T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNTEGRAL DENKLEMLERİ ve ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Songül KANAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2008

Yrd. Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ danışmanlığında, Songül KANAR'ın hazırladığı "İntegral Denklemleri ve Çözüm Yöntemleri "konulu bu çalışma 01/02/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hamza MENKEN

Üye : Doç. Dr. Yunus BABUR

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Prof. Dr. İbrahim BOLAT
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümler tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZ

Yüksek Lisans Tezi

İNTEGRAL DENKLEMLERİ ve ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Songül KANAR

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
Yıl: 2008, Sayfa: 186

Bu tezde, lineer integral denklemleri için elemanter Varlık-Teklik teoremleri ile Fredholm ve Volterra tipi integral denklemleri tüm detayları ile verildi. Bunun yanında, bu integral denklemlerin belli başlı çözüm yöntemleri olan cebirsel sistemlere indirgenme, ardışık yaklaşıklar, çekirdeğin iterasyonu metodları ve uygulamarı ele alındı. Hilbert Schmidt teorisi gerekli argümanları ile verildi. Fourier, Laplace, Hankel ve Mellin transformasyonları anlatıldı. Projeksiyon metodu ile Wiener-Hopf Teknigi I-II ve Dual integral denklemleri tartışıldı.

ANAHTAR KELİMELER: İntegral Denklemleri, Fredholm-Volterra, Hilbert-Schmidt, İntegral Transformasyonları, Wiener-Hopf tekniği I-II.

ABSTRACT

MSc Thesis

METHODS for SOLVING INTEGRAL EQUATIONS

Songül KANAR

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
Year: 2008, Page: 186

In this thesis we discuss linear integral equations. Basic existence and uniqueness theorems are given. Fredholm and Volterra types integral equations with certain methods are given in detail. Hilbert-Schmidt theory with its arguments is also given. Integral transformation methods are discussed very fully.

KEY WORDS: Integral Equations, Fredholm-Volterra, Hilbert-Schmidt, Integral Transformations, The Wiener-Hopf Tecnique I-II.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında, bilgisinden ve rehberliğinden yararlandığım tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ ’ye sonsuz teşekkürler. Eğitimim boyunca bana güç veren Anneme, Babama ve kardeşlerime müteşekkirim.

Ayrıca, özellikle tezi hazırlarken maddi ve manevi desteğini esirgemeyen eşim Arş. Gör. Ahmet KARTALKANAT ve ailesine teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

İntegral denklemleri ilk olarak J. Fourier (1768–1830) tarafından ele alınmıştır. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları belli şartlara sahip olmak şartıyla

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ixy) f(y) dy$$

ve

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ixy) g(x) dx$$

integral denklemleri Fourier transformasyonları olarak bilinmektedir. $g(x)$ fonksiyonuna $f(y)$ fonksiyonun ters Fourier transformasyonu denir. 18. yüzyıllın sonlarına doğru V. Volterra, integral denklemleri ile ilgili problemi çözerken belli integral operatörlerin tersini bulma problemi için ters Fourier transformasyon ifadesini kullanılmıştır.

$$F(x) = \int_{0}^{x} (x-t)^{-\alpha} u(t) dt, \qquad 0 < \alpha < 1$$

integral denklemi Abel (1823) denklemi olarak bilinmektedir. Burada, $u(t)$ bilinmeyen fakat $F(x)$ ise bilinen bir fonksiyondur. Abel denkleminin çözümü

$$u(t) = -\pi^{-1} \sin(\alpha\pi) \frac{d}{dt} \int_{0}^{t} (t-x)^{\alpha-1} F(x) dx$$

formülasyonu ile ifade edilir. Abel tarafından çözülen Abel denkleminin tatmin edici ispatı Schlömilch (1848) tarafından yapılmıştır. Daha fazla elemanter bilgi için Siroviçh (1988) ve Spiegel (1965)'e bakınız. 19. yüzyılda Abel'in integral denklemleri üzerine olan çalışmalarından etkilenen matematikçilerin bazıları; Rouchê (1860), Sonine (1884) ve Bois-Reymond (1888). N. Sonine tarafından elde edilen Abel tipi integral denklemlerinin bazı sonuçları Levi Civita (1895) tarafından genelleştirilmiştir. Goursat (1964), Abel tipi integral denklemlerinin çözümü ile ilgilenmekle beraber integralin tersi problemi ile de uğraşmıştır. Myller (1909), Fredholm integral denklemleri ile beraber mekanikte kullanılan Abel tipi integral denklemleri ile ilgilenmiştir. Abel'in çalışmalarından yüzyıl sonra Tamarkin (1930) ve Tonelli (1928) gibi ünlü matematikçiler Abel integral denklemlerini çalışmışlardır.

Volterra (1985) ile 1895 yıllı integral denklemler teorisi için yeni bir başlangıç olmuştur. Kendisinden önce çalışan matematikçilerin çoğundan farklı olarak formüllerle integral denklemlerinin çözümünü bulmakla beraber Volterra denklemleri olarak bilinen integral denklemlerinin özel bir tipini bulmayı amaçladı. Volterra integral terimi ilk olarak T. Lalecso, E. Picard'ın danışmanlığında tezini yazarken ifade etmiştir. Volterra daha genel integral denklemlerini çalışmıştır. Örneğin,

$$F(x)=\int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

veya

$$F(x)=u(x)+\int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

burada, $u(t)$ bilinmeyen fonksiyondur. Aynı zamanda, fonksiyonel analitiğe olan bakış açısı ve integral operatörlerinin tersi ile ilgili varlık problemleri ile uğraşından dolayı Volterra fonksiyonel analizin kurucularından biri sayılır. Volterra ilk olarak integral denkleminin kavramı ile ilgili fiziksel uygulamalarıyla ilgilenmemiştir. Sonraki aktivitelerinde bunu baskın bir şekilde ele almıştır. 1895 yılındaki makalesinde integral denklemlerine önemli katkı yapmıştır.

Volterra'dan yarım yüzyıl önce Liouville (1837), $y(0)=1$ ve $y'(0)=0$ koşullarına bağlı olarak

$$y''(x)+(\rho^2-a(x))y(x)=0$$

diferansiyel denklemine karşılık gelen Volterra denkleminin ikinci tipi olarak bilinen

$$y(x)-\rho^{-1}(x)\int_a^x a(t)\sin\rho(x-t)y(t)dt=\cos\rho x$$

integral denklemini bulmuş ve Abel'in çalışmalarından habersiz olarak

$$\int_x^\infty (s-x)^{-1}y(s)ds=f(x)$$

singüler integral denklemini ele almıştır. Fakat ilginçtir, bilim dünyasında integral denklemlerine büyük katkı Volterra'ya verilmiştir. Yukarıdaki denklemin çözümünü veren formül

$$y(x) = -\pi^{-1} \frac{d}{dx} \int_x^{\infty} (s-x)^{-\frac{1}{2}} f(s)ds$$

şeklindedir (Corduneanu, 1991). Volterra'nın integral denklemlerine olan ilk meşhur katkısından beş yıl sonra Fredholm (1900), integral denklemlerle ilgili parametre içeren yeni bir teori inşa etti. Bu integral denklemi,

$$f(x) = y(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt$$

biçimindedir. Fredholm teorisi, esas olarak sonlu boyutlu lineer bir sistemin çözülebilirliğinin genişlemesini temsil eder. Yani, lineer denklem sistemi

$$x + \lambda Ax = b$$

şeklindedir. Sonsuz boyutlu durum, lineer fonksiyonel analizin tesisinde en önemli kaynaklarından birisini teşkil eder. Banach (1922)'de Banach uzaylarını ve Riesz-Sz.-Nagy (1952)'de lineer uzaylarında soyut operatörler için Fredholm teorisini geliştirdiler. Fredholm'un çalışmalarını takiben bu yüzyılda ünlü matematikçiler Poincare (1909), Hilbert (1912), Picard (1906), Weyl (1909), Frechet (1912), Heywood-Frechet (1912) ve Schmidt (1907) Fredholm teorisini oldukça zenginleştirerek geliştirdiler. Diğer bilim dallarına olan bağlantılarına vurgu yaptılar. Özellikle, Hilbert ve Schmidt simetrik çekirdeğe sahip olan integral denklemler teorisini geliştirdiler. Bu bağlamda, ortogonal (diklik) seriler hakkında önemli sonuçlar elde edildi. Fredholm teorisinin ortaya çıkışıyla Volterra integral denklemleri bu teorinin gölgesinde kaldı. Örneğin, integral denklemleri üzerine çalışan matematikçiler Volterra integral denkleminin sıfır eigen değere sahip olduğunu görerek başlangıçta Volterra integral denklemini ilginç bulmadılar. Sonradan Volterra, Volterra integral denkleminin diger bilim dalları ile olan ilişkisini araştırdı. Bu integral denkleminin mekanikteki uygulamaları Boltzmann (1874)'a dayanır (Corduneanu, 1991). Ayrıca, Volterra integral denklemleri populasyon dinamiğinde oldukça önemli uygulamalara sahiptir. Bu alanda, önemli kişiler Volterra-d'Ancona (1987), Webb (1977) ve Cushing (1976). Samuelson (1971), Volterra integral denklemlerinin ekonomi teorisindeki uygulamalarını yaptı. Abstrakt (soyut) Volterra integral denklemleri sırasıyla ilk olarak Tonelli (1928), Graffi (1931), Cinquini (1933) ve Tychonoff (1938) tarafından çalışılmıştır. Ayrıca, Tychonoff abstract Volterra integral denklemlerini matematiksel fiziğin çeşitli uygulamalarına vurgu yapmakla beraber bu teoriyi geliştirerek daha modern bir yaklaşım getirmiştir.

Carleman (1923) ve Von Neumann (1935) integral operatörlerine katkıda bulunmuşlardır. Özellikle, Carleman sınırsız lineer integral operatörleri üzerine olan katkıları ile bilinmektedir. Sınırsız lineer integral operatörler teorisi hala gelişime gereksinim duymaktadır. Korotkov (1983), Carleman'ın sınırsız lineer integral operatörleri üzerine olan çalışmalarıyla beraber bu konuda bir monograf yazmıştır. İntegral operatörlerinin spektral teorisi gelecek vaat eden diğer önemli konulardan biridir. Bu konuda, Pietsch (1980) ve Elstner-Pietsch (1987) kayda değer katkılarıyla bilinirler.

1940'larda integral denklemler teorisinde tatmin edici bir gelişme olmadı. Dolph (1949)'da nonlineer teorisinde Hammerstein denklemlerine çok önemli bir katkıda bulundu. Denklemin nonlineerliği ile lineer integral operatörün spektrumu arasındaki etkileşimi basit bir durumla aydınlattı. Diğer önemli bir katkı ise Akhiezer (1947)'ın Carleman operatörler teorisi üzerine olan çalışmasıdır.

1950'lerde Sato (1935), nonlineer Volterra denklemlerinin qualitative (niteliksel) teorisi ile ilgilendi. Krasnoselskii (1964), bu konuda bir kitap yayınladı. M. G. Krein ve I. C. Gohberg yarı eksen, tüm reel eksen üzerinde konvulasyon tipi denklemler üzerine araştırmalar yapmışlardır. Corduneanu (1973), Gohberg-Feldmann (1974), Gohberg-Kaashoek (1986) ve Popov (1973)'un feedback sistemleri üzerine olan çalışmalarına bakınız.

Nohel-Shea (1976)'da çözümlerin asimptotik hareketleri ve stabilite ile ilgili kriterin tanım kümesi üzerine çalışmalar yayınladı.

Fredholm'un integral denklemleri üzerine yaptığı araştırmaları takiben 1960 yıllından itibaren bu teoriye olan ilginin ulaştığı seviyeyi tahmin etmek oldukça güçtür. Amerika, Sovyet Rusya (Rusya), İtalya, Hindistan, Japonya, Finlandiya, Romanya, Polonya, İsrail ve diğer ülkelerde araştırma yapan birçok okul integral denklemler teorisi ile ilgili çeşitli problemlerin araştırılmasına yönelmişlerdir.

İntegral denklemleri ve çözüm yöntemlerine çalışmamızdaki amaç integral denklemler teorisinin matematiğin birçok alanıyla yakın bir bağlantısının olmasıdır. Bunların başında, diferansiyel denklemler ve operatörler teorisi gelmektedir. Bayağı ve kısmî diferansiyel denklemler alanındaki birçok problem tekrar integral denklemleri ile ele alınabilir. Diferansiyel denklemlerde varlık-teklik ile ilgili birçok sonuç integral denklemlere tekabül eden sonuçlara karşılık elde edilmektedir. Yine, matematiksel fiziğin birçok problemi integral denklemleri ile ifade edilmektedir. Bu tür uygulamaların bir listesini yapmak hemen hemen imkânsız olacaktır. Uygulamalı matematik ve matematiksel fizik alanında integral denklemlerinin hemen hemen her alanda rol oynadığını söylemek olasıdır. Ayrıca, integral denklemlerini analiz etmek diferansiyel denklemleri analiz etmek demektir. Çünkü her diferansiyel denklem integral denkleme dönüştürülür. Dolayısıyla, çok zor olan diferansiyel denklemler integral denklemlere dönüştürülerek daha basit bir şekilde çözülebilir. İntegral denklemler konusu lineer cebirin bir genişlemesi ve modern fonksiyonel analizin bir başlangıcı olarak düşünülebilir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Elemanter Varlık Teoremleri-I

Teorem 2.1.1:

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt \tag{2.1}$$

integral denklemi Volterra integral denkleminin ikinci tipidir. Burada $f(x)$ fonksiyonu $[a,\ b]$ kapalı aralığında, $K(x,t)$ çekirdeği ise $[a,\ b]\times[a,\ b]$ kapalı aralığında süreklidir. Burada, a ve b sınırlı reel sayılardır.

$$\left.\begin{cases} \phi_0(x) = f(x) & \\ & n = 0,1,2,... \\ \phi_{n+1}(x) = \phi_0(x) + \int_a^x K(x,t)\phi_n(t)dt & \end{cases}\right\} \tag{2.2}$$

şeklinde bir $\{\phi_n(x)\}$ dizisi tanımlansın. Bu halde, her $\{\phi_n(x)\}$ dizisi $[a,\ b]$ aralığı üzerinde sürekli ve $\{\phi_n(x)\}$ dizisi $[a,\ b]$ aralığı üzerinde $\phi(x)$ e düzgün sürekli olarak yakınsar. Bu $\phi(x)$ fonksiyonu, $\phi(x) = f(x) + \int_a^x K(x;t)\phi(t)dt$ integral denklemini sağlar. Aynı zamanda, $\phi(x)$ verilen integral denklemini sağlayan sürekli tek çözümdür.

İspat: İspatı adım adım yapalım. Süreklilik: $\phi_n(x)$ in sürekli olduğunu tümevarımla gösterelim.

$$\phi_n(x) = \phi_0(x) + \int_a^x K(x,t)\phi_{n-1}(t)dt\,, \qquad n = 1,2,...$$

$\phi_0(x)$ in sürekli olduğu açıktır. $\phi_{n-1}(x)$ in $\left[a,b\right]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli olduğunu kabul edelim. Kapalı aralık üzerinde sürekli fonksiyonlar sınırlı olacağından, $\left|\phi_{n-1}\right| \leq M_{n-1}$ olacak şekilde $M_{n-1} > 0$ sayısı vardır. Benzer düşünceyle,

$$\left|f(x)\right| = \left|\phi_0(x)\right| \leq M \text{ ve } \left|K(x,t)\right| \leq K\,,$$

$$\phi_n(x_1)-\phi_n(x_2)=f(x_1)-f(x_2)+\int_a^{x_1}K(x_1,t)\phi_{n-1}(t)dt-\int_a^{x_2}K(x_2,t)\phi_{n-1}(t)dt.$$

$x_2>x_1$ olsun,

$$\left|\phi_n(x_1)-\phi_n(x_2)\right|\le\left|f(x_1)-f(x_2)\right|+\int_{x_1}^{x_2}\left|K(x_1,t)\phi_{n-1}(t)\right|dt+\int_a^{x_2}\left|K(x_1,t)-K(x_2,t)\right|\left|\phi_{n-1}(t)\right|dt.$$

f ve K kapalı aralıkta sürekli olduklarından düzgün süreklidirler. Verilen $\varepsilon>0$ a karşılık $\delta(\varepsilon)$ sayısı vardır. Öyle ki,

$$\left|x_1-x_2\right|<\delta(\varepsilon), \qquad \left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon,$$

$$\left|K(x_1,t)-K(x_2,t)\right|<\varepsilon, \qquad \left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\delta(\varepsilon).$$

Bu halde,

$$\left|\phi_n(x_1)-\phi_n(x_2)\right|<\varepsilon+\int_{x_1}^{x_2}\left|K(x,t)\right|\left|\phi_{n-1}(t)\right|dt+\int_a^{x_2}\left|K(x_1,t)-K(x_2,t)\right|\left|\phi_{n-1}(t)\right|dt$$

$$<\varepsilon+K\left|M_{n-1}\right|\left|x_2-x_1\right|+\varepsilon M_{n-1}(x_2-a)<\varepsilon+K\left|M_{n-1}\right|\left|x_2-x_1\right|+\varepsilon M_{n-1}(b-a).$$

$\left|\phi_n(x_1)-\phi_n(x_2)\right|$ arasındaki farkı istediğimiz yeterlilikte küçük yapabiliriz. Bu ise $\left|x_1-x_2\right|$ arasındaki farkı küçültülerek yapılır. Yani, (2.2) ile teşkil edilen ardışık yaklaşıklar süreklidir.

Yakınsaklık:

$$\left|\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)\right|\le K^n M\,\frac{(x-a)^n}{n!} \tag{2.3}$$

Bunun doğruluğu tümevarım ile gösterilecektir.

$n=1$ için, $\left|\phi_1(x)-\phi_0(x)\right|=\left|\int_a^x K(x,t)\phi(t)dt\right|\le KM\left|x-a\right|$

doğrudur. n için doğru olduğunu kabul ederek, $n+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\left|\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)\right|\le K^n M\,\frac{(x-a)^n}{n!},$$

$$\left|\phi_{n+1}(x)-\phi_n(x)\right|=\phi_0(x)+\int_a^b K(x,t)\phi_n(t)dt-\phi_0(x)-\int_a^b K(x,t)\phi_{n-1}(t)dt$$

$$= \left| \int_a^x K(x,t)(\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)dt \right| \le KM \int_a^x K^n \frac{(t-a)^n}{n!} dt$$

$$= \frac{MK^{n+1}}{n!} \int_a^x (t-a)^n dt = MK^{n+1} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} .$$

Dolayısıyla, (2.3) ile teşkil edilen üst sınır doğrudur. Düzgün Yakınsaklık:

$\phi_n(x) = \phi_0 + (\phi_1 - \phi_0) + (\phi_2 - \phi_1) + ... + (\phi_n - \phi_{n-1})$

ifadesinden yukarıda teşkil edilen üst sınır tahmini $\sum (\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x))$ içinde geçerlidir. Yani, bu seri mutlak ve düzgün yakınsaktır. Bu mutlak ve düzgün yakınsaklık exponansiyel serilerle karşılaştırmadan gelir.

$\phi_n(x) = \phi_0 + (\phi_1 - \phi_0) + (\phi_2 - \phi_1) + ... + (\phi_n - \phi_{n-1})$

$\phi_n(x) \le |\phi_0| + |\phi_1 - \phi_0| + |\phi_2 - \phi_1| + ... + |\phi_n - \phi_{n-1}|$

$$\le M + KM\,|x-a| + K^2 M \frac{|x-a|^2}{2!} + ... + K^n M \frac{|x-a|^n}{n!}$$

$$= M(1 + K|x-a| + K^2 \frac{|x-a|^2}{2!} + ... + K^n \frac{|x-a|^n}{n!}) = Me^{K|x-a|} \le Me^{K(b-a)} .$$

$n \to \infty$ için, Weierstrass-M kriterine göre $\sum (\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x))$ serisi düzgün yakınsaktır. Böylece $\{\phi_n(x)\}$, $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde $\phi(x)$ e düzgün yakınsar.

(2.2) sisteminde limit alınırsa, $\phi_{n+1}(x) = f(x) + \lim_{n\to\infty} \int K(x,t)\phi_n(t)dt.$

Bu halde, $K(x,t)\phi_n(t)dt \to K(x,t)\phi(t).$ Böylece,

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\left(\lim_{n\to\infty} \phi_n(t)\right) dt = f(x) + \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt. \qquad (2.4)$$

O halde ϕ çözümdür. Bu çözümün tek olduğunu gösterelim.

Teklik: Varsayalım ki iki tane çözümü olsun. Bu durumda φ ve ϕ (2.4) denklemini sağlar.

$$|\varphi - \phi| = \left| \int_a^x K(x,t)(\varphi - \phi)dt \right| .$$

φ ve ϕ sürekli olduklarından $|\varphi - \phi| \le N$. $|K(x,t)| \le K$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla,

$$|\varphi - \phi| \le KN\int_a^x dt = KN(x-a)$$

$$|\varphi - \phi| \le \int_a^x KN(t-a)|K(x,t)|dt \le K^2N\int_a^x (t-a)dt \;\le K^2N(x-a)^2/2!$$

$$\ldots \le K^nN(x-a)^n/n! \to 0,\; n\to\infty .$$

Teorem 2.1.2:

$$\phi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)\phi(t)dt, \qquad (\lambda \text{ sabit})$$

olsun.

$$\left\{\begin{aligned} &\phi_0(x) = f(x) \\ &\phi_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)\phi_{n-1}(t)dt \end{aligned}\qquad n = 0,1,2,\ldots\right\}$$

dizisi tanımlansın. Bu halde her $\phi_n(x)$, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde düzgün olarak çözüme yakınsar.

İspat: İspatı adım adım yapalım.

Süreklilik: Teorem 2.1.1 deki gibi gösterilir.

Yakınsaklık: Yakınsaklık için üst sınır,

$$|\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)| \le M\,|\lambda|^n K^n(b-a)^n, \qquad (|\lambda| << 1)$$

şeklinde olsun. Burada, geometrik seri yardımıyla düzgün yakınsaklık gösterilir.

$$\begin{aligned} |\phi_n(x)| &\le |\phi_0| + |\phi_1 - \phi_0| + |\phi_2 - \phi_1| + \ldots + |\phi_{n-1} - \phi_n| \\ &\le M + M\,|\lambda|K(b-a) + M\,|\lambda|^2 K^2(b-a)^2 + \ldots + M\,|\lambda|^n K^n(b-a)^n \\ &\le M(1 + |\lambda|K(b-a) + |\lambda|^2(b-a)^2 + \ldots + |\lambda|^n K^n(b-a)^n) \\ &\le M\frac{1}{1-|\lambda|K(b-a)} . \end{aligned}$$

Denk olarak, eğer $|\lambda K(b-a)| < 1$ den $|\lambda| < \dfrac{1}{K(b-a)}$. Teoremin geri kalan kısmı teorem 2.1.1 deki gibidir.

Not: $|\lambda| < \dfrac{1}{K(b-a)}$ şeklinde tanımlanan $|\lambda|$nın olabilecek en iyi değer olmadığını aşağıdaki örnekle açıklayalım.

Örnek 2.1.3: $[a,b]=[0,1]$ ve $K(x,t)=e^{x-t}$ olsun. $\phi(x)= f(x)+\lambda\int_0^1 e^{x-t}\phi(t)dt$

şeklinde tanımlanan integral denklemi için $|\lambda|$ nın durumunu inceleyelim.

Çözüm:

$$\phi(x)= f(x)+\lambda e^x\int_0^1 e^{-t}\phi(t)dt$$

olur. Burada, $\int_0^1 e^{-t}\phi(t)dt=\mu$ olsun. μ değeri denklemde yerine yazılırsa denklem,

$$\phi(x)= f(x)+\lambda e^x\mu$$

şekline dönüşür. Bu denklemin her iki tarafı e^{-x} ile çarpılır ve $\int_0^1$ integre edilirse

$$\int_0^1 e^{-x}\phi(x)dx=\int_0^1 e^{-x}f(x)dx+\int_0^1 \lambda\mu dx$$

bulunur. Burada, $\int_0^1 e^{-x}f(x)dx=\eta$ denirse $\lambda=1-\dfrac{\eta}{\mu}$ elde edilir.

Çıkarım 1: μ nün küçük olması halinde λ patlar.

Çıkarım 2: $\mu(1-\lambda)=\int_0^1 e^{-x}f(x)dx$

$\lambda=1$ olması halinde sol taraf sıfırdır, fakat sağ taraf sıfırdan farklıdır. Bu ise iyi bir seçim değildir.

