

**T.C.  
HARRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DOLU VE KİSMİ BOŞLUKLU ENKESİTE SAHİP ÇUBUKLARDA  
BURULMA PROBLEMİNİN YAKLAŞIK HESABI**

**Mehmet Eyyüp KAVŞUT**

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**ŞANLIURFA  
2007**

**T.C.  
HARRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DOLU VE KİSMİ BOŞLUKLU ENKESİTE SAHİP ÇUBUKLARDA  
BURULMA PROBLEMİNİN YAKLAŞIK HESABI**

**Mehmet Eyyüp KAVŞUT**

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**ŞANLIURFA  
2007**

Yrd. Doç. Dr. M. Arif GÜREL danışmanlığında, Mehmet Eyyüp KAVŞUT'un hazırladığı “Dolu ve Kısmi Boşluklu Enkesite Sahip Çubuklarda Burulma Probleminin Yaklaşık Hesabı” konulu bu çalışma 17/09/2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. M. Arif GÜREL

Üye : Doç. Dr. Murat KISA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜMÜŞÇÜ

**Bu Tezin İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.**

**Prof. Dr. İbrahim BOLAT**  
Enstitü Müdürü

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZ .....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	v
SİMGELER DİZİNİ .....	vi
1. GİRİŞ .....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR .....	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM .....	4
3.1. Bredt Formülleri .....	4
3.1.1. Kapalı tüp kesitlerin burulması .....	4
3.1.1.1. Dairesel tüp kesitli çubuklar .....	5
3.1.1.2. Herhangi biçimdeki tüp kesitli çubuklar .....	6
3.2. Bredt Formüllerinin Kısmi Boşluklu ve Genel Şekilli Kesitlerin Burulmasına Uyarlanması .....	11
3.2.1. Kayma gerilmesinin bulunması .....	17
3.2.2. Birim dönme açısının bulunması .....	18
3.3. Elde Edilen Formüllerin Boşluksuz Kesitler İçin Aldığı Hal .....	21
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA .....	22
4.1. Dolu Enkesitler .....	22
4.1.1. Daire kesit .....	22
4.1.2. Düzgün sekizgen kesit .....	24
4.1.3. Düzgün altıgen kesit .....	27
4.1.4. Kare kesit .....	29
4.1.5. Eşkenar üçgen kesit .....	31
4.2. Boşluklu Enkesitler .....	33
4.2.1. Boşluklu daire kesit .....	33
4.2.2. Boşluklu sekizgen kesit .....	36
4.2.3. Boşluklu altıgen kesit .....	37
4.2.4. Boşluklu kare kesit .....	39
4.2.5. Boşluklu dikdörtgen kesit .....	41
4.2.6. Boşluklu eşkenar üçgen kesit .....	43
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER .....	45
KAYNAKLAR .....	47
ÖZGEÇMİŞ .....	48
ÖZET .....	49
SUMMARY .....	50

**ÖZ**

**Yüksek Lisans Tezi**

**DOLU VE KISMİ BOŞLUKLU ENKESİTE SAHİP ÇUBUKLARDA BURULMA  
PROBLEMİNİN YAKLAŞIK HESABI**

**Mehmet Eyyüp KAVŞUT**

**Harran Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Danışman : Yrd. Doç. Dr. M. Arif GÜREL  
Yıl: 2007, Sayfa: 50**

Burulma konusu içerisinde kapalı tüp kesitlerin burulma hesabı Bredt Formülleri olarak adlandırılan bağıntılarla yapılır. Bu çalışmada öncelikle ele alınan genel bir dolu ya da kısmi boşluklu kesit iç içe kapalı tüplerin birleşimi olarak modellenmiştir. Her bir kapalı tüp için Bredt Formüllerinin geçerli olduğu düşünülüp, tüm enkesit için denge ve geometrik uygunluk koşulları yazılarak, maksimum kayma gerilmesini ve birim dönme açısını verecek ifadelerle ulaşılmaya çalışılmıştır. Bu bağıntılar kullanılarak pratikte karşılaşılabilecek mümkün olduğunca çok sayıda dolu ve kısmi boşluklu enkesit şekli için gerilme ve dönme açısı değerleri hesaplanmıştır. Sonuçlar Elastisite Teorisiyle hesaplanmış enkesitlerin sonuçlarıyla karşılaştırılıp yaklaşıklık durumu kontrol edilmiştir. Bu sonuçlar, sunulan yaklaşık yöntemin düzenli eğrisel kenar şekline sahip kesitler için kesin değerleri verdiğini, köşeli kesitlerde ise doğruluk derecesinin biraz düştüğünü göstermiştir.

**ANAHTAR KELİMELER:** Burulma, dolu enkesit, boşluklu enkesit, Bredt formülleri, Elastisite Teorisi

## **ABSTRACT**

**Master Thesis**

### **APPROXIMATE CALCULUS OF TORSION PROBLEM OF BARS WITH SOLID OR PARTIALLY HOLLOW CROSS-SECTION**

**M. Eyyüp KAVŞUT**

**Harran University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Civil Engineering**

**Supervisor: Assist. Prof. Dr. M. Arif GÜREL  
Year: 2007, Page: 50**

As it is known, the torsion calculus of tube sections are performed with the Bredt's formulas. In this study firstly, a general solid or hollowed cross-section has been modeled as the combination of thin-walled closed strips one inside the other. Then, making use of the Bredt's formulas and writing the equilibrium and compatibility conditions, maximum shearing stress and angle of twist expressions have been derived. Using these expressions, maximum shearing stress and angle of twist values of various cross-sections have been calculated and compared with the results of Theory of Elasticity. These results have shown that the presented approximate method gives exact values for sections with regular curvilinear boundary, and for the cornered sections the level of accuracy of the method may be somewhat low.

**KEY WORDS:** Torsion, solid cross-section, hollow cross-section, Bredt's formulas, Theory of Elasticity

## **TEŞEKKÜR**

Bu tez çalıőmasının her aőamasında bilgi ve desteğiyle bana ıőık tutan danıőmanım Yrd. Doç. Dr. M. Arif GÜREL'e, yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarım Arő. Gör. Veysel GÜMÜŐ ile Arő. Gör. Mehmet MUTLU'ya ve manevi desteğini her zaman hissettiğim değerli meslektaőım Sevinç GÜVEN'e sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

## ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa No
Çizelge 4.1. Dikdörtgen kesitin kenar oranlarına göre bağıntıların katsayıları .....	42



## ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa No
Şekil 3.1. Dairesel tüp kesitli çubuğun burulmasıyla oluşan gerilmeler .....	6
Şekil 3.2. Herhangi biçimdeki tüp kesit .....	7
Şekil 3.3. Elemansel parçada oluşan gerilmeler .....	7
Şekil 3.4. Kesit eksen eğrisi boyunca etkiyen kuvvetler .....	9
Şekil 3.5. Şeritlere bölünmüş genel şekilli enkesit .....	11
Şekil 3.6. Genel şekilli en kesit ve üzerinde belirlenen noktalar .....	12
Şekil 3.7. a) j'inci şerit b) Enkesit üzerinde belirlenen noktalarla oluşan benzer üçgenler .....	14
Şekil 3.8. Kutupsal koordinatlarda $d_s$ ifadesinin elde edilmesi .....	19
Şekil 4.1. Dolu daire kesit .....	22
Şekil 4.2. Dolu daire kesit için ilgili açılar .....	23
Şekil 4.3. Sekizgen kesit ve iç teğet çemberi .....	24
Şekil 4.4. Kesitteki bir üçgen .....	24
Şekil 4.5. Altıgen kesit ve iç teğet çemberi .....	27
Şekil 4.6. Kare kesit ve iç teğet çemberi .....	29
Şekil 4.7. Eşkenar üçgen kesit ve iç teğet çemberi .....	31
Şekil 4.8. Daire boşluklu daire kesit .....	34
Şekil 4.9. Sekizgen boşluklu sekizgen kesit .....	36
Şekil 4.10. Altıgen boşluklu altıgen kesit .....	38
Şekil 4.11. Kare boşluklu kare kesit .....	40
Şekil 4.12. Dikdörtgen boşluklu dikdörtgen kesit ve maksimum gerilmeler .....	41
Şekil 4.13. Üçgen boşluklu üçgen kesit .....	43

## SİMGELER DİZİNİ

$J_p$	Kutupsal eylemsizlik momenti
$R$	Dairesel tüp kesit yarıçapı
$\delta$	Her bir şeridin et kalınlığı
$\tau$	Kayma gerilmesi
$M_b$	Burulma momenti
$\phi$	Birim dönme açısı
$G$	Malzemenin kayma modülü
$A$	Enkesit alanı
$s$	Kesit eksen eğrisinin uzunluğu
$T$	Sonsuz küçük elemanın kayma gerilmeleri
$U$	Şekil değiştirme enerjisi
$\rho$	G'den ölçülen radyal mesafe
$r$	Enkesit yarıçapı

## 1. GİRİŞ

Belirli konumlarda etkiyen dış yüklerin istenmeyen yerdeğiştirmelere neden olmasını önleyerek ve istenilen güvenlik sınırları içinde kalarak hareketi kısıtlayan rijit ya da Şekil değiştiren eleman ya da elemanlar sistemine taşıyıcı sistem adı verilir. Taşıyıcı sistemler geometrilerine ve taşıdıkları yüklere göre sınıflandırılırlar. Çubuk taşıyıcı sistemler; iki boyutu üçüncü boyut yanında küçük olan, doğru ya da eğri eksenli, sabit ya da değişken enkesitli çubuk elemanlardan oluşan sistemlerdir.

Dış kuvvetlerin etkisi altında dengede olan bir çubuk eleman herhangi bir noktasında eksenine dik hayali bir düzlemlle iki parçaya ayrıldığında, her bir parçanın dengesi en genel durumda ancak ayırım yüzeylerinde bir kuvvet ve bir moment vektörünün mevcut olması ile sağlanır. Ayırım dolayısıyla ortaya çıkan bu iki vektöre kesit tesirleri (kesit zorları) ya da iç kuvvetler denir. Kesit tesirlerini oluşturan vektörlerden kuvvet vektörü; normal kuvvet ve kesme kuvveti, moment vektörü ise eğilme momenti ve burulma momenti olarak bileşenlerine ayrılabilirler. Burulma momenti; çubuk kesitlerini eksen etrafında dönmeye zorlayan bileşendir. Çeşitli teknik problemlerde burulma momenti ile zorlanan taşıyıcı elemanlar karşımıza çıkmaktadır. Örneğin, bir otomobilde ya da kamyonunda motorun gücünü diferansiyele ileten mil burulma momentine maruz daire kesitli bir elemandır. Bir binada, konsol bir balkona mesnetlik yapan kenar kiriş ise diğer tesirler yanında burulma momenti ile zorlanan dikdörtgen kesitli bir taşıyıcı elemandır.

Burulma momenti etkisinde olan taşıyıcı elemanlar çok çeşitli kesit Şekillerinde olabilirler. Daire ve daire halkası kesitler yanında, kapalı ve açık tüp kesitler en yaygın olanlardır. Bununla birlikte, yapısal ya da diğer nedenlerle elips, eşkenar üçgen, dikdörtgen, kare, düzgün çokgen (düzgün altıgen, düzgün sekizgen, vs) gibi daireden farklı olan dolu enkesitlerin veya kısmi boşluğu olan enkesitlerin

(dairesele boşluklu düzgün altıgen gibi) burulma momenti taşıyacak elemanlarda kesit şekli olarak kullanılması gerekebilir ya da bu tür enkesitler tercih edilebilir.

Bilindiği gibi bir çubuk elemanın burulma probleminin incelenmesinde çubuk kesiti büyük rol oynar. Dönel simetrik bir şekil olan daire kesitli çubukların burulması kolayca incelenebilir. Halbuki, kesitin daireden farklı olması halinde problemi basit bir şekilde çözmeye olanak yoktur. Çünkü, daire kesitler için kabul edilen ve deneysel olarak da gerçekleşen; enkesitlerin burulma sırasında düzlem kalarak rijit bir levha gibi çubuk eksenini etrafında dönecekleri hipotezi daireden farklı kesitler için gerçeğe uymaz. Gerek teorik ve gerekse deneysel çalışmalar göstermiştir ki, daireden farklı kesit şekillerinde enkesitler burulma sırasında düzlem kalmayıp çarpılmaktadır. Bu durumda, daireden farklı dolu kesite sahip çubukların burulma problemlerinin kesin çözümleri ancak Matematiksel Elastisite Teorisi ile, kesine yakın yaklaşık çözümleri ise Sonlu Elemanlar Yöntemi ile mümkün olmaktadır.

Bu tez çalışmasında, daireden farklı dolu ve kısmi boşluklu enkesite sahip çubukların burulma probleminin Elastisite Teorisine ihtiyaç duyulmadan incelenmesine olanak verecek basit bir hesap modeli oluşturulmaya çalışılacaktır. Ele alınacak çeşitli kesit tipleri için modelin vereceği sonuçlar Elastisite Teorisinin kesin sonuçları ile karşılaştırılıp, modelin yaklaşıklık derecesi kontrol edilecektir.

## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Enkesitlerin düzlem kalmayıp çarpılmasını hesaba katan bir burulma teorisini ilk defa 1855 yılında Saint-Venant ortaya koymuştur, (İnan, 1988). Bu teori ve sonuçları, Elastisite Teorisi ve Mukavemet ile ilgili çeşitli yerli ve yabancı kitaplarda değişik düzeylerde ele alınmıştır (Timoshenko ve Goodier, 1987; Tameroğlu, 1991; İnan, 1988; Den Hartog, 1952; Bakioğlu ve ark., 1995). Saint-Venant'ın bu teorisine göre burulma hesabı uzun ve ağır matematiksel işlemler gerektirmektedir.

Yalnızca burulma momenti ya da burulma ile birlikte diğer kesit tesirlerinin etkisinde olan çeşitli taşıyıcı elemanlarla ilgili mühendislik problemlerinin ele alındığı çok sayıda bilimsel makale, bu ve benzeri konularda yayımlar yapan periyodik dergilerde yayımlanmaktadır. Bu dergilere, Amerika İnşaat Mühendisleri Topluluğunun (ASCE) çıkarttığı "Journal of Structural Engineering" ve "Journal of Engineering Mechanics" dergileri yanında, Elsevier'in yayımladığı "Thin Walled Structures" dergisi örnek olarak verilebilir.

Daireden farklı dolu enkesitli ya da kısmi boşluklu enkesitli çubukların burulma problemini basite indirgeyebilen bir modele sahip olan literatürde ulaşılabilen tek çalışma Serra (1996)'nın çalışmasıdır. Serra (1996) bu çalışmasında, dolu bir kesiti  $n$  tane kapalı şeride bölen basit bir model kurmuştur. Bu modelde şeritlerin birim dönme açılarının eşit olacağı gerçeğini problemin ana uygunluk koşulu olarak kullanmıştır. Formülasyonu oluşturduktan sonra kesitlerdeki maksimum kayma gerilmelerini ve birim dönme açılarını verecek yaklaşık bağıntılara ulaşmıştır. Yalnızca tam dolu olan az sayıdaki kesit için (daire kesit, elips kesit ve eşkenar üçgen kesit) bu yaklaşık bağıntıların verdiği sonuçları elde edip, bunları Elastisite Teorisinin kesin sonuçları ile karşılaştırmıştır. Belirtmek gerekir ki, daha farklı dolu kesit şekilleri ve kısmi boşluğu olan kesitler için de sonuçlar elde edip irdelemeye ihtiyaç vardır.

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

#### 3.1. Bredt Formülleri

Mukavemet dersinin temel konularından biri olan Burulma konusu içerisinde “kapalı tüp kesitlerin burulması” konusu da incelenmektedir. Bu tür kesitlerin burulma hesabı Bredt Formülleri olarak adlandırılan bağıntılarla yapılır. Çalışmada öncelikle, ele alınacak genel bir dolu ya da kısmen boşluklu kesit, Serra'nın modelindeki gibi iç içe kapalı tüplerin bir birleşimi olarak modelleneyecektir. Her bir kapalı tüp için Bredt formüllerinin geçerli olduğu düşünülüp, tüm enkesit için denge ve geometrik uygunluk koşulları yazılarak, maksimum kayma gerilmesini ve birim dönme açısını verecek ifadelere ulaşılmaya çalışılacaktır. Bu bağıntılar kullanılarak, pratikte karşılaşılabilecek mümkün olduğunca çok sayıda enkesit şekli için gerilme ve dönme açısı değerleri hesaplanacaktır. Sonuçlar Elastisite Teorisiyle hesaplanmış enkesitlerin sonuçlarıyla karşılaştırılıp yaklaşıklık durumu kontrol edilecektir. Elde edilecek bulgular çalışmanın sonuçlar kısmında toplu olarak sunulacaktır.

##### 3.1.1. Kapalı tüp kesitlerin burulması

İnce et kalınlıklı, kapalı tüp kesitli çubukların burulma problemi, Coulomb varsayımları ile çözülebilen, dairesel tüplerden elde edilen sonuçlardan esinlenerek elemanter olarak çözülebilir. Bu nedenle ilk olarak dairesel kesitli tüpler göz önüne alınmaktadır (Kayan, 1992).

##### 3.1.1.1. Dairesel tüp kesitli çubuklar

Daire halkası kesitin, dairesel ince tüp kesit olması halinde  $J_p$  kutupsal eylemsizlik momenti

$$J_p = 2.\pi.R^3.\delta \quad (3.1)$$

olarak alınabilir. (3.1) denklemini dairesel kesitli çubukların genel burulma formüllerinde yerine yazılırsa

$$\tau_{\max} \cong \tau = \frac{M_b}{J_p} . R = \frac{M_b}{2.\pi.R^3.\delta} . R \rightarrow \tau = \frac{M_b}{2.\pi.R^2.\delta} \quad (3.2)$$

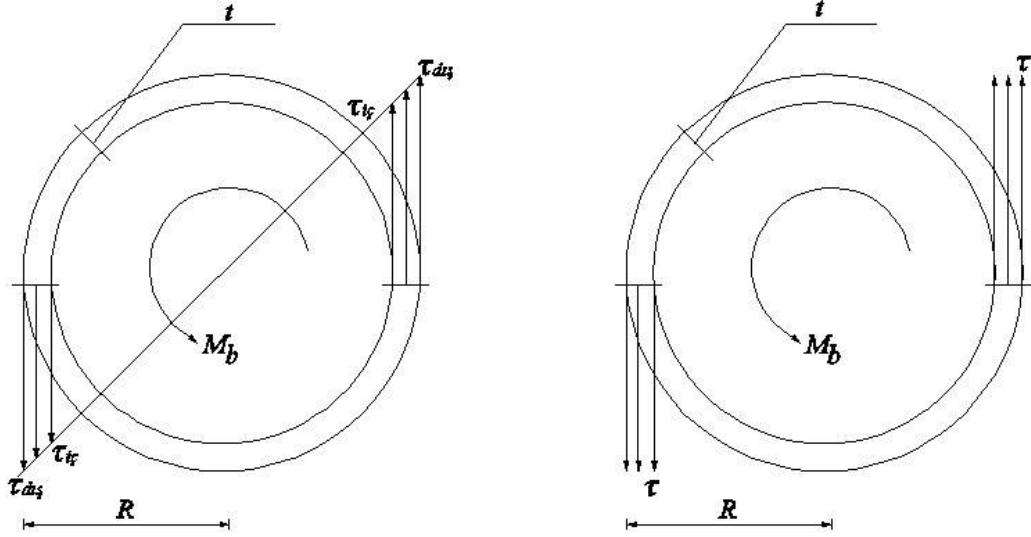
$$\varphi = \frac{M_b}{G.J_p} = \frac{M_b}{G.2\pi R^3\delta} = \frac{M_b}{G2\pi R^3\delta} \cdot \frac{2\pi R}{2\pi R} \rightarrow \varphi = \frac{M_b}{4G\pi^2 R^4} \cdot \frac{2\pi R}{\delta} \quad (3.3)$$

sonuçları elde edilir. (3.2) denklemindeki  $\pi R^2$  değerinin, tüpün  $\delta$  et kalınlığı orta noktalarından geçen R yarıçaplı dairenin A alanı olduğu, (3.3) denklemindeki  $2\pi R$  değerinin ise aynı dairenin s çevre uzunluğu olduğu kabul edilirse yukarıdaki denklemler

$$\tau = \frac{M_b}{2.A.\delta} \quad (3.4)$$

$$\varphi = \frac{M_b}{4.G.A^2} \cdot \frac{s}{\delta} \quad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada yapılan yaklaşıklık tüpün dış kenarı ile iç kenarındaki kayma gerilmeleri arasındaki farkın ihmal edilmesi ve tüpün  $\delta$  kalınlığı boyunca, (3.4) denklemini ile verilen ortalama gerilmenin sabit varsayılmasıdır (Şekil 3.1.). Şekilden de anlaşılacağı üzere  $\delta$  cidar kalınlığının R yarıçapı yanında yeteri kadar küçük olduğu hallerde bu varsayıma olanak vardır ve (3.4) denkleminin sonucunun kesin sonuçtan farkı, pratikte ihmal edilecek kadar küçüktür (Kayan, 1992).



Şekil 3.1. Dairesel tüp kesitli çubuğun burulmasıyla oluşan gerilmeler

### 3.1.1.2. Herhangi biçimdeki tüp kesitli çubuklar

Kesitin herhangi biçimli bir tüp olması halinde de,  $A$  ve  $s'$ e verilen anlamlar aynı kalmak şartı ile (3.4) ve (3.5) denklemleri geçerlidir. Bu iddiayı kanıtlamak için yapılacak tek varsayım, daireli tüplerden esinlenerek,  $\delta$  cidar kalınlığı boyunca kayma gerilmeleri şiddetinin sabit kaldığı, doğrultularının ise kalınlık orta noktalarını birleştiren kesit eksen eğrisine teğet olduğudur (Şekil 3.2.). Bu genel halde  $\delta$  tüp kalınlığının çevre boyunca sabit kalma gerekliliği de yoktur. Ancak  $\delta$ , kesit boyutları yanında daima çok küçük olmalıdır.

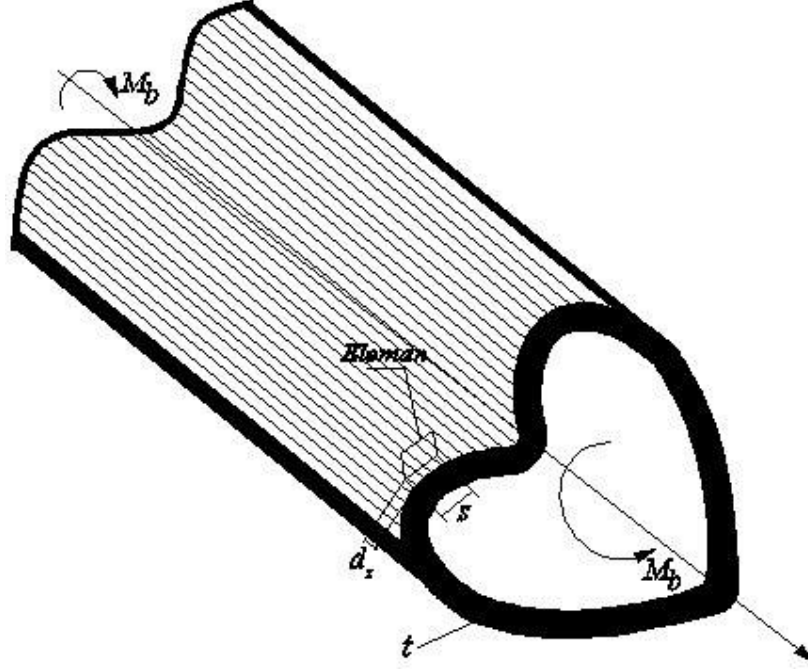
Yukarıdaki varsayımdan sonra  $\tau \cdot \delta$  çarpımını göz önüne alalım. *Kayma akımı* adı verilen bu değer kesit çevresi boyunca sabit kalır. Yani

$$\tau \cdot \delta = \text{sabit} \quad (3.6)$$

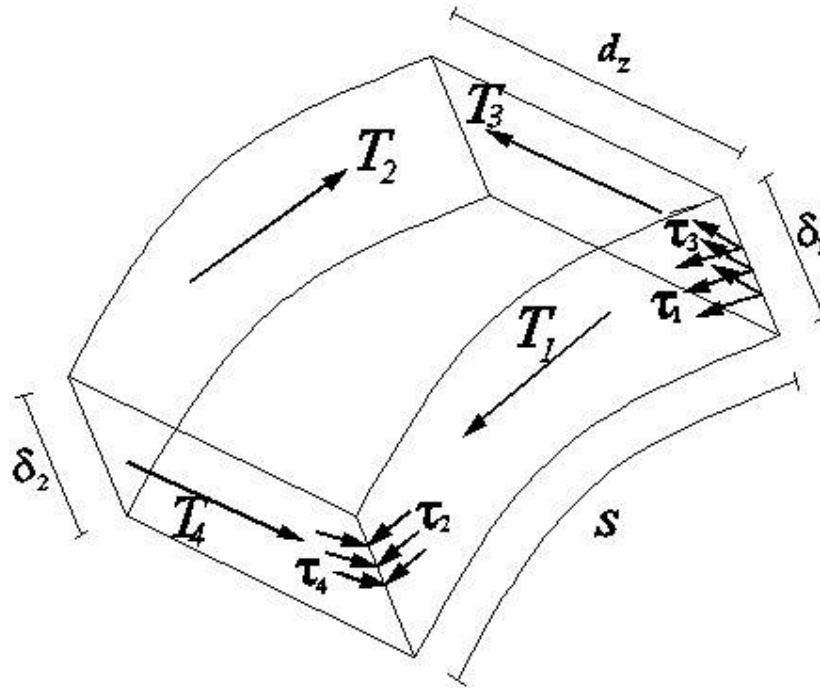
olur. Bu iddiayı kanıtlamak için tüpten kenarları  $dz$  ve  $s$  uzunluğunda olan bir elemansel parçayı göz önüne alıp bunun dengesini düşünelim. Bu eleman (Şekil 3.2.)'de gösterilmiş, (Şekil 3.3.)'de ise büyütülerek belirtilmiştir. Elemanın  $z$  eksenine paralel olan  $dz$  kenarı sonsuz küçük olduğu halde  $s$  uzunluğundaki diğer



kenar sonlu olup bu kenarın iki ucundaki cidar kalınlıkları  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  olarak birbirlerinden farklıdır.



