

**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**KUSURLU YAPILARDA BURKULMA VE TİTREŞİM PROBLEMİNİN
NÜMERİK ANALİZİ**

Mustafa ÖZEN

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**ŞANLIURFA
2007**

Doç. Dr. Murat KISA danışmanlığında, Mustafa ÖZEN' in hazırladığı “Kusurlu Yapılarda Burkulma ve Titreşim Probleminin Nümerik Analizi” konulu bu çalışma 26/12/2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Makina Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Murat KISA

Üye : Prof. Dr. Cengiz DOĞAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. M. Arif GÜREL

Bu Tezin Makina Mühendisliği Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Prof. Dr. İbrahim BOLAT
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZ	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM	7
3.1. Genel Stabilite	7
3.2. Çubuk, Kiriş ve Kolonların Stabilite Problemlerinin Analitik Çözümü	9
3.2.1. İki ucu mafsallı kolon için burkulma yükünün analitik çözümü	13
3.2.2. İki ucu ankastre kolon için burkulma yükünün analitik çözümü	15
3.2.3. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kolon için burkulma yükünün analitik çözümü	18
3.2.4. Bir ucu ankastre diğer ucu mafsallı kolon için burkulma yükünün analitik çözümü	20
3.2.5. Euler burkulma formülleri	21
3.2.6. Narinlik oranı	22
3.3. Sonlu Elemanlar Yöntemi	23
3.3.1. Cismin sonlu elemanlara bölünmesi	25
3.3.2. İnterpolasyon fonksiyonlarının seçimi	25
3.3.3. Eleman direngenlik matrisinin oluşturulması	26
3.3.4. Sistem direngenlik matrisinin hesaplanması	26
3.3.5. Sisteme etki eden kuvvetlerin bulunması	26
3.3.6. Sınır şartlarının belirlenmesi	27
3.3.7. Sistem denklemlerinin çözümü	27
3.4. Stabilite Probleminin Sonlu Elemanlar Metoduyla Modellenmesi:	27
3.4.1. Çubuk eleman için rijitlik matrisi	27
3.4.2. Kiriş eleman için rijitlik matrisleri	30
3.4.3. Düzlem çerçeve elemanı için rijitlik matrisleri	36
3.4.4. Stabilite analizi	37
3.5. Titreşim Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Modellenmesi	39
3.5.1. Çubuk eleman için kütle matrisi	40
3.5.2. Kiriş eleman için kütle matrisi	41
3.5.3. Düzlem çerçeve elemanı için kütle matrisi	41
3.5.4. Serbest titreşim analizi	42
3.6. Çatlaktan Dolayı Meydana Gelen Direngenliğin Bulunması	43
3.6.1. Gerilme şiddet faktörünün analitik ifadesi	44
3.6.2. Gerilme şiddeti faktörü ve şekil değiştirme enerjisi salıverinim oranı arasındaki bağıntı	48
3.6.3. Esneklik (kompliyans) katsayıları ve matrisi	48
3.6.4. Dikdörtgen kesitli bir kiriş için esneklik katsayılarının hesaplanması	49
3.6.5. Esneklik ve rijitlik matrislerinin oluşturulması	50
3.7. Çatlağın Yapının Stabilite ve Titreşim Özelliklerine Etkisi	51
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	53
4.1. Her İki Ucu Ankastre Kolon	53
4.1.1. Analitik çözüm	53
4.1.2. Sonlu elemanlar yöntemiyle çözüm	54
4.1.3. Deneysel çözüm	59
4.1.4. Hazırlanan programla çözüm	61
4.1.5. Bulgular	62
4.2. Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Kolon	63
4.2.1. Analitik çözüm	64
4.2.2. Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Çözüm	65
4.2.2. Hazırlanan programla çözüm	68

4.2.3. Bulgular	68
4.3. Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Mafsallı Kolon	69
4.3.1. Analitik çözüm	69
4.3.2. Hazırlanan programla çözüm	70
4.3.3. Bulgular	71
4.4. Her İki Ucu Mafsallı Kolon.....	71
4.4.1. Analitik çözüm	72
4.4.2. Hazırlanan programla çözüm	72
4.4.3. Bulgular	73
4.5. Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Ani Değişken Kesitli Kolon	73
4.5.1. Analitik çözüm	74
4.5.2. Hazırlanan programla çözüm	74
4.5.3. Bulgular	75
4.6. Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Çift Çatlaklı Kolon	75
4.6.1. Analitik çözüm	76
4.6.2. Hazırlanan programla çözüm	76
4.6.3. Bulgular	78
4.7. Titreşim Analizi.....	79
4.7.1. Bulgular	81
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	81
5.1. Sonuçlar.....	81
5.2. Öneriler.....	82
KAYNAKLAR	83
ÖZGEÇMİŞ	86
EK 1	87
ÖZET	88
SUMMARY	89

ÖZ

Yüksek Lisans Tezi

KUSURLU YAPILARDA BURKULMA VE TİTREŞİM PROBLEMİNİN NÜMERİK ANALİZİ

Mustafa ÖZEN

**Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makina Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Danışman : Doç. Dr. Murat KISA
Yıl: 2007, Sayfa: 89**

Katı cisim mekaniğindeki temel problemlerden başlıcaları yapıların stabilite ve titreşim davranışlarıdır. Bu çalışmada düşey tekil yüklemelere maruz, ilerlemeyen çatlak içeren dikdörtgen ve kare kesitli kolonların stabilite ve titreşim davranışları araştırılmıştır. Kolonların burkulma yükü ve doğal frekanslarının hesaplanması için sonlu elemanlar metodu kullanılarak bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Çatlak bölümün esnekliği, çatlaktan dolayı meydana gelen yerel esnekliğe bağlı olarak kütsüz bir yayla modellenmiştir. Yayın rijitliği, kırılma mekaniği teorileri kullanılarak hesaplanan gerilme yığılma faktörü ve şekil değiştirme enerjisi salıverim oranlarına ait esneklik matrisinin tersi alınarak türetilmiştir. Önerilen metodu açıklamak ve çatlak derinliği ve konumunun yapının burkulma yükü ve doğal frekansı üzerindeki etkilerini araştırmak için sayısal örnekler verilmiş ve hazırlanan deney düzeneği yardımıyla bu örneklerden biri için deneysel veriler elde edilmiştir. Sayısal örnekler ve deney sonuçları önerilen metodun basit ve güvenilir bir metot olduğunu göstermiştir.

ANAHTAR KELİMELEER: Stabilite, titreşim, sonlu elemanlar metodu, çatlak

ABSTRACT

Master Thesis

NUMERICAL ANALYSIS OF BUCKLING AND VIBRATION PROBLEMS OF CRACKED STRUCTURES

Mustafa ÖZEN

**Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mechanical Engineering**

**Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat KISA
Year: 2007, Page: 89**

The stability and vibration of structures is one of the main problems in solid mechanics. This study investigates the stability and vibration of slender columns with a single nonpropagating edge crack subjected to concentrated vertical loads. A computer program which uses the finite element method is prepared to determine the buckling loads and natural frequencies of the columns. The cracked section is modeled by a massless spring whose flexibility depends on the local flexibility induced by the crack. The stiffness of the spring is derived from the linear elastic fracture mechanics theory as the inverse of the compliance matrix calculated using stress intensity factors and strain energy release rate expressions. Numerical examples are given for explaining the proposed method and investigating the effects of the depth and location of crack on critical buckling load and natural frequencies of cracked columns and experimental data were taken with prepared experiment setup for one of the given examples. It is shown through the numerical examples and experiments that the proposed method is a simple and efficient method.

KEY WORDS: Stability, vibration, finite element method, crack

TEŞEKKÜR

Bu tez alıŐmasının baŐından sonuna her aşamasında bana yardımcı olan, danıŐmanım Do. Dr. Murat Kısa'ya ayrıca alıŐmanın deneysel kısmında yoğun iÇ temposuna rağmen desteğini esirgemeyen Yrd. Do. Dr. Paki TURĐUT'a ve manevi desteğini benden esirgemeyen anneme teŐekkürlerimi sunarım.

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa No
Çizelge 4.1. Her iki ucu ankastre kolona ait süreklilik tablosu	56
Çizelge 4.2. Her iki ucu ankastre, çatlak içeren kolona ait süreklilik tablosu	56
Çizelge 4.3. Deney sonunda elde edilen her iki ucu ankastre ve çatlak içeren çubuk için kritik burkulma yükünün çatlaksız kritik burkulma yüküne oranı.....	61
Çizelge 4.4. Farklı yöntemlerle hesaplanan çatlaksız kolona ait kritik burkulma yükü değerleri	62
Çizelge 4.5. Farklı yöntemlerle hesaplanan tek çatlak içeren kolona ait kritik burkulma yükünün çatlaksız kolonun burkulma yüküne oranının çatlak yeri ve derinliğine bağlı değerleri	63
Çizelge 4.6. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest, çatlak içeren kolona ait süreklilik tablosu	66
Çizelge 4.7. Tek çatlaklı Timoshenko kirişinin 1. doğal frekansının çatlak yeri ve çatlak boyutlarına bağlı değişimi.....	79
Çizelge 4.8. Tek çatlaklı Timoshenko kirişinin 2. doğal frekansının çatlak yeri ve çatlak boyutlarına bağlı değişimi.....	80
Çizelge 4.9. Tek çatlaklı Timoshenko kirişinin 3. doğal frekansının çatlak yeri ve çatlak boyutlarına bağlı değişimi.....	80

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa No
Şekil 3.1. Değişik yüzeylerde denge konumları	7
Şekil 3.2. Konsol kirişte denge durumu	8
Şekil 3.3. a) Dış aksenal yük ve tekil kuvvete maruz bir çubuk b) Şekil değiştirmiş çubuk üzerine etkiyen kesit zorları	10
Şekil 3.4. Her iki ucu mafsallı kolon	13
Şekil 3.5. Her iki ucu ankastre kolon	15
Şekil 3.6. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kolon	18
Şekil 3.7. Bir ucu ankastre diğer ucu mafsallı kolon	20
Şekil 3.8. Değişik sınır şartlarına sahip çubuklar için Pkr değerleri	21
Şekil 3.9. Elastik çubuklarda narinlik oranı ve gerilme değeri arasındaki bağıntı	23
Şekil 3.10. Düzlem çerçeve elemanında düğüm deplasmanları	36
Şekil 3.11. Yayılmış kütleli katı cismin diferansiyel hacmi üzerinde yer değiştirme ve hız bileşenleri	39
Şekil 3.12. Temel deformasyon modları	44
Şekil 3.13. Polar koordinat sisteminde çatlak ucundaki gerilmeler	44
Şekil 3.14. Çatlak içeren, dikdörtgen kesitli konsol kiriş	46
Şekil 4.1. Tek çatlak içeren her iki ucu mafsallı kolon	53
Şekil 4.2. (a) Her iki ucu ankastre, çatlaksız kolona ait SEM modeli	55
Şekil 4.3. Cihaz çenelerine monte edilecek aparatlar	59
Şekil 4.4. (a) Çatlaksız ve çatlaklı çubuklar (b) Deney için hazırlanan düzenek	60
Şekil 4.5. Deney düzeneğinin cihaza monte edilmiş hali	60
Şekil 4.6. Her iki ucu ankastre kolon için çatlak derinliği ve çatlak konumuna bağlı olarak birinci kritik burkulma yükünün Euler burkulma yüküne göre değişimi	62
Şekil 4.7. Tek çatlak içeren bir ucu ankastre diğer ucu serbest kolon	64
Şekil 4.8. Tek çatlak içeren bir ucu ankastre diğer ucu serbest kolonun SEM modeli	65
Şekil 4.9. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kolon için çatlak derinliği ve çatlak konumuna bağlı olarak birinci kritik burkulma yükünün Euler burkulma yüküne göre değişimi	68
Şekil 4.10. Tek çatlak içeren bir ucu ankastre diğer ucu mafsallı kolon	69
Şekil 4.11. Bir ucu ankastre diğer ucu mafsallı kolon için çatlak derinliği ve çatlak konumuna bağlı olarak birinci kritik burkulma yükünün Euler burkulma yüküne göre değişimi	70
Şekil 4.12. Tek çatlak içeren her iki ucu mafsallı kolon	71
Şekil 4.13. Her iki ucu mafsallı kolon için çatlak derinliği ve çatlak konumuna bağlı olarak birinci kritik burkulma yükünün Euler burkulma yüküne göre değişimi	72
Şekil 4.14. Tek çatlak içeren bir ucu ankastre diğer ucu serbest süreksiz değişken kesitli kolon	73
Şekil 4.15. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest, ani değişken kesitli kolon için çatlak derinliği ve çatlak konumuna bağlı olarak birinci kritik burkulma yükünün Euler burkulma yüküne göre değişimi	74
Şekil 4.16. Çift çatlak içeren bir ucu ankastre diğer ucu serbest kolon	75
Şekil 4.17. Çift çatlaklı kolona ait kritik yük değerlerinin çatlak boyu ve konumuna bağlı değişimleri	76
Şekil 4.17.(devam) Çift çatlaklı kolona ait kritik yük değerlerinin çatlak boyu ve konumuna bağlı değişimleri	77
Şekil 4.17.(devam) Çift çatlaklı kolona ait kritik yük değerlerinin çatlak boyu ve konumuna bağlı değişimleri	78
Şekil 4.18. Tek çatlaklı Timoshenko kirişi	79
Şekil 4.19. Tek çatlaklı Timoshenko kirişinin 1. doğal frekansının çatlak yeri ve çatlak boyutlarına bağlı değişimi	80
Şekil 4.20. Tek çatlaklı Timoshenko kirişinin 2. doğal frekansının çatlak yeri ve çatlak boyutlarına bağlı değişimi	81
Şekil 4.21. Tek çatlaklı Timoshenko kirişinin 3. doğal frekansının çatlak yeri ve çatlak boyutlarına bağlı değişimi	81

SİMGELER DİZİNİ

ΣM	Toplam moment
∂	Birim şekil değiştirme
λ	Doğal frekans
σ	Gerilme
ν	Poisson oranı
ρ	Yoğunluk
σ_0	Orantı sınır gerilme değeri
$[B]$	Eleman şekil değiştirme yerdeğiştirme matrisi
$[G]$	Global eleman geometrik rijitlik matrisi
$[g]_e$	Lokal geometrik rijitlik matrisi
$[H]$	Şekil Fonksiyonları vektörü
$[K]$	Global eleman rijitlik matrisi
$[K]_{cr}$	Çatlaktan dolayı meydana gelen rijitlik matrisi
$[k]_e$	Lokal eleman rijitlik matrisi
$[K]_{wcr}$	Çatlak içeren yapının rijitlik matrisi
$[M]_e$	Eleman kütle matrisi
$\{u\}$	Hız vektörü
A	Kesit alanı
A_y	A noktasına etkiyen y yönündeki mesnet tepkisi
b_1	Birinci çatlak mesafesinin çubuk boyuna oranı
b_2	İkinci çatlak mesafesinin çubuk boyuna oranı
B_y	B noktasına etkiyen y yönündeki mesnet tepkisi
C_i	İntegral sabitleri
E	Elastisite modülü
F	Tekil kuvvet
H_i	Hermite şekil fonksiyonları
I	Eylemsizlik momenti
i	Eylemsizlik yarıçapı
J	Şekil değiştirme enerjisi salıverinim oranı
K	Gerilme şiddeti faktörü
L_B	Burkulma boyu
M	Eğilme momenti
n	Narinlik oranı
N_i	Lineer şekil fonksiyonları
P_{kr}	Burkulmaya neden olan kritik yük
q_i	Düğüm deplasmanları
r	Çatlak derinliği
R	Eğrilik yarıçapı
T	Kinetik enerji
U_e	Şekil değiştirme enerjisi
V	Kesme kuvveti

1. GİRİŞ

Bir yapı veya makine elemanının seçimi yapılırken dikkat edilmesi gereken üç karakteristik nokta vardır. Bunlar mukavemet, rijitlik ve stabilitedir. Stabilité analizinde amaç şekil değiştirmiş sistemin denge konumunun kararlı olup olmadığını araştırmak ve kararlı denge konumunu oluşturan şartları gerçekleştirmektir. Stabilité kavramı katı cisimler mekaniğinde, çökmeler karşısında yapıların güvenilirliğinden emin olmayı sağlayacak temel bir problemi temsil eder (Iyengar, 1988).

Mühendislik yapıları çalışma süresince çatlaklar gibi yapısal kusurlara neden olan bozucu etkilere maruz kalır. Bu kusurların güvenlik ve yük taşıma kapasitesi üzerindeki etkileri yapısal elemanların tasarımında dikkate alınmalıdır. Yapısal elemanların yük taşıma kapasitesi genellikle burkulma olgusuyla ilgilidir. Çatlak içeren bir yapının burkulma ve dinamik davranışıyla kusursuz bir yapınıninki arasında oldukça önemli farklar vardır. Elemanlarda meydana gelen çatlak, yapının rijitliğinde değişime neden olduğundan sistemin dinamik özelliklerini değiştirir. Diğer bir deyişle, çatlak, yapının titreşim analizindeki doğal frekans ve vektörlerinde değişimlere neden olur. Yapının rijitliğindeki değişim stabilité özelliklerinin de değişimine neden olacaktır. Bu da çatlağın yapıdaki burkulma kritik yük değerini değiştireceği anlamına gelir. Çatlakların etkilerinin bilinmesi, yapılardaki hasarların belirlenmesinde önemli bir unsur olup yapıların tasarımında zorunludur. Örneęin, yapının doğal frekansındaki azalma yapı içerisinde bir kusur olduğuna işaret eder (Cawley ve Adams, 1979). Ek olarak, çatlaktan dolayı kritik burkulma yükünde meydana gelen azalmanın belirlenmesi özellikle inşaat, makine ve uzay mühendisliklerinde yapıların onarım ve tasarımında oldukça önemlidir. Çatlak içeren kirişlerin analizi için birçok araştırmacı tarafından hazırlanan modeller değişik mühendislik problemlerine uygulanmış ve önerilmiştir (Ari-Gur ve Elishakoff 1990; Gurel ve ark., 2006; Kısa ve Gürel, 2000; Kısa ve Gürel, 2005; Kısa ve Gürel, 2006). Bu çalışmada ilk önce, çatlak içeren bir kolonun stabilité ve titreşim problemi

analitik olarak analiz edilmiş, daha sonra sonlu elemanlar metodu ile nümerik sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların doğruluğu yapılan deneylerle gösterilmiştir. Analitik ve nümerik analizde çatlaktan dolayı meydana gelen direngenlik düşümü lineer bir yay olarak modellenmiştir. Çatlağı modellemek için kullanılan yayın rijitlik katsayıları, lineer elastik kırılma mekaniği teorileri kullanılarak hesaplanmıştır.

Metodun güvenilirliği ispatlandıktan sonra özellikle kusurlu yapıların dinamik karakteristikleri (doğal frekans ve vektörler) gözden geçirilmiş ve yapıda bir kusurun oluşup oluşmadığının önceden tespit edilebileceği gösterilmiştir. Ayrıca yapılan analizler sonucunda;

- Değişik sınır şartlarına sahip çatlak içeren kolonların burkulma analizinde sonlu elemanlar metodunun basit ve etkili bir yöntem olduğu,
- Çatlağın kolonların burkulma yükleri üzerindeki etkilerinin çatlağın derinliği ve konumuna bağlı olduğu,
- Çatlak konumunun sınır şartlarına bağlı olarak değişik etkiler yarattığı,
- Eğilme momentinin burkulma yükü üzerinde etkili olduğu görülmüştür.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Makine ve inşaat mühendislikleri uygulamalarında narin yapıların kullanımının gün geçtikçe yoğun bir şekilde artması nedeniyle çubuk elemanlarının titreşim ve burkulma problemlerinin çözümü önem kazanmıştır. Özellikle makinelerin birçok yapısal parçaları, çatlaklara neden olan yorulma gerilmesi limitleri aralığında işletilmektedir. Oluşan bu çatlaklar makinelerin düzgün çalışmasını engeller. Yeterince erken fark edilemeyen çatlaklar, makinelerin doğal frekanslarında düşüme neden olduğundan yapının düşük frekansta rezonansa gelmelerine neden olabilir. Çatlak içeren yapı elemanlarının dinamik karakteristiklerinin analizi, teknolojik gelişme içerisinde önemli bir problemidir.

Elastik bir yapının kritik yük kavramı ilk olarak Euler (1744) tarafından incelenmiştir. Euler değişik sınır şartlarına sahip kolonlardaki kritik yük değerlerini hesaplamıştır. Young (1807), başlangıçtaki eğrilik, başlangıçtaki eğilme momenti ve uygulanan yükün eksantrikliği gibi faktörlerin, yapıların stabilite davranışı üzerindeki etkilerini araştırmıştır. Kirshoff (1859), stabilite teorisini geometrik olarak lineer olmayan büyük yer değiştirmeler için geliştirmiş ve eliptik integral terimleriyle, yer değiştirme eğrilerinin çözümünü gerçekleştirmiştir. Kusursuz yapıların burkulma ve titreşim problemi birçok araştırmaya konu olmuştur (Timoshenko ve Gere, 1961; Li, 2002; Li ve ark., 1995; Li ve ark., 1994; Li ve ark. 1992; Fan ve ark., 2001). Çatlak içeren narin çubukların stabilite ve titreşim problemleri üzerine yapılan çalışmalar bütün mühendislik branşlarında uygulamalar bulmaktadır. Uzun süreli çalışma şartları, uygulanan tersinir yüklemeler, mekanik titreşimler, aerodinamik yüklemeler veya akustik yorulmalar gibi çeşitli faktörler çatlakların meydana gelmesine neden olur. Çatlak içeren yapıların burkulma ve titreşim problemi sınırlı sayıdaki araştırmacılar tarafından incelenmiştir (Özen ve ark., 2005; Kısa, 2004; Kısa ve Brandon, 1997; Kısa ve Brandon, 2000; Özen ve ark.,

2006; Papadopoulus ve Dimarogonas, 1987; Shifrin ve Ruotolo, 1999; Takahashi, 1998).

Anifantis ve Dimarogonas (1983), yatay ve düşey yüklemeler altındaki çatlak içeren kolonların burkulma problemi üzerine çalışmıştır. Liebowitz ve ark. (1967) aksenal bası yüküne maruz çatlaklı ve çatlaksız çubukları deneysel olarak incelemiştir. Yapılan çalışma, narinlik oranı 250 den küçük ve aksenal olarak bası yüküne maruz çubukların maksimum yük taşıma kapasitelerinin, yapılarda çatlak gibi hasarlar olduğu zaman aniden düştüğünü göstermiştir. Liebowitz ve Claus (1968), daha önce elde ettikleri deneysel sonuçlar için teorik bir temel oluşturmuş ve kusurlu çubuklar için, gerilme yığılması faktörü ve kırılma direncine bağlı bir hata kriteri önermişlerdir. Okamura ve ark. (1969), tek çatlak içeren narin bir çubuğun rijitlik düşüşünün yük taşıma kapasitesi ve kırılma yükü üzerindeki etkilerini araştırmak için, çatlak içeren kirişlerin rijitliği ve gerilme yığılma faktörü arasında bir bağıntı kullanmıştır. Çalışmaları, eksantrik bası yüküne maruz çubuklarda çatlağın yapının yük taşıma kapasitesini düşürdüğünü ve yanal yer değiştirmeyi arttırdığını göstermektedir. Yanal yer değişimindeki bu artış çatlak kesitindeki eğilme momentini arttırmaktadır. Ibrahim (1995), değişik sınır şartlarına sahip çatlak içeren çubukların davranışlarını transfer matris metodunu kullanarak incelemiş ve değişik çatlak uzunluklarına sahip tek ve çift yüzlü çatlak içeren çubukların kritik burkulma yüklerini hesaplamıştır.

Kısa ve ark. (1998), çatlak içeren bir Timoshenko kirişinin titreşim karakteristiklerini analiz etmişlerdir. Çalışmalarında Sonlu Elemanlar Metodu ve Bileşen Mod Sentezi (Component Mode Synthesis) kullanmışlar ve çatlak içeren yapıyı çatlak kesitinden lineer bir elastik yayla birbirlerine bağlı iki parçaya bölmüşlerdir. Bu yayın rijitlik katsayılarını, kırılma mekaniğindeki şekil değiştirme enerjisi salıverim oranı ifadesini ve gerilme yığılma faktörünü kullanarak hesapladıkları esneklik matrisinin tersini alarak elde etmişlerdir. Sonlu Elemanlar modelinde kullandıkları eleman Timoshenko kirişi olup her bir eleman iki düğüm ve her bir düğümünde üç serbestlik derecesine sahiptir.

Kısa ve Brandon (2000), çatlak içeren kirişlerin özdeğer probleminin çözümü için bir sonlu eleman modeli geliştirmişlerdir. Çalışmalarında, çatlak içeren yapıyı modellemek için Sonlu Elemanlar Metodu, Bileşen Mod Sentezi ve Lineer Elastik Kırılma Mekaniği Teorilerinden yararlanmışlardır. Buldukları sonuçlar daha önceki literatürde bulunan sonuçlarla uygunluk göstermiştir.

Kim ve Kim (2000) çalışmalarında, sabit veya değişken yüklemelere maruz her iki ucu ankastre bir Timoshenko kirişinde bulunan bir çatlağın yapının dinamik stabilitesi üzerindeki etkilerini araştırmışlardır. Bir çatlağın, yapının enine titreşim frekanslarında ve mod şeklinde değişimlere neden olduğunu belirlemiş ve buna ek olarak çatlağın kirişin stabilite karakteristikleri üzerindeki değişimlerini de incelemişlerdir. Çalışmalarında çatlağı matematiksel olarak modellemek için eğilme momenti ve kesme kuvvetleri terimlerini içeren şekil değiştirme enerjisi ifadesi türetilmiş, ayrıca sistemi sayısal olarak modellemek için Sonlu elemanlar Metodu kullanılmıştır. Sonuç olarak çatlağın derinliğinin ve konumunun sistemin stabilite davranışı üzerindeki etkileri gösterilmiştir.

Zheng ve Fan (2001), keyfi sayıda enine açık çatlağa sahip Timoshenko kirişinin doğal frekanslarını hesaplayacak yeni bir yöntem üzerine çalışmışlardır. Bu yeni yöntemin özü, keyfi sayıda enine çatlağa sahip bir Timoshenko kirişi için özellikle geliştirilmiş olan bir çeşit genişletilmiş Fourier serisinin kullanımınıdır. Geleneksel Fourier serilerinden farklı olarak değiştirilmiş Fourier serileri iç geometrik süreksizliklerin bir fonksiyonu olarak tanımlanmıştır. Değiştirilmiş Fourier serileri oluşturularak çatlak içeren bir Timoshenko kirişi normal olarak incelenmiş, böylece problem basite indirgenmiştir. Bu yöntem kullanılarak, çözüm için sadece standart lineer özdeğer problemi analizinin yeterli olduğunu göstermişlerdir. Tüm formüller matris formunda oluşturulmuş ve bilgisayar yardımıyla seri bir şekilde çözümlenmiştir.