Çıkarım 3: $\lambda=1$ olması halinde çözüm mevcuttur. Bu ise, $\int_0^1 e^{-x}f(x)dx=0$ olması ile mümkündür. Böylece $\lambda\neq 1$ olması halinde çözüm mevcuttur.

Teorem 2.1.1 in ispatı biraz daha farklı bir şekilde yorumlanabilir.

$$T:[a,b]\to[a,b],\ T(\phi(x)= f(x)+\int_a^x K(x,t)\phi(t)dt\ .$$

2.2. Fixed Nokta Teoremleri

H bir Hilbert uzayı, $T:H\to H$ bir operatör olsun. Bu operatör lineer olmayabilir. Tüm $f_1, f_2 \in H$ için

$$\|Tf_1 - Tf_2\| \le \alpha \| f_1 - f_2\|$$

olacak şekilde bir $\alpha < 1$ pozitif sayısı varsa T ye contraction (büzülme) operatörü denir.

Örnek 2.2.1. $(T\phi)(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt$ şeklinde tanımlanan T operatörü bir contraction mıdır?

Çözüm:

$$|T\phi_1 - T\phi_2| = \left| \int_a^x K(x,t)(\phi_1-\phi_2)(t)dt \right|$$

$$\le \int_a^x |K(x,t)||\phi_1-\phi_2|dt \le \sup_{x\in[a,b]} |\phi_1-\phi_2| \int_a^x K(x,t)dt$$

$$\le K(b-a) \sup_{x\in[a,b]} |\phi_1-\phi_2| \le K(b-a)d(\phi_1,\phi_2)$$

$K(b-a)<1$ olması koşuluyla bu operatör bir contractiondır.

Tanım 2.2.1: $Tf = f$ oluyorsa f ye T nin fixed (sabit) noktası denir.

Teorem 2.2.1: $T:H\to H$ bir contraction operatör olsun. Bu halde,

$$Tf = f\,. \tag{2.5}$$

İspat: (2.5) in çözümünün varlığını kabul ederek fixed noktanın tek olduğunu gösterelim. Bir an için $Tf = f$, $Tg = g$ olacak şekilde iki fixed noktaya sahip olduğunu kabul edelim.

$$\|f-g\| = \|Tf - Tg\| \le \alpha\|f-g\|,\ (1-\alpha)\|f-g\| \le 0$$

olup $(1-\alpha)>0$ olduğundan $\|f-g\|\le 0$. Bu ise mümkün değildir, çünkü $\|f-g\| \ge 0$, yani $\|f-g\| = 0$.

Şimdide (2.5) denkleminin çözüme sahip olduğunu iterasyon yöntemiyle gösterelim. $f_{n+1} = Tf_n$, $n = 0,1,2,...$ olsun. Burada, f_0 seçilir. İlk olarak bu dizinin bir

Cauchy dizisi olduğunu bu dizinin limitinin de (2.5)in çözümü olduğunu göstermemiz gerekir.

$$\|f_{n+1}-f_n\| = \|Tf_n - Tf_{n-1}\| \le \alpha \|f_n - f_{n-1}\| = \alpha \|Tf_{n-1} - Tf_{n-2}\|$$
$$\le \alpha^2 \|f_{n-1}-f_{n-2}\| \ldots \le \alpha^n \|f_1 - f_0\|.$$

Daha genel olarak, $n > m$ için

$$\|f_n - f_m\| = \|(f_n - f_{n-1}) + (f_{n-1} - f_{n-2}) + \ldots + (f_{m+1} - f_m)\|$$
$$\le \|f_n - f_{n-1}\| + \|f_{n-1} - f_{n-2}\| + \ldots + \|f_{m+1} - f_m\|$$
$$\le (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \ldots + \alpha^m)\|f_1 - f_0\|$$
$$\le (\alpha^m + \alpha^{m+2} + \ldots)\|f_1 - f_0\| = \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\|f_1 - f_0\|.$$

Böylece, $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|f_n - f_m\| = 0$. Buradan, (f_n) bir Cauchy dizisidir. (f_n) nin limiti f dir. Bu f limitinin (2.5) denklemini sağladığını gösterelim. T sürekli bir operatör olduğundan $Tf = T(\lim f_n) = \lim Tf_n = \lim f_{n+1} = f$. Yani, $Tf = f$.

Teorem 2.2.2: $T : H \to H$ bir operatör ve T^n de bir contraction operatörü olsun. Bu halde, $Tf = f$ olacak şekilde bir tek $f \in H$ vardır.

İspat: Bir önceki teoremden dolay $T^n f = f$ olduğunu söyleyebiliriz. $\lim\limits_{k\to\infty} T^{kn} f_0 = f$ olacak şekilde f_0 keyfi fonksiyonunu seçelim. Özellikle, $\lim\limits_{k\to\infty} T^{kn} Tf = f$. Fakat, $T^n f = f$ ve $T^{kn} f = f$ olduğundan $\lim\limits_{k\to\infty} T^{kn} Tf = \lim\limits_{k\to\infty} TT^{kn} f = \lim\limits_{k\to\infty} Tf = Tf$. Böylece, $Tf = f$. Bu fixed noktanın da tek olduğunu göstermek için, $Tf = f$ ve $Tg = g$ olsun. Bu taktirde, $T^n f = f$, $T^n g = g$ olur. T^n bir contraction operatör olduğundan $f = g$.

2.3. Elemanter Varlık Teoremleri-II

$$\phi - \lambda K\phi = f \tag{2.6}$$

denklemini ele alalım. Burada, $f \in H$ ve K ise

$$\|K\phi_1 - K\phi_2\| \leq M\,\|\phi_1 - \phi_2\| \tag{2.7}$$

şartını sağlayan sınırlı bir operatör olsun. Daha öncede tanımlandığı gibi burada K bir integral operatörüdür. Lineer veya nonlineer olabilir. Lineer operatörler için (2.7) denklemi K nın sınırlı olduğu ifadesine denktir, fakat nonlineerlik durumunda (2.7) ifadesi K nın sınırlılığını garanti etmez. Artı hipotezlere gerek vardır. (2.6) denklemi

$$T\phi = \phi \tag{2.8}$$

biçiminde yazılabilir. Burada,

$$T\phi = f + \lambda K\phi\,. \tag{2.9}$$

Eğer $f \neq 0$ ise T bir nonlineer operatör olup, hatta K operatörü lineer olsa bile nonlineerlik durumu hala geçerlidir.

Teorem 2.3.1:

$$\|K\phi_1 - K\phi_2\| \leq M\,\|\phi_1 - \phi_2\|$$

ile beraber yeterince küçük $|\lambda|$ lar ve tüm f ler için

$$\phi - \lambda K\phi = f$$

denklemi tek çözüme sahiptir.

İspat: $T\phi = f + \lambda K\phi$ olduğundan,

$$\|T\phi_1 - T\phi_2\| = |\lambda|\,\|K\phi_1 - K\phi_2\| \leq |\lambda|\,M\,\|\phi_1 - \phi_2\|\,.$$

Burada, $|\lambda|M < 1$ ise T bir contraction operatör olur. Dolayısıyla, $T\phi = \phi$ ve buna denk olarak $\phi - \lambda K\phi = f$ denklemi bir tek çözüme sahiptir. Eğer, $f(x) \in L_2[a,b]$ ve integral operatörü sınırlı ise yukarıda ifade edilen teorem,

$$\phi(x) - \lambda\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = f(x) \tag{2.10}$$

Fredholm integral denklemine uygulanabilir. Bu halde fixed noktanın varlığına göre çözüm

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} T^n f_0(x) \tag{2.11}$$

ile verilir. Burada, $f_0(x)$ fonksiyonu başlangıçta verilen bir keyfi fonksiyonudur.

$$Tf_0 = f + \lambda K f_0$$

$$T^2 f_0 = T(f + \lambda K f_0) = f + \lambda K f + \lambda^2 K^2 f_0 \ldots$$

$$T^n f_0 = f + \lambda Kf + \lambda^2 K^2 f + ... + \lambda^{n-1} K^{n-1} f + \lambda^n K^n f_0.$$

Nihayet,

$$\phi = f + \lambda Kf + \lambda^2 K^2 f + ... + \lambda^n K^n f + ... \tag{2.12}$$

elde edilir. Formal olarak $(\mathrm{I} - \lambda K)^{-1}$ in λK ya göre geometrik seriye açılarak (2.12) denklemi (2.6) denkleminden çıkarılabilir. Fakat bu prosedür yeterince $|\lambda|$ nın küçük olması diğer bir ifadeyle T operatörünün contraction operatör olması ile geçerlilik kazanır. K nın bir integral operatör olması halinde K^n den ne kastedildiğini açıklamaya çalışalım.

$$Kf(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy$$

$$K^2 f(x) = K\left[\int_a^b K(x,y) f(y) dy\right]$$

$$= \int_a^b K(x,z) \int_a^b K(z,y) f(y) dydz = \int_a^b \left[\int_a^b K(x,z) K(z,y) dz\right] f(y) dy .$$

Böylece K^2 de bir integral operatördür ve bu K^2 nin çekirdeği $\int_a^b K(x,z)K(z,y)dz.$

Daha genel olarak, $K^n f(x) = \int_a^b K_n(x,y) f(y) dy$ şeklinde yazılabilir. Burada,

$$K_n(x,y) = \int_a^b K(x,z) K_{n-1}(z,y) dz, \quad n = 2,3,4,... \tag{2.13}$$

ile ifade edilir. $K_1(x,y) = K(x,y)$. Aynı düşünceyle,

$$K_{m+n}(x,y) = \int_a^b K_m(x,z) K_n(z,y) dz \tag{2.14}$$

olduğu gösterilebilir. Teorem 2.2.1 in sonuçları, $K(x,y,z)$ bazı uygun varsayımları sağlamak şartıyla daha genel

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y,\phi(y)) dy = f(x) \tag{2.15}$$

nonlineer integral denklemine uygulanabilir.

Teorem 2.3.2: (2.15) integral denkleminin çözümü $L_2[a,b]$ de olup bu çözüm

$$\left\| \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy \right\| \le M \left\| \phi(y) \right\|, \ \left| K(x,y,z_1) - K(x,y,z_2) \right| \le N(x,y)\left| z_1 - z_2 \right|$$

varsayımlarıyla tektir. Burada, $\int_a^b \int_a^b \left| N(x,y) \right|^2 dxdy = p^2 < \infty$, $f(x) \in L_2\left[a,b\right]$ ve $\left|\lambda\right| P < 1$ dir.

İspat: $T\phi = f + \lambda K\phi$ operatörünü düşünelim. K, (2.15) denklemindeki gibidir.

$$\left\| T\phi_1 - T\phi_2 \right\| = \left|\lambda\right| \left\| \int_a^b \left[K(x,y,\phi_1(y)) - K(x,y,\phi_2(y)) \right] dy \right\|$$

$$\le \left|\lambda\right| \left\{ \int_a^b \left[\int_a^b \left| K(x,y,\phi_1(y)) - K(x,y,\phi_2(y)) \right| dy \right]^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$\le \left|\lambda\right| \left\{ \int_a^b \left[\int_a^b N(x,y) \left| \phi_1(y) - \phi_2(y) \right| dy \right]^2 dx \right\}^{1/2} \le \left|\lambda\right| P \left\| \phi_1 - \phi_2 \right\| .$$

$\left|\lambda\right| P < 1$ ise T bir contraction operatörüdür. Bu ise T operatörünün tek bir fixed noktaya sahip olduğunu gösterir. Fixed noktanın varlığı (2.15) in çözümüdür. (2.10) integral denklemi (2.15) in özel halidir. Yani, $K(x,y)\phi(y) = K(x,y,\phi(y))$ olup dolayısıyla nonlineerlik için geçerli olan koşullar lineerlik içinde geçerlidir.

Bu teoremin bir uygulaması olarak aşağıdaki sınır değer problemini düşünelim.

$$\phi''(x) + \lambda L(x,\phi(x)) = f(x), \quad \phi(0) = \phi(1) = 0 . \tag{2.16}$$

Bununla beraber,

$$\left\| L(x,\phi(x)) \right\| \le M \left\| \phi(x) \right\|$$

$$\left| L(x,\phi_1(x)) - L(x,\phi_2(x)) \right| \le N(x) \left| \phi_1(x) - \phi_2(x) \right| . \tag{2.17}$$

Burada, $\int_0^1 \left| N(y) \right|^2 dy = P^2 < \infty$. Bilinen sonuçları kullanarak (2.16) denklemi

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 K_1(x,y) L(y,\phi(y)) dy = -\int_0^1 K_1(x,y) f(y) dy \tag{2.18}$$

şeklindedir. Burada,

$$K_1(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} y(1-x), & y \le x \\ x(1-y), & y \ge x. \end{array} \right\}$$

$|K_1(x,y)| \leq 1/4$ ve bununla beraber $L(x,\phi(x))$ son teoremin (2.17) koşulunu sağladığından $\frac{1}{4}|\lambda| P < 1$ ise (2.16) denklemi tüm $f(x) \in L_2[0,1]$ için tek çözüme sahiptir.

2.4. Volterra İntegral Denklemleri

Bir önceki kısımda ifade edilen sonuçlar Volterra denklemlerine de uygulanabilir. Daha öncede ifade edildiği gibi

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = f(x)$$

Fredholm integral denklemi $y > x$ iken $K(x,y) = 0$ alınarak Volterra integral denklemine indirgenir.

Teorem 2.4.1: $f(x) \in L_2[0,1]$ (genelliği bozmaksızın $[0,1]$ kapalı aralığını ele alalım) olsun. Bununla beraber, $[0,1]$ kapalı aralığında her x, y için $K(x,y)$ sürekli olsun. Bu sebeple düzgün sınırlıdır ve $K(x,y) \leq M$ dir. Bu halde,

$$\phi(x) - \lambda \int_0^x K(x,y)\phi(y)dy = f(x) \tag{2.19}$$

integral denkleminin tüm λ lar ve $f(x) \in L_2[0,1]$ için bir tek çözüme sahiptir.

Not: $K(x,y)$ nin sürekli olma gerekliliği oldukça güçlü bir varsayımdır. İleride $K(x,y)$ daha zayıf bir koşulla ifade edilecektir.

İspat:

$$T\phi = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,y)\phi(y)dy$$

integral denklemini ele alalım. Eğer $T\phi$ fixed noktaya sahip ise, bu fixed nokta (2.19) un çözümü olacaktır. Böyle bir fixed noktanın varlığını göstermek için, T^n nin bazı n ler için bir contraction operatör olduğunu göstereceğiz. Teorem 2.2.1 den T bir fixed noktaya sahiptir. Şimdi, $K^n\phi = \int_0^x K_n(x,y)\phi(y)dy$ olduğundan,

$$T^n\phi = f + \lambda Kf + \lambda^2 K^2 f + ... + \lambda^{n-1}K^{n-1}f + \lambda^n K^n \phi .$$

Bu taktirde,

$$\left\| T^n\phi_1 - T^n\phi_2 \right\| = |\lambda|^n \left\| \int_0^x K_n(x,y)(\phi_1(y) - \phi_2(y))dy \right\| .$$

$K_n(x,y)$ yi belirlemek için (2.13) denklemi Volterra çekirdekli integral denklemlerine uygulanabilir.

$$K_1(x,y) = K(x,y)$$

$$K_n(x,y) = \int_y^x K(x,z)K_{n-1}(z,y)dz, \qquad n = 2,3,... .$$

Kapalı aralıkta $K(x,y)$ sürekli ve dolayısıyla düzgün sınırlı olacağından $|K_1(x,y)| \le M$ ve bu halde, $0 \le y \le x$ için $|K_n(x,y)| \le \dfrac{M^n (x-y)^{n-1}}{(n-1)!}$ olduğu tümevarımla gösterilecektir.

$n = 1$ için yukarıdaki ifade açıkça doğrudur. n için doğru olsun. Bu halde,

$$|K_{n+1}(x,y)| \le \int_y^x |K(x,z)||K_n(z,y)|dz \le \frac{M^{n+1}}{(n-1)!}\int_y^x (z-y)^{n-1}dz = \frac{M^{n+1}(x-y)^n}{n!} .$$

Bu sebeple,

$$\left\| T^n\phi_1 - T^n\phi_2 \right\| \le \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} \left\| \int_0^x (\phi_1(y) - \phi_2(y))dy \right\| \le \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} \left\| \phi_1 - \phi_2 \right\| . \qquad (2.20)$$

Yeterince büyük n ler için $\dfrac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} < 1$ olur. Bu sebeple, T^n bir contraction operatör olup (2.19) denklemi tek çözüme sahiptir.

Örnek 2.4.1: $\phi(x) = 1 + \lambda \int_0^1 xy\phi(y)dy$ integral denklemi

$$\phi(x) = f + \lambda Kf + \lambda^2 K^2 f + ... + \lambda^n K^n f + ...$$

ifadesindeki terimlerin hesaplanmasıyla $\phi(x) = 1 + \dfrac{\lambda x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^n}{3^n}$ olarak bulunur. Bu seri $|\lambda| < 3$ için yakınsaktır ve özellikle $\lambda = 3$ için çözüme sahip değildir. $|\lambda| < 3$ ve daha genel olarak $\lambda \ne 3$ için çözüm

$$\phi(x) = 1 + \frac{\lambda x}{2\left[1-\left(\lambda/3\right)\right]} \tag{2.21}$$

şeklindedir. Aşağıdaki teorem daha genel çekirdekler için verilebilir.

Teorem 2.4.2: $f(x) \in L_2[0,1]$ olsun. $\int_0^1\int_0^1 |K(x,y)|^2\,dxdy < \infty$ olması durumunda

$$\phi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,y)\phi(y)dy \tag{2.22}$$

integral denklemi tüm λ lar için $L_2[0,1]$ de bir tek çözüme sahiptir.

İspat: $A^2(x) = \int_0^x |K(x,y)|^2\,dy,\ \mathrm{B}^2(y) = \int_y^1 |K(x,y)|^2\,dx$ olsun.

$A^2(x)$ ve $B^2(y)$ hipotezden dolayı integralenebilirdir. $\int_0^1 A^2(x)dx \le N,\ \int_0^1 \mathrm{B}^2(y)dy \le N$ olacak şekilde bir N sayısı seçelim. Ayrıca, $\rho(x)$ fonksiyonu $\rho(x) = \int_0^x A^2(y)dy$ şeklinde belirleyelim ve $\rho(1) \le N$ olsun. Teorem 2.4.1 in ispatında olduğu gibi (2.22) denklemi yerine kendisine denk olan

$$\phi(x) = f(x) + \lambda Kf + \lambda^2 K^2 f + \dots + \lambda^{n-1}K^{n-1}f + \lambda^n K^n\phi \tag{2.23}$$

denklemini ele alalım. $K^n\phi = \int_0^x K_n(x,y)\phi(y)dy$. $\|K^n\|$ için bir üst sınır bulabilmek için $K_n(x,y)$ i inceleyelim. Şimdi, $K_2(x,y) = \int_y^x K(x,z)K(z,y)dz$ ve Cauchy Schwarz eşitsizliğinden,

$$|K_2(x,y)|^2 \le \int_y^x |K(x,z)|^2\,dz \int_y^x |K(z,y)|^2\,dz \le A^2(x)B^2(y).$$

Benzer olarak, $K_3(x,y) = \int_y^x K(x,z)K_2(z,y)dz.$ Böylece,

$$|K_3(x,y)|^2 \le \int_y^x |K(x,z)|^2\,dz \int_y^x |K_2(z,y)|^2\,dz$$

$$\leq A^2(x)B^2(y)\int_y^x A^2(z)dz = A^2(x)B^2(y)\left[\rho(x)-\rho(y)\right].$$

Tümevarımdan, $\left|K_n(x,y)\right|^2 \leq A^2(x)B^2(y)\dfrac{\left[\rho(x)-\rho(y)\right]^{n-2}}{(n-2)!}$, $n\geq 2$, olduğu gösterilebilir. (2.23) integral denklemini, $T\phi = f+\lambda K\phi$ olması halinde, $\phi = T^n\phi$ formunda yeniden yazılabilir ve yeterince büyük n ler için T^n nin bir contraction operatör olduğu gösterilebilir.

$$\left|T^n\phi_1 - T^n\phi_2\right|^2 = \left|\int_0^x K_n(x,y)\left[\phi_1(y)-\phi_2(y)\right]dy\right|^2$$

$$\leq \int_0^x \frac{A^2(x)B^2(y)\left[\rho(x)-\rho(y)\right]^{n-2}}{(n-2)!}dy \int_0^x \left|\phi_1(y)-\phi_2(y)\right|^2 dy$$

$$\leq \frac{A^2(x)\left[\rho(x)\right]^{n-2}}{(n-2)!}\int_0^1 B^2(y)dy\left\|\phi_1-\phi_2\right\|^2.$$

İntegralenirse,

$$\left\|T^n\phi_1 - T^n\phi_2\right\|^2 \leq \frac{\left[\rho(1)\right]^{(n-1)}N}{(n-1)!}\left\|\phi_1-\phi_2\right\|^2 \leq \frac{N^n}{(n-1)!}\left\|\phi_1-\phi_2\right\|^2$$

bulunur. Bu halde, eğer $\left[\dfrac{N^n}{(n-1)!}\right] < 1$ ise T bir contraction operatördür. Yeterince büyük n ler için bu durum doğru olur ve bu nedenle (2.21) ve dolayısıyla (2.22)ninde $L_2\left[0,1\right]$de tek çözümü vardır.

2.5. Zayıf Singulariteli Çekirdekler

Genelde, singüler çekirdekli integral denklemleri ile uğraşmak çok zordur. Şu an için, singüler çekirdeğin kesin bir tanımını sunmayacağız. Kabaca, bu çekirdekler daha önce tartışılan koşulları sağlamayan tipteki çekirdeklerdir. Buna rağmen, bir tipi vardır ki kolay ele alınabilir.

Teorem 2.5.1:

$$\phi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,y)\phi(y)dy \tag{2.24}$$

integral denklemini $K\left(x,y\right)=\dfrac{H(x,y)}{\left|x-y\right|^{\alpha}}$ olması halinde $f(x)$ ile $H(x,y)$ her iki değişkene göre sürekli olmak üzere, $0\le\alpha<1$ olsun. Bu koşullar altında bütün $|\lambda|$ lar için (2.24) integral denklemi bir tek çözüme sahiptir.

İspat: $0\le\alpha<\dfrac{1}{2}$ için kare integrallenebilir ve dolayısıyla 2.4.2. Teorem uygulanabilir. Bu nedenle $\dfrac{1}{2}\le\alpha<1$ olsun. Bu durumda, $K_2(x,y)=\int\limits_y^x\dfrac{H(x,z)}{(x-z)^{\alpha}}.\dfrac{H(z,y)}{(z-y)^{\alpha}}dz$ integralini düşünelim. $z=y+\left(x-y\right)u$ ve $\left|H(x,y)\right|\le M$ olsun. Böylece, $\left|K_2(x,y)\right|\le\dfrac{M^2}{(x-y)^{2\alpha-1}}\int\limits_0^1\dfrac{du}{\left[u-u^2\right]^{\alpha}}$ olur. Yukarıdaki integral mevcuttur ve eğer $\dfrac{1}{2}\le\alpha<\dfrac{3}{4}$ ise $0\le2\alpha-1<\dfrac{1}{2}$. Böylece $K_2(x,y)$ kare integralenebilirdir. Neticede, düşünceye devam edilirse $\left|K_{2^n}(x,y)\right|\le\dfrac{M^n}{(x-y)^{2^n\alpha+1-2u}}$ ve $\alpha<1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ için $K_{2^n}(x,y)$ kare integralenebilirdir. Bu durumda yeterince büyük n ler için (2.23) integral denklemini teorem 2.4.2 uygulanabilir.

$f(x)$ in sürekli olması koşulu kaldırılabilir. Burada gerekli olan uygun n ler için $K^n f(x)\in L_2\left[0,1\right]$. Eğer $f(x)$ sürekli ise bütün n ler için $K^n f(x)\in L_2\left[0,1\right]$.

Benzer bir teorem Fredholm denklemleri için oluşturulabilir.

Teorem 2.5.2:

$K(x,y)=\dfrac{H(x,y)}{\left|x-y\right|^{\alpha}}$, $H(x,y)$ ile $f(x)$ $0\le x,y\le1$ ve $0\le\alpha<1$ için sürekli fonksiyonlar olması durumunda,

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int\limits_0^1K(x,y)\phi(y)dy \tag{2.25}$$

integral denklemi yeterince küçük $|\lambda|$ lar için bir tek çözüme sahiptir.

