T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE SHOOTING (ATIŞ) METODU

Mahmut MODANLI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2006

Yrd. Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ danışmanlığında, Mahmut MODANLI'nın hazırladığı "Diferansiyel Denklemlerde Shooting (Atış) Metodu" konulu bu çalışma 25/01/2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr Tanfer TANRIVERDİ

Üye: Doç. Dr. Abdulkadir ERTAŞ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Nayil KILIÇ

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığı ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Prof. Dr: İbrahim BOLAT
Enstitü müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZ

Yüksek Lisans Tezi

DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE SHOOTING (ATIŞ) METODU

Mahmut MODANLI

Harran üniversitesi
Fen bilimler Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
Yıl: 2006, Sayfa: 70

Bu tez sınır değer problemleri konusunda daha önce yayınlanmış önemli makalelerin birer taramasıdır. $y^{(n)} = f(x, y, ..., y^{(n-1)})$ diferansiyel denklemi $n = 1,2,3$ için belli şartlar altında çözümün varlığı gösterildi. Özel olarak, Falkner-Skan ve Blasius denklemi, Landesman-Lazer tipi denklem, ikinci mertebeden Painlevé denklemi ve Gauge teorisinde önemli bir yere sahip olan Yang-Mill denklemlerini çalışılırken kullanılan denklemlerin çözüm varlığı shooting metodu yardımıyla araştırıldı.

ANAHTAR KELİMELER: Shooting Metodu, Falkner Skan, Blasius denklemi, Painlevé Denklemi, Yang-Mill Denklemi ve Sınır Değer Problemleri.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SHOOTING METHOD of DIFFERANTIAL EQUATIONS

Mahmut MODANLI

Harran University
Grduate School of Natural and Applied Sciences
Deparment of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ

Year: 2006, Page: 70

$$y^{(n)} = f(x, y, ..., y^{(n-1)})$$

In this thesis we have revieved already published special articles related to shooting method. We investigate linear and nonlinear case of the this equation with certain boundary conditions for $n = 1,2,3$. Especially, the existence of the solutions of Falkner Skan, Blasius equation, Landesman-Lazer type equation, the second order Painlevé equation and Yang-Mill type equation were investigated by shooting method.

KEY WORDS: Shooting Method, Falkner-Skan, Blasius Equation, Painlevé Equation, Yang-Mill Equation and Boundary Value Problems.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bilgisinden ve rehberliğinden yararlandığım tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ'ye teşekkür ederim. Tezi hazırlarken maddi ve manevi desteğini esirgemeyen çok değerli aileme sonsuz teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Kaos ve diferansiyel denklemlerde bazı problemlere yeni bir bakış açısı ile yaklaşacağız. Bu bakış açısı ile Poincaré dönüşümü az bir role yada hiçbir role sahip değildir. Diferansiyel denklemi sağlayan çözümü tanımlayan dönüşümün akışını çalışmak yerine direkt olarak akış çalışılacaktır. Bu teknik kaos problemlerinde daha az kullanılmasına rağmen bir çok alanda geniş bir kullanıma sahiptir.

Genel olarak bu sınıfta tartışılan tekniklerden bir tanesi Shooting (Atış) metodu olarak bilinir. Bu ad ile ifade edilen metot kulağa hoş gelmemekle beraber bu adın kullanımı gelenekselleşmiştir. Bu amaçla, atış metodu yerine kulağa hoş gelebilecek ad sadece metotlar ifadesi kullanılabilir.

Lineer bir problem için Atış metodu oldukça etkili değildir. Bu anlamda, Shooting (Atış) metodunu daha çok lineer olmayan problemler için kullanılacaktır. Shooting (Atış) metodu konusunda oldukça önemli makalelerden bazıları (Weyl, 1942), (Hartman, 1964), (Mcleod, 1968), (Mcleod ve Serrin, 1968), (Hastings,1969) ve (Hastings ve Troy, 1992). Ayrıca, diferansiyel denklemlerde sınır değer problemleri (Tanrıverdi, 2001). Bu tezde farklı lineer olmayan problemlere Shooting(Atış) metodunun nasıl kullanılacağı araştırılacaktır.

Diferansiyel denklemi sağlayan çözümün sınır değer (veya başlangıç değer) şartlarını sağlamasını arzulayabiliriz. Bazı belli sınır değer problemlerde bu amaca varmak için diferansiyel denklemin başlangıç değer problemine dönüştürerek çözümü arzuladığımız şekilde elde edebiliriz. Bu hususu, lineerlik şartını gerçekleyen bir örnek ile izah edelim. Bu tezde özellikle lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler irdelenecektir.

$$u'' + q(t)u = f(t) \tag{1}$$

$[0,1]$ kapalı aralığında (1) problemini sağlayan çözümün

$$u(0)=0$$
$$u(1)=0 \tag{2}$$

şartlarını sağlayacak şekilde olmasını isteyelim. Bu problemin çözümünü elde etmek için Green metodunun kullanıldığı bilgilerimizin dahilindedir. Bu metotla homojen diferansiyel denklemi sağlayan iki lineer bağımsız çözümü kullanarak Green fonksiyonu $G(t,\tau)$ teşkil edilir. Bu taktirde (1) denklemini sağlayan çözümün

$$u(t)=\int_0^1 G(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

şeklinde olduğu araştırılır. (1) problemi çözüme sahip olmayabilir. $\phi(t)$ fonksiyonu

$$u''+q(t)u=0 \tag{3}$$
$$u(0)=u(1)=0 \tag{4}$$

homojen diferansiyel denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $f(t)$ homojen diferansiyel denkleminin çözümü olan $\phi(t)$ ye dikse çözüm mevcuttur. Diklikten kastımız

$$\int_0^1 \phi(t)f(t)dt=0$$

olmasıdır. Bu husus, $\phi(t)\neq 0$ olması halinde herhangi $f(t)$ için doğrudur.

İkinci bir çözümün organizasyonu aşağıdaki gibidir. $u_p(t)$, $u(0)=u'(0)=0$ şartlarını sağlayan (1) denkleminin bir çözümü olsun. $u_h(t)$, $u(0)=0$ ve $u'(0)=1$ şartlarını sağlayacak şekilde (3) homojen diferansiyel denkleminin bir çözümü olsun. Bu taktirde, eğer $u_\alpha(1)=0$ ise herhangi bir α için

$$u_\alpha(t)=u_p(t)+\alpha u_h(t) \tag{5}$$

çözümü $(1)-(2)$ diferansiyel denklemini sağlar. Eğer $u_h(1)\neq 0$ ise

$$u_p(1)+\alpha u_h(1)=0$$

denklemini α için çözebiliriz. Eğer $u_h(1)=0$ ise çözüm sadece $u_p(1)=0$ olması ile mevcuttur. Bu taktirde, $u_p(t)$ için parametrelerin değişim formülü ortogonallik (diklik) şartını verir.

Şimdi de yukarıda anlatılanlardan farklı olarak diğer bir yolla problemi çözelim. (5) ile verilen $u_\alpha(t)$ çözümünü farklı bir şekilde tanımlayalım. Bu halde, $u_\alpha(t)$ çözümü

$$u'' + q(t)u = f(t) \tag{6}$$

$$u(0) = 0 \tag{7}$$

$$u'(0) = \alpha \tag{8}$$

başlangıç değer problemini sağlayan tek çözümdür. α seçimini $u_\alpha(1) = 0$ olacak şekilde belirlemeliyiz. Başlangıçta eğiminin seçimini, $u(t)$ çözümünü $u(1) = 0$ hedefine vuracak şekilde belirlemeliyiz. Bu sebeple kullanılan metot Shooting (Atış) metodu adını alır. Bunu yapabilmek için genellikle bilinen yol, bazı α değerleri için $u_\alpha(1) < 0$ olduğunu diğer bazı α değerleri içinde $u_\alpha(1) > 0$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bu halde $(6)-(8)$ problemini sağlayan çözüm, α parametresine göre süreklilikten ve ara değer teoremi kullanılırsa $u_\alpha(1) = 0$ olacak şekilde bir α vardır. Bu şekilde verilen lineer bir problem için atış metodu oldukça etkili değildir. Son paragrafta ifade edilen özellikleri ispat edebilmek için (5) denklemi kullanılabilir. Bu formüllün kullanılmasıyla atış metoduna gerek kalmayacaktır.

Atış metodunun oldukça etkili olduğu aşağıdaki nonlineer problemini ele alalım.

$$u'' - u^3 = f(t) \tag{9}$$

$$u(0) = 0, \; u(1) = 0 \tag{10}$$

Eğer $f = 0$ ise, $u = 0$ (9) denkleminin bir çözümüdür. Bazı t ler için $f(t) \neq 0$ olsun. (9)-(10) probleminin çözümü için herhangi bir formül yoktur. Böyle bir çözümün varlığını her α için $u = u_\alpha$, (9) denklemi ve

$$u(0) = 0$$
$$u'(0) = \alpha$$

koşulunu sağlayacak şekilde ele alınır.

- $A = \{\alpha \mid \; u_\alpha(1) > 0\}$

ve

- $B = \{\alpha \mid \; u_\alpha(1) < 0\}.$

A ve B kümelerinin ayrık oldukları tanımlarından açıktır. Aynı zamanda A ve B kümeleri açıktır. Örneğin, $\overline{\alpha} \in A$ olsun. Bu durumda $u_{\overline{\alpha}}(1) > 0.$ Çünkü çözümler α nın değerine göre sürekli olarak değişecektir. Yani, çözüm başlangıç değerine bağlı olarak değişecektir. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için eğer $|\alpha - \overline{\alpha}| < \varepsilon$ ise,

$$|u_\alpha(1) - u_{\overline{\alpha}}(1)| < \frac{1}{2} u_{\overline{\alpha}}(1).$$

Eğer $|\alpha - \overline{\alpha}| < \varepsilon$ ise bu durumda $u_\alpha(1) > 0.$ Bu halde $\overline{\alpha}$ nın bir açık komşuluğu A kümesindedir. Bu da A nın açık olduğunu gösterir. Benzer olarak, B açıktır. A *ve* B kümeleri açık, ayrık ve boştan farklıdır. Reel sayı doğrusu bağlantılı olduğundan bir kümenin bağlantılılığı tanımı gereğince $A \cup B \neq (-\infty, \infty)$. Bu taktirde bir α^* sayısı vardır ki ne A kümesindedir ne de B kümesindedir. A *ve* B kümelerinin tanımlarından dolayı u_{α^*}, $u(0) = u(1) = 0$ şartını sağlar.

Bu tezde shooting (atış) metodu yardımıyla analitik olarak çözüme sahip olmayan non-lineer diferansiyel denklemlerin verilen koşullara bağlı olarak çözümlerin varlığını göstermeyi amaçlıyoruz.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1 Temel Kavramlar ve Tanımlar

Tanım 2.1.1: X bir uzay A ve B, X in alt kümeleri olsun. Eğer, $X = A \cup B$ ve $A \cap B = \phi$ olacak şekilde açık A, B kümeleri varsa X e bağlantısız küme denir. Aksi halde, X e bağlantılı küme denir. Yani, X ayrık, boştan farklı A ve B açık alt kümelerinin birleşimi olacak şekilde A ve B mevcut değilse X bağlantılıdır.

Örnek 2.1.1: $S = [-1,0) \cup (0,1]$ olsun. $U = (-2,0)$ ve $V = (0,2)$ açık kümeleri verilsin. Bu durumda, $U \cap V = \phi$, $U \cap S \neq \phi$, $V \cap S \neq \phi$ olduğundan S kümesi bağlantısızdır. Fakat $S = \{x\}$ kümesi tek nokta içersin. S kümesi bağlantılıdır. Çünkü; $U \cap S \neq \phi$, $V \cap S \neq \phi$ olacak şekilde ayrık ve açık iki küme bulunamaz.

Tanım 2.1.2: Bağımsız değişkenleri, bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre türevlerini içeren bağıntıya diferansiyel denklem denir. Sembolik olarak, $F(x, y, y', y'',..., y^{(n)})$ şeklinde gösterilir.

Ara değer Teoremi: $f(x)$, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve $f(a) < k < f(b)$ ise, $f(c) = k$ olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ vardır.

Tanım 2.1.3: En genel biçimiyle

$$\alpha_1 y^{(n)} + \alpha_2 y^{(n-1)} + ... + \alpha_{n-2} y'' + \alpha_{n-1} y' + \alpha_n y = b(x)$$

şeklindeki bir diferansiyel denklemine lineer diferansiyel denklem denir. Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevleri çarpım şeklinde bulunuyorsa bu diferansiyel denkleme lineer olmayan diferansiyel denklem denir.

Örnek 2.1.2: $y' + \cos(x) y = e^{-\sin x}$ diferansiyel denklemi 1. mertebeden lineer bir diferansiyel denklemdir.

Örnek 2.1.3: $x^2 \cos yy' - 2x \sin y = -1$ diferansiyel denklemi 1. mertebeden lineer olmayan bir diferansiyel denklemdir.

Tanım 2.1.4: Bir diferansiyel denklem verildiğinde bunun verilen bir şartı sağlayan çözümü istenebilir. Bu tip problemlere başlangıç değer problemleri denir. Verilen şart genellikle çözümün bazı şartları sağlanması şeklindedir. 1.mertebeden verilen bir denklem için şart $x = x_0$ için y yerine $y = y_0$ olması şeklindedir.

Örnek 2.1.4: $y''' - 6y'' + 11y' - 6 = 0$ denklemi $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2$ başlangıç değer koşullarına bağlı çözümü $y(x) = e^x - 2e^{2x} + e^{3x}$ şeklindedir.

Tanım 2.1.5: Bir diferansiyel denklemin bazen bilinmeyen katsayılar içeren genel çözümünü bulmakla yetiniriz. Bazı durumlarda ise diferansiyel denklemi belirli şartları sağlayan çözümlerin bulunması gerekir. Bu şartlar genellikle problemin yapısında vardır veya doğrudan denklemde verilir. Adı geçen şartlar yalnız bir noktaya ait özel şartlar ise başlangıç şartları eğer iki veya daha fazla noktayı kapsayan şartlar ise o zaman sınır şartları adını alır.

Örnek 2.1.5: $y'' - 9y = 0$ diferansiyel denklemi $y(0) = y(1) = 0$ sınır değer koşullarına bağlı çözümü sıfırdır.

Green fonksiyonu: $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad y(a) = y(b) = 0,$ denklemini $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde ele alalım. Bu son diferansiyel denkleminin çözümü

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)dt$$

şeklinde yazılabilirse $G(x,t)$ ye Green fonksiyonu denir.

Örnek 2.1.6: $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ (2.1)

$a_1(x),\ a_2(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlardır. (2.1) probleminin çözümünü f cinsinden yazalım. $y_1(x)$ ve $y_2(x)$, (2.1) diferansiyel denkleminin (homojen) lineer bağımsız çözümleri olsun. Bu durumda, homojen diferansiyel denkleminin çözümü

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

dir. Şimdi de özel çözümü bulmaya çalışalım. (Bu özel çözüm (2.1) diferansiyel denklemini sağlar)

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$$y_h' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'$$

c_1 ve c_2 yı hemen hemen sabit kabul edeceğiz. Bunun için, $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$ olmasını isteyelim. Bu durumda,

$$y_h' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$$
$$y_h'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2''$$

bu ifadeler (2.1) denkleminde yazılırsa

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x)$$

elde edilir. Burada,

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x)$$

dır. Eğer cebirsel işlemler yapılırsa,

$$c_1 = -\int_{h_1}^{x} \frac{f(t) y_2(t)}{w(y_1 y_2)(t)} dt$$

$$c_2 = \int_{h_2}^{x} \frac{f(t) y_1(t)}{w(y_1 y_2)(t)}$$

Burada h_1 ve h_2, $[a,b]$ kapalı aralığına yerleştirilmiş sabit sayılardır. Bu sebeple (2.1) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 - y_1(x) \int_{h_1}^{x} \frac{f(t) y_2(t)}{w(y_1 y_2)(t)} dt + y_2(x) \int_{h_2}^{x} \frac{f(t) y_1(t)}{w(y_1 y_2)(t)} dt$$

şeklindedir.

Kapalı Fonksiyon Teoremi: Eğer,

- $F(x,y) \in C^1, \quad |x - x_0| \le \delta, \quad |y - y_0| \le \delta$
- $F(x_0, y_0) = 0$
- $F_y(x_0, y_0) \neq 0$

ise bir tek $f(x)$ ve $\eta > 0$ vardır öyle ki

- $y_0 = f(x_0)$
- $F(x, f(x)) = 0, \quad |x - x_0| = \eta$
- $f(x) \in C^1, \quad |x - x_0| < \eta$

şartlarını sağlar.