Şekil 3.2. Herhangi biçimdeki tüp kesit



Şekil 3.3. Elemansel parçada oluşan gerilmeler

Bu eleman, yüzlerine şekilde gösterildikleri gibi etkiyen, kayma gerilmeleri altında dengede olmalıdır. Böylece elemanın z eksenine paralel yüzlerine etkiyen kayma gerilmelerinin bileşmeleri olan  $T_3$ ,  $T_4$  kayma kuvvetlerinin

$$T_3 = T_4 \quad (3.7)$$

denge şartını gerçekleştirmeleri gerekir.  $dz$  boyu sonsuz küçük olduğu için, bileşmeleri  $T_3$ ,  $T_4$  olan, kayma gerilmeleri ait oldukları eleman yüzeylerinde düzgün olarak yayılırlar. Böylece

$$T_3 = \tau_3 \cdot (\delta_1 \cdot dz) \quad (3.8)$$

$$T_4 = \tau_4 \cdot (\delta_2 \cdot dz) \quad (3.9)$$

olurlar. (3.8) ve (3.9) denklemleri (3.7)'de yerlerine konup her iki taraftaki  $dz$  terimleri kısaltılırsa

$$\tau_3 \cdot \delta_1 = \tau_4 \cdot \delta_2 \quad (3.10)$$

elde edilir. Dik köşelerdeki kayma gerilmelerinin eşitliği koşulu gereği şekilden

$$\tau_3 = \tau_1 \quad , \quad \tau_4 = \tau_2 \quad (3.11)$$

yazılabilir. (3.11) denklemleri (3.10)'da yerlerine konulurlarsa

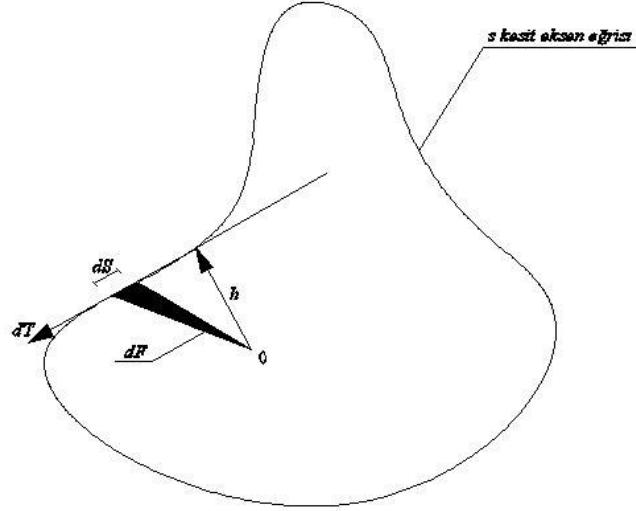
$$\tau_1 \cdot \delta_1 = \tau_2 \cdot \delta_2 = \text{sabit} \quad (3.12)$$

elde edilerek iddia kanıtlanmış olur.

Kesit eksen eğrisi  $s$  üzerinde alınan  $\delta \cdot ds$  alan elemanına etkiyen (Şekil 3.4.)  $dT$  elemansel kayma kuvveti

$$dT = \tau \cdot (\delta \cdot ds) = \tau \cdot \delta \cdot ds \quad (3.13)$$

şeklinde yazılabilir. Kesit eksen eğrisine teğet olan (3.13) denklemindeki bu  $dT$  kuvvetinin şiddeti, yukarıda kanıtlanan (3.6) koşulu gereği sabit kalır.



Şekil 3.4. Kesit eksen eğrisi boyunca etkiyen kuvvetler

Bu  $dT$  elemansel kayma kuvvetlerinin kesit düzlemi içerisindeki herhangi bir  $O$  noktasına göre alınan momentlerinin toplamının kesite etkiyen  $M_b$  burulma momentine eşit olması gerekecektir. Böylece şekilden

$$M_b = \int dT \cdot h = \int_s \tau \cdot \delta \cdot h \cdot ds = \tau \cdot \delta \cdot \int_s h \cdot ds \quad (3.14)$$

yazılabilir. İntegral içindeki  $h \cdot ds$  teriminin şekildeki taralı üçgenin  $dA$  alanının iki katı olduğuna dikkat edilirse (3.14) denklemi

$$M_b = 2\tau \cdot \delta \int dA \rightarrow M_b = 2\tau \cdot \delta \cdot A \quad (3.15)$$

olur. (3.15) denkleminde de aranılan kayma gerilmesi

$$\tau = \frac{M_b}{2A\delta} \quad (3.16)$$

olarak elde edilmiş olur. (3.16) denkleminde kesitteki en büyük kayma gerilmesinin,  $\delta$  cidar kalınlığının en küçük olduğu noktada meydana geleceği, yani

$$\tau_{\max} = \frac{M_b}{2A \cdot \delta_{\min}} \quad (3.17)$$

olacağı görülür. (3.16) ve (3.17) denklemlerindeki  $A$ , kesitin eksen eğrisinin çevrelediği alanın büyüklüğüdür..

Kesitin  $\phi$  rölatif burulma açısını hesaplamak için şekil değiştirme enerjisi kavramından yararlanılır.  $dz$  boyundaki çubuk parçasında biriken enerji,  $M_b$  momenti ve  $\phi$  açısı cinsinden,  $d\phi = \phi \cdot dz$  olduğu anımsanarak,

$$dU = \frac{M_b \cdot d\phi}{2} = \frac{M_b \cdot \phi}{2} dz \quad (3.18)$$

ve kayma gerilmeleri cinsinden

$$dU = \int_v \frac{\tau^2}{2G} dV \quad (3.19)$$

şeklinde yazılıp (3.18) ve (3.19) denklemleri birbirlerine eşitlenirse

$$\frac{M_b \cdot \phi}{2} dz = \int_v \frac{\tau^2}{2G} dV \quad (3.20)$$

elde edilir. Burada  $dV$  hacim elemanı  $dV = \delta \cdot ds \cdot dz$  olarak alınır ve  $\tau$  yerine (3.16) değeri konulursa

$$\frac{M_b \cdot \phi}{2} dz = \frac{1}{2G} \int_v \frac{M_b^2}{4A^2 \delta^2} \cdot \delta \cdot ds \cdot dz = \frac{M_b^2 \cdot dz}{8GA^2} \int_s \frac{ds}{\delta}$$

veya kısaltmalardan sonra

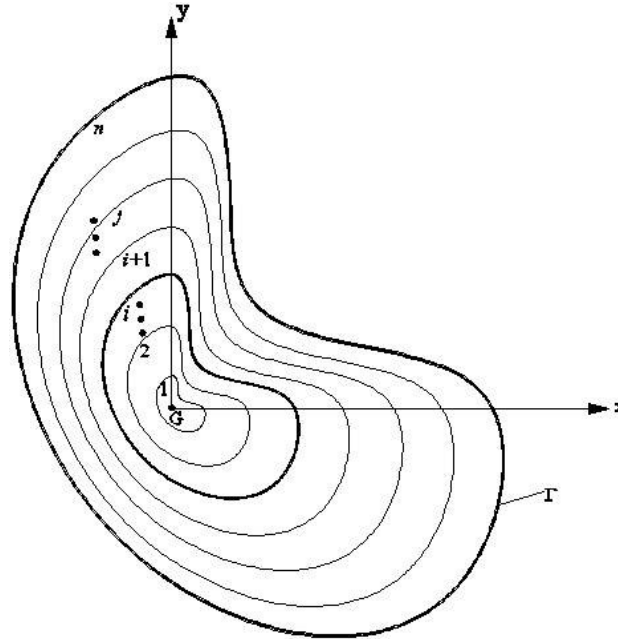
$$\varphi = \frac{M_b}{4GA^2} \int_s \frac{ds}{\delta} \quad (3.21)$$

olarak elde edilir.

Daha önce dairesel tüp kesitler için çıkarılan (3.4), (3.5) denklemlerinin genel hali olan (3.16) ve (3.21) formüllerine, bunları ilk defa bulan Alman bilgini R. Bredt'in adı verilerek *Bredt Formülleri* denilmiştir (Kayan, 1992; Bakioğlu ve ark., 1995).

### 3.2. Bredt Formüllerinin Kısmi Boşluklu ve Genel Şekilli Kesitlerin Burulmasına Uyarlanması

Bu başlık altında hesap modeli olarak; en dış (sınır) çizgisi  $\Gamma$  ve burulma merkezi  $G$  olan boşluklu bir en kesit dikkate alınacaktır. (Şekil 3.5.) Bu kesitin, dış çizgileri  $\Gamma$  sınır çizgisine benzer ve eşit kalınlıklı  $n$  tane kapalı şeritten oluştuğu düşünülebilir (Serra, 1996).



Şekil 3.5. Şeritlere bölünmüş genel şekilli enkesit



Şekil 3.6. daki  $GQQ'$  ve  $GPP'$  üçgenlerinden

$$\begin{aligned} \frac{\rho_j}{\rho_n} = \frac{j \cdot \delta}{n \cdot \delta} \Rightarrow \rho_j &= \frac{j}{n} \cdot \rho_n \\ \frac{dS_j}{dS_n} = \frac{\rho_j}{\rho_n} = \frac{j \cdot \delta}{n \cdot \delta} \Rightarrow dS_j &= \frac{j}{n} \cdot dS_n \end{aligned} \quad j = i+1, i+2, \dots, n \quad (3.22a)$$

sonucu elde edilir. Daha sonra  $GQQ'$  üçgenine bakıldığında  $j$ 'inci şeridin kapladığı alan

$$A_j = \frac{(\rho_j \cdot d\theta) \cdot \rho_j}{2} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} \cdot \rho_j^2 \cdot d\theta \Rightarrow A_j = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \rho_j^2 \cdot d\theta$$

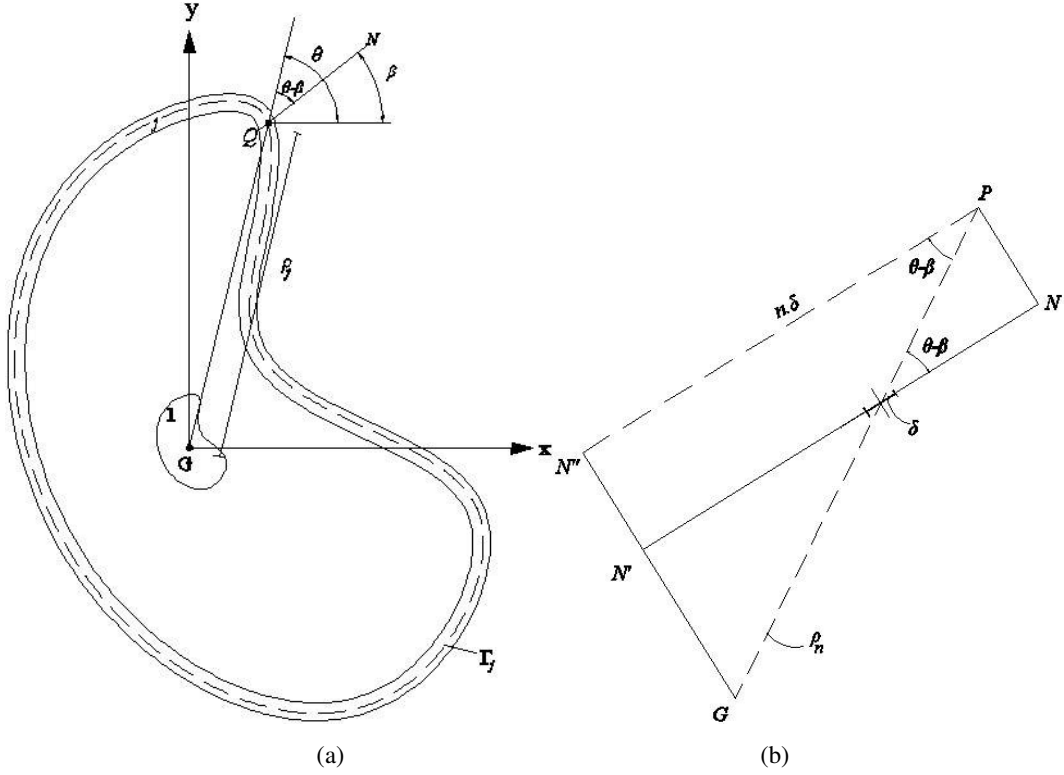
olarak ifade edilir ve benzer şekilde

$$A_n = \frac{(\rho_n \cdot d\theta) \cdot \rho_n}{2} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} \cdot \rho_n^2 \cdot d\theta \Rightarrow A_n = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \rho_n^2 \cdot d\theta$$

yazılır. Bu iki ifade oranlanırsa

$$\begin{aligned} \frac{A_j}{A_n} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \rho_j^2 \cdot d\theta}{\frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \rho_n^2 \cdot d\theta} = \frac{\int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{j}{n} \right) \cdot \rho_n \right]^2 \cdot d\theta}{\int_0^{2\pi} \rho_n^2 \cdot d\theta} \\ A_j &= \left( \frac{j}{n} \right)^2 \cdot A_n \end{aligned} \quad (3.22b)$$

eşitliği elde edilir.  $j$ 'inci şeridin kalınlığı olan  $\delta_j$  ifadesi Şekil 3.7.'den



