSIA, A., 1970. Topics in Almost Everywhere Convergence. Markham Publishing Company, Chicago, 154p.

GREENLEAF, F.P., 1969. Invariant Means on Topological Groups and Their Applications. Van Nostrand Reinhold Company, 113p.

HUNGERFORD, T.W., 1974. Algebra. Springer-Verlag New York Inc., 502p.

KOLMOGOROV, A.N., and FOMIN, S.V., 1970. Introductory Real Analysis. Prentice-Hall Inc., 403p.

KRENGEL, U., 1985. Ergodic Theorems. Walter de Gruyter&Co.,Berlin, 357p.

LINDENSTRAUSS, E., 1999. Pointwise theorems for amenable groups. Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc., 5: 82-90.

LIPSCHUTZ, S., 1965. General Topology. Schaum’s Outline Series, McGraw-Hill Book Company, 239p.

NAMIOKA, I., 1964. Følner conditions for amenable semigroups. Math. Scand., 15: 18-28.

PATERSON, A.L.T., 1988. Amenability. American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 450p.

PETERSEN, K., 1983. Ergodic Theory. Cambridge University Pres, 329p.

ROSENBLATT, J., and WIERDL, M., 1992. A new maximal inequality and its applications, Ergodic Theory Dynamical Systems, 12(3): 509-558.

SHULMAN A., 1988. Maximal ergodic theorems on groups. Lit. NINTI, 2184: 1-22.

TEMİR, S., 2002. On subadditive processes on direct product of countable amenable groups. Publi.de L’ Institut Math., 72(86): 119-122.

TEMPELMAN, A., 1992. Ergodic Theorems for Group Actions. Informational and thermodynamical aspects, Mathematics and its applications 78, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 399p.

WALTERS, P., 1982. An Introduction to Ergodic Theory. Springer-Verlag New York Inc., 250p.

**ÖZGEÇMİŞ**

1979 yılında Şanlıurfa'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Şanlıurfa'da tamamladı. 1997 yılında Şanlıurfa Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 1998 yılında Harran Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı ve 2002 yılında birincilikle mezun oldu. 25.12.2002 tarihinde Harran Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne araştırma görevlisi olarak atandı. 2003 yılında Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen aynı göreve ve yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir.

**ÖZET**

Bu çalışmada ilk olarak, gerekli olan temel tanım ve teoremler detaya girilmeksizin verilmektedir. Ayrıca ortalanabilir grup ve ortalanabilir yarı gruplar için temel tanımlar açıklanarak bir $S$ yarı grubunun sağ ortalanabilir olması için yeter şartlar incelenmektedir.

Daha sonra, sonucu ortalanabilir gruplar için noktasal ergodik teoremin ispatında kullanılacak olan Banach Prensibi ayrıntılı olarak incelenmektedir. Ayrıca noktasal ergodik teoremin sağlanması için $|I_n|$ artan olmak üzere $(I_n) \subset \mathbb{Z}$ içindeki aralıkların dizisinin Zayıf Tempelman Şartı'nı sağlamasının gerek ve yeter koşul olduğu açıklanarak, bu şartı sağlayan ve sağlamayan dizilerin örnekleri araştırılmaktadır.

Son olarak, $G$ herhangi bir sayılabilir ortalanabilir grup ve $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ise sayılabilir değişmeli grup olmak üzere noktasal ergodik teorem $G \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ortalanabilir grubu için gösterilmektedir. Her ortalanabilir grubun bir tempered Følner dizisi içerdiği kullanılarak, $\mathbb{Z} \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ortalanabilir grubu içindeki Følner dizisi göz önüne alınmaktadır. Noktasal yakınsaklığı gerçeklemek için $\mathbb{Z} \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ortalanabilir grubu içindeki bu dizinin tempered Følner dizisi olduğu gösterilerek Lindenstrauss (1999) çalışması gereği, $\mathbb{Z} \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ortalanabilir grubu için noktasal ergodik teoremin sağlandığı incelenmektedir.

**SUMMARY**

In this thesis, in the first section necessary fundamental definitions and theorems has been given. In addition, basic definitions of the amenable groups and amenable semigroups has been studied and sufficient conditions has been investigated for a *S* semigroup to be right amenable.

Later, the Banach principle whose result will be used in proof of the pointwise ergodic theorem for amenable groups has been explained in detail. Furthermore, if $(I_n)$ is a sequence of the intervals in $\mathbb{Z}$ such that $|I_n|$ is increasing, then we have explained that the pointwise ergodic theorem holds along the sequence $(I_n)$ if and only if $(I_n)$ satisfies Weak Tempelman's Condition, and the examples of the sequences in $\mathbb{Z}$ which satisfy or do not this condition has been investigated.

Finally, if *G* is a countable amenable group and $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ is a countable abelian group, then the pointwise ergodic theorem has been shown for the amenable group $G \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$. By using the fact that every amenable group has a tempered Følner sequence, we have investigated the Følner sequence in the amenable group $\mathbb{Z} \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ which has a tempered Følner sequence. We used the fact from Lindenstrauss (1999), that the pointwise ergodic theorem holds along the tempered Følner sequence in the amenable group $\mathbb{Z} \times \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$.