2.2. Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Hesaplamaları

2.2.1. Runge-Kutta yöntemleri

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{2.2}$$

ile tanımlanan başlangıç değer probleminde, $x = x_0$ noktasından sonraki noktada fonksiyon değeri, bu $x = x_0$ noktası civarında, fonksiyonun Taylor seri açılımı yapılarak hesaplanıyordu. Ancak bu tür bir hesaplamada karşımıza çıkacak yüksek mertebeden türevleri bulmak oldukça zaman alıcı olacaktır. Bu nedenle Taylor seri yöntemi yerine, bu serinin indirekt olarak kullanıldığı Runge-Kutta yöntemlerini kullanmak hesaplama açısından büyük kolaylık getirecektir. Runge-Kutta yöntemleri bir anlamda integrallerin yaklaşık hesabına ait Simpson kuralına dayanır. 1891 yılında Carl Runge tarafından teklif edilmiş ve kullanıldığı yıllarda diğer yöntemlere nazaran daha hassas sonuçlar vermiştir. 1901 yılında, Kutta bazı değişiklikler yaparak yöntemi daha iyi sonuçlar verecek hale sokmuştur. Bu yöntemin çok değişik şekilleri mevcut olup, genel olarak fonksiyonun bir sonraki değeri,

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

formunda hesaplamaktır. Buradaki $\phi(x_i, y_i, h)$ aralık üzerinde temsili eğim olarak yorumlanabilir. Bu fonksiyon, a lar sabitler olmak üzere,

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n \tag{2.3}$$

şeklinde yazılabilmektir. (2.3) deki k lar ise;

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2h, q_{21}k_1h + q_{22}k_2h)$$

$$\vdots$$

$$k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \ldots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)$$

şeklindedir. Dikkat edilirse her bir k değeri bir önceki k lar cinsinden ifade edilmektedir. n değişik şekilde seçilerek farklı türdeki formüller elde edilebilir. $n = 1$ seçilecek olursa Euler yöntemindeki formül elde edilir. $n = 2$ seçilirse ikinci mertebeden Runge-Kutta formülleri elde edilir. $n = 4$ seçilirse dördüncü mertebeden Runge-Kutta formülleri elde edilir.

2.2.2. İkinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h \tag{2.4}$$

formülünde,

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

seçilirse ikinci mertebe Runge-Kutta formülleri elde edilir. Burada; a_1, a_2, p_1, q_{11} hesaplanacak katsayılardır.

$$h = x_{i+1} - x_i$$

dir.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{y_i'}{1}h + \frac{y_i''}{2!}h^2 + \ldots$$

şeklindeki Taylor açılımında üçüncü türevi içeren terimden sonraki terimler ihmal edilirse,

$$y_{i+1} \cong y_i + \frac{y_i'}{1}h + \frac{y_i''}{2!}h^2$$

elde edilir. Oysa,

$$y_i' = f(x_i, y_i)$$

$$y_i'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = F_1$$

şeklinde olduğundan,

$$y_{i+1} \cong y_i + fh + \frac{1}{2}F_1 h^2 \tag{2.5}$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç (2.4) ile birlikte düşünülürse,

$$fh + \frac{1}{2}F_1 h^2 = (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

elde edilir. k_1, k_2 değerlerinin yerine yazılması ile de;

$$fh + \frac{1}{2}F_1 h^2 = a_1 fh + a_2 hf(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

elde edilir. Oysa iki değişkenli fonksiyonlarda Taylor seri açılımı dikkate alınırsa,

$$f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \cong f(x_i, y_i) + p_1 h\frac{\partial f}{\partial x} + q_{11} k_1 \frac{\partial f}{\partial y}$$

yazılabilir. Böylece,

$$fh + \frac{1}{2}F_1h^2 = a_1 fh + a_2 h[f + p_1 hf_x + q_{11}k_1 hf_y]$$

elde edilir. Açık yazılırsa,

$$fh + \frac{1}{2}h^2[f_x + f_y f] = (a_1 + a_2)fh + p_1 a_2 h^2 f_x + a_2 h^2 q_{11} k_1 f_y$$

elde edilir. Bu eşitlikten de $k_1 = f$ konularak,

$$a_1 + a_2 = 1, \quad p_1 a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_2 q_{11} = \frac{1}{2}, \tag{2.6}$$

elde edilir. Dört bilinmeyen içeren üç denklemden oluşan bu sistemde bir bilinmeyenin keyfi seçilmesi gerekir. Son iki denklemden;

$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2}$$

olduğu açıktır.

$a_2 = \frac{1}{2}$ seçilirse $p_1 = q_{11} = 1$ olur.

Böylece, $a_1 = \frac{1}{2}$ elde edilir.

$$y_{i+1} = y_i + (\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1) \tag{2.7}$$

ikinci mertebeden Runge-Kutta formülü elde edilir.

2.2.3. Üçüncü mertebe Runge-Kutta yöntemi

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3)h \tag{2.8}$$

formülünde,

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11}k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, q_{21}k_1 h + q_{22}k_2 h)$$

seçilirse üçüncü mertebe Runge-Kutta formülleri elde edilir. $a_1, a_2, a_3, p_1, p_2, q_{11}$ ve q_{22} değerleri yine,

$$y_{i+1} \cong y_i + \frac{y_i'}{1}h + \frac{y_i''}{2!}h^2 + \frac{y_i'''}{3!}h^3 \tag{2.9}$$

Taylor formülü kullanılarak hesaplanacaktır.

$$y_i' = f(x_i, y_i)$$

$$y_i'' = f_x + f_y y' = f_x + f_y f$$

$$y_i''' = \frac{\partial}{\partial x}(f_x + f_y f) + \frac{\partial}{\partial y}(f_x + f_y f)y' = f_{xx} + f_{yx} f + f_y f_x +$$

$$[f_{xy} + f_{yy} f + f_y f_y]f = f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy}(f)^2 + f_y(f_x + f_y f)$$

(2.9) de yerine yazılarak,

$$y_{i+1} - y_i \cong hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f) + \frac{h^3}{6}[f_{xx} 2f_{xy} f + f_{yy}(f)^2 + f_y(f_x + f_y f)]$$

elde edilir. Diğer yandan (2.8) de k_1, k_2, k_3 değerleri yerlerine yazılarak;

$$y_{i+1} - y_i = a_1 k_1 + a_2 k_2 h + a_3 k_3 h = a_1 fh + a_2 f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)h$$
$$+ a_3 f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + + q_{22} k_2 h)h$$

elde edilir. Son formüldeki ikinci ve üçüncü terimde yer alan fonksiyonlar, çok değişkenli fonksiyonlarda Taylor formülüne göre yazılıp gerekli eşitlikler göz önüne alınarak,

$$a_1 = \frac{1}{6}, \quad a_2 = \frac{4}{6}, \quad a_3 = \frac{1}{6}, \quad p_1 = \frac{1}{2}, \quad q_{11} = \frac{1}{2}, \quad p_1 = 1, \quad q_{21} = -1, \quad q_{22} = 2$$

sonuçları elde edilir. Böylece üçüncü mertebe Runge-Kutta formülleri;

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i + hk_1 + 2hk_2) \tag{2.10}$$

ve

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + k_3)$$

olarak bulunur.

2.2.4. Dördüncü mertebe Runge-Kutta yöntemi

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + a_4 k_4) \tag{2.11}$$

ve

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

$$k_4 = f(x_i + p_3 h, y_i + q_{31} k_1 h + q_{32} k_2 h + q_{33} k_3 h)$$

şeklinde seçilecek olursa dördüncü mertebeden Runge-Kutta Formülleri elde edilir. Daha önceki hesaplamalara benzer hesaplar yapılarak,

$$a_1 = \frac{1}{6}, \quad a_2 = \frac{2}{6}, \quad a_3 = \frac{2}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{6}, \quad p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{1}{2}, \quad p_3 = 1,$$

$$q_{11} = \frac{1}{2}, \quad q_{22} = \frac{1}{2}, \quad q_{21} = 0, \quad q_{31} = 0, \quad q_{32} = 0, \quad q_{33} = 0$$

elde edilir. Böylece,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}.k_1)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2}{2})$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

bulunur.

2.2.5. Runge-Kutta yönteminin sistemlere uygulanması

Kolaylık olması bakımından,

$$y' = f(x, y, z); \qquad y(x_0) = y_0$$

$$z' = g(x, y, z); \qquad z(x_0) = z_0$$

sistemini göz önüne alalım. Dördüncü Mertebe Runge-Kutta formüllerine benzer olarak

$$k_1 = hf(x_0, y_0, z_0)$$

$$l_1 = hg(x_0, y_0, z_0)$$

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2})$$

$$l_2 = hg(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2})$$

$$l_3 = hg(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_3}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3)$$

$$l_4 = hg(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3)$$

olmak üzere,

$$\Delta k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\Delta l = \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

artış değerleri elde edilir. Böylece,

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \Delta k; \quad z(x_0 + h) = z(x_0) + \Delta l$$

şeklinde y ve z çözümlerinin bir sonraki noktadaki değerleri bulunmuş olur.

Genel hal

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$

$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$

$$\vdots$$

$$y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$

sistemi ve $y_1(x_0) = y_{10}$, $y_2(x_0) = y_{20}, ..., y_n(x_0) = y_{n0}$ başlangıç şartları verilmiş olsun. Birinci yaklaşım,

$$K_{11} = hf_1(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$$

$$K_{21} = hf_2(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$$

$$\vdots$$

$$K_{n1} = hf_n(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$$

şeklinde olur. İkinci yaklaşım ise,

$$K_{12} = hf_1(x_0 + \frac{h}{2}, y_{10} + \frac{K_{11}}{2}, y_{20} + \frac{K_{21}}{2}, ..., y_{n0} + \frac{K_{n1}}{2})$$

$$K_{22} = hf_2(x_0 + \frac{h}{2}, y_{10} + \frac{K_{11}}{2}, y_{20} + \frac{K_{21}}{2}, ..., y_{n0} + \frac{K_{n1}}{2})$$

$$\vdots$$

$$K_{n2} = hf_n(x_0 + \frac{h}{2}, y_{10} + \frac{K_{11}}{2}, y_{20} + \frac{K_{21}}{2}, ..., y_{n0} + \frac{K_{n1}}{2})$$

olur. Üçüncü yaklaşım,

$$K_{13} = hf_1(x_0 + \frac{h}{2}, y_{10} + \frac{K_{12}}{2}, y_{20} + \frac{K_{22}}{2}, ..., y_{n0} + \frac{K_{n2}}{2})$$

$$K_{23} = hf_2(x_0 + \frac{h}{2}, y_{10} + \frac{K_{12}}{2}, y_{20} + \frac{K_{22}}{2}, ..., y_{n0} + \frac{K_{n2}}{2})$$

$$\vdots$$

$$K_{n3} = hf_n(x_0 + \frac{h}{2}, y_{10} + \frac{K_{12}}{2}, y_{20} + \frac{K_{22}}{2}, ..., y_{n0} + \frac{K_{n2}}{2})$$

bulunur. Son olarak dördüncü yaklaşım,

$$K_{14} = hf_1(x_0 + h, y_{10} + K_{13}, y_{13}, ..., y_{n0} + K_{n3})$$

$$K_{24} = hf_2(x_0 + h, y_{10} + K_{13}, y_{13}, ..., y_{n0} + K_{n3})$$

$$\vdots$$

$$K_{n4} = hf_n(x_0 + h, y_{10} + K_{13}, y_{13}, ..., y_{n0} + K_{n3})$$

olur. O halde,

$$y_1 = \frac{1}{6}[y_{10} + (K_{11} + 2K_{12} + 2K_{13} + K_{14})]$$

$$y_2 = \frac{1}{6}[y_{20} + (K_{21} + 2K_{22} + 2K_{23} + K_{24})]$$

$$\vdots$$

$$y_n = \frac{1}{6}[y_{n0} + (K_{n1} + 2K_{n2} + 2K_{n3} + K_{n4})]$$

şeklinde $x_0 + h$ fonksiyon değerleri elde edilecektir.

2.3. Lineer Shooting Metodu

Bir lineer diferansiyel denklemin genel formülü;

$$\alpha_1 y^{(n)} + \alpha_2 y^{(n-1)} + ... + \alpha_{n-2} y'' + \alpha_{n-1} y' + \alpha_n y = b(x)$$

şeklindedir. Bu tip diferansiyel denklemlerin farklı çözüm metotları vardır. Bu çözüm metotlarından biri shooting (Atış) metodudur. Shooting metodu nümerik analizde geniş bir kullanıma sahiptir. Aşağıdaki teorem ikinci mertebeden bir sınır değer problemin çözümünün varlığını ve tekliğini garantiler.

Teorem 2.3.1: $D = \{(x, y, y') \mid \ a \le x \le b, \ -\infty < y < \infty, \ -\infty < y' < \infty\}$

kümesi verilsin.

$$y'' = f(x, y, y'),\ a \le x \le b,\ y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta \tag{2.12}$$

sınır değer problemi aşağıdaki şartları sağlıyorsa f fonksiyonu tek çözüme sahiptir.

- $f(x, y, y')$, D kümesinde sürekli,
- f_y ve $f_y{}'$, D kümesinde sürekli olsun.

Bununla beraber eğer,

- Tüm $(x, y, y') \in D$ için $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') > 0$
- Tüm $(x, y, y') \in D$ için $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')\right| \le M$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabit sayısı vardır.

Örnek 2.3.1: $y'' + e^{-xy} + \sin y' = 0,\ 1 \le x \le 2,\ \ y(1) = y(2) = 0,$

sınır değer probleminde çözümün varlığının tek olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$f(x, y, y') = -e^{-xy} - \sin y'$$

dır. Buradan

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y') = xe^{-xy} > 0, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,y')\right| = \left|-\cos y'\right| \leq 1$$

olduğundan bu sınır değer problemi (2.3.1) Teoreminden dolayı bir tek çözüme sahiptir.

Eğer $f(x,y,y')$ fonksiyonu $f(x,y,y') = p(x)y' + q(x)y + r(x)$ şeklinde yazılırsa $y'' = f(x,y,y')$ ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklem olur. (2.3.1) Teoremi bu şekildeki problemlerin çözümünü kolaylaştırır.

Sonuç 2.3.1: $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \ a \leq x \leq b, \ y(a) = \alpha, \ y(b) = \beta$

lineer sınır değer problemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa

- $p(x), q(x)$ ve $r(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli,
- $[a,b]$ kapalı aralığında $q(x) > 0$

şartları altında (2.12) sınır değer problemi bir tek çözüme sahiptir. Şimdi de sınır değer problemini başlangıç değer problemine çevirelim.

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \ y(a) = \alpha, \ y'(a) = 0 \tag{2.13}$$

$$y'' = p(x)y' + q(x)y, \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = 0, \ y'(a) = 1 \tag{2.14}$$

olsun. Yukarıdaki Teorem ve sonucun hipotezleri ile beraber, bu iki problem bir tek çözüme sahiptir. Eğer $y_1(x)$ (2.13) nın bir çözümü ve $y_2(x)$ (2.14) ün bir çözümü ise

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x), \quad y_2(b) \neq 0, \tag{2.15}$$

(2.12) sınır değer probleminin bir çözümüdür.

Lineer denklemler de shooting metodunu kullanmak için lineer sınır değer probleminin yerine (2.13) ve (2.14) başlangıç değer problemlerini kullanmak esastır.

$y_1(x)$ ve $y_2(x)$ in yaklaşık çözümlerini bulmak için Newton-Raphson, Runge-Kutta ve diğer bilinen metotlar kullanılır. Sınır değer problemin çözümüne yaklaşmak için (2.15) denklemi kullanılır. $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ yaklaşıklarını bulmak için dördüncü mertebeden Runge-Kutta teknikleri kullanılır. Fakat diğer bilinen metotların her biri başlangıç değer problemin çözümüne yaklaşmak için dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodunun yerine kullanılabilir. Bu Runge-Kutta metodundaki algoritma sınır değer probleminin çözümünün türevleri için yaklaşıklarını elde etmenin ek özelliğine sahiptir. Kullanılan bu Runge-Kutta algoritması (2.3.1) sonucunun hipotezleri ile sınırlandırmamıştır.