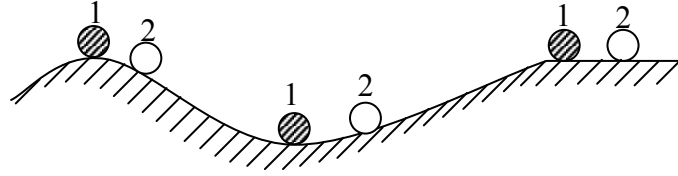
Kishen ve Kumar (2004), değişik yükleme durumlarına sahip çatlak içeren çubuk ve kirişlerin burkulma özelliklerini Sonlu Elemanlar Metodunu kullanarak araştırmış ve çatlağın varlığının çubukların kritik yüklerini azalttığını ve bu azalma

miktarının kısa çatlak ve uzun kolonlar için küçük olduğunu gözlemlemişlerdir. Gurel ve Kisa (2005), düşey yüklemelere maruz ilerlemeyen bir kenar çatlağına sahip prizmatik narin bir çubuğun burkulma davranışını incelemişlerdir. Bu çalışmalarında çatlak kesitini dönel bir yayla modellemişlerdir. Bu dönel yaya ait rijitliği lineer elastik kırılma mekaniği kullanarak bulmuşlardır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Genel Stabilite

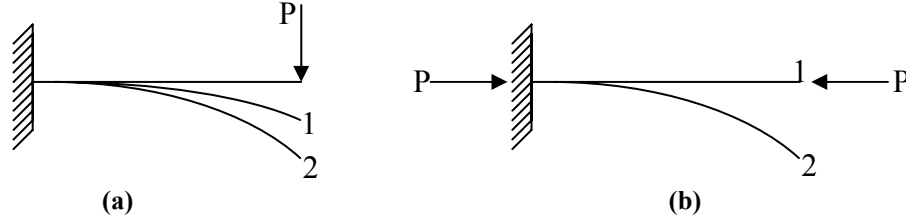
Stabilite probleminde amaç şekil değiştirmiş sistemin denge konumunun kararlı olup olmadığını araştırmak ve kararlı denge konumunu oluşturan şartları gerçekleştirmektir. Yapının emniyetini tehlikeye sokan ana nedenlerden biri yapının denge konumunun kararsız olmasıdır. Bu bağlamda kararsız denge konumunda olan sistemleri boyut ve yük bakımından düzelterek, dengesini kararlı duruma getirmek gerekir. Stabilite kavramının basit bir biçimde açıklanması ve kolayca algılanması bakımından aşağıdaki şekil ve yorum iyi bir örnek olmaktadır (Şekil 3.1) (Köksal ve Köksal, 1996).



Şekil 3.1. Değişik yüzeylerde denge konumları

Konveks yüzeyde (1) denge konumundaki bilye (1)' e çok yakın (2) konumuna getirildiğinde, bir daha (1) konumuna dönemeyeceği ve ilk konumundan gittikçe uzaklaşacağı görülür. Bu durumda (1) denge konumuna, kararsız denge konumu adı verilir. Bu durum yapının (1) denge konumundan geçici bir etkiyle veya yapı kusuru gibi herhangi bir nedenle ayrıldığında, sonradan bu neden ortadan kaldırılrsa bile, bir daha ilk denge konumuna geri gelmeyeceğini ve yıkılıp harap olacağını gösterir. Konkav yüzeyde ise, bilye her durumda ilk (1) denge konumuna geri döner. Bu durumda (1) konumuna, kararlı denge konumu denir. Düz yüzeyde (1) denge konumunun yanındaki (2) durumuna bilyenin getirilmesi halinde bilyenin (1) denge konumuna geri dönmediği veya ondan uzaklaşmadığı, sonuç olarak (2) konumunun,

ayrı ikinci bir denge konumu olduğu görülür. Bu durumda (1) denge konumuna, limit denge konumu veya farksız denge konumu denir. Bir diğer örnek olarak P yükünün etkisiyle eğilme ve kesme etkisine maruz bir konsol kiriş (Şekil 3.2.a) gösterilebilir. Konsol kiriş yük altında (1) denge konumunu alır.



Şekil 3.2. Konsol kirişte denge durumu

Kiriş geçici etkilerle (2) denge konumuna getirilip, sonra bu geçici etkiler kaldırıldığında tekrar (1) konumuna geri döner. O halde (1) konumu, kararlı denge konumudur. Kirişin yıkılması, dış yük etkisiyle kirişin en çok zorlanan kesitinde oluşacak olan maksimum gerilmenin, kirişi oluşturan malzemesinin emniyet gerilmesini aşmasıyla olur. Yani bir gerilme problemi. Şekil 3.2.(b)' de ise, konsol kiriş dış P basınç yükü etkisi altındadır. Bu durumda (1) denge konumunda olan kiriş bir nedenle (2) konumuna getirildikten sonra geçici etki kaldırılırsa, yükün şiddetine ve kirişin narınlığına bağlı olarak yukarıda belirtilen üç durumdan biri oluşur. Eğer (2) konumundan, (1) denge konumuna geri dönerse, P yükünün bu değeri için (1) konumu “kararlıdır” denir. Aksi durumda (1) denge konumuna “kararsızdır” denir. Sonuç olarak gerilme probleminde denge konumu arandığı halde, stabilite probleminde denge konumu belli olup, önemli soru, bunun kararlı olup olmadığıdır.

Bir yapı veya makine elemanının seçimi yapılırken dikkat edilmesi gereken üç karakteristik nokta vardır. Bunlar mukavemet, rijitlik ve stabiledir (Popov, 1990). Çekme kuvvetine karşı oldukça dayanıklı gözükten ince plaklar, basınç nakledeken oldukça zayıftır. Yanal olarak takviye edilmemiş dar kirişler, uygulanan basınç kuvveti altında yana doğru bükülerek kırılır. Denizaltı tekneleri ve vakum tankları gibi elemanlar uygun tarzda imal edilmedikleri takdirde dış basınç altında burkulur ve orijinal şeklinden çok farklı bir geometriye sahip olurlar. İnce cidarlı bir tüp burulmaya maruz bırakıldığında ince kağıt gibi buruşur, füzelerin ince kaplamaları

da ateşlemelerin bazı kademelerinde yüksek basınç kuvvetlerine maruz kaldıklarından burkulabilirler (Popov, 1990). Bu ve benzeri problemler mühendisliğin boyutlandırma işlerinde üzerinde titizlikle durulması gereken konulardır. Bundan başka, yüklü elemanların burkulması genellikle aniden olan olaylardır (Popov, 1990). Bu bakımdan birçok yapı elemanları stabilite bozukluğu nedeniyle çökme gibi büyük tehlikeyle karşı karşıyadır.

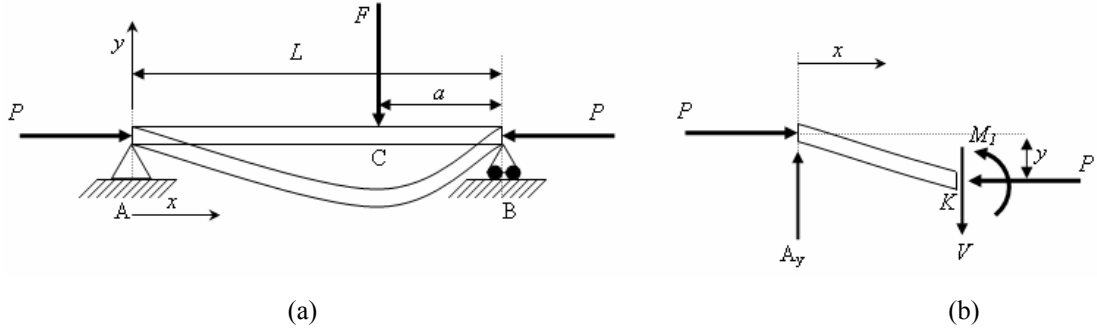
Kararsız denge durumlarının yapı sistemlerinde ortaya çıkaracakları büyük yer ve şekil değiştirmeler, sistemleri görevlerini yapamayacak duruma düşüreceklerinden hiç arzulamazlar ve bu nedenle yapı sistemlerinin dengelerinin hangi koşullar altında kararsız hale geldiklerinin araştırılarak saptanması gerekir.

Teknoloji ilerledikçe, uygulamada yüksek mukavemetli malzemelerin kullanılması, hesap tekniklerinin geliştirilmesi, emniyet katsayılarının çok büyük seçilmesi sonucu yapıların çok narin olarak oluşturulmasına, bu ise imal edilen yapı ve makine elemanlarında stabilite probleminin bir çok durumda ön plana çıkmasına neden olmuş ve stabilite olayı önem kazanmıştır.

Stabilitede denge konumunun karalı olup olmadığına ve kararlılığı belirleyecek durumların tespitine, analitik ve sayısal çözüm yöntemleriyle varılabilir. Ek olarak deneysel ve amprik formüller ile bu iki yöntemin küçük farklarla değiştirilmesi şeklinde oluşturulan çalışmalar söylenebilir. Bu çalışmada analitik çözümlerden statik yöntemi ile sayısal çözümlerden sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak stabilite probleminin çözümleri yapılmıştır.

3.2. Çubuk, Kiriş ve Kolonların Stabilite Problemlerinin Analitik Çözümü

Basınca maruz bir çubuğun tekil bir kuvvet tarafından eğilmesini göz önüne alalım (Şekil 3.3.(a)).



Şekil 3.3. a) Dış eksenel yük ve tekil kuvvete maruz bir çubuk b) Şekil değiştirmiş çubuk üzerine etkileyen kesit zorları

İlk olarak şekil değiştirmemiş sistem için (Şekil 3.3.(a)) statik denge denklemleri yazılarak reaksiyon kuvvetleri hesaplanır:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow -F * (L - a) + B_y * L = 0 \Rightarrow B_y = F \frac{(L - a)}{L} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow A_y + B_y - F = 0 \Rightarrow A_y = F \frac{a}{L} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Daha sonra kiriş herhangi bir x mesafesinden kesilir (Şekil 3.3.(b)) ve bunun serbest cisim diyagramı çizilerek statik denge denklemleri uygulanır:

$$\sum M_K = 0 \Rightarrow M_1 - P * y - A_y * x = 0 \Rightarrow M_1 = Py + F \frac{ax}{L} \quad (3.2)$$

M_1 : 1. bölge için eğilme momentidir. Sağ taraftaki kısmın statik dengesinden:

$$M_2 = Py + F \frac{(L - a)(L - x)}{L} \quad (3.3)$$

M_2 : 2. bölge için eğilme momentidir. Böylece eğilme momenti ifadesi elde edilir. (3.2) ve (3.3) nolu denklemler (3.4) eşitliğindeki Bernoulli-Euler formülleri (Popov 1990) ile yeniden düzenlenir

$$M = -\frac{EI}{R} \quad (3.4)$$

(3.4) nolu eşitlikte; R : eğrilik yarıçapı, E : Elastisite Modülü ve I : eylemsizlik momentini belirtmektedir. Küçük çökmeler için:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (3.5)$$

olduğu göz önüne alınarak yeniden düzenlenince:

$$x < L - a \quad \text{için} \quad EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M = -Py - F \frac{ax}{L} \quad (3.6)$$

$$x > L - a \quad \text{için} \quad EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M = -Py - F \frac{(L-a)(L-x)}{L} \quad (3.7)$$

elde edilir. Burada $F \frac{a}{L}$; x kesitindeki kesme kuvvetini (V) göstermektedir. Ayrıca kolona uygulanmış bir M_0 momenti de var ise, genel halde (3,6) denklemi aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir;

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} + Py = -Vx + M_0 \quad (3.8)$$

(3.8) nolu denklem x' e göre bir kere türetilirse;

$$EI \frac{d^3y}{dx^3} + P \frac{dy}{dx} = -V \quad (3.9)$$

halini alır. (3.9) nolu denklemde x' e göre bir daha türetilirse;

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} + P \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad (3.10)$$

şeklinde (3,10) denklemi elde edilir. Denklem (3,10), P ve y ye bağlı dördüncü dereceden, non-linear ve homojen bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemle stabilite probleminin denge denklemleri, tek bir diferansiyel denkleme indirgenmiş olur. Sistemde burkulmanın oluştuğu durum için $y \neq 0$ olmalıdır. Dolayısıyla (3.10) nolu denklemde görülen diferansiyel denklemin $y \neq 0$ için bir çözümünü aramak gerekir. $EI =$ sabit olduğundan, denge konumuna yakın denge durumunu belirtecek olan P yükünün sadece farklı değerleri için bulunur. Bu tip problemlere öz değer problemleri denir. En küçük öz değere Kritik Yük denir ve P_{kr} ile gösterilir. (3.10) denkleminde:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (3.11)$$

dönüşümü yapılsa;

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (3.12)$$

şeklinde sabit katsayılı homojen diferansiyel denklem elde edilir. Bu dördüncü mertebeden diferansiyel denklemin genel çözümü için aşağıdaki dönüşümler yapılır:

$$\begin{aligned} y &= e^{mx} \\ \frac{dy}{dx} &= m e^{mx} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= m^2 e^{mx} \\ \frac{d^3 y}{dx^3} &= m^3 e^{mx} \\ \frac{d^4 y}{dx^4} &= m^4 e^{mx} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Bu dönüşümler çözümü istenen diferansiyel denkleme uygulanınca;

$$m^4 e^{mx} + k^2 m^2 e^{mx} = 0 \Rightarrow m^2 e^{mx} (m^2 + k^2) = 0$$

$$e^{mx} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = +ik \\ m_2 = -ik \\ m_3 = m_4 = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

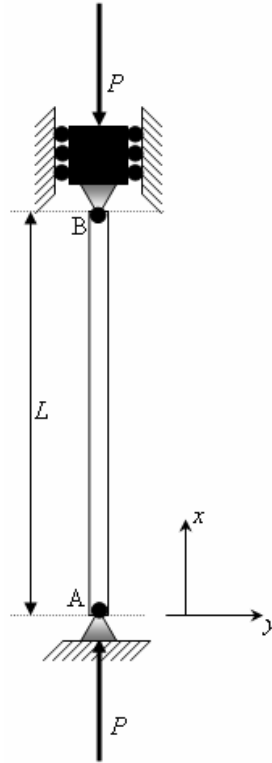
elde edilir. $m_{1,2}$ kompleks eşlenik köklerine ve $m_{3,4}$ eşit gerçekte köklerine sahip diferansiyel denklemin genel çözümü aşağıdaki gibidir:

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4 \quad (3.15)$$

Denklem (3.15) deki C katsayıları integrasyon sabitleridir ve sınır şartları ile bulunur.

3.2.1. İki ucu mafsallı kolon için burkulma yükünün analitik çözümü

Şekil 3.4. deki gibi her iki ucu mafsallı kolonda sınır şartları aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.4. Her iki ucu mafsallı kolon

A noktasında:

$$\text{Çökme oluşmaz: } x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (3.16)$$

$$\text{Moment oluşmaz: } x = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} EI = -M = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (3.17)$$

B noktasında:

$$\text{Çökme oluşmaz: } x = L \Rightarrow y = 0 \quad (3.18)$$

$$\text{Moment oluşmaz: } x = L \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (3.19)$$

A ve B noktasındaki sınır şartları ile (3.15) nolu denklem yeniden düzenlenince: (3.16) eşitliğinde verilen sınır şartından;

$$y = C_1 \sin k * 0 + C_2 \cos k * 0 + C_3 * 0 + C_4 = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \quad (3.20)$$

(3.17) eşitliğindeki sınır şartını uygulamadan önce (3.15) denkleminin x' e göre türevleri alınır:

$$\begin{aligned} y &= C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4 \\ y' &= kC_1 \cos kx - kC_2 \sin kx + C_3 \\ y'' &= -k^2 C_1 \sin kx - k^2 C_2 \cos kx \end{aligned} \quad (3.21)$$

(3.17), (3.18) ve (3.19) sınır şartlarından;

$$y'' = -k^2 C_1 \sin k * 0 - k^2 C_2 \cos k * 0 \Rightarrow k^2 C_2 = 0 \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} y &= C_1 \sin k * L + C_2 \cos k * L + C_3 * L + C_4 = 0 \\ \Rightarrow C_1 \sin kL + C_2 \cos kL + C_3 L + C_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} y'' &= -k^2 C_1 \sin k * L - k^2 C_2 \cos k * L = 0 \\ \Rightarrow -k^2 C_1 \sin kL - k^2 C_2 \cos kL &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

$k^2 \neq 0$ olduğundan (3.22) denkleminde $C_2 = 0$ olarak bulunur. Bulunan bu değerle (3.20) nolu denklem düzenlenince $C_4 = 0$ bulunur. Bu bulunanlarla (3.24) nolu denklem düzenlenince $C_1 \sin kL = 0$ bulunur. Eğer $C_1 \sin kL = 0$ olursa (3.23) nolu denklemden $C_3 = 0$ olarak bulunur. $C_1 \sin kL = 0$ durumunda $C_1 \neq 0$ olmak zorundadır, aksi takdirde bütün katsayılar sıfır olur ve burkulma oluşmaz. Bu durumda; $\sin kL = 0$ olmalıdır. Bu şartı sağlayan eşitlik aşağıdaki gibidir:

$$kL = n\pi \Rightarrow k^2 L^2 = n^2 \pi^2 \quad (3.25)$$

(3.25) denkleminde (3.11) deki dönüşüm uygulanarak P_{kr} değeri bulunur:

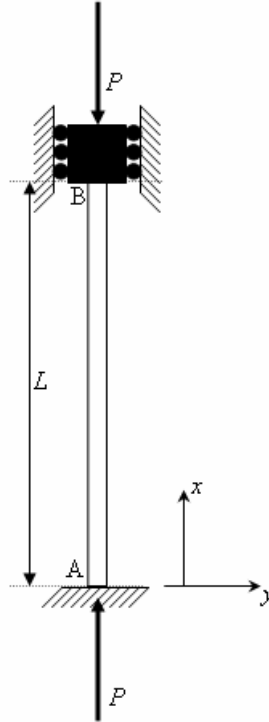
$$\frac{P}{EI} L^2 = n^2 \pi^2 \Rightarrow P_{kr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

$$n = 1 \Rightarrow P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (3.26)$$

olarak bulunur.

3.2.2. İki ucu ankastre kolon için burkulma yükünün analitik çözümü

Şekil 3.5. deki gibi her iki ucu ankastre kolonda sınır şartları aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.5. Her iki ucu ankastre kolon

A noktasında:

$$\text{Çökme oluşmaz: } x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (3.27)$$

$$\text{Dönme oluşmaz: } x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3.28)$$

B noktasında:

$$\text{Çökme oluşmaz: } x = L \Rightarrow y = 0 \quad (3.29)$$

$$\text{Dönme oluşmaz: } x = L \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3.30)$$

A ve B noktasındaki sınır şartları ile (3.15) nolu denklem yeniden düzenlenince; (3.27) ve (3.28) eşitliklerinde verilen sınır şartlarından;

$$y = C_1 \sin k * 0 + C_2 \cos k * 0 + C_3 * 0 + C_4 = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \quad (3.31)$$

$$y' = kC_1 \cos k * 0 - kC_2 \sin k * 0 + C_3 = 0 \Rightarrow C_1 k + C_3 = 0 \quad (3.32)$$

ve bunlara ek olarak (3.29) ve (3.30) eşitliklerinde verilen sınır şartlarından;

$$\begin{aligned} y &= C_1 \sin k * L + C_2 \cos k * L + C_3 * L + C_4 = 0 \\ \Rightarrow C_1 \sin kL + C_2 \cos kL + C_3 L + C_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} y' &= kC_1 \cos k * L - kC_2 \sin k * L + C_3 = 0 \\ \Rightarrow kC_1 \cos kL - kC_2 \sin kL + C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

elde edilir. (3.31) denkleminde; $C_4 = -C_2$ ve (3.32) denkleminde; $C_3 = -kC_1$ elde edilen bu eşitliklerle (3.34) denklemleri yeniden düzenlenince;

$$\begin{aligned} kC_1 \cos kL - kC_2 \sin kL - kC_1 &= 0 \\ \Rightarrow C_2 &= \frac{C_1(\cos kL - 1)}{\sin kL} \end{aligned} \quad (3.35)$$

(3.35) denkleminde elde edilen eşitlikle (3.33) denklemini yeniden düzenlenince;

$$\begin{aligned}
C_1 \sin kL + \frac{C_1(\cos kL - 1)}{\sin kL} \cos kL + -kC_1L - \frac{C_1(\cos kL - 1)}{\sin kL} &= 0 \\
C_1 \left(\sin kL + \frac{(\cos kL - 1)}{\sin kL} \cos kL - kL - \frac{(\cos kL - 1)}{\sin kL} \right) &= 0 \\
C_1 \left(\sin kL - kL + \frac{(\cos kL - 1)^2}{\sin kL} \right) &= 0 \\
C_1(2 - 2 \cos kL - kL \sin kL) &= 0 \\
C_1 \neq 0 \Rightarrow 2 - 2 \cos kL - kL \sin kL &= 0
\end{aligned} \tag{3.36}$$

(3.36) nolu denklemde gerekli trigonometrik dönüşümler yapıldıktan sonra;

$$\sin \frac{kL}{2} \left(\sin \frac{kL}{2} - \frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2} \right) = 0 \tag{3.37}$$

(3.37) nolu denklemin iki adet çözümü vardır

1. Çözüm; $\sin \frac{kL}{2} = 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{kL}{2} &= n\pi \\
k^2 L^2 = 4n^2 \pi^2 &\Rightarrow P_{kr1} = \frac{4n^2 \pi^2 EI}{L^2}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

2. Çözüm; $\sin \frac{kL}{2} - \frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2} = 0$

$$\tan \frac{kL}{2} = \frac{kL}{2}$$

bu bir transfer fonksiyondur ve kökü bize gerekli değeri verir:

$$\frac{kL}{2} = 4,493 \Rightarrow P_{kr2} = \frac{80,46EI}{L^2} \tag{3.39}$$

$P_{kr1} < P_{kr2}$ olduğundan P_{kr1} değeri alınır. Yani

$$n = 1 \Rightarrow P_{kr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (3.40)$$

olarak bulunur.

3.2.3. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kolon için burkulma yükünün analitik çözümü

Şekil 3.6. daki gibi bir ucu ankastre diğer ucu serbest kolonun sınır şartları aşağıdaki gibidir.

A noktasında:

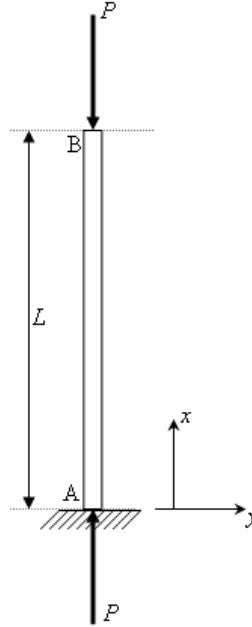
$$\text{Çökme oluşmaz: } x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (3.41)$$

$$\text{Dönme oluşmaz: } x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3.42)$$

B noktasında:

$$\text{Moment oluşmaz: } x = L \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (3.43)$$

$$\text{Kesme kuvveti oluşmaz: } x = L \Rightarrow \frac{d^3 y}{dx^3} + k^2 \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3.44)$$



Şekil 3.6. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kolon

A noktasındaki sınır şartlarının (3.27) ve (3.28) deki şartlarla aynı olduğu görülmektedir. Dolayısıyla elde edilecek eşitliklerde (3.31) ve (3.32) nolu

denklemlerdeki gibi olacaktır. (3.43) ve (3.44) nolu denklemlerdeki sınır şartları sırasıyla (3.15) denkleminde uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
 y'' &= -k^2 C_1 \sin k * L - k^2 C_2 \cos k * L = 0 \\
 \Rightarrow -k^2 C_1 \sin kL - k^2 C_2 \cos kL &= 0 \\
 y &= C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4 \\
 y' &= kC_1 \cos kx - kC_2 \sin kx + C_3 \\
 y'' &= -k^2 C_1 \sin kx - k^2 C_2 \cos kx \\
 y''' &= -k^3 C_1 \cos kx + k^3 C_2 \sin kx
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

elde edilir. Bu türev ifadeleri kullanılarak (3.44) denklemlerindeki sınır şartları aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$\begin{aligned}
 -k^3 C_1 \cos k * L + k^3 C_2 \sin k * L + k^2 (kC_1 \cos k * L - kC_2 \sin k * L + C_3) &= 0 \\
 -k^3 C_1 \cos kL + k^3 C_2 \sin kL + k^3 C_1 \cos kL - k^3 C_2 \sin kL + k^2 C_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

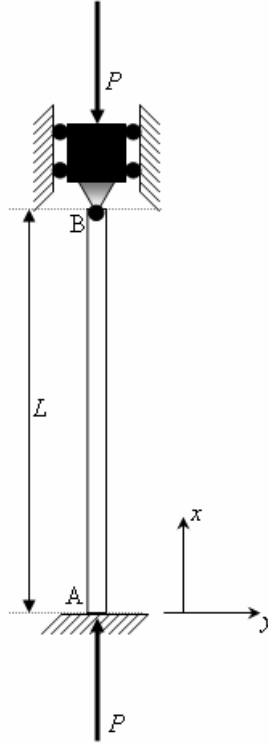
(3.46) nolu denklemden $k \neq 0 \Rightarrow C_3 = 0$ olarak bulunur ve (3.32) nolu denkleme uygulanınca $C_1 = 0$ olarak bulunur. Bu katsayılarla (3.45) nolu denklem yeniden düzenlenince: $C_2 \cos kL = 0$ olur, eğer $C_2 = 0$ olursa (3.31) nolu denklemden $C_4 = 0$ olur. Bütün katsayıların sıfır olması durumunda çökme dolayısı ile burkulma olmayacağından $C_2 \neq 0$ olmak zorundadır, bu durumda çözüm aşağıdaki gibi:

$$\begin{aligned}
 \cos kL = 0 &\Rightarrow kL = \frac{n\pi}{2} \\
 n = 1 \text{ için } P_{kr} &= \frac{\pi^2 EI}{4L^2}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

bulunur.