İspat: (2.25) denklemi yerine,

$$\phi=f+\lambda Kf+\lambda^2K^2f+...+\lambda^{n-1}K^{n-1}f+\lambda^nK^n\phi \tag{2.26}$$

denklemini düşünelim. (2.27) denklemi $T^n\phi = \phi$ formatında ve eğer son denklem tek fixed noktaya sahip ise $T\phi = \phi$. $|H(x,y)| \le M$ olsun. Böylece, $K_2(x,y) = \int_0^1 \frac{H(x,z)H(z,y)}{|x-z|^\alpha |z-y|^\alpha} dz$ ve $|K_2(x,y)| \le M^2 \int_0^1 \frac{dz}{|x-z|^\alpha |z-y|^\alpha}$ olur. $z = xu + y(1-u)$ ve genelliği bozmaksızın $x > y$ olsun. Yukarıdaki eşitsizliğin integrali alınırsa,

$$\frac{1}{|x-y|^{2\alpha-1}} \int_{-y/x-y}^{1-y/x-y} \frac{du}{|u-u^2|^\alpha} \le \frac{1}{|x-y|^{2\alpha-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{|u-u^2|^\alpha}$$

şekline indirgenir.

$0 \le \alpha < 1/2$ için, $K(x,y)$ kare integrallenebilir olduğunu biliyoruz ve bu sebeple yeterince küçük $|\lambda|$ lar için (2.25) denklemi bir tek çözüme sahiptir. Bu üst sınırdan dolayı 2.2.2. Teorem, T^2ye uygulanabilir. $\alpha = 1/2$ için, $|K_2(x,y)| \le M^2 \int_{-y/x-y}^{1-y/x-y} \frac{du}{|u-u^2|^{1/2}}$ ifadesi yazılır. Yukarıda en kötü ihtimal $K_2(x,y)$nin $\log|x-y|$ tipinde logaritmik singüler olması halidir. Bu halde de $K_2(x,y)$ kare integrallenebirdir. $3/4 \le \alpha < 1$ için, yeterince büyük n ler için teorem 2.5.1 deki gibi T^n kullanılabilir.

2.6. Dejenere Olmuş Çekirdekler

Lineer cebirde bilinen standart metotlarla Fredholm denklemleri ele alınabilir. Bu denklemlerin ikinci tipi

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy \tag{2.27}$$

şeklindedir. Burada,

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) b_j(y) . \tag{2.28}$$

Bu tip çekirdeklere dejenere (ayrılabilir) olmuş çekirdekler denir. $a_j(x)$ ve $b_j(y)$ fonksiyonlarının $L_2[a,b]$de olduğunu kabul edelim. Böylece, $K(x,y)$ kare integrallenebilirdir, üstelik $\{a_j(x)\}$ lineer bağımsız fonksiyonlar setini oluşturur. Yani, hemen hemen her yerde, $\sum \alpha_j a_j(x) = 0$ olması için gerek ve yeter şart tüm $a_j = 0$ olmasıdır. Lineer bağımlı olması halinde bu $a_j(x)$ fonksiyonlarından bir tanesi geri kalan $a_j(x)$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonu biçiminde yazılır. Nihayet, (2.28) ifadesindeki terim sayısı bir azalmış olur. Benzer ifadeler $\{b_i(y)\}$ fonksiyonları içinde geçerlidir. (2.28) ifadesi (2.27) denkleminde yazılırsa,

$$\phi(x) - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \int_a^b b_j(y)\phi(y)dy = f(x). \tag{2.29}$$

$\int_a^b b_j(y)\phi(y)dy = z_j$ olsun, bununla beraber (2.29) denklemi $b_i(x)$ ile çarpılıp tekrar

integre edilirse $a_{ij} = \int_a^b a_j(x)b_i(x)dx$ ve $\int_a^b f(x)b_i(x)dx = f_i$ şeklinde ifade edilirse

$$z_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j = f_i \text{ , } i = 1,2,...,n \tag{2.30}$$

elde edilir. z_1, z_2 ,..., z_n bilinmeyenlerine göre n bilinmeyenli n tane lineer cebirsel denklem sistemi olan (2.30) elde edilir. Eğer bu sistem çözüme sahip ise (2.29) kolaylıkla çözülebilir ve

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} z_i a_i(x) \tag{2.31}$$

bulunur. Tüm $\{f_i\}$ değerleri için (2.30) sisteminin tek çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart tüm $f(x)$ ler için (2.29) un tek çözüme sahip olması gerekir. Bu durum,

$$|\mathrm{I} - \lambda A| \neq 0 \tag{2.32}$$

olması ile oluşur. Burada $A = (a_{ij})$ olup $|\mathrm{I} - \lambda A|$ n. dereceden bir polinomdur. (2.29) ve (2.30) denklemlerinin çözümsüzlüğünü sağlayan en çok λ nın n tane değeri vardır. Yani, $|\mathrm{I} - \lambda A| = 0$ olması halini tartışalım. (2.29)'un adjointi olan homojen denklemi düşünelim. Yani,

$$\psi(x)-\bar{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\overline{b_j(x)}\int_a^b \overline{a_j(y)}\,\psi(y)dy=0\,. \tag{2.33}$$

Aynı tartışmalarla, (2.33) denklemine karşılık gelen cebirsel sistem $\int_a^b \psi(x)a_i(x)dx = w_i$ olmak şartıyla,

$$w_i-\bar{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{ji}}\;w_j=0\,,\qquad i=1,2,...,n \tag{2.34}$$

elde edilir. Tüm $\psi_j \neq 0$ için (2.34) çözümü

$$\psi(x)=\bar{\lambda}\sum_{i=1}^{n}w_i\;\overline{b_i(x)} \tag{2.35}$$

şeklindedir bu ise (2.33) denklemini sağlar. Sonuç itibarıyla, (2.30) ve (2.34) denklemlerine Fredholm alternatifi uygulayabiliriz. Eğer bazı λ değerleri için $|\mathrm{I}-\lambda A|=0$ ise (2.33) denklemi trivial olmayan çözümlere sahiptir. Bu halde, (2.34) denklemi çözümlere (tek olmayabilir)

$$\sum_{i=1}^{n}f_i\,\overline{w_i}=0 \tag{2.36}$$

ile sahiptir. Burada, w_i (2.34) denklemini sağlar. Şimdi iç çarpımı düşünelim.

$$\langle f,\psi\rangle=\int_a^b f(x)\overline{\psi(x)}\,dx=\lambda\sum_{i=1}^{n}\overline{w_i}\int_a^b f(x)b_i(x)dx=\lambda\sum_{i=1}^{n}f_i\;\overline{w_i}\,.$$

$\lambda=0$ olması halinde $|\mathrm{I}-\lambda A|=0$ durumu oluşmaz. Böylece (2.36)

$$\langle f,\psi\rangle=0 \tag{2.37}$$

olur. Burada, $\psi(x)$ (2.33) denklemini sağlar. Benzer olarak, $f(x)=0$ olması halinde (2.29) ve (2.33) veya buna denk olarak (2.30) denklemi tüm $f_i=0$ ve (2.34) denklemi aynı sayıda lineer bağımsız çözümlere sahiptir.

Bu değerlendirmeyi kısaca aşağıda özetleyelim.

2.7. Fredholm Alternatifi

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy \tag{2.38}$$

integral denklemini ele alalım. Burada, $K(x,y)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(y) \quad a_i(x),\quad b_i(x)$ ve $f(x)\in L_2\left[a,b\right]$. Tüm $f(x)$ ler için (2.38) integral denkleminin tek çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart homojen denklem

$$\phi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy=0 \qquad (2.39)$$

sadece $\phi(x)=0$ çözümüne sahiptir. Adjoint denklemi

$$\psi(x)-\overline{\lambda}\int_a^b \overline{K(y,x)}\psi(y)dy=0\,. \qquad (2.40)$$

(2.39) denklemi ile aynı sayıda lineer bağımsız çözümlere sahiptir. Eğer (2.39) ve (2.40) denklemlerinin çözümlerinin sayısı pozitif ise (2.38) denkleminin çözüme (tek olmayan) sahip olması için gerek ve yeter şart (2.40) daki tüm $\psi(x)$ ler için

$$\left\langle f,\psi\right\rangle=\int_a^b f(x)\overline{\psi(x)}\,dx=0$$

olmalıdır.

Örnek 2.7.1:

$$\phi(x)-\lambda\left[\pi x\int_0^1 \sin(\pi y)\phi(y)dy+2\pi x^2\int_0^1 \sin(2\pi y)\phi(y)dy\right]=f(x)$$

denkleminin çözümünü bulalım.

Çözüm:

$$\int_0^1 \sin(\pi y)\phi(y)dy=z_1\,,\qquad \int_0^1 \sin(\pi y)f(y)dy=f_1\,,$$

$$\int_0^1 \sin(2\pi y)\phi(y)dy=z_2\,,\quad \int_0^1 \sin(2\pi y)f(y)dy=f_2$$

ile integral denklemi $\left(\mathrm{I}-\lambda\right)z_1-2(1-\frac{4}{\pi^2})\lambda z_2=f_1,\quad \frac{\lambda}{2}z_1+(1+\lambda)z_2=f_2$ şekline indirgenebilir. Eğer $\lambda^2\neq\left(\pi^2/4\right)$ ise,

$$z_1=\frac{\left(1+\lambda\right)f_1+2\left[1-\left(4/\pi^2\right)\right]\lambda f_2}{1-\left(4\lambda^2/\pi^2\right)},\qquad z_2=\frac{\left(-\lambda/2\right)f_1+\left(1-\lambda\right)f_2}{1-\left(4\lambda^2/\pi^2\right)}\,.$$

O halde, $\phi(x)=f(x)+\pi\lambda z_1 x+2\pi\lambda z_2 x^2$. Eğer $\lambda=\left(\pi/2\right)$ ise $\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\zeta_1+\frac{\pi}{4}\zeta_2=0$, $-\pi(1-\frac{4}{\pi^2})\zeta_1+\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\zeta_2=0$ adjoint sistemini düşünelim. Bu sistem çözülürse, $\zeta_1=\left(\pi/4\right)C$, $\zeta_2=-\left[1-\left(\pi/2\right)\right]C$, C keyfidir. Bu durumda çözümün olması için, $\frac{\pi}{4}f_1-\left(1-\frac{\pi}{2}\right)f_2=0$. Eğer yukarıdaki şart sağlanırsa çözüm,

$$\phi(x)=f(x)+\frac{\pi}{2}\left\{\frac{f_1}{1-\left(\pi/2\right)}-2\left(1+\frac{2}{\pi}\right)Cx+\pi Cx^2\right\}$$

şeklinde elde edilir, bu halde çözüm tek değildir.

2.8. Birinci Tip Volterra Denklemleri

Genelikle Volterra integral denklemlerinin birinci tipiyle ilgilenmek oldukça zordur. Şimdiye kadar verilen bilgilerle uyuşacak şekilde birkaç durumu ele alalım.

$$\int_0^x K(x,y)\phi(y)dy=f(x) \tag{2.41}$$

integral denklemini düşünelim ve burada K(x,y) ile $f(x)$ yeterince diferansiyelene-bilirdir. Bu halde, (2.41) denkeminin her iki tarafının x e göre türevi alınırsa,

$K\left(x,x\right)\phi(x)+\int_0^x \frac{\partial}{\partial x}K(x,y)\phi(y)dy=f'(x)$. Eğer $K(x,x)\neq 0$ ise

$$\phi(x)+\int_0^x \frac{(\partial/\partial x)K(x,y)}{K(x,x)}\phi(y)dy=\frac{f'(x)}{K(x,x)}. \tag{2.42}$$

Eğer (2.42) denkleminde çekirdek kare integralenebilir ve $\left[\frac{f'(x)}{K(x,x)}\right]\in L_2\left[0,1\right]$ ise (2.42) denklemi bir önceki kısımda ifade edilen teoriye göre $L_2\left[0,1\right]$de tek çözüme sahiptir. İkinci bir metotla, (2.41) denklemi ikinci tip integral denklemine indirgenebilir. $\psi(x)=\int_0^x \phi(y)dy$ olsun ve (2.41) denklemine kısmi integrasyon uygulayalım bu halde, $K(x,x)\neq 0$ ise $K(x,x)\psi(x)-\int_0^x \frac{\partial}{\partial y}K(x,y)\psi(y)dy=f(x)$ ve

$$\psi(x)-\int_0^x \frac{(\partial/\partial y)K(x,y)}{K(x,x)}\psi(y)dy=\frac{f(x)}{K(x,x)} \quad . \qquad (2.43)$$

(2.43) denklemi çekirdeğinin kare integralenebilir olması ve $[f(x)/K(x,x)]\in L_2[0,1]$ olması şartıyla $L_2[0,1]$ de tek çözüme sahiptir.

Tam olarak çözülebilen bir Abel denklemini ele alalım.

$$\int_0^x \frac{\phi(y)}{(x-y)^\alpha}dy=f(x), \qquad 0\le\alpha<1 \qquad (2.44)$$

$f(x)$ süreklidir ve $f(0)=0$. (2.44) denkleminin çekirdeği $K_\alpha(x,y)$. (2.44) denkleminin her iki tarafı $K_\beta(x,y)$ ile çarpılıp integralin sırası değiştirilirse,

$$\int_0^x\left[\int_0^x \frac{dz}{(x-z)^\beta(z-y)^\alpha}\right]\phi(y)dy=\int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^\beta}dy \;.$$

$z=y+(x-y)u$ olsun. Bu halde,

$$\int_0^x \frac{dz}{(x-z)^\beta(z-y)^\alpha}=(x-y)^{1-\alpha-\beta}\int_0^1 \frac{du}{(1-u)^\beta u^\alpha}=(x-y)^{1-\alpha-\beta}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)} \;.$$

Burada, $\Gamma(p)$ gama fonksiyonunu ifade eder. Böylece yukarıdaki integral

$$\int_0^x \frac{\phi(y)}{(x-y)^{\alpha+\beta-1}}dy=\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^\beta}dy$$

şeklini alır. Özelikle $\beta=1-\alpha$ alınırsa

$$\int_0^x \phi(y)dy=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}dy=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}dy \;.$$

Burada, $\Gamma(1)=1$ ve $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$ ifadeleri kullanıldı. Eğer sağ taraf türevlenirse,

$$\phi(x)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}dy \qquad (2.45)$$

ifadesi (2.44) denkleminin çözümüdür. $\alpha = \frac{1}{2}$ olması halinde

$$\int_0^x \frac{\phi(y)}{(x-y)^{1/2}} dy = f(x) \tag{2.46}$$

integral denkleminin çözümü

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1/2}} dy \tag{2.47}$$

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

3.1.1. Çekirdeğine ayrılabilir integral denklemleri

3.1.1.1. Cebirsel sisteme indirgeme

Dejenere veya ayrılabilir çekirdek

$$K(x,t)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)b_i(t) \tag{3.1}$$

biçiminde olup burada $a_1(x),\ a_2(x),...,\ a_n(x)$ ve $b_1(t),\ b_2(t),...,\ b_n(t)$ fonksiyonları lineer bağımsızdır. Çekirdek dejenere ise Fredholm integral denkleminin ikinci tipi

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int K(x,t)\phi(t)dt\ . \tag{3.2}$$

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\int b_i(t)\phi(t)dt \tag{3.3}$$

şeklini alır. Bu denklemin çözüm tekniği özellikle λ kompleks parametresinin seçimine ve

$$c_i=\int b_i(t)\phi(t)dt \tag{3.4}$$

ifadesinin tanımına bağlıdır. c_i ler burada bilinmeyen sabitlerdir. Şimdi (3.4) denklemi (3.3) denkleminde yazılırsa

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}c_i a_i(x) \tag{3.5}$$

elde edilir ve böylece problem c_i sabitinin bulunmasına indirgenir. Bunu sonuçlandırmak için (3.5) denkleminde verilen $\phi(x)$ değeri (3.3)de yazılırsa

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\left\{c_i-\int b_i(t)\left[\ f(t)+\lambda\sum_{k=1}^{n}c_k a_k(t)\right]dt\right\}=0 \tag{3.6}$$

elde edilir. Fakat $a_i(x)$ fonksiyonları lineer bağımsız olduğundan

$$c_i - \int b_i(t)\left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(t) \right] dt = 0, \qquad i = 1,2,...,n \tag{3.7}$$

yazılır.

$$\int b_i(t) f(t) dt = f_i, \qquad \int b_i(t) a_k(t) dt = a_{ik} \tag{3.8}$$

notasyonları ile burada f_i ve a_{ik} bilinmeyen sabitler olmak şartıyla (3.8) yardımıyla (3.7) denkleminden

$$c_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_k = f_i, \qquad i = 1,2,...,n \tag{3.9}$$

elde edilir. Buda, c_i bilinmeyenlerine göre n cebirsel denklem sistemidir. Bu sistem için $D(\lambda)$ determinantı

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & ... & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & ... & -\lambda a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & ... & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

en çok derecesi n olan bir polinomdur. Üstelik bu determinant özdeş olarak sıfır değildir. Çünkü $\lambda = 0$ olduğunda determinant birim determinantı verir. $D(\lambda) \neq 0$ kılan tüm λ değerleri için (3.9) cebirsel sistemi ve bu sebeple (3.2) çekirdeğine ayrılabilir integral denklemi tek çözüme sahiptir. Bu λ değerlerine regülerdir deriz. $D(\lambda)$ yı sıfır kılan tüm λ değerleri için (3.9) cebirsel sistemi ve karşılık gelen (3.2) integral denklemi ya çözülemez ya da sonsuz sayıda çözüme sahiptir. (3.9) denkleminde $\lambda = 1/\mu$ alınmasıyla matris teorisindeki eigen değer problemine indirgenir. Bu eigen değerler $D(\lambda) = 0$ polinomuyla verilir. Bu eigen değerler aynı zamanda üzerinde çalışılan integral denklemine karşılık gelen eigen değerlerdir.

Örnek 3.1.1.1.1:

$$\phi(x) = x + \lambda \int_0^1 \left(xt^2 + x^2 t \right) \phi(t) dt \tag{3.11}$$

Fredholm integral denkleminin ikinci tipini çözelim.

Çözüm:

$K(x,t) = xt^2 + x^2 t$ çekirdeği ayrılabilirdir ve $c_1 = \int_0^1 t^2 \phi(t)dt, \qquad c_2 = \int_0^1 t\phi(t)dt.$

(3.11) denklemi

$$\phi(x) = x + \lambda c_1 x + \lambda c_2 x^2 \tag{3.12}$$

şeklini alır. (3.11) denkleminde yazıldığında,

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda c_1 + \frac{1}{5}\lambda c_2 \\ c_2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lambda c_1 + \frac{1}{4}\lambda c_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

cebirsel sistemi elde edilir. Bu denklemin çözümü,

$$c_1 = \frac{(60+\lambda)}{(240-120\lambda-\lambda^2)}, \qquad c_2 = \frac{80}{(240-120\lambda-\lambda^2)} \tag{3.14}$$

olarak elde edilir. (3.12) ve (3.14) denklemlerinden çözüm

$$\phi(x) = \frac{\left[(240-60\lambda)x + 80\lambda x^2\right]}{(240-120\lambda-\lambda^2)}. \tag{3.15}$$

Örnek 3.1.1.1.2:

$$\phi(x) = f(x) + \lambda\int_0^1 (x+t)\phi(t)dt \tag{3.16}$$

integral denklemini çözerek eigen değerlerini bulalım.

Çözüm: Burada, $a_1(x) = x,\ a_2(x) = 1,\ b_1(t)=1,\ b_2(t)=t$ olsun.

$$a_{11} = \int_0^1 b_1(t)a_1(t)dt = \int_0^1 tdt = 1/2, \quad a_{12} = \int_0^1 b_1(t)a_2(t)dt = \int_0^1 dt = 1,$$

$$a_{21} = \int_0^1 b_2(t)a_1(t)dt = \int_0^1 ttdt = 1/3, \quad a_{22} = \int_0^1 b_2(t)a_2(t)dt = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}.$$

$$f_i = c_i - \lambda\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_k \text{ den } f_1 = \int_0^1 f(t)dt, \quad f_2 = \int_0^1 tf(t)dt.$$

(3.9) denkleminde bu değerler yazılırsa cebirsel sistemi elde ederiz.

$$(1-\frac{1}{2}\lambda)c_1 - \lambda c_2 = f_1, \quad -\frac{1}{3}\lambda c_1 + \left(1-\frac{1}{2}\lambda\right)c_2 = f_2.$$

$D(\lambda) = 0$ determinantı $\lambda^2 + 12\lambda - 12 = 0$ değerini verir. Bu nedenle, eigen değerler

$$\lambda_1 = \left(-6+4\sqrt{3}\right), \quad \lambda_2 = \left(-6-4\sqrt{3}\right).$$

Homojen denklem λ nın bu iki eigen değeri için aşikâr olmayan çözümlere sahiptir. (3.6) integral denklemi genelde çözümsüzdür. λ nın bu değerleri hariç önceki cebirsel sistemden çözüm

$$c_1 = \left[\frac{-12f_1 + \lambda\left(6f_1 - 12f_2\right)}{\left(\lambda^2 + 12\lambda - 12\right)}\right], \; c_2 = \frac{\left[-12f_2 + \lambda\left(4f_1 - 6f_2\right)\right]}{\left(\lambda^2 + 12\lambda - 12\right)}.$$

(3.5) bağıntısından,

$$\phi(x) = f(x) + \lambda\int_0^1 \frac{6(\lambda-2)\left(x+t\right) - 12\lambda xt - 4\lambda}{\lambda^2 + 12\lambda - 12} f(t)dt \tag{3.17}$$

elde edilir. Burada, $\Gamma(x,t;\lambda)$ fonksiyonu

$$\Gamma(x,t;\lambda) = \frac{\left[6\left(\lambda-2\right)\left(x+t\right) - 12\lambda xt - 4\lambda\right]}{\left(\lambda^2 + 12\lambda - 12\right)} \tag{3.18}$$

çözücü (resolvant veya resiprokal) çekirdek olarak adlandırılır.

Örnek: 3.1.1.1.3:

$$\phi(x) = \lambda\int_0^1 e^x e^t \phi(t)dt \tag{3.19}$$

homojen Fredholm integral denklemini çözelim.

Çözüm: $c = \int_0^1 e^t \phi(t)dt$ olsun. Böylece, (3.19) denklemi

$$\phi(x) = \lambda c e^x \tag{3.20}$$

şeklini alır. Bu $\phi(x)$ değeri (3.19) denkleminde yazıldığında,

$$\lambda c e^x = \lambda e^x \int_0^1 e^t \left[\lambda c e^t\right] dt = \frac{1}{2}\lambda^2 e^x c(e^2 - 1)$$

olur. Buradan,

$$\lambda c\left\{2 - \lambda\left(e^2 - 1\right)\right\} = 0$$

$c = 0$ veya $\lambda = 0$ ise o zaman $\phi(x) \equiv 0$. Farzedelimki ne $c = 0$ nede $\lambda = 0$ olsun. Bu halde, eigen değer

$$\lambda = \left(\frac{2}{e^2 - 1}\right). \tag{3.21}$$

(3.19) integral denkleminin yalnızca λ nın bu değeri için aşikâr olmayan çözümlere sahiptir. Bu çözüm (3.20) denkleminden

$$\phi(x)=\left[\frac{2c}{(e^2-1)}\right]e^x \tag{3.22}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, $\left(\dfrac{2}{e^2-1}\right)$ değeri e^x eigen fonksiyonuna tekabül eder.

3.1.1.2. Fredholm alternatifi

(3.3) denkleminin (3.9) sistemiyle açıklandığı bilinmektedir. Eğer $D(\lambda)\neq 0$ ise Cramer kuralı yardımıyla sistemin çözümü

$$c_j=\frac{\left(D_{1j}f_1+D_{2j}f_2+...+D_{nj}f_n\right)}{D(\lambda)},\qquad j=1,2,...,n \tag{3.23}$$

ile verilir. Burada, D_{hi}, $D(\lambda)$ determinantında $i.$sütün elemanları kaldırılarak yerine f_i lerden oluşan sütunun konmasıyla elde edilen (3.10) determinantının elemanlarıdır. Sonuç olarak, (3.2) integral denklemi (3.5) tek çözümüne sahiptir ve bu çözüm,

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\sum_{j=1}^{n}\frac{D_{1j}f_1+D_{2j}f_2+...+D_{nj}f_n}{D(\lambda)}a_j(x)\,. \tag{3.24}$$

Buna karşılık gelen

$$\phi(x)=\lambda\int K(x,t)\phi(t)dt \tag{3.25}$$

homojen integral denkleminin tek çözümü $\phi(x)=0$. (3.8) denkleminden f_j değerleri yerlerine yazıldığında $\phi(x)$ çözümü,

$$\begin{aligned}\phi(x)&=f(x)+\left[\frac{\lambda}{D(\lambda)}\right]\int\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[D_{1j}b_1(t)+D_{2j}b_2(t)+...+D_{nj}b_n(t)\right]a_j(x)\right\}f(t)dt\\&=f(x)+\left[\frac{\lambda}{D(\lambda)}\right]\int\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}D_{ij}b_i(t)a_j(x)f(t)dt.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Şimdi $(n+1).$ mertebeden determinantı düşünelim.

$$D(x,t;\lambda)=-\begin{vmatrix} 0 & a_1(x) & a_2(x) & \dots & a_n(x) \\ b_1(t) & 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ b_2(t) & -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n(t) & -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3.27}$$

Bununla,

$$\Gamma(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} \tag{3.28}$$

elde edilir. Buradan (3.26) denklemi basitçe

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int\Gamma(x,t;\lambda)f(t)dt \tag{3.29}$$

şeklini alır. $\Gamma(x,t;\lambda)$ resolvant (resiprokal veya çözücü) çekirdek denildiğini biliyoruz. Bu tartışmayla aşağıdaki temel Fredholm teoremi yazılır.