Örnek 2.3.2:

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2},\ 1 \le x \le 2,\ y(1) = 1,\ y(2) = 2$$

sınır değer probleminin tam çözüme sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $y = c_1 x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{3}{10}\sin(\ln x) - \frac{1}{10}\cos(\ln x)$

denkleminden

$$c_2 = \frac{1}{70}[8 - 12\sin(\ln x) - 4\cos(\ln x)] \approx -0.03920701320$$

ve

$$c_1 = \frac{11}{10} - c_2 \approx 1.1392070132$$

Bu probleme (2.15) formülü uygulanarak başlangıç değer problemin çözümüne yaklaşmak amaçlanmıştır.

$$y_1'' = -\frac{2}{x}y_1' + \frac{2}{x^2}y_1 + \frac{\sin(\ln x)}{x^2},\ 1 \le x \le 2,\ y_1(1) = 1,\ y_1'(1) = 0,$$

ve

$$y_2'' = -\frac{2}{x}y_2' + \frac{2}{x^2}y_2,\quad 1 \le x \le 2,\quad y_2(1) = 0,\quad y_2'(1) = 1,$$

$h = 0.2$ *ve* $N = 3$ için (2.15) formülü kullanılarak bu örneğin sonuçları hesaplanır. Dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodu, başlangıç değer problemlerin çözümününün $O(h^4)$ mertebeye kadar doğruluğunu verir. Ne yazık ki bu metot istenilen sonuçları vermeyebilir. Çünkü, hatalar bilgisayardaki yuvarlatma hatalarından kaynaklanır. Eğer x, a dan b ye değişirken $y_1(x)$ de hızlı değişirse bu taktirde, β nın $u_{1,N}$ den küçük olması $u_{1,N} \approx y_1(b)$ daha büyük olmasını sağlar. Bu terim;

$$w_2 = \frac{(\beta - u_{1,N})}{v_{1,N}}, \qquad -\frac{u_{1,N}}{v_{1,N}}$$

yaklaşığıyla verilir. 6. adımdaki hesaplamalar

$$W_1 = u_{1,i} + w_{2,0} v_{1,i} \approx u_{1,i} - (\frac{u_{1,N}}{v_{1,N}}) v_{1,i}$$

$$W_2 = u_{2,i} + w_{2,0} v_{2,i} \approx u_{2,i} - (\frac{u_{1,N}}{v_{1,N}}) v_{2,i}$$

bu bize hata olasılığının olduğunu söyler. $u_{1,i}$, $y_1(x_i)$ in yaklaşığıdır. Bundan dolayı $u_{1,i}$ nın a dan b ye hareketi gözlemlenebilir. $u_{1,i}$, a dan b ye hızlı bir şekilde değişir. Shooting metodunun diğer yönü kullanılarak (yani b de atış yapılarak)

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \ \ a \le x \le b, \ \ y(b) = \beta, \ y'(b) = 0$$

ve

$$y'' = p(x)y' + q(x)y, \ \ a \le x \le b, \quad y(b) = 0, \quad y'(b) = 1$$

başlangıç değer probleminin yaklaşıkları çözülür. Eğer bu ters yönde yapılan shooting metodu hala hataları veriyorsa ve eğer daha yeterince doğruluk elde edilemiyorsa diğer teknikler kullanılır. Buna rağmen, eğer $u_{1,i}$, $y_1(x_i)$ ve $v_{1,i}$, $y_2(x_i)$ e $O(h^n)$ n. mertebeye kadar yaklaşmıştır. Özel olarak, her bir $i = 1,2,3,..,N$ için $w_{1,i}$, $y(x_i)$ ye $O(h^n)$ n. mertebeye yaklaşık olur. Buradan, K bir sabit olmak şartıyla

$$\left| w_{1,i} - y(x_i) \right| \le K h^n \left| 1 + \frac{v_{1,i}}{v_{1,N}} \right|.$$

2.4. Lineer Olmayan Problemler için Shooting Metodu

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \tag{2.16}$$

lineer olmayan ikinci mertebeden sınır değer problemindeki shooting metodu (2.15) probleminin lineerlik durumuna benzer. Ancak lineer olmayan problemin çözümü iki başlangıç değer problemine ait olan çözümlerin lineer terkibi olarak yazılamaz. Bunun yerine;

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = t, \tag{2.17}$$

başlangıç değer probleminin bir dizisi teşkil edilir. Çözümleri bulmak için bu tip dizileri kullanma ihtiyacını duyarız. Bunun yerine $t = t_k$ dizisi başlangıç koşulları sağlamak şartıyla oluşturulur. Biz $t = t_k$ parametreleri seçimini yaparak

$$\lim_{k \to \infty} y(b, t_k) = y(b) = \beta$$

olacak şekilde bir metodun olduğunu garantilemiş oluruz. Ne zaman $y(x, t_k)$, (2.17) başlangıç değer probleminin çözümünü ve $y(x)$, (2.16) sınır değer probleminin çözümünü gösterdiğinde bu teknik shooting metodu olarak bilinir. Bu shooting metodu sabit bir noktadan bir hedefte bulunan noktaya yapılan atışa benzer.

İşleme t_0 parametresiyle başlayalım. t_k parametrelerini belirlemek için, (2.3.1) Teoreminin hipotezlerini sağladığını kabul edelim. Eğer $y(x, t)$, (2.17) başlangıç değer probleminin çözümü ise t yi belirleyen problem

$$y(b, t) - \beta = 0$$

dır. Bu şekildeki lineer olmayan diferansiyel denklemler için nümerik analizdeki metotlarından yararlanılır. Bu metotlardan birisi Secant metodu kullanılarak problem çözülür. Bunun için t_0 ve t_1 yaklaşık başlangıç değerlerini seçelim. Kalan terimleri şu dizi yardımıyla üretelim.

$$t_k = t_{k-1} - \frac{\left(y(b, t_{k-1}) - \beta\right)\left(t_{k-1} - t_{k-2}\right)}{y(b, t_{k-1}) - y(b, t_{k-2})}, \quad k = 2,3,...$$

Hata payını azaltmak için Newton-Raphson metodu kullanılarak, t_0 yaklaşık başlangıç değerleriyle $\{t_k\}$ dizisi elde edilir. Bununla beraber, Newton iterasyonu

$$\begin{aligned} t_k &= t_{k-1} - \frac{y(b,t_{k-1})-\beta}{\dfrac{dy}{dt}(b,t_{k-1}),} \\ \frac{dy}{dt}(b,t_{k-1}) &\cong \frac{dy}{dt}(b,t_{k-1}) \end{aligned} \tag{2.18}$$

$\frac{dy}{dt}(b,t_{k-1})$ nin hakkında bilgi edinmemiz gerekir. Bu durum sıkıntı yaratır. Bu yüzden $y(b,t)$ için açık bir temsil bilinmiyor. Biz sadece $y(b,t_0),\ y(b,t_1),...y(b,t_{k-1})$ değerlerini biliyoruz. (2.16) çözümünün hem x e hem de t ye bağlı olduğundan başlangıç değer problemini daha uygun bir değer için tekrar yazalım.

$$y''(x,t) = f\big(\ (x, y(x,t), y'(x,t)\ \big),\ a \le x \le b, \quad y(a,t)=\alpha, \quad y'(a,t)=t \tag{2.19}$$

$\frac{dy}{dt}(b,t)$ değerini $t=t_k$ için $\frac{dy}{dt}$ değerini belirlemek istediğimizden t ye göre (2.19) un birinci kısmi türevlerini alalım. Bu ise

$$\begin{aligned} \frac{\partial y''}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial f}{\partial t}\big(x, y(x,t), y'(x,t)\big) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, y(x,t), y'(x,t)\big)\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x, y(x,t), y'(x,t)\big)\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y'}\big(x, y(x,t), y'(x,t)\big)\frac{\partial y'}{\partial t}(x,t) \end{aligned}$$

dir. Veya, burada x ve t bağımsız değişkenler olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{\partial y''}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial f}{\partial y}\big(x, y(x,t), y'(x,t)\big)\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) + \\ &\frac{\partial f}{\partial y'}\big(x, y(x,t), y'(x,t)\big)\frac{\partial y'}{\partial t}(x,t), \quad a \le x \le b, \end{aligned} \tag{2.20}$$

olur. Verilen başlangıç değerleri

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = 0 \quad ve \quad \frac{\partial y'}{\partial t}(a,t) = 1.$$

Basitlik olsun diye $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$ yerine $z(x,t)$ alalım. x ve t ye göre türevlerinin rolleri yer değiştirilebilir. Başlangıç değerleriyle (2.19) problemi

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')z + \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,y')z', \quad a \le x \le b,\ z(a,t)=0,\ z'(a,t)=1, \qquad (2.21)$$

başlangıç değer problemi haline gelir. Bu yüzden her iterasyon için iki başlangıç değer problemlerin hiçbiri tam olarak çözülemez. Çözümler bilinen metotların birisiyle yaklaşık çözülür. (2.21) algoritması Newton metoduyla istenilen iki çözüme yaklaşmak için 4.mertebeden Runge-Kutta metodunu kulanır. 2.4.1 örneği Secant metoduyla benzer prosedürle çözülür.

Örnek 2.4.1: $y'' = \frac{1}{8}\left(32 + 2x^3 - yy'\right), \quad 1 \le x \le 3, \quad y(1)=17, \quad y(3) = \frac{43}{3}$

sınır değer problemini çözünüz.

Çözüm: Bu örneğin tam çözümü

$$y(x) = x^2 + \frac{16}{x}$$

dir. Bu probleme (2.21) formülüne bağlı olarak verilmiş shooting metodu kullanılarak başlangıç değer probleminin yaklaşığı bulunur.

$$y'' = \frac{1}{8}\left(32 + 2x^3 - yy'\right), \quad 1 \le x \le 3, \quad y(1)=17, \quad y'(1)=t_k,$$

ve

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial t}z + \frac{\partial f}{\partial y'}z' = -\frac{1}{8}\left(y'z + yz'\right), \quad 1 \le x \le 3,\ z(1)=0, \quad z'(1)=1,$$

denklemlerinde iterasyonun her basamağında eğer,

$$\left|w_{1,N}(t_k) - y(3)\right| \le 10^{-5}$$

ise işlem sona erer. Bu problemde 4. iterasyonda istenen sonuç $t_4 = -14.000203$ dır.

2.5. Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı

Tanım 2.5.1: Bir bölgede alınan keyfi iki noktayı, bölge içinde kalacak şekilde bir doğru yardımıyla birleştirilebilirse bu cümleye konveks cümle denir. Teknik olarak bu tanım aşağıdaki gibi açıklanır.

$D \subset IR^2$ ve $\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) \in D$ olsun. Eğer,

$$\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\right) \in D$$

oluyorsa D ye yine konveks cümle denir.

Tanım 2.5.2: $f(x, y)$ fonksiyonu konveks bir cümlede tanımlansın. Eğer,

$$\left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \le L\left|y_1 - y_2\right|$$

olacak şekilde bir $L > 0$ sayısı varsa $f(x, y)$ fonksiyonuna Lipschitz'tır denir. Bu tanıma denk olarak eğer,

- $f_y(x, y)$ mevcut ve sınırlı ise $\left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \le \left|f_y\right|\left|y_1 - y_2\right|$ olur. İlk tanım bu ikinci tanımdan daha geneldir. Aşağıdaki örnek bunu açıklar.

Örnek 2.5.1: $f(x, y) = x|y|$ fonksiyonu Lipschitz'tır. Çünkü,

$$\left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| = \left|x|y_1| - x|y_2|\right| = |x|\left(|y_1| - |y_2|\right) \le |x||y_1 - y_2| < k|y_1 - y_2| \quad \left(|x| \le k\right)$$

olacak şekilde $k > 0$ sayısı vardır. İkinci tanımdan bu fonksiyonun y ye göre türevi olmadığından Lipschitz olup olmadığı sonucu çıkarılamaz.

Tanım 2.5.3: $\{y_n(x)\}$ fonksiyon dizisi $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlansın. Her $\varepsilon > 0$ için ve $\forall\, n > N(\varepsilon)$ için

$$\left|y_n(x) - y(x)\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ sayısı varsa (ε a bağlı, x e bağlı olmayan) $\{y_n(x)\}$ fonksiyon dizisi $y(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

Örnek 2.5.2: $\phi_n(x) = x^n$ fonksiyon dizisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak değildir.

Fakat $\phi_n(x) = (x - \frac{1}{n})^2$ fonksiyon dizisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

Weierstrass M-Kriteri: Eğer her n için $|u_n(x)| \leq M_n, \quad a \leq x \leq b$ olacak şekilde sabit terimli bir $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ yakınsak serisi varsa bu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ serisi de düzgün yakınsaktır.

Tanım 2.5.4: $A \subset R, \quad f : A \to R$ bir fonksiyon ve $x_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki

$$|x - x_0| \leq \delta(\varepsilon)$$

ise

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

oluyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir.

2.5.1. Ardışık yaklaşıklar metodu

Amacımız

$$y' = f(x, y) \tag{2.22}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.23}$$

şeklindeki bir diferansiyel denklemi sağlayan bir $y(x)$ çözümünü bulmaktır. Eğer $f(x, y)$ fonksiyonu sürekli ise bu şekilde tanımlanan diferansiyel denklemin çözümü mevcuttur. Bununla beraber eğer $f(x, y)$ fonksiyonu Lipschitz şartını da sağlarsa $y(x)$ çözümü tektir.

Şimdi (2.22) diferansiyel denklemin sahip olduğu çözümü araştıralım. Bunu yapmadan önce (2.22) diferansiyel denklemi x_0 dan itibaren integre edilirse

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

$$\Rightarrow y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \tag{2.24}$$

olur.

Lemma 2.5.1: (2.22)-(2.23) koşulunu sağlayan diferansiyel denklem (2.24) integral denklemine denktir.

İspat : (2.22)-(2.23) varsa (2.24) ün varlığını yukarıda göstermiş olduk. Tersine (2.24) varsa (2.22)-(2.23) yı gösterelim.

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

$$\Rightarrow \quad y'(x) = \frac{d}{dx}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \right) = \frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t, y(t))dt \right)$$
$$= f(b(x), y(b(x)))b'(x) - f(a(x), y(a(x)))a'(x)$$

formülü kullanılarak (2.24) denklemi $y' = f(x, y)$ olacaktır. Yine (2.24) ten x yerine x_0 yazılırsa $y(x_0) = y_0$ olur. Bu da istenen sonuçtur. (2.5.1) lemmasından

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds$$

dizisi teşkil edilir. Bu şekilde teşkil edilen diziye ardışık yaklaşıklar dizisi denir. Çünkü, bir sonraki dizi bir önceki diziye bağlı olarak hesaplanır.

Örnek 2.5.3: $y' = y + 1, \quad y(0) = 1$

Başlangıç değer probleminin çözümünü ardışık yaklaşıklar metoduyla bulunuz.

Çözüm:

$$y' = f(x, y) = y + 1$$

fonksiyonunun Lipschitz olduğunu gösterelim;

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1 + 1 - y_2 - 1| = |y_1 - y_2| \le 2|y_1 - y_2|$$

olacak şekilde bir $L = 2 > 0$ sayısı vardır. Dolayısıyla $f(x, y)$ Lipschitz'dır. Bu halde, $y(x)$ çözümü tektir. $x_0 = 0, \quad y_0 = 1$ dır. Şimdi verilen denklem $\int_0^x$ integre edilirse

$$\int_0^x dy = \int_0^x (y(s)+1)ds \Rightarrow y(x) - y(0) = x + \int_0^x y(s)ds \Rightarrow y(x) = 1 + x + \int_0^x y(s)ds$$

olur. Buradan hareketle,

$$y_n(x) = 1 + x + \int_0^x y_{n-1}(s)ds$$

yazılabilir. $n=1$ için

$$y_1(x) = 1 + x + \int_0^x ds = 1 + x + x = 1 + 2x$$

$n=2$ için

$$y_2(x) = 1 + x + \int_0^x (1+2s)ds = 1 + 2x + x^2 = 2(\frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2})$$

$$\vdots$$

$$y_n(x) = 2\left(\frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} y(x) = -1 + 2e^x$$

bulunur.

Örnek 2.5.4: $y' = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 0$

diferansiyel denklemin çözümünün varlığını araştırınız.

Çözüm : $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \Rightarrow \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = 2dx \Rightarrow 2\sqrt{y} = 2x + c$

$$\Rightarrow \sqrt{y} = x + c \quad \Rightarrow y = (x+c)^2 \quad \Rightarrow y(x) = (x+c)^2 \Rightarrow y(0) = c^2 = 0 \Rightarrow c = 0$$
$$\Rightarrow y(x) = x^2$$

bu da istenen çözümdür.