Şekil 3.7. a)  $j$ 'inci şerit b) Enkesit üzerinde belirlenen noktalarla oluşan benzer üçgenler

$$\cos(\theta - \beta) = \frac{n \cdot \delta}{\rho_n} \quad (3.23)$$

$$\delta_j = \delta = \frac{\rho_n}{n} \cdot \cos(\theta - \beta)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Şimdi kesidin aldığı toplam momente  $M$  ve  $j$ 'inci şeridin aldığı momente de  $\Delta M_j$  denirse, Bredt formülüne göre  $j$ 'inci şeridin birim dönme açısı

$$\varphi_j = \frac{\Delta M_j \cdot J}{4 \cdot G \cdot A_j^2} \cdot \int_{s_j} \frac{dS_j}{\delta} \quad j = i+1, i+2, \dots, n \quad (3.24)$$

şeklinde olacaktır. Yine herhangi bir  $k$ 'inci şerit için formül



$$\varphi_k = \frac{\Delta M_k \cdot l}{4 \cdot G \cdot A_k^2} \cdot \int_{S_k} \frac{dS_k}{\delta} \quad k = i+1, i+2, \dots, n \quad (3.25)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bütün şeritlerin aynı açıyla döneceklerinden hareketle

$$\varphi_j = \varphi_k = \varphi \quad j \neq k \quad j = i+1, i+2, \dots, n \quad (3.26)$$

ifadesi yazılabilir. Şimdi de (3.24) ve (3.25) denklemleri (3.26)'da yerine yazılırsa

$$\frac{\Delta M_j \cdot l}{4 \cdot G \cdot A_j^2} \cdot \int_{S_j} \frac{dS_j}{\delta} = \frac{\Delta M_k \cdot l}{4 \cdot G \cdot A_k^2} \cdot \int_{S_k} \frac{dS_k}{\delta} \quad j \neq k \quad j, k = i+1, i+2, \dots, n \quad (3.27a)$$

eşitliği elde edilir. (3.22a) denklemindeki  $dS_j$  eşitliği (3.27a)'da yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \frac{\Delta M_j \cdot l}{4 \cdot G \cdot A_j^2} \cdot \delta \cdot \int_{S_j} \frac{j}{n} \cdot dS_n &= \frac{\Delta M_k \cdot l}{4 \cdot G \cdot A_k^2} \cdot \delta \cdot \int_{S_k} \frac{k}{n} \cdot dS_n \\ \frac{\Delta M_j}{A_j^2} \cdot j &= \frac{\Delta M_k}{A_k^2} \cdot k \end{aligned} \quad (3.27b)$$

denkleminde ulaşılır. (3.22b) denklemini (3.27b)'de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \frac{\Delta M_j \cdot j}{\left[\left(\frac{j}{n}\right)^2 \cdot A_n\right]^2} &= \frac{\Delta M_k \cdot k}{\left[\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot A_n\right]^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta M_j \cdot j}{\frac{j^4}{n^4} \cdot A_n^2} = \frac{\Delta M_k \cdot k}{\frac{k^4}{n^4} \cdot A_n^2} \\ \frac{\Delta M_j}{j^3} &= \frac{\Delta M_k}{k^3} \end{aligned} \quad (3.28)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemde  $k = (i+1)$  alınır

$$\Delta M_j = \frac{j^3}{(i+1)^3} \cdot \Delta M_{(i+1)} = \left(\frac{j}{i+1}\right)^3 \cdot \Delta M_{(i+1)} \quad (3.29)$$

$$\Delta M_n = \left(\frac{n}{i+1}\right)^3 \cdot \Delta M_{(i+1)}$$

denklemlerine ulaşılır.

Her bir şeridin aldığı burulma momentleri toplamının, tüm kesite etkileyen burulma momentine eşit olacağı aşağıdaki denklemde belirtilmektedir.

$$M = \sum_{j=i+1}^n \Delta M_j \quad (3.30)$$

(3.29) denklemindeki birinci eşitlik (3.30)'da yerine yazılırsa kesitteki boşluğun bittiği, malzeme olan ilk şeridin aldığı burulma momenti ( $\Delta M_{i+1}$ ) aşağıdaki denklemler sonucu bulunabilir.

$$M = \sum_{j=i+1}^n \left(\frac{j}{i+1}\right)^3 \cdot \Delta M_{i+1}$$

Burada  $i$  ve  $\Delta M_{i+1}$  değerleri birer sabit olduklarından toplama işleminin dışına çıkarılabilirler.

$$M = \frac{1}{(i+1)^3} \cdot \Delta M_{i+1} \sum_{j=i+1}^n j^3 \quad (3.31)$$

Burada da toplama işleminin

$$\sum_{j=i+1}^n j^3 = \sum_{j=0}^n j^3 - \sum_{j=0}^i j^3 = \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{i \cdot (i+1)}{2}\right]^2 \quad (3.32)$$

olarak elde edileceği açıktır. (3.32) eşitliği (3.31)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{(i+1)^3} \cdot \Delta M_{i+1} \cdot \left\{ \left[ \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right]^2 - \left[ \frac{i \cdot (i+1)}{2} \right]^2 \right\} \\
\rightarrow \left[ \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right]^2 - \left[ \frac{i \cdot (i+1)}{2} \right]^2 &= \frac{1}{4} \cdot \{ [n \cdot (n+1)]^2 - [i \cdot (i+1)]^2 \} \\
M &= \frac{\Delta M_{i+1} \cdot \{ [n \cdot (n+1)]^2 - [i \cdot (i+1)]^2 \}}{4 \cdot (i+1)^3} \\
\Delta M_{i+1} &= \frac{4 \cdot M \cdot (i+1)^3}{\{ [n \cdot (n+1)]^2 - [i \cdot (i+1)]^2 \}} \quad (3.33)
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece kesitteki boşluğun bittiği, malzeme olan ilk şeridin aldığı burulma momenti elde edilmiş olur. Bu denklemi (3.29)'da yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\Delta M_n &= \left( \frac{n}{i+1} \right)^3 \cdot \Delta M_{(i+1)} = \frac{n^3}{(i+1)^3} \cdot \frac{4 \cdot M \cdot (i+1)^3}{\{ [n \cdot (n+1)]^2 - [i \cdot (i+1)]^2 \}} \\
\Delta M_n &= \frac{4 \cdot M \cdot n^3}{\{ [n \cdot (n+1)]^2 - [i \cdot (i+1)]^2 \}} \quad (3.34)
\end{aligned}$$

olarak en dış şeridin aldığı burulma momenti miktarı elde edilmiş olur.

### 3.2.1. Kayma gerilmesinin bulunması

Şimdi de bulunan bu denklemler 1. Bredt Formülünde yerine yazılırsa, boşluklu kesitler için kayma gerilmesi denklemi elde edilmiş olur:

$$\tau_n = \frac{\Delta M_n}{2 \cdot \delta_n \cdot A_n} \quad (3.35)$$

Bu ifadede  $\delta_n$  değeri (3.23) denkleminde hatırlanır ve yerine yazılırsa

$$\delta_n = \delta_j = \delta = \frac{\rho_n}{n} \cdot \cos(\theta - \beta) \rightarrow \tau_n = \frac{n \cdot \Delta M_n}{2 \cdot \rho_n \cdot \cos(\theta - \beta) \cdot A_n} \quad (3.36)$$

ifadesine gelinir ve (3.34) denklemi de (3.36)'da yerine yazılırsa

$$\tau = \frac{4.M.n^3}{2.\rho_n.\cos(\theta-\beta).A_n \cdot \{[n.(n+1)]^2 - [i.(i+1)]^2\}}$$

$$\tau = \frac{2.M}{\rho_n.\cos(\theta-\beta).A_n} \cdot \frac{n^4}{\{[n.(n+1)]^2 - [i.(i+1)]^2\}} \quad (3.37)$$

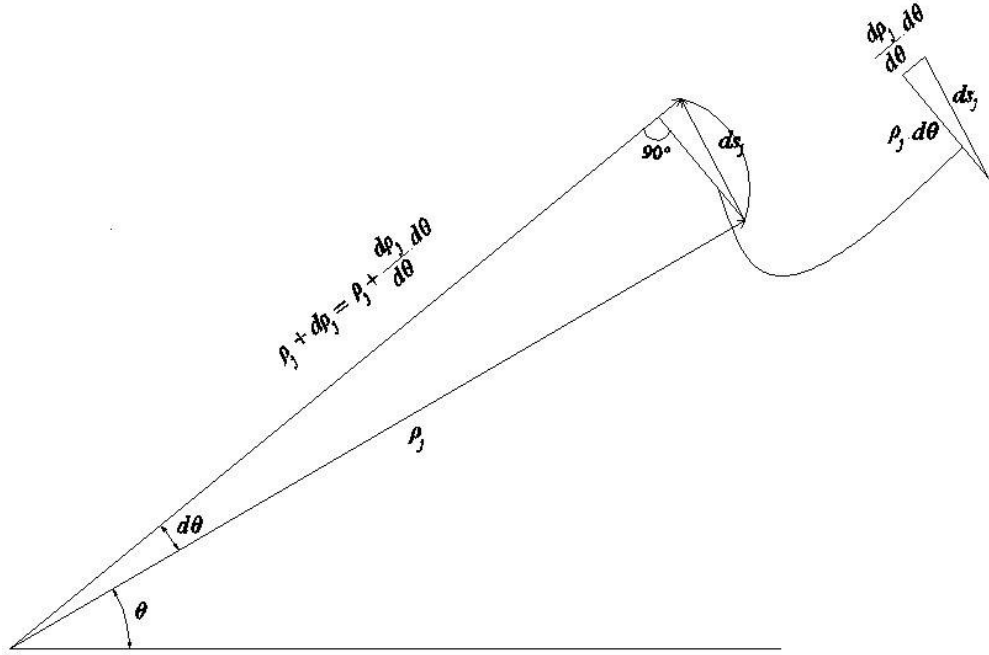
denklemleri elde edilmiş olur. (3.37) denklemi maksimum kayma gerilmesinin kesitin en dışında (sınırında) olacağını ifade ettiğinden dolayı büyük öneme sahiptir.

### 3.2.2. Birim dönme açısının bulunması

2. Bredt formülüyle ifade edilmiş olan  $\varphi$  birim dönme açısı (3.24), yukarıda elde edilen denklemler yardımıyla boşluklu kesitlere uyarlanabilir.

$$\varphi = \varphi_j = \frac{\Delta M_j \cdot l}{4.G.A_j^2} \cdot \int_{S_j} \frac{dS_j}{\delta} \quad j = i+1, i+2, \dots, n \quad (3.38)$$

Bu ifadedeki  $dS_j$  terimi kutupsal koordinatlarda (Şekil 3.8.)'de görüldüğü gibi elde edilebilir.

Şekil 3.8. Kutupsal koordinatlarda  $dS_j$  ifadesinin elde edilişi

$$(dS_j)^2 = \left(\frac{d\rho_j}{d\theta} \cdot d\theta\right)^2 + (\rho_j \cdot d\theta)^2, \quad \rho_j' = \frac{d\rho_j}{d\theta}$$

$$\sqrt{(dS_j)^2} = \sqrt{[(\rho_j')^2 + (\rho_j)^2] \cdot (d\theta)^2}$$

$$dS_j = \sqrt{(\rho_j')^2 + (\rho_j)^2} \cdot d\theta \quad (3.39)$$

(3.22a) ve (3.23) denklemleri (3.24)'de yerine yazılırsa

$$\varphi_j = \frac{\Delta M_j \cdot l}{4 \cdot G \cdot A_j^2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho_j')^2 + (\rho_j)^2}}{\frac{\rho_n}{n} \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta \quad (3.40)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde  $l$  kesiti incelenen çubuğun boyunu göstermektedir. Sadece kesit inceleneceğinden  $l$  terimi bundan sonra göz önüne alınmayacaktır.