Teorem (Fredholm) 3.1.1.2.1: $m\geq 1$, $D(\lambda)=0$ denklemini sağlayan $\lambda=\lambda_0$ ın bir katlılığı olsun. Bu taktirde, homojen olmayan integral denkleminin çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart verilen $f(x)$ fonksiyonun transpoz denklemini sağlayan eigen fonksiyonlara dik olması gerekir.

İspat: (3.2) ile verilen homojen olmayan Fredholm integral denklemi

$$K(x,t)=\sum a_i(x)b_i(t)$$

ile bir tek çözüme sahiptir.

Eğer $D(\lambda)=0$ ise (3.2) homojen olmayan Fredholm integral denklemi genellikle çözüme sahip değildir. Çünkü, sadece f_i nin bazı özel değerleri için çözülebilir. Bu durumu tartışmak için, (3.9) cebirsel sistemi

$$\left(\mathrm{I}-\lambda A\right)c=f \tag{3.30}$$

olarak yazılır. Burada I, n mertebeli birim matristir ve A, (a_{ij}) lerden oluşan matristir. Şimdi, eğer $D(\lambda)=0$ ise

$$\left(\mathrm{I}-\lambda A\right)c=0 \tag{3.31}$$

homojen cebirsel sisteminin nontrivial çözümlerine karşılık (3.25) homojen integral denkleminin trivial olmayan eigen fonksiyonları karşılık gelir. λ, λ_0 eigen değerine karşılık gelen bir eigen değer olsun. Öyle ki $D(\lambda_0) = |\mathrm{I} - \lambda_0 A|$ determinantının rankı p olsun, burada $1 \leq p \leq n$. Bu halde, (3.31) cebirsel sisteminin $r = n - p$ tane lineer bağımsız çözümü vardır. Burada, r değerine λ_0 eigen değerinin indeksi denir. Bu durum (3.25) homojen integral denklemi içinde geçerlidir. Bu r tane lineer bağımsız çözümler ϕ_{01}, ϕ_{02}, ..., ϕ_{0r} ile gösterilsin ve farz edelim ki bunlar normalleştirilmiş olsun. (3.25) homojen integral denkleminin $\phi_0(x)$ çözümü $r = n - p$ indeksli λ_0 eigen değerine karşılık gelen $\phi_0(x)$ çözümüne tekabül eder ve bu çözüm

$$\phi_0(x) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \phi_{0k}(x)$$

ile verilir ve burada α_k ler keyfi sabitlerdir. m, λ_0 eigen değerinin katlılığı olsun. Yani, $D(\lambda) = 0$ polinomu m tane λ_0 eşit köküne sahiptir. $|\mathrm{I} - \lambda A|$ determinantına elemanter dönüşümleri kullanarak lineer cebir teorisinden en fazla $(m+1)$ tane eşit satır olduğu çıkarımı yapılır ve bu maksimum durum ise sadece A matrisinin simetrik olması durumunda başarılır. Bu $D(\lambda) = 0$ ın rankı $p > n - m$ veya $p = n - m$. Sonuç olarak,

$$r = n - p \leq n - (n - m) = m$$

olur. Eşitlik sadece $a_{ij} = a_{ji}$ ile geçerlidir.

Yukarıdaki tartışmayı kısaca özetleyelim. $m \geq 1$, λ_0 eigen değerinin bir katlılığı olsun. Bu halde, (3.25) homojen integral denklemi r tane lineer bağımsız çözüme sahiptir, burada r, $1 \leq r \leq m$ şartını sağlayan eigen değerinin indeksidir.

r ve m sayılarına sırasıyla λ_0 eigen değerinin geometrik ve cebirsel katlılığı denir. Bir önceki tartışmadan eigen değerin cebirsel katlılığı geometrik katlılıktan büyüktür ya da eşittir.

Şimdi (3.2) homojen olmayan Fredholm integral denklemini ele alalım. Bu durumda $D(\lambda) = 0$ olması halinde de Fredholm integral denklemi çözüme sahiptir. (3.2) denkleminin transpozunu alalım. Bu denklem,

$$\psi(x) = f(x) + \lambda \int K^*(x,t)\psi(t)dt \qquad (3.32)$$

ile verilir. Burada, $*$ kompleks eşlenik, λ ise transpoz (adjoint) denkleme karşılık gelen eigen değerdir. (3.2) ve (3.31) arasındaki bağıntı simetrik olmalarıdır. Çünkü, (3.2) denklemi (3.31) denkleminin transpozudur.

Eğer $K(x,t)$ ayrılabilir çekirdeğinin (3.1) açılımı varsa o zaman transpoz denkleminin

$$K^*(t,x)=\sum_{i=1}^{n}(a_i(t)b_i(x))^* \tag{3.33}$$

açılımı vardır. Dolayısıyla, karşılık gelen cebirsel sistem

$$(\mathrm{I}-\lambda A^{*^T})c=f\,. \tag{3.34}$$

Burada, A^{*^T}, A nın eşleniğinin transpozu ve c_i ile f_i ise

$$c_i=\int a_i^*(t)\psi(t)dt, \qquad f_i=\int a_i^*(t)f(t)dt\,. \tag{3.35}$$

Dolayısıyla, (3.34) cebirsel sisteminin determinantı $D^*(\lambda)$. Ayrıca, (3.2) orijinal denklemi tek çözüme sahip olduğundan (3.31) transpoz denklemi de tek çözüme sahiptir. Genelde, (3.31) sisteminin eigen vektörleri

$$(\mathrm{I}-\lambda A^T)c=0 \tag{3.36}$$

eigen vektörlerinden farklıdır. r, λ_0 ın bir indeksi (3.2) orijinal denklemi için yapılan tartışmanın aynısı transpoz denklem içinde geçerlidir. Yani transpoz sistemde r tane lineer bağımsız eigen fonksiyonu vardır. Bu normalleştirilmiş eigen fonksiyonlar ψ_{01}, ψ_{02}, ..., ψ_{0r} olsun, bu halde

$$\psi(x)=\lambda\int K^*(t,x)\psi(t)dt \tag{3.37}$$

transpoz homojen integral denkleminin herhangi λ_0 eigen değerine karşılık gelen $\psi_0(x)$ çözümü, $\psi_0(x)=\sum\beta_i\psi_{0i}(x)$ olup, burada β_i ler keyfi sabitlerdir. $\phi(x)$ ve $\psi(x)$ eigen değerlerine karşılık gelen eigen değerler sırasıyla λ_1 ve λ_2 olsun. Bu halde, (3.25) homojen integral denklemi ile (3.37) ile verilen transpoz denklemi ortogonaldır. Gerçekten,

$$\phi(x)=\lambda_1\int K(x,t)\phi(t)dt\,,\ \psi(x)=\lambda_2\int K^*(t,x)\psi(t)dt.$$

(3.1) denklemini $\lambda_2\psi^*$ ile ikinci denklemin kompleks eşleniği alındıktan sonra $\lambda_1\phi$ ile çarpıp integre edildikten sonra taraf tarafa çıkarılırsa

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\int_a^b \phi(x)\psi^*(x)dx = 0$$

elde edilir. Fakat $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan sonuç görülür.

$D(\lambda) = 0$ için (3.2) inhomojen Fredholm integral denkleminin çözümünü tartışmaya hazırız. $\lambda = \lambda_0$, $D(\lambda)$nın bir kökü olsun. Bu halde çözümün olması için gerek ve yeter şart $f(x)$in r tane ψ_{0i} eigen fonksiyonlarına dik olması gerekir. Eğer (3.2) denklemi $\lambda = \lambda_0$ için belli bir ϕ_0 çözümüne sahip ise bu halde,

$$\int f(x)\psi_{0i}^*(x)dx = \int \phi(x)\psi_{0i}^*(x)dx - \lambda_0 \int \psi_{0i}^*(x)dx \int K(x,t)\phi(t)dt$$

$$= \int \phi(x)\psi_{0i}^*(x)dx - \lambda_o \int \phi^*(t)dt \int K^*(x,t)\psi_{0i}(x)dx = 0\,.$$

Burada, λ_0 transpoz denkleminin ψ_{0i} eigen fonksiyonuna karşılık gelen eigen değerleridir.

Yeterlilik şartı için lineer cebirden bilinen gerçekler kullanılır. Lineer cebirsel sisteme tekabül eden ortogonallik şartı (3.30) homojen olmayan sistemini yalnız $(n-r)$ bağımsız denkleme indirgendiğini garantiler. Bu ise $(\mathrm{I} - \lambda A)$ matrisinin rankının $p = (n-r)$ olduğunu önerir. Yani (3.31) ve (3.30) sistemleri çözülebilirdir. Bu çözüm (3.5) de yazılırsa integral denklemlerine karşılık gelen çözümü bulunur.

Nihayet, (3.2) denklemini sağlayan iki çözümünün farkı (3.25) homojen denkleminin çözümüdür. Bu sebeple, (3.2) inhomojen integral denkleminin çözümü

$$\phi(x) = G(x) + \alpha_1\phi_{01}(x) + \alpha_2\phi_{02}(x) + ... + \alpha_r\phi_{0r}(x) \tag{3.38}$$

formatındadır. Burada, $G(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ fonksiyonlarının bir lineer kombinasyonudur.

Netice itibarı ile yukarıda anlatılanlar aşağıdaki teoremle özetlenebilir.

Teorem (Fredholm alternatifi) 3.1.1.2.2:

$$\phi(x) = f(x) + \lambda\int K(x,t)\phi(t)dt \tag{3.39}$$

burada $f(x)$ ile $K(x,t)$ kare integrallenebilir olsun. Bu denklem ya sonsuz λ lar için yalnız ve yalnız bir tek $\phi(x)$ çözümüne sahiptir. Özellikle, $f = 0$ için $\phi = 0$ çözümdür ya da

$$\phi(x) = \lambda\int K(x,t)\phi(t)dt \tag{3.40}$$

homojen denklemi sonlu sayıda r tane lineer bağımsız ϕ_{0i} çözümüne sahiptir, burada $i = 1,2,...,r$.

$$\psi(x) = f(x) + \lambda \int K^*(t,x)\psi(t)dt \tag{3.41}$$

homojen olmayan transpoz integral denklemi aynı zamanda tek çözüme sahiptir. İkinci durumda ise,

$$\psi(x) = \lambda \int K^*(t,x)\psi(t)dt \tag{3.42}$$

transpoz homojen integral denklemi aynı zamanda r tane lineer bağımsız ψ_{0i} çözümüne sahiptir. Homojen olmayan denklem (3.39) integral denkleminin çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart verilen $f(x)$ fonksiyonu

$$\left\langle f, \psi_{0i} \right\rangle = \int f(x)\psi_{0i}^*(x)dx = 0, \qquad i = 1,2,...,r \tag{3.43}$$

denkemini sağlar. Yani, burada her $i = 1,2,...,r$ için $\left\langle f, \psi_{0i} \right\rangle = 0$.

Bu teoremleri örneklerle izah edelim.

Örnek 3.1.1.2.3:

$$\phi(x) = f(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left[\sin(x+t)\right]\phi(t)dt \tag{3.44}$$

integral denkleminin $f(x) = x$ için çözüme sahip olmadığını fakat $f(x) = 1$ olduğunda sonsuz sayıda çözüme sahip olduğunu gösterelim.

Çözüm: Bu denklem için,

$K(x,t) = \sin x \cos t + \cos x \sin t$,

$a_1(x) = \sin x, \ \mathrm{a}_2(x) = \cos x, \qquad b_1(t) = \cos t, \ \mathrm{b}_2(t) = \sin t$.

Buradan,

$$a_{11}(x) = \int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt = 0 = a_{22}, \quad a_{12}(x) = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi = a_{21},$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda\pi \\ -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2\pi^2 . \tag{3.45}$$

Eigen değerler $\lambda_1 = \pm\dfrac{1}{\pi}$. (3.44) denklemi $\lambda_1 = \dfrac{1}{\pi}$ yi içermektedir. Bu nedenle, transpoz denkleminin eigen fonksiyonlarını inceleyelim. (çekirdek simetriktir.)

$$\phi(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sin(x+t)\right]\phi(t)dt\,. \tag{3.46}$$

(3.46) denklemine karşılık gelen cebirsel sistem

$$c_1-\lambda\pi c_2=0, \qquad -\lambda\pi c_1+c_2=0\,.$$

$\lambda_1=\dfrac{1}{\pi}$ için $c_1=c_2$ ve $\lambda_2=-\dfrac{1}{\pi}$ için $c_1=-c_2$.

Bu nedenle, $\lambda_1=\dfrac{1}{\pi}$ için eigen fonksiyonlar (3.5) bağıntısından ve

$$\phi(x)=c(\sin x+\cos x) \tag{3.47}$$

ile verilir. Çünkü,

$$\int_0^{2\pi}(x\sin x+x\cos x)dx=-2\pi\neq 0 \ \text{ ve } \int_0^{2\pi}(\sin x+\cos x)dx=0\,.$$

Bu ise istenendır.

Örnek 3.1.1.2.4:

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1(1-3xt)\phi(t)dt \tag{3.48}$$

integral denklemini çözelim.

Çözüm: Bu denklem için (3.9) cebirsel sistemi

$$(1-\lambda)c_1+\frac{3}{2}\lambda c_2=f_1, \qquad -\frac{1}{2}\lambda c_1+(1+\lambda)c_2=f_2 \tag{3.49}$$

ve

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & \frac{3}{2}\lambda\\ -\frac{1}{2}\lambda & 1+\lambda\end{vmatrix}=\frac{1}{4}(4-\lambda^2)\,. \tag{3.50}$$

Bu nedenle, (3.48) ancak ve ancak $\lambda\neq\pm 2$ olduğunda tek çözüme sahiptir. Bu halde,

$$\phi(x)=\lambda\int_0^1(1-3xt)\phi(t)dt \tag{3.51}$$

homojen integral denklemi yalnızca aşikar çözüme sahiptir.

Şimdi de λ nın bir eigen değere eşit olması durumunu ve transpoz homojen integral denkleminin eigen fonksiyonlarını inceleyelim.

$$\phi(x) = \lambda\int_0^1 (1-3xt)\phi(t)dt \tag{3.52}$$

$\lambda = +2$ için (3.49) cebirsel sistemi $c_1 = 3c_2$ verir. Bu halde, (3.5) denklemi

$$\phi(x) = c(1-x) \tag{3.53}$$

eigen fonksiyonunu verir, burada c keyfi bir sabittir. Benzer olarak, $\lambda = -2$ için karşılık gelen eigen fonksiyon

$$\phi(x) = c(1-3x)\,. \tag{3.54}$$

Yukarıdaki analizden, eğer $f(x)$ fonksiyonu $\int_0^1 (1-3x) f(x)dx = 0$ koşullu ile

$$\phi(x) = f(x) + \lambda\int_0^1 (1-3xt)\phi(t)dt$$

integral denklemi çözüme sahiptir.

3.1.1.3. Fredholm integral denkleminin birinci tipi

$$f(x) = \int K(x,t)\phi(t)dt \qquad a \le x,t \le b \tag{3.55}$$

integral denkleminde çekirdek ayrılabilir olsun. Yani,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\int b_i(t)\phi(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \langle b_i, \phi\rangle a_i(x). \tag{3.56}$$

(3.55) denkleminin çözüme sahip olması için gerekli şart $f(x)$ in $\{a_i(x)\}$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak yazılmasıdır. Burada,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i(x) \tag{3.57}$$

olsun. $f(x)$ bilindiğinden α_i lerde bilinir. (3.56) ve (3.57) denklemlerinin karşılaştırılmasıyla (3.55) denkleminin çözüm problemi

$$\alpha_i = \int_a^b b_i(t)\phi(t)dt, \qquad i=1,2,...,n \tag{3.58}$$

n tane integral denklemine indirgenir. (3.58) denklemindeki $\phi(t)$ çözümü

$$\phi(t)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j b_j(t) \tag{3.59}$$

denklemindeki gibi olsun. β_j bilinmeyendir. Bu ifade (3.58) denkleminde yazılırsa

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}\beta_j \left\langle b_i,b_j\right\rangle, \quad i=1,2,...,n \tag{3.60}$$

elde edilir. Burada, $b_i(t)$ ler lineer bağımsız olduğundan $\left\langle b_i,b_j\right\rangle$ bileşenlerinden oluşan matriste nonsingüler olur (Bu matris gerçekten simetriktir ve tüm eigen değerleride pozitiftir).

$$0=\int K^*(t,x)\psi(t)dt \tag{3.61}$$

transpoz homojen integral denklemini inceleyelim. Eşleniğinden,

$$b_i^*(x)\left\langle \psi,a_i\right\rangle=0, \quad i=1,2,...,n \tag{3.62}$$

elde edilir. $\{b_i(x)\}$ ler lineer bağımsız olduğundan

$$\left\langle \psi,a_i\right\rangle=0, \quad i=1,2,...,n \tag{3.63}$$

denklemi elde edilir. Fakat (3.57) denkleminden f nin (3.59) transpoz homojen integral denklemini sağlayan tüm çözümlere dik olduğunu söyler. Aynı mantıkla

$$0=\int K(x,t)\phi(t)dt \tag{3.64}$$

elde edilir.

Bu mantıkla aşağıdaki teorem ispat edildi.

Teorem 3.1.1.3.1: (3.55) Fredholm integral denkleminin kare integrallenebilir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $f(x)$ in (3.57) biçiminde olması ve ayrıca (3.61) denklemini sağlayan tüm çözümlere dik olması gerekir.

3.2. Yöntem

3.2.1. Ardışık yaklaşıklar metodu

3.2.1.1. İteratif metodu

Birinci mertebeden diferansiyel denklemler çok iyi bilinen Picard'ın ardışık yaklaşıkları (yaklaşımları) metodu olarak çözülebilir.

İkinci tip lineer integral denklemleri için iterative metodu aynı prensibe dayanır.

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int K(x,t)\phi(t)dt\,. \tag{3.65}$$

Bu metodu sunalım. $f(x)$ ile $K(x,t)$ fonksiyonları kare integrallenebilir fonksiyonlardır. (3.65) denkleminin ardışık yaklaşıkları (yaklaşımları)

$$\phi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int K(x,t)\phi_n(t)dt. \tag{3.66}$$

Bu denklemde,

$$\phi_0(x) = f(x). \tag{3.67}$$

Bu da $(n+1)$. yaklaşımı verir. $n \to \infty$ için $\phi_n(x)$ düzgün olarak bir limite yakınsarsa bu limit çözüm olur. Bu limite çalışmak için (3.66) prosedürünü detaylı bir şekilde inceleyelim.

Birinci ve ikinci yaklaşımlar

$$\phi_1(x) = f(x) + \lambda \int K(x,t) f(t)dt \tag{3.68}$$

$$\phi_2(x) = f(x) + \lambda \int K(x,t) f(t)dt + \lambda^2 \int K(x,t)\Big[\int K(t,y) f(y)dy\Big]dt. \tag{3.69}$$

Bu formülü basitleştirmek için,

$$K_2(x,t) = \int K(x,y)K(y,t)dy \tag{3.70}$$

denklemi şeklinde yazılır. Bu sonuç ise

$$\phi_2(x) = f(x) + \lambda \int K(x,t) f(t)dt + \lambda^2 \int K_2(x,t) f(t)dt. \tag{3.71}$$

Benzer olarak,

$$\phi_3(x) = f(x) + \lambda \int K(x,t) f(t)dt + \lambda^2 \int K_2(x,t) f(t)dt + \lambda^3 \int K_3(x,t) f(t)dt \tag{3.72}$$

ve burada,

$$K_3(x,t) = \int K(x,y)K_2(y,t)dy. \tag{3.73}$$

$$K_m(x,t) = \int K(x,y)K_{m-1}(y,t)dy\,. \tag{3.74}$$

Bu muhakemeye devam edilirse ve (3.74) den hareketle (3.65) integral denkleminin n. yaklaşık çözümü,

$$\phi_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int K_m(x,t)\, f(t)dt \tag{3.75}$$

ile verilir. $K_m(x,t)$ ifadesi m. iterasyon olarak adlandırılır. $K_1(x,t) = K(x,t)$ olsun. $n \to \infty$ için limite geçilirse Neumann serisi olarak bilinen

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int K_m(x,t)\, f(t)dt \tag{3.76}$$

integral denklemi elde edilir. Şimdi de bu ardışık yaklaşıkların yakınsaklığı için gerekli şartları yazalım. Bu amaç için (3.75) deki integranda Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\int K_m(x,t)\, f(t)dt\right|^2 \le \left(\int \left|K_m(x,t)\right|^2 dt\right)\left(\int \left| f(t)\right|^2 dt\right) \tag{3.77}$$

elde edilir.

$$D^2 = \int \left| f(t)\right|^2 dt \tag{3.78}$$

ve

$$C_m^2 = \int\int \left|K_m(x,t)\right|^2 dt$$

olsun. Bu halde (3.77) eşitsizliği

$$\left|\int K_m(x,t)\, f(t)dt\right|^2 \le C_m^2 D^2 \tag{3.79}$$

şeklini alır. Şimdi de C_m^2 üst sınırı ile C_1^2 üst sınırı arasındaki ilişkiyi verelim. Yine bu ilişki (3.74) e Schwarz eşitsizliği uygulanarak elde edilir. Yani,

$$\left|K_m(x,t)\right|^2 \le \int \left|K_{m-1}(x,y)\right|^2 dy \int \left|K(y,t)\right|^2 dy$$

ifadesinin t e göre integrali alınırsa,

$$\int \left|K_m(x,t)\right|^2 dt \le B^2 C_{m-1}^2 \tag{3.80}$$

burada,

$$B^2 = \int\int \left|K(x,t)\right|^2 dxdt\,. \tag{3.81}$$

(3.80) eşitsizliğinden

$$C_m^2 \le B^{2m-2} C_1^2 \tag{3.82}$$

tekrarlı bağıntısı yazılır. (3.79) ve (3.82) denklemlerinden,

$$\left| \int K_m(x,t) f(t) dt \right|^2 \le C_1^2 D^2 B^{2m-2} \tag{3.83}$$

elde edilir. Bu sebeple, (3.75) kısmi toplamının genel terimi $DC_1 |\lambda|^m B^{m-1}$ den küçüktür. Bu taktirde eğer,

$$|\lambda| B < 1 \tag{3.84}$$

ise (3.76) serisi geometrik seriden daha hızlı yakınsar. Yani, düzgün yakınsaktır.

Şimdi (3.65) serisinin verilen λ için çözümünün tek olduğunu gösterelim. $g_1(x)$ ve $g_2(x)$ gibi iki tane çözümü olsun. Bu halde,

$$g_1(x) = f(x) + \lambda \int K(x,t) g_1(t) dt, \quad g_2(x) = f(x) + \lambda \int K(x,t) g_2(t) dt .$$

Yukarıdaki denklemler taraf tarafa çıkarılırsa ve $\phi(x) = g_1(x) - g_2(x)$ denirse ve

$$\phi(x) = \lambda \int K(x,t) \phi(t) dt$$

denklemine Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$|\phi(x)|^2 \le |\lambda|^2 \int |K(x,t)|^2 dt \int |\phi(t)|^2 dt$$

veya

$$(1 - |\lambda|^2 B^2) \int |\phi(x)|^2 dx \le 0 \tag{3.85}$$

eşitsizliğinden sol taraf daima pozitiftir dolayısıyla çelişki söz konusudur. Yani, $\phi(x) = 0$ olmak zorundadır.