$\left|f_y(x,y)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$, $y \to 0$ yaklaştıkça $f_y \to \infty$ gider.

olacak şekilde $L > 0$ sayısı yoktur. Dolayısıyla $y' = 2\sqrt{y}$ Lipschitz değildir. Bu halde, $y(x)$ çözümü tek değildir. Diğer çözüm $y = 0$ dır.

Varlık ve Teklik Teoremi 2.5.1: f ve f_y bir konveks D cümlesinde sürekli ve sınırlı (yani f Lipschitz'tır) olsun.

$$\phi_{j+1}(x) = \phi_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi_j(s))ds$$

ardışık yaklaşıkları $A : |x - x_0| \leq \alpha$ aralığında $y' = f(x, y)$ ve $y(x_0) = y_0$ diferansiyel denklemini sağlayan bir ϕ çözümüne düzgün olarak yakınsar. Bu teoremi ispatlamak için aşağıdaki lemmayı ifade ve ispat etmeye gereksinim vardır.

Lemma 2.3.2: $y' = f(x, y),\quad y(x_0) = y_0$ diferansiyel denklemi konveks bir D bölgesinde verilsin.

$$(D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b \ \})$$

Diferansiyel denklemine karşılık gelen ardışık yaklaşıklar

$$\phi_{j+1}(x) = \phi_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi_j(s))ds, \quad j = 0,1,2,...$$

ardışık yaklaşıkları, $A : |x - x_0| < \alpha, \quad (\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\})$ aralığında tanımlı olup,

$$|\phi_j(x) - y_0| \leq M|x - x_0| < b, \quad j = 0,1,2,...$$

Burada $M = |f(x, y)|$ dır.

İspat:

$\phi(x_0) = y_0$ olsun. Bu halde $(x_0, \phi_0) \in D$ olduğu açıktır (verilen hipotezden). İspatın kalan kısmı için Tümevarım metodunu kullanalım. $(x, \phi_j) \in D$ olsun. Bu taktirde, $(x, \phi_{j+1}) \in D$ olduğunu kanıtlayalım. Yani, $|\phi_j - \phi_0| < b$ olsun.

$$\phi_{j+1}(x) = \phi_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\phi_j(s))ds$$

$$\left|\phi_{j+1} - \phi_0\right| \le \int_{x_0}^{x} |f| ds \le M|x - x_0| < \alpha M = M\frac{b}{M} = b$$

Bu halde, $(x,\phi_{j+1}) \in D$ dır.Yani, $\forall x \in A$ için, $(x,\phi_{j+1}) \in D$ dır.

2.5.1 Teorem in ispatı: Lemma gereğince, $(x,\phi_{j+1}) \in D$ olduğu bilinmektedir.

$$r_j(x) = \left|\phi_{j+1}(x) - \phi_j(x)\right| \quad j = 0,1,2,...$$

olsun.

$$\phi_{j+1}(x) = \phi_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\phi_j(s))ds,$$

$$\phi_j(x) = \phi_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\phi_{j-1}(s))ds$$

$$r_j(x) = \left|\phi_{j+1}(x) - \phi_j(x)\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(s,\phi_j(s))ds - \int_{x_0}^{x} f(s,\phi_{j-1}(s))ds\right| =$$

$$\left|\int_{x_0}^{x} \left[f(s,\phi_j(s)) - f(s,\phi_{j-1}(s))\right]ds\right| \le \int_{x_0}^{x} \left|\left[f(s,\phi_j(s)) - f(s,\phi_{j-1}(s))\right]ds\right|$$

$$\le \int_{x_0}^{x} M\left|\phi_j - \phi_{j-1}\right| ds$$

$$\Rightarrow r_j(x) \le L\int_{x_0}^{x} r_{j-1} ds \tag{2.25}$$

$$r_0(x) \le \int_{x_0}^{x} M ds = \frac{M}{L}\left(L|x - x_0|\right)$$

$$r_1(x) \le L\int_{x_0}^{x} r_0 ds = L\int_{x_0}^{x} M(s - s_0)ds = \frac{M}{L}\frac{\left(L(s - s_0)\right)^2}{2}\Bigg|_{x_0}^{x} = \frac{M}{L}\frac{\left(L(x - x_0)\right)^2}{2}$$

$$r_2(x) \le L\int_{x_0}^{x} r_1 ds = \frac{M}{L}\int_{x_0}^{x} \frac{\left(L(s - s_0)\right)^2}{2} ds = \frac{M}{L}\frac{\left(L(s - s_0)\right)^3}{3!}\Bigg|_{x_0}^{x} = \frac{M}{L}\frac{\left(L(x - x_0)\right)^3}{3!}$$

$$r_n(x) = \left|\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)\right| \leq \frac{M}{L}\frac{\left(L(x-x_0)\right)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{2.26}$$

(2.26) ile ifade edilen üst sınırın doğruluğu için Tümevarım metodunu kullanalım.

$n=1$ için

$$r_1(x) \leq \frac{M}{L}\frac{\left(L\left|x-x_0\right|\right)^2}{2!}$$

doğrudur.

$k = n-1$ için doğruluğunu kabul edelim. $k = n$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$r_n(x) \leq L\int_{x_0}^{x} r_{n-1}\,ds$$

$$r_n(x) \leq \frac{ML^n}{n!}\int_{x_0}^{x}(s-s_0)^n\,ds = \frac{ML^n}{n!}\frac{(s-s_0)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_{x_0}^{x} = \frac{ML^{n+1}}{n!}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}$$

bu şekilde teşkil edilen üst sınır doğrudur.

Şimdiye kadar yapılanlar $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$ için geçerlidir. Şimdi de aynı şeyler x_0 ın solunda, yani $x_0 - \alpha < x \leq x_0$ aralığı boyunca yapılırsa

$$r_j(x) \leq \frac{M\left(L\left|x-x_0\right|\right)^{j+1}}{L(j+1)!} < \frac{M\left(L\alpha\right)^{j+1}}{L(j+1)!} \qquad j = 0,1,2,..., \quad \left|x-x_0\right| < \alpha$$

olur.

$$\sum_{j=0}^{\infty} r_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\left|\phi_{j+1}(x) - \phi_j(x)\right|$$

bu seri pozitif terimli bir seridir.

$$\sum_{j=0}^{\infty} r_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\left|\phi_{j+1}(x) - \phi_j(x)\right| \leq \frac{M}{L}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(L\alpha)^{j+1}}{(j+1)!} = \frac{M}{L}\left(L\alpha + \frac{(L\alpha)^2}{2!} + \frac{(L\alpha)^3}{3!} + ...\right)$$

$$\frac{M}{L}\left(-1 + 1 + L\alpha + \frac{(L\alpha)^2}{2!} + \frac{(L\alpha)^3}{3!} + ...\right) = \frac{M}{L}\left(-1 + e^{L\alpha}\right)$$

Weierstrass-M kriteri gereğince $\sum_{j=0}^{\infty} r_j(x)$ serisi $\frac{M}{L}\left(-1+e^{L\alpha}\right)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. Bu halde, $r_j(x)=\left|\phi_{j+1}-\phi_j\right|$ ile ifade edilen $\sum_{j=0}^{\infty} r_j(x)$, $\left|x-x_0\right|<\alpha$ aralığında mutlak değerce düzgün yakınsaktır.

$$\phi_j(x)=\phi_0(x)+\sum_{n=0}^{j-1}\left|\phi_{n+1}-\phi_n\right| \tag{2.27}$$

$\sum_{j=0}^{\infty} r_j(x)$ düzgün yakınsak olduğundan (2.27) ifadesi düzgün yakınsaktır. Bu da bize (2.27) ile ifade edilen $\{\phi_j(x)\}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösterir. Son olarak, $\phi(x)$ in A aralığında sürekli ve ardışık yaklaşıklar yöntemiyle teşkil edilen integral denklemini sağladığını göstermeye çalışalım. (2.27) ifadesinin her iki tarafın $j\to\infty$ için limiti alınırsa;

$$\phi(x)=\lim_{j\to\infty}\ \phi_j(x)=\phi_0+\sum_{n=0}^{\infty}\left|\phi_{n+1}-\phi_n\right|$$

olur. Şimdi (2.27) ile son ifade birbirinden çıkarılırsa

$$\phi(x)-\phi_j(x)=\sum_{n=j}^{\infty}\left|\phi_{n+1}-\phi_n\right|$$

elde edilir. Şimdi son ifadenin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa ve $r_n(x)$ için teşkil edilen üst sınır kullanılırsa

$$\left|\phi(x)-\phi_j(x)\right|<\frac{M}{L}\sum_{n=j}^{\infty}\frac{(L\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}\le\frac{M}{L}\frac{(L\alpha)^{j+1}}{(j+1)!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(L\alpha)^n}{n!}=\frac{M}{L}\frac{(L\alpha)^{j+1}}{(j+1)!}e^{L\alpha}$$

bulunur. $j\to\infty$ için $\varepsilon(j)=\dfrac{(L\alpha)^{j+1}}{(j+1)!}\to 0.$ Yani, $\phi_j(x)\to\phi(x).$

Amaç $\phi(x)$ in sürekli olduğunu göstermektir.

$$\left|\phi(x+h)-\phi(x)\right|=\left|\phi(x+h)-\phi_j(x+h)+\phi_j(x+h)-\phi_j(x)+\phi_j(x)-\phi(x)\right|$$
$$\le\left|\phi(x+h)-\phi_j(x+h)\right|+\left|\phi_j(x+h)-\phi_j(x)\right|+\left|\phi_j(x)-\phi(x)\right|\xrightarrow{\varepsilon_j\to 0}0$$

j yeterince büyük $|h|$ yeteri kadar küçük seçilirse ve $j\to\infty,\quad \varepsilon_j\to 0$ olur. $\phi_j(x)$ in sürekliliğinden

$$\left|\phi_j(x) - \phi_0(x)\right| < \varepsilon$$

olur. Bu halde,

$$\left|\phi(x+h) - \phi(x)\right| < \varepsilon$$

olur. Bu da istenen sonuçtur. $\phi(x)$ limit fonksiyonunun

$$\phi_n(x) = \phi_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \phi_{n-1}(s)\big)ds \tag{2.28}$$

integral denklemini sağladığını gösterelim.

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \phi_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f\big(s, \phi_{n-1}(s)\big)ds$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{x_0}^{x} \big(f(s,\phi_{n-1}(s) - f(s,\phi(s)\big)ds\right| \le \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} \left|f((s,\phi_{n-1}(s)) - f(s,\phi(s))ds\right|$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} L\left|\phi_{n-1}(s) - \phi(s)\right|ds \le \frac{M}{L}\frac{(L\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}e^{L\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\phi(x) = \phi_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(s,\phi_{n-1}(s))ds = \int_{x_0}^{x} f(s,\phi(s))ds$$

olur.

Teorem 2.5.2: Teorem (2.5.1) in koşullarını sağlayan ϕ çözümü tektir.

İspatı yapmadan önce aşağıdaki lemmayı ifade ve ispat edelim.

Lemma 2.3.3 (Gronwall Eşitsizliği): $k > 0$ olsun. f ve g fonksiyonları sürekli olmakla beraber, $a \le x \le b$ aralığında $f(x)$, $g(x) > 0$ ve

$$f \le k + \int_{a}^{x} f(s)g(s)ds$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu taktirde,

$$f \le k e^{\int_a^x g(s)ds}$$

olur.

İspat : $u(x) = k + \int_{a}^{x} f(s)g(s)ds$

olsun. Bu halde,

$$f(x) \le u(x)$$

olur. Bu durumda,

$$u'(x) = f(x)g(x)$$

olur. Buradan,

$$u'(x) - u(x)g(s) \leq 0$$

denkleminin her iki tarafını $e^{-\int_a^x g(s)ds}$ ile çarpalım. Bu halde,

$$(u(x)e^{-\int_a^x g(s)ds})' \leq 0$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade, $\int_a^x$ integre edilirse

$$u(x)e^{-\int_a^x g(s)ds} - u(a) \leq 0, \quad \Rightarrow u(x) \leq ke^{\int_a^x g(s)ds} \qquad (u(a) = k)$$

$$u(x) \geq f(x)$$

olduğundan

$$f(x) \leq ke^{\int_a^x g(s)ds}$$

olur. Bu da lemmanın ispatır.

Teorem 2.5.2 nın İspatı: $y' = f(x,y)$ denklemini sağlayan çözüm iki tane ve bunlar, ϕ_1 ve ϕ_2 olsun. Bu halde,

$$\phi_1(x) = \phi_0 + \int_a^x f(s,\phi_1(s))ds$$

$$\phi_2(x) = \phi_0 + \int_a^x f(s,\phi_2(s))ds \Rightarrow \left|\phi_1(x) - \phi_2(x)\right| \leq \int_a^x \left|f(s,\phi_1(s)) - f(s,\phi_2(s))\right| ds$$

f Lipschitz olduğundan

$$\left|\phi_1 - \phi_2\right| \leq L\int_a^x \left|\phi_1(s) - \phi_2(s)\right| ds \leq \int_a^x L\left|\phi_1 - \phi_2\right| ds$$

olur. Bu son denkleme Gronwall Eşitsizliği uygulanırsa;

$$(f = \left|\phi_1 - \phi_2\right|, \quad g = L)$$

$$\left|\phi_1 - \phi_2\right| \leq 0e^{L\int_a^x ds} \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$$

olur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Varlığı İçin Shooting Metodu

Şimdiye kadar bazı diferansiyel denklemlerin çözümlerinin var olup olmadıklarını ardışık yaklaşıklar metoduyla gösterdik. Öyle diferansiyel denklemler vardır ki onların analitik olarak çözümlerinin olup olmadıklarını kestirmek imkansızdır. Biz analitik olarak çözülemeyen bu denklemleri en azından shooting (Atış) metoduyla çözüme sahip olduğunu gösterelim.

Bu problemde atışı orijin (yani sıfır) noktasına göre yapacağız. Shooting metodu; bir diferansiyel denklemin sınır değer koşullarına bağlı olarak atadığımız değer (yani atışın yapıldığı nokta) verilen koşullara aykırılık teşkil etmeyecek şekilde problemin çözümünün varlığını tespit etmektir.

3.1.1. İkinci mertebeden lineer olmayan denklem

- Tüm x ve v değerleri için $f(x,v) \in C^1$, $\phi(v) \in C^1$,
- $|f|$ sınırlı,
- $v = 0$ ise $\phi(0) = 0$ ve $v > 0$ ise $\phi(v) > 0$.

Bu halde,

$$v'' - f(x,v)v' - \phi(v) = 0$$

$$v(0) = 1, \quad v(\infty) = 0, \quad v' \le 0, \tag{3.1}$$

denkleminin çözüme sahip olduğunu gösteriniz. (Mcleod., ve Tanrıverdi., 2000).

İspat:

Eğer $v'(0)$ tanımlanırsa çözüm belirlenir. $v'(0) = k \le 0$ olsun. Bu halde, k sayısını $v_k(\infty) = 0$ olacak şekilde seçersek ispat tamamlanmış olur. Dikkat edilirse

$$\left(v' e^{-\int_0^x f(t,v(t))dt}\right)' = \phi(v) e^{-\int_0^x f(t,v(t))dt} \tag{3.2}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $v=0$ ise $\phi(v)=0$ olduğundan $v'(0)=0$ dır. Ayrıca v pozitif ise $v'>0$ dır.Yani, $v'e^{-\int_0^x f(t,v(t))dt}$ artan bir fonksiyondur.