3.2.4. Bir ucu ankastre diğer ucu mafsallı kolon için burkulma yükünün analitik çözümü

A noktasındaki sınır şartları (3.27) ve (3.28) deki gibi, B noktasındaki sınır şartları ise (3.18) ve (3.19) nolu denklemlerdeki gibidir. Bu sınır şartlarına karşılık gelen eşitlikler daha önceki bölümlerdeki gibi olduğundan yeniden hesaplanmayacaktır. (3.31) nolu denklemden; $C_2 = -C_4$, (3.32) nolu denklemden; $C_3 = -C_1 k$ olarak bulunur. (3.24) nolu denklemden ise; $C_2 = -C_1 \frac{\sin kL}{\cos kL}$ olarak bulunur. (3.32) nolu denklemden eşitlik kullanılarak: $C_4 = C_1 \frac{\sin kL}{\cos kL}$ olarak bulunur. Bulunan bu eşitliklerle (3.23) nolu denklem yeniden düzenlenirse;



Şekil 3.7. Bir ucu ankastre diğer ucu mafsallı kolon

$$C_1 \sin kL + \left(-C_1 \frac{\sin kL}{\cos kL} \right) \cos kL + (-C_1 k)L + \left(C_1 \frac{\sin kL}{\cos kL} \right) = 0$$

$$C_1 \sin kL - C_1 \sin kL - C_1 kL + C_1 \frac{\sin kL}{\cos kL} = 0$$

$$C_1(-kL \cos kL + \sin kL) = 0$$

$$C_1 \neq 0 \Rightarrow -kL \cos kL + \sin kL = 0$$

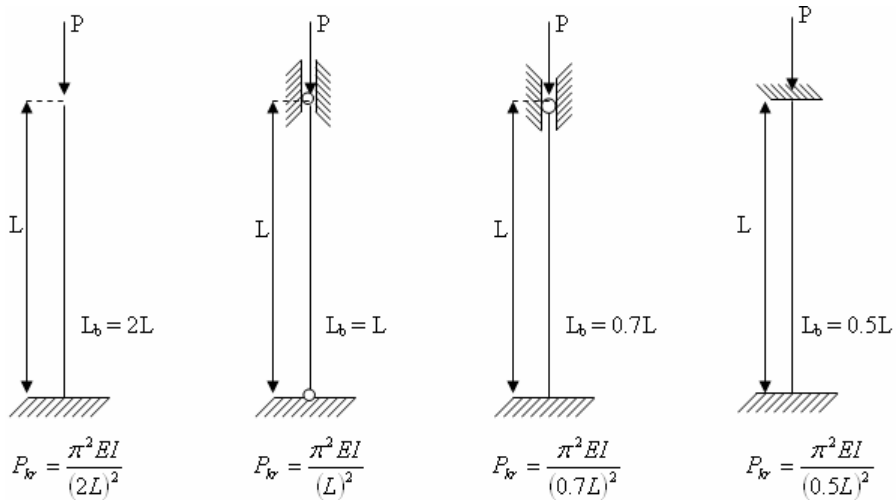
$$kL = 4,493 \Rightarrow \frac{P}{EI} L^2 = 20,16$$

$$P_{kr} = \frac{20,16EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0,7L)^2} \quad (3.48)$$

olarak bulunur.

3.2.5. Euler burkulma formülleri

Eksenel normal kuvvetin basınç olduğu doğru eksenli çubuk hali gözönüne alınır; bu durumda mesnetleme şekline göre dört tip çubuk vardır. Şekil 3.8.' de sırası ile bir ucu ankastre diğer ucu serbest, iki ucu mafsallı, bir ucu ankastre diğer ucu kayıcı mafsallı ve son olarak iki ucu ankastre bağlı olan çubuk tipleri görülmektedir. Bu çubukların her biri eksenel P basınç yükü ile yüklüdür. P basınç kuvvetinin belirli bir değerden büyük olması halinde denge durumu kararsız olur ve herhangi bir bozucu etki ile çubuk doğrusal konumdan ayrılarak aniden eğrisel bir konuma geçer. Her tip çubuk için P_{kr} ile gösterilen ve kritik yük olarak adlandırılan bir yük hesaplanabilir. Öyle ki $P < P_{kr}$ ise denge durumu kararlı, $P = P_{kr}$ ise denge durumu farksız, $P > P_{kr}$ ise denge durumu kararsız olarak adlandırılır. Her bir çubuk için daha önceki bölümlerde hesaplanan P_{kr} değerleri Şekil 3.8.' de verilmiştir (Bakioğlu ve ark., 2000).



Şekil 3.8. Değişik sınır şartlarına sahip çubuklar için P_{kr} değerleri

Bu formüllere Euler formülleri denir. Burada E malzemenin Elastisite modülünü, I ise aksi söylenmedikçe kesitin minimum eylemsizlik momentini göstermektedir. Çeşitli mesnetleme durumlarında çubuk boyu ile ilişkisi Şekil 3.8.' de verilen, L_b ile gösterilen ve adına burkulma boyu denilen bir büyüklüğün tanımı ile yukarıdaki dört formül yerine aşağıdaki gibi tek bir Euler formülü kullanılır (Marzani ve Viola, 2003). Buna göre P kritik yükünü veren Euler formülü:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L_b^2} \quad (3.49)$$

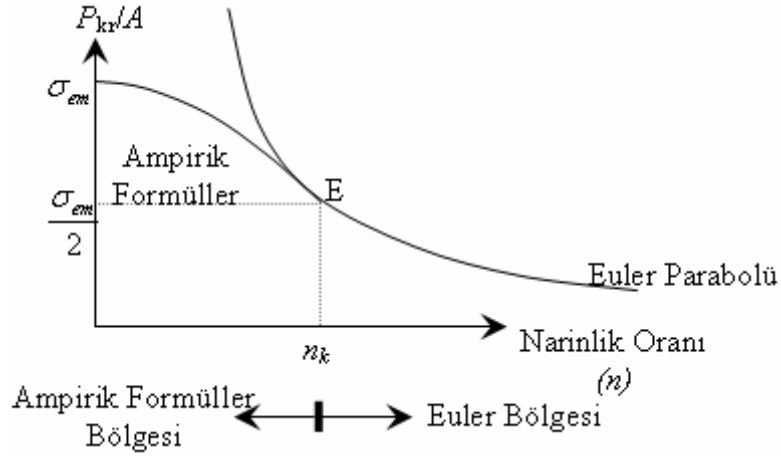
olarak yazılabilir.

3.2.6. Narinlik oranı

Euler formülünün (3.49) geçerlilik bölgesi için bazı sınırlamalar vardır. Bunun için ilk olarak A kesit alanı olmak üzere, minimum eylemsizlik yarıçapı $i = \sqrt{I/A}$ hesaplanır. Buradan çubuğun narinlik katsayısı:

$$n = \frac{L_b}{i} \quad (3.50)$$

ile hesaplanır. Genel olarak bir malzeme için Hooke yasasının geçerlilik sınırını gösteren ve malzemenin elastisite modülü ve orantı sınırına bağlı olan “ n_{kr} ” gibi bir kritik narinlik katsayısı belirlenir. (3.50) nolu denklemden hesaplanan n narinlik katsayısı n_{kr} ' den büyük ise burkulma elastik bölgededir denir ve Euler formülleri geçerli olur. Bu hale Euler hali denir. Eğer $n < n_{kr}$ ise burkulma elastik olmayan bölgede olur. Bu durumda gerilme orantılılık sınırını aşacağı için Hooke yasası geçerli değildir. Dolayısıyla Euler formülü kullanılamaz. Elastik olmayan bölgede burkulma halinde pek çok malzeme için deney sonuçlarına dayanan (ampirik) formüller türetilmiştir (Şekil 3.9) (Bakioğlu ve ark., 2000).



Şekil 3.9. Elastik çubuklarda narinlik oranı ve gerilme değeri arasındaki bağıntı

Bu çalışmada sadece elastik burkulma ($n > n_{kr}$) durumu göz önüne alınarak problemler analiz edilmiştir.

3.3. Sonlu Elemanlar Yöntemi

İnsanlar çevresinde meydana gelen olayları veya karşılaştıkları problemleri çoğu zaman kolayca kavrayıp doğrudan çözemezler. Bu yüzden karmaşık bir problem, bilinen ve kavranması daha kolay olan alt problemlere ayrılarak daha anlaşılır bir hale getirilir. Oluşturulan alt problemler çözülüp birleştirilerek esas problemin çözümü yapılabilir. Mühendislik uygulamalarında problemlerin karmaşıklığı sebebiyle genellikle problemlerin tam çözümü yerine, kabul edilebilir seviyede yaklaşık çözümü tercih edilir. Öyle problemler vardır ki, tam çözüm imkansız kabul edilerek yaklaşık çözüm tek yol olarak benimsenir.

Sonlu elemanlar metodu, karmaşık olan problemlerin daha basit alt problemlere ayrılarak her birinin kendi içinde çözülmesiyle tam çözümün bulunduğu bir çözüm şeklidir. Metodun üç temel niteliği vardır. İlk olarak, geometrik olarak karmaşık olan çözüm bölgesi sonlu elemanlar olarak adlandırılan geometrik olarak basit alt bölgelere ayrılır. İkincisi her elemandaki, sürekli fonksiyonların, cebirsel polinomların lineer kombinasyonu olarak tanımlanabileceği kabul edilir. Üçüncü kabul ise, her eleman içinde sürekli olan tanım denklemlerinin belirli noktalardaki

(düğüm noktaları) değerlerinin elde edilmesinin problemin çözümünde yeterli olmasıdır. Kullanılan yaklaşım fonksiyonları interpolasyon teorisinin genel kavramları kullanılarak polinomlardan seçilir. Seçilen polinomların derecesi ise çözülecek problemin tanım denkleminin derecesine ve çözüm yapılacak elemandaki düğüm sayısına bağlıdır (Taşgetiren ve Topçu, 1998).

Sürekli bir ortamda alan değişkenleri (gerilme, yer değiştirme, basınç, sıcaklık vs.) sonsuz sayıda farklı değere sahiptir. Eğer sürekli bir ortamın belirli bir bölgesinin de aynı şekilde sürekli ortam özelliği gösterdiği biliniyorsa, bu alt bölgede alan değişkenlerinin değişimi sonlu sayıda bilinmeyen olan bir fonksiyon ile tanımlanabilir. Bilinmeyen sayısının az veya çok olmasına göre seçilen fonksiyonlar lineer veya yüksek mertebeden olabilir. Sürekli ortamın alt bölgeleri de aynı karakteristik özellikleri gösteren bölgeler olduğundan, bu bölgelere ait alan denklem takımları birleştirildiğinde bütün sistemi ifade eden denklem takımı elde edilir. Denklem takımının çözümü ile sürekli ortamdaki alan değişkenleri sayısal olarak elde edilir.

Sonlu elemanlar yöntemini diğer sayısal yöntemlerden üstün kılan başlıca özellikler şöyle sıralanabilir:

- Kullanılan sonlu elemanların boyutlarının ve şekillerinin değişkenliği nedeni ile ele alınan bir cismin geometrisi tam olarak temsil edilebilir.
- Bir veya birden çok delik, çatlak veya köşeleri olan bölgeler kolaylıkla incelenebilir.
- Değişik malzeme veya geometrik özellikleri bulunan cisimler incelenebilir.
- Sebep sonuç ilişkisine ait problemler, genel dirençlilik matrisi ile birbirine bağlanan genelleştirilmiş kuvvetler ve yer değiştirmeler cinsinden formüle edilebilir. Sonlu elemanlar yönteminin bu özelliği problemlerin anlaşılmasını ve çözülmesini hem mümkün kılar hem de basitleştirir.
- Sınır şartları kolayca uygulanabilir.

Sonlu elemanlar yönteminin temel prensibi, öncelikle bir elemana ait sistem özelliklerini içeren denklemlerin çıkartılıp tüm sistemi temsil edecek şekilde birleştirilerek sisteme ait lineer denklem takımının elde edilmesidir.

Liu (1997), sonlu elemanlar metodunda izlenecek yolu aşağıdaki gibi sıralamıştır:

- Cismin sonlu elemanlara bölünmesi,
- İnterpolasyon fonksiyonlarının seçimi,
- Eleman direngenlik (rijitlik) matrisinin oluşturulması,
- Sistem direngenlik matrisinin hesaplanması,
- Sisteme etki eden kuvvetlerin bulunması,
- Sınır şartlarının belirlenmesi,
- Sistem denklemlerinin çözümü.

3.3.1. Cismin sonlu elemanlara bölünmesi

Sonlu elaman probleminin çözümünde ilk adım eleman tipinin belirlenmesi ve çözüm bölgesinin elemanlara ayrılmasıdır. Çözüm bölgesinin geometrik yapısı belirlenerek bu geometrik yapıya en uygun gelecek elemanlar seçilmelidir. Seçilen elemanların çözüm bölgesini temsil etme oranında, elde edilecek neticeler gerçek çözüme yaklaşmış olur. Sonlu elemanlar yönteminde kullanılan elemanlar boyutlarına göre tek boyutlu elemanlar, iki boyutlu elemanlar, dönel elemanlar ve üç boyutlu elemanlar olmak üzere dört kısma ayrılır.

3.3.2. İnterpolasyon fonksiyonlarının seçimi

İnterpolasyon fonksiyonu alan değişkeninin eleman üzerindeki değişimini temsil etmektedir. İnterpolasyon fonksiyonunun belirlenmesi seçilecek eleman tipine ve çözülecek denklemin derecesine bağlıdır. Ayrıca interpolasyon fonksiyonları şu şartları sağlamalıdır.

- İnterpolasyon fonksiyonunda bulunan alan değişkeni ve alan değişkeninin en yüksek mertebeden bir önceki mertebeye kadar olan kısmi türevleri eleman sınırlarında sürekli olmalıdır.

- İnterpolasyon fonksiyonunda bulunan alan değişkenlerinin bütün türevleri, eleman boyutları limitte sıfıra gitse bile alan değişkenini karakterize etmelidir.

- Seçilen interpolasyon fonksiyonu koordinat değişiminden etkilenmemelidir.

Hem yukardaki şartları sağlamaları hem de türev ve integral almadaki kolaylığından dolayı interpolasyon fonksiyonu olarak genelde polinomlar seçilir. Seçilen polinom, yukarıdaki şartların gerçekleşmesi için uygun terimler içermelidir.

3.3.3. Eleman direngenlik matrisinin oluşturulması

Eleman direngenliğinin bulunması, elemana etki eden dış etkenler ile alan değişkenleri arasında bir ilişki kurmak anlamına gelir. Eleman direngenliği elde ederken çözülecek problemin konusu, alan değişkeni, seçilen eleman tipi, seçilen interpolasyon fonksiyonu, eleman özelliklerini elde ederken kullanılan yöntem gibi pek çok faktör göz önüne alınır. Etki eden bu faktörlere göre de eleman direngenliğinin elde edilmesinde değişik yollar izlenir.

3.3.4. Sistem direngenlik matrisinin hesaplanması

Sistem direngenlik matrisi sistemin düğüm sayısı ve her düğümdeki serbestlik derecesine bağlı olarak belirlenir. Elemanlar için hesaplanan direngenlik matrisleri, eleman üzerindeki düğüm noktalarına bağlı olarak genel direngenlik matrisinde ilgili satır ve sütununa yerleştirilir. Farklı elemanlar tarafından ortak kullanılan düğümlerdeki terimler genel direngenlik matrisinin ilgili satır ve sütununda üst üste toplanmalıdır. Elemanların düğüm numaralaması bir sistematığe göre yapılırsa genel direngenlik matrisinde elemanlar diagonal üzerinde üst üste toplanır. Genelde direngenlik matrisi simetriktir.

3.3.5. Sisteme etki eden kuvvetlerin bulunması

Bir problemde sisteme etki edebilecek kuvvetler şunlardır:

Tekil Kuvvetler: Tekil kuvvetler hangi elemanın hangi düğümüne ne yönde etki ediyorsa genel kuvvet vektöründe etki ettiği düğümüne karşılık gelen satıra yerleştirilir.

Yayıllı Kuvvetler: Bu kuvvetler bir kenar boyunca veya bir alanda etkili olurlar.

Kütle Kuvvetleri: Eleman hacmi için geçerli olan merkezkaç kuvveti ve ağırlık kuvvetleri gibi kuvvetlerdir.

3.3.6. Sınır şartlarının belirlenmesi

Her problemin tabii veya yapay sınır şartları vardır. Sınır şartları, cismin çeşitli kısımlarındaki elastik yer değiştirmelerini ölçülebileceği bir referans sağlar. Sınır şartları; cismin belli bir parçasında veya parçalarındaki yer değiştirmelerinde yapılan kısıtlamalardır denilebilir. Bu kısıtlamalar, cismin rijit yer değiştirmesine engel olur ve uygulanan dış yüklerin cisim tarafından taşınmasını sağlar.

3.3.7. Sistem denklemlerinin çözümü

Çözüm için, sistem sınır şartları da göz önüne alınarak direngenlik matrisinin tersini almak yeterlidir.

3.4. Stabilite Probleminin Sonlu Elemanlar Metoduyla Modellenmesi:

Stabilite probleminin sonlu elemanlar metoduyla modellemeye başlamadan önce çubuk ve kiriş sistemlerinde rijitlik ve geometrik rijitlik matrislerinin hesaplanması gerekir (Smith ve Griffiths, 1988):

3.4.1. Çubuk eleman için rijitlik matrisi

Eleman rijitlik matrisi doğal koordinat sisteminde bulunacak olup ilk olarak elemanın orta noktasına göre herhangi bir noktasının yerini -1 ile 1 değerleri arasında bulmak için r ile gösterilen bir doğal koordinat sistemi tanımlanır.

$$r = \frac{2}{x_2 - x_1}(x - x_1) - 1$$

$$\frac{dr}{dx} = \frac{2}{x_2 - x_1} \quad (3.51)$$

$$\frac{dx}{dr} = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

bu koordinat sistemi yardımıyla doğrusal şekil fonksiyonları tanımlanır:

$$N_1 = \frac{1-r}{2}$$

$$N_2 = \frac{1+r}{2} \quad (3.52)$$

Şekil fonksiyonları tanımlandıktan sonra elemandaki yer değiştirmeler, düğüm deplasmanları q_1 ve q_2 ye bağlı olarak şu şekilde elde edilir:

$$u = N_1 q_1 + N_2 q_2 = \left(\frac{1-r}{2}\right)q_1 + \left(\frac{1+r}{2}\right)q_2$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{-q_1 + q_2}{2} \quad (3.53)$$

Şekil değiştirme – yer değiştirme ilişkisi kullanılarak:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (3.54)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı zincir kuralı $\left(\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{dx}\right)$ ve (3.51) nolu denklemde elde edilen bağıntılar kullanılarak;

$$\varepsilon = \frac{-q_1 + q_2}{2} \frac{2}{(x_2 - x_1)} \quad (3.55)$$

bağıntısı elde edilir. Şekil değiştirme bağıntısı matris formülasyonu ile;

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\} \quad (3.56)$$

şeklinde yazılır. $[B]$ (1x2), boyutlarında olup eleman şekil değiştirme – yer değiştirme matrisi olarak adlandırılır ve

$$[B] = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

şeklindedir. Elde edilen bu bağıntılarla Hooke yasası yeniden düzenlenince;

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= E\{\varepsilon\} \\ \{\sigma\} &= E[B]\{q\} \end{aligned} \quad (3.58)$$

(3.58) denklemi elde edilir. Bu ifadeler çubuk eleman için şekil değiştirme enerjisi ifadesinde yerleştirilince;

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \int \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} A dx \\ U_e &= \frac{1}{2} \int_L \{q\}^T [B]^T E [B] \{q\} A dx \end{aligned} \quad (3.59)$$

elde edilir. (3.51) denklemindeki $x - r$ dönüşümü $\left(dx = \frac{L}{2} dr\right)$ ile, boyu (L) ve $-L \leq 1 \leq L$ olmak üzere eleman şekil değiştirme enerjisi (Kasımzade, 2004):

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \{q\}^T ALE \frac{1}{L^2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \{q\} \\ U_e &= \frac{1}{2} \{q\}^T \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{q\} \end{aligned} \quad (3.60)$$

olur. “ k ” rijitliğine sahip bir yaydaki şekil değiştirme enerjisi

$$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} xkx \quad (3.61)$$

şeklinde verilebilir. Bu eşitlik ile (3.60) nolu denklem karşılaştırılırsa çubuk eleman bir yay olarak kabul edilebilir ve eleman rijitlik matrisi $[k]_e$;

$$[k]_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

şeklinde olur.

3.4.2. Kiriş eleman için rijitlik matrisleri

Rijitlik matrislerinin oluşturulması için doğal koordinat sistemi aşağıdaki gibi tanımlanır (Souma 1999):

$$x = \frac{1-r}{2}x_1 + \frac{1+r}{2}x_2 = \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_2-x_1}{2}r \quad (3.63)$$

Kiriş eleman için kullanılan şekil fonksiyonları lineer özellik göstermezler. Çubuk elemandan farklı olarak düğüm değerlerinin ve düğümlerdeki eğilmelerin hesaba katılması gerekmektedir. Buda Hermite Şekil fonksiyonları ile mümkündür (Taşgetiren ve Topçu, 1998). Şekil fonksiyonları, düğüm noktalarında kiriş probleminin doğasından gelen eğim ve çökme şartlarını sağlayacak şekilde yazılınca aşağıdaki hale gelir:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{4}(1-r)^2(2+r) = \frac{1}{4}(2-3r+r^3) \\ H_2 &= \frac{1}{4}(1-r)^2(r+1) = \frac{1}{4}(1-r-r^2+r^3) \\ H_3 &= \frac{1}{4}(1+r)^2(2-r) = \frac{1}{4}(2+3r-r^3) \\ H_4 &= \frac{1}{4}(1+r)^2(r-1) = \frac{1}{4}(-1-r+r^2+r^3) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Şekil fonksiyonları tanımlandıktan sonra elemandaki çökme, şekil fonksiyonları yardımıyla;

$$v(r) = H_1 v_1 + H_2 \left(\frac{dv}{dr} \right)_1 + H_3 v_2 + H_4 \left(\frac{dv}{dr} \right)_2 \quad (3.65)$$

şeklinde yazılır. Zincir kuralı ve x ve r arasındaki $\frac{dx}{dr} = \frac{L}{2}$ ilişkisi kullanılarak çökme ifadesi düzenlenince;

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dr} &= \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dr} = \frac{L}{2} \frac{dv}{dx} \\ v(r) &= H_1 q_1 + \frac{L}{2} H_2 q_2 + H_3 q_3 + \frac{L}{2} H_4 q_4 \end{aligned} \quad (3.66)$$

bağıntısı elde edilir. Matris formunda ise;

$$\{v\} = [H]\{q\} \quad (3.67)$$

şeklinde yazılır. Şekil fonksiyonları vektörü:

$$[H] = \begin{bmatrix} H_1 & \frac{L}{2} H_2 & H_3 & \frac{L}{2} H_4 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

şeklindedir. Bu ifadeler kiriş eleman için şekil değiştirme enerjisi ifadesinde yerleştirilince;

$$U_e = \frac{1}{2} \int_L \left[EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 + P \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (3.69)$$

elde edilir. (3.66) denklemindeki bağıntı düzenlenince;

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{2}{L} \frac{dv}{dr} \\ \frac{d^2 v}{dx^2} &= \frac{4}{L^2} \frac{d^2 v}{dr^2} \end{aligned} \quad (3.70)$$

elde edilir. Bu bağıntılar (3.67) denkleminde ki çökme ifadesiyle düzenlenince;

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 &= \{q\}^T \frac{4}{L^2} \left[\frac{dH}{dr}\right]^T \left[\frac{dH}{dr}\right] \{q\} \\ \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 &= \{q\}^T \frac{16}{L^4} \left[\frac{d^2H}{dr^2}\right]^T \left[\frac{d^2H}{dr^2}\right] \{q\} \end{aligned} \quad (3.71)$$

elde edilir. Bu denklemlerin çözümü için Hermite Şekil fonksiyonlarının bir ve ikinci türevlerinin hesaplanması gerekir:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dH}{dr}\right] &= \left[\frac{1}{4}(-3+3r^2), \frac{L}{2} \frac{1}{4}(-1-2r+3r^2), -\frac{1}{4}(-3+3r^2), \frac{L}{2} \frac{1}{4}(-1+2r+3r^2)\right] \\ \left[\frac{d^2H}{dr^2}\right] &= \left[\frac{3}{2}r, \frac{L}{2} \frac{(-1+3r)}{2}, -\frac{3}{2}r, \frac{L}{2} \frac{(1+3r)}{2}\right] \end{aligned} \quad (3.72)$$

x – r dönüşümü $\left(dx = \frac{L}{2} dr\right)$ ile, boyu (L) ve $-L \leq 1 \leq L$ olmak üzere eleman şekil değiştirme enerjisi yeniden aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \frac{L}{2} \{q\}^T \int_{-1}^1 \left(EI \frac{16}{L^4} \left[\frac{d^2H}{dr^2}\right]^T \left[\frac{d^2H}{dr^2}\right] + P \frac{4}{L^2} \left[\frac{dH}{dr}\right]^T \left[\frac{dH}{dr}\right] \right) dr \{q\} \\ U_e &= U_1 + U_2 \\ U_1 &= \frac{1}{2} \{q\}^T EI \frac{8}{L^3} \int_{-1}^1 \left[\frac{d^2H}{dr^2}\right]^T \left[\frac{d^2H}{dr^2}\right] dr \{q\} \\ U_2 &= \frac{1}{2} \{q\}^T P \frac{2}{L} \int_{-1}^1 \left[\frac{dH}{dr}\right]^T \left[\frac{dH}{dr}\right] dr \{q\} \end{aligned} \quad (3.73)$$

$[k]_e$ eleman rijitlik matrisi ve $[g]_e$ eleman için geometrik rijitlik matrisi olmak üzere;

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} \{q\}^T [k]_e \{q\} \\ U_2 &= \frac{1}{2} \{q\}^T [g]_e \{q\} \end{aligned} \quad (3.74)$$

şeklinde yazılır. Eleman rijitlik matrisi ;

$$[k]_e = EI \frac{8}{L^3} \int_{-1}^1 \left[\frac{d^2 H}{dr^2} \right]^T \left[\frac{d^2 H}{dr^2} \right] dr \quad (3.75)$$

şeklinde olur.

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{d^2 H}{dr^2} \right]^T \left[\frac{d^2 H}{dr^2} \right] dr = \int_{-1}^1 \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \frac{3}{2}r \\ \frac{L(-1+3r)}{2} \\ \frac{3}{2}r \\ \frac{L(1+3r)}{2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \frac{3}{2}r, \frac{L(-1+3r)}{2}, -\frac{3}{2}r, \frac{L(1+3r)}{2} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{9}{4}r^2 & \frac{3}{8}r(-1+3r)L & -\frac{9}{4}r^2 & \frac{3}{8}r(1+3r)L \\ \frac{3}{8}r(-1+3r)L & \left(\frac{-1+3r}{4}\right)^2 L^2 & -\frac{3}{8}r(-1+3r)L & \frac{-1+9r^2}{16}L^2 \\ -\frac{9}{4}r^2 & -\frac{3}{8}r(-1+3r)L & \frac{9}{4}r^2 & -\frac{3}{8}r(1+3r)L \\ \frac{3}{8}r(1+3r)L & \frac{-1+9r^2}{16}L^2 & -\frac{3}{8}r(1+3r)L & \left(\frac{1+3r}{4}\right)^2 L^2 \end{array} \right] \end{array} \right) dr \quad (3.76)$$

Bu integral alınıp, sınır şartları uygulanınca (3.76) denklemini;

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc} \frac{9}{4} \frac{r^3}{3} & \frac{3}{8} \left(\frac{-r^2}{2} + r^3 \right) L & -\frac{9}{4} \frac{r^3}{3} & \frac{3}{8} \left(\frac{r^2}{2} + r^3 \right) L \\ \frac{3}{8} \left(\frac{-r^2}{2} + r^3 \right) L & \frac{1}{16} (r - 3r^2 + 3r^3) L^2 & -\frac{3}{8} \left(\frac{-r^2}{2} + r^3 \right) L & \frac{-r + 3r^3}{16} L^2 \\ -\frac{9}{4} \frac{r^3}{3} & -\frac{3}{8} \left(\frac{-r^2}{2} + r^3 \right) L & \frac{9}{4} \frac{r^3}{3} & -\frac{3}{8} \left(\frac{r^2}{2} + r^3 \right) L \\ \frac{3}{8} \left(\frac{r^2}{2} + r^3 \right) L & \frac{-r + 3r^3}{16} L^2 & -\frac{3}{8} \left(\frac{r^2}{2} + r^3 \right) L & \frac{1}{16} (r + 3r^2 + 3r^3) L^2 \end{array} \right]_{-1}^1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{4}L & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4}L \\ \frac{3}{4}L & \frac{1}{2}L^2 & -\frac{3}{4}L & \frac{1}{4}L^2 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4}L & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4}L \\ \frac{3}{4}L & \frac{1}{4}L^2 & -\frac{3}{4}L & \frac{1}{2}L^2 \end{bmatrix}$$

şeklini alır. Bulunan bu ifadeyle (3.75) denklemi düzenlenince eleman rijitlik matrisi:

$$[k]_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

şeklinde olur. Geometrik rijitlik matrisi ise:

$$[g]_e = P \frac{2}{L} \int_{-1}^1 \left[\frac{dH}{dr} \right]^T \left[\frac{dH}{dr} \right] dr \quad (3.78)$$

şeklinde olacaktır.