(3.76) Neumann serisinde $n.$ terimden sonraki ihmal edilen terimler için hata nedir? sorusuna yanıt vermek için aşağıdaki prosedür takip edilir.

$$\phi(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int K_m(x,t) f(t) dt + R_n(x) . \tag{3.86}$$

Bu halde bir önceki analizden,

$$|R_n(x)| \le DC_1 |\lambda|^{n+1} \frac{B^n}{(1 - |\lambda| B)} . \tag{3.87}$$

Şimdi de (3.87) denkleminin nasıl elde edildiğini gösterelim. Yani,

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda^m \int K_m(x,t)\, f(t)dt\right|.$$

Şimdi, Schwarz eşitsizliği ile bir önceki denklemlerden elde edilen üst sınırlar ve geometrik seri açılımı kullanılırsa

$$\left|R_n(x)\right| \le \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\int \left|\lambda^m K_m\left(x,t\right)\right|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int \left| f(t)\right|^2 dt\right)^{1/2}$$

$$\le \sum_{m=n+1}^{\infty} \left|\lambda\right|^m BC_{m-1}D, \qquad C_{m-1}^2 \le B^{2(m-1)-2}C_1^2$$

$$\le DB\sum \left|\lambda\right|^m C_1 B^{m-2}, \qquad C_{m-1} \le B^{m-2}C_1$$

$$\le B^{-1}DC_1 \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\lambda B\right)^m = DC_1 \left|\lambda\right|^{n+1} B^n \frac{1}{(1-\lambda B)}$$

Nihayet, çözücü çekirdek $K_m(s,t)$ çekirdekleri cinsinden yazılabilir. Gerçekten (3.76) Neumann serisindeki kısmi toplam ve integralin yerleri değiştirilirse

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int \left[\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,t)\right] f(t)dt.$$

Bu ise,

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int \Gamma\left(x,t;\lambda\right) f(t)dt \tag{3.88}$$

şeklinde yazılarak çözücü çekirdek olan

$$\Gamma(x,t;\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,t) \tag{3.89}$$

serisi en azından $\left|\lambda\right| B < 1$ olması halinde yakınsaktır. Bu ise çözücü çekirdeğin λ nın bir analitik fonksiyonu olduğunu ve bu analitiklik bölgesi $\left|\lambda\right| < B^{-1}$ çemberi içerisinde geçerli olduğunu gösterir.

(3.65) denkleminin çözümünün tekliğinden çözücü çekirdeğin tek olduğu görülebilir. Gerçekten, (3.88) denkleminde çözücü çekirdekler $\Gamma_1(x,t;\lambda)$ ve $\Gamma_2(x,t;\lambda)$ olsun. (3.65) denkleminin tekliğinden keyfi $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) + \lambda_0 \int \Gamma_1(x,t;\lambda_0) f(t)dt \equiv f(x) + \lambda_0 \int \Gamma_2(x,t;\lambda_0) f(t)dt. \tag{3.90}$$

$$\Psi(x,t;\lambda_0) = \Gamma_1(x,t;\lambda_0) - \Gamma_2(x,t;\lambda_0)$$

olsun. Dolayısıyla, keyfi bir $f(x)$ fonksiyonu için

$$\int \psi(x,t;\lambda_0) f(t)dt \equiv 0$$

olur. x leri sabit tutarak $f(t) = \Psi^*(x,t;\lambda)$ olsun. Bu ise,

$$\int \left|\Psi(x,t;\lambda_0)\right|^2 dt \equiv 0 .$$

Dolayısıyla, $\Psi(x,t;\lambda_0) \equiv 0$. Bu ise çözücü çekirdeğin tekliğini garantiler. Bu analizlerin neticesinde aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 3.2.1.1.1: Her kare integralenebilir $K(x,t)$ çekirdeğine karşılık bir $\Gamma(x,t;\lambda)$ çözücü çekirdeği vardır. Bu çözücü çekirdeği $\left|\lambda\right| B^{-1}$ çemberi içerisinde λ nın bir analitik fonksiyonudur ve çözücü çekirdek (3.89) kuvvet serisi ile temsil edilebilir. (Analitik fonksiyonlar kuvvet serisine açılabilir). Üstelik, eğer $f(x)$ kare integralenebilir ise bu halde $\left|\lambda\right| < B^{-1}$ çemberi içerisinde geçerli olan (3.65) Fredholm denkleminin kare integrallenebilir tek çözümü vardır. Bu çözüm, (3.88) formülüyle ifade edilir.

Ardışık yaklaşıklar (yaklaşımları) metodunun birçok dezavantajı vardır. Ek olarak kullanışsız bir yöntemdir, genelde Neumann serisi kapalı bir biçimde toplanamaz. Üstelik, (3.65) integral denkleminin çözümü $\left|\lambda\right| B > 1$ olması halinde bile mevcut olabilir.

Aslında çözücü çekirdek λ ya göre $n.$ dereceden iki polinomun bölümüdür ve böylece $\Gamma(x,t;\lambda)$ nın singüler noktaları yalnızca $D(\lambda) = 0$ 'ın kökleridir. Fakat, $\left|\lambda\right| B > 1$ için Neumann serisi yakınsamaz ve bu da istenen çözümü sağlamaz.

Örnek 3.2.1.1.2:

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 e^{x-t} \phi(t)dt \tag{3.91}$$

integral denklemini çözelim.

Çözüm: Bir önceki kısımdaki metot kullanılırsa

$$K_1(x,t) = e^{x-t}, \quad K_2(x,t) = \int_0^1 e^{x-y} e^{y-t} dy = e^{x-t} .$$

Bu işleme devam edilirse $K_m(x,t)$ ye tekabül eden itere edilmiş çekirdeklerin tümünü buluruz. (3.89) denklemi kullanılarak, çözücü çekirdek

$$\Gamma(x,t;\lambda) = K(x,t)(1+\lambda+\lambda^2+...) = \frac{e^{x-t}}{(1-\lambda)} \tag{3.92}$$

denklemi şeklinde elde edilir.

$\left(1+\lambda+\lambda^2+...\right)$ serisi yalnızca $|\lambda|<1$ için yakınsamasına rağmen çözücü çekirdek aslında λ nın bir analitik fonksiyonudur ve $\lambda=1$ basit kutup noktası hariç bütün düzlemde regülerdir. $\phi(x)$ in çözümü (3.88) denkleminden

$$\phi(x) = f(x) + \left[\frac{\lambda}{(1-\lambda)}\right]\int_0^1 e^{x-t} f(t)dt\,. \tag{3.93}$$

Örnek 3.2.1.1.3:

$$\phi(x) = 1+\lambda\int_0^1 \left(1-3xt\right)\phi(t)dt$$

Fredholm integral denklemini çözerek çözücü çekirdeği hesaplayalım.

Çözüm: $\phi_0(x)=1$ ile başlayalım.

$$\phi_1(x) = 1+\lambda\int_0^1 \left(1-3xt\right)dt = 1+\lambda\left(1-\frac{3}{2}x\right),$$

$$\phi_2(x) = 1+\lambda\int_0^1 \left(1-3xt\right)\left[1+\lambda(1-\frac{3}{2}x)\right]dt = 1+\lambda\left(1-\frac{3}{2}x\right)+\frac{1}{4}\lambda^2,...,$$

$$\phi(x) = 1+\lambda\left(1-\frac{3}{2}x\right)+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^3}{4}\left(1-\frac{3}{2}x\right)+\frac{\lambda^4}{16}+\frac{\lambda^5}{16}\left(1-\frac{3}{2}x\right)+...$$

$$\phi(x) = \left(1+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^4}{16}+...\right)\left[1+\lambda\left(1-\frac{3}{2}x\right)\right].$$

Bu geometrik seri $|\lambda|<2$ olmak şartıyla yakınsaktır. Bu halde,

$$\phi(x) = \frac{4+2\lambda\left(2-3x\right)}{(4-\lambda^2)}. \tag{3.94}$$

Bir önceki örnekte yakınsaklık için söylenen işlemlerin aynısı bu probleme de uygulanır. Çözücü çekirdeği hesaplamak için itere çekirdekleri bulunur.

$$K_1(x,t) = 1-3xt\ ,\ K_2(x,t) = \int_0^1 \left(1-3xy\right)\left(1-3yt\right)dy = 1-\frac{3}{2}(x+t)+3xt,$$

$$K_3(x,t) = \int_0^1 \left(1-3xy\right)\left[1-\frac{3}{2}\left(y+t\right)+3yt\right]dy = \frac{1}{4}\left(1-3xt\right) = \frac{1}{4}K_1(x,t).$$

Benzer olarak,

$$K_4(x,t)=\frac{1}{4}K_2(x,t) \quad \text{ve} \quad K_n(x,t)=\frac{1}{4}K_{n-2}(x,t).$$

Buradan,

$$\Gamma(x,t;\lambda)=K_1+\lambda K_2+\lambda^2K_3+...=K_1+\lambda K_2+\lambda^2\frac{1}{4}K_1+\lambda^3\frac{1}{4}K_2+...$$

$$=\left(1+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{(\lambda^2)^2}{4^2}+...\right)K_1+\lambda\left(1+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{(\lambda^2)^2}{4^2}+...\right)K_2$$

$$=\left[(1+\lambda)-\frac{3}{2}\lambda(x+t)-3(1-\lambda)xt\right]/\left(1-\frac{1}{4}\lambda^2\right), \quad |\lambda|<2. \tag{3.95}$$

Örnek 3.2.1.1.4: $K_m(x,t)$, m defa itere edilmiş çekirdek ise

$$K_m(x,t)=\int K_r(x,y)K_{m-r}(y,t)dy. \tag{3.96}$$

Burada, $r<m$ bir pozitif tamsayıdır.

Çözüm: (3.96) denkleminin art arda yaklaşıkları alınırsa

$$K_m(x,t)=\int...\int K(x,x_1)K(x_1,x_2)...K(x_{m-1},t)dx_{m-1}...dx_1. \tag{3.97}$$

Sonuç olarak, $K_m(x,t)$ katlılığı $(m-1)$ katlı integraldır. Benzer olarak, $K_r(x,y)$ $(r-1)$ katlı integral ve $K_{m-r}(y,t)$ ise $(m-r-1)$ katlı integraldır. Böylece, $\int K_r(x,y)K_{m-r}(y,t)dy$ ifadesi $(m-1)$ katlı integral olur.

3.2.1.2. Volterra integral denklemleri

Aynı iteratif metodu Volterra integral denklemlerinin ikinci tipine de uygulanabilir. Yani. (3.76) ve (3.88) denklemlerine aynı prosedür uygulanır. Önceden bilindiği gibi $K_1(x,t)=K(x,t)$. Çözücü formül (3.89) formülünün aynısıdır ve verilen her (x,t) ikilisi için çözücü fonksiyon λ nın bir tam fonksiyonudur. Şimdi, bu konsepti aşağıdaki örneklerle aydınlatalım.

Örnek 3.2.1.2.1:

$$\phi(x)=(1+x)+\lambda\int_0^x(x-t)\phi(t)dt \tag{3.98}$$

integral denklemini çözelim ve Neumann serisini bulalım.

Çözüm:

$$K_1(x,t)=(x-t)\,,\; K_2(x,t)=\int_t^x (x-y)(y-t)dy=\frac{(x-t)^3}{3!}\,,$$

$$K_3(x,t)=\int_t^x \frac{(x-y)(y-t)^3}{3!}dy=\frac{(x-t)^5}{5!}\,,\ldots$$

Böylece, $\phi(x)=(1+x)+\lambda(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})+\lambda^2(\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!})+...$

Çıkarım: $\lambda=1$ için $\phi(x)=e^x$.

Örnek 3.2.1.2.2:

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x e^{x-t}\phi(t)dt \tag{3.99}$$

integral denklemini çözerek resolvant çekirdeği hesaplayalım.

Çözüm: Bu durum için

$$K_1(x,t)=e^{x-t},\; K_2(x,t)=\int_t^x e^{x-y}e^{y-t}dy=(x-t)e^{x-t},$$

$$K_3(x,t)=\int_t^x (x-t)e^{x-y}e^{y-t}dy=\frac{(x-t)^2}{2!}e^{x-t},\ldots,K_m(x,t)=\frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}e^{x-t}.$$

Resolvant çekirdek;

$$\Gamma(x,t;\lambda)=\begin{cases} e^{x-t}\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{\lambda^{m-1}(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}=e^{(\lambda+1)(x-t)}, & t\le x \\ 0, & t>x \end{cases}. \tag{3.100}$$

Bundan dolayı, çözüm

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x e^{(x-t)(\lambda+1)}f(t)dt. \tag{3.101}$$

3.2.1.3. Resolvant (Çözücü) çekirdek ile ilgili bazı sonuçlar

$$\Gamma(x,t;\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m-1}K_m(x,t) \tag{3.102}$$

çözücü çekirdek için seri $|\lambda| < \dfrac{1}{B}$ çemberinde tüm x ve t değerleri için mutlak değerce ve düzgün yakınsak olduğu ispatlanabilir. (3.1). kısımdaki varsayımlara ek olarak, aşağıdaki eşitsizliğe

$$\int |K(x,t)|^2 \, dx < E^2, \qquad E \text{ sabit} \tag{3.103}$$

gerek vardır. Bu ise K çekirdeğinin kare integrallenebilir olduğudur.

$$K_m(x,t) = \int K_{m-1}(x,y)K(y,t)dy \tag{3.104}$$

itere edilmiş çekirdeğe Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$|K_m(x,t)|^2 \le (\int |K_{m-1}(x,y)|^2 dy)(\int |K(y,t)|^2 dy)$$

elde edilir. (3.82) denkleminin yardımıyla

$$|K_m(x,t)| \le C_1 E B^{m-1} \tag{3.105}$$

elde edilir. Böylelikle, (3.102) serisi genel terimi $C_1 E(\lambda^{m-1} B^{m-1})$ olan geometrik serisi tarafından temsil edilir.

Şimdi de resolvant çekirdeğin

$$\Gamma(x,t;\lambda) = K(x,t) + \lambda \int \Gamma(x,y;\lambda)K(y,t)dy \tag{3.106}$$

integral denklemini sağladığını gösterelim. Bu durumda, (3.102) serisinde $K_m(x,t)$ yerine (3.104) denklemi yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Gamma(x,t;\lambda) &= K_1(x,t) + \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^{m-1} \int K_{m-1}(x,y)K(y,t)dy \\
&= K(x,t) + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} \int K_m(x,y)K(y,t)dy \\
&= K(x,t) + \lambda \int \left[\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,y) \right] K(y,t)dy
\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan da (3.106) integral denklemi hemen bulunur. Düzgün yakınsaklıktan dolayı integral ve toplamın yerleri değişimi yasaldır. Aynı muhakemeye devam edilerek,

$$\Gamma(x,t;\lambda) = K(x,t) + \lambda \int K(x,y)\Gamma(y,t;\lambda)dy. \tag{3.107}$$

(3.106) ve (3.107) denklemlerinin ikisi Fredholm özdeşlikleri olarak adlandırılır. Daha önceki analizden bu ifadelerin en azından $|\lambda| B < 1$ çemberinde yakınsak olduğu bilinmektedir. Çözücü çekirdek anlamlı tüm λ değerleri için yakınsaktır.

Çözücü çekirdek için diğer bir ilginç sonuç

$$\frac{\partial \Gamma(x,t;\lambda)}{\partial \lambda} = \int \Gamma(x,y;\lambda)\Gamma(y,t;\lambda)dy. \tag{3.108}$$

Gerçekten,

$$\int \Gamma(x,y;\lambda)\Gamma(y,t;\lambda)dy = \int \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,y) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(y,t)dy.$$

(3.102) serisi mutlak ve düzgün yakınsak olduğundan integral işareti altında seriyi çarpabilir ve terim terime integre edebiliriz. Bu nedenle,

$$\int \Gamma(x,y;\lambda)\Gamma(y,t;\lambda)dy = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{m+n-2} K_{m+n}(x,t). \tag{3.109}$$

Şimdi, $m+n=p$ olsun ve toplamların sırası değiştirilirse

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{m+n-2} K_{m+n}(x,t) &= \sum_{p=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{p-1} \lambda^{p-2} K_p(x,t) \\ &= \sum_{p=2}^{\infty} (p-1)\lambda^{p-2} K_p(x,t) = \frac{\partial \Gamma(x,t;\lambda)}{\partial \lambda}.\end{aligned} \tag{3.110}$$

(3.109) ve (3.110) denklemleri birleştirilirse (3.108) denklemi elde edilir. Benzer bir yöntemle, çözücü çekirdek olarak adlandırılan

$$\Gamma(x,t;\lambda) - \Gamma(x,t;\mu) = (\lambda-\mu)\int \Gamma\left(x,y;\mu\right)\Gamma\left(y,t;\lambda\right)dy \tag{3.111}$$

integral denklemi elde edilir.

Bu halde, (3.111) denklemini $(\lambda-\mu)$ ile bölerek $\mu \to \lambda$ gönderilirse (3.108) denklemi elde edilir. (3.111) denklemi (3.106) ve (3.107) Fredholm özdeşliklerinden elde edilebilir. Volterra integral denklemi

$$\Gamma(x,t;\lambda) = K(x,t) + \lambda \begin{cases} \int_t^x \Gamma(x,y;\lambda)K(y,t)dy \\ \int_t^x K(x,y)\Gamma(y,t;\lambda)dy \end{cases}, \tag{3.112}$$

özdeşliklerini sağlar.

$$\int_a^b L(x,y)M(y,t)dy = 0 \tag{3.113}$$

$$\int_a^b M(x,y)L(y,t)dy = 0 \tag{3.114}$$

denklemleri $[a,b]$ kapalı aralığındaki her x ve t için doğru ise L ve M çekirdekleri birbirine diktir.

L ve M için çözücü çekirdekler Γ_l *ve* Γ_m ile gösterilirse

$$\Gamma_l(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} L_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n L_{n+1}(x,t) \tag{3.115}$$

$$\Gamma_m(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} M_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n M_{n+1}(x,t) \tag{3.116}$$

elde edilir. Burada L_n ve $\mathrm{M_n}$ itere edilmiş çekirdeklerdir.

L ve M nin ortagonal

$$\int L(x,y)\Gamma_m(y,t;\lambda)dy = 0, \tag{3.117}$$

$$\int M(x,y)\Gamma_l(y,t;\lambda)dy = 0 \tag{3.118}$$

oldukları açıktır. Üstelik, (3.107) ifadesinde Fredholm özdeşliği uygulanırsa

$$\Gamma_l(x,t;\lambda) + \Gamma_m(x,t;\lambda) = L(x,t) + M(x,t)$$
$$+\lambda \int \left[L(x,y)\Gamma_l(y,t;\lambda) + M(x,y)\Gamma_m(y,t;\lambda) \right] dy. \tag{3.119}$$

(3.117) ve (3.118) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\Gamma_l(x,t;\lambda) + \Gamma_m(x,t;\lambda) = L(x,t) + M(x,t)$$
$$+\lambda \int \left[L(x,y) + M(x,y) \right] \left[\Gamma_l(x,t;\lambda) + \Gamma_m(y,t;\lambda \right] dy \tag{3.120}$$

denklemi elde edilir. Bu ise,

$$\Gamma_{l+m}(x,t;\lambda) = \Gamma_l(x,t;\lambda) + \Gamma_m(x,t;\lambda). \tag{3.121}$$

3.2.2. Klasik Fredholm teorisi

3.2.2.1. Fredholm metodunun çözümü

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int K(x,t)\phi(t)dt \qquad (3.122)$$

Fredholm integral denkleminin $|\lambda|$nın yeterince küçük olması halinde λ parametresine göre düzgün yakınsak kuvvet serisi cinsinden çözümü elde edildi. Fredholm (3.122) denkleminin çözümünü tüm λ parametresine göre genel çözümü verdi. Daha önce özel çekirdek için çalışılmış ve Fredholmun kendi adı verilmiş üç teoremi vardır. Burada, (3.122) denklemi $f(x)$ ve $K(x,t)$ fonksiyonlarının integrallenebilir herhangi iki fonksiyon olması halinde ele alınacaktır. Üstelik bu yeni metotla çözüm tam formüllerle elde edilecek ayrıca bu formüller belirli determinantları içerecektir.

(3.122) integral denklemi lineer cebirsel denklemler sisteminin bir limit hali olarak düşünülecektir. Bu lineer cebirsel denklemlere indirgeme işlemi (3.122) ifadesinin iki veya daha çok boyutlu olması halinde de geçerlidir. Fakat, biz çalışmalarımızı $[a,b]$ kapalı aralığındaki tek katlı integralleri ele alacağız. $[a,b]$ kapalı aralığını n eşit parçaya bölelim.

$$x_1 = t_1 = a, \qquad x_2 = t_2 = a+h, \quad \dots \quad, x_n = t_n = a+(n-1)h, \qquad h = \frac{(b-a)}{n}.$$

Dolayısıyla,

$$\int K(x,t)\phi(t)dt \cong h\sum_{j=1}^{n} K(x,x_j)\phi(x_j) \qquad (3.123)$$

yaklaşık fonksiyonu elde edilir. Bu takdirde $[a,b]$ kapalı aralığındaki tüm x değerleri için (3.122) denklemi

$$\phi(x) \cong f(x) + \lambda h\sum_{j=1}^{n} K(x,x_j)\phi(x_j) \qquad (3.124)$$

şeklini alır. Özellikle, (3.124) denklemi x_i, $i = 1,2,...,n$ noktalarında geçerliliğini korur. Bu düşünceyle,

$$\phi(x_i) = f(x_i) + \lambda h\sum_{j=1}^{n} K(x_i,x_j)\phi(x_j), \qquad i = 1,2,...,n \qquad (3.125)$$

denklemi elde edilir. Şimdi,

$$f(x_i) = f_i, \quad \phi(x_i) = \phi_i, \quad K(x_i, x_j) = K_{ij} \tag{3.126}$$

denklemi yardımıyla (3.122) denkleminin yaklaşığı olan n tane lineer denklem sistemini teşkil eden

$$\phi_i - \lambda h \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\phi_j = f_i, \quad i = 1,2,...,n \tag{3.127}$$

ϕ_i bilinmeyenlerine göre yaklaşığı elde edilir. (3.127) yardımıyla çekirdeğin yaklaşık eigen değerleri elde edilir. Eigen değerler $D_n(\lambda) = 0$ denklemini sağlar.

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda hK_{11} & -\lambda hK_{12} & ... & -\lambda hK_{1n} \\ -\lambda hK_{21} & 1-\lambda hK_{22} & ... & -\lambda hK_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ -\lambda hK_{n1} & -\lambda hK_{n2} & ... & 1-\lambda hK_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3.128}$$

Örnek 3.2.2.1.1:

$$\phi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+t)\phi(t)dt = 0$$

integral denklemini $n = 3$ alarak çözelim.

Çözüm: $h = \frac{\pi}{3}$, $x_1 = t_1 = 0$, $x_2 = t_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = t_3 = \frac{2\pi}{3}$.

K_{ij} nin değerleri hesaplanırsa

$$\left(K_{ij}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 0.866 & 0.866 \\ 0.866 & 0.866 & 0 \\ 0.866 & 0 & -0.866 \end{vmatrix}$$

elde edilir. Eğer

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -0.907\lambda & -0.907\lambda \\ -0.907\lambda & (1-0.907\lambda) & 0 \\ -0.907\lambda & 0 & (1+0.907\lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

$D_n(\lambda) = 0$ ise $1 - 3(0.0907)^2\lambda^2 = 0$.

(3.127) denklemine karşılık gelen homojen sistem nontrivial çözüme sahip olacaktır. Bu kökler $\lambda = \pm 0.6365$.

Genelde, bu metodun pratikteki uygulamaları sınırlıdır, çünkü daha mantıklı bir yaklaşım için n sayısını oldukça büyütmek gerekir. Bu ise fazla işlem gerektirir.

3.2.2.2. Fredholm birinci teoremi

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int K(x,t)\phi(t)dt$$

homojen olmayan Fredholm integral denkleminde $f(x)$ ve ϕ(t) integrallenebilir olsun. Bu halde homojen olmayan (inhomojen) Fredholm integral denklemi

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int \Gamma(x,t;\lambda)\phi(t)dt$$

çözümüne sahiptir, burada çözücü çekirdek $\Gamma(x,t;\lambda) = \dfrac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$, $D(\lambda) \neq 0$.

Çözücü çekirdek λ kompleks değişkenine göre meromorfik bir fonksiyondur.

$$D(x,t;\lambda) = K(x,t) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \int \ldots \int K\begin{pmatrix} x, x_1, \ldots, x_p \\ t, x_1, \ldots, x_p \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_{p,}$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \int \ldots \int K\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_p \\ x_1, \ldots, x_p \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_p \,. \tag{3.129}$$

Bu her iki seri λ nın tüm değerleri için yakınsaktır. Homojen denklemin çözümü özdeş olarak sıfırdır.