Eğer k mutlak değerce küçük ve $k=0$ ise çözüm nasıl belirlenir? Sorusuna yanıt arayalım. $k=0$ ise $v'(0)=0$ dır. Böylece (3.2) denkleminde v' başlangıçta pozitif ve $v>1$ olur. Bundan sonra (3.2) denkleminden $v'>0$, $v>1$ yazılabilir.

k küçük ve negatif ise k ya bağlı çözümün sürekliliğinden dolayı, $\varepsilon>0$ verilsin. Herhangi bir $A>0$ sayısı için $[0,A]$ aralığı boyunca

$$|v_k - v_0| < \varepsilon$$

olacak şekilde k yeterince küçük seçilerek yazılabilir. Böylece $v_k=0$ olmadan önce $v_k=1$ dır. $v_k=0$ olmadan önce v_k' kesin olarak pozitif olur. Şimdi de k yeterince büyük ve negatif ise $v_k'=0$ olmadan önce v_k negatif olur. Bu halde,

$$x=\frac{X}{|k|}, \quad V_k(X)=v_k(x)$$

dönüşümleri yapılırsa (3.1) denklemi

$$V_k'' - \frac{V_k'}{|k|} f\big(X, v_k(X)\big) - \frac{\phi(V_k)}{|k|^2} = 0$$

şeklinde olur. Burada k yeterince büyük olduğundan $\frac{V_k'}{|k|}\to 0$, $\frac{\phi(V_k)}{|k|^2}\to 0$ olur. Dolayısıyla $V_k''=0$ bulunur. Buradan $V_k'=a$ elde edilir. Bu halde,

$$V_k(X)=aX+b$$

ve şartlar kullanılırsa $a=-1$, $b=1$ bulunur. Bu değerler yerine yazılırsa

$$V_k(X)=-X+1$$

olur. $V(X)=1-X$ olmadan önce $V(X)$, $X=1$ de negatif olur. Böylece, $v'=0$ olmadan önce $x=1$ de v negatif olur. $\frac{1}{k}$ daki süreklilikten dolayı $V_k'=0$ olmadan önce V_k negatif olur.

- S_1={$k<0$ ve yeterince küçük ise :V_k =0 olmadan önce $V_k'>0$ olur }
- S_2={ $k<0$ ve yeterince büyük ise: $V_k'=0$ olmadan önce $V_k<0$ olur}

Aşikar olarak S_1 ve S_2 kümeleri ayrıktır. Eğer S_1 ve S_2 açık iseler bu halde bağlantılı küme $k<0$ için, boştan farklı ayrık ve açık iki kümeyi içermeyeceğinden hem S_1 ve hem de S_2 de olmayan bir k^* sayısı vardır.

S_1 açıktır. $k_0\in S_1$ olsun. k_0 a yeterince yakın olan k ların S_1 e ait olduğunu göstermek istiyoruz. k_0 için x_1 vardır öyle ki $V_{k_0}'(x_1)>0$ ve $[0,x_1]$ için V_{k_0}>0 dır. $[0,x_1]$ için $V_{k_0}\geq\delta$ olsun. Başlangıç koşullarındaki süreklilikten dolayı k, k_0 a yeterince yakın $V_k'(x_1)>0$ ve $[0,x_1]$ için $V_k\geq\frac{\delta}{2}$ dır. Böylece $k\in S_1$ dır. Benzer olarak, S_2 nin de açık olduğu gösterilebilir.

Şimdiye kadar S_1, S_2 nin boştan farklı ve açık olduğunu gösterdik. Bu halde bir k^* ne S_1 ne de S_2 dedir. $k=k^*$ için v_k', v_k dan önce sıfır olmaz. V_k, V_k' dan önce sıfır olmaz. Ya $V_k'\leq 0$, $V_k\geq 0$ olamaz, ya da her ikisi birden sıfırdır. Her ikisinin birden sıfır olması $v\equiv 0$ olduğunu önerir. Bu ise $v(0)=1$ olmasıyla çelişir. Böylece $k=k^*$ için V_{k^*} azalan ve alttan sınırlıdır. $V_{k^*}(\infty)$ mevcut ve eğer $V_{k^*}(\infty)=0$ olduğunu gösterirsek ispat biter. Eğer böyle bir durum söz konusu değilse $V_{k^*}\to L>0$ dır. Bu halde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır öyle ki $V_{k^*}'(x_n)\to 0$. (Aksi halde $V_{k^*}'(x)\leq-\delta$, $x\to\infty$, $\delta>0$ bu durum $V_{k^*}'<0$ olmasını zorlar bu ise çelişkidir)

$$V''-f(x,v)V'-\phi(V)=0$$

$$V''(x_n)\to L>0$$

Bu halde, V' küçük ve negatif ise $V'' > 0$ ve V daha da küçük olur. Böylece $x \to \infty$, $V'(x) \to 0$, $V' \to \phi(L) > 0$. Bu mümkün değildir. Yani $L = 0$ olmak zorundadır.

3.1.2. Falkner Skan tipi denklemler

$$f''' - ff'' + \lambda(1 + f'^2) = 0, \left(0 < \lambda < \frac{1}{2}\right) \qquad (3.3)$$

$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ ve $x \to \infty$ için $f(x)$ cebirsel olarak yeterince büyük koşullarını sağlayan (3.3) diferansiyel denkleminin

$$f(x) \geq 0, \quad f'(x) \geq 0, \quad f''(x) \geq 0, \text{ ve } f'''(x) < 0$$

şeklinde bir çözüme sahip olduğunu gösteriniz. (Hastings., 1972).

İspat:

Böyle bir çözümün varlığı için Shooting Methood (Atış metodu) kullanılacaktır. İddia edilen çözümün belirlenebilmesi için $f''(0) = \alpha$ $(\alpha > 0)$ şartının önceden verilmesi gerekir. Bu koşullar altında (3.3) diferansiyel denklemi yardımıyla

$$f'''(0) = f(0)f''(0) - \lambda(1 + f'^2(0)) = -\lambda < 0$$

olduğu görülür.

Lemma 3.2.1: Eğer $\alpha > 0$ yeterince küçük ise tekabül eden f çözümü sonlu bazı x değerleri için (bu değer x_0 olsun) $f''(x_0) < 0$ ve $x \leq x_0$ iken $f'''(x) < 0$ dır.

Lemma 3.2.2: Eğer $\alpha > 0$ yeterince büyük ise tekabül eden f çözümü sonlu bazı x değerleri için (bu değer x_1 olsun) $f'''(x_1) > 0$ ve $x \leq x_1$ iken $f''(x)$>0 dır.

- S^-={ $\alpha > 0 : f_\alpha$ nın sahip olduğu çözüm 3.2.1. lemmasındaki gibidir.}
- S^+={ $\alpha > 0 : f_\alpha$ nın sahip olduğu çözüm 3.2.2. lemmasındaki gibidir.}

kümeleri tanımlansın. S^- ve S^+ kümeleri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- **i)** S^- ve S^+ kümeleri boştan farklıdır.
- **ii)** S^- ve S^+ kümeleri ayrıktır.
- **iii)** S^- ve S^+ kümeleri açıktır.

• **iv)** $\alpha = \alpha_0$ iken bazı x değerleri için ya $f''(x)$, $f'''(x)$ hiçbir zaman sıfır değildir. Ya da $f'' = f''' = 0$ dır. Fakat bu son durum (3.3) diferansiyel denklemine aykırılık teşkil etmektedir. Yani, $\alpha = \alpha_0$ için

$$f''(x) > 0,\ \ f'''(x) < 0.$$

Buradan hareketle,

$$f'(0) = 0,\ f' > 0,\ f(0) = 0,\ \ f > 0$$

olur. f'' azalandır. Çünkü $f''' < 0$ dır. Buradan

$$f''(x) \le \alpha_0,\ f'(x) \le \alpha_0 x,\ \ f(x) \le \frac{\alpha_0 x^2}{2}$$

olur.

Lemma 3.2.1. nın ispatı : eğer $\alpha = 0$ ise,

$$f'''(0) - f(0)f''(0) + \lambda(1 + f'^2(0)) = 0$$

$$\Rightarrow f'''(0) = -\lambda < 0.$$

Böylece $f''(x)$ başlangıçta negatiftir. x civarında $f''(x) < 0$ dır. Bunun sonucu olarak $f''(x) < 0$ ve $f'''(x) < 0$ dır. Yani $\alpha = 0 \in S^-$ dır. S^- açık küme olduğundan dolayı $\alpha > 0$ yeterince küçük iken yine $\alpha \in S^-$ dır.

Lemma 3.2.2. nın ispatı : α yeterince büyük ise

$$f = \alpha^{\frac{1}{3}} F(X),\ \ x = \alpha^{-\frac{1}{3}} X$$

dönüşümleri altında

$$f' = \alpha^{\frac{2}{3}} F',\quad f'' = \alpha F'',\ f''' = \alpha^{\frac{4}{3}} F'''$$

olur. Bu değerler

$$f''' - ff'' + \lambda(1 + f'^2) = 0$$

denkleminde başlangıç koşulları ile birlikte yazılırsa

$$F''' - FF'' + \lambda(F'^2 + \alpha^{-\frac{4}{3}}) = 0$$

elde edilir. α çok büyük olduğundan $\alpha^{-\frac{4}{3}}$ ihmal edilirse

$$F''' - FF'' + \lambda F'^2 = 0,$$

$$F(0) = 0\,,\ F'(0) = 0\,,\ F''(0) = 1$$

şeklinde olur. Bu denklemi sağlayan çözümün kuvvet serisi olduğu düşünülüp gerekli cebirsel işlemler yapılırsa,

$$F \sim \frac{x^2}{2}\,,\quad F' \sim x$$

olur. Bu yüzden,

$$F''' \sim FF'' - \lambda F'^2 = (\frac{1}{2} - \lambda)x^2$$

olur. Eğer $\lambda < \frac{1}{2}$ ise F''' başlangıçta pozitiftir. Bu halde, $\frac{1}{\alpha}$ nın sürekliliğinden dolayı büyük α lar için S^+ nın içindeyiz. S^+ kümesi gerçeği kullanılırsa S^+ nın açık olduğunu önerir.

3.1.3. Falkner Skan denklemi & Blasius denklemi

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0 \quad (\beta > 0) \tag{3.4}$$

$$f(0) = a,\ f'(0) = 0,\ f'(\infty) = 1$$

şartlarını sağlayan (3.4) denklemi

$$f > 0,\ f' > 0,\ f'' > 0$$

olacak şekilde bir çözüme sahip olduğunu gösteriniz. (Mcleod., ve Serin., 1968)

İspat:

$$f_k,\ f(0) = a,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = k \quad (k > 0)$$

şartlarını sağlayacak şekilde bir çözüme sahip olsun. Eğer $k = 0$ ise,

$$f'''(0) = -\beta - ak$$

olur. Yani, f'' başlangıçta negatiftir. k nın sürekliliğinden dolayı eğer $k > 0$ ve küçük ise $f' = 1$ olmadan önce küçük x değerleri için f'' negatif olacaktır. Şimdi f' ve f'' nın uygun değerleri için S_- ve S_+ kümeleri tanımlanırsa

- $S_- = \{k > 0$ ve küçük ise, $f' = 1$ olmadan önce f'' negatif olur.$\}$
- $S_+ = \{k > 0$ ve büyük ise, $f'' = 0$ olmadan önce $f' > 1$ dır.$\}$

S_- ve S_+ kümelerinin ayrık oldukları aşikardır. Küçük k lar için yani, S_- nın açık ve boştan farklı olduğu açıktır. Büyük k ların S_+ da olduğunu tartışalım.

$$f = k^{\frac{1}{3}} F,\ x = k^{-\frac{1}{3}} X$$

Şimdi de bu seçimin niçin böyle olduğuna yanıt arayalım.

$$f = \alpha F,\ x = \gamma X$$

olsun. Bu taktirde,

$$\frac{df}{dx} = \frac{\alpha}{\gamma}\frac{dF}{dX},$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\alpha}{\gamma^2}\frac{d^2 F}{dX^2}$$

$$\frac{d^3 f}{dx^3} = \frac{\alpha}{\gamma^3}\frac{d^3 F}{dX^3}$$

olur. Bu değerler (3.4) denkleminde yazılırsa

$$\frac{\alpha}{\gamma^3}F''' + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}FF'' + \beta(1 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2}) = 0$$

bu denklemin her tarafını $\frac{\alpha}{\gamma^3}$ e bölelim. Bu durumda denklem,

$$F''' + \alpha\,\gamma\,FF'' + \beta(\frac{\gamma^3}{\alpha} - \alpha\,\gamma\,F'^2) = 0$$

olur. $\alpha\gamma = 1$ olsun. Fakat aynı zamanda $\frac{d^2F}{dX^2}\Big|_{X=0} = 1$ olmasını istiyoruz. Böyle bir seçim yapmamızı zorlayan sebep k yı yok etmemiz içindir.

$$\frac{d^2F}{dX^2}\Big|_{x=0} = k = 1 \qquad (\gamma = \frac{1}{\alpha})$$

buradan $\alpha = k^{\frac{1}{3}}$ dır. Yani $\gamma = k^{-\frac{1}{3}}$. Bu taktirde denklem;

$$F''' + FF'' + \beta(k^{-\frac{4}{3}} - F'^2) = 0$$

olur. Eğer $k = \infty$ ise,

$$F''' + FF'' - \beta F'^2 = 0$$

buradan

$$F(0) = 0,\ \ F'(0) = 0,\ \ F''(0) = 1$$

dır. Bu taktirde,

$$F(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \ldots$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$F'(X) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \ldots$$

$$F'(0) = 1 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$F''(X) = 2a_2 + 6a_3X + 12a_4X^2 + 20a_5X^3 + \ldots$$

$$F''(0) = 1 \Rightarrow 2a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$$

$$FF'' = \frac{1}{2}X^2 + 4a_3X^3 + (7a_4 + 6a_3{}^2)X^4 + \ldots$$

$$F'^2 = X^2 + 3a_3X^3 + (9a_3{}^2 4a_4)X^4 + \ldots$$

$$F''' = 6a_3 + 24a_4 X + 60a_5 X^2 + ...$$

değerleri

$$F''' + FF'' - \beta F'^2 = 0 \tag{3.5}$$

denkleminde yazılırsa

$$F(X) \sim \frac{1}{2} X^2, \;\; F'(X) \sim X$$

bu halde (3.5) denkleminde bu asimptotik değerler yerine yazılırsa

$$F''' = (\beta - \frac{1}{2}) X^2$$

olur. Bu asimptotik halde eğer,

$$\beta > \frac{1}{2} \text{ ise } F''' > 0 \text{ ve } \beta < \frac{1}{2} \text{ ise } F''' < 0$$

olur. Bu taktirde,

$$\frac{d}{dx}(F'' e^{\int_0^X F dt}) = \beta F'^2 e^{\int_0^X F dt}$$

Böylece $F'' e^{\int_0^X F dt}$ sıfırdan itibaren artandır. Yani $F'' > 0$ dır. Bu ise F' nın artan olduğunu gösterir. $\frac{1}{k}$ nın sürekliliğinden dolayı $F'' = 0$ olmadan önce F', $k^{-\frac{2}{3}}$ ($f' = 1$) keser. Böylece S_+ kümesinin içindeyiz. S_- ve S_+ kümeleri açık, ayrık ve boştan farklı olduklarından öyle bir k^* değeri vardır ki ne S_- ne de S_+ dedir. Ya ne $f' = 1$ ne de $f'' = 0$ dır. Yani $f'' > 0$ ve $0 \le f' < 1$. Ya da $f' = 1$, $f'' = 0$ dır. Bu durum mümkün değildir. Bu durumda

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0$$

denkleminin çözümünün tekliğinden $f' = 1$ olmasını gerektirir. Bundan dolayı $f'' \ge 0$, $0 \le f' < 1$ olduğunu biliyoruz. Yani, f' artan ve sınırlıdır. Böylece $f'(\infty)$ mevcut bu değer $f'(\infty) \le 1$ dır. Aynı zamanda, $f''' = -ff'' - \beta(1 - f'^2) \le 0$. Böylece f'' pozitif ve azalandır. Bundan dolayı $f''(\infty)$ mevcut $f''(\infty) = 0$ olmasını gerektirir. Eğer $f'(\infty) = m < 1$ ise,

$$f''' < -\beta(1 - m^2)$$

olur. $f''(\infty)$ nın mevcudiyetinden $f'(\infty)=1$ dır.

Blasius denklemi $(\beta=0)$

$$f'''+ff''=0$$

$$f(0)=0,\quad f'(0)=0,\quad f'(\infty)=1$$

şartlarını sağlayan denklemin

$$f>0,\quad f'>0,\quad f''>0,\quad f'''<0$$

olacak şekilde bir çözüme sahiptir.

Çözümün varlığı için aşağıdaki organizasyon takip edilir.

• **i)** $f''(x)$ işaret değiştirmez.

$$\frac{d}{dx}\left(f''e^{\int_0^x fdt}\right)=0 \Rightarrow f''e^{\int_0^x fdt}-f''(0)=0$$

$$\Rightarrow f''e^{\int_0^x fdt}=f''(0)>0,\ \{f''=e^{-\int_0^x fdt}f''(0)\}$$

Yani, $f''>0$ dır. Dolayısıyla f' artan ve $f'>0$ dır. $f>0$ ve $f'''<0$ olduğunu önerir.