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{dH}{dr} \right]^T \left[\frac{dH}{dr} \right] dr = \Omega$$

$$\Omega = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(-3+3r^2) \\ \frac{L}{2} \frac{1}{4}(-1-2r+3r^2) \\ -\frac{1}{4}(-3+3r^2) \\ \frac{L}{2} \frac{1}{4}(-1+2r+3r^2) \end{bmatrix} \left[\left[\frac{1}{4}(-3+3r^2), \frac{L}{2} \frac{1}{4}(-1-2r+3r^2), -\frac{1}{4}(-3+3r^2), \frac{L}{2} \frac{1}{4}(-1+2r+3r^2) \right] \right]$$

$$\Omega = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{9}{16}(1-2r^2+r^4) & \frac{3}{16}(1+2r-4r^2+3r^4)\frac{L}{2} & -\frac{9}{16}(1-2r^2+r^4) & \frac{3}{16}(1-2r-4r^2+2r^3+3r^4)\frac{L}{2} \\ & \left(\frac{-1-2r+3r^2}{8}\right)L^2 & -\frac{3}{16}(1+2r-4r^2+3r^4)\frac{L}{2} & \frac{1}{16}(1-10r^2+9r^4)\frac{L^2}{2} \\ & & \frac{9}{16}(1-2r^2+r^4) & -\frac{3}{16}(1-2r-4r^2+2r^3+3r^4)\frac{L}{2} \\ & & & \left(\frac{-1+2r+3r^2}{8}\right)L^2 \end{bmatrix} dr$$

SIMETRIK

Bu integral alınıp, sınır şartları uygulanınca;

$$\Omega = \begin{bmatrix} \frac{9}{16}\left(r-\frac{2}{3}r^3+\frac{r^5}{5}\right) & \frac{3}{16}\left(r+r^2-\frac{4}{3}r^3+\frac{3}{10}r^5\right)\frac{L}{2} & -\frac{9}{16}\left(r-\frac{2}{3}r^3+\frac{1}{5}r^5\right) & \frac{3}{16}\left(r-r^2-\frac{4}{3}r^3+\frac{1}{2}r^4+\frac{3}{5}r^5\right)\frac{L}{2} \\ & \frac{1}{64}\left(r+2r^2-\frac{2}{3}r^3-3r^4+\frac{9}{5}r^5\right)L^2 & -\frac{3}{16}\left(r+r^2-\frac{4}{3}r^3+\frac{3}{5}r^5\right)\frac{L}{2} & \frac{1}{16}\left(r-\frac{10}{3}r^3+\frac{9}{5}r^5\right)\frac{L^2}{2} \\ & & \frac{9}{16}\left(r-\frac{2}{3}r^3+\frac{1}{5}r^5\right) & -\frac{3}{16}\left(r-r^2-\frac{4}{3}r^3+\frac{1}{2}r^4+\frac{3}{5}r^5\right)\frac{L}{2} \\ & & & \frac{1}{64}\left(r-2r^2-\frac{2}{3}r^3+3r^4+\frac{9}{5}r^5\right)L^2 \end{bmatrix}_{-1}^1$$

SIMETRIK

$$\Omega = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{20}L & -\frac{3}{5} & \frac{1}{20}L \\ \frac{1}{20}L & \frac{1}{15}L^2 & -\frac{1}{20}L & -\frac{1}{60}L^2 \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{20}L & \frac{3}{5} & -\frac{1}{20}L \\ \frac{1}{20}L & -\frac{1}{60}L^2 & -\frac{1}{20}L & \frac{1}{15}L^2 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

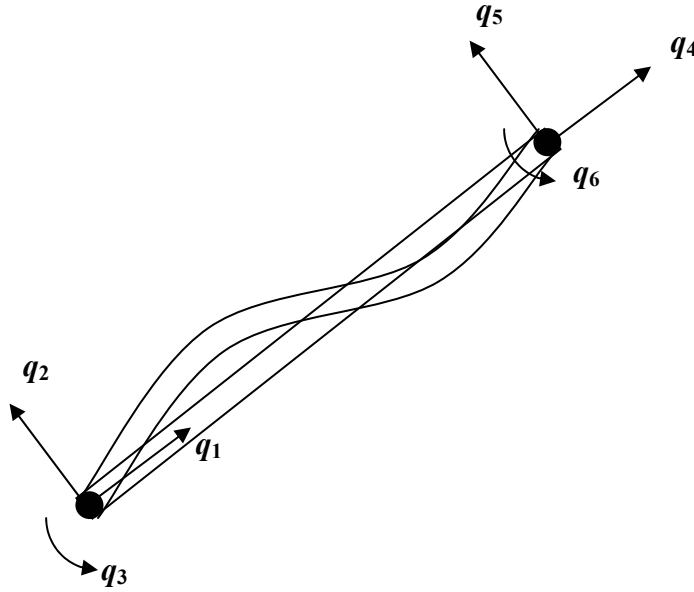
olur. Bulunan bu denklemle (3.78) denklemi düzenlenince geometrik rijitlik matrisi:

$$[g]_e = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{10}L & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10}L \\ \frac{1}{10}L & \frac{2}{15}L^2 & -\frac{1}{10}L & -\frac{1}{30}L^2 \\ -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10}L & \frac{6}{5} & -\frac{1}{10}L \\ \frac{1}{10}L & -\frac{1}{30}L^2 & -\frac{1}{10}L & \frac{2}{15}L^2 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

olur.

3.4.3. Düzlem çerçeve elemanı için rijitlik matrisleri

Düzlem çerçevelerin kirişlerden olan farkı aksenal yük ve deplasmanlara sahip olmalarının yanında yatay duran kirişlere nazaran düzlem içinde farklı doğrultulara da sahip olmasıdır (Şekil 3.10).



Şekil 3.10. Düzlem çerçeve elemanında düğüm deplasmanları

q_2, q_3, q_5, q_6 deformasyonları kirişte ele alınan serbestlik derecesinin aynıdır. q_1, q_4 ise çubuk elemandaki yer değiştirmelerle aynıdır. Çubuk ve kiriş elemanlardan gelen bu iki rijitlik matrisleri birleştirilir ve serbestlik derecesine göre düzenlenince düzlem çerçeve elemanın lokal eleman rijitlik matrisi ve geometrik rijitlik matrisi:

$$[k]_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

$$[g]_e = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

olarak elde edilir. Elemanın genel rijitlik matrisi, global eleman rijitlik matrisi ve geometrik rijitlik matrisi ifadelerinin toplamına eşittir.

$$[k] = [k]_e + [g]_e \quad (3.83)$$

Global formülasyon ile;

$$[K] = [K]_e + [G]_e \quad (3.84)$$

şeklinde oluşur.

3.4.4. Stabilite analizi

Elastik stabilite probleminde, burkulmaya neden olan eksenel yükün şiddeti henüz bilinmemektedir, bu yüzden seçilen herhangi bir yük şiddeti kullanılarak sayısal olarak genel rijitlik matrisi oluşturulur (Smith ve Griffiths, 1988).

Burkulmanın gerçekleşmesi için, eksenel yük sisteminin şiddeti seçilen kuvvetin şiddetinin λ katı kadar olmalıdır. Bir yapı için, \bar{P}^* 'nin başlangıç dağılımı lineer elastik analizden hesaplanmalıdır. Bu yüzden, burkulma kuvveti, \bar{P} aşağıdaki gibi verilir:

$$\bar{P} = \lambda \bar{P}^* \quad (3.85)$$

geometrik rijitlik matrisi kuvvetle orantılı olduğundan, ilk olarak:

$$[G]_e = \lambda [G]_e^* \quad (3.86)$$

oluşturulur. Burada $[G]_e^*$ uygulanan yükün birim değerleri için geometrik rijitlik matrisidir ($\bar{P}^* = 1$). Elastik rijitlik matrisi $[K]_e$ sabit olarak kalacağından;

$$\begin{aligned} \bar{P} &= ([K]_e + \lambda [G]_e^*) \bar{u} \\ ([K]_e + \lambda [G]_e^*) \bar{u} - \lambda \bar{P}^* &= 0 \end{aligned} \quad (3.87)$$

bağıntısı yazılır. Bu denklemden yer değiştirmeler:

$$\bar{u} = ([K]_e + \lambda [G]_e^*)^{-1} \lambda \bar{P}^* \quad (3.88)$$

olur. Yer değiştirmelerin sonsuza gidebilmesi için:

$$|[K]_e + \lambda [G]_e^*| = 0 \quad (3.89)$$

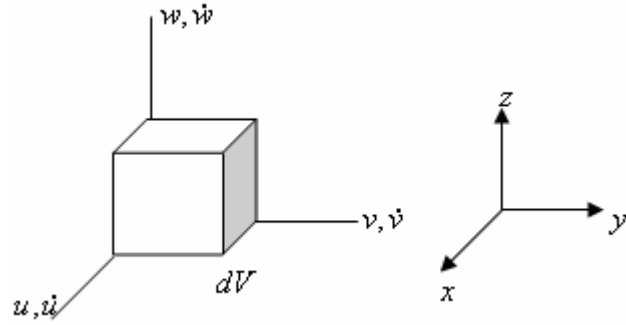
olması gerekir (Saouma, 1999). Bu bir özdeğer problemidir. λ 'nın en küçük değeri, λ_{krit} yapı için burkulma kuvvetini verir:

$$\bar{P}_{krit} = \lambda_{krit} \bar{P}^* \quad (3.90)$$

Bu çalışmamızda (3.89) denklemini Visual Fortran 6.1 ile hazırlanmış bir program ile çözülmüştür. Bu programa ait akış şeması EK 1' de verilmiştir.

3.5. Titreşim Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Modellenmesi

Titreşim probleminin modellenmesi için daha önce bulunan eleman rijitliği matrisine ek olarak kütle matrisinin hesaplanması gerekir. Kütle matrisini oluşturmak için denklem (3.91) de gösterilen cismin kinetik enerji ifadesi kullanılır (Topçu ve Taşgetiren 1998):



Şekil 3.11. Yayılmış kütleli katı cismin diferansiyel hacmi üzerinde yer değiştirme ve hız bileşenleri

$$T = \frac{1}{2} \int \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} \rho \cdot dV \quad (3.91)$$

Burada ρ yoğunluk, $\{\dot{u}\}$ ise $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ bileşenlerine sahip x noktasının hız vektörünü temsil etmektedir (Şekil 3.11.). Dolayısıyla bu matrisin transpozisini aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$\{\dot{u}\}^T = [\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}] \quad (3.92)$$

Sonlu elemanlar modelinde daha önce de belirtildiği gibi, cisim belirli sayıda elemanlara bölünerek yer değiştirmeler düğüm deplasmanları cinsinden ve şekil fonksiyonları yardımıyla;

$$\{u\} = [N]\{q\} \quad (3.93)$$

şeklinde gösterildiğinden ve dinamik analizde düğüm deplasmanları vektörü zamana bağlı olarak değiştiğinden hız vektörü benzer şekilde;

$$\{\dot{u}\} = [N]\{\dot{q}\} \quad (3.94)$$

olarak yazılabilir. Bulunan bu bağıntıyla (3.91) nolu denklem eleman bazında tekrar düzenlenince;

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T \left[\int \rho [N]^T [N] dV \right] \{\dot{q}\} \quad (3.95)$$

şeklini alır. Parantez içerisindeki ifade eleman kütle matrisini verir.

$$[m]_e = \int \rho [N]^T [N] dV \quad (3.96)$$

Burada elde edilen matris yayılmış kütle matrisi olarak adlandırılır ve seçilen şekil fonksiyonlarına bağlı olarak elde edilir.

3.5.1. Çubuk eleman için kütle matrisi

Önceki bölümde çubuk eleman için şekil fonksiyonları ve deplasmanlar (3.51) ve (3.52) nolu denklemlerde verilmişti. Bu denklemlerle ve yoğunluğun sabit olduğu kabulleri ile (3.96) nolu denklem yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned} [m]_e &= \rho \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} A \frac{L}{2} dr = \frac{AL\rho}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1-r}{2} \\ \frac{1+r}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-r}{2} & \frac{1+r}{2} \end{bmatrix} dr \\ [m]_e &= \frac{AL\rho}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \left(\frac{1-r}{2}\right)^2 & \left(\frac{1-r^2}{4}\right) \\ \left(\frac{1-r^2}{4}\right) & \left(\frac{1+r}{2}\right)^2 \end{bmatrix} dr = \frac{AL\rho}{2} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ [m]_e &= \frac{AL\rho}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Çubuk elemanı için kütle rijitlik matrisi denklem (3.97) deki gibi bulunur. (3.97) denklemlerinde A : kesit alanını, L : eleman boyunu ve ρ : yoğunluğu belirtmektedir.

3.5.2. Kiriş eleman için kütle matrisi

Kiriş elemanında şekil fonksiyonları olarak Hermite şekil fonksiyonlarının kullanıldığı daha önceki bölümlerde gösterilmiştir. Bu durumda kiriş eleman için kütle matrisi aşağıdaki gibi olur:

$$[m]_e = \frac{AL\rho}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} H_1 \\ \frac{L}{2}H_2 \\ H_3 \\ \frac{L}{2}H_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & \frac{L}{2}H_2 & H_3 & \frac{L}{2}H_4 \end{bmatrix} dr \quad (3.98)$$

(3.64) nolu denklemdeki Hermite şekil fonksiyonlarına ait ifadelerle (3.98) denklemi yeniden düzenlenip, integral işlemleri yapıldıktan sonra kiriş elemanı için kütle matrisi denklem (3.99) daki gibi oluşturulur:

$$[m]_e = \frac{AL\rho}{2} \begin{bmatrix} \frac{26}{35} & \frac{11}{105}L & \frac{9}{35} & -\frac{13}{210}L \\ \frac{11}{105}L & \frac{2}{105}L^2 & \frac{13}{210}L & -\frac{1}{70}L^2 \\ \frac{9}{35} & \frac{13}{210}L & \frac{26}{35} & -\frac{11}{105}L \\ -\frac{13}{210}L & -\frac{1}{70}L^2 & -\frac{11}{105}L & \frac{2}{105}L^2 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

3.5.3. Düzlem çerçeve elemanı için kütle matrisi

Düzlem çerçeve elemanında eleman matrislerinin yerel koordinatlarda kiriş ve çubuk elemanının toplanmasıyla oluştuğu daha önce gösterilmiştir. Bu durumda yerel koordinatlardaki kütle matrisi denklem (3.100) deki gibi olur:

$$[m]_e = \frac{AL\rho}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{78}{35} & \frac{11}{35}L & 0 & \frac{27}{35} & -\frac{13}{70}L \\ 0 & \frac{11}{35}L & \frac{2}{35}L^2 & 0 & \frac{13}{70}L & -\frac{3}{70}L^2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{27}{35} & \frac{13}{70}L & 0 & \frac{78}{35} & -\frac{11}{35}L \\ 0 & -\frac{13}{70}L & -\frac{3}{70}L^2 & 0 & -\frac{11}{35}L & \frac{2}{70}L^2 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

3.5.4. Serbest titreşim analizi

Stabilite analizinde yükler ve yüklerin uygulandığı sistemler statik durumdadır ve uygulanan yükler sistem üzerine yavaşça uygulanır ve herhangi bir çarpma etkisi göstermez. Yük aniden uygulanır veya zamanla değişen bir durum gösterirse kütle ve ivme kavramlarının göz önüne alınması gerekir. Bir katı cisim elastik olarak denge halinden uzaklaştırılıp serbest bırakılırsa, yeniden denge haline dönünceye kadar bir titreşim hareketi yapar. Cismin içinde hapsedilmiş olan şekil değiştirme enerjisi nedeniyle meydana gelen ve periyodik olarak gerçekleşen bu hareket serbest titreşim olarak adlandırılır. Birim zamanda meydana gelen salınım hareketi frekans, salınım sırasında cismin yaptığı en büyük deplasman hareketi de genlik olarak adlandırılır (Topçu ve Taşgetiren 1998). Gerçek hayatta sönümlenme etkisi gösteren birçok faktör yüzünden salınım zamanla yavaşlar ve cisim denge haline tekrar döner. Basit modellerde sönümlenme etkisi ihmal edilir ve yapının dinamik davranışı sönümsüz serbest titreşim durumunda incelenir. Bu bölümde mekanik sistemlerin sönümsüz serbest titreşimlerine ait özdeğer problemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile modellenmesi yapılmıştır.

Serbest titreşim probleminde esas amaç titreşimin özdeğeri olan $\lambda = \omega^2$ (doğal frekans) elde etmektir. Bununla beraber λ nın elde edilmesiyle titreşim modunun bir göstergesi olan özvektörler de elde edilir. Sonlu elemanlar metodunda özdeğer problemi:

$$[K]\{U\} = \lambda[M]\{U\} \quad (3.101)$$

şeklindedir. Burada hem rijitlik hem de kütle matrisleri simetrik matrisler olup, uygun sınır şartları altında denklem sistemi pozitif tanımlıdır. Pozitif tanımlı, $n \times n$ boyutlarındaki bir rijitlik matrisi için n adet gerçek özdeğer ve bunlara karşılık gelen n adet özvektör vardır. (3.101) nolu denklem yeniden düzenlenince;

$$([K] - \lambda[M])\{U\} = 0 \quad (3.102)$$

denklemini elde edilir. Sistemin sıfır çözümünden başka bir çözümünün bulunabilmesi için (3.102) nolu denklemde

$$|([K] - \lambda[M])| = 0 \quad (3.103)$$

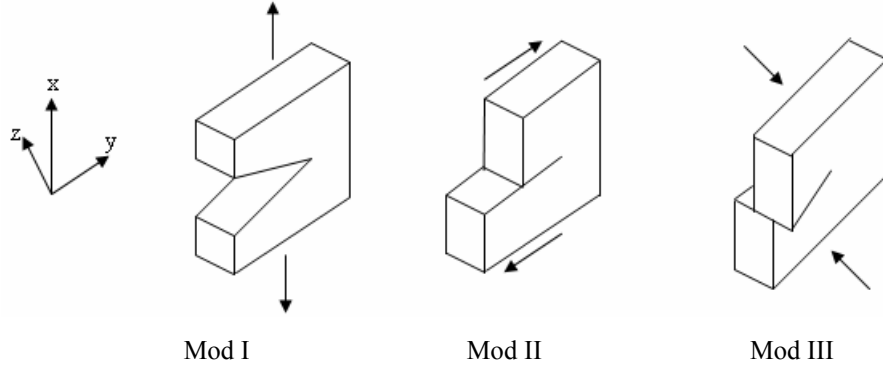
olmalıdır. Bu şartı sağlayan değerlere sistemin karakteristik polinomu denir.

3.6. Çatlaktan Dolayı Meydana Gelen Direngenliğin Bulunması

Ortam sıcaklığı, malzeme tokluğu, tasarımdan kaynaklanan çeşitli hatalar, kaynak, artık gerilmeler ve yorulma gibi birçok faktör makine elemanlarında ve yapılarda çatlaklara neden olabilir. Bununla beraber herhangi bir elemanda kırılmaya neden olarak üç temel faktör belirlenmiştir (Uğuz, A., 1996). Bunlar: malzeme tokluğu, çatlak büyüklüğü ve gerilme seviyesidir. Kırılma mekaniğinin temel prensibi, keskin bir çatlak ucundaki gerilme alanının K olarak tanımlanan bir parametreyle ifade edilmesine dayanmaktadır. K , gerilme şiddet faktörü olarak adlandırılır. Bu faktör, uygulanan gerilme ve çatlak boyutu arasında bir bağıntı kurulmasını sağlar. Buna göre çatlak içeren herhangi bir eleman veya deney numunesi aynen çatlaksız malzemelerin çeşitli gerilme seviyelerine kadar yüklenebilmeleri gibi çeşitli K değerine kadar yüklenebilirler. Böylece K değeri malzemenin bir özelliği olur.

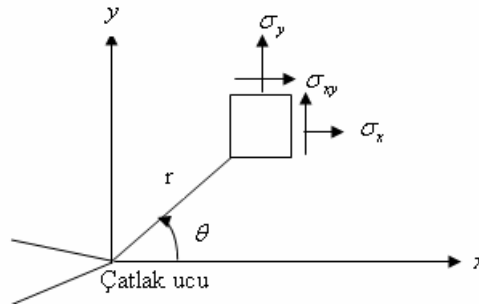
3.6.1. Gerilme şiddet faktörünün analitik ifadesi

Elastik cisimlerdeki gerilme analizi için kırılma mekaniği çatlak tiplerini üç kısma ayırmıştır (Şekil 3.12). Bunlar: açılma modu (mod I), kayma modu (mod II) ve yırtılma modu (mod III) olarak tanımlanır.



Şekil 3.12. Temel deformasyon modları

Mod I' de deplasmanlar x - y ve x - z düzlemlerine göre simetriktir. Çatlağın karşılıklı yüzeyleri birbirine ters yönde hareket ederler. Mod II de ise deplasmanlar z - y düzlemine göre simetrik x - z düzlemine göre ise vida simetrisine sahiptir. Yüzeyler ters yönde yanlara doğru birbiri üzerinde kayarak hareket ederler. Mod III her iki düzleme göre vida simetrisine sahiptir. Yüzeyler çatlak ucu çizgisine paralel olarak hareket ederler. Her çatlak modu farklı bir gerilme alanına karşılık gelmektedir.



Şekil 3.13. Polar koordinat sisteminde çatlak ucundaki gerilmeler

Bir çatlak civarında meydana gelecek gerilme σ_{ij} (Şekil 3.13), üç deformasyon modunun süperpozisyonu ile bulunabilir (Irwin, 1960; Uğuz, 1996). Buna göre

herhangi bir çatlak civarında meydana gelecek gerilmeler, I., II., ve III. deformasyon modları için literatürlerde (Irwin, 1960; Uğuz, 1996) aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx,i}\sqrt{r} &= K_i f_{x,i}(\theta) \\ \sigma_{xy,i}\sqrt{r} &= K_i f_{xy,i}(\theta) \\ \sigma_{yy,i}\sqrt{r} &= K_i f_{y,i}(\theta)\end{aligned}\quad (3.104)$$

burada f_x, f_y ve f_{xy} , θ açısının birer fonksiyonlarıdır, r çatlak ucundan olan mesafeyi ve $i = I, II, III$ deformasyon modlarını göstermektedir. K_i , I modu için gerilme yığılma faktörüdür ve genel olarak;

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{Bmatrix} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}\quad (3.105)$$

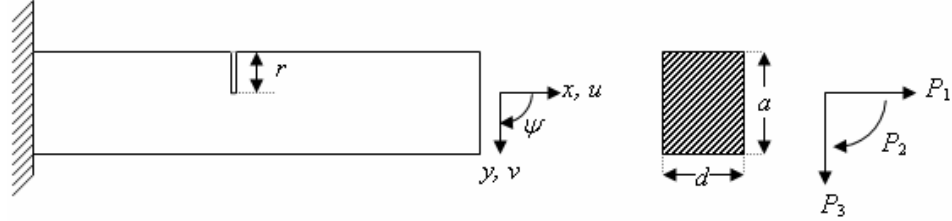
olarak verilir. Çatlağın iki kenarındaki yerdeğiştirme düzensizliği gerilme yığılma faktörü ile orantılı olup aralarındaki ilişki aşağıdaki gibidir (Uğuz, A., 1996).

$$\begin{aligned}u_x(r, \pi) - u_x(r, -\pi) &= \frac{K_I}{G} (k+1) \sqrt{r/2\pi} \\ u_y(r, \pi) - u_y(r, -\pi) &= \frac{K_{II}}{G} (k+1) \sqrt{r/2\pi} \\ u_z(r, \pi) - u_z(r, -\pi) &= \frac{4K_{III}}{G} \sqrt{r/2\pi}\end{aligned}\quad (3.106)$$

(3.106) nolu denklemlerde, “ ν ” Poison oranı olup, “ k ” ifadesi düzlem şekil değiştirme için $k = 3 - 4\nu$ ve düzlem gerilme hali için $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ değerlerini almaktadır.

Lineer Elastik Kırılma Mekaniğinde kusurlu yapıların davranışlarını incelemek için enerji salıverinim oranları veya gerilme şiddet faktörlerinin hesaplanması gerekmektedir. Basit yapılar için analitik sonuçlar (Tada ve ark., 1985) mevcut

olmasına rağmen karmaşık olan sistemlerde gerilme şiddet faktörü ancak sayısal modelleme yöntemleri ile bulunabilir. Şekil 3.14' de boyutlarıyla birlikte verilen dikdörtgen kesitli bir konsol kiriş için gerilme şiddet faktörü (K_I) aşağıdaki gibi hesaplanır (Tada ve ark., 1985).



Şekil 3.14. Çatlak içeren, dikdörtgen kesitli konsol kiriş

İncelenen kesitte burulma etkisi ele alınmadığından sadece I. ve II. deformasyon modları incelenmiştir.