İspat: (3.127) sistemini sağlayan ϕ_i ler belirli determinantların oranıyla bulunur. Bu oranda (3.128) denklemi ile verilen $D_n(\lambda) \neq 0$ olması ile mümkündür. (3.128) denklemindeki $D_n(\lambda) \neq 0$ determinantı $(-\lambda h)$ ın kuvvetlerine göre açılırsa

$$D_n(\lambda) = 1 - \lambda h \sum_{v=1}^{n} K_{vv} + \frac{(-\lambda h)^2}{2!} \sum_{p,q=1}^{n} \begin{vmatrix} K_{pp} & K_{pq} \\ K_{qp} & K_{qq} \end{vmatrix} + \frac{(-\lambda h)^3}{3!} \sum_{p,q,r=1}^{n} \begin{vmatrix} K_{pp} & K_{pq} & K_{pr} \\ K_{qp} & K_{qq} & K_{qr} \\ K_{rp} & K_{rq} & K_{rr} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$+ \frac{(-\lambda h)^n}{n!} \sum_{p_1, p_2, \ldots, p_n = 1}^{n} \begin{vmatrix} K_{p_1 p_1} & K_{p_1 p_2} & \ldots & K_{p_1 p_n} \\ K_{p_2 p_1} & K_{p_2 p_2} & \ldots & K_{p_2 p_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{p_n p_1} & K_{p_n p_2} & \ldots & K_{p_n p_n} \end{vmatrix} \tag{3.130}$$

elde edilir. (3.129) denklemi,

$$\begin{vmatrix} K(s_1,t_1) & K(s_1,t_2) & \dots & K(s_1,t_n) \\ K(s_2,t_1) & K(s_2,t_2) & \dots & K(s_2,t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(s_n,t_1) & K(s_n,t_2) & \dots & K(s_n,t_n) \end{vmatrix} = K\begin{pmatrix} s_1,s_2,\dots,s_n \\ t_1,t_2,\dots,t_n \end{pmatrix} \tag{3.131}$$

notasyonu ile basitleştirilebilir. Bu determinanta Fredholm determinantı denir. Buradan, (3.131) yardımıyla,

$$D_n(\lambda) = 1 - \lambda h \sum_{p=1}^{n} K(s_p,s_p) + \frac{(-\lambda h)^2}{2!} \sum_{p,q=1}^{n} K\begin{pmatrix} s_p,s_q \\ s_p,s_q \end{pmatrix}$$

$$+\frac{(-\lambda h)^3}{3!} \sum_{p,q,r=1}^{n} K\begin{pmatrix} s_p,s_q,s_r \\ s_p,s_q,s_r \end{pmatrix} + \dots \tag{3.132}$$

elde edilir. $n \to \infty$ gitmesi halinde $h \to 0$ gidecektir. Bu sonuçla (3.132) denklemindeki her terim sırasıyla bir, iki, üç, v.b katlı integrallere yakınsar. Bu neticeyle Fredholm'un birinci serisi olan

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int K(s,s)ds + \frac{\lambda^2}{2!} \int\int K\begin{pmatrix} s_1,s_2 \\ s_1,s_2 \end{pmatrix} ds_1 ds_2$$

$$-\frac{\lambda^3}{3!} \int\int\int K\begin{pmatrix} s_1,s_2,s_3 \\ s_1,s_2,s_3 \end{pmatrix} ds_1 ds_2 ds_3 + \dots \tag{3.133}$$

elde edilir.

$D_n(\lambda) \to D(\lambda)$ limit halinde yakınsadığına dair güçlü bir ispat Hilbert tarafından verilmiştir. Bununla beraber λ nın tüm değerleri için (3.133) serisinin yakınsaklığı $K(x,t)$ nin sınırlı ve integrallenebilir olması halinde Fredholm tarafından verilmiştir. Sonuç itibariyle $D(\lambda)$, λ ya göre bir tam fonksiyondur. Bu özellikler itibariyle (3.122) Fredholm denkleminin çözümü verilebilir. Bu çözüm

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int \Gamma(x,t;\lambda) f(t)dt \tag{3.134}$$

olup çözücü çekirdek $\Gamma(x,t;\lambda)$ nın

$$\Gamma(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} \tag{3.135}$$

ile verilir. $D(x,t;\lambda)$ nında belirlenmesi gerekmektedir. Çözücü çekirdeğin Fredholm integral denkleminin ikinci tipini sağladığı bilinmektedir. Bu da,

$$\Gamma(x,t;\lambda) = K(x,t)D(\lambda) + \lambda \int K(x,y)D(y,t;\lambda)dy. \tag{3.136}$$

(3.135) ve (3.136) ile

$$D(x,t;\lambda) = K(x,t)D(\lambda) + \lambda \int K(x,y)D(y,t;\lambda)dy \tag{3.137}$$

elde edilir. $D(\lambda)$ için (3.132) serisi bize çözümün (3.137) biçiminde olduğunu yani çözüm,

$$D(x,t;\lambda) = C_o(x,t) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} C_p(x,t). \tag{3.138}$$

(3.132) nümerik serisi

$$D(\lambda) = c_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} c_p \tag{3.139}$$

ile verilir. Burada $c_0 = 1$ ve

$$c_p = \int \ldots \int K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ x_1, x_2, \ldots, x_p \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_p \tag{3.140}$$

denklemi ile verilir. (3.138) ve (3.139) denklemleri (3.137) denkleminde yerine yazılarak gerekli katsayılar karşılaştırılırsa

$$C_0(x,t) = K(x,t) \tag{3.141}$$

ve

$$C_p(x,t) = c_p K(x,t) - p \int K(x,y) C_{p-1}(y,t)dy \tag{3.142}$$

elde edilir. Ardışık yerleştirmelerden sonra

$$C_p(x,t) = \sum_{m=0}^{p} (-1)^m \frac{p!}{(p-m)!} C_{p-m} K_{m+1}(x,t). \tag{3.143}$$

Bu $C_p(x,t)$ (3.130) ifadesindeki Fredholm determinantı cinsinden yazılırsa

$$C_p(x,t) = \int \ldots \int K\begin{pmatrix} x, y_1, y_2, \ldots, y_p \\ t, y_1, y_2, \ldots, y_p \end{pmatrix} dy_1 \ldots dy_p. \tag{3.144}$$

Gerçekten, $p = 1$ için (3.142)

$$\begin{aligned} C_1(x,t) &= c_1 K(x,t) - \int K(x,y) C_0(y,t)dy \\ &= K(x,t)\int K(y,y)dy - \int K(x,y)K(y,t)dy \\ &= \int K\begin{pmatrix} x & y \\ t & y \end{pmatrix} dy. \end{aligned} \tag{3.145}$$

Burada, (3.140), (3.141) ve (3.142) denklemleri kullanıldı. (3.144) denkleminin herhangi bir p için geçerliliğini koruduğunu görmek için integral işareti altında determinantı açarak

$$K\begin{pmatrix} x, y_1, ..., y_p \\ t, y_1, ..., y_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,y_1) & ... & K(x,y_p) \\ K(y_1,t) & K(y_1,y_1) & ... & K(y_1,y_p) \\ ... & ... & ... & ... \\ K(y_p,t) & K(y_p,y_1) & ... & K(y_p,y_p) \end{vmatrix}$$

elde edilir. Yukarıdaki gerekli tanımlamalar kullanılarak özellikle (3.138), (3.141) ve (3.144) denklemleriyle

$$D(x,t;\lambda) = K(x,t) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \int ... \int K\begin{pmatrix} x, y_1, ..., y_p \\ t, y_1, ..., y_p \end{pmatrix} dy_1 ... dy_p \tag{3.146}$$

Fredholm'un ikinci serisi elde edilir. Bu seri λ nın tüm değerleri için yakınsaktır. (3.135) ve (3.146) serileri arasındaki benzerliği görmek ilginçtir. (3.140) ve (3.143) denklemlerinin karşılaştırılmasıyla

$$c_p = \int C_{p-1}(x,x)dx \tag{3.147}$$

elde edilir. (3.135) denklemindeki her iki oranın bulunmasıyla (3.122) integral denkleminin çözümü sınırlı ve integralenebilir bir $K(x,t)$ ve $D(\lambda) \neq 0$ ile bulunur. (3.135) denklemindeki her iki oran λ ya göre tam olduklarından çözücü çekirdek λ nın bir meramorfik fonksiyonudur. Yani çözücü çekirdek $D(\lambda) = 0$ yapan değerlerde singüler noktaya sahiptir.

Nihayet Fredholm ile ifade edilen ve (3.134) ile verilen çözümün tek olduğunu gösterelim. Bu bağlamda (3.136) integral denklemi $D(\lambda) \neq 0$ kılan ve λ nın tüm değerleri için çözücü çekirdek tarafından sağlandığı kolaylıkla gözlemlenebilir. Daha önceden $|\lambda| < B^{-1}$ olması halinde (3.136) denkleminin geçerliliği bilinmektedir. Çözümün tekliğini ispatlamak için $\phi(x)$, $D(\lambda) \neq 0$ olacak şekilde (3.122) denkleminin bir çözümü olsun. (3.122) denkleminin her iki tarafı $\Gamma(x,y;\lambda)$ ile çarpılır ve integre edilirse

$$\int \Gamma(x,y;\lambda)\phi(y)dy = \int \Gamma(x,y;\lambda) f(y)dy$$
$$+\lambda \int \left[\int \Gamma(x,y;\lambda) K(y,t) dy \right] \phi(t)dt. \tag{3.148}$$

(3.136) ile (3.148) kullanılırsa

$$\int K(x,t)\phi(t)dt = \int \Gamma(x,y;\lambda) f(y)dy \tag{3.149}$$

elde edilir. Bu ise,

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int \Gamma(x,t;\lambda) f(t)dt \tag{3.150}$$

bu yazılış biçiminin tek olduğunu gösterir. Özellikle

$$\phi(x) = \lambda \int K(x,t)\phi(t)dt \tag{3.151}$$

homojen denkleminin çözümü özdeş olarak sıfırdır.

Örnek 3.2.2.2.1:

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 (x+t)\phi(t)dt \tag{3.152}$$

integral denklem için resolvantı bulalım.

Çözüm: Bu örneğin çözümü

$$\Gamma(x,t;\lambda) = \frac{\left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} C_p(x,t)\right]}{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} c_p} \tag{3.153}$$

şeklinde yazılmasıyla elde edilir, burada C_p ve c_p (3.140) ve (3.142) bağıntılarıyla tanımlanmıştı.

$$c_0 = 1, \quad C_0(x,t) = K(x,t) = (x+t), \tag{3.154}$$

$$c_p = \int C_{p-1}(x,x)dx. \tag{3.155}$$

$$C_p = c_p K(x,t) - p\int_0^1 K(x,y) C_{p-1}(y,t)dy. \tag{3.156}$$

Dolayısıyla,

$$c_1 = \int_0^1 2xdx = 1,$$

$$C_1(x,t) = (x+t) - \int_0^1 (x+y)(y+t)dy = \frac{1}{2}(x+t) - xt - \frac{1}{3},$$

$$c_2 = \int_0^1 \left(x - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = -\frac{1}{6},$$

$$C_2(x,t) = -\frac{1}{6}(x+t) - 2\int_0^1 (x+y)\left[\frac{1}{2}(y+t) - yt - \frac{1}{3}\right]dy = 0.$$

$C_2(y,t)$ sıfırlandığından dolayı (3.156) denkleminden sonuç olarak C_k ve c_k katsayıları da sıfırlanır. Böylece,

$$\Gamma(x,t;\lambda)=\frac{(x+t)-\left[\frac{1}{2}(x+t)-xt-\frac{1}{3}\right]\lambda}{1-\lambda-\left(\frac{\lambda^2}{12}\right)}. \tag{3.157}$$

Bu sonuç farklı bir metotla daha önce (3.8) olarak bulunmuştu.

Örnek 3.2.2.2.2: Reel λ değerleri için $D(x,t;\lambda)$ nın

$$D(\lambda)\frac{\partial D(x,t;\lambda)}{\partial\lambda}=D^{'}(\lambda)D(x,t;\lambda)+\int D(x,y;\lambda)D(y,t;\lambda)dy \tag{3.158}$$

integro-diferansiyel denklemini sağladığını gösterelim.

İspat: Eğer λ eigen değer değilse,

$$\Gamma(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$$

bağıntısından

$$D(x,t;\lambda)=D(\lambda)\Gamma(x,t;\lambda). \tag{3.159}$$

Dolayısıyla,

$$\frac{\partial D(x,t;\lambda)}{\partial(\lambda)}=D(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\Gamma(x,t;\lambda)+D'(\lambda)\Gamma(x,t;\lambda).$$

Bu denklemin her iki tarafı $D(\lambda)$ ile çarpılır ve (3.160) formülü kullanılırsa, şöyle ki

$$\frac{\partial\Gamma(x,t;\lambda)}{\partial\lambda}=\int\Gamma(x,y;\lambda)\Gamma(y,t;\lambda)dy$$

ve (3.159) denklemi ile (3.158) elde edilir.

3.2.2.3. Fredholm ikinci teoremi

Teorem 3.2.2.3.1: λ_0 katlılığı m olan $D(\lambda)$ nın bir sıfırı olsun. Bu taktirde,

$$\phi(x)=\lambda_0\int K(x,t)\phi(t)dt$$

homojen denklemi en az bir en çok m tane özdeş olarak sıfır olmayan $\phi_i(x)$ lineer bağımsız çözümlere sahiptir. Bu çözümler,

$$\phi_i(x) = D_r\left(\begin{matrix} x_1,...,x_{i+1},...,x_r \\ t_1,....,t_{i+1},...,t_r \end{matrix}\middle|\lambda_0\right), \quad i=1,2,...,r \quad \text{ve} \quad 1 \le r \le m$$

ile verilir. Bu denklemin diğer çözümü $\phi_i(x)$ lerin lineer kombinasyonudur. İspat etmeden önce bazı irdelemeler yapılabilir.

Fredholm'un birinci teoremi $D(\lambda)=0$ olması halinde geçerli değildir. Yani λ, $D(\lambda)$ nın bir kökü ise Fredholm birinci teoremi geçerli değildir. Çekirdeğin dejenere olması halinde (3.160) homojen denkleminin nontrivial çözümlere sahip olduğu bilinmektedir. Aynı düşüncenin keyfi integrallenebilir bir çekirdek içinde geçerli olduğu beklenebilir. Bu halde eigen değerleri oluşturan spektrum bunlara karşılık gelen eigen fonksiyonlar elde edilir. Fredholm ikinci teoremi bu çalışmanın ekseninde odaklanmıştır.

İspat: İspatı adım adım yapalım.

1. Adım: İlk olarak $D(\lambda)$ nın her sıfırı (3.159) çözücü çekirdeğin bir kutup noktası olduğunu gösterelim. Bu kutup noktasının mertebesi en fazla $D(\lambda)$ nın mertebesine eşittir. Gerçekten, Fredholmun birinci serisi olan

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \int ... \int K\left(\begin{matrix} y_1,...,y_p \\ y_1,...,y_p \end{matrix}\right) dy_1...dy_p \tag{3.160}$$

denklemi türevlenir, integral değişkenlerinin indisleri değiştirilirse

$$D'(\lambda) = -\int D(x,x;\lambda)dx. \tag{3.161}$$

Bu bağıntıdan λ_0, $\mathrm{D}(\lambda)$ nın k. mertebeden bir sıfırı olsun. Bu halde λ_0, $\mathrm{D}'(\lambda)$ nın $(k-1)$. mertebeden sıfırıdır ve bunu takiben λ_0, $\mathrm{D}(x,t;\lambda)$ tam fonksiyonun en fazla $(k-1)$. mertebeden sıfırı olur. Sonuç olarak λ_0 çözücü çekirdeğin en fazla k. mertebeden kutup noktasıdır. Özellikle λ_0, $\mathrm{D}(\lambda)$ nın basit bir sıfırı olsun bu halde $D(\lambda_0)=0$ ve $D'(\lambda_0) \neq 0$. Böylelikle λ_0 çözücü çekirdeğin basit kutup noktası olur. Üstelik (3.161) denkleminde $\mathrm{D}(x,t;\lambda_0) \neq 0$ olur. Bu özel durum için (3.137) denkleminden eğer $D(\lambda)=0$ ise $D(x,t;\lambda) \neq 0$. Bu durumda x in fonksiyonu olan $D(x,t;\lambda)$, $\phi(x) = \lambda_0 \int K(x,t)\phi(t)dt$ homojen denkleminin bir çözümü olur. Bu bilgi ışığında λ keyfi bir sabit ise $\alpha D(x,t;\lambda)$ da bir çözümdür.

2. Adım: Şimdide λ nın katlılığı m olan genel durumu ele alalım. Yani,

$$D(\lambda_0)=0,....,D^{(r)}(\lambda_0)=0,\ D^{(m)}(\lambda_0)\neq 0 \tag{3.162}$$

burada, $D^{(r)}(\lambda_0)$ r defa λ ya göre türevinin λ_0 da ki değeri demektir. Fredholm minörleri olarak bilinen determinant kullanılırsa bu durum basitleştirilebilir.

$$D_n\left(\begin{matrix}x_1,x_2,...,x_n\\ t_1,t_2,...,t_n\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)=K\left(\begin{matrix}x_1,x_2,...,x_n\\ t_1,t_2,...,t_n\end{matrix}\right)+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^p}{p!}$$

$$\int...\int K\left(\begin{matrix}x_1,...,x_n,y_1,...,y_p\\ t_1,...,t_n,y_1,...,y_p\end{matrix}\right)dy_1dy_2...dy_p\ . \tag{3.163}$$

Burada, $\{s_i\}$ ve $\{t_i\}$ $i=1,2,...,n$ iki değişkenli dizilerdir. Şimdi,

$$D(x,t;\lambda)=K(x,t)+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^p}{p!}\int...\int K\left(\begin{matrix}x,y_1,...,y_p\\ t,y_1,...,y_p\end{matrix}\right)dy_1...dy_{p,}$$

$$D(\lambda)=1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^p}{p!}\int...\int K\left(\begin{matrix}y_1,...,y_p\\ y_1,...,y_p\end{matrix}\right)dy_1...dy_{p,}$$

Fredholm serileri yakınsak olduğu gibi (3.163) serisi de tüm λ değerleri için yakınsaktır. Sonuç olarak λ nın bir tam fonksiyonudur. Üstelik

$$D(\lambda)=1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^p}{p!}\int...\int K\left(\begin{matrix}y_1,...,y_p\\ y_1,...,y_p\end{matrix}\right)dy_1...dy_p$$

denklemi n defa türetilir ve (3.163) serisi ile karşılaştırılırsa

$$\frac{d^nD(\lambda)}{d\lambda^n}=(-1)^n\int...\int D_n\left(\begin{matrix}x_1,...,x_n\\ x_1,...,x_n\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)dx_1...dx_n \tag{3.164}$$

denklemi elde edilir. Bu bağıntıdan aşağıdaki sonuç çıkarılabilir. Eğer λ_0 katlılığı m olan $D(\lambda)$ nın bir sıfırı ise mertebesi sıfır olan Fredholm minörünün determinantı

$$D_m\left(\begin{matrix}x_1,x_2,...,x_m\\ t_1,t_2,...,t_m\end{matrix}\middle|\,\lambda_0\right)\neq 0.$$

Nihayetinde özdeş olarak sıfır olmayan ve mertebesi m den küçük olan minörler olabilir. (3.136) çözücü çekirdeğine karşılık gelen minörler arasındaki bağıntıyı bulalım. (3.163) denkleminin integral işareti altında ki determinantının açılımı

$$\begin{vmatrix} K(x_1,t_1) & K(x_1,t_2) & ... & K(x_1,t_n) & K(x_1,y_1) & ... & K(x_1,y_p) \\ K(x_2,t_1) & K(x_2,t_2) & ... & K(x_2,t_n) & K(x_2,x_1) & ... & K(x_2,y_p) \\ ... \\ K(x_n,t_1) & K(x_n,t_2) & ... & K(x_n,t_n) & K(x_n,y_1) & ... & K(x_n,y_p) \\ K(y_1,t_1) & K(y_1,t_2) & ... & K(y_1,t_n) & K(y_1,t_1) & ... & K(y_1,y_p) \\ ... \\ K(y_p,t_1) & K(y_p,t_2) & ... & K(y_p,t_n) & K(y_p,x_1) & ... & K(y_p,y_p) \end{vmatrix} \tag{3.165}$$

şeklindedir. $p \geq 1$ olacak şekilde p defa integre edilirse

$$\int ... \int K\begin{pmatrix} x_1,...,x_n,y_1,...,y_p \\ t_1,...,t_n,y_1,...,y_p \end{pmatrix} dy_1...dy_p$$

$$= \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+1} K(x_1,t_h)$$

$$\int ... \int K\begin{pmatrix} x_2,...,x_k..., \quad x_n,y_1,...,y_p \\ \mathrm{t}_1,...,t_{h-1},t_{h+1},...,t_n,y_1,...y_p \end{pmatrix} dy_1 dy_2 ... dy_p + \sum_{h=1}^{p} (-1)^{h+n-1}$$

$$\int ... \int K(x_1,y_h) K\begin{pmatrix} x_2,..., \quad x_n,y_1,y_2,...,y_h,...,y_p \\ t_1,...,t_{n-1},t_n,y_1,...,y_{h-1},y_{h+1},...,y_p \end{pmatrix} dy_1...dy_p \tag{3.166}$$

elde edilir.

$$\int ... \int K\begin{pmatrix} x_1,...,x_n,y_1,...,y_p \\ t_1,...,t_n,y_1,...,y_p \end{pmatrix} dy_1...dy_p$$

$$= \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+1} K(x_1,t_h)$$

$$\int ... \int K\begin{pmatrix} x_2,..., \quad x_n,y_1,...,y_p \\ \mathrm{t}_1,...,t_{h-1},t_{h+1},...,t_n,y_1,...y_p \end{pmatrix} dy_1...dy_p$$

$$-p\int K(x_1,y)\left[\int ... \int K\begin{pmatrix} x,x_2,...,x_n,y_1,...y_{p-1} \\ t_1,t_2,...,t_n,y_1,...,y_{p-1} \end{pmatrix} dy_1...dy_{p-1}\right] dy\,. \tag{3.167}$$

(3.167) denklemi (3.166) denkleminde yazılırsa Fredholm minörü (determinantı)

$$D_n\left(\begin{matrix} x_1,...,x_n \\ t_1,...,t_n \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+1} K(x_1,t_h) D_{n-1}\begin{pmatrix} x_2,... \quad ,x_n \\ t_1,...,t_{h-1},t_{h+1},t_n \end{pmatrix}$$

$$+\lambda \int K(x_1,x) D_n\left(\begin{matrix} y_1,y_2,...,x_n \\ t_1,t_2,...,t_n \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) dy \tag{3.168}$$

denklemini sağlar. Benzer şekilde (3.165) denkleminin birinci sütunu için aynı işlemler yapılırsa

$$D_n\left(\begin{matrix} x_1,\ldots,x_n \\ t_1,\ldots,t_n \end{matrix}\middle|\lambda\right)=\sum_{h=1}^{n}(-1)^{h+1}K(x_h,t_1)D_{n-1}\left(\begin{matrix} x_1,\ldots,x_{h-1},x_{h+1},\ldots,x_n \\ t_2,\ldots\qquad\qquad ,t_n \end{matrix}\right)$$

$$+\lambda\int K(y,t_1)D_n\left(\begin{matrix} x_1,\ldots\quad ,x_n \\ y,t_2,\ldots,t_n \end{matrix}\right)dy. \qquad (3.169)$$

Benzer sonuç diğer sütunlara da uygulanarak aynı sonuçlar elde edilir. (3.168) ve (3.169) formülleri daha önce ifade edilen Fredholm serilerinin sahip olduğu role sahiptir.