• **ii)** Eğer $f''>0$ ve azalan $f''(\infty)$ mevcut ve $f''\geq 0$ dır. Eğer, $f'(1)=k,\ k>0$ ise $x>1$ için $f'(x)>k$ dır. Çünkü f' artandır. Böylece $x>1$ için Taylor kullanılırsa $f(x)>k(x-1)+f(1)$, (i) nin sonucundan $f''(x)$ in eksponansiyel (üstel) olarak küçük ve $f''(\infty)=0$ dır.

• **iii)** (i) den f'' eksponansiyel (üstel) olarak küçük olduğundan $f'(x)$ mevcuttur. Hatta $f'(\infty)$ mevcut ve bu değer l olsun.

• **iv)** $l=1$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için,

$$f=\alpha F,\ x=\beta X$$

dönüşümleri yapılırsa

$$f'=\frac{df}{dx}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{dF}{dX},\quad f''=\frac{\alpha}{\beta^2}\frac{d^2F}{dX^2},\quad f'''=\frac{\alpha}{\beta^3}\frac{d^3F}{dX^3}$$

$$0=f'''+ff'''=\frac{\alpha}{\beta^3}F'''+\frac{\alpha^2}{\beta^2}FF''.$$

$\alpha\beta=1$ alınırsa,

$F''' + FF'' = 0$

olur. Böylece $f'(x) = \alpha^2 F'(x)$ ve $f'(\infty) = l$ olduğundan $l = \alpha^2 F'(x)$

$\alpha = \sqrt{l}$ alınırsa $F'(\infty) = 1$ dır.

- **v)** Böyle bir çözüm tektir. Eğer f, $f''' + ff'' = 0$ denkleminin bir çözümü

ise, $\left(f''(0) = k\right)$ buradan $\alpha^3 = k$ yani $F''(0) = 1$. Bu halde, f_k çözümü

$\left(f''(0) = k\right)$ $f_k(x) = k^{\frac{1}{3}} F(k^{\frac{1}{3}} X)$ olup bu eşitliği sağlayan yalnız ve yalnız tek k değeri vardır. Bu değer $f'(\infty) = 1$ dır.

3.1.4. Landesman –Lazer tipi denklemler

• **i)** $x' = g(x) - f(t), \;\; x = x(t)$ (3.6)

denklemini ele alalım. Tüm $x \in IR$ için $g(x)$ in sürekli ve

$$g(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} g(x), \;\; g(\infty) = \lim_{x\to\infty} g(x)$$

mevcut (Bu limitler sonlu veya sonsuz olabilir). Burada,

$$g(-\infty) < g(x) < g(\infty), \quad x \in (-\infty,+\infty). \tag{3.7}$$

Bununla beraber $f(t)$ fonksiyonu p periyotlu sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde, (3.6) denklemi periyodu p olan bir çözüme sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$g(-\infty) < \frac{1}{p}\int_0^p f(t)dt < g(\infty). \tag{3.8}$$

• **ii)** $x'(t) + a(t)x = g(x) - f(t)$ (3.9)

Burada, $a(t)$ periyodu p olan sürekli bir fonksiyon ve

$$\int_0^p a(t)dt = 0. \tag{3.10}$$

Bu şık (i) şıkkının bir genelleştirmesidir. Bu denklem aynı zamanda matematik literatüründe Landesman-Lazer sonucu olarak bilinir (Ai., 2003).

İspat:

İlk olarak (3.6) denkleminin periyodu p olan bir $x(t)$ çözümüne sahip olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, (3.8) denklemi doğrudur. Şimdi de (3.6) denklemi $[0, p]$ kapalı aralığında integre edilirse

$$\int_0^p x'(t)dt = \int_0^p [g(x) - f(t)]dt$$

$$0 = x(p) - x(0) = \int_0^p g(x)dt - \int_0^p f(t)dt \;\; \Rightarrow \int_0^p g(x)dt = \int_0^p f(t)dt,$$

Aynı zamanda bu denklem (3.7) v e (3.8) ile beraber

$$\frac{1}{p}\int_0^p g(x)dt = \frac{1}{p}\int_0^p f(t)dt$$

şeklinde yazılır. (3.7) denklemi $[0, p]$ kapalı aralığında integre edilirse

$$p.g(-\infty) < \int_0^p g(x)dt < p.g(\infty)$$

$$g(-\infty) < \frac{1}{p}\int_0^p g(x)dt < g(\infty)$$

olur. Bu durum (3.8) ile karşılaştırılsa

$$g(x) = \frac{1}{p}\int_0^p f(t)dt$$

bulunur. Eğer (3.9) denklemi periyodu p olan bir çözüme sahipse

$$g(-\infty) < \frac{1}{\int_0^p e^{\int_0^t a(s)ds} dt}\int_0^p f(t)e^{\int_0^t a(s)ds} dt < g(\infty) \tag{3.11}$$

olur. Gerçekten (3.9) ve (3.10) denklemlerinden

$$0 = x(p) - x(0) = \int_0^p [g(x) - f(t)]e^{\int_0^t a(s)ds} dt$$

olur. Bu halde, (3.11) denklemi (3.7) koşulundan kolayca elde edilir. (3.8) ve (3.11) şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu taktirde, (3.6) ve (3.9) denklemlerinin sırasıyla periyodu p olan bir $x(t)$ çözümüne sahip olduğunu gösterelim. Bu amaca varabilmemiz için aşağıdaki lemmayı kullanmamıza gereksinim vardır.

Lemma 3.4.1:

$$y' = G(t, y) - F(t) \tag{3.12}$$

denklemini ele alalım. Burada, $G(t, y)$ ve $F(t)$ fonksiyonları birinci bileşenlerine göre p periyotludur. Yani, $G(t + p, y) = G(t, y), F(t + p) = F(t)$ dır.

Bir $C > 0$ sayısının mevcut olduğunu kabul edelim, öyle ki tüm $(t, y) \in [0, p] \times [C \times \infty)$ için

$$G(t, -y) = \frac{1}{p}\int_0^p F(t)dt < G(t, y) \tag{3.13}$$

oluyorsa (3.12) p periyotlu bir çözüme sahiptir.

İspat:

$$\overline{F} = \frac{1}{p}\int_0^p F(t)dt \quad ve \quad F_0(t) = F(t) - \overline{F}(t) \text{ olsun.}$$

Üstelik;

$$u(t) = y(t) + \int_0^p F_0(s)ds, \tag{3.14}$$

$$G_1(t,u) = G(t,u) - \int_0^t F_0(s)ds$$

Bu taktirde (3.13) denkleminden

$$u'(t) = y'(t) + F_0(t) = G_1(t,u) - \overline{F}$$

olur. $\int_0^t F_0(s)ds$ p periyotlu olduğundan (3.13) çözümü altında (3.14) denkleminin p periyotlu bir çözüme olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu yapabilmek için aşağıdaki iki kümeyi tanımlayalım.

- $A = \{k \in (-\infty,\infty): \ u(t,k) > C$ bazı $t > 0$ için$\}$
- $B = \{k \in (-\infty,\infty): \ u(t,k) < -C$ bazı $t > 0$ için$\}$

Burada $u(t,k)$, $u(0,k) = k$ şartını sağlayacak şekilde (3.14) denkleminin bir çözümüdür.

$$u'(0,C) > 0 \ \ ve \ \ u'(0,-C) < 0$$

olduğundan $C \in A$ ve $-C \in B$ dır. Böylece A ve B kümeleri boştan farklıdır. Başlangıç koşuluna bağlı çözümlerin sürekliliğinden dolayı A ve B kümeleri açıktır. (3.14) denklemi dikkatli incelenirse, bazı $t_0 > 0$ için eğer $u = C$ ($u = -C$) ise $t > t_0$ için böyle bir u nın varlığı ile $u' > 0$ ($u' < 0$) dır. Dolayısıyla A ve B kümeleri ayrıktır. Bu halde, $(-\infty,\infty)$ aralığının bağlantılılığı en az bir $\hat{k} \in (-\infty,\infty) \setminus (A \cup B)$ olmasını gerektirir. Böylece tüm $t \in [0,\infty)$ için $|u(t,k)| < C$ dir. (3.14) denklemi skaler bir denklem olduğundan $[0,\infty)$ aralığı üzerinde $u(t,k)$ sınırlı çözümünün varlığı p periyodik bir çözümü gerektirir. Bu da lemmanın ispatıdır. Şimdi de yukarıdaki lemmayı kullanarak (i), (ii) kısımlarının varlığını gösterelim.

• **i)** için $G(t,x)=g(x),\quad F(t)=f(t)$ olsun.

Bu halde, (3.7) ve (3.8) şartları (3.13) i gerektirir. Dolayısıyla (3.6) denklemi p periyotlu bir çözüme sahiptir.

• **ii)** varlığı için yukarıdaki lemma (3.11) denklemiyle birlikte aşağıdaki dönüşümleri yapalım.

$$z=\int_0^t e^{\int_0^s a(w)dw}ds,\quad y=x(t)e^{\int_0^t a(s)ds}$$

$$G(z,y)=g(x)=g\left(ye^{-\int_0^t a(s)ds}\right)$$

ve

$$F(z)=f(t)$$

bu dönüşümler altında (3.10) denklemi

$$\begin{aligned}&\frac{dy}{dz}=G(z,y)-F(z)\\&G(z+Z,y)=G(z,y)\quad ve\quad F(z+Z)=F(z)\end{aligned}\tag{3.15}$$

burada

$$z=\int_0^p e^{\int_0^t a(s)ds}dt.$$

$\int_0^p a(t)dt=0$ olduğundan (3.15) denklemi için z periyodik çözümünün varlığını göstermek yeterlidir. Yukarıdaki lemmadan (3.13) denkleminin (3.15) denklemi için geçerli olduğunu göstermek gerekir. (3.11) denkleminden

$$\overline{F}=\frac{1}{Z}\int_0^Z F(z)dz=\frac{1}{Z}\int_0^p f(t)e^{\int_0^t a(s)ds}dt<g(\infty),\tag{3.16}$$

$G(z,y)$ nin tanımından $z\in[0,Z]$ için düzgün olarak $\lim_{y\to\infty}G(z,y)=g(\infty)$. Bu halde, (3.20) denkleminden bir C sabit sayısı vardır. Öyle ki tüm $(z,y)\in[0,Z]\times[C\times\infty)$ için $G(z,y)>\overline{F}$ dir. Benzer olarak, eğer C yeterince büyük seçilirse tüm $(z,y)\in[0,Z]\times[C\times\infty)$ için $G(z,-y)<\overline{F}$ olduğu gösterilir.

Bu taktirde lemmadan dolayı (3.15) denklemi Z periyotlu $y(z)$ çözümüne sahiptir. Bu sebeple;

$$x(t) = y(z)e^{-\int_0^t a(s)ds}$$

denklemi (3.9) denkleminin p periyodik çözümünü verir.

Bunu yapmakla Landesman-Lazer sonucu olarak bilinen aşağıdaki sonucu ispat ettik. Bu sonuç: (3.7) ve (3.10) denklemleri geçerli olsun. Bu halde, (3.9) denkleminin p periyodik çözüme sahip olabilmesi için gerek ve şart (3.11) denkleminin varolmasıdır.

3.1.5 İkinci mertebeden lineer ve non-lineer denklemler

$$u'' + q(t)u = f(t), \quad t \in [0,1] \tag{3.17}$$

diferansiyel denklemini

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{3.18}$$

koşulunu sağlayacak şekilde çözünüz. (Hasting., ve Troy., 1992)

İspat:

Bu problemin çözümünü $G(t,\tau)$ Green fonksiyonu yardımıyla çözülebileceği bilgilerimizin dahilindedir. $G(t,\tau)$ Green fonksiyonu oluşturabilmek için

$$u'' + q(t)u = 0$$

diferansiyel denklemini çözen iki lineer bağımsız çözüm oluşturulur. Böylece

$$u(t) = \int_0^1 G(t,\tau) f(t) d\tau$$

ifadesi (3.17) denkleminin çözümü olur. Aynı zamanda (3.17) problemi çözüme sahip olmayabilir. Çözümün olabilmesi için eğer ϕ,

$$u'' + q(t)u = 0 \tag{3.19}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{3.20}$$

homojen diferansiyel denkleminin çözümü ise

$$\int_0^1 \phi(t) f(t) dt = 0$$

olmasıdır. Eğer homojen problem sıfırdan farklı bir çözüme sahipse bu durum herhangi bir f için doğrudur.

Bunun için (3.17) diferansiyel denkleminin çözümünü veren ikinci bir metot verelim. $u_p(t), \quad u(0) = u'(0) = 0$ şartını sağlayacak şekilde (3.17) denkleminin bir çözümü olsun. $u_h(t), \quad u(0) = 0, u'(0) = 1$ şartını sağlayacak şekilde (3.19) homojen denkleminin herhangi bir α için;

$$u_\alpha(t) = u_p(t) + \alpha u_h(t) \tag{3.21}$$

(3.17) denklemini çözebilmesi için (3.17) denklemiyle verilen şartları sağlaması gerekir. $u_\alpha(0)=0$ olduğu açıktır. $u_\alpha(1)=0$ olmasını isteyelim. Bu halde, α değerini seçmek mümkündür. Bu durumda

$$\alpha=-\frac{u_p(1)}{u_h(1)}.\quad \left(u_h(1)\neq 0\right)$$

Eğer $u_h(1)=0$ ise bu durumda çözümün olması ancak $u_p(1)=0$ ile mümkündür.

Şimdi bu (3.21) denklemini sağlayan $u_\alpha(t)$ ifadesini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$u''+q(t)u=f(t) \tag{3.22}$$

$$u(0)=0 \tag{3.23}$$

$$u'(0)=\alpha \tag{3.24}$$

Bu başlangıç değer probleminin çözümü tektir. α seçimi $u_\alpha(1)=0$ olacak şekilde yapılmalıdır. Problemi sonuçlandırabilmek için izlenen yol bazı α değerleri için $u_\alpha(1)<0$ iken diğer α değerleri için $u_\alpha(1)>0$ olduğunu göstermek yeterlidir. (3.22) ve (3.24) i sağlayan çözümün α ya göre sürekliliğinden ve ara değer teoremi gereğince $u_\alpha(1)=0$ olacak şekilde bir α nın mevcut olduğunu göstermek mümkündür.

Bu özel lineer problemi için Shooting metodu oldukça etkili bir metot değildir. Bu son paragrafta geliştirilen özelliklerin ispatı için belki de (3.21) formülünü kullanmak zorundayız. Bu formülün kullanımıyla Shooting metoduna gereksinim yoktur. Bunun için $u_h(1)\neq 0$ olmak şartıyla α ya göre çözeriz. Parametrelerin değişim metodu kullanıldığında $u_h(0)=0$ durumu ise atış metoduyla daha az uyarlıdır. Shooting metodunda ortogonallık şartı $\left(\int_0^1 \phi(t)f(t)dt=0\right)$ gibi duruma çok az rastlanmaktadır. Şimdi de atış metodunun oldukça etkili olduğu bir durum üzerinde duralım.

$$u''-u^3=f(t) \tag{3.25}$$

$$u(0)=0,\ u(1)=0 \tag{3.26}$$

non-lineer problemini düşünelim. Eğer $f = 0$ ise, $u = 0$ (3.27) denkleminin bir çözümüdür. Bazı t ler için $f(t) \neq 0$ olsun. (3.25)-(3.26) probleminin çözümü için herhangi bir formül yoktur. Böyle bir çözümün varlığını her α için $u = u_\alpha$ (3.25) denklemini

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = \alpha$$

sağlayacak şekilde ele alalım.

$$M = \sup_{1 \le t \le 2} |f(t)| + 1$$

olsun. (3.25) denklemindeki problemli terimlerden bir tanesi u^3 dır. u_α çözümünün $[0,1]$ kapalı aralığının tamamında mevcut olmayabilir. $t = 1$ olmadan önce $u \to \infty$ olabilir. Bu rahatsız edicidir. Fakat ciddi bir problem değildir. Bu rahatsız edici fakat ciddi olmayan durumun üstesinden aşağıdaki fonksiyonun tanımıyla hal edilebilir.

$$g(u) = \begin{cases} u^3, & |u| \le 2M \\ (2M)^3 \; sign(u), & |u| > 2M \end{cases}$$

Bu taktirde, çözüm olduğu sürece

$$|u''| \le (2M)^3 + M$$

olur. Böylece $t = 1$ olmadan önce $u \to \infty$ olmaz. Üstelik bu tanım altında (3.25) denklemi yerine

$$u'' - g(u) = f(t) \tag{3.27}$$

denklemini (3.26) şartını sağlayacak şekilde ele alalım. $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde $|u^3(t)| \le 2M$ dır. Böylece (3.27) in çözümü aynı zamanda orijinal (3.25)-(3.26) probleminin çözümüdür. (3.27)-(3.26) denkleminin çözüme sahip olduğunu göstermek için

$$u'(0) = \alpha > 8M^3 + M$$

dır. Çünkü,

$$u' = \alpha + \int_0^t (g(u(t)) + f(t) \;)dt \ge \alpha - (8M^3 + M)t \ge \alpha - (8M^3 + M) > 0$$

$t \in [0,1]$. Buradan, $u_\alpha(1) > 0.$ Diğer yandan, eğer

$$\alpha < -(8M + M)$$

ise, bu taktirde $u_\alpha(1) < 0$ bulunur. Bu halde, (3.27)-(3.26) nın bir çözümünün varlığı bazı $\alpha = \alpha^*$ için $u_{\alpha^*}(1) = 0$ olduğunu gösterir.

$$|u_{\alpha^*}(t)| \leq 2M$$

olmasını isteyelim. Gerçekten, $t \in [0,1]$ için $|u_{\alpha^*}(t)| \leq M$ olduğunu göstereceğiz. Eğer değilse, o zaman $u = u_\alpha$ M den büyük bir mutlak maksimuma veya $-M$ den küçük bir mutlak minimuma sahip olmalı. Çünkü, $u(0) = u(1) = 0.$ $u(T) > M$ ve $u'(T) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde,

$$u''(T) = M^3 + f(t) > 0.$$

Çünkü $M > 1$ ve $|f(T)| \leq M$. Bu da f nın bir yerel maksimum olmasıyla çelişir.