Sadece P_1 çekme kuvveti etkisindeki dikdörtgen kesitli kiriş için:

$$K_{I1} = \frac{P_1}{ad} \sqrt{\pi r} F_1 \left(\frac{r}{a} \right) \quad (3.107)$$

(3.107) nolu denklemde bulunan $F_1 \left(\frac{r}{a} \right)$ fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Irwin, 1960;

Tada ve ark., 1985);

$$F_1 \left(\frac{r}{a} \right) = \sqrt{\frac{2a}{\pi r} \tan \left(\frac{\pi r}{2a} \right)} \frac{0,752 + 2,02 \left(\frac{r}{a} \right) + 0,37 \left(1 - \sin \left(\frac{\pi r}{2a} \right) \right)^3}{\cos \left(\frac{\pi r}{2a} \right)} \quad (3.108)$$

Sadece P_2 eğilme momenti etkisindeki dikdörtgen kesitli kiriş için:

$$K_{I2} = \frac{6P_2}{a^2d} \sqrt{\pi.r} F_2\left(\frac{r}{a}\right) \quad (3.109)$$

(3.109) nolu denklemde bulunan $F_2\left(\frac{r}{a}\right)$ fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Irwin, 1960; Tada ve ark., 1985):

$$F_2\left(\frac{r}{a}\right) = \sqrt{\frac{2a}{\pi.r} \tan\left(\frac{\pi.r}{2a}\right)} \frac{0,923 + 0,199\left(1 - \sin\left(\frac{\pi.r}{2a}\right)\right)^4}{\cos\left(\frac{\pi.r}{2a}\right)} \quad (3.110)$$

Sadece P_3 kesme kuvveti etkisindeki dikdörtgen kesitli kiriş için:

$$K_{II3} = \frac{\kappa.P_3}{a^2d} \sqrt{\pi.r} F_3\left(\frac{r}{a}\right) \quad (3.111)$$

(3.111) nolu denklemde bulunan $F_3\left(\frac{r}{a}\right)$ fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Irwin, 1960; Tada ve ark., 1985):

$$F_3\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{1,122 - 0,561\left(\frac{r}{a}\right) + 0,085\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 0,180\left(\frac{r}{a}\right)^3}{\sqrt{1 - \frac{r}{a}}} \quad (3.112)$$

(3.112) nolu denklemde bulunan “ κ ” sayısal bir değer olup elemanın kesitine bağlı olarak Timoshenko kiriş teorisi yardımıyla belirlenir (Cowper, 1966). κ dikdörtgen kesit için 0,67 olarak alınır.

3.6.2. Gerilme şiddeti faktörü ve şekil değiştirme enerjisi salıverinim oranı arasındaki bağıntı

Çatlak önünde meydana gelecek birim uzama için gerekli olan enerji miktarına şekil değiştirme enerjisi salıverinim oranı denir ve “ J ” ile gösterilir. Düzlem şekil değiştirme hali için J :

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 + \frac{1-\nu^2}{E} K_{II}^2 + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (3.113)$$

olarak verilir (Tada ve ark., 1985). Şekil değiştirme enerjisi salıverinim oranının değeri daima pozitif olup, birbirinden bağımsız olan üç şekil değiştirme modunu içermektedir. J nin hesaplanmasında süperpozisyon prensibinden faydalanılınca;

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} (K_{I1} + K_{I2} + \dots + K_{In})^2 + \frac{1-\nu^2}{E} (K_{II1} + K_{II2} + \dots + K_{IIn})^2 + \frac{1+\nu}{E} (K_{III1} + K_{III2} + \dots + K_{IIIIn})^2 \quad (3.114)$$

ifadesi elde edilir.

3.6.3. Esneklik (kompliyans) katsayıları ve matrisi

Castigliano teoremi ve gerilme yığılma faktörleri kullanılarak çatlaktan dolayı yapı içerisinde meydana gelen fleksibilite katsayıları hesaplanabilir. Eğer “ U ”, A çatlak alanı ve P yüküne maruz kusurlu bir yapının sahip olduğu şekil değiştirme enerjisi ise, şekil değiştirme enerjisi salıverinim miktarı, Griffith-Irwin teorisine göre aşağıdaki gibi ifade edilir (Irwin, 1960):

$$J = \frac{\partial U(P, A)}{\partial A} \quad (3.115)$$

Castigliano teoremine göre, P yükü yönündeki çatlaktan dolayı meydana gelen ek yerdeğiştirme miktarı aşağıdaki gibi olur:

$$u_i = \frac{\partial U(P_i, A)}{\partial P_i} \quad (3.116)$$

(3.115) nolu eşitlikle (3.116) nolu eşitlik yeniden düzenlenince yer değiştirmeler ve şekil değiştirme enerjisi salıverinim oranı arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi olur:

$$u_i = \frac{\partial}{\partial P_i} \int_A J(P_i, A) dA \quad (3.117)$$

Sonuç olarak çatlak modu ve gerilme yığılma faktörlerinin fonksiyonları olan esneklik katsayıları aşağıdaki gibi bulunur:

$$c_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \int_A J(P_j, A) dA \quad (3.118)$$

3.6.4. Dikdörtgen kesitli bir kiriş için esneklik katsayılarının hesaplanması

Şekil 3.14' de üç yükleme durumu ile verilen dikdörtgen kesitli kiriş için şekil değiştirme enerjisi salıverinim oranı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$J = \frac{1-v^2}{E^*} \left\{ (K_I(P_1) + K_I(P_2))^2 + K_{II}(P_3)^2 \right\} \quad (3.119)$$

(3.119) nolu eşitlikte, düzlem şekil değiştirme hali için $E^* = E$ ve düzlem gerilme hali için $E^* = E/(1-v^2)$ olarak alınır. P_1 aksenal kuvveti ve P_2 eğilme momenti çatlakın mod I şeklinde oluşmasını sağlarken, P_3 kesme kuvveti çatlakın mod II şeklinde oluşmasına neden olmaktadır. I. ve II. modları için daha önce hesaplanan K_I ve K_{II} gerilme yığılma faktörleriyle (3.119) nolu eşitlik yeniden düzenlenince:

$$J = \frac{1-v^2}{E^*} \left\{ \left(\frac{P_1}{ad} \sqrt{\pi.r} F_1\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{6P_2}{a^2d} \sqrt{\pi.r} F_2\left(\frac{r}{a}\right) \right)^2 + \left(\frac{\kappa.P_3}{ad} \sqrt{\pi.r} F_3\left(\frac{r}{a}\right) \right)^2 \right\} \quad (3.120)$$

Eni d yüksekliği a olan dikdörtgen kesitli ve r derinliğinde bir çatlğa sahip kiriş için esneklik katsayıları aşağıdaki gibi yazılır:

$$c_{ij} = d \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \int_0^r J(\xi) d\xi \quad (3.121)$$

gerekli işlemler yapıldıktan sonra c_{11}, c_{13}, c_{22} ve c_{33} esneklik katsayıları aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{2\pi}{E^* a^2 d} \int_0^r \xi \cdot F_1^2 \left(\frac{\xi}{a} \right) d\xi \\ c_{13} &= \frac{12\pi}{E^* a^3 d} \int_0^r \xi \cdot F_1 \left(\frac{\xi}{a} \right) F_2 \left(\frac{\xi}{a} \right) d\xi \\ c_{22} &= \frac{2\pi \kappa^2}{E^* a^2 d} \int_0^r \xi F_2^2 \left(\frac{\xi}{a} \right) d\xi \\ c_{31} &= c_{13} = \frac{12\pi}{E^* a^3 d} \int_0^r \xi \cdot F_1 \left(\frac{\xi}{a} \right) F_2 \left(\frac{\xi}{a} \right) d\xi \\ c_{33} &= \frac{72\pi}{E^* a^4 d} \int_0^r \xi \cdot F_3^2 \left(\frac{\xi}{a} \right) d\xi \end{aligned} \quad (3.122)$$

(3.122) nolu denklemlerde düzlem şekil değıştirme hali için $E^* = E$ ve düzlem gerilme hali için $E^* = E/(1 - \nu^2)$ olarak alınır.

3.6.5. Esneklik ve rijitlik matrislerinin oluşturulması

Kesme kuvvetinin çatlğın açılma şekline etkimeği kabul edilirse, $\delta(u, \nu, \theta)$ yer değıştirme vektörü için esneklik katsayıları matris formunda aşağıdaki gibi yazılır:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} \\ 0 & c_{22} & 0 \\ c_{31} & 0 & c_{33} \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad (3.123)$$

Çatlak düğümü, uzunluksuz ve kütsüz bir çatlak eleman olarak ele alınınca, ilgili direngenlik katsayıları kullanılarak çatlakın rijitlik matrisi oluşturulur. (3.123) nolu eşitlikte bulunan direngenlik matrisinin tersi alınarak bir düğüm noktası için rijitlik matrisi oluşturulur.

$$[C]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{c_{33}}{-c_{13}^2 + c_{11}c_{33}} & 0 & \frac{c_{13}}{c_{13}^2 - c_{11}c_{33}} \\ 0 & \frac{1}{c_{22}} & 0 \\ \frac{c_{13}}{c_{13}^2 - c_{11}c_{33}} & 0 & \frac{c_{11}}{-c_{13}^2 + c_{11}c_{33}} \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad (3.124)$$

İki düğüm ve her bir düğümünde üç serbestlik derecesine sahip bir kiriş için çatlak bölgesinde çatlakın neden olduğu rijitlik matrisi ise aşağıdaki gibi oluşturulur (Irwin, 1960; Uğuz, 1996).

$$[K]_{cr} = \begin{bmatrix} [C]^{-1} & -[C]^{-1} \\ -[C]^{-1} & [C]^{-1} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \quad (3.125)$$

3.7. Çatlakın Yapının Stabilitate ve Titreşim Özelliklerine Etkisi

Daha önceki bölümlerde de anlatıldığı gibi herhangi bir yapıdaki çatlak belirli bir rijitlik düşüşüne neden olmaktadır. Dolayısıyla daha önceki bölümlerde elde edilen (3.81) nolu eşitlikte kusursuz elemanın rijitlik matrislerine (3.125) nolu eşitlikte elde edilen çatlaktan dolayı meydana gelen rijitlik matrisi eklenerek kusurlu yapının rijitlik matrisi ($[K]_{wcr}$) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[K]_{wcr} = [K] + [K]_{cr} \quad (3.126)$$

Kusurlu yapı için elde edilen bu yeni genel rijitlik matrisi ile yapının stabilite ve titreşim davranışları için oluşturulan (3.90) ve (3.103) nolu eşitlikler yeniden düzenlenince;

$$[[K]_{wcr} + \lambda[G]_e] = 0 \quad (3.127)$$

$$[[K]_{wcr} - \lambda[M]] = 0 \quad (3.128)$$

Şeklinde yeni iki adet özdeğer problemi elde edilir. Özdeğer problemleri çözümlenince, (3.127) nolu eşitlik için bulunan λ değeri çatlak içeren yapının kritik burkulma yükünü, (3.128) nolu eşitlik için bulunan λ değeri ise çatlak içeren yapının doğal frekansı verir.

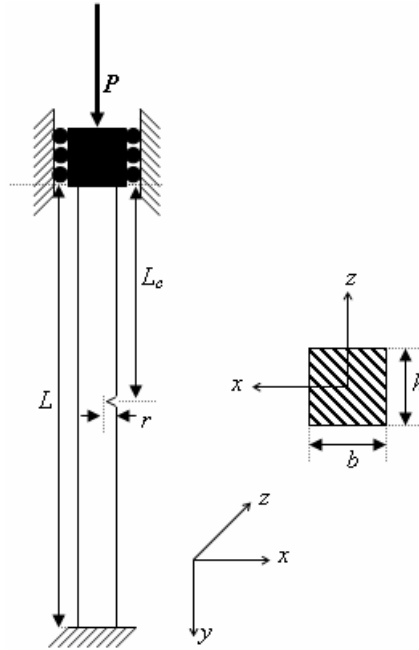
Bu çalışmada (3.127) ve (3.128) denklemleri ile verilen eşitlikleri çözebilecek bir bilgisayar programı (EK 1) yazılarak çatlak içeren yapılardaki stabilite ve titreşim problemlerinin analizi yapılmıştır.

Bundan sonraki bölümde bazı örnekler ele alınarak bu örneklerin analitik ve sayısal çözümleri elde edilecektir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Her İki Ucu Ankastre Kolon

Çalışmamızın bu bölümünde kullanılan yöntemin güvenilirliğini belirlemek için boyutları ve kesiti Şekil 4.1.'deki gibi verilen, her iki ucu ankastre çatlaklı ve çatlaksız kolonlar için deneysel, analitik ve sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Kullanılacak olan malzemeye ait geometrik özellikler $L = 490$ mm, $h = 8$ mm ve $b = 8$ mm şeklindedir. Seçilen malzemeye ait Elastisite Modülü $E = 190$ GPa ve orantı sınırı $\sigma_0 = 185$ MPa olarak yapılan deneyler sonucunda belirlenmiştir.



Şekil 4.1. Tek çatlak içeren her iki ucu mafsallı kolon

4.1.1. Analitik çözüm

Daha önceki bölümlerde de anlatıldığı üzere bu çalışmada çıkardığımız bütün formüller ve hazırlamış olduğumuz bilgisayar programı malzemenin elastik kaldığı

ve Hooke kanununa uyduğu sürece geçerli olabilirler. Dolayısıyla malzemenin kritik narinlik oranının hesaplanması gerekir. Malzemeye ait kritik narinlik oranı literatürlerde (Kayan 1987) yer alan formüllerle (4.1) deki gibi hesaplandı:

$$n_{kr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}} = \pi \sqrt{\frac{190 * 10^3}{185}} = 100.7 \quad (4.1)$$

Seçilen numuneye ait narinlik oranı ise daha önceki bölümlerde elde edilen (3.50) nolu eşitlikle aşağıdaki gibi hesaplandı:

$$n = \frac{L_b}{i} = \frac{0.5 * 490}{\sqrt{\frac{8 * 8^3}{12}}}{\sqrt{\frac{12}{8 * 8}}} = 106.1 \quad (4.2)$$

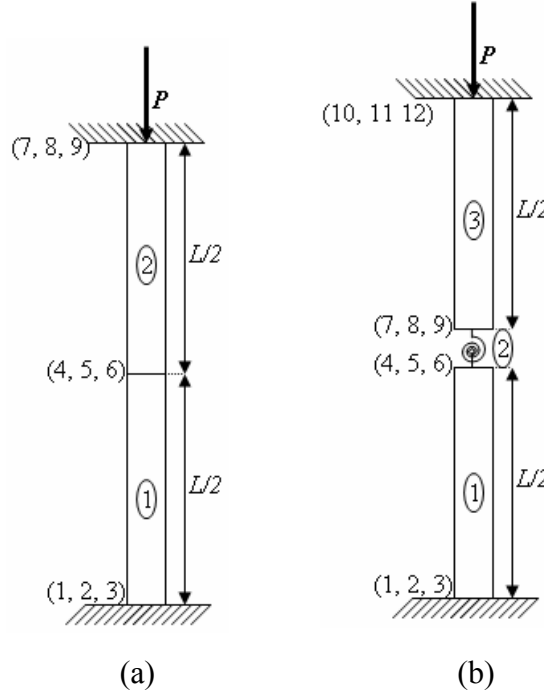
(4.2) eşitliğinde numune için hesaplanan narinlik oranı, (4.1) eşitliğinde malzeme için hesaplanan kritik narinlik oranından büyük olduğundan seçilen numunemiz elastik davranacak ve dolayısıyla çıkarılan formüller geçerli olacaktır. Mekanik ve geometrik özellikleri verilmiş olan çatlaksız kolona ait kritik burkulma yükü (4.3) de verilen Euler burkulma formülleriyle aşağıdaki gibi hesaplandı;

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{(0.5 * L)^2} = \frac{\pi^2 * 190 * 10^9 * 341.33 * 10^{-12}}{(0.5 * 49 * 10^{-3})^2} = 10 663.5 \text{ N} \quad (4.3)$$

4.1.2. Sonlu elemanlar yöntemiyle çözüm

Verilen kolonun kritik burkulma yükünün sonlu elemanlar yöntemiyle hesaplanması için ilk olarak kolon çatlaklı (Şekil 4.2.(a)) ve çatlaksız (Şekil 4.2.(b)) olarak iki ayrı şekilde modellendi. Daha sonra sistemlere ait genel rijitlik matrisi ve geometrik rijitlik matrisleri oluşturuldu. Şekil 4.2.(b) de verilen sistemde çatlağın yeri $L_c = 24.5 \text{ cm}$ ve derinliği $r = 2 \text{ mm}$ olarak alındı. Çatlak içeren kolonun

modellemesi yapılırken sistem tam çatlak bölgesinden iki ayrı bölgeye ayrıldı ve biri çatlağı temsil edecek şekilde üç eleman kullanıldı. Modellemeler yapılırken çatlak haricindeki elemanlar için iki düğüme sahip ve her bir düğümde üç serbestlik derecesi (yatay deplasman, düşey deplasman ve dönme) olan çerçeve elemanları kullanıldı.



Şekil 4.2. (a) Her iki ucu ankastre, çatlaksız kolona ait SEM modeli
(b) Her iki ucu ankastre, tek çatlak içeren kolona ait SEM modeli

Şekil 4.2.(a)'daki 1 ve 2 nolu elemanlara ve Şekil 4.2.(b)'deki 1 ve 3 nolu elemanlara ait rijitlik matrisleri (3.81) ve (3.82) nolu eşitlikler ve kullanılan malzemenin mekanik ve geometrik özelliklerinden faydalanılarak hesaplandı. Çatlak içeren çubukta ise çatlak bölgesindeki rijitlik (3.125) denklemi kullanılarak hesaplandı.

$$[K]_e = \begin{bmatrix} 4.96 \cdot 10^7 & 0 & 0 & -4.96 \cdot 10^7 & 0 & 0 \\ 0 & 52\,918.9 & 6\,482.57 & 0 & -52\,918.9 & 6\,482.57 \\ 0 & 6\,482.57 & 1\,058.82 & 0 & -6\,482.57 & 529.41 \\ -4.96 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 4.96 \cdot 10^7 & 0 & 0 \\ 0 & -52\,918.9 & -6\,482.57 & 0 & 52\,918.9 & -6\,482.57 \\ 0 & 6\,482.57 & 529.41 & 0 & -6\,482.57 & 1\,058.82 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$[G]_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.898 & 0.1 & 0 & -4.898 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.0327 & 0 & -0.1 & -8.17*10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4.898 & -0.1 & 0 & 4.898 & -0.1 \\ 0 & 0.1 & -8.17*10^{-3} & 0 & -0.1 & 0.0327 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$[K]_{cr}^2 = \begin{bmatrix} 6.861*10^{11} & 0 & -1.156*10^9 & -6.861*10^{11} & 0 & 1.156*10^9 \\ 0 & 1.346*10^{10} & 0 & 0 & -1.346*10^{10} & 0 \\ -1.156*10^9 & 0 & 1.960*10^6 & 1.156*10^9 & 0 & -1.960*10^6 \\ -6.861*10^{11} & 0 & 1.156*10^9 & 6.861*10^{11} & 0 & -1.156*10^9 \\ 0 & -1.346*10^{10} & 0 & 0 & 1.346*10^{10} & 0 \\ 1.156*10^9 & 0 & -1.960*10^6 & -1.156*10^9 & 0 & 1.960*10^6 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

(4.4), (4.5) ve (4.6) matrisleri sırasıyla eleman rijitlik matrisi, geometrik rijitlik matrisi ve çatlaktan dolayı meydana gelen rijitlik matrislerini temsil etmektedir. Sistemlere ait global rijitlik matrislerinin basit bir şekilde oluşturulabilmesi için ilk olarak Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2. deki gibi süreklilik tabloları düzenlendi.

Çizelge 4.1. Her iki ucu ankastre kolona ait süreklilik tablosu

Eleman No	Düğüm No	l	Serbestlik değerleri
1	1 2	24.5 cm	q_1, q_2, q_3 q_4, q_5, q_6
2	2 3	24.5 cm	q_4, q_5, q_6 q_7, q_8, q_9

Çizelge 4.2. Her iki ucu ankastre, çatlak içeren kolona ait süreklilik tablosu

Eleman No	Düğüm No	l	Serbestlik değerleri
1	1 2	24.5 cm	q_1, q_2, q_3 q_4, q_5, q_6
2	2 3	0	q_4, q_5, q_6 q_7, q_8, q_9
3	3 4	24.5 cm	q_7, q_8, q_9 q_{10}, q_{11}, q_{12}

Çatlak içermeyen kolona ait genel rijitlik matrisleri, eleman rijitlik matrisleri ve süreklilik tabloları kullanılarak (4.7) ve (4.8) deki gibi elde edildi:

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} + k_{11} & k_{45} + k_{12} & k_{46} + k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} + k_{21} & k_{55} + k_{22} & k_{56} + k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} + k_{31} & k_{65} + k_{32} & k_{66} + k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ 0 & 0 & 0 & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ 0 & 0 & 0 & k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ 0 & 0 & 0 & k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & g_{15} & g_{16} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25} & g_{26} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} & g_{35} & g_{36} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} + g_{11} & g_{45} + g_{12} & g_{46} + g_{13} & g_{14} & g_{15} & g_{16} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ g_{51} & g_{52} & g_{53} & g_{54} + g_{21} & g_{55} + g_{22} & g_{56} + g_{23} & g_{24} & g_{25} & g_{26} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ g_{61} & g_{62} & g_{63} & g_{64} + g_{31} & g_{65} + g_{32} & g_{66} + g_{33} & g_{34} & g_{35} & g_{36} \\ 0 & 0 & 0 & g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} & g_{45} & g_{46} \\ 0 & 0 & 0 & g_{51} & g_{52} & g_{53} & g_{54} & g_{55} & g_{56} \\ 0 & 0 & 0 & g_{61} & g_{62} & g_{63} & g_{64} & g_{65} & g_{66} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Çatlak içeren sistemin genel rijitlik matrisleri ise, eleman rijitlik matrisleri, eleman süreklilik çizelgesi ve bunlara ek olarak çatlaktan dolayı meydana gelen rijitlik düşümü dikkate alınarak aşağıdaki gibi elde edildi. Global rijitlik matrisleri oluşturulurken, çatlak bölgesinin modellenmesinde kullanılan eleman boyunun sıfır olduğu, dolayısıyla geometrik açıdan sistemin kütesine herhangi bir etkisinin olmadığına dikkat edilmelidir.

$$[K]_{wcr} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44}+k_{11} & k_{45}+k_{12} & k_{46}+k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54}+k_{21} & k_{55}+k_{22} & k_{56}+k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64}+k_{31} & k_{65}+k_{32} & k_{66}+k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{11}+k_{44} & k_{12}+k_{45} & k_{13}+k_{46} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ 0 & 0 & 0 & k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{21}+k_{54} & k_{22}+k_{55} & k_{23}+k_{56} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ 0 & 0 & 0 & k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{31}+k_{64} & k_{32}+k_{65} & k_{33}+k_{66} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$$

$$[G]_{wcr} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & g_{15} & g_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25} & g_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} & g_{35} & g_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} & g_{45} & g_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{51} & g_{52} & g_{53} & g_{54} & g_{55} & g_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{61} & g_{62} & g_{63} & g_{64} & g_{65} & g_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & g_{15} & g_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25} & g_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} & g_{35} & g_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} & g_{45} & g_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{51} & g_{52} & g_{53} & g_{54} & g_{55} & g_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{61} & g_{62} & g_{63} & g_{64} & g_{65} & g_{66} \end{bmatrix}_{12 \times 12}$$

Çatlak içermeyen sistem için hesaplanan global rijitlik matrisleri ile (3.89) denklemi ve çatlak içeren sistem için hesaplanan global rijitlik matrisleri ile (3.127) denklemi yeniden düzenlendi ve sınır şartları uygulandı. Modellemesini yaptığımız sistemde her iki ucu ankastre kolon için başlangıç ve bitiş düğümlerinde (ankastre mesnet) herhangi bir deplasman ve dönme meydana gelmeyecektir. Dolayısıyla sisteme ait oluşturulan global rijitlik matrislerinde ilgili satır ve sütunlar silindikten sonra determinantlar hesaplandı. Çatlak içermeyen sisteme ait kritik yük değeri:

$$\det[K] + \lambda[G] = 6.35298 * 10^7 \lambda^2 + 2.74558 * 10^{12} \lambda + 2.2248 * 10^{16} = 0 \quad (4.9)$$

(4.9) eşitliğinin çözümüyle elde edilen en küçük $|\lambda|$ değerlerinin hesaplanmasıyla bulunur:

$$\lambda_1 = -32\,412.8 \quad \lambda_2 = -10\,804.3$$

Bulunan en küçük kök değeri olan $|\lambda_2| = 10\,804.3$ çatlak içermeyen sistem için aranan birinci kritik burkulma yükünü verir. Çatlak içeren sisteme ait kritik burkulma yükü değeri ise:

$$\det[K]_{\text{wcr}} + \lambda[G]_{\text{wcr}} = 1.53248 * 10^{18} \lambda^4 + 8.98846 * 10^{27} \lambda^3 + 8.11208 * 10^{33} \lambda^2 + 3.35192 * 10^{38} \lambda + 2.64812 * 10^{42} = 0$$

yukardaki eşitliğin çözümüyle elde edilecek en küçük kök olarak aşağıdaki gibi bulunur.

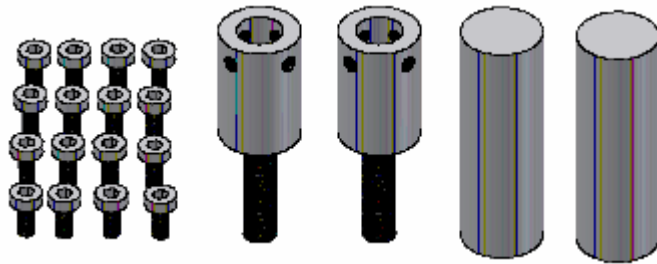
$$\lambda_1 = -10\,575.1 \quad \lambda_2 = -32\,412.8 \quad \lambda_3 = -859\,644 \quad \lambda_4 = -5.8644 * 10^9$$

Bulunan kökler arasında en küçük kök olan $|\lambda_1| = 10\,575.1$ değeri çatlak içeren sistemin kritik burkulma yükü değerini verir.

Bu bölümde oluşturulan matrisler ve bu matrislerin çözümleri için Mathematica 5 programı kullanılmıştır.

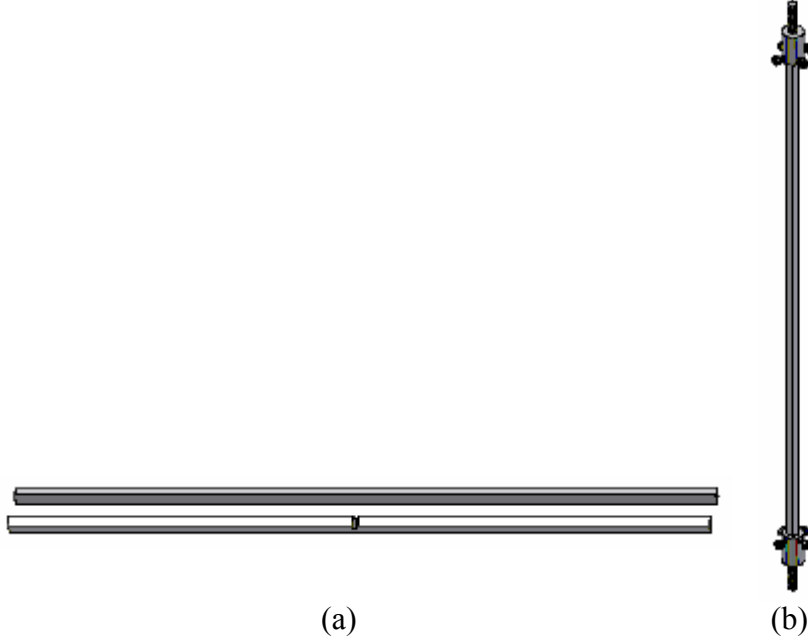
4.1.3. Deneysel çözüm

Bu bölümde Şekil 4.1. deki gibi verilen kolona ait burkulma yükü hazırlanan deney düzeneği yardımıyla hesaplanmıştır. Burkulma deneyleri Harran Üniversitesi Makine Fabrikası Mekanik laboratuvarında bulunan 80 tonluk deplasman kontrollü test presi yardımıyla gerçekleştirildi. Deneylerde kullanılan bu cihazın numunelerde burkulma yükü hesaplayabilmesi için cihazda çeşitli düzenlemeler yapıldı. İlk olarak burkulma yükünü hesaplayacağımız çubuğu cihaz çenelerine monte edebilmek için gerekli aparatlar torna tezgahı yardımıyla Şekil 4.3. deki gibi imal edildi.