(3.168) ve (3.169) bağıntıları λ nın bütün değerleri için geçerlidir. (3.168) yardımıyla $\lambda=\lambda_0$ eigen değeri için homojen denkleminin çözümü bulunabilir. Bunu sonuçlandırmak için $\lambda=\lambda_0$ katlılığı m olan $D(\lambda)$ fonksiyonun bir sıfırı olsun. Bu halde önceden belirtildiği gibi D_m özdeş olarak sıfır olmayabilir. D_r minörü $D_1,\ D_2,\ldots,\ D_{m-1}$ dizisinde özdeş olarak sıfır olmayan ilk minör olsun. Burada $1\le r\le m$ olup λ_0 eigen değerin indeksidir. Üstelik $D_{r-1}=0$ fakat (3.168) integral denklemi

$$\phi_1(x)=D_r\left(\begin{matrix} x_1,x_2,\ldots,x_r \\ t_1,t_2,\ldots,t_r \end{matrix}\middle|\lambda_0\right) \qquad (3.170)$$

denklemini gerektirir. Burada $\phi_1(x)$, homojen denkleminin çözümüdür. Burada D_r minöründeki x in farklı değerleri için trivial olmayan homojen denkleminin $\phi_i(x)$, $i=1,2,\ldots,r$ çözümleri vardır. Bu çözümler genellikle

$$\Phi_i(x)=\frac{\left(\begin{matrix} x_1,\ldots,x_{i-1},x,x_{i+1},\ldots,x_r \\ t_1\ldots\qquad t_r \end{matrix}\middle|\lambda_0\right)}{\left(\begin{matrix} x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_r \\ t_1,\ldots\quad ,t_r \end{matrix}\middle|\lambda_0\right)},\qquad i=1,2,\ldots,r \qquad (3.171)$$

ile verilir. Burada (3.171) ile verilenler aşağıdaki sebepten dolayı lineer bağımsızdırlar. (3.165) determinantında $\Phi_i(x)$ eğer iki değişkende de x_i eşit ise iki satır eşit olur ve sonuç olarak determinant sıfır olur. Böylece, (3.171) denkleminde

$$\Phi_k(x_i)=\begin{cases}0, & i\neq k\\ 1, & i=k\end{cases}$$

olduğu görülür. Eğer, $\sum C_k \Phi_k \equiv 0$ bağıntısı varsa $x = s_i$ alınarak $C_i \equiv 0$ olduğu görülür. Bu ise çözümlerin lineer bağımsız olduğunu garantiler. Bu Φ_i çözümler sistemi λ_0 eigen değerine karşılık gelen eigen fonksiyonlarının temel sistemi olarak bilinir. Bu eigen fonksiyonların herhangi bir lineer kombinasyonu homojen denkleminin çözümünü verir. Tersine homojen denklemin çözümünün $\sum_{i=1}^{r} C_i \Phi_i = 0$ olduğunu verir. Bunun için $\Gamma(x,t;\lambda)$ çözücü çekirdeğine karşılık gelen $H(x,t;\lambda)$ çekirdeğini

$$H(x,t;\lambda) = \frac{D_{r+1}\left(\begin{matrix} x, x_1, \ldots, x_r \\ t, t_1, \ldots, t_r \end{matrix}\middle| \lambda_0\right)}{\left(\begin{matrix} x_1, \ldots, x_r \\ t_1, \ldots, t_r \end{matrix}\middle| \lambda_0\right)} \tag{3.172}$$

ile tanımlayalım. (3.169) denkleminde $n = r$ alınırsa ve ekstra x ve t argümentleri eklenirse

$$\begin{aligned} D_{r+1}\left(\begin{matrix} x, x_1, \ldots, x_r \\ t, t_1, \ldots, t_r \end{matrix}\middle| \lambda_0\right) &= K(x,t) D_r \left(\begin{matrix} x_1, \ldots, x_r \\ t_1, \ldots, t_r \end{matrix}\middle| \lambda_0\right) \\ &+ \sum_{h=1}^{r} (-1)^h K(x_h, y) D_r \left(\begin{matrix} x, x_1, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_r \\ t_1, t_2, \ldots, \qquad t_r \end{matrix}\middle| \lambda_0\right) \\ &+ \lambda_0 \int K(y,t) D_{r+1}\left(\begin{matrix} x, x_1, \ldots, x_r \\ y, t_1, \ldots, t_r \end{matrix}\middle| \lambda_0\right) dy \end{aligned} \tag{3.173}$$

denklemi elde edilir. (3.173) denkleminde her D_r minöründe x değişkenini x_{h-1} ve x_{h+1} değişkenleri arasındaki bir yere transpoze edilirse ve denklemin her iki tarafı

$$D_r \left(\begin{matrix} x_1, \ldots, x_r \\ t_1, \ldots, t_r \end{matrix}\middle| \lambda_0\right) \neq 0$$

ile bölünürse

$$\begin{aligned} H(x,t;\lambda) - K(x,t) - \lambda_0 \int H(x,y;\lambda) K(y,t) dy \\ = -\sum_{h=1}^{r} K(x_h,t) \Phi_h(x). \end{aligned} \tag{3.174}$$

Eğer $\phi(x)$, homojen denklemin bir çözümü ise (3.174) denklemi $\phi(t)$ ile çarpılır ve t e göre integre edilirse

$$\int \phi(t)H(x,t;\lambda)dt - \frac{\phi(x)}{\lambda_0} - \int \phi(y)\Gamma(x,y;\lambda)dy$$

$$= -\sum_{h=1}^{r} \frac{\phi(x_h)}{\lambda_0}\Phi_h(x) \qquad (3.175)$$

elde edilir. Kısaca $\phi(x_h) = \lambda_0 \int K(x_h,t)\phi(t)dt$. Eşit terimler yok edildikten sonra

$$\phi(x) = \sum_{h=1}^{r} \phi(x_h)\Phi_h(x) \qquad (3.176)$$

3.2.2.4. Fredholm üçüncü teoremi

Fredholm birinci teoreminin analizinde

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int K(x,t)\phi(t)dt \qquad (3.177)$$

homojen olmayan integral denklemi $D(\lambda) \neq 0$ olması halinde bir tek çözüme sahip olduğu gösterildi. Fredholm ikinci teoremi ise

$$\phi(s) = \lambda \int K(s,t)\phi(t)dt$$

homojen denklemi $D(\lambda) = 0$ olması halinde çalışıldı.

Bu kısımda ise (3.177) denkleminin $D(\lambda) = 0$ olması halinde de çözüme sahip olduğu araştırılacaktır. Bunun için gerekli olan analiz deforme edilmiş çekirdek için yapılan analizden çok farklı değildir. Gerçekten tek fark (3.177) denklemi için tam bir formül verilecektir. İçerik olarak tartışma aynıdır.

Teorem 3.2.2.4.1:

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int K(x,t)\phi(t)dt$$

denklemi için $D(\lambda_0) = 0$ olması halinde de

$$\phi(x) = f(x) + \lambda_0 \int K(x,t)\phi(t)dt$$

homojen olmayan denklemi çözüme sahiptir. Çözümün olabilmesi için gerek ve yeter şart λ_0 eigen değerine karşılık gelen transpoz homojen denkleminin tüm

$\psi_i(x),\ \ i=1,2,...,r$ eigen fonksiyonları $f(x)$ fonksiyonuna ortogonal olmasıdır. Bu genel çözüm

$$\phi(x)=f(x)+\lambda_0\int\frac{\left[D_{r+1}\left(\begin{matrix}x,x_1,x_2,...,x_r\\ t,t_1,...\quad ,t_r\end{matrix}\middle|\lambda_0\right)\right]}{D_r\left(\begin{matrix}x_1,x_2,...,x_r\\ t_1,...\quad ,t_r\end{matrix}\middle|\lambda_0\right)}f(t)dt+\sum_{h=1}^{r}C_k\Phi_h(x)$$

şeklindedir.

İspat: (3.177) denkleminin transpozu (adjointi)

$$\psi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(t,x)\psi(t)dt \qquad a\le x\le b. \tag{3.178}$$

Bu transpoz denklem için

$$D(\lambda)=1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^p}{p!}\int...\int K\begin{pmatrix}y_1,...,y_p\\ y_1,...,y_p\end{pmatrix}dy_1...dy_p$$

ile verilen Fredholm'un birinci serisi ile aynıdır. Halbuki, Fredholm ikinci serisi olan

$$D(x,t;\lambda)=K(x,t)+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^p}{p!}\int...\int K\begin{pmatrix}x,y_1,...,y_p\\ t,y_1,...,y\end{pmatrix}dy_1...dy_p$$

denkleminde x ve t nin rolleri değiştirilir. Bu ise (3.177) denklemine ve (3.178) transpoz denklemine ait çekirdeklerin aynı eigen değerlere sahip olması demektir. Üstelik, (3.178) çözücü çekirdek

$$\Gamma(t,x;\lambda)=\frac{D(t,x;\lambda)}{D(\lambda)} \tag{3.179}$$

ile verilir. Bu sebeple (3.178) denkleminin çözümü λnın eigen değer olmaması halinde

$$\psi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\left[\frac{D(t,x;\lambda)}{D(\lambda)}\right]f(t)dt \tag{3.180}$$

ile verilir. Transpoz çekirdeği ile orjinal çekirdeğin sadece aynı eigen değerlere sahip olması değil aynı zamanda eigen değerlerin indeksi aynıdır.

Üstelik, λ_0 eigen değerine karşılık gelen transpoz denklemin eigen fonksiyonları

$$\psi_i(t)=\frac{D_r\begin{pmatrix} x_1,\dots & ,x_r \\ t_1,\dots,t_{i-1},t,t_{i+1},\dots,t_r \end{pmatrix}\lambda_0}{D_r\begin{pmatrix} x_1,\dots & ,x_r \\ t_1,\dots,t_{i-1},t_i,t_{i+1},\dots,t_r \end{pmatrix}\lambda_0} \tag{3.181}$$

ile verilir. Burada $(x_1,x_2,\dots,x_r)$ ve $(t_1,t_2,\dots,t_r)$ payda sıfır olmayacak şekilde seçilir. Bu formülde her farklı r değeri için lineer bağımsız r eigen fonksiyon sistemi elde edilir. Burada $\psi(x)$ ile ϕ_i farklı eigen değerle birbirine ortogonaldir. $\phi(x)$, (3.177) denkleminin bir çözümü olsun. (3.177) denklemi $\psi_k(x)$ ile çarpılır ve integre edilirse

$$\int f(x)\psi_k ds=\int\phi(x)\psi_k(x)dx-\lambda\int\int K(x,t)\phi(t)\psi_k(x)dxdt$$

$$=\int\phi(x)dx\Big[\psi_k(x)-\lambda\int K(x,t)\psi_k(t)dt\Big]=0 \tag{3.182}$$

elde edilir.

$\psi_k(x)$ transpoz denklemi eigen fonksiyon olduğundan köşeli parantez içindeki ifade sıfırdır. Buradan da şu çıkarım yapılabilir. (3.177) denkleminin çözüme sahip olması için gerekli şart homojenliği bozan yani homojen olmayan $f(x)$ terimi transpoz homojen denkleminin her çözümüne dik (ortogonal) olması gerekir. Tersine (3.182) diklik şartının çözüm için yeterli bir şart olduğu gösterilir. Gerçekten bu durumda tam çözüm verilebilir. Bu amaçla (3.172) denkleminde $H(x,t;\lambda)$ çözücü çekirdeğinde $D_r\neq 0$ ve r, λ_0 indeksli eigen değerine sahip olsun. Eğer ortogonallik şartı sağlanırsa

$$\phi_0(x)=f(x)+\lambda_0\int H(x,t;\lambda)f(t)dt \tag{3.183}$$

çözümdür. Gerçekten bu çözüm (3.177) denkleminde yazılırsa

$$f(x)+\lambda_0\int H(x,t;\lambda)f(t)dt=f(x)+\lambda_0\int K(x,t)$$

$$\Big[f(t)+\lambda_0\int H(t,y;\lambda)f(y)dy\Big]dt$$

veya

$$\int f(t)dt\Big[H(x,t;\lambda)-K(x,t)-\lambda_0\int K(x,y)H(y,t;\lambda)dy\Big]=0 \tag{3.184}$$

bulunur. (3.174) denklemindeki düşünceye benzer olarak transpozda

$$\Big[H(x,t;\lambda)-K(x,t)-\lambda_0\int K(x,y)H(y,t;\lambda)dy\Big]$$

$$= -\sum_{h=1}^{r} K(x,t_h)\psi_h(t) \tag{3.185}$$

denklemi ile elde edilir. Bu (3.185) denklemi (3.184) denkleminde yazılarak ortogonallik şartı ile beraber özdeşlik elde edilir. (3.177) denklemini sağlayan iki çözümün farkı homojen denkleminin çözümü olacaktır. Böylece (3.177) denkleminin en genel çözümü

$$\phi(x) = f(x) + \lambda_0 \int H(x,t;\lambda) f(t)dt + \sum_{h=1}^{r} C_h \Phi_h(x) \tag{3.186}$$

biçimindedir.

3.2.4. Hilbert–Schmidt teorisi

$$\langle K\phi,\psi\rangle = \langle \phi, K\psi\rangle \tag{3.224}$$

bu bölümde (3.224) denklemini sağlayan self-adjoint (Hermitian) K integral operatörünü ele alalım. Burada, ϕ ve ψ Hilbert uzayında kare integralenebilir fonksiyonlardır. Burada, Hilbert ve Schmidt tarafından geliştirilen teori anlatılacaktır. Yani, $\Gamma(x,s;\lambda)$ çözücü çekirdeği $K(x,s)$ Hermitian çekirdeğinin λ_v eigen değerlerine karşılık gelen ϕ_v eigen fonksiyonlarının açılımı cinsinden yazılacaktır.

3.2.4.1. Hermitian çekirdekleri

Hilbert ve Schmidt teorisi başlangıçta $K(s,x)=K(x,s)$ reel simetrik çekirdeğini analiz ettiler. Fakat bunun genel hali olan $K(x,s)$nin reel olmadığı

$$K(x,s)=\overline{K(s,x)} \tag{3.225}$$

Hermitian çekirdeklerini ele alalım.

$$K=\int_a^b K(x,s)ds \tag{3.226}$$

integral operatörü Hermitiandır, çünkü (3.224) ifadesini sağlar. (3.224) eşitliğinden $\langle K\psi,\psi\rangle = \langle \psi, K\psi\rangle = \overline{\langle K\psi,\psi\rangle}$ ve böylece $\langle K\psi,\psi\rangle$ tüm kare integrallenebilir ψ fonksiyonları için reeldir. Kısaca kare integrallenebilir Hermitian çekirdeğine ise Hilbert-Schmidt çekirdeği denir.

3.2.4.2. Hilbert-Schmidt çekirdeğinin spektrumu

Kare integrallenebilir Hilbert-Schmidt çekirdeğinin spektrumunu veya eigen değerlerinin kümesini araştıralım.

Boştan farklı her Hilbert-Schmidt çekirdekli K operatörünün en az bir λ_1 eigen değerine sahip olduğunu görelim. Şimdi K Hermitian olduğundan (3.224) ifadesinden K^n de Hermitiandır. Şimdi $K(x,s)$ çekirdekli integral operatörünün izi (trace) ile ilgili tanım kullanılırsa

$$\begin{aligned}\kappa_{2n} &= trace(K^n K^n)\\ &= \int_a^b\int_a^b K_n(x,s)K_n(s,x)dsdx\\ &= \int_a^b\int_a^b K_n(x,s)\overline{K_n(x,s)}dsdx\\ &= \left\|K^n\right\|_2^2 \end{aligned} \tag{3.227}$$

elde edilir. Böylece $\left\|K^n\right\|_2 \le \left\|K\right\|_2^n$ ve $K(x,s)$ kare integrallenebilir olduğundan $\kappa_{2n} \ge 0$. Çift katlı integraller için Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\kappa_{2n}^2 &= \left\{trace(K^{n-1}K^{n+1})\right\}^2 = \left\{\int_a^b\int_a^b K_{n-1}(x,s)K_{n+1}(s,x)dsdx\right\}^2\\ &\le \left\{\int_a^b\int_a^b \left|K_{n-1}(x,s)\right|^2 dsdx\right\}\left\{\int_a^b\int_a^b \left|K_{n+1}(x,s)\right|^2 dsdx\right\}\\ &= \kappa_{2n-2}\kappa_{2n+2} \qquad (n\ge 2)\end{aligned} \tag{3.228}$$

elde edilir. K boş olmayan bir operatör ve $\kappa_2 > 0$ olduğundan $\left\|K\right\|_2 > 0$ dır. Üstelik, $\kappa_4 > 0$ dır. Eğer $\kappa_4 = 0$ olsaydı hemen hemen heryerde $K_2(x,s) = 0$ olurdu ve özellikle $K_2(s,s) = 0$ ve $\kappa_2 = 0$ olur. $\kappa_2 > 0$ ve $\kappa_4 > 0$ olduğundan (3.228) ifadesinden tüm n ler için $\kappa_{2n} \ge 0$ olur ve

$$\frac{\kappa_{2n+2}}{\kappa_{2n}} \ge \frac{\kappa_{2n}}{\kappa_{2n-2}} \ge \dots \ge \frac{\kappa_4}{\kappa_2}. \tag{3.229}$$

Şimdi $u_n = \kappa_{2n}\left|\lambda\right|^{2n-1}$ alınırsa $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\lambda\right|^2 \dfrac{\kappa_{2n+2}}{\kappa_{2n}} \ge \left|\lambda\right|^2 \dfrac{\kappa_4}{\kappa_2}$ elde edilir. Eğer $\left|\lambda\right| > \sqrt{\dfrac{\kappa_2}{\kappa_4}}$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisi ıraksaktır. Fakat $\left|\lambda\right|$ nın yeterince küçük olması halinde $\sum_{n=0}^{\infty} \kappa_{n+1}\lambda^n$ yakınsaktır. Bu serinin yakınsaklık yarıçapı $\left|\lambda_1\right|$ olup bu halde, $\left|\lambda\right| < \left|\lambda_1\right|$ için $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

serisi yakınsaktır. $|\lambda| > \sqrt{\dfrac{\kappa_2}{\kappa_4}}$ için serinin ıraksak olduğundan en az bir λ_1 eigen değerinin olduğu çıkarımı yapılabilir. $|\lambda_1| \leq \sqrt{\dfrac{\kappa_2}{\kappa_4}}$.

$K(x,s)$ Hermitian çekirdeğinin tüm eigen değerleri reeldir.

$$\lambda K\phi = \phi$$

olsun. Burada ϕ, λ eigen değerine karşılık gelen sıfırdan farklı eigen fonksiyon olsun. Bu halde

$$\langle K\phi,\phi\rangle = \langle \lambda^{-1}\phi,\phi\rangle = \lambda^{-1}\langle \phi,\phi\rangle$$

olur ve $\langle K\phi,\phi\rangle$ ve $\langle \phi,\phi\rangle$ reel ve sıfırdan farklı olduğundan λ da reel olur.

$K(x,s)$ Hermitian çekirdeğinin farklı eigen değerlerine karşılık gelen eigen fonksiyonlar ortogonaldir. K Hermitian ve λ reel olduğundan

$$\langle \phi_1,\phi_2\rangle = \langle \lambda_1 K\phi_1,\phi_2\rangle = \lambda_1\langle K\phi_1,\phi_2\rangle$$

$$\langle \phi_1,\phi_2\rangle = \langle \phi_1,\lambda_2 K\phi_2\rangle = \lambda_2\langle K\phi_1,\phi_2\rangle.$$

Buradan da, $(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1})(\phi_1,\phi_2) = 0$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan $\langle \phi_1,\phi_2\rangle = 0$ dır.

Şimdi de λ_1 eigen değerine karşılık gelen ortonormal (normalleştirilmiş) eigen fonksiyon ϕ_1 olsun.

$$K^{(2)}(x,s) = K(x,s) - \frac{\phi_1(x)\overline{\phi_1(s)}}{\lambda_1} \tag{3.230}$$

Hermitian çekirdeğini ele alalım. Eğer $K^{(2)}(x,s) \neq 0$ ise önceki muhakemeden en az bir eigen değere sahiptir. Bu eigen değer λ_2 ve karşılık gelen eigen fonksiyonda ϕ_2 olsun.

$$\int_a^b K^{(2)}(x,s)\phi_1(s)ds = \int_a^b K(x,s)\phi_1(s)ds - \frac{\phi_1(x)}{\lambda_1} = 0$$

olduğundan ϕ_1, $K^{(2)}(x,s)$ çekirdeğinin bir eigen fonksiyonu olamaz. $\lambda_1 = \lambda_2$ olması ihtimaline rağmen $\phi_1 = \phi_2$ dir. Bu işleme devamla bir n sayısı vardır öyle ki,

$$K^{(n+1)}(x,s) = K(x,s) - \sum_{v=1}^{n} \frac{\phi_v(x)\overline{\phi_v(s)}}{\lambda_v} \equiv 0$$

ve bu durumda da,

$$K(x,s)=\sum_{v=1}^{n}\frac{\phi_v(x)\overline{\phi_v(s)}}{\lambda_v}. \qquad (3.231)$$

Ya da sonsuz sayıda λ_v eigen değerleri vardır ve bunlara karşılık gelen eigen fonksiyonlarda ϕ_v olsun. $K(x,s)$ Hermitian çekirdeğine Bessel eşitsizliği uygulanırsa,

$$\int_a^b |K(x,s)|^2 ds \geq \sum_{v=1}^{n}\left|\int_a^b K(x,s)\phi_v(s)ds\right|^2 = \sum_{v=1}^{n}\frac{|\phi_v(x)|^2}{\lambda_v^2} \qquad (3.232)$$

elde edilir. ϕ_v ler normalleştirilmiş olduğundan

$$\|K\|_2^2 \geq \sum_{v=1}^{n}\frac{1}{\lambda_v^2}. \qquad (3.233)$$

Böylece, $v=1,2,...,n$ için $|\lambda_v|<c$ ise $n\leq c^2\|K\|_2^2$. Sonuç olarak $(-c,c)$ açık aralığında sonlu sayıda eigen değerler vardır. Dolayısıyla, eigen değerlerin spektrumu sayılabilir ve yığılma noktasına sahip değildir.

$|\lambda_1|\leq|\lambda_2|\leq...$ olsun, λ_v eigen değerinin rankı p olsun. Dolayısıyla, bu yukarıdaki seride p defa tekrar eder ve λ_v değerlerine p tane lineer bağımsız ortonormalleştirilmiş eigen fonksiyonları vardır. Bu eigen fonksiyonların tam olma gerekliliği yoktur.

3.2.4.3. Açılım teoremleri

$$S_n(x,s)=\sum_{v=1}^{n}\frac{\phi_v(x)\overline{\phi_v(s)}}{\lambda_v} \qquad (3.234)$$

serisi $n\to\infty$ için yakınsak olmayabilir fakat bu serinin $K(x,s)$ye mean (ortalanabilir) kare yakınsak olduğu söylenebilir. Yani,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\int_a^b |K(x,s)-S_n(x,s)|^2 dxds = 0. \qquad (3.235)$$

Şimdi Riesz-Fischer teoreminden kare integrallenebilir $\Phi(x,s)$ Hermitian çekirdeği vardır öyle ki,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \left|\Phi(x,s)-S_n(x,s)\right|^2 ds = 0 \qquad (a \le x \le b) \tag{3.236}$$

ve

$$\int_a^b \Phi(x,s)\phi_v(s)ds = \frac{\phi_v(x)}{\lambda_v} \qquad (v = 1,2,...) \tag{3.237}$$

(3.232) ve $K(x,s)$ kare integrallenebilir olduğundan

$$\sum_{v=1}^{n}\frac{\left|\phi_v(x)\right|^2}{\lambda_v^2} \le \int_a^b \left|K(x,s)\right|^2 ds < \infty . \tag{3.238}$$

$$P(x,s) = K(x,s) - \Phi(x,s) \tag{3.239}$$

olsun.

$$\int_a^b P(x,s)\phi_v(s)ds = 0 \qquad (v = 1,2,...) \tag{3.240}$$

kolaylıkla elde edilir, çünkü $\Phi(x,s)$ Hermitian çekirdeği $K(x,s)$ Hilbert çekirdeği ile aynı Fourier katsayılarına sahiptir. (3.235)in doğruluğunu göstermek için $P(x,s) = 0$ olduğunu göstermek gerekir. Bir an için $P(x,s) \ne 0$ olsun. Bu taktirde λ_0 eigen değerine karşılık gelen $\phi_0(x)$ normalleştirilmiş eigen fonksiyonu mevcuttur.

$$\lambda_0 P\phi_0 = \phi_0 \tag{3.241}$$

denklemi yazılır. (3.240) denklemi kullanılırsa ve P Hermitian olduğundan dolayı,

$$\left\langle \phi_0, \phi_v \right\rangle = \lambda_0 (P\phi_0, \phi_v) = \lambda_0 (\phi_0, P\phi_v) = 0 \qquad (v = 1,2,...) \tag{3.242}$$

elde edilir. Çünkü herhangi bir pozitif n tamsayısı için

$$\int_a^b \Phi(x,s)\phi_0(s)ds = \int_a^b \left\{\Phi(x,s) - S_n(x,s)\right\}\phi_0(s)ds . \tag{3.243}$$

Çünkü $v = 1,2,...$ için $\left\langle \phi_0, \phi_v \right\rangle = 0$ olduğu gerçeği ile beraber $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n > N$ olacak şekilde bir N sayısı vardır. (3.236) ve Schwarz eşitsizliği yardımıyla

$$\left|\Phi\phi\right|^2 \le \int_a^b \left|\Phi(x,s) - S_n(x,s)\right|^2 ds < \varepsilon . \tag{3.244}$$

$\Phi\phi_0$, n den bağımsız olduğundan $\Phi\phi_0 = 0$ ve böylece

$$\lambda_0 K\phi_0 = \lambda_0 P\phi_0 = \phi_0 \tag{3.245}$$

elde edilir. Yani, ϕ_0 K nın eigen fonksiyonudur fakat tüm ϕ_v eigen fonksiyonlarına ortogonaldir. ϕ_v tam bir ortonormal sistem teşkil ettiğinden çelişkidir. Dolayısıyla, $P(x,s)$ sıfır çekirdek olmalı ve

$$\Phi(x,s) = K(x,s) \tag{3.246}$$

elde edilir.