(3.22b) denklemini hatırlanırsa

$$\rho_j = \frac{j}{n} \cdot \rho_n \rightarrow \rho'_j = \frac{j}{n} \cdot \rho'_n \quad (3.41)$$

olur. (3.41) ve (3.22b) denklemleri (3.40)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \varphi_j &= \frac{\Delta M_j}{4.G. \left[ \left( \frac{j}{n} \right)^2 \cdot A_n \right]^2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\left( \frac{j}{n} \right)^2 \cdot (\rho'_n)^2 + \left( \frac{j}{n} \right)^2 \cdot (\rho_n)^2}}{\frac{\rho_n}{n} \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta \\ \varphi_j &= \frac{\Delta M_j}{4.G. \left( \frac{j}{n} \right)^4 \cdot A_n^2} \cdot \left( \frac{j}{n} \right) \cdot n \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho'_n)^2 + (\rho_n)^2}}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta \\ \varphi_j &= \frac{\Delta M_j \cdot n^4}{4.G. j^3 \cdot A_n^2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho'_n)^2 + (\rho_n)^2}}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta \end{aligned} \quad (3.42)$$

ifadesine gelinir ve (3.29) denklemindeki  $\Delta M_j$  ifadesi (3.42) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \varphi_j &= \frac{j^3}{(i+1)^3} \cdot \frac{\Delta M_{(i+1)} \cdot n^4}{4.G. j^3 \cdot A_n^2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho'_n)^2 + (\rho_n)^2}}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta \\ \varphi_j &= \frac{\Delta M_{(i+1)} \cdot \frac{n^4}{(i+1)^3}}{4.G. A_n^2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho'_n)^2 + (\rho_n)^2}}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta \end{aligned} \quad (3.43)$$

bağıntısı ve son olarak (3.33) denkleminde de (3.43)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{4.M.(i+1)^3}{\left\{ [n.(n+1)]^2 - [i.(i+1)]^2 \right\}} \cdot \frac{n^4}{(i+1)^3} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho'_n)^2 + (\rho_n)^2}}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta \\ \varphi &= \frac{M}{G.A_n^2} \cdot \frac{n^4}{\left\{ [n.(n+1)]^2 - [i.(i+1)]^2 \right\}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho'_n)^2 + (\rho_n)^2}}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta \end{aligned} \quad (3.44)$$

denklemini elde edilmiş olur.

### 3.3. Elde Edilen Formüllerin Boşluksuz Kesitler İçin Aldığı Hal

3.2.'de elde edilen bağıntılarda  $i = 0$  alındığında boşluksuz (tam dolu), genel şekilli kesitlerin burulması için yaklaşık  $\tau$  ve  $\varphi$  ifadelerini verecek aşağıdaki bağıntılara ulaşılır.

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{2.M}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta) \cdot A_n} \cdot \frac{n^4}{\{[n.(n+1)]^2 - [i.(i+1)]^2\}} \quad , \quad i = 0 \text{ için} \\ \tau &= \frac{2.M}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta) \cdot A_n} \cdot \frac{n^4}{[n.(n+1)]^2} \\ \tau &= \frac{2.M}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta) \cdot A_n} \cdot \frac{n^4}{n^2 \cdot (n+1)^2} \\ \tau &= \frac{2.M}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta) \cdot A_n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\end{aligned}\quad (3.45)$$

(3.45) denklemini, tam dolu kesitler için kayma gerilmesi formülüdür ve

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{M}{G \cdot A_n^2} \cdot \frac{n^4}{\{[n.(n+1)]^2 - [i.(i+1)]^2\}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho_n')^2 + (\rho_n)^2}}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta \quad , \quad i = 0 \text{ için} \\ \varphi &= \frac{M}{G \cdot A_n^2} \cdot \frac{n^4}{[n.(n+1)]^2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho_n')^2 + (\rho_n)^2}}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta \\ \varphi &= \frac{M}{G \cdot A_n^2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho_n')^2 + (\rho_n)^2}}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta\end{aligned}\quad (3.46)$$

(3.46) ifadesi ise tam dolu kesitler için birim dönme açısı formülüdür.

#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde, bir önceki bölümde elde edilen yaklaşık bağıntılar, önce çeşitli dolu enkesit şekillerine, daha sonra birkaç boşluklu enkesite uygulanacaktır.

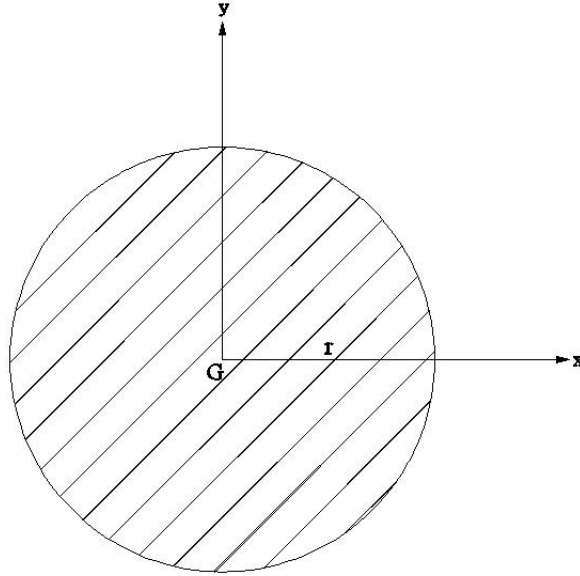
Kayma gerilmesi ( $\tau$ ) ve birim dönme açısı ( $\varphi$ ) değerleri, bir önceki bölümde bulunan yaklaşık formüllerle hesaplanıp, Elastisite Teorisinin kesin sonuçlarıyla karşılaştırılacaktır.

Formüllerdeki  $n$ 'e büyük değer verilmesi, yani kesitin mümkün olduğunca çok şeride bölünmesi kesin sonuca daha fazla yaklaştırır.

##### 4.1. Dolu Enkesitler

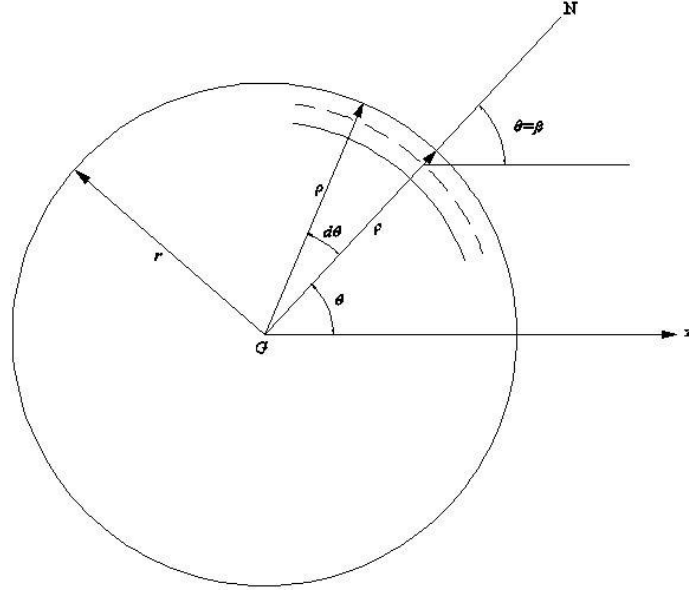
Bu başlık altında farklı şekillere sahip birkaç dolu enkesit incelenecektir.

##### 4.1.1. Daire kesit



Şekil 4.1. Dolu daire kesit





Şekil 4.2. Dolu daire kesit için ilgili büyüklükler

Şekil 4.2.'den de anlaşılacağı gibi;

$$\theta - \beta = 0 \rightarrow \cos(\theta - \beta) = 1$$

$$\rho_n = r \rightarrow r(\theta) = r = \rho_n = \text{sabit} \rightarrow \frac{dr}{d\theta} = r' = \rho_n' = 0$$

$$A_n = \pi.r^2$$

Bu bilgilerden hareketle;

$n = 10\,000$  için (dairesel kesit onbin benzer şeride bölünüyor)

$$\tau^{yakl.} = \frac{2.M}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta) \cdot A_n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{2.M}{r \cdot 1 \cdot (\pi.r^2)} \cdot \left(\frac{10000}{10000+1}\right)^2$$

$$\tau^{yakl.} = 0.6365 \cdot \frac{M}{r^3} \text{ değerine ulaşılmaktadır. Bu değer}$$

$$\tau^{kesin} = \frac{2.M}{\pi.r^3} = 0.6366 \cdot \frac{M}{r^3} \text{ kesin değerine hemen hemen eşittir.}$$

Birim dönme açısı hesaplanırsa;



$$\cos(\theta - \beta) = 1$$

$$A_n = 8 \cdot \frac{a \cdot r}{2} = 4 \cdot a \cdot r$$

Şekil 4.4.'de de görüldüğü gibi, geometrik bağıntılar yardımıyla  $a$  sekizgen kenar uzunluğu,  $r$  cinsinden bulunabilir.

$$\begin{aligned} c^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 & r &= c + \frac{a}{2} \\ c^2 &= \frac{2 \cdot a^2}{4} = \frac{a^2}{2} & r &= \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a}{2} \\ c &= \frac{a}{\sqrt{2}} & r &= \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a \cdot (1 + \sqrt{2})}{2} \\ & & a &= 0.828 \cdot r \end{aligned}$$

Maksimum yaklaşık kayma gerilmesi ve kesin kayma gerilmesi ifadeleri şöyledir:

$$\begin{aligned} \tau^{yakl.} &= \frac{2 \cdot M}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta) \cdot A_n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{2 \cdot M}{r \cdot 1 \cdot (4 \cdot a \cdot r)} \cdot \left(\frac{10000}{10000+1}\right)^2 \\ \tau^{yakl.} &= \frac{2 \cdot M}{4 \cdot a \cdot r^2} \cdot \left(\frac{10000}{10000+1}\right)^2 \\ \tau^{yakl.} &= \frac{M}{2 \cdot (0.828 \cdot r) \cdot r^2} \cdot \left(\frac{10000}{10000+1}\right)^2 \\ \tau^{yakl.} &= \frac{M}{1.6563 \cdot r^3} \\ \tau^{kesin} &= \frac{M}{0.446 \cdot A \cdot r} = \frac{M}{0.446 \cdot (4 \cdot a \cdot r) \cdot r} \\ \tau^{kesin} &= \frac{M}{0.446 \cdot (4 \cdot a \cdot r) \cdot r} = \frac{M}{0.446 \cdot (4 \cdot 0.828 \cdot r) \cdot r} \\ \tau^{kesin} &= \frac{M}{1.4772 \cdot r^3} \end{aligned}$$

Göreceli hata hesaplandığında

$$\text{Göreceli hata} = \frac{\tau^{kesin} - \tau^{yakl.}}{\tau^{kesin}} = \frac{\frac{M}{1.4772r^3} - \frac{M}{1.6563r^3}}{\frac{M}{1.4772r^3}} = \% 11$$

Birim dönme açısı yaklaşık ve kesin değerleri

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G.A_n^2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho_n')^2 + (\rho_n)^2}}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G.(4.a.r)^2} \cdot \left(\frac{10000}{10000+1}\right)^2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(0)^2 + (r)^2}}{r \cdot 1} \cdot d\theta$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G.[4.(0.828r).r]^2} \cdot \left(\frac{10000}{10001}\right)^2 \cdot 2\pi$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G.(5.4847).r^4} \cdot \left(\frac{10000}{10001}\right)^2 \cdot \pi$$

$$\varphi^{yakl.} = 0.5727 \cdot \frac{M}{G.r^4}$$

$$\varphi^{kesin} = \frac{M}{G.0.520.A.r^2} = \frac{M}{G.0.520.(4.a.r).r^2}$$

$$\varphi^{kesin} = \frac{M}{G.0.520.[4.(0.828r).r].r^2}$$

$$\varphi^{kesin} = 0.5807 \cdot \frac{M}{G.r^4}$$

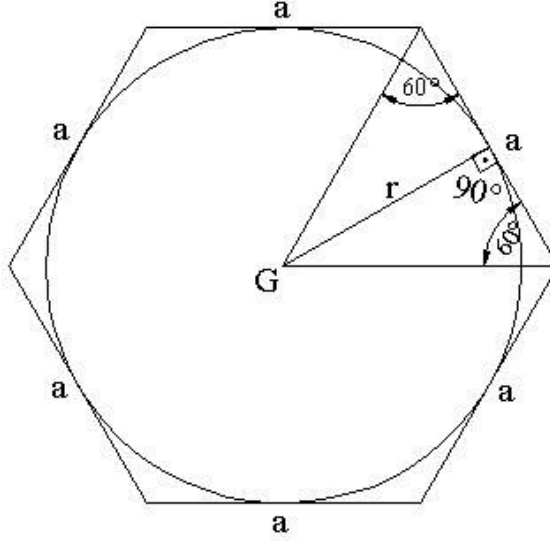
olarak elde edilmektedir. Buna göre

$$\text{Göreceli hata} = \frac{|\varphi^{kesin} - \varphi^{yakl.}|}{\varphi^{kesin}} = \frac{0.5807 \cdot \frac{M}{G.r^4} - 0.5727 \cdot \frac{M}{G.r^4}}{0.5807 \cdot \frac{M}{G.r^4}} = \% 1$$

olarak elde edilir.

### 4.1.3. Düzgün altıgen kesit

Altıgen kesit için de benzer bağıntılar yazılıp sonuca ulaşılabilir.