Benzer olarak aynı durum $u_{\alpha^*}(T) = -M$, $[0,1]$ de $|u_{\alpha^*}| < M$ için uygulanırsa ilk öncekine benzer tartışmayla u_{α^*} (3.25)-(3.26) çözer.

Bu problemi ispat etmenin bir ikinci yolu vardır. $u_{\alpha^*}(1) = 0$ olacak şekilde bir α^* in var olduğunu göstermek için ikinci yol aşağıdaki gibidir.

- $A = \{\alpha | \quad u_\alpha(1) > 0\}$

ve

- $B = \{\alpha | \quad u_\alpha(1) < 0\}.$

A ve B kümelerinin ayrık oldukları tanımlarından açıktır. Aynı zamanda A ve B kümeleri açıktır. Örneğin, $\overline{\alpha} \in A$ olsun. Bu durumda $u_{\overline{\alpha}}(1) > 0.$ Çünkü çözümler α nın değerine göre sürekli olarak değişecektir. Yani, çözüm başlangıç değerine bağlı olarak değişecektir. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için eğer $|\alpha - \overline{\alpha}| < \varepsilon$ ise,

$$|u_\alpha(1) - u_{\overline{\alpha}}(1)| < \frac{1}{2} u_{\overline{\alpha}}(1).$$

Eğer $|\alpha - \overline{\alpha}| < \varepsilon$ ise bu durumda $u_\alpha(1) > 0.$ Bu halde $\overline{\alpha}$ nın bir açık komşuluğu A kümesindedir. Bu da A nın açık olduğunu gösterir. Benzer olarak, B açıktır.

(Genel olarak başlangıç koşullarına bağlı bir küme kesin olarak $>$ (veya $<$) eşitsizlikleriyle tanımlanırsa açık küme olur. Çünkü çözümlerin sürekliliği başlangıçtaki koşullara veya parametrelere bağlıdır).

A ve B kümeleri açık, ayrık ve boştan farklıdır. Reel sayı doğrusu bağlantılı olduğundan bir kümenin bağlantılılığı tanımı gereğince $A \cup B \neq (-\infty, \infty)$. Bu taktirde bir α^* sayısı vardır ki ne A kümesindedir ne de B kümesindedir. A *ve* B kümelerinin tanımlarından dolayı u_{α^*}, $u(0) = u(1) = 0$ şartını sağlar.

3.1.6. İkinci mertebeden Painlevé denklemi

$$y''(x) - xy(x) = y^3(x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{3.28}$$

ikinci mertebeden Painlevé Denklemini ele alalım. (3.28) denkleminin

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{y^2(x)}{x} = -1 \tag{3.29}$$

şeklinde bir çözüme sahip olduğunu gösteriniz (Mcleod., Bassorn., Clarkson., ve Law., 1998).

İspat:

(3.29) denkleminin 2. sınır şartından

$y(x) \sim \sqrt{-x}, \quad x \to -\infty$. Eğer $x<0$ için $u(x) = \sqrt{-x}$ ise

$$u' = -\frac{1}{2\sqrt{-x}}, \quad u'' = -\frac{1}{4(-x)^{\frac{3}{2}}} \to 0, \quad x \to -\infty. \tag{3.30}$$

ve

$$xy(x) + y^3(x) = -|x|^{\frac{3}{2}} + |x|^{\frac{3}{2}} = 0, \quad x \to -\infty.$$

Bu sebeple en azında $x \to -\infty$ için y nın $\sqrt{\ }$ bir ifadeye yakınsadığını düşünmek mantıklıdır. Shooting metodu yardımıyla bir çözümün olduğunu gösterelim. Bu metodu kullanabilmek için ilk olarak $x \to \infty$ için y nın nasıl olduğunu belirtmek gerekir. Bu halde, sıfıra gidecek çözümler var mıdır? Sorusuna yanıt arayalım.

$$y''(x) - xy(x) = y^3(x),$$

denklemini

$$y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta, \tag{3.31}$$

başlangıç değer problemini düşünelim.

Lemma 3.6.1: $\alpha > 0$ için $y(\infty) = 0$ olacak şekilde bir tek β değeri vardır.

İspat: $\alpha > 0$ için

- $A = \{\beta < 0: \ \ y(t_0) < 0, \text{ bazı } t_0 > 0 \text{ için}\}$
- $B = \{\beta < 0: \ \ y'(t_0) > 0, \text{ bazı } t_0 > 0 \text{ ve } [0, t_0] \text{ için } y > 0\}$

Genel olarak, bu iki kümenin boştan farklı, ayrık ve açık olduğunu göstermek hedefimizdir. Bu kümelerin her biri açıktır. Çünkü, herhangi bir t_0 değeri için $y(t_0)$

ve $y'(t_0)$, β nın sürekli fonksiyonlarıdır. Ayrıca ayrıktır. Bir an için $\beta \in A \cap B$ olsun. B kümesindeki şartları sağlayan bir t_0 seçelim. Bu taktirde, A kümesinden $y(t_1) < 0$ olacak şekilde bir $t_1 > t_0$ vardır. Fakat $t_2 \in (t_0, t_1)$ olacak şekilde $y(t_2) > 0$ maximum olur. Bu sebeple $y''(t_2) < 0$ dır. Bunlarla beraber verilen diferansiyel denklemi

$$y''(t_2) - t_2 y(t_2) = y^3(t_2)$$

ise

$$y''(t_2) = t_2 y(t_2) + y^3(t_2) > 0$$

dır. Çelişkidir. Bu halde, böyle bir β mevcut değildir. Nihayet A ve B kümelerinin boştan farklı olduğunu gösterelim. B kümesinin boştan farklı olduğunu göstermek için $y'(0) = 0$ olsun. Aynı zamanda $y(0) = \alpha > 0$ idi. Böylece $y''(0) > 0$ olur. Fakat yukarıdaki ispatımız tüm $t > 0$ için $y'(t) > 0$ olacaktır. Özellikle $y(t_0) > 0,\ y'(t_0) > 0$ olacak şekilde bir t_0 vardır. $[0, t_0]$ kapalı aralığında $y > 0$ dır. β ya göre çözümlerin sürekliliğinden eğer, $\beta < 0$ ve $|\beta|$ yeterince küçük ise y hala yukarıdaki özelliklere sahip olacaktır. Böylece B kümesi boştan farklıdır.

Şimdi A kümesinin boştan farklı olduğunu göstermek için $\alpha > 0$ fixed (sabit).

$$\beta = -(\frac{7}{6}\alpha + \frac{1}{2}\alpha^3 + 1)$$

olduğunu kabul edelim. $(0, \varepsilon)$ açık aralığı üzerinde $\beta < 0$ *ve* $y < \alpha$ olduğundan bu β seçimi yapılabilir. $y \le \alpha$ olduğu sürece

$$y''(x) \le x\alpha + \alpha^3$$

olur. Bu son denklemde her iki tarafın integrali alınırsa başlangıç koşullarıyla birlikte

$$\begin{aligned} y'(x) &\le \beta + \frac{1}{2}x^2\alpha + \alpha^3 x \\ y &\le \alpha + \beta x + \frac{1}{6}x^3\alpha + \frac{1}{2}\alpha^3 x^2 \end{aligned} \tag{3.32}$$

elde edilir. Şimdiye kadar gösterdiklerimizden ya

- $i)\ \ y(1) < 0$

ya da
- $ii)\ \ 0 \le y(1) < \alpha$
- $iii)\ \ y(1) > \alpha$

$iii)$ deki $y(1) > \alpha$ olasılığı mevcut değildir. Çünkü; $x = 1$ olmadan önce $y \to \infty$ olur. $i)$ ile beraber A boştan farklıdır. Eğer $iii)$ oluşursa bu taktirde $(0,1)$ açık aralığında bir x_0 vardır öyle ki $y(x_0) = \alpha$ dır. Bu taktirde $x > x_0$ için y yi yeniden tanımlarız. Bu y değeri α dır. Bu taktirde;

$$y(1) \le \min\left\{\alpha, \alpha + \beta + \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{2}\alpha^3\right\}$$

yazılabilir. Çünkü eğer ikinci terim 1 den küçük ise (3.31) denkleminden $(0,1)$ açık aralığında $y(x) < \alpha$ dır. Bu eşitsizlik $ii)$ için de geçerlidir. Fakat β nın seçiminden dolayı $y(1) < 0$ olur. Böylece $ii)$ ve $iii)$ olasılıkları mümkün değildir. B boştan farklıdır. Buradan hareketle bir $\beta^* < 0$ vardır öyle ki $\beta^* \notin A \cup B$ sonucunu çıkarabiliriz. Bu çözüm azalandır fakat pozitiftir. Yani $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$ mevcuttur. Eğer bu limit pozitif ise (3.28) denkleminden $y'' \to \infty$ dır. Bu ise çelişkidir. Çünkü bu takdirde y herhangi bir limite yaklaşmaz. Bu taktirde limit sıfırdır. Bu da lemma varlık koşulunu ispatlar. Bu lemma aynı zamanda β nın α ya bağlı olarak tek bir şekilde belirlenir. Bunu görebilmek için bazı α lar için y_1 ve y_2 gibi iki çözümünün $y(0) = \alpha$, $y(\infty) = 0$ şartlarını sağlayacak şekilde var olduğunu kabul edelim. Bu taktirde;

$$y_1'' - y_2'' = x(y_1 - y_2) + y_1^3 - y_2^3 = (x + y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)(y_1 - y_2)$$

sağ taraftaki çarpımdaki ilk terim pozitiftir. Fakat, $y_1'' \to 0,\ \ y_2'' \to 0.$ Eğer $u = y_1 - y_2$ ise $u(0) = y_1(0) - y_2(0) = 0$ olur. Bu taktirde yukarıdaki argümanın aynısı bize $u = 0$ yada u sınırsızdır (pozitif veya negatiftir). Fakat, $x \to \infty$ için $u = 0$ dır. Bundan dolayı $y_1 = y_2$ dır.

3.1.7. Yang-Mill tipi denklemler

Bu problemde

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + f = f^3, \qquad 1 < r < \infty$$

$$f(1) = 0, \; f(\infty) = 1$$

$$1 < r < \infty \text{ için } \quad f(r) > 0 \tag{A}$$

şartlarını sağlayacak şekilde non-lineer denklemini ele alalım. Çözümün varlığını gösterebilmek için topolojik shooting metodu argümanı kullanılacaktır. Şimdide

$$r^2 f'' + f = f^3, \quad 0 < r < \infty, \tag{3.33}$$

$$f(r) \to 0, \text{ iken } r \to 0 \tag{3.34}$$

$$f(\infty) = 1 \tag{3.35}$$

sınır değer problemini ele alalım. Bu problem (Wu., ve Yang., 1969) de sunuldu. Gauge (Geyc) alan teorisindeki monopol çözüm üzerinde çalışıldı. Bu probleme mevcut çözüm Wu-Yang çözümü olarak bilinir. Yang-Mill denklemleri çalışılırken bu denklemler daima ele alınır. Örneğin; (Breitenlohner., Forgacs., ve Maison., 1994), (Hastings., Mcleod., and Troy., 1995) ve (Smoller., Wasserman., Yau., ve Mcleod., 1991) yayınlarında bu denklem daima düşünüldü. Bu denkleme düzenli bir çözüm $f(\infty) = 1$ sınır değer probleminden gelir. Veya buna eşdeğer olarak $f(\infty) = 1$ şartından gelir. Bu sebeple çözümünün varlığının yanında tekliğini ve asimptotik ve problemde sözü geçen parametreler arasındaki asimptotik formülleri vermek oldukça faydalıdır. Bunları cevaplayabilmek için (Wang., 2001) çalışmasına bakmakta fayda vardır. Bu problemin fiziksel geçmişi için (Actor., 1979) ve (Malec., 1987) teki çalışmaları gözden geçirmekte fayda vardır. (Wu., ve Yang., 1969), (Protogenov., 1979) ve (Breitenlohner., Forgacs., ve Maison., 1994) de yapılan çalışmalarda ifade edilen bu sınır değer problemi için asimptotik çözümün bazı α, β, ve γ için

$$f(r) \sim a r^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \log r + \beta\right), \qquad r \to 0$$

$$f(r) \sim 1 + \frac{\gamma}{r}, \qquad r \to \infty.$$

(Wang., 2001) çalışmadaki motivasyon α, β ve γ arasındaki bağlantı formülleri ifade edildi. Bu parametreler arasındaki bağlantı formüllerinde (Wang, C.B., 2001) nin farklı çalışmalarında ele alınmıştır. (Wang., 2001) çalışmada bu problemin çözümünün sonsuz sayıda sıfıra sahip olduğunu ve bu sıfırlarının bir üst sınıra sahip olduğu gösterildi. Bu (A) problemini çalışmak için bu (Wang., 2001) çalışmada ilk olarak

$$f(1) = 0, \quad f(\infty) = 1, \quad r > 1 \text{ için } f(r) > 0$$

olmak şartıyla;

$$r^2 f'' + f = f^3$$

probleminin çözümünün varlığı ve tekliği düşünüldü. Çözümün varlığı için shooting argümanı kullanıldı. Varyason metoduyla bu çözümün tek olduğu ve bu asimptotik çözümün $r \to 1$

$$f(r) \sim a^* \log r, \quad a^* > 0$$

sabit bir sayıdır. (Wang., 2001) da a^* için analitik süreklilik metodu kullanılarak $r = 1$ de çözümün analitik özelliği kullanılarak kesin bir formül verildi. (Wang., 2001) da (A) problemin global çözümleri verilmekle beraber problemde adı geçen parametreler arasındaki bağlantı formülleri verildi. Ayrıca, bu (Wang., 2001) da yapılan çalışma (A) probleminin daha genel ifadesi olan

$$r^2 f'' = F(f),$$

$F(f)$, f ye göre bir polinomdur. (A) denklemini çalışmak için

$$r = e^x, \quad f(r) = y(x) \tag{3.36}$$

dönüşümleri yapılırsa (A) problemi

$$y'' - y' + y = y^3 \tag{3.37}$$

şeklini alır. $x > 0$ için $y^*(x)$, $y^*(0) = 0$, $y^*(\infty) = 1$ şartını sağlayacak şekilde bir çözüme sahip olduğunu göstereceğiz. $x > 0$ için $y^*(x) > 0$ dır. Bu amaca varabilmek için tek boyutlu shooting (atış) argümanı kullanılacak. Bu metot sınır değer problemini tartışmak için çok geniş bir kullanıma sahiptir.

Çözümün Varlığı

$$y'' - y' = y^3 - y, \quad 0 < x < \infty \tag{3.38}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = a \tag{3.39}$$

problemini ele alalım.