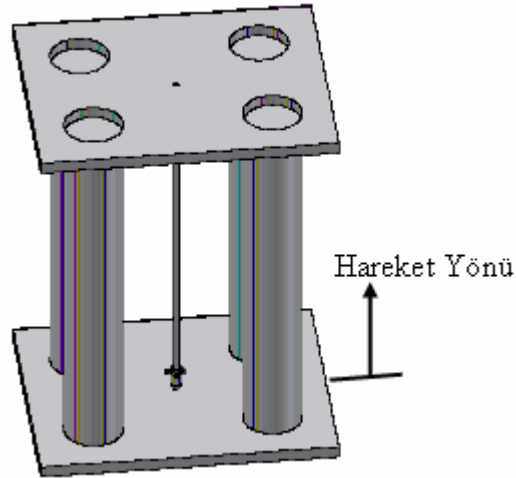
Şekil 4.3. Cihaz çenelerine monte edilecek aparatlar

Burkulma yükünü hesapladığımız kolonda sınır şartı olarak her iki ucu ankastre mesnet seçildiği için çenelere monte edilecek aparatlara 45° açılılarla dört adet delik açıldı ve bu deliklere vidalar yerleştirilip sıkılarak kolon ankastre olarak mesnetlendi (Şekil 4.4.(b)).



Şekil 4.4. (a) Çatlaksız ve çatlaklı çubuklar (b) Deney için hazırlanan düzenek

Burkulma yükü hesaplanacak olan kolonlardaki çatlaklar makine fabrikasında bulunan vargel tezgahı yardımıyla oluşturuldu. Daha sonra hazırlamış olduğumuz düzenek, cihaz çenesine monte edildi (Şekil 4.5.) ve numunelerimiz aparatlara yerleştirilerek deneyler yapıldı.



Şekil 4.5. Deney düzeneğinin cihaza monte edilmiş hali

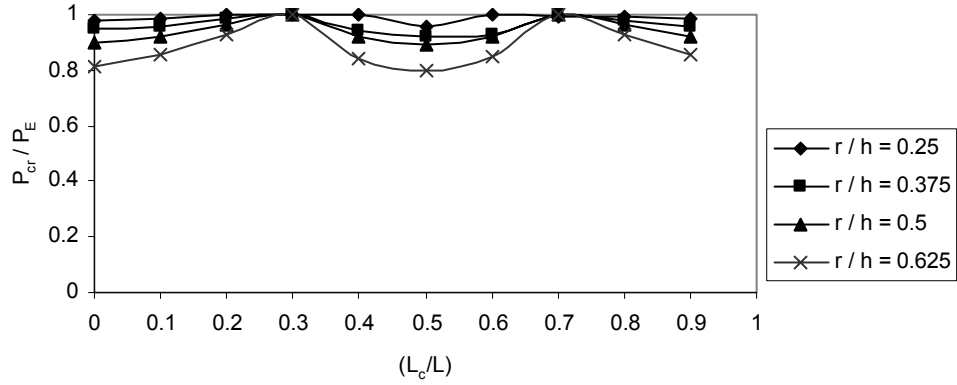
Deneyde ilk olarak kullanılan malzemenin stabilite davranışında etkili olan Elastisite Modülü ve Orantı sınırı gerilme değerleri çekme testi ile hesaplanmıştır. Yapılan çekme deneyleri sonunda malzemeye ait Elastisite Modülü $E = 190$ GPa ve orantı sınırı $\sigma_0 = 185$ MPa olarak bulunmuştur. Burkulma deneyinde ilk olarak çatlaksız yapıya ait kritik burkulma yükü daha sonrada farklı bölgelerde farklı çatlak derinliğine sahip çatlak içeren çubuklar için kritik burkulma yükü değerleri Çizelge 4.3. deki gibi elde edilmiştir.

Çizelge 4.3. Deney sonunda elde edilen her iki ucu ankastre ve çatlak içeren çubuk için kritik burkulma yükünün çatlaksız kritik burkulma yüküne oranı

r/h oranı	L_c/L oranı 0.14	L_c/L oranı 0.25	L_c/L oranı 0.41	L_c/L oranı 0.50
0.25	0.997642	0.995898	0.984311	0.9642
0.375	0.984926	0.985952	0.930681	0.954163
0.5	0.956932	0.984311	0.88751	0.861157

4.1.4. Hazırlanan programla çözüm

Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılarak yapılan sayısal çözüm yönteminde belirli bir çatlak derinliği ve konumu için sistem 3 elemana bölünerek çözümler bulundu. Deneysel yöntemde ise değişik çatlak boyu ve konumu için çözümler deney düzeneği yardımıyla bulundu. Bu bölümde değişik çatlak boyu ve konumuna sahip çubuklar için kritik burkulma yükü 10 eleman kullanılarak yapılan modellemelerle yine sonlu elemanlar yöntemi kullanarak analiz yapan program yardımıyla hesaplandı. Hazırlanan programla çatlak içermeyen yapıya ait yapılan analiz sonucunda kritik burkulma yükü $P_{prog} = 10\ 665$ N olarak hesaplandı. Çatlak içeren yapı için yapılan analizler sonunda ise sonuçların daha iyi incelenmesi için kritik burkulma yükünün çatlak içermeyen kolona ait Euler burkulma yüküne oranı ile çatlak konumunun değişik çatlak derinlikleriyle değişimini gösteren grafikler Şekil 4.6. daki gibi çizilmiştir



Şekil 4.6. Her iki ucu ankastre kolon için çatlak derinliği ve çatlak konumuna bağlı olarak birinci kritik burkulma yükünün Euler burkulma yüküne göre değişimi

4.1.5. Bulgular

İlk olarak kullanılan yöntemin güvenilirliğini göstermek amacıyla kusursuz yapıya ait kritik burkulma yükü değerini analitik yöntem, nümerik yöntem, hazırlanan program ve hazırlanan deney düzeneği yardımıyla hesapladık ve sonuçları Çizelge 4.4. deki gibi karşılaştırıp hata miktarını belirledik.

Çizelge 4.4. Farklı yöntemlerle hesaplanan çatlaksız kolona ait kritik burkulma yükü değerleri

Yöntem	Burkulma Yükü (N)	% hata
Analitik	10 663.5	
Sayısal	10 804.3	1.3
Program	10 665	0.014
Deneysel	9 752	8.5

Çizelge 4.4 de görüldüğü gibi analitik sonuca en yakın değerler hazırlanan program yardımıyla bulunmuştur. Daha sonra tek çatlak içeren kolon için deneysel yöntem ve programla elde edilen kritik burkulma yükü değerlerini Çizelge 4.5 deki gibi karşılaştırıp hata miktarları hesaplandı.

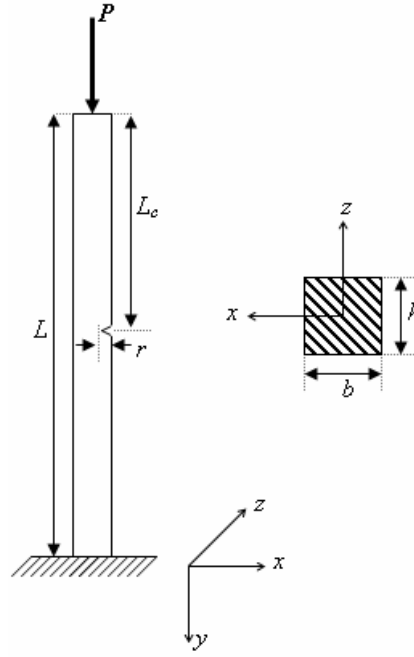
Çizelge 4.5. Farklı yöntemlerle hesaplanan tek çatlak içeren kolona ait kritik burkulma yükünün çatlaksız kolonun burkulma yüküne oranının çatlak yeri ve derinliğine bağlı değerleri

r/h oranı	L_c/L oranı 0.14			L_c/L oranı 0.25			L_c/L oranı 0.41			L_c/L oranı 0.50		
	deney	program	% hata	deney	program	% hata	deney	program	% hata	Deney	program	% hata
0.25	0.997642	0.998125	0.05	0.995898	1	0.4	0.984311	1	1.57	0.9642	0.958744	3.13
0.375	0.984926	0.983122	0.18	0.985952	0.998594	1.26	0.930681	0.941866	1.19	0.954163	0.919362	3.78
0.5	0.956932	0.961556	0.48	0.984311	0.994374	1.01	0.88751	0.922175	3.76	0.861157	0.891233	3.37

Programdan elde edilen verilerle deneysel veriler arasında ortalama % 3 miktarında bir fark gözlemlendi. Bununla birlikte beklenildiği gibi çatlak derinliğindeki artışların yapının kritik burkulma yükünde düşüşlere neden olduğu görüldü. Ayrıca her iki ucu ankastre kolonda tam orta noktada meydana gelen çatlakların yapının kritik burkulma yükünde büyük miktarlarda azalmalara neden olduğu gözlemlendi ve eğilme momentinin maksimum olduğu noktada kritik burkulma yükündeki düşüşün de maksimum olduğu ve eğilme momentinin oluşmadığı noktalarda kritik burkulma yükünde herhangi bir düşüşün olmadığı görüldü. Bunun nedeni, eğilme momentinin düşük olduğu yerlerde bulunan çatlakların az miktarda bir enerji düşüşüne neden olmalarıdır.

4.2. Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Kolon

Şekil 4.7 deki gibi bir ucu ankastre diğer ucu serbest kolona ait kritik burkulma yüküne ait sonuçlar sayısal (sonlu elemanlar yöntemi) ve hazırlanmış program yardımıyla hesaplanmıştır. Kolonda $E = 2.10^4$ MPa , $L = 3$ m ve $b = h = 0,2$ m ve kritik narinlik oranı $n_{kr} = 100$ olarak verilmiştir.



Şekil 4.7. Tek çatlak içeren bir ucu ankastre diğer ucu serbest kolon

4.2.1. Analitik çözüm

İlk olarak uygulamada verilen kolonun narinlik oranı (3.50) eşitliği kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplandı;

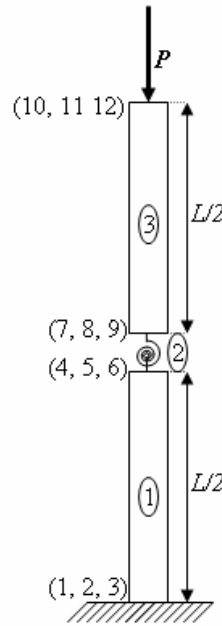
$$n = \frac{L_b}{i} = \frac{2 * 3}{\sqrt{\frac{0.2 * 0.2^3}{12}}} = 103.9 \quad (4.10)$$

(4.10) eşitliğinde bulunan narinlik oranı sistem için verilen kritik narinlik oranından büyük olduğundan, çatlaksız kolon için kritik burkulma yükü (3.47) denklemiyle aşağıdaki gibi hesaplandı;

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} = \frac{\pi^2 * 2 * 10^{10} * 1.333 * 10^{-4}}{4 * 3^2} = 731 081.8 \text{ N} \quad (4.11)$$

4.2.2. Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Çözüm

Verilen kolonun kritik burkulma yükünün sonlu elemanlar yöntemiyle hesaplanması için ilk olarak sistemin modellenmesi yapıldı (Şekil 4.8.). Daha sonra bir önceki bölümdeki gibi yine sisteme ait genel rijitlik matrisi ve geometrik rijitlik matrisleri oluşturuldu. Şekil 4.7.' de verilen sistemde çatlak yeri $L_c = 1.5$ m ve $r = 0.02$ m olarak alındı. Modelleme yapılırken bir önceki bölümdeki gibi sistem tam çatlak bölgesinden iki ayrı bölgeye ayrıldı ve biri çatlakı temsil edecek şekilde üç eleman kullanıldı.



Şekil 4.8. Tek çatlak içeren bir ucu ankastre diğer ucu serbest kolonun SEM modeli

Kullanılan elemanlara ait rijitlik matrisleri yine bir önceki bölümdeki gibi (3.125), (3.81) ve (3.82) eşitlikleri ve kullanılan malzemenin mekanik ve geometrik özelliklerinden faydalanılarak (4.10), (4.11) ve (4.12) eşitliklerindeki gibi hesaplandı.

$$[K]_e^1 = [K]_e^3 = \begin{bmatrix} 533.333 & 0 & 0 & -533.333 & 0 & 0 \\ 0 & 9.481 & 7.111 & 0 & -9.481 & 7.111 \\ 0 & 7.111 & 7.111 & 0 & -7.111 & 3.555 \\ -533.333 & 0 & 0 & 533.333 & 0 & 0 \\ 0 & -9.481 & -7.111 & 0 & 9.481 & -7.111 \\ 0 & 7.111 & 3.555 & 0 & -7.111 & 7.111 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$${}^1[G] = {}^3[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.1 & 0 & -0.8 & -0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0 & -0.1 & -0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8 & -0.1 & 0 & 0.8 & -0.1 \\ 0 & 0.1 & -0.05 & 0 & -0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$${}^2[K]_{cr} = \begin{bmatrix} 87 \cdot 10^6 & 0 & -31.8 \cdot 10^5 & -87 \cdot 10^6 & 0 & 31.8 \cdot 10^5 \\ 0 & 22.5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -22.5 \cdot 10^4 & 0 \\ -31.8 \cdot 10^5 & 0 & 11.6 \cdot 10^4 & 31.8 \cdot 10^5 & 0 & 11.6 \cdot 10^4 \\ -87 \cdot 10^6 & 0 & 31.8 \cdot 10^5 & 87 \cdot 10^6 & 0 & -31.8 \cdot 10^5 \\ 0 & -22.5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 22.5 \cdot 10^4 & 0 \\ 31.8 \cdot 10^5 & 0 & 11.6 \cdot 10^4 & -31.8 \cdot 10^5 & 0 & 11.6 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

(4.12) ve (4.13) nolu eşitlikler sırasıyla çubuk eleman için eleman rijitlik matrisi ve geometrik rijitlik matrisi ve (4.14) nolu eşitlik ise çatlaktan dolayı meydana gelen rijitlik matrisidir. Sisteme ait global rijitlik matrislerinin hazırlanması için sisteme ait süreklilik tablosu Çizelge 4.6 da ki gibi oluşturuldu:

Çizelge 4.6. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest, çatlak içeren kolona ait süreklilik tablosu

Eleman No	Düğüm No	l	Serbestlik değerleri
1	1 2	1,5 m	q_1, q_2, q_3 q_4, q_5, q_6
2	2 3	0	q_4, q_5, q_6 q_7, q_8, q_9
3	3 4	1,5 m	q_7, q_8, q_9 q_{10}, q_{11}, q_{12}

Sistemin genel rijitlik matrisi, eleman rijitlik matrisleri, eleman süreklilik tablosu ve çatlaktan dolayı meydana gelen rijitlik düşümü dikkate alınarak aşağıdaki gibi elde edildi:

$$[K]_{wer} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} + k_{11} & k_{45} + k_{12} & k_{46} + k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & 0 & 0 & 0 \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} + k_{21} & k_{55} + k_{22} & k_{56} + k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & 0 & 0 & 0 \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} + k_{31} & k_{65} + k_{32} & k_{66} + k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{11} + k_{44} & k_{12} + k_{45} & k_{13} + k_{46} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ 0 & 0 & 0 & k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{21} + k_{54} & k_{22} + k_{55} & k_{23} + k_{56} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ 0 & 0 & 0 & k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{31} + k_{64} & k_{32} + k_{65} & k_{33} + k_{66} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$$

Sisteme ait global geometrik rijitlik matrisi denklem (4.15) deki gibidir.

$$[G]_{wer} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & g_{15} & g_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25} & g_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} & g_{35} & g_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} & g_{45} & g_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{51} & g_{52} & g_{53} & g_{54} & g_{55} & g_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{61} & g_{62} & g_{63} & g_{64} & g_{65} & g_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g_{11}}{2} & \frac{g_{12}}{2} & \frac{g_{13}}{2} & \frac{g_{14}}{2} & \frac{g_{15}}{2} & \frac{g_{16}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g_{21}}{2} & \frac{g_{22}}{2} & \frac{g_{23}}{2} & \frac{g_{24}}{2} & \frac{g_{25}}{2} & \frac{g_{26}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g_{31}}{2} & \frac{g_{32}}{2} & \frac{g_{33}}{2} & \frac{g_{34}}{2} & \frac{g_{35}}{2} & \frac{g_{36}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g_{41}}{2} & \frac{g_{42}}{2} & \frac{g_{43}}{2} & \frac{g_{44}}{2} & \frac{g_{45}}{2} & \frac{g_{46}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g_{51}}{2} & \frac{g_{52}}{2} & \frac{g_{53}}{2} & \frac{g_{54}}{2} & \frac{g_{55}}{2} & \frac{g_{56}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{61} & g_{62} & g_{63} & g_{64} & g_{65} & g_{66} \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad (4.15)$$

Elde edilen bu iki matrisle (3.127) nolu eşitlik yeniden düzenlendi ve sınır şartları uygulandı. Modellemesi yapılan sistemde bir ucu ankastre diğer ucu serbest kolon için 1. düğümde (ankastre mesnet) herhangi bir deplasman ve dönme meydana gelmeyecektir. Dolayısıyla global matrislerde 1, 2 ve 3 nolu satır ve sütunlar silindikten sonra determinant alındı.

$$\det[K]_{wer} + \lambda[G]_{wer} = -1.98377 * 10^{23} + 3.10415 * 10^{23} \lambda - 5.72992 * 10^{22} \lambda^2 + 2.5547 * 10^{21} \lambda^3 - 2.70741 * 10^{19} \lambda^4 - 2.08641 * 10^{16} \lambda^5 = 0 \quad (4.16)$$

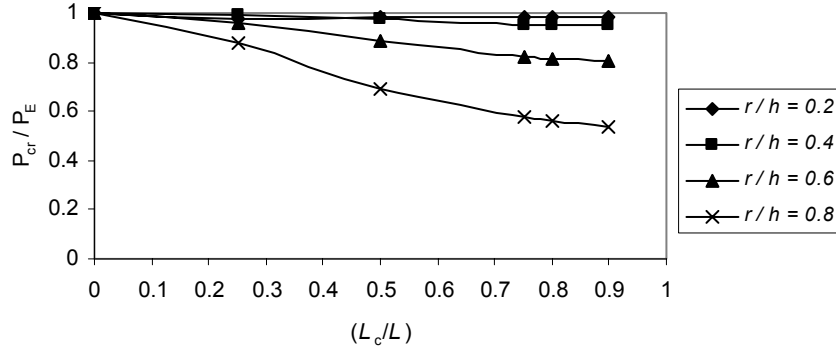
(4.16) nolu eşitlik çözüldü ve λ değerleri hesaplandı.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.735739 & \lambda_2 &= 6.85365 & \lambda_3 &= 22.9943 \\ \lambda_4 &= 59.1079 & \lambda_5 &= -1387.33 \end{aligned} \quad (4.17)$$

(4.17) nolu eşitliklerde en küçük $|\lambda|$ değeri olan $\lambda_1 = 0.735739$ MPa aranan birinci kritik burkulma yükünü verir.

4.2.2. Hazirlanan programla çözüm

Uygulamada verilen mekanik ve geometrik özelliklere sahip çatlak içermeyen kolon için burkulma yükü hazirlanan programla $P_{prog} = 731\,500\text{ N}$ olarak hesaplandı. Bir önceki bölümde sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak belirli bir çatlak derinliği ve yeri için çözüm bulundu. Şekil 4.8 de verilen sisteme ait kritik burkulma yükleri değişik çatlak boyu ve yeri için hazirlanan programla hesaplandı ve bir önceki bölümdeki gibi kritik burkulma yükünün çatlak içermeyen kirişe ait Euler burkulma yüküne oranı ile çatlak konumunun değişik çatlak derinlikleriyle değişimini gösteren grafikler Şekil 4.9 deki gibi çizildi.



Şekil 4.9. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kolon için çatlak derinliği ve çatlak konumuna bağlı olarak birinci kritik burkulma yükünün Euler burkulma yüküne göre değişimi

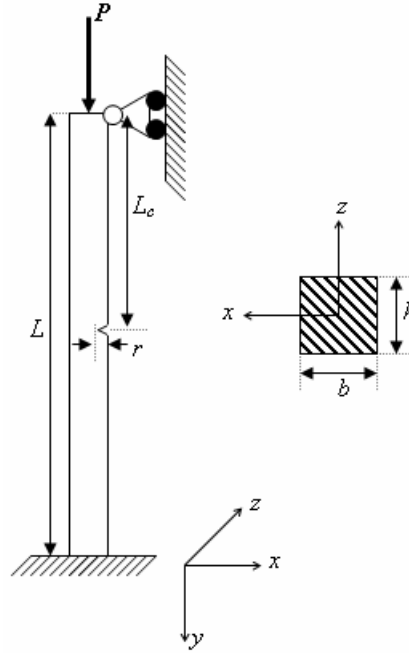
4.2.3. Bulgular

Mekanik ve geometrik özellikleriyle Şekil 4.7 deki gibi verilen çatlaksız bir kolon için kritik burkulma yükünün analitik değeri ile hazirlanan programla bulunan değeri arasında % 0.05 gibi gayet küçük bir fark gözlemlendi. Bu da hazirladığımız programın güvenilirliğini göstermiş oldu. Ayrıca sistemde tam orta noktada 0.02 m derinliğinde bir çatlak olduğu zamanki kritik burkulma yükleri sistem iki eşit parçaya bölünerek sonlu elemanlar yardımıyla ve yine aynı yöntemi kullanarak analiz yapan programla hesaplandı. Aynı yöntemin kullanıldığı bu iki sonuç arasında yaklaşık % 2 miktarında bir fark gözlemlendi. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kolonlarda sabit

çatlak derinliğinde, ankastre uca yakın bölgelerde meydana gelen çatlakların sistemin kritik burkulma yükünde daha büyük miktarda düşüşlere neden olduğu gözlemlendi. Bunun nedeni de yine önceki kısımda belirtildiği gibi momentin büyük olduğu bölgelerdeki çatlakların yüksek enerji düşüşüne sebep olmalarıdır.

4.3. Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Mafsallı Kolon

Şekil 4.10. daki gibi bir ucu ankastre diğer ucu mafsallı kolona ait kritik burkulma yüküne ait sonuçlar hazırlanmış program yardımıyla hesaplanmıştır. Kolonda $E = 2.10^4$ MPa, $L = 9$ m ve $b = h = 0,2$ m ve kritik narinlik oranı $n_{kr} = 90$ olarak verilmiştir.



Şekil 4.10. Tek çatlak içeren bir ucu ankastre diğer ucu mafsallı kolon

4.3.1. Analitik çözüm

Daha önceki bölümlerde de yapıldığı gibi ilk olarak uygulamada verilen kolonun narinlik oranı (3.50) eşitliği kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplandı;

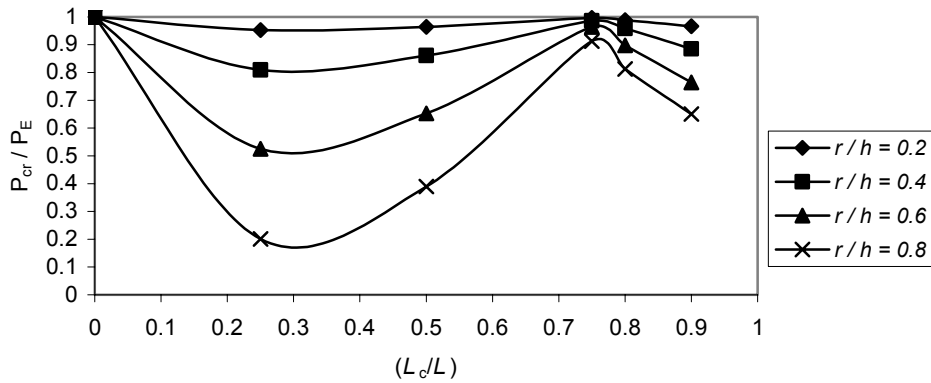
$$n = \frac{L_b}{i} = \frac{0.7 * 9}{\sqrt{\frac{0.2 * 0.2^3}{12}}} = 109.1 \quad (4.18)$$

(4.18) eşitliğinde bulunan narinlik oranı sistem için verilen kritik narinlik oranından büyük olduğundan, çatlaksız kolon için kritik burkulma yükü (3.48) denklemiyle aşağıdaki gibi hesaplandı;

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2} = \frac{\pi^2 * 2 * 10^{10} * 1.333 * 10^{-4}}{(0.7 * 9)^2} = 661 454.97 \text{ N} \quad (4.19)$$

4.3.2. Hazırlanan programla çözüm

Uygulamada verilen mekanik ve geometrik özelliklere sahip fakat çatlak içermeyen kolon için burkulma yükü hazırlanan programla $P_{prog} = 661 850 \text{ N}$ olarak hesaplandı. Şekil 4.10.' da verilen sisteme ait kritik burkulma yükleri değişik çatlak boyu ve yeri için hazırlanan programla hesaplandı ve bir önceki bölümdeki gibi kritik burkulma yükünün çatlak içermeyen kirişe ait Euler burkulma yüküne oranı ile çatlak konumunun değişik çatlak derinlikleriyle değişimini gösteren grafikler Şekil 4.11.' deki gibi çizildi.



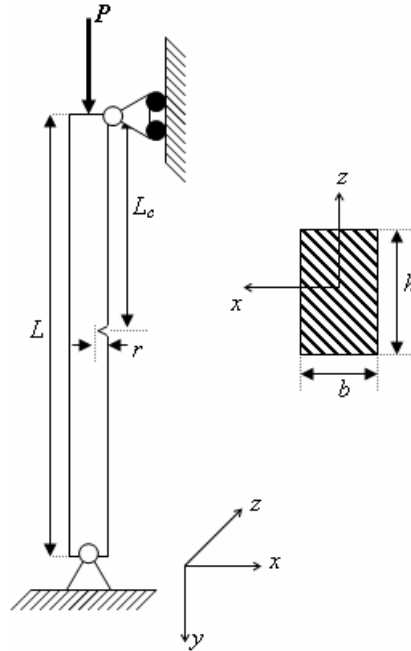
Şekil 4.11. Bir ucu ankastre diğer ucu mafsallı kolon için çatlak derinliği ve çatlak konumuna bağlı olarak birinci kritik burkulma yükünün Euler burkulma yüküne göre değişimi

4.3.3. Bulgular

Mekanik ve geometrik özellikleriyle Şekil 4.7. deki gibi verilen çatlaksız bir kolonda meydana gelecek kritik burkulma yükünün analitik değeri ile hazırlanan programla bulunan değeri arasında % 0.06 fark gözlemlendi. Bu da hazırladığımız programın güvenilirliğini göstermiş oldu. Ayrıca bir ucu ankastre diğer ucu mafsallı kolonda $L_c = 0.35L$ konumunda meydana gelen çatlakın sistemin burkulma yükünde büyük miktarda düşüşe neden olduğu gözlemlendi.