Şekil 4.5. Altıgen kesit ve iç teğet çemberi

$$\rho_n = r \quad , \quad r(\theta) = r = \rho_n = \text{sabit} \quad \rightarrow \quad \frac{dr}{d\theta} = r' = \rho_n' = 0$$

$$\cos(\theta - \beta) = 1$$

$$A_n = 6 \cdot \frac{a \cdot r}{2} = 3 \cdot a \cdot r$$

Geometrik bağıntılar yardımıyla  $a$  kenar uzunluğu,  $r$  cinsinden bulunabilir.

Bir çokgenin dış açısı  $\frac{360}{\text{kenar sayısı}}$  formülüyle hesaplanır. Altıgenin dış açısı

$$= \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ \text{ dir. Dolayısıyla her bir iç açısı} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \text{ olur. Şekil 4.5.'deki}$$

üçgenin iç açıları  $60^\circ$ 'ar derece ve üçgen eşkenar üçgendir. Buradan hareketle;

$$r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$a = \frac{2 \cdot r}{\sqrt{3}} = 1.1547r \quad \text{olur.}$$

Maksimum yaklaşık kayma gerilmesi ve kesin kayma gerilmesi ifadeleri yazılırsa;

$$\tau^{yakl.} = \frac{2 \cdot M}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta) \cdot A_n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{2 \cdot M}{r \cdot 1 \cdot (3 \cdot a \cdot r)} \cdot \left(\frac{10000}{10000+1}\right)^2$$

$$\tau^{yakl.} = \frac{2 \cdot M}{3 \cdot a \cdot r^2} \cdot \left(\frac{10000}{10000+1}\right)^2$$

$$\tau^{yakl.} = \frac{2 \cdot M}{3 \cdot (1.1547 \cdot r) \cdot r^2} \cdot \left(\frac{10000}{10000+1}\right)^2$$

$$\tau^{yakl.} = \frac{M}{1.7324 \cdot r^3}$$

$$\tau^{kesin} = \frac{M}{0.436 \cdot A \cdot r} = \frac{M}{0.436 \cdot (3 \cdot a \cdot r) \cdot r}$$

$$\tau^{kesin} = \frac{M}{0.436 \cdot (3 \cdot a \cdot r) \cdot r} = \frac{M}{0.436 \cdot [3 \cdot (1.1547 \cdot r) \cdot r] \cdot r}$$

$$\tau^{kesin} = \frac{M}{1.5103 \cdot r^3}$$

sonuçları elde edilir. Göreceli hata hesaplanırsa doğru sonuca ne kadar yaklaşıldığı anlaşılır.

$$\text{Göreceli hata} = \frac{\tau^{kesin} - \tau^{yakl.}}{\tau^{kesin}} = \frac{\frac{M}{1.5103r^3} - \frac{M}{1.7324r^3}}{\frac{M}{1.5103r^3}} = \% 13$$

Birim dönme açısı için de hesap yapıldığında;

$$\phi^{yakl.} = \frac{M}{G \cdot A_n^2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho_n')^2 + (\rho_n)^2}}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G.(3.a.r)^2} \cdot \left(\frac{10000}{10000+1}\right)^2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(0)^2 + (r)^2}}{r.1} .d\theta$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G.[3.(1.1547r).r]^2} \cdot \left(\frac{10000}{10001}\right)^2 \cdot 2\pi$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G.6.r^4} \cdot \left(\frac{10000}{10001}\right)^2 \cdot \pi$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{1.9102.G.r^4}$$

$$\varphi^{kesin} = \frac{M}{G.0.533.A.r^2} = \frac{M}{G.0.533.(3.a.r).r^2}$$

$$\varphi^{kesin} = \frac{M}{G.0.533.[3.(1.1547r).r].r^2}$$

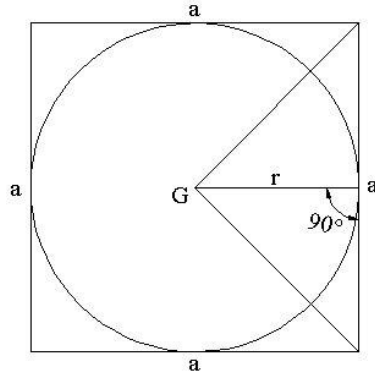
$$\varphi^{kesin} = \frac{M}{1.8464.G.r^4}$$

sonuçları elde edilir.

$$\text{Göreceli hata} = \frac{|\varphi^{kesin} - \varphi^{yakl.}|}{\varphi^{kesin}} = \frac{\frac{M}{1.8464.G.r^4} - \frac{M}{1.9102.G.r^4}}{\frac{M}{1.8464.G.r^4}} = \% 3$$

#### 4.1.4. Kare kesit

Kare kesit için de benzer bağıntılar yazılıp sonuca ulaşılabilir.



Şekil 4.6. Kare kesit ve iç teğet çemberi

$$\rho_n = r = \frac{a}{2}, \quad r(\theta) = r = \rho_n = \text{sabit} \rightarrow \frac{dr}{d\theta} = r' = \rho_n' = 0$$

$$\cos(\theta - \beta) = 1$$

$$A_n = a^2 = (2r)^2 = 4r^2$$

Maksimum yaklaşık kayma gerilmesi ve kesin kayma gerilmesi ifadeleri:

$$\tau^{yakl.} = \frac{2.M}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta) \cdot A_n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{2.M}{r \cdot 1 \cdot (4r^2)} \cdot \left(\frac{10000}{10000+1}\right)^2$$

$$\tau^{yakl.} = \frac{2.M}{4.r^3} \cdot \left(\frac{10000}{10000+1}\right)^2$$

$$\tau^{yakl.} = \frac{M}{2.r^3} \cdot \left(\frac{10000}{10000+1}\right)^2$$

$$\tau^{yakl.} = \frac{M}{2.r^3}$$

$$\tau^{kesin} = \frac{M}{0.208.a^3} = \frac{M}{0.208.(2.r)^3}$$

$$\tau^{kesin} = \frac{M}{0.208.8.r^3}$$

$$\tau^{kesin} = \frac{M}{1.664.r^3}$$

$$\text{Göreceli hata} = \frac{\tau^{kesin} - \tau^{yakl.}}{\tau^{kesin}} = \frac{\frac{M}{1.664.r^3} - \frac{M}{2.r^3}}{\frac{M}{1.664.r^3}} = \% 17$$

Birim dönme açısı değerleri:

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G.A_n^2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho_n')^2 + (\rho_n)^2}}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G.(4.r^2)^2} \cdot \left(\frac{10000}{10000+1}\right)^2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(0)^2 + (r)^2}}{r \cdot 1} \cdot d\theta$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G.16.r^4} \cdot \left(\frac{10000}{10001}\right)^2 \cdot 2\pi$$



$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G \cdot 8 \cdot r^4} \cdot \left(\frac{10000}{10001}\right)^2 \cdot \pi$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{2.547 G \cdot r^4}$$

$$\varphi^{kesin} = \frac{M}{G \cdot 0.140 \cdot a^4} = \frac{M}{0.140 \cdot G \cdot (2r)^4}$$

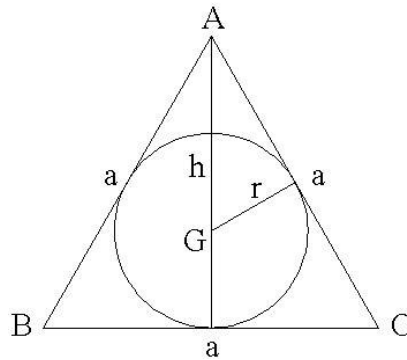
$$\varphi^{kesin} = \frac{M}{0.140 \cdot G \cdot 16 \cdot r^4}$$

$$\varphi^{kesin} = \frac{M}{2.24 \cdot G \cdot r^4}$$

$$\text{Göreceli hata} = \frac{|\varphi^{kesin} - \varphi^{yakl.}|}{\varphi^{kesin}} = \frac{\frac{M}{2.24 \cdot G \cdot r^4} - \frac{M}{2.547 \cdot G \cdot r^4}}{\frac{M}{2.24 \cdot G \cdot r^4}} = \% 12$$

#### 4.1.5. Eşkenar üçgen kesit

Eşkenar üçgen için Şekil 4.7.'den yararlanarak gerekli değerler elde edilip bağıntılar yazılabilir.



Şekil 4.7. Eşkenar üçgen ve iç teğet çemberi

$$\rho_n = r = \frac{h}{3} = \frac{a\sqrt{3}/2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad \rho_n(\theta) = \rho_n = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \text{sabit} \rightarrow \frac{d\rho_n}{d\theta} = \rho_n' = 0$$

$$\cos(\theta - \beta) = 1$$

$$A_n = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Maksimum yaklaşık kayma gerilmesi ve kesin kayma gerilmesi ifadeleri yazılırsa;

$$\tau^{yakl.} = \frac{2.M}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta) \cdot A_n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{2.M}{\frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot 1 \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)} \cdot \left(\frac{10000}{10000+1}\right)^2$$

$$\tau^{yakl.} = \frac{2.M}{\frac{3a^3}{24}} \cdot \left(\frac{10000}{10000+1}\right)^2$$

$$\tau^{yakl.} = \frac{16M}{a^3} \cdot \left(\frac{10000}{10000+1}\right)^2$$

$$\tau^{yakl.} = 16 \frac{M}{a^3}$$

$$\tau^{kesin} = \frac{M}{a^3} = 20 \frac{M}{a^3}$$

$$\text{sonuçlarına ulaşılır. Göreceli hata} = \frac{\tau^{kesin} - \tau^{yakl.}}{\tau^{kesin}} = \frac{20 \frac{M}{a^3} - 16 \frac{M}{a^3}}{20 \frac{M}{a^3}} = \% 20 .$$

Birim dönme açısı için hesap yapılırsa;

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G \cdot A_n^2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho_n')^2 + (\rho_n)^2}}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)^2} \cdot \left(\frac{10000}{10000+1}\right)^2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(0)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot 1} \cdot d\theta$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G \cdot \frac{3a^4}{16}} \cdot \left(\frac{10000}{10001}\right)^2 \cdot 2\pi$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{32M}{G \cdot 3a^4} \cdot \left(\frac{10000}{10001}\right)^2 \cdot \pi$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{33.504M}{G.a^4}$$

$$\varphi^{kesin} = \frac{M}{G \cdot \frac{\sqrt{3}}{80} a^4} = \frac{80M}{\sqrt{3}G.a^4}$$

$$\varphi^{kesin} = \frac{46.188M}{G.a^4}$$

sonuçları elde edilir.

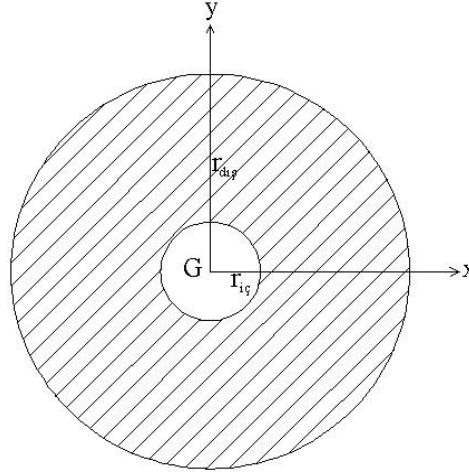
$$\text{Göreceli hata} = \frac{|\varphi^{kesin} - \varphi^{yakl.}|}{\varphi^{kesin}} = \frac{\frac{46.188M}{G.a^4} - \frac{33.504M}{G.a^4}}{\frac{46.188M}{G.a^4}} = \% 27$$

## 4.2. Boşluklu Enkesitler

Bu bölümde boşluk sınır şekli, kesitin dış sınır şekline benzer olan çeşitli kesitler için  $\tau$  ve  $\varphi$  değerleri elde edilecektir. Seçilen kesitlerin tüp kesitten farklı olması için boşluk kısmının çok büyük olmadığı kesitler, diğer bir deyişle kalın ve orta kalınlıkta cidarlı (et kalınlıklı, duvar kalınlıklı) kesitler dikkate alınmıştır.

### 4.2.1. Boşluklu daire kesit

Boşluklu daire kesit için, bir önceki bölümde bulunan formüller kullanılarak sonuca gidilip kesin sonuçlarla karşılaştırılacaktır.



Şekil 4.8. Daire boşluklu daire kesit

$$r_{dış} = r \quad , \quad r_{iç} = \frac{r_{dış}}{4} = \frac{r}{4}$$

$$\rho_n = r_{dış} = r \rightarrow r(\theta) = r = \rho_n = \text{sabit} \rightarrow \frac{dr}{d\theta} = r' = \rho_n' = 0$$

$$n = 10\,000 \rightarrow i = 2\,500$$

$$\cos(\theta - \beta) = 1$$

$$A_n = \pi \cdot r^2$$

Maksimum yaklaşık kayma gerilmesi ve kesin kayma gerilmesi ifadeleri yazılırsa;

$$\tau^{yakl.} = \frac{2.M}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta) \cdot A_n} \cdot \frac{n^4}{\{[n \cdot (n + 1)]^2 - [i \cdot (i + 1)]^2\}}$$

$$\tau^{yakl.} = \frac{2.M}{r \cdot 1 \cdot (\pi \cdot r^2)} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000 \cdot (10000 + 1)]^2 - [2500 \cdot (2500 + 1)]^2\}}$$

$$\tau^{yakl.} = \frac{2.M}{\pi \cdot r^3} \cdot \frac{10000^4}{(10000^2 \cdot 10001^2) - (2500^2 \cdot 2501^2)}$$

$$\tau^{yakl.} = 0.63899 \frac{M}{r^3}$$

$$\tau^{kesin} = \frac{2M}{\pi \cdot (r_{dış}^4 - r_{iç}^4)} \cdot r_{dış}$$

$$\tau^{kesin} = \frac{2M}{\pi \cdot [r^4 - (\frac{r}{4})^4]} \cdot r$$

$$\tau^{kesin} = \frac{2M}{\pi \cdot \frac{255}{256} r^4} \cdot r$$

$$\tau^{kesin} = 0.63912 \frac{M}{r^3}$$

sonuçları elde edilir.