$y(\infty) = 1, \quad y'(x) > 0 \quad 0 < x < \infty$ şartını sağlayacak şekilde bir $a > 0$ olduğunu gösterelim. (Wank, C.B., 2001. Coddington, E.A., 1955).

Lemma 3.7.1: 0 civarında herhangi bir a için (3.38) ve (3.39) denklemini sağlayan sınırlı bir tek $y(x,a)$ çözümü vardır. Özel olarak $a = 0$ ise $y \equiv 0$ dır.

İspat:

a nın küçük ve büyük değerler alması halinde çözümün hareketini analiz edelim. Eğer a çok büyük ise y' sıfırı kesmeden önce $y, 1$ i geçer. Eğer a çok küçük ise y, 1 kesmeden önce y' sıfırı geçer. Bu taktirde, bir a değeri mevcuttur. Bu a değeri için $y(x,a), 1$ i geçmez. Ve $y(\infty, a) = 1$ dır. Bu argüman shooting (atış) metodu olarak bilinir.

Lemma 3.7.2: $a > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ için (3.38) ve (3.39) denklemlerini sağlayan çözüm

$$y(x^+) > 1, \tag{3.40}$$

$$y'(x) > 0, \quad 0 < x < x^+ \tag{3.41}$$

denklemlerini sağlar. Burada, $x^+ = (a^2 - \frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}} + 1$ dır.

İspat:

$v(x) = 1 - y(x)$ olsun. Bu taktirde, (3.38) ve (3.39) denklemleri

$$v'' - v' = 2v - 3v^2 + v^3, \tag{3.42}$$

$$v(0) = 1 \quad v'(0) = -a \tag{3.43}$$

şeklini alır. (3.42) denklemi v' ile çarpılır ve $\int_0^x$ integre edilirse $x > 0$ için

$$v'^2 = 2v^2(1 - \frac{1}{2}v)^2 + (a^2 - \frac{1}{2}) + 2\int_0^x (v'(s))^2 ds,$$

olur. Eğer $a > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ise bu son denklemin sağ tarafı daima pozitiftir. $v'(0) = -a < 0$ olduğundan,

$$v'(x) = -(2v^2(1-\frac{1}{2}v)^2 + (a^2 - \frac{1}{2}) + \int_0^x v'(s)^2\,ds)^{\frac{1}{2}} < -(a^2 - \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$$

olur. Bundan dolayı

$$v(x^+) = v(0) + \int_0^{x^+} v'(s)ds < 1 - \int_0^{x^+} \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}}ds = -(\sqrt{a^2 - \frac{1}{2}} < 0.$$

Yani; $v'(x) < 0, \quad 0 \le x \le x^+$, buna denk olarak $0 \le x \le x^+$ için $y(x^+) > 1$ ve $y'(x) > 0$ olur. Bu da lemmanın ispatıdır.

Lemma 3.7.3: Bir $a^- > 0$ sayısı mevcuttur öyle ki eğer $a \in \left(0, a^-\right]$ ise, $y(x) = y(x,a)$ çözümü,

$$y'(x) < 0 \tag{3.44}$$

$$y(x) > 0, \quad 0 < x < x^- \tag{3.45}$$

denklemini sağlar. Burada, $x^- = \dfrac{5\pi}{3\sqrt{3}}$.

İspat:

$$y(x) = aw(x) \tag{3.46}$$

olsun. Bu halde, (3.33) ve (3.34) denklemleri

$$w'' - w' + w = a^2 w^3 \tag{3.47}$$

$$w(0) = 0 \quad w'(0) = 1 \tag{3.48}$$

şeklini alır. $a \to 0$ iken problemin çözümü x kompakt aralığı üzerinde düzgün olarak,

$$W'' - W' + W = 0, \tag{3.49}$$

$$W(0) = 0, \quad W'(0) = 1, \tag{3.50}$$

problemin çözümüne yakınsar. Bu problemin çözümünün,

$$W(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{1}{2}x} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

olduğunu görmek zor değildir. Buradan

$$W(x^-) > 0, \quad 0 < x \le x^- \tag{3.51}$$

$$W'(x^-) < 0 \qquad (3.52)$$

olur. Böylece bir $a^- > 0$ mevcuttur öyle ki eğer $a \in (0, a^-]$ ise

$$w'(x) < 0 \qquad (3.53)$$

$$w(x) > 0, \quad 0 < x \leq x^- \qquad (3.54)$$

Böylece lemma ispatlanmıştır. (3.33) ve (3.34) denkleminin çözümü olan $y(x,a)$ ve $y'(0) = a$ için

- $S^+ = \{a > 0 |\ \ y'$ sıfırı olmadan önce y biri geçer.$\}$
- $S^- \{a > 0 |\ \ y$ bir olmadan önce y' sıfırı geçer.$\}$

kümelerini tanımlayalım.

Bu taktirde, (3.7.2.)lemmadan dolayı $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty) \subset S^+$ olduğu kolayca yazılabilir. (3.7.3) lemmasından dolayı $(0, a^-) \subset S^-$ yazılır. Ve (3.7.3) lemmasından dolayı S^+ ve S^- kümeleri boştan farklıdır. Yine S^+ ve S^- kümeleri tanımlarından dolayı ayrık oldukları kolayca görülür. Son olarak bu iki kümenin açık olduğunu gösterirsek ifade edilen problemin bir çözüme sahip olduğunu göstermiş oluruz. Bunu aşağıdaki teoremle verelim.

Teorem 3.7.1:

$$y'' - y' = y^3 - y, \quad 0 < x < \infty, \qquad (3.57)$$

$$(P^+) \ \ y(0) = 0, \quad y(\infty) = 1, \qquad (3.58)$$

$$y(x) > 0, \quad 0 < x < \infty, \qquad (3.59)$$

problemi çözüme sahiptir.

İspat:

İspat için (3.7.2) ve (3.7.3) lemmalarının yanında S^+ ve S^- kümelerinin açık olduğunu gösterirsek ispat biter. Kümelerinin açık olduğunu ispat edebilmek için kapalı fonksiyon teoremi kullanılacaktır.

$$(0, \infty) \setminus (S^+ \cup S^-) = \phi$$

olur. Bu ise shooting argümanıyla ulaşılmak istenen sonuçtur. Bu taktirde, bir a^* mevcuttur ve bu $a^* \notin (S^- \cup S^+)$. Bunun yanında $y(x, a^*)$ çözümü

$$y'(x,a^*) > 0, \quad 0 < x < \infty, \tag{3.60}$$

$$y(x,a^*) < 1, \quad 0 < x < \infty \tag{3.61}$$

denklemini sağlar. Böylece $y(\infty,a^*) = b,$ burada $0 < b \le 1$ dır. Şimdi de $b = 1$ olduğunu gösterelim. Bir $x_0 < x < \infty$ olacak şekilde bir x_0 sayısının mevcut olduğunu öyle ki;

$$\frac{b}{2} < y(x) < b$$

yazılır. Eğer $b < 1$ ise (3.57) den

$$y'(x) = e^x \int_{x_0}^{x} e^{-s} y(s)(y^2(s) - 1)ds \le e^x \int_{x_0}^{x} e^{-s} \frac{b}{2}(b^2 - 1)ds$$
$$= \frac{b(b^2-1)}{2}(e^{x-x_0} - 1) \to -\infty, \quad x \to \infty.$$

Bu ise çelişkidir. Çünkü, $y(x,a^*)$ mevcuttur. Böylece $b = 1$ dır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

$$y^{(n)} = f(x, y, ..., y^{(n-1)})$$

diferansiyel denklem sınıfından olan

$$v'' - f(x,v)v' - \phi(v) = 0 \quad v(0) = 1, \ v(\infty) = 0 \text{ ve } v' \leq 0$$

denkleminin çözüm varlığı,

$$f''' - ff'' + \lambda(1 + f'^2) = 0 \quad (0 < \lambda < \frac{1}{2}), f(0) = 0, \ f'(0) = 0, \ f(x)$$

ve

$$f \geq 0, f' \geq 0, f'' \geq 0 \text{ ve } f''' < 0$$

koşullarını sağlayan denkleminin çözüm varlığı, akışkanlar mekanikte önemli bir yere sahip olan Falkner-Skan denkleminin

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0 \quad (\beta > 0), f(0) = a > 0, \ f'(0) = 0, \ f'(\infty) = 1$$

$$f > 0, f' > 0, f'' > 0$$

çözüm varlığı, Blasius denkleminin

$$f''' + ff'' = 0, \ f(0) = 0, f'(0) = 0, \ f'(\infty) = 1, f > 0, f' > 0, f'' > 0 \quad \text{ve} \quad f''' < 0 \ ,$$

çözüm varlığı, Landesman-Lazer tipi denklemlerin

$$x' = g(x) - f(t), \ x = x(t)$$

periyodik çözümün varlığı,

$$u'' - u^3 = f(t), \ \ u(0) = u(1) = 0$$

denkleminin çözüm varlığı, Painlevé denkleminin

$$y'' - xy = y^3, \ -\infty < x < +\infty, \ \lim_{x \to -\infty} y(x) = -1, \ \lim_{x \to \infty} y(x) = 0$$

çözüm varlığı ve Yang-Mill denklemlerinin çalışmasında kullanılan

$$r^2 f'' + f = f^3 \quad (1 < r < \infty), f(1) = 0, \ f(\infty) = 1, \ f(r) > 0$$

denklemlerinin çözüm varlığı incelendi. Bu denklemlerin verilen koşulları sağlayacak analitik çözümü henüz verilmemiştir. Fakat bu denklemlerin verilen koşulları sağlayacak şekilde çözüme sahip olup olmadıklarını bilmek önemlidir.

Buna cevaben diferansiyel denklemler teorisinde çeşitli metodlar geliştirilmiştir. Bunlardan bir tanesi Atış (Shooting) metodudur. Materyal ve Yöntem kısmında shooting metodu detaylı bir şekilde anlatıldı. Yüksek mertebeden denklemler için de shooting metodu kullanılabilir. Fakat tanımlanacak küme sayısının çokluğundan dolayı üstesinden gelmek oldukça zordur.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

$$y^{(n)} = f(x, y, ..., y^{(n-1)}) \tag{1}$$

şeklindeki diferansiyel denkleminin belli koşullar altında çözümün varlığı shooting metodu yardımıyla verildi. Belli n değerlei (1) denklemi yapısında olan diferensiyel denklemler teorisinde önemli bir yere sahip ola denklemlerin cözüme sahip olma varlığı araştırıldı. Bu çalışmada, sınır değer problemleri başlangıç değer problemine çevrilerek problemlerin çözüm varlığı incelendi.

Varlık teorisinde çeşitli fixed nokta teoremleri mevcuttur. Bu teoremlerin kullanım alanları için diferansiyel denklemler literatüründe çok sayıda makale mevcuttur. Bunlardan bir kaçı, Xiaoming., ve Weigao., 2002, Meehan., ve O'regan., 2001, Herzog., ve Lemmert., 2003, ve Anderson, D., 2000 dır. Yine varlık teorisinde önemli bir yere sahip olan monoton metot için Davis., ve Henderson., 2001 bakınız.

KAYNAKLAR

ANDERSON, D., 1998. Multiple Positive Solutions for a Three-Point Boundry Value Problem. Mathematical and Computer Modelling, 27(6): 49-57.

CODDINGTON, E.A., and LEVINSON, N., 1955. Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill, 429 p.

DAVİS, J.M., and HENDERSON, J., 2001. Monotone Methods Applied to Some Higher Order Boundry Value Problems. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 2: 1-9.

HARTMAN, P., 1982. Ordinary Differential Equations. Wiley, 395 p.

HASTINGS, S., 1972. Reversed flow solutions of the Falkner-Skan Equation, J. On Appl. Math, 22: 329-334.

HASTINGS, S., 1966. On the Asymptotic Growth of Solutions to a Nonlinear Equation. Proceeding of the Amer. Math, Soc.,17: 40-47.

HASTINGS, S. P., 1969. An Existence Theorem for a Problem from Boundary Layer Theory Arch. Rat. Mech Anal., 33: 103-109.

HASTINGS, S., and MCLEOD J.B., 1991. Periodic Solutions of a Forced Second Order Differential Equations. J. Nonlinear Sciences, 1: 225-245.

HASTINGS, S., and MCLEOD J.B., 1993. On Chaotic Motion of a Nonlinear Pendulum with Oscillatory Forcing. Amer. Math. Monthly, 100: 563-572.

HASTINGS, S., and TROY W., 1992. A Shooting Approach to the Lorenz Equations. Bull. Amer. Math. Soc., 27: 298-303.

HASTINGS, S., and TROY W., 1987. Oscillating Solutions of the Falkner-Skan Equation with Positive β. J. Differential Equations, 71: 123-144.

HERZOG, G., and LEMMERT, R., 2003. Positive Solutions of Systems of Boundry Value Problems. Extracta Mathematicae,18: 23-32.

LAZER, A.C., 2000. Second Look at the First Result of Landesman-Lazer Type. J. Differential Equtions, 05: 113-119.

MCLEOD, J.B., 1969. Von Kármán's Swirling Flow Problem. Arch. Rational Mech. Anal., 33: 91-102..

MCLEOD, J.B.. and SERRIN J., 1968. The Behaviour of Similar Solutions in a Compressible Boundary Layer. J. Fluid. Mech., 34: 337-342.

MCLEOD, J.B., and SERRIN J., 1968.The Existence of Similar Solutions for Some Boundary Layer Problems. Arch. Rational Mech. Anal., 31: 288-303.

MCLEOD, J.B., 2001. Lecture Notes in Mathematics. University of Pittsburgh.

MCLEOD, J.B., BASSORN, A.P.,CLARKSON, P.A., and LAW, C.K., 1998. Application of Uniform Asymptotics to the Second Painlevé Equation. Arch. Ration. Mech. Anal., 143: 241-271.

MEEHAN, M., and O'REGAN, D., 2001. A Note on Positive Solutions of Fredholm Integral Equation and Related Boundry Value Problems.

Mathematical proceedings of the Royal Irish Academy, 101A: 75-85.

TANRIVERDİ, T., 2001. Boundary Value Problems in ODE, Ph. Thesis. D., University of Pittsburgh. 100 p.

WANG, C.B., 1999. Boundry Value Problem for $r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + f = f^3$, (I): Existence and Uniquenness. Arxiv: math-ph/9903024, 1: 1-12.

WEYL, H., 1942. On the Differential Equations of the Simplest Boundary-Layer Problems. Ann. Math., 43: 381-407.

XİAOMİNG, H., and WEİGAO, G., 2002. Triple Solutions for Second-Order Three-Point Boundry Value Problems. Journal of mathematical analysis and applications, 268: 256-265.

ÖZGEÇMİŞ

01.01.1978 yılında Şanlıurfa merkeze bağlı Kayacık Köyünde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Şanlıurfa'da okudu. 1999 yılında Açık Öğretim Lisesini bitirdi. 2003 yılında Harran Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2004 yılından itibaren Özel Kurumlarda Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır.

ÖZET

Bu tez sınır değer problemleri konusunda daha önce yayınlanmış önemli makalelerin birer taramasıdır.

$$y^{(n)} = f(x, y, ..., y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

diferansiyel denklemi $n = 1,2,3$ için belli şartlar altında çözümün varlığı gösterildi. Özel olarak, Falkner-Skan ve Blasius denklemi, Landesman-Lazer tipi denklem, ikinci mertebeden Painlevé denklemi ve Gauge teorisinde önemli bir yere sahip olan Yang-Mill denklemlerini çalışılırken kullanılan denklemlerin çözüm varlığı shooting metodu yardımıyla araştırıldı. (1) diferansiyel denkleminde $n = 1$ için çözüm varlığında önemli bir yere sahip olan Picard-Lindelöf (Ardışık yaklaşıklar) teoremi ifade edilerek ispatı verildi.

Bunun yanında, Shooting metodu kullanılırken topolojik kavramlar kullanıldı. Bu anlamda shooting metodu literatürde topolojik shooting metodu olarak adlandırılır.

SUMMARY

$$y^{(n)} = f(x, y, ..., y^{(n-1)}) \tag{1}$$

In this thesis we have revieved alread published special articles related to shooting method. We investigate linear and nonlinear case of the equation (1) with certain boundary conditions for $n = 1,2,3$. Especially, the existence of the solutions of Falkner Skan, Blasius equation, Landesman-Lazer type equation, the second order Painlevé equation and Yang-Mill type equation were investigated by shooting method.