4.4. Her İki Ucu Mafsallı Kolon

Bu bölümde Şekil 4.12.' deki gibi her iki ucu mafsallı kolona ait kritik burkulma yükü değerleri değişik çatlak yeri ve derinliği için hazırlanan program yardımıyla hesaplandı. Kolonda $E = 200$ GPa, $L = 320$ mm, $h = 5$ mm, $b = 20$ mm ve $n_{kr} = 105$ olarak verilmiştir.



Şekil 4.12. Tek çatlak içeren her iki ucu mafsallı kolon

4.4.1. Analitik çözüm

Daha önceki bölümlerde de yapıldığı gibi ilk olarak uygulamada verilen kolonun narinlik oranı (3.50) eşitliği kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplandı;

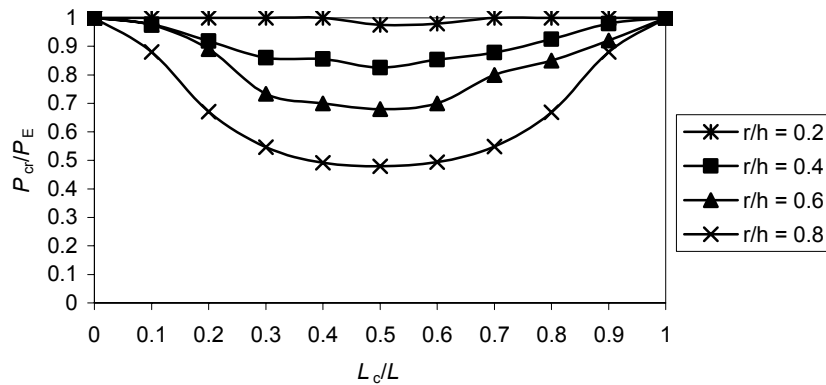
$$n = \frac{L_b}{i} = \frac{320}{\sqrt{\frac{20 * 5^3}{12}}} = 221.7 \quad (4.20)$$

(4.20) eşitliğinde bulunan narinlik oranı sistem için verilen kritik narinlik oranından büyük olduğundan, çatlaksız kolon için kritik burkulma yükü (3.26) denklemiyle aşağıdaki gibi hesaplandı;

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 * 2 * 10^{11} * 208.333 * 10^{-12}}{(320 * 10^{-3})^2} = 4 015.946 \text{ N} \quad (4.21)$$

4.4.2. Hazırlanan programla çözüm

Uygulamadaki mekanik ve geometrik özelliklere sahip fakat çatlak içermeyen kolon için burkulma yükü hazırlanan programla $P_{prog} = 4 015 \text{ N}$ olarak hesaplandı. Ayrıca yine hazırlanan program aracılığıyla Şekil 4.12.' de gösterilen sistemde değişik çatlak yeri ve konumuna göre burkulma yükleri hesaplandı ve daha önceki bölümlerdeki gibi sonuçlar Şekil 4.13.' de gösterildi.



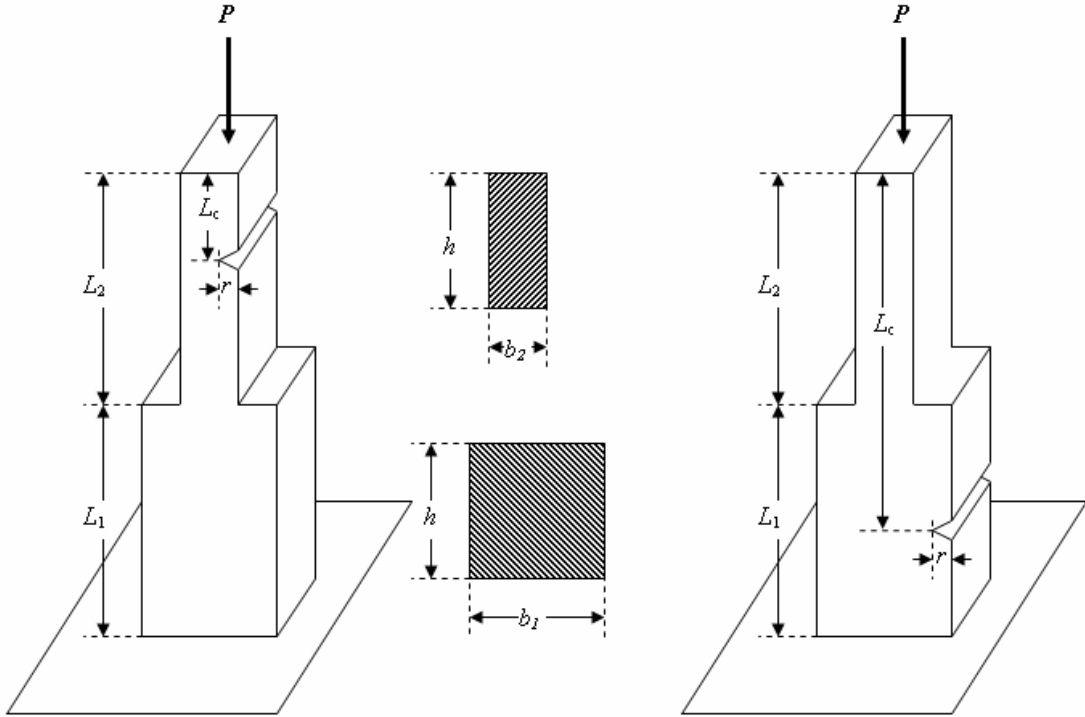
Şekil 4.13. Her iki ucu mafsallı kolon için çatlak derinliği ve çatlak konumuna bağlı olarak birinci kritik burkulma yükünün Euler burkulma yüküne göre değişimi

4.4.3. Bulgular

Mekanik ve geometrik özellikleriyle Şekil 4.12.' de ki gibi verilen çatlaksız bir kolon için kritik burkulma yükünün analitik değeri ile hazırlanmış olduğumuz programla bulunan değeri arasında % 0.02 fark gözlemlendi. Bu da hazırlanan programın güvenilirliğini bir kez daha göstermiş oldu. Her iki ucu mafsallı kolonda kolonun tam orta noktasında meydana gelen çatlağın sistemin burkulma yükünde maksimum düşüşe neden olduğu ayrıca mafsal noktalarına yakın bölgelerde meydana gelen çatlağın sistemin stabilite davranışı üzerinde ihmal edilebilecek kadar küçük etkilere sahip olduğu gözlemlendi.

4.5. Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Ani Değişken Kesitli Kolon

Bu bölümde daha önceki bölümlerdekinden farklı olarak süreksiz, ani değişken kesite sahip tek çatlaklı kolona (Şekil 4.14) ait burkulma yükü değerleri hesaplanmıştır. Şekil 4.14.' deki sistemde $b_1 = 0.8$ m, $b_2 = 0.2$ m, $h_1 = h_2 = 0.2$ m, $L_1 = L_2 = 3$ m, $E = 200 \cdot 10^9$ Pa ve $n_{kr} = 100$ olarak verilmiştir.



Şekil 4.14. Tek çatlak içeren bir ucu ankastre diğer ucu serbest süreksiz değişken kesitli kolon

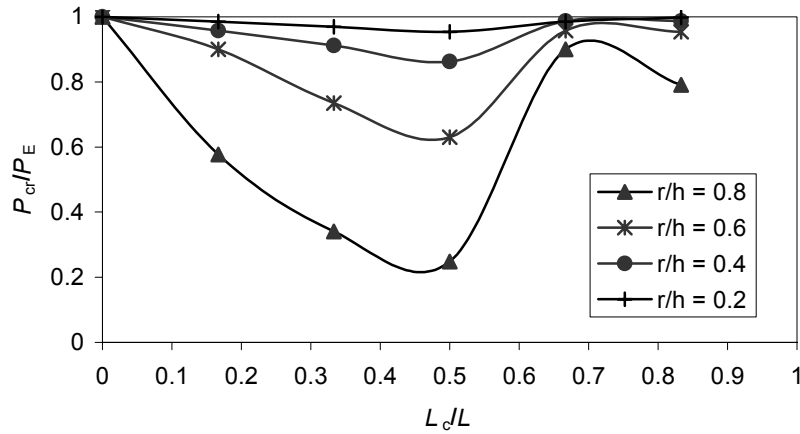
4.5.1. Analitik çözüm

Şekil 4.14. de verilen özelliklere sahip fakat çatlak içermeyen sisteme ait kritik burkulma yükü Koksal ve Koksal (1996) literatüründe verilen (4.22) formülüyle aşağıdaki gibi hesaplandı;

$$P = 1.513 \frac{EI_1}{L^2} = 1.513 \frac{2 * 10^{11} * \frac{0.8 * 0.2^3}{12}}{6^2} = 4 482 962.9 \text{ N} \quad (4.22)$$

4.5.2. Hazırlanan programla çözüm

Şekil 4.14.' de verilen geometrik ve mekanik özelliklere sahip fakat çatlak içermeyen kolon için kritik burkulma yükü program yardımıyla $P_{prog} = 4 485 000 \text{ N}$ olarak bulundu. Daha sonra Şekil 4.12.' deki sistemde değişik çatlak boyutu ve çatlak konumu için burkulma yükü değerleri hazırlanan program yardımıyla hesaplandı. Çatlağın etkisinin daha rahat görülebilmesi için daha önceki bölümlerde bulunan grafiklere benzer bir grafik Şekil 4.15.' deki gibi çizildi.



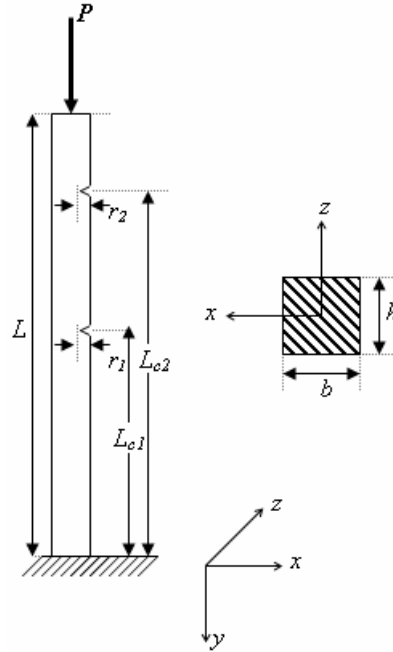
Şekil 4.15. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest, ani değişken kesitli kolon için çatlak derinliği ve çatlak konumuna bağlı olarak birinci kritik burkulma yükünün Euler burkulma yüküne göre değişimi

4.5.3. Bulgular

Mekanik ve geometrik özellikleriyle Şekil 4.14.' deki gibi verilen çatlaksız bir kolon için kritik burkulma yükünün analitik değeri ile hazırlanmış olduğumuz programla bulunan değeri arasında % 0.045 fark gözlemlendi. Bu da hazırladığımız programın güvenilirliğini bir kez daha göstermiş oldu. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest, değişken kesitli kolonda burkulma yükündeki en büyük düşüşlerin kesit farklılıklarının bulunduğu noktada (bu örnek için $0.5L$) meydana gelen çatlaklarla oluştuğu gözlemlendi ayrıca sistemin ince kesitinde meydana gelen çatlakların yapının burkulma yükünün azalmasında daha çok etkili olduğu görüldü.

4.6. Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Çift Çatlaklı Kolon

Bu bölümde Şekil 4.16.' daki gibi bir ucu ankastre diğer ucu serbest ve çift çatlaklı bir kolonda meydana gelecek birinci kritik burkulma yükü hazırlanan program aracılığıyla sayısal olarak hesaplandı. Şekil 4.16.' daki sistemde $b = h = 0.2$ m, $L = 3$ m, $E = 2 \cdot 10^4$ MPa ve $n_{kr} = 100$ olarak verilmiştir.



Şekil 4.16. Çift çatlak içeren bir ucu ankastre diğer ucu serbest kolon

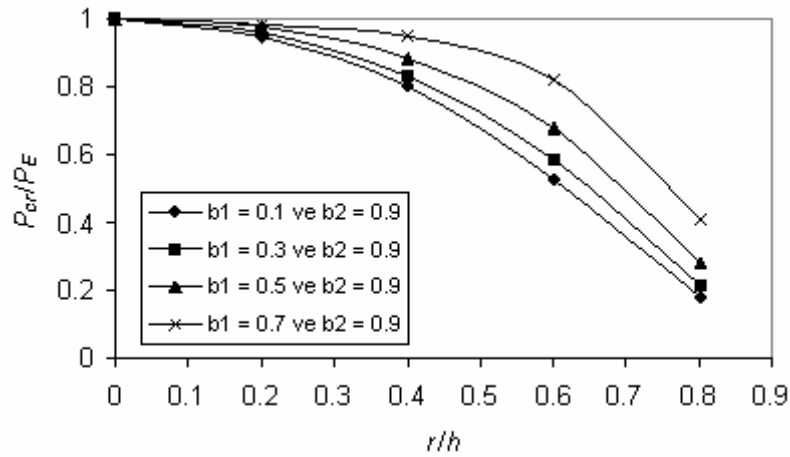
4.6.1. Analitik çözüm

Şekil 4.16 de verilen kolonun çatlaksız haline ait narinlik oranı (4.10) eşitliğinde ve burkulma yükü (4.11) eşitliğinde verilenlerin aynısıdır. Dolayısıyla bu bölümde tekrar hesaplanmamıştır.

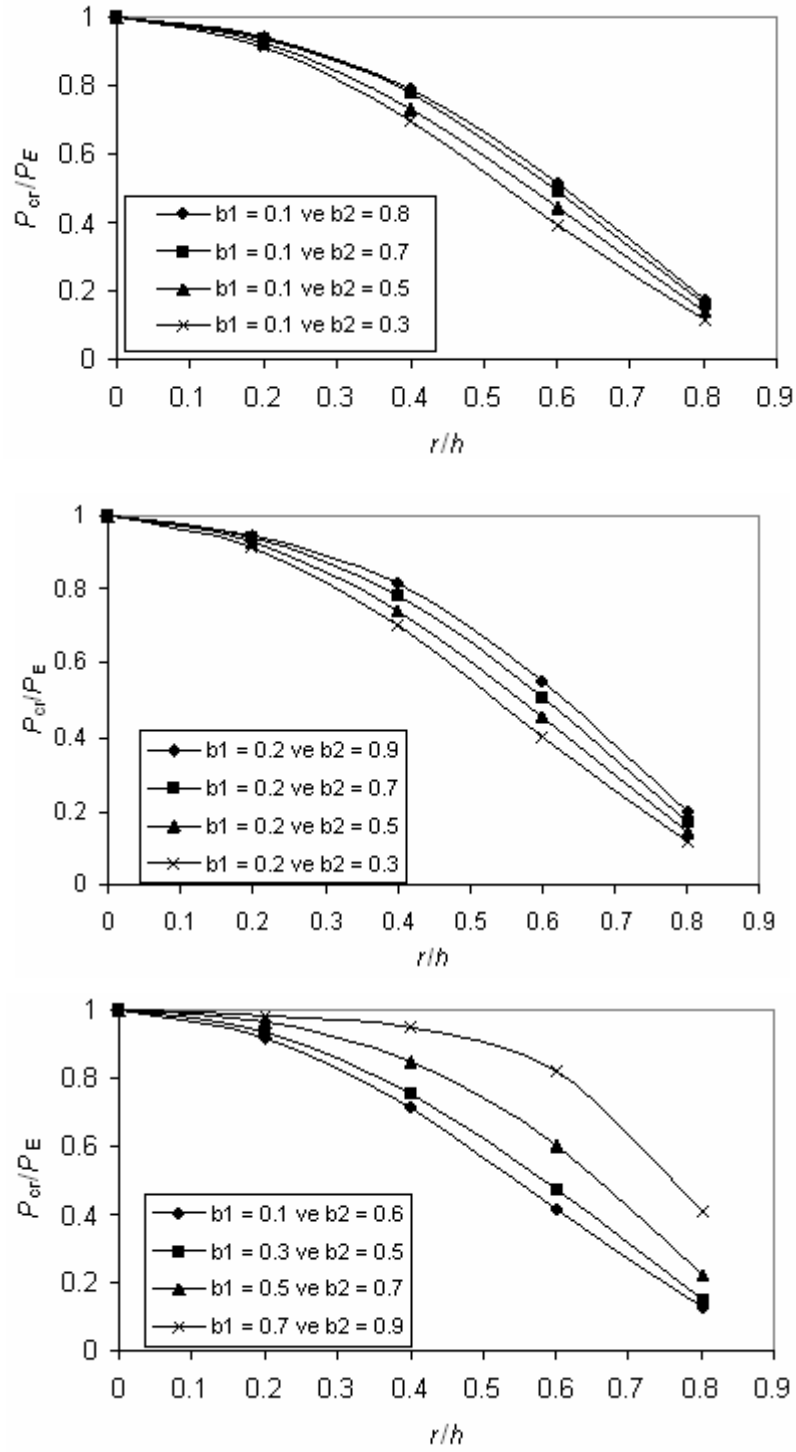
4.6.2. Hazırlanan programla çözüm

Şekil 4.16 da görülen sistem için kritik burkulma yükü değerinin analitik olarak çözümüne literatürlerde pek rastlanmamıştır. Bu bölümde sonlu elemanlar yöntemi esas olarak hazırlamış olduğumuz program yardımıyla bu sistem için kritik burkulma yükü değeri hesaplandı. Hesap aşamasında çatlak boyları eşit alındı ve her iki çatlağın değişik konumları için analizler yapıldı. Sonuçların daha iyi anlaşılması için değişik konumlara ait grafikler farklı çizelgelerle oluşturuldu ve sonuçlar aşağıdaki şekillerde verildi. Grafiklerin kaynak verisi kısmında görülen b_1 ve b_2 sembolleri (4.23) denklemlerindeki gibidir.

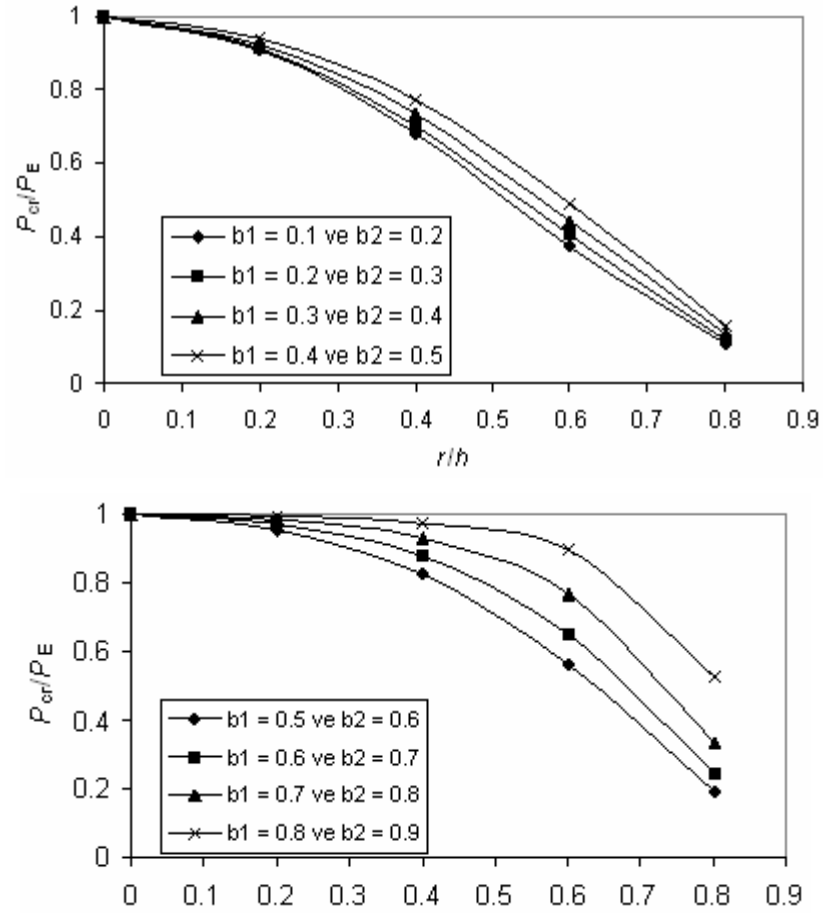
$$b_1 = \frac{L_{c1}}{L} \quad b_2 = \frac{L_{c2}}{L} \quad (4.23)$$



Şekil 4.17. Çift çatlaklı kolona ait kritik yük değerlerinin çatlak boyu ve konumuna bağlı değişimleri



Şekil 4.17.(devam) Çift çatlaklı kolona ait kritik yük değerlerinin çatlak boyu ve konumuna bağlı değişimleri



Şekil 4.17.(devam) Çift çatlaklı kolona ait kritik yük değerlerinin çatlak boyu ve konumuna bağlı değişimleri

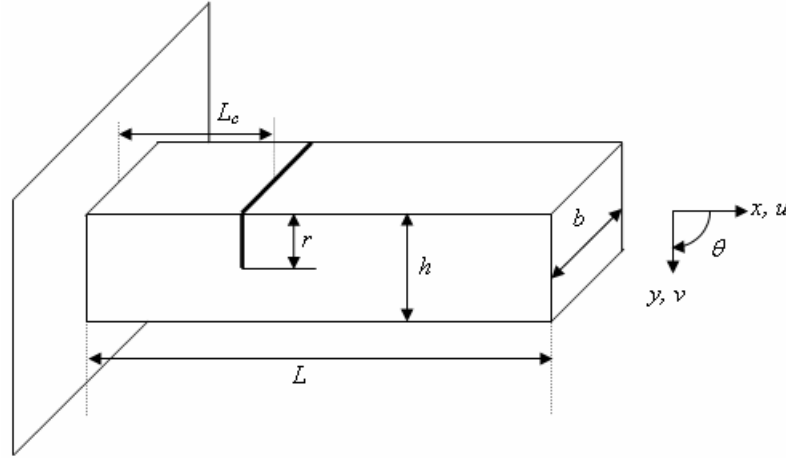
4.6.3. Bulgular

Bu uygulamada verilen mekanik ve geometrik özelliklere sahip fakat çatlak içermeyen sisteme ait bulgular daha önceki bölümde (4.2.3 bölümü) belirtilmişti. Bunlara ek olarak bir ucu ankastre diğer ucu serbest çift çatlaklı kolonda çatlaklar ankastre bölgeye yaklaştıkça burkulma yükündeki düşüşlerin daha da arttığı gözlemlenmiştir.

4.7. Titreşim Analizi

Çalışmamızın bu bölümünde hazırlanan program aracılığıyla tek çatlaklı bir Timoshenko kirişine ait serbest titreşim analizi yapılarak kirişin sahip olduğu doğal frekans ve doğal vektörler elde edildi. Şekil 4.18.' de gösterilen Timoshenko kirişinin geometrik özellikleri; $L = 0.2$ m, $b = 0.0078$ m ve $h = 0.025$ m şeklinde ve mekanik özellikleri ise; $E = 216 \cdot 10^9$ N/m², $\nu = 0.28$ ve $\rho = 7.85 \cdot 10^3$ kg/m³ şeklindedir.

İlk olarak yukarıda bahsedilen geometrik ve mekanik özelliklere sahip kusursuz bir kirişe ait ilk üç doğal frekans değerleri sırasıyla 1 037, 6 458, 17 960 Hz şeklinde hesaplanmıştır. Daha sonra tek çatlaklı Timoshenko kirişi için farklı çatlak yerleri ve oranları için ilk üç doğal frekans değerleri hazırlanan programla hesaplandı ve aşağıdaki çizelgelerde bulunan değerler elde edildi. Çizelgelerden de görüleceği gibi çatlak yeri oranı 0.2, 0.4, 0.6 ve 0.8 olarak değişirken çatlak oranı da 0.2, 0.4, 0.6 ve 0.8 olarak değişmektedir.