Birim dönme açısı hesaplanırsa

$$\varphi = \frac{M}{G \cdot A_n^2} \cdot \frac{n^4}{\{[n \cdot (n+1)]^2 - [i \cdot (i+1)]^2\}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho_n')^2 + (\rho_n)^2}}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta$$

$$\varphi^{yaki.} = \frac{M}{G \cdot (\pi \cdot r^2)^2} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000 \cdot (10000+1)]^2 - [2500 \cdot (2500+1)]^2\}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(0)^2 + (r)^2}}{r \cdot 1} \cdot d\theta$$

$$\varphi^{yaki.} = \frac{M}{G \cdot \pi^2 \cdot r^4} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000 \cdot (10000+1)]^2 - [2500 \cdot (2500+1)]^2\}} \cdot 2\pi$$

$$\varphi^{yaki.} = \frac{M}{G \cdot \pi \cdot r^4} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000 \cdot (10000+1)]^2 - [2500 \cdot (2500+1)]^2\}} \cdot 2$$

$$\varphi^{yaki.} = 0.63899 \frac{M}{G \cdot r^4}$$

$$\varphi^{kesin} = \frac{2M}{G \cdot \pi \cdot (r_{dis}^4 - r_{ic}^4)}$$

$$\varphi^{kesin} = \frac{2M}{G \cdot \pi \cdot [r^4 - (\frac{r}{4})^4]}$$

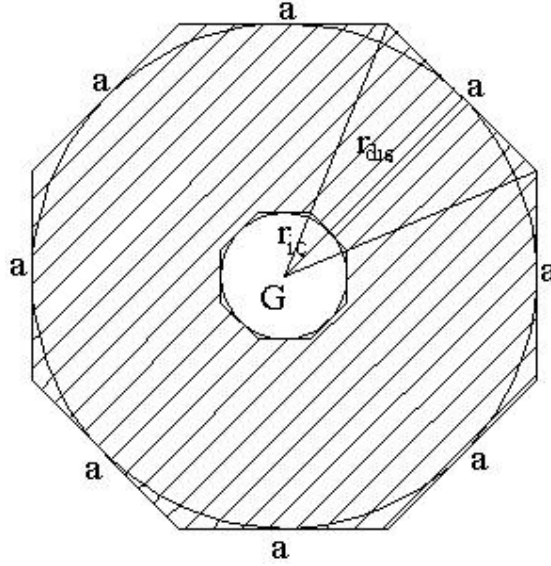
$$\varphi^{kesin} = \frac{2M}{G \cdot \pi \cdot \frac{255}{256} r^4}$$

$$\varphi^{kesin} = 0.63912 \frac{M}{G \cdot r^4}$$

değerleri elde edilir. Görüldüğü gibi hem kayma gerilmesi hem de dönme açısı değerleri kesin değerlere neredeyse eşittir.

#### 4.2.2. Boşluklu sekizgen kesit

Boşluklu sekizgen kesit için Şekil 4.9.'dan yararlanılıp elde edilen değerler bağıntılarda kullanılarak sonuca gidilir.



Şekil 4.9. Sekizgen boşluklu sekizgen kesit

$$r_{dış} = r, r_{iç} = \frac{r_{dış}}{4} = \frac{r}{4}$$

$$\rho_n = r_{dış} = r \rightarrow r(\theta) = r = \rho_n = \text{sabit} \rightarrow \frac{dr}{d\theta} = r' = \rho_n' = 0$$

$$n = 10\ 000 \rightarrow i = 2\ 500$$

$$\cos(\theta - \beta) = 1 \quad A_n = 8 \frac{a \cdot r_{dış}}{2} = 4 \cdot a \cdot r_{dış}$$

$$\begin{aligned}
c^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 & r &= c + \frac{a}{2} \\
c^2 &= \frac{2.a^2}{4} = \frac{a^2}{2} & r &= \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a}{2} \\
c &= \frac{a}{\sqrt{2}} & r &= \frac{a.\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a.(1+\sqrt{2})}{2} \\
& & a &= 0.828.r
\end{aligned}$$

Maksimum yaklaşık kayma gerilmesi

$$\tau^{yakl.} = \frac{2.M}{r.1.4ar} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [2500.(2500+1)]^2\}}$$

$$\tau^{yakl.} = 0.50186 \frac{M}{ar^2} \text{ olarak elde edilmektedir. Elastisite teorisi kitaplarında}$$

böyle bir kesit için kesin sonuçlara rastlanmadığından, göreceli hata hesaplanamamıştır.

Birim dönme açısı hesaplanırsa

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G.A_n^2} \cdot \frac{n^4}{\{[n.(n+1)]^2 - [i.(i+1)]^2\}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho_n')^2 + (\rho_n)^2}}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta)} d\theta$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G.(4.ar)^2} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [2500.(2500+1)]^2\}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(0)^2 + (r)^2}}{r.1} d\theta$$

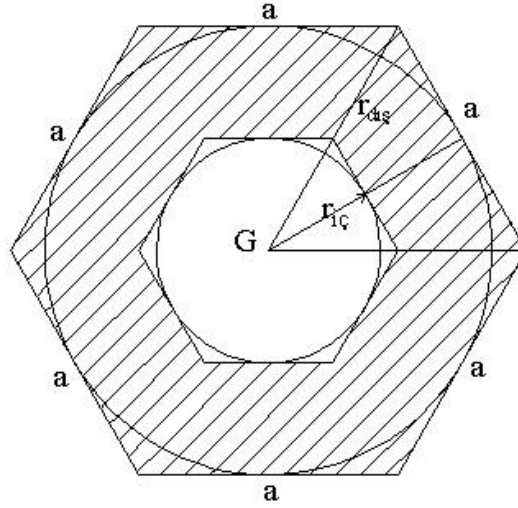
$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G.16.a^2.r^2} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [2500.(2500+1)]^2\}} \cdot 2\pi$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G.8.(0.828r)^2.r^2} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [2500.(2500+1)]^2\}} \cdot \pi$$

$$\varphi^{yakl.} = 0.57493 \frac{M}{G.r^4} \text{ değeri bulunmaktadır.}$$

#### 4.2.3. Boşluklu altıgen kesit

Boşluklu altıgen kesit için Şekil 4.10.'dan yararlanılıp bulunan değerler bağıntılarda yazılarak sonuca ulaşılır.



Şekil 4.10. Altıgen boşluklu altıgen kesit

$$r_{dış} = r, r_{iç} = \frac{r_{dış}}{2} = \frac{r}{2}$$

$$\rho_n = r_{dış} = r \rightarrow r(\theta) = r = \rho_n = \text{sabit} \rightarrow \frac{dr}{d\theta} = r' = \rho_n' = 0$$

$$n = 10000 \rightarrow i = 5000 \quad \cos(\theta - \beta) = 1$$

$$A_n = 6 \cdot \frac{a \cdot r}{2} = 3 \cdot a \cdot r$$

Geometrik bağıntılar yardımıyla  $a$  altıgen kenar uzunluğu,  $r$  cinsinden bulunabilir. Bir çokgenin dış açısı  $\frac{360^\circ}{\text{kenar sayısı}}$  formülüyle hesaplanır. Altıgenin dış

açısı  $= \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ . Dolayısıyla her bir iç açısı  $= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$  olur. Şekil

4.13.'deki üçgenin iç açıları  $60^\circ$ 'ar derece ve üçgen eşkenar üçgendir. Buradan hareketle;

$$r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \quad \text{olur.}$$

$$a = \frac{2 \cdot r}{\sqrt{3}} = 1.1547r$$



Maksimum yaklaşık kayma gerilmesi

$$\tau^{yakl.} = \frac{2.M}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta) \cdot A_n} \cdot \frac{n^4}{\{[n.(n+1)]^2 - [i.(i+1)]^2\}}$$

$$\tau^{yakl.} = \frac{2.M}{r.1.(3.a.r)} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [5000.(5000+1)]^2\}}$$

$$\tau^{yakl.} = \frac{2.M}{r.3.(1.1547.r).r} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [5000.(5000+1)]^2\}}$$

$$\tau^{yakl.} = 0.61573 \frac{M}{r^3}$$

olarak ve birim dönme açısı

$$\phi^{yakl.} = \frac{M}{G.A_n^2} \cdot \frac{n^4}{\{[n.(n+1)]^2 - [i.(i+1)]^2\}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho_n')^2 + (\rho_n)^2}}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta$$

$$\phi^{yakl.} = \frac{M}{G.(3.a.r)^2} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [5000.(5000+1)]^2\}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(0)^2 + (r)^2}}{r.1} \cdot d\theta$$

$$\phi^{yakl.} = \frac{M}{G.[3.(1.1547.r).r]^2} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [5000.(5000+1)]^2\}} \cdot 2\pi$$

$$\phi^{yakl.} = \frac{M}{G.[3.(1.1547.r).r]^2} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [5000.(5000+1)]^2\}} \cdot 2\pi$$

$$\phi^{yakl.} = 0.5584 \frac{M}{G.r^4} \text{ olarak hesaplanır.}$$

#### 4.2.4. Boşluklu kare kesit

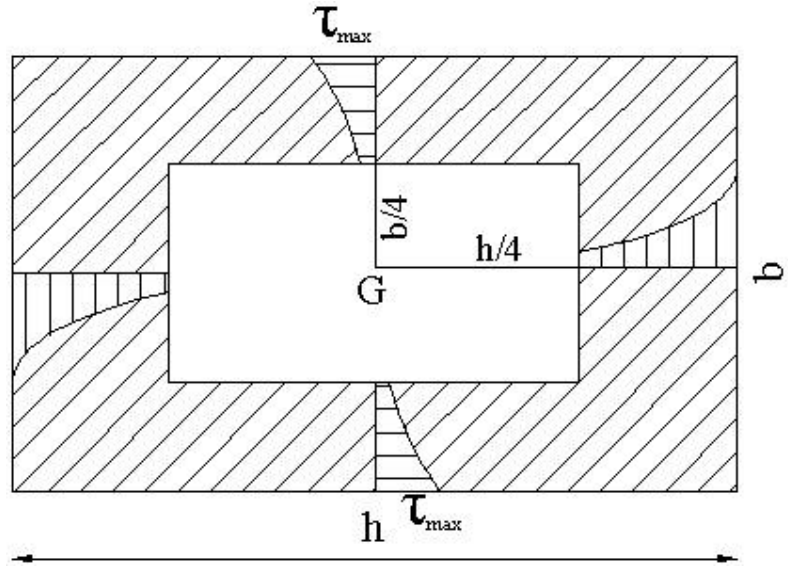
Seçilen boşluklu kare kesit, Şekil 4.11, ve ilgili değerler aşağıdadır.



$$\begin{aligned}\varphi^{yakl.} &= \frac{M}{G.A_n^2} \cdot \frac{n^4}{\{[n.(n+1)]^2 - [i.(i+1)]^2\}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho_n')^2 + (\rho_n)^2}}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta \\ \varphi^{yakl.} &= \frac{M}{G.(4.r^2)^2} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [5000.(5000+1)]^2\}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(0)^2 + (r)^2}}{r.1} \cdot d\theta \\ \varphi^{yakl.} &= \frac{M}{G.16.r^4} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [5000.(5000+1)]^2\}} \cdot 2\pi \\ \varphi^{yakl.} &= \frac{\pi.M}{G.8.r^4} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [5000.(5000+1)]^2\}} \\ \varphi^{yakl.} &= 0.4188 \frac{M}{G.r^4}\end{aligned}$$

#### 4.2.5. Boşluklu dikdörtgen kesit

Seçilen boşluklu dikdörtgen kesit, Şekil 4.12, ve ilgili değerler aşağıdadır.



Şekil 4.12. Dikdörtgen boşluklu dikdörtgen kesit ve maksimum gerilmeler

$$\rho_n = \frac{b}{2}, \quad \rho_n(\theta) = \rho_n = \frac{b}{2} = \text{sabit} \rightarrow \frac{d\rho_n}{d\theta} = \rho_n' = 0$$

$$n = 10\,000 \rightarrow i = 5000 \quad \cos(\theta - \beta) = 1 \quad A_n = b.h$$

Elastisite teorisinde, dikdörtgen kesitin  $h/b$  oranına göre bağıntıların katsayıları için bir tablo oluşturulmuştur (Çizelge 4.1.).

Çizelge 4.1. Dikdörtgen kesitin kenar oranlarına göre bağıntıların katsayıları (İnan, 1988)

$h/b$	1	2	4	8	$\infty$
$\eta_1$	0.208	0.246	0.282	0.307	1/3
$\eta_2$	0.14	0.229	0.281	0.307	1/3

$\frac{h}{b} = 2$  için maksimum yaklaşık kayma gerilmesi değeri

$$\tau^{yakl.} = \frac{2.M}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta) \cdot A_n} \cdot \frac{n^4}{\{[n.(n+1)]^2 - [i.(i+1)]^2\}}$$

$$\tau^{yakl.} = \frac{2.M}{\frac{b}{2} \cdot 1.(b.h)} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [5000.(5000+1)]^2\}}$$

$$\tau^{yakl.} = \frac{4.M}{h.b^2} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [5000.(5000+1)]^2\}}$$

$$\tau^{yakl.} = \frac{M}{0.2344.h.b^2} \text{ olarak ve birim dönme açısı}$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G.A_n^2} \cdot \frac{n^4}{\{[n.(n+1)]^2 - [i.(i+1)]^2\}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho_n')^2 + (\rho_n)^2}}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G.(h.b)^2} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [5000.(5000+1)]^2\}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(0)^2 + (\frac{b}{2})^2}}{\frac{b}{2} \cdot 1} \cdot d\theta$$

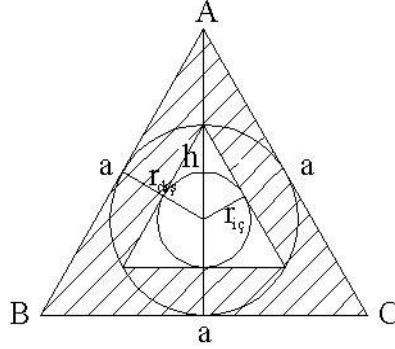
$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G.(2b)^2 \cdot b^2} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [5000.(5000+1)]^2\}} \cdot 2\pi$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{\pi.M}{G.2b^2 \cdot b^2} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [5000.(5000+1)]^2\}}$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{0.5969G.b^4} \text{ olarak belirlenmektedir.}$$

## 4.2.6. Boşluklu eşkenar üçgen kesit

Kesit ve ilgili değerler aşağıdadır, Şekil 4.14.



Şekil 4.13. Üçgen boşluklu üçgen kesit

$$r_{dış} = r, r_{iç} = \frac{r_{dış}}{2} = \frac{r}{2}$$

$$\rho_n = r = \frac{h}{3} = \frac{a\sqrt{3}/2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad \rho_n(\theta) = \rho_n = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \text{sabit} \rightarrow \frac{d\rho_n}{d\theta} = \rho_n' = 0$$

$$n = 10000 \rightarrow i = 5000 \quad \cos(\theta - \beta) = 1$$

$$A_n = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Maksimum yaklaşık kayma gerilmesi

$$\tau^{yakl.} = \frac{2.M}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta) \cdot A_n} \cdot \frac{n^4}{\{[n \cdot (n + 1)]^2 - [i \cdot (i + 1)]^2\}}$$

$$\tau^{yakl.} = \frac{2.M}{\frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot 1 \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000 \cdot (10000 + 1)]^2 - [5000 \cdot (5000 + 1)]^2\}}$$

$$\tau^{yakl.} = \frac{2.M}{\frac{a^3}{8}} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000 \cdot (10000 + 1)]^2 - [5000 \cdot (5000 + 1)]^2\}}$$

$$\tau^{yakl.} = 17.0635 \frac{M}{a^3} \text{ olarak ve birim dönme açısı da}$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G.A_n^2} \cdot \frac{n^4}{\{[n.(n+1)]^2 - [i.(i+1)]^2\}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(\rho_n')^2 + (\rho_n)^2}}{\rho_n \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot d\theta$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G \cdot \left(\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}\right)^2} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [5000.(5000+1)]^2\}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(0)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot 1} \cdot d\theta$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{M}{G \cdot \frac{a^4 \cdot 3}{16}} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [5000.(5000+1)]^2\}} \cdot 2\pi$$

$$\varphi^{yakl.} = \frac{32.M \pi}{3.G.a^4} \cdot \frac{10000^4}{\{[10000.(10000+1)]^2 - [5000.(5000+1)]^2\}}$$

$$\varphi^{yakl.} = 35.7377 \frac{M}{G.a^4} \text{ olarak belirlenir.}$$

## 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada daireden farklı dolu ve kısmi boşluklu en kesite sahip çubukların burulma probleminin Elastisite Teorisine ihtiyaç duyulmadan incelenmesine olanak verecek basit bir hesap modeli oluşturulmuş ve bu modele göre irdeleme yapılmıştır.

Burulma konusu içerisinde kapalı tüp kesitlerin burulma hesabı Bredt Formülleri olarak adlandırılan bağıntılarla yapılır. Bu çalışmada öncelikle ele alınan genel bir dolu ya da kısmi boşluklu kesit iç içe kapalı tüplerin birleşimi olarak modellenmiştir. Her bir kapalı tüp için Bredt Formüllerinin geçerli olduğu düşünülüp, tüm enkesit için denge ve geometrik uygunluk koşulları yazılarak, maksimum kayma gerilmesini ve birim dönme açısını verecek ifadelere ulaşılmaya çalışılmıştır. Bu bağıntılar kullanılarak pratikte karşılaşılabilecek mümkün olduğunca çok sayıda enkesit şekli için gerilme ve dönme açısı değerleri hesaplanmıştır. Sonuçlar Elastisite Teorisinde mevcut olan sonuçlarla karşılaştırılıp, doğruluk derecesi kontrol edilmiştir.

Dolu enkesitler için Elastisite Teorisiyle hesaplanan kesin sonuçlar mevcut olup bunlar bu çalışmada oluşturulan hesap modeliyle incelenen daire, sekizgen, altıgen, dikdörtgen, kare ve üçgen kesitler için elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış ve göreceli hatalar tespit edilmiştir. Ancak daireden farklı boşluklu kesitler için kesin sonuçlar Elastisite Teorisi kitaplarında bulunamadığından, bu tür kesitler için doğruluk derecesi kontrol edilememiştir.

Kesit örnekleri üzerinde yapılan hesaplar göstermiştir ki; sunulan yaklaşık hesap yöntemi düzenli eğrisel kenar şekline sahip daire gibi kesitlerde kesin sonucu verirken, kenarları doğru parçalarından oluşan kesitlerde, kenarlar arasındaki açının geniş veya dar olmasına bağlı olarak kesin sonuca göre biraz hatalı sonuçlar vermektedir. Örneğin sekizgen ve altıgen gibi geniş açılı kesitlerde hem kayma

gerilmesi hem de birim dönme açısı için yöntemin doğruluk derecesi oldukça iyidir. Buna karşılık kare ve eşkenar üçgen gibi dik veya dar açılı kesitlere gidildikçe yöntemin doğruluğu azalmaktadır. Bunun sebebi; sunulmuş olan yaklaşık yöntemin keskin köşeli kesit bölümlerini modelleyememesidir. Bilindiği gibi bu tür kesit kısımlarının tüm kesitin burulma dayanımına katkısı oldukça küçüktür.

Farklı teknik problemlerde karşılaşılan ve burulma etkisiyle zorlanan taşıyıcı elemanlarda en çok kullanılan kesit daire ve daire halkası kesitler olmasına karşılık, bazen teknik zorunluluk, mimari istekler ve benzeri nedenlerle daireden farklı kesitlerin de kullanımı söz konusu olmaktadır. Böyle durumlarda kesin tasarımdan önce, mühendise boyutlar ya da güvenlik yönünden kısa sürede fikir verebilecek basit yöntemler oldukça faydalı olmaktadır. İşte sunulmuş olan bu çalışmadaki yaklaşık model ve formülasyonun, bazı kesitler için kesin tasarımda bile kullanılabilir, diğer birçok kesitin de ön tasarımında faydalanılabilecek böyle bir basit yöntem olduğu görülmüştür.

Ele alınmış olan örnek kesitlerin birim dönme açısı hesaplarında kolaylık olması açısından hep ilgili kesitin iç teğet çemberinin yarıçapından faydalanılmıştır. Ancak belirtmelidir ki daha hassas sonuçlar elde edilmek istendiği durumlarda bu yarıçap değeri yerine kutupsal koordinatlar kullanılarak elde edilecek kesit sınırı yarıçap değeri kullanılması gerekir. Bunun dışında, içe dönük köşeleri olan ya da başka özellikler arz eden kesitler için yaklaşık yöntemin verdiği sonuçlar belirlenip, Sonlu Elemanlar Yönteminin vereceği sonuçlarla karşılaştırılabilir. Bu tür çalışmalar tez sonrasına bırakılmıştır.



## KAYNAKLAR

- BAKİOĞLU, M., KADIOĞLU, N. ve ENGİN, H., 1995. Mukavemet Problemleri, Cilt 1, Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş., İstanbul, 466s.
- DEN HARTOG, J. P., 1952. Advanced Strength of Materials, Cambridge, McGraw-Hill Book Comp. Çeviren: İZMİRLİ, O., 1969, İleri Mukavemet, Arı Kitabevi Matbaası, İstanbul, 392s.
- İNAN, M., 1988. Cisimlerin Mukavemeti, İTÜ Vakfı, Yayın No: 25, İstanbul, 560s.
- SERRA, M., 1996. Approximated Calculus of Torsional Rigidity of Beams with Solid Cross-Section, Computers and Structures, 62(4): 771-774.
- TAMEROĞLU, S., 1991. Elastisite Teorisi, İTÜ İnşaat Fakültesi Matbaası, Sayı: 1434, İstanbul, 476s.
- KAYAN, İ., 1992. Cisimlerim Mukavemeti, İTÜ İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul, 720s.
- TIMOSHENKO, S. P. and GOODIER, J. N., 1987. Theory of Elasticity, New York, McGraw-Hill Book Comp, 512p.

## ÖZGEÇMİŞ

Diyarbakır ilinde 08.01.1982 tarihinde doğdu. İlk öğrenimini Diyarbakır İnönü İlkokulu, ortaokulu Bingöl Lisesi ve lise öğrenimini Van Özel Serhat Fen Lisesi'nde tamamladı. 2000 yılında Harran Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği bölümünü kazandı ve 2004 yılı Bahar döneminde mezun oldu. Aynı yılın güz döneminde Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans yapmaya hak kazandı.

## ÖZET

Bazı yapı ve makine elemanları burulma momenti altında zorlanan elemanlardır. Bina kenar kirişleri, eğri eksenli kirişler ve miller bu elemanlara bir kaç örnektir. Bu tür elemanlarda maksimum kayma gerilmelerinin ve birim dönme açılarının hesabı oldukça önemlidir. Elastisite Teorisinde sadece bazı kesitler için kesin sonuçlar elde edilmiştir. Genel şekilli kesitlerin burulma hesabı ise sayısal yöntemlerin kullanılmasını gerektirir. Bunun yanında bazı araştırmacılar basit yaklaşık yöntemler de geliştirmeye çalışmışlardır.

Bu çalışmada genel şekilli dolu ya da boşluklu kesitlerin yaklaşık burulma hesabı için bir model ve formülasyon sunulmuştur. Ele alınan kesit iç içe kapalı tüplerin birleşimi gibi düşünülmüştür. Kapalı tüp kesitler için geçerli olan Bredt formüllerinden yararlanılarak ve denge ve uygunluk koşulları kullanılarak, maksimum kayma gerilmesi ve birim dönme açısını veren ifadeler elde edilmiştir. Bu ifadeler çeşitli dolu ve boşluklu kesitlere uygulanarak, sonuçlar Elastisite Teorisinde mevcut olan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bunlar, sunulan yaklaşık yöntemin düzenli eğrisel kenar şekline sahip kesitler için kesin değerleri verdiğini, köşeli kesitlerde ise açılara bağlı olarak doğruluk derecesinin biraz düştüğünü göstermiştir.

## **SUMMARY**

Some structural and machine elements are stressed under torsional moments. Building edge beams, curved beams and shafts are some examples to these elements. It is very important the calculation of maximum shearing stresses and angles of twist in these elements. Only for some cross-sections the exact values have been obtained in the Theory of Elasticity. The torsion calculus of generally shaped cross-sections required the using of numerical methods. On the other hand, some researchers have worked to develop simple approximate methods.

In this study, an approximate model and a formulation have been presented for the torsion calculation of generally shaped cross-sections. The section has been considered the combination of a number of closed thin-walled strips one inside the other. Making use of the Bredt's formulas which valid only for closed thin-walled sections, and using the equilibrium and compatibility conditions, expressions for the calculation of maximum shearing stress and angle of twist have been obtained. These expressions have been applied to various solid and hollow sections, and results compared with the results of Theory of Elasticity. These results have shown that the presented approximate method gives exact values for sections with regular curvilinear boundary, and for the cornered sections the level of accuracy of the method may be somewhat low.