Şekil 4.18. Tek çatlaklı Timoshenko kirişi

Çizelge 4.7. Tek çatlaklı Timoshenko kirişinin 1. doğal frekansının çatlak yeri ve çatlak boyutlarına bağlı değişimi

L_c/L oranı	r/h oranı 0.20	r/h oranı 0.40	r/h oranı 0.60	r/h oranı 0.80	Kusursuz Kiriş
0.20	1 020.137	966.9525	842.2205	551.0463	1 037.0189
0.40	1 030.095	1 006.856	942.7322	724.2739	1 037.0189
0.60	1 035.284	1 029.262	1 010.864	920.7848	1 037.0189
0.80	1 036.884	1 036.414	1 034.943	1 026.769	1 037.0189

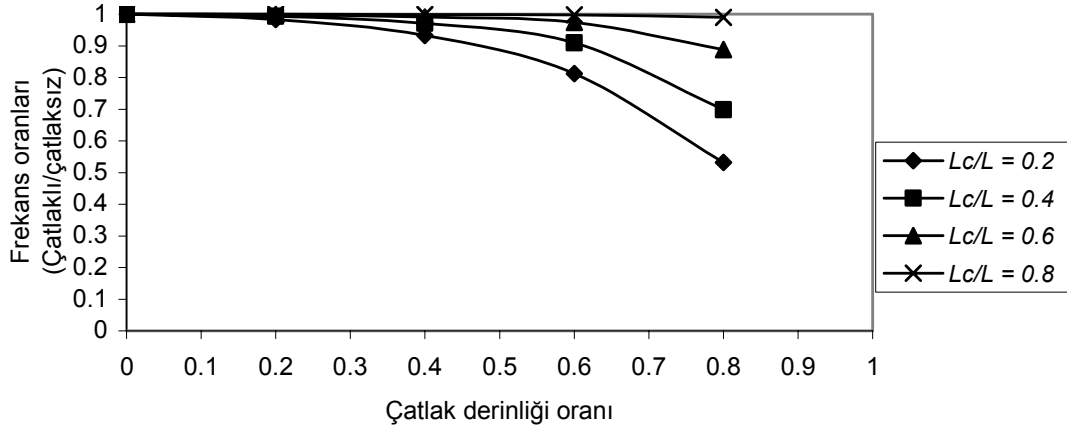
Çizelge 4.8. Tek çatlaklı Timoshenko kirişinin 2. doğal frekansının çatlak yeri ve çatlak boyutlarına bağlı değişimi

L_c/L oranı	r/h oranı 0.20	r/h oranı 0.40	r/h oranı 0.60	r/h oranı 0.80	Kusursuz Kiriş
0.20	6 457.396	6 454.483	6 448.175	6 436.008	6 458.3438
0.40	6 389.394	6 174.539	5 689.841	4 728.978	6 458.3438
0.60	6 365.914	6 071.655	5 371.803	3 798.216	6 458.3438
0.80	6 440.057	6 375.921	6 174.710	5 169.264	6 458.3438

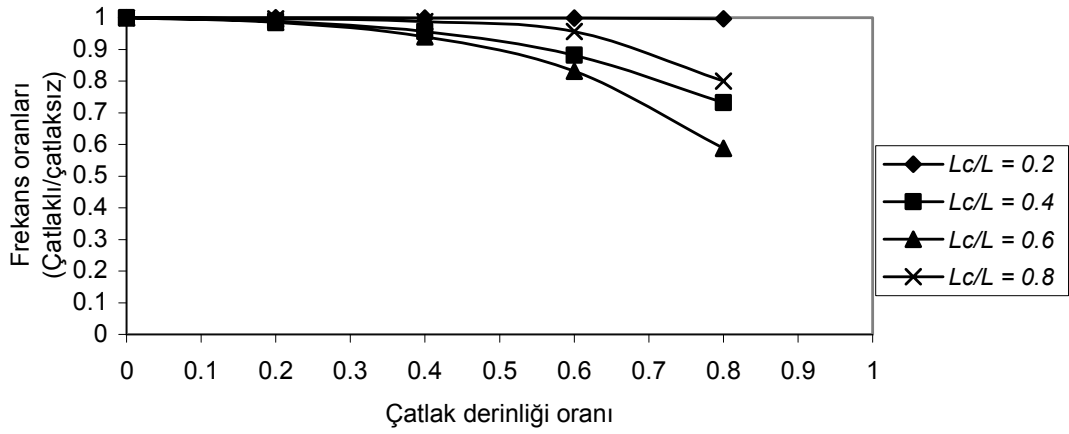
Çizelge 4.9. Tek çatlaklı Timoshenko kirişinin 3. doğal frekansının çatlak yeri ve çatlak boyutlarına bağlı değişimi

L_c/L oranı	r/h oranı 0.20	r/h oranı 0.40	r/h oranı 0.60	r/h oranı 0.80	Kusursuz Kiriş
0.20	17 872.91	17 596.57	16 944.56	15 512.55	17 960.564
0.40	17 844.86	17 499.83	16 792.25	15 606.35	17 960.564
0.60	17 807.94	17 359.27	16 478.82	15 153.19	17 960.564
0.80	17 758.61	17 077.99	15 286.83	11 353.18	17 960.564

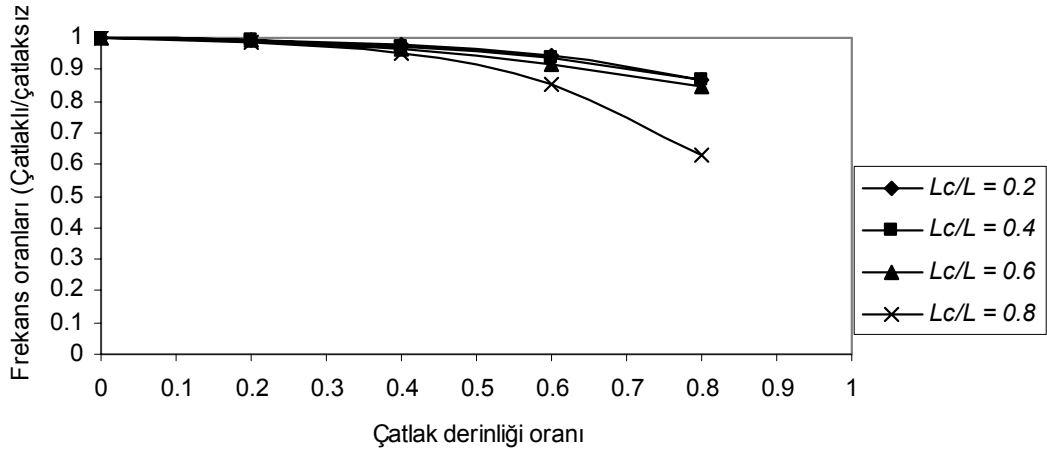
Elde edilen sonuçların daha ayrıntılı olarak incelenebilmesi için burkulma analizi kısmında çizilen grafiklere benzer grafikler Şekil 4.19, Şekil 4.20 ve Şekil 4.21 deki gibi çizilmiştir.



Şekil 4.19. Tek çatlaklı Timoshenko kirişinin 1. doğal frekansının çatlak yeri ve çatlak boyutlarına bağlı değişimi



Şekil 4.20. Tek çatlaklı Timoshenko kirişinin 2. doğal frekansının çatlak yeri ve çatlak boyutlarına bağlı değişimi



Şekil 4.21. Tek çatlaklı Timoshenko kirişinin 3. doğal frekansının çatlak yeri ve çatlak boyutlarına bağlı değişimi

4.7.1. Bulgular

Mekanik ve geometrik özellikleriyle Şekil 4.18.' deki gibi verilen çatlaksız bir kirişte meydana gelecek birinci doğal frekansının analitik değeri ile hazırlanan programla bulunan değeri arasında % 0.045 fark gözlemlendi.

Titreşim analizi için oluşturulan çizelgeler incelenince aynı çatlak yerine sahip bir kirişin farklı çatlak oranları için sahip olacağı doğal frekansları görüldü.

Tablolardan görüleceği üzere çatlak oranı artıkça frekans düşümü de artmaktadır. 1. doğal frekansları aynı çatlak oranı ve farklı çatlak yerleri için incelenice, çatlak yeri 0.2 ve çatlak oranı 0.2 iken 1. doğal frekans 1 020, çatlak yeri 0.4 ve çatlak oranı 0.2 iken 1. doğal frekans 1 030, çatlak yeri 0.6 ve çatlak oranı 0.2 iken 1. doğal frekans 1035, çatlak yeri 0.8 ve çatlak oranı 0.2 iken 1. doğal frekans 1 036 olduğu görülmektedir. Görüldüğü gibi çatlak, ankastre mesnetten uzaklaştıkça 1. doğal frekansta görülen düşüşte azalmaktadır. Dolayısıyla ankastre mesnetten uzak olan bir çatlağın çatlak oranı büyük olsa bile 1. doğal frekans yardımıyla tespit edilmesi güçtür. Çatlak içeren bir konsol kirişte çatlağın ankastre mesnede yakın olduğu ve çatlak oranının arttığı durumlarda maksimum frekans düşümleri elde edilmiştir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Yapılan bu çalışmanın ardından aşağıdaki maddelerde belirtilen sonuçlar elde edildi.

- Değişik sınır şartlarına sahip çatlak içeren kolonların burkulma analizinde sonlu elemanlar yönteminin basit ve etkili bir yöntem olduğu ve hazırlanan programın güvenilir sonuçlar verdiği,
- Çatlağın kolonların burkulma yükleri üzerindeki etkilerinin çatlağın derinliği ve konumuna bağlı olduğu,
- Çatlak konumunun sınır şartlarına bağlı olarak değişik etkiler oluşturduğu,
- Eğilme momenti dağılımının burkulma yükü üzerinde etkili olduğu,
- Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kolonlarda sabit çatlak derinliğinde, ankastre uca yakın bölgelerde meydana gelen çatlakların sistemin kritik burkulma yükünde daha büyük miktarda düşüşlere neden olduğu,
- Ayrıca bir ucu ankastre diğer ucu mafsalı kolonda $L_c = 0.35L$ konumunda meydana gelen çatlağın sistemin burkulma yükünde büyük miktarda düşüşe neden olduğu,
- Her iki ucu mafsalı kolonda kolonun tam orta noktasında meydana gelen çatlağın sistemin burkulma yükünde maksimum düşüşe neden olduğu ayrıca mafsal noktalarına yakın bölgelerde meydana gelen çatlağın sistemin stabilite davranışı üzerinde ihmal edilebilecek kadar küçük etkilere sahip olduğu,
- Bir ucu ankastre diğer ucu serbest, değişken kesitli kolonda burkulma yükündeki en büyük düşüşlerin kesit farklılıklarının bulunduğu noktada meydana gelen çatlaklarla oluştuğu, ayrıca sistemin ince kesitinde meydana gelen çatlakların yapının burkulma yükünün azalmasında daha çok etkili olduğu,

- Bir ucu ankastre diğer ucu serbest çift çatlak içeren kolonda çatlakların ankastre bölgeye yaklaştıkça burkulma yükündeki düşüşlerde artışa neden olduğu,
- Çatlak içeren bir konsol kirişte çatlağın ankastre mesnede yakın olduğu ve çatlak oranının arttığı durumlarda maksimum frekans düşümlerinin elde edildiği,
- Hazırlanan deney setleriyle elde edilen sonuçlarla, analitik ve nümerik sonuçlar arasında yaklaşık % 0.05 ile % 4 arasında değişen hatalar olduğu, bu da deney düzeneği oluşturulurken uygun şartların tam olarak elde edilemediği ve kullanılan numunelerin tam olarak homojen davranmadığından kaynaklanabileceği sonucuna varılmıştır.

5.2. Öneriler

- Güvenirliği ispatlanan bilgisayar programı kompozit malzemeler için analiz yapacak şekilde geliştirilebilir,
- Hazırlanan program dairesel kesitli çubuklar için geliştirilebilir,
- Birden çok çatlak içeren değişik sınır şartlarına sahip çubuklar için analiz yapılarak sonuçlar karşılaştırılabilir,
- Hazırlanan deney düzeneği daha da hassaslaştırılarak daha net deneysel sonuçlar elde edilebilir,
- Yapılacak deneyler sonucunda elde edilecek veriler kullanılarak yapıların burkulma ve titreşim problemlerini ifade edecek bir formulasyon geliştirilebilir,
- Program lineer olmayan değişken kesitli çubuklar için geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

- ANIFANTIS, N., and DIMAROGONAS, A., 1983. Stability of columns with a single crack subjected to follower and vertical loads. *Solid Structures*, 19(3): 281-372.
- ARI-GUR, J., and ELISHAKOFF, I., 1990. The effect of shear deformation on buckling of columns with overhang. *Sound Vibration*, 139(4): 165-174.
- BAKIOĞLU, M., ENGİN, H., ve KADIOĞLU, N., 2000. *Mukavemet Problemleri*. Beta Basım A. Ş., İstanbul, 305s.
- COWPER, G.R., 1966. The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. *ASME Journal of Applied Mechanics*, pp. 335-340.
- EULER, L. 1744. *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentas*. Appendix, *De Curvis Elasticis*, Marcum Michaelen Bosquet, Lausanne.
- FAN, S.C., ZHENG, D.Y., and AU, F.T.K., 2001. Gibbs Phenomenon Free Fourier Series for Vibration and Stability of Complex Beams. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 39(10): 1977-1984.
- GUREL, M.A., and KISA, M., 2005. Buckling of Slender Prismatic Columns with a Single Edge Crack under Concentric Vertical Loads, *Turkish J. Eng. Env. Sci.*, 29: 185 – 193.
- GUREL, M.A., KISA, M., and CILI, F., 2006. Lateral Stiffness of Unreinforced Masonry Circular Columns under Cracked Conditions, *Turkish J. Engineering and Environmental Sciences*, 30: 1-12.
- IBRAHİM, F.K., 1995. Matrix Analysis of Stability Behavior of Cracked Columns. *J. Struct. Eng.*, 21(4): 257-266.
- IRWIN, G., 1960. *Fracture Mechanics, Structural Mechanics*, Editors J.N. Goodier and N. J. Hoff, Pergamon Press, New York. 368p.
- IYENGAR, NGR., 1988. *Structural stability of columns and plates*. John Wiley and Sons, New York, 256p.
- KAYAN, İ., 1987. *Cisimlerin Mukavemeti*. İstanbul Teknik Üniversitesi Matbaası, İstanbul, 732s.
- KIM, KH., and KIM, JH., 2000. Effect of a Crack on the Dynamic Stability of a Free-Free Beam Subjected to a Follower Force. *Journal of Sound and Vibration*, 233(1): 119-135.
- KIRSHOFF, G.R. 1859. Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines Unendlich Dünnen Elastischen Stabes. *J. Math*, 56: 285-313.
- KISA, M., 2004. Free Vibration Analysis of a Cantilever Composite Beam with Multiple Cracks. *Composites Science and Technology*, 64(9): 1391-1402.
- KISA, M., and BRANDON, J.A., 1997. A Numerical Study of The Dynamics of a Cracked Beam. *Sixth International Conference. Recent Advances in Structural Dynamics*, Southampton, 1: 811-821.
- KISA, M., and BRANDON, J., 2000. The Effects of Closure of Cracks on the Dynamics of a Cracked Cantilever Beam. *Journal of Sound and Vibration*, 238(1): 1-18.

- KISA, M., and BRANDON, J.A., 2000. Free Vibration Analysis of Multiple Open-edge Cracked Beams by Component Mode Synthesis. *Structural Engineering and Mechanics*, 10(1): 81-92.
- KISA, M., BRANDON, J., TOPÇU, M., 1998. Free Vibration Analysis of Cracked Beams by a Combination of Finite Elements and Component Mode Synthesis Methods. *Computers and Structures*, 67(4): 215-223.
- KISA, M., and GUREL, M.A., 2000. Kusurlu Yapılarda Çatlaktan Dolayı Meydana Gelen Direngenliğin Bulunması ve Bilgisayar Programı. *Malzeme 2000 8. Denizli Malzeme Sempozyumu*, pp. 192-203, Denizli.
- KISA, M., and GUREL, M.A., 2005. Modal Analysis of Cracked Cantilever Composite Beams. *Structural Engineering and Mechanics*, 20(2): 143-160.
- KISA, M., and GUREL, M.A., 2006. Modal analysis of multi-cracked beams with circular cross section, *Engineering Fracture Mechanics*, 73(8): 963-977.
- KISHEN, J.M., and KUMAR, A., 2004. Finite Element Analysis for Fracture Behavior of Cracked Beam-Columns. *Finite Element in Analysis and Design*, 40(2004): 1773-1789.
- KÖKSAL, T., ve KÖKSAL, E., 1996. Çubuk Plak Kabuk Stabilitesi. Yıldız teknik Üniversitesi Matbaası, İstanbul, 455s.
- LI, Q.S., 2002. Classes of Exact Solutions for Buckling of Multi-step Non-uniform Columns with an Arbitrary Number of Cracks Subjected to Concentrated and Distributed Axial Loads. *International Journal of Engineering Science*, 41(2003): 569-586.
- LI, Q.S., CAO, H., LI GQ., 1995. Stability Analysis of Bars with Varying Cross-section. *Solids Structures*, 32(21): 3217-3245.
- LI, QS., CAO, H., LI GQ., 1994. Stability Analysis of a Bar with Multi-segment Varying Cross-section. *Computure Structures*, 35(5):1085-1094.
- LIANG, RH., HU, J., CHOY, F., 1992. Theoretical study of crack-induced eigenfrequency changes on beam structures. *Engineering Mechanics*, 118(2): 384-480.
- LIEBOWITZ, H., VANDERVELDT, H., HARRIS, D.W., 1967. Carrying Capacity of Notched Columns. *Int. J. Solids Structures*, 3: 489–500.
- LIEBOWITZ, H. & CLAUSS, W.D. 1968. Failure of Notched Columns. *Eng. Fract. Mech.*, 1: 379-383.
- LIU, Y., 1997. Introduction to Finite Element Method. <http://urbana.mie.uc.edu/yliu/FEM-525/FEM-525.htm>
- MARZANI, A., and VIOLA, E., 2003. Effect of Boundary Conditions on The Stability of Beams Under Conservative and Non-Conservative Forces. *Structural Engineering and Mechanics*, 16(2):195 – 217
- OKAMURA, H., LIU, H.W., CHU, C.S., 1969. A Cracked Column Under Compression. *Eng. Fract. Mech.*, 1: 547–564.
- OZEN, M., KISA, M., DENİZ, M.E., and GUREL, M.A., 2006. Effects of Cracks on the Stability Behavior of Structures. *Proc. 5th GAP Engineering Congress (with international participation)*, Vol. 1, pp. 311-317, Sanliurfa.
- OZEN, M., DENİZ, M.E., KISA, M., and GUREL, M.A., 2005. Stability analysis of cracked columns. *Proc. 7th International Fracture Conference*, pp. 233-243, Kocaeli.

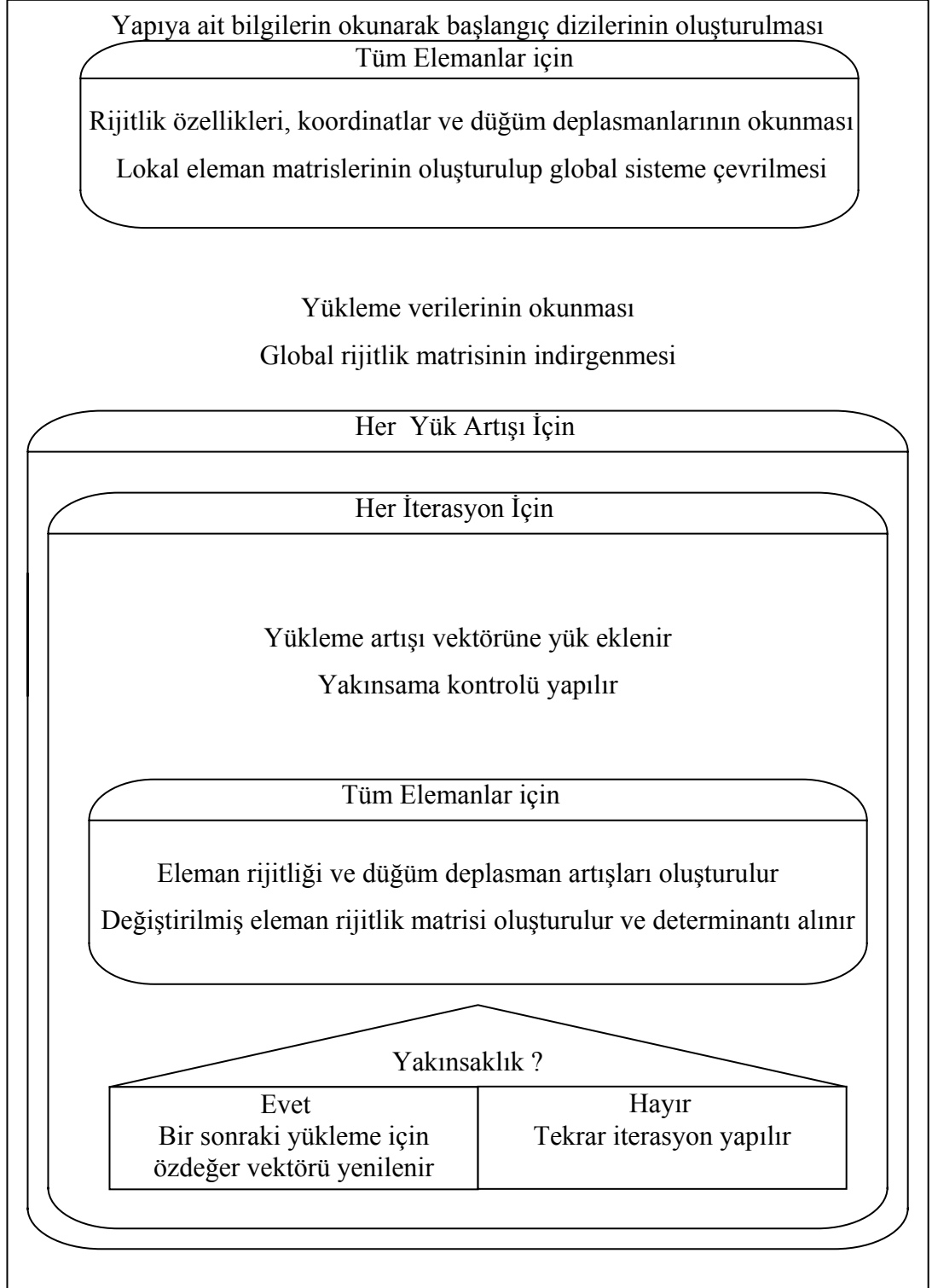
- PAPADOPOULUS, C.A., and DIMAROGONAS, A.D., 1987. Coupled Longitudinal and Bending Vibrations of a Rotating Shaft with an Open Crack. *Journal of Sound and Vibration*, 117(1): 81-93.
- POPOV, E.P., 1990. Mukavemet. Çağlayan Basımevi, İstanbul, 662s.
- SAOUMA, V.E., 1999. Finite Element Analysis of Frames. <http://ceae.colorado.edu/~saouma/Lecture-Notes/lecmat.pdf>.
- SHIFRIN, EI., and RUOTOLO, R., 1999. Naturel frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks. *Sound Vibration*, 222(3):409-432.
- SMITH, I.M., and GRIFFITHS, D.V., 1988. Programming The Finite Element. Thomson Press Limited, New Delhi, 467p
- TADA, H., PARIS, P.C., IRWIN, G.R., 2000. The Stress Analysis of Cracks Handbook, Second Edition, Paris Production Incorporated and Del Research Corporation, St Louis, Missouri, 696p.
- TAKASHI, I., 1998. Vibration and Stability of Non-uniform Cracked Timoshenko Beam Subjected to Follower Force. *Computers and Structures*, 71(1999): 585-591.
- TOPÇU, M., ve TAŞGETİREN, S., 1998. Mühendisler İçin Sonlu Elemanlar Metodu. Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Matbaası, Denizli, 289s.
- TIMOSHENKO, S.P., and GERE, J.M., 1961. Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill, New York, 212p.
- UĞUZ, A., 1996. Kırılma Mekaniğine Giriş, Uludağ üniversitesi Basımevi, Bursa, 160s.
- ZHENG, D.Y., and FAN, S.C., 2001. Natural Freqeuncies Changes of a Cracked Timoshenko Beam by Modified Fourier Series. *Journal of Sound and Vibration*, 246(2): 297-317.
- ZHENG, D.Y., and FAN, S.C., 2001. Natural Freqeuncies of a Non-uniform Beam with Multiple Cracks Via Modified Fourier Series. *Journal of Sound and Vibration*, 242(2): 701-717.

ÖZGEÇMİŞ

Şanlıurfa ilinin Siverek ilçesinde 15.05.1977 tarihinde doğdu. İlk öğrenimini Siverek Gazipaşa İlkokulu ve ortaokul – lise öğrenimini Şanlıurfa Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 1995 yılında İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği bölümünü kazandı. 1999 yılı Bahar döneminde mezun oldu. 2003 yılının aralık ayında Harran Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. 2004 yılı bahar döneminde Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans yapmaya hak kazandı.

EK 1

Sonlu Elemanlar Metodunu Kullanarak Stabilité Analizi Yapan Programa Ait Akış Şeması



Ek Şekil 1. Sonlu elemanlar metodunu kullanarak stabilite analizi yapan programa ait akış şeması

ÖZET

Kusurlu yapılarda bulunan çatlaktan dolayı meydana gelen şekil değiştirme enerjisi konsantrasyonu, yapının tüm davranışını etkiler. Çatlak, yapı içerisinde bölgesel bir fleksibilite meydana getirir. Kırılma mekaniğinde, kusurlu yapıların davranışını analiz etmek için gerilme yığılma faktörünün incelenmesi önemli bir yer tutar. Karmaşık olan sistemlerde gerilme yığılma faktörü, nümerik modelleme metotları ile bulunabilir. Bu çalışmada nümerik modelleme metotlarından biri olan Sonlu Elemanlar Metodu kullanılmıştır. Sonlu Elemanlar Metodu; karmaşık olan problemlerin daha basit alt problemlere ayrılarak her birinin kendi içinde çözülmesiyle tam çözümün bulunduğu bir analiz şeklidir. Metodun üç temel niteliği vardır; ilk olarak geometrik olarak karmaşık olan çözüm bölgesi sonlu elemanlar olarak adlandırılan geometrik olarak daha basit alt bölgelere ayrılır. İkincisi, her elemandaki sürekli fonksiyonların, cebirsel polinomların lineer kombinasyonu olarak tanımlanabileceği kabul edilir. Üçüncü kabul ise, aranan değerlerin her eleman içinde sürekli olan tanım denklemlerinin belirli noktalardaki (düğüm noktaları) değerleri elde edilmesinin problemin çözümde yeterli olmasıdır. Kullanılan yaklaşım fonksiyonları interpolasyon teorisinin genel kavramları kullanılarak polinomlardan seçilir. Seçilen polinomların derecesi ise çözülecek problemin tanım denkleminin derecesine ve çözüm yapılacak elemandaki düğüm sayısına bağlıdır.

Kusurlu yapılarda, çatlak kesitinde meydana gelen fleksibilite katsayıları şekil değiştirme enerjisi salıverimini ve ilgili gerilme yığılma faktörlerinin analitik ifadeleri kullanılarak elde edildi. Bu katsayılar kullanılarak çatlaktan dolayı meydana gelen rijitlik matrisi hesaplandı. Bu çalışmada ilk önce kusurlu yapılarda çatlaktan dolayı meydana gelen direngenlik matrislerini hesaplayacak bir bilgisayar programı hazırlandı. Elde edilen direngenlik matrisi, Sonlu Elemanlar Metodu kullanılarak hazırlanan burkulma ve titreşim programlarına entegre edilerek kusurlu yapılardaki burkulma ve titreşim analizleri yapıldı. Çatlakların derinlikleri ve konumları değiştirilerek bunların, yapının burkulma ve titreşim davranışı üzerindeki etkisi nümerik olarak hesaplandı. Bulunan bu sonuçların doğruluğu, literatürde bulunan sonuçlar ve hazırlanan deney düzeneği yardımıyla gösterildi.

SUMMARY

Strain energy concentration occurring from the crack found in cracked structures affects all behavior of the structure. Crack introduces a local flexibility in the structure. In fracture mechanics, the investigation of stress intensity factors takes an important place to analyze the behavior of cracked structures. In complex systems, the stress intensity factors can be derived by numerical methods. In this study, the Finite Element Method is used. Finite Element Method is a solution technique which divides complex problems into more simple sub problems and solves each and then finds complete solution. There are three characteristic of this method; at first, geometrically complex solution section is divided into more simple subsections which are called finite elements. Second, it is accepted that the continues functions at each element can be defined as linear combination of algebraic polynomials. The third acceptance is that the solution of problem at each node is enough for the complete solution. Used approximation functions are chosen from the polynomials which are used in the general concept of the interpolation theory. Degrees of the chosen polynomials are depending on the degree of definition equation of the problem and number of nodes at each element.

At cracked structures, flexibility coefficients occurred at crack section is derived from analytic solution of strain release rate and related stress intensity factors. Stiffness matrix induced by the crack is computed by the use of these coefficients. At this study, firstly for a cracked structure a computer program was prepared to calculate stiffness matrix induced by a crack. Obtained stiffness matrix is integrated to program which was prepared with finite element method to analyze the buckling and vibration of cracked structures. The effects of cracks on the stability and vibration of cracked structures are analyzed numerically for different locations and depths of cracks. It is shown through the numerical examples and experiments that the proposed method is a simple and efficient method.