3.2.4.4. Hilbert-Schmidt teoremi

$$f(x) = \int_a^b K(x,s)g(s)ds \tag{3.247}$$

ile verilen $f(x)$ fonksiyonu kare integrallenebilir olsun. Burada $K(x,s)$ Hilbert Schmidt çekirdeği ve $g(s)$ kare integrallenebillir fonksiyondur. Bu halde

$$f(x) = \sum_{v=1}^{n} a_v \phi_v(x) \tag{3.248}$$

elde edilir. Burada,

$$a_v = \langle f, \phi_v \rangle = \frac{1}{\lambda_v}(g, \phi_v) \tag{3.249}$$

denkleminde $\phi_v(x)$, λ_v $(v = 1,2,...)$ eigen değerlerine karşılık gelen $K(x,s)$ çekirdeğinin eigen fonksiyonlarıdır.

İspat: (3.248) Hilbert-Schmidt serisi mutlak değerce düzgün yakınsaktır ayrıca A sabit olmak üzere,

$$\int_a^b |K(x,s)|^2 ds < A^2 . \tag{3.250}$$

(3.249) un doğruluğunu göstermek zor değildir. Bunun için,

$$a_v = \langle f, \phi_v \rangle = \int_a^b \overline{\phi_v(x)} dx \int_a^b K(x,s)g(s)ds$$

$$= \int_a^b g(s)ds \int_a^b \overline{K(s,x)\phi_v(x)} dx = \langle g, K\phi_v \rangle = \frac{1}{\lambda_v}\langle g, \phi_v \rangle .$$

Burada,

$$f(x) = \int_a^b \{K(x,s) - S_n(x,s)\} g(s)ds + \sum_{v=1}^{n} \frac{\phi_v(x)}{\lambda_v} \int_a^b \overline{\phi_v(s)} g(s)ds$$

$$=\int_a^b \left\{K(x,s)-S_n(x,s)\right\} g(s)ds+\sum_{v=1}^{n} a_v\phi_v(x) \tag{3.251}$$

ile verilir. Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|f(x)-\sum_{v=1}^{n} a_v\phi_v(x)\right|^2 \le \int_a^b \left|K(x,s)-S_n(x,s)\right|^2 ds\int_a^b \left|g(s)\right|^2 ds. \tag{3.252}$$

(3.252) denkleminin sağ tarafı n yeterince büyük seçilerek küçültülebilir. Bunu yapmakla (3.248) denklemini ispatlamış olduk.

$$b_v=\langle g,\phi_v\rangle \tag{3.253}$$

olsun. Bu halde, Cauchy-Schwarz eşitsizliği yardımıyla

$$\left\{\sum_{v=n+1}^{\infty}\left|a_v\phi_v(x)\right|\right\}^2=\left\{\sum_{v=n+1}^{\infty}\left|\frac{b_v}{\lambda_v}\phi_v(x)\right|\right\}^2$$

$$\le\left\{\sum_{v=n+1}^{\infty}\left|b_v\right|^2\right\}\left\{\sum_{v=n+1}^{\infty}\frac{\left|\phi_v(x)\right|^2}{\lambda_v^2}\right\} \tag{3.254}$$

elde edilir ve $\phi(x)$ kare integrallenebilirdir. $\sum_{v=1}^{\infty}\left|b_v\right|^2<\infty$ olsun bu taktirde verilen $\varepsilon>0$ sayısına karşılık $n>N$ olduğunda

$$\sum_{v=n+1}^{\infty}\left|b_v\right|^2<\varepsilon^2 \tag{3.255}$$

olacak şekilde N sayısı vardır. (3.250) ile (3.238) denklemi yardımıyla

$$\sum_{v=n+1}^{\infty}\frac{\left|\phi_v(x)\right|^2}{\lambda_v^2}\le\int_a^b\left|K(x,s)\right|^2 ds<A^2. \tag{3.256}$$

$n>N$ için,

$$\sum_{v=n+1}^{\infty}\left|a_v\phi_v(x)\right|<\varepsilon A. \tag{3.257}$$

Bu ise (3.248) ile ifade edilen Hilbert-Schmidt serisinin mutlak ve düzgün yakınsak olduğu anlamına gelir.

3.2.4.5. Hilbert formülü

Hilbert-Schmidt teoreminin bir sonucu olarak $h(x)$, $g(x)$ fonksiyonları kare integrallenebillir fonksiyonlar olsun. Bu halde Hilbert formülü olarak bulunan

$$\langle Kg,h\rangle=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu}\langle g,\phi_\nu\rangle\langle\phi_\nu,h\rangle \tag{3.258}$$

elde edilir. $h=g$ seçilirse

$$\langle Kg,g\rangle=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu}\left|\langle g,\phi_\nu\rangle\right|^2. \tag{3.259}$$

3.2.4.6. İtere edilmiş çekirdekler için açılım teoremi

$n\geq 2$ için $K_n(x,s)$ iterative çekirdeği

$$K_n(x,s)=\int_a^b K(x,t)K_{n-1}(t,s)dt$$

ile verilir. Bu (3.247) ile aynı yapıdadır, burada $g=K_{n-1}(x,s)$. Eğer $K(x,s)$ bir Hilbert-Schmidt çekirdeği ise Hilbert-Schmidt teoreminden

$$K_n(x,s)=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(s)\phi_\nu(x),\ a_\nu(s)=\int_a^b K_n(x,s)\overline{\phi_\nu(x)}dx=\frac{1}{\lambda_\nu^n}\overline{\phi_\nu(s)}.$$

Dolayısıyla,

$$K_n(x,s)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\phi_\nu(x)\overline{\phi_\nu(s)}}{\lambda_\nu^n}\qquad n\geq 2 \tag{3.260}$$

denklemi $K(x,s)$, (3.250) şartı ile beraber mutlak değerce düzgün yakınsaktır. Buradan,

$$\kappa_n=trace\left(K^n\right)=\int_a^b K_n(x,x)dx=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu^n},\qquad (n\geq 2) \tag{3.261}$$

Özellikle,

$$\kappa_2=\|K\|_2^2=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu^2}<\infty. \tag{3.262}$$

3.2.4.7. İkinci tip Fredholm integral denkleminin çözümü

$$\phi(x)-f(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\phi(s)ds \tag{3.263}$$

ile ifade edilen ikinci tip Fredholm integral denklemini ele alalım. Burada $K(x,t)$ (3.250) şartını sağlayan bir Hilbert-Schmidt çekirdeğidir. $f(x)$ fonksiyonu kare integrallenebillir λ ise regüler bir değerdir. Eğer (3.263) denkleminin $\phi(x)$ çözümü L_2 uzayında ise Hilbert Schmidt teoreminden

$$\phi(x)-f(x)=\sum_{v=1}^{\infty}a_v\phi_v(x),\quad a_v=\langle\phi-f,\ \phi_v\rangle=\langle\phi,\phi_v\rangle-\langle f,\phi_v\rangle$$

ve aynı zamanda

$$a_v=\lambda\langle K\phi,\phi_v\rangle=\frac{\lambda}{\lambda v}\langle\phi,\phi_v\rangle.$$

Bu nedenle,

$$\langle\phi,\phi_v\rangle=\frac{\lambda_v}{\lambda_v-\lambda}\langle f,\phi_v\rangle \text{ ve } a_v=\frac{\lambda_v}{\lambda_v-\lambda}\langle f,\phi_v\rangle.$$

Nihayet çözüm mutlaka değerce düzgün yakınsak bir seri ile temsil edilir. Yani,

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\sum_{v=1}^{\infty}\frac{(f,\phi_v)\phi_v(x)}{\lambda_v-\lambda}=f(x)+\lambda\sum_{v=1}^{\infty}\int_a^b\frac{\phi_v\overline{\phi_v(s)}}{\lambda_v-\lambda}f(s)ds. \tag{3.264}$$

Böylece çözücü çekirdek

$$\Gamma(x,s;\lambda)=\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\phi_v(x)\overline{\phi_v(s)}}{\lambda_v-\lambda}. \tag{3.265}$$

Eğer bir seri düzgün yakınsak ise (3.264) denklemindeki toplam ile integral yer değiştirebilir. $v\to\infty$ için $\frac{\lambda_v}{(\lambda_v-\lambda)}\to 1$ ve $\sum_{v=1}^{\infty}\frac{|\phi_v(x)|^2}{\lambda_v^2}$ düzgün yakınsak olduğundan

$$\sum_{v=1}^{\infty}\frac{|\phi_v(x)|^2}{(\lambda_v-\lambda)^2}<\infty \tag{3.266}$$

elde edilir. Riesz-Fischer teoreminden (3.265) serisi çözücü çekirdek $\Gamma(s,t;\lambda)$ mean kare anlamında yakınsaktır. Hilbert-Schmidt teoreminden çözücü çekirdek

$$\Gamma(x,s;\lambda)=K(x,s)+\lambda\int_a^b K(x,t)\Gamma(t,s;\lambda)dt. \tag{3.267}$$

Dolayısıyla,

$$\Gamma(x,s;\lambda)=K(x,s)+\lambda\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\phi_v(x)\overline{\phi_v(s)}}{\lambda_v(\lambda_v-\lambda)} \tag{3.268}$$

ile ifade edilen çözücü çekirdeğin mutlak değerce düzgün yakınsak olduğu elde edilir. Bu ise (3.263) denklemini sağlayan çözüm

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) f(s) ds + \lambda^2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(f,\phi_v)\phi_v(x)}{\lambda_v(\lambda_v - \lambda)}. \quad (3.269)$$

Not: (3.268) denklemindeki singüler noktalar basit kutup noktalarıdır ve bu basit kutup noktaları $K(x,t)$ Hermitian çekirdeğinin eigen değerleridir.

3.2.4.8. Eigen değerler için bir üst sınır

$\psi(x)$ kare integrallenebilir bir fonksiyon ise (3.259) Hilbert formülü yardımıyla

$$\langle K\psi, \psi \rangle = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{|(\psi, \phi_v)|^2}{\lambda_v} \quad (3.270)$$

elde edilir ve buradan da,

$$\langle K\phi_v, \phi_v \rangle = \frac{1}{\lambda_v} \qquad (v = 1,2,...) \quad (3.271)$$

olduğu açıktır.

λ_v^+ ve λ_v^- $(v = 1,2,...)$ sırasıyla ϕ_v^+ ve ϕ_v^- eigen fonksiyonlarına karşılık gelen pozitif ve negatif eigen değerler olsun. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} &0 < \lambda_1^+ \le \lambda_2^+ \le ... \le \lambda_v^+ \le ..., \\ &0 > \lambda_1^- \ge \lambda_2^- \ge ... \ge \lambda_v^- \ge .... \end{aligned} \quad (3.272)$$

Bu halde,

$$\langle K\psi, \psi \rangle \le \sum_{v=1}^{\infty} \frac{|(\psi, \phi_v^+)|^2}{\lambda_v^+} \le \frac{1}{\lambda_1^+} \sum_{v=1}^{\infty} |(\psi, \phi_v^+)|^2 \le \frac{1}{\lambda_1^+} \langle \psi, \psi \rangle. \quad (3.273)$$

$$\mathrm{I}[\psi] = \frac{(K\psi, \psi)}{(\psi, \psi)} \quad (3.274)$$

fonksiyonelini yazalım. Buradan,

$$\mathrm{I}[\psi] \le \frac{1}{\lambda_1^+} \quad (3.275)$$

elde edilir. $\psi = \phi_1^+$ ise eşitsizlik eşitlik olur. $\psi(x)$ fonksiyonu $\phi_1^+(x),\ \phi_2^+(x),...,\phi_{n-1}^+(x)$ eigen fonksiyonlarına ortogonal olsun. Yani, $\langle \psi, \phi_1^+ \rangle = \langle \psi, \phi_2^+ \rangle = ... = \langle \psi, \phi_{n-1}^+ \rangle = 0$.

$$\langle K\psi, \psi \rangle \le \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\left|\left(\psi, \phi_\nu^+\right)\right|^2}{\lambda_\nu^+} \le \frac{1}{\lambda_n^+} \sum_{\nu=n}^{\infty} \left|\left(\psi, \phi_\nu^+\right)\right|^2 \le \frac{1}{\lambda_n^+} \left(\psi, \psi\right). \tag{3.276}$$

Buradan da,

$$\Gamma[\psi] \le \frac{1}{\lambda_n^+} \tag{3.277}$$

elde edilir. Benzer olarak,

$$\Gamma[\psi] \ge \frac{1}{\lambda_1^-} \tag{3.278}$$

denklemi çıkarılır. Eğer $\langle \psi, \phi_1^- \rangle = \langle \psi, \phi_2^- \rangle = ... = \langle \psi, \phi_{n-1}^- \rangle = 0$ ise

$$\Gamma[\psi] \ge \frac{1}{\lambda_n^-}. \tag{3.279}$$

3.2.4.9. Pozitif çekirdekler

Her kare integrallenebilir bir $K(x,s)$ çekirdeği için

$$\langle K\psi, \psi \rangle \ge 0 \tag{3.280}$$

oluyorsa pozitiftir eğer,

$$\langle K\psi, \psi \rangle > 0 \tag{3.281}$$

şeklinde ise kesin olarak pozitif tanımlıdır denir. $K(x,s)$nin pozitif çekirdek olması için gerek ve yeter şart tüm eigen değerlerin pozitif olmasıdır. Üstelik $K(x,s)$nin kesin olarak pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart $\phi_\nu(x)$, $(\nu = 1,2,...)$ eigen fonksiyonları ile temsil edilen sistemin tam olmasıdır.

Şimdi $K(x,s)$ pozitif çekirdeği sürekli olsun. $K(x,s)$ Hermitian olduğundan $K(x,x)$ reeldir. Bu halde $a \le x \le b$ açık aralığında $K(x,x) \ge 0$ olduğu gösterilebilir. Sonuca varmak için tersini kabul edelim. Yani $a \le x_0 \le b$ için $K(x_0, x_0) = -\varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı olsun. $K(x,s)$ sürekli olduğundan çekirdeğin reel kısımda süreklidir. Dolayısıyla, $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ ve $x_0-\delta<s<x_0+\delta$ için $\operatorname{Re}\{K(x,s)\}<-\tfrac{1}{2}\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı bulabiliriz. Şimdi,

$$\psi_0(x)=\begin{cases}1, & (x_0-\delta\le x\le x_0+\delta)\\ 0, & \text{diğer yerlerde}\end{cases}$$

olsun. Bu halde, $\langle K\psi_0,\psi_0\rangle$ reel olduğundan

$$\langle K\psi_0,\psi_0\rangle=\int_a^b\int_a^b \operatorname{Re}\{K(x,s)\}\psi_0(s)\psi_0(x)dsdx=\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\operatorname{Re}\{K(x,s)\}dsdx$$

$$<-\frac{1}{2}\varepsilon(2\delta)^2<0$$

elde edilir. Bu ise $K(x,s)$ çekirdeğinin pozitif oluşuyla çelişkidir. Bu nedenle $a<x<b$ için $K(x,x)\ge 0$ dir. Aynı zamanda, $K(x,s)$ sürekli olduğundan bu pozitiflik durumu uç noktalarda da doğrudur.

3.2.4.10. Mercer teoremi

Eğer $K(x,s)$ sürekli pozitif bir çekirdek ise açılım teoremi daha da güçlü kılınabilir. $K(x,s)$ böyle bir çekirdek olsun. Bu halde,

$$K^{(n+1)}(x,s)=K(x,s)-\sum_{v=1}^{n}\frac{\phi_v(x)\overline{\phi_v(s)}}{\lambda_v} \tag{3.282}$$

ifadesi aynı zamanda pozitif ve tüm n ler için süreklidir. Çünkü, sürekli çekirdeğin $\phi_v(x)$ eigen fonksiyonları süreklidir. Bilinen sonuçları kullanarak

$$K(x,x)-\sum_{v=1}^{n}\frac{\phi_v(x)\overline{\phi_v(x)}}{\lambda_v}=K^{(n+1)}(x,x)\ge 0 \tag{3.283}$$

ve tüm n ler için

$$\sum_{v=1}^{n}\frac{|\phi_v(x)|^2}{\lambda_v}\le K(x,x) \tag{3.284}$$

elde edilir. İntegre edilerek

$$\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{\lambda_v}\le\int_a^b K(x,x)dx=traceK=\kappa_1\,. \tag{3.285}$$

$K(x,x)$ sürekli dolayısıyla sınırlı olduğundan

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu}<\infty \tag{3.286}$$

elde edilir. Bu ise daha önce bilinen (3.262) sonucundan daha güçlü bir sonuçtur.
Şimdi, Cauchy Schwarz eşitsizliği yardımıyla

$$\left\{\sum_{\nu=n+1}^{m}\frac{\left|\phi_\nu(x)\overline{\phi_\nu(s)}\right|}{\lambda_\nu}\right\}^2 \le \left\{\sum_{\nu=n+1}^{m}\frac{\left|\phi_\nu(x)\right|^2}{\lambda_\nu}\right\}\left\{\sum_{\nu=n+1}^{m}\frac{\left|\phi_\nu(s)\right|^2}{\lambda_\nu}\right\}. \tag{3.287}$$

(3.284) ifadesi tüm x ler için $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|\phi_\nu(x)\right|^2}{\lambda_\nu}$ nin yakınsak olduğunu vurgular. $K(x,x)$ sınırlı olduğundan

$$\sum_{\nu=n+1}^{m}\frac{\left|\phi_\nu(x)\right|^2}{\lambda_\nu}<C^2, \qquad (a\le x\le b) \tag{3.288}$$

elde edilir burada ki C pozitiftir. Verilen $\varepsilon>0$ ve bir sabit s değeri için $m,n>N$ olduğundan

$$\sum_{\nu=n+1}^{m}\frac{\left|\phi_\nu(s)\right|^2}{\lambda_\nu}<\varepsilon^2 \tag{3.289}$$

olacak şekilde bir N sayısı vardır. Böylece,

$$\sum_{\nu=n+1}^{m}\frac{\left|\phi_\nu(x)\overline{\phi_\nu(s)}\right|}{\lambda_\nu}<\varepsilon C \tag{3.290}$$

ve buradan da her x ve s için

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\phi_\nu(x)\overline{\phi_\nu(s)}}{\lambda_\nu} \tag{3.291}$$

mutlak değerce yakınsak olduğu görülür. (3.291) ifadesi $K(x,s)$ çekirdeğine mean kare yakınsak olduğundan

$$K(x,s)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\phi_\nu(x)\overline{\phi_\nu(s)}}{\lambda_\nu} \tag{3.292}$$

elde edilir. Özellikle buradan da,

$$K(x,x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|\phi_\nu(x)\right|^2}{\lambda_\nu}. \tag{3.293}$$

Burada, sonsuz serinin kısmi toplamları sürekli fonksiyonların monotonik dizisi sürekli bir fonksiyona yakınsar. Dini teoreminden $a\le x\le b$ kapalı aralığında reel değerli sürekli fonksiyonların monotonik dizisi sürekli fonksiyona yakınsarsa dizi bu aralıkta düzgün yakınsaktır.

Dolayısıyla tüm x ler için (3.293) ifadesi düzgün yakınsaktır. Cauchy Schwarz eşitsizliğinden (3.292) ifadesinde tüm x ve s değerleri için düzgün yakınsaktır.

3.2.4.11. Varyasyonel prensipler

K integral operatörü kare integrallenebilir Hermitian çekirdeği ve ψ kare integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathrm{I}[\psi]=\frac{\langle K\psi,\psi\rangle}{\langle\psi,\psi\rangle} \tag{3.294}$$

fonksiyoneli $\psi=\phi_1^+$ olduğunda $\frac{1}{\lambda_1^+}$ maximum değerini ve $\psi=\phi_v^-$ de $\frac{1}{\lambda_1^-}$ minimum değerini aldığını biliyoruz.

$$\langle\phi,\psi\rangle=\langle\phi_1^+,\psi\rangle+\langle\phi_2^+,\psi\rangle=...=0$$

ise $\mathrm{I}[\psi]$ fonksiyoneli $\psi=\phi_n^+$ olduğunda maximum değerini $\frac{1}{\lambda_n^+}$, $\psi=\phi_n^-$ olduğunda ise $\mathrm{I}[\psi]$ fonksiyoneli $\frac{1}{\lambda_n^-}$de alır. Eğer $\langle\psi,\phi_i^+\rangle=0$ ise $\mathrm{I}[\psi]$, $\psi=\phi_n^+$ olduğunda maksimum değeri $\frac{1}{\lambda_n^+}$. Benzer olarak, eğer $\langle\psi,\phi_i^+\rangle=0$ ise $\mathrm{I}[\psi]$, $\psi=\phi_n^-$ olduğundan minimum değeri $\frac{1}{\lambda_n^-}$. Bu özellikler, ψ, K ya ait herhangi bir eigen fonksiyon ise $\mathrm{I}[\psi]$ fonksiyonelinin stationary olduğu beklentisini vurgular. Bu ise varyasyonel prensibini doğurur. Bunun tesisi için,

$$\delta\mathrm{I}[\phi_v]=\mathrm{I}[\phi_v+\delta\phi_v]-\mathrm{I}[\phi_v],\psi=\phi_{v1},\ (v=1,2,3,...,n) \tag{3.295}$$

denklemini analiz edelim.

$$\mathrm{I}[\phi_v+\delta\phi_v]=\frac{\langle K\phi_v+K\delta\phi_v,\phi_v+\delta\phi_v\rangle}{\langle\phi_v+\delta\phi_v,\phi_v+\delta\phi_v\rangle}$$

$$=\mathrm{I}[\phi_v]+\frac{\langle K\phi_v,\delta\phi_v\rangle+\langle K\delta\phi_v,\phi_v\rangle}{\langle\phi_v,\phi_v\rangle}$$

$$-\frac{\langle K\phi_v,\phi_v\rangle\{(\phi_v,\delta\phi_v)+(\delta\phi_v,\phi_v)\}}{\langle \phi_v,\phi_v\rangle^2}+O\{|\delta\phi_v|^2\}$$

$$=\mathrm{I}[\phi_v]+O\{|\delta\phi_v|^2\} \tag{3.296}$$

elde edilir. Çünkü, $\lambda_v K\phi_v=\phi_v$. $O\{|\delta\phi_v|^2\}$ terim küçüklüğünden ihmal edilirse

$$\delta\mathrm{I}[\phi_v]=0 \tag{3.297}$$

varyasyonel prensibi yazılır. Bu ise $\psi=\phi_v$ olduğunda $\mathrm{I}[\psi]$ stationary olur. ϕ,

$$\phi=f+\lambda K\phi \tag{3.298}$$

denkleminin bir çözümü olsun. Bu halde, $\langle f,\phi\rangle$ için bir varyasyonel prensibini çıkarabiliriz. λ reel ise,

$$\langle f,\phi\rangle=\langle \phi,\phi\rangle-\lambda\langle K\phi,\phi\rangle=\langle \phi,f\rangle \tag{3.299}$$

ifadesi aynı zamanda reeldir. Bir an için

$$J[\psi]=\langle f,\psi\rangle+\langle \psi,f\rangle-\langle \psi,\psi\rangle+\lambda\langle K\psi,\psi\rangle \tag{3.300}$$

fonksiyonelini düşünelim. Böylece, $J[\phi]=\langle f,\phi\rangle$ olur. Bu halde,

$$J[\phi+\delta\phi]=\langle f,\phi+\delta\phi\rangle+\langle \phi+\delta\phi,f\rangle-\langle \phi+\delta\phi,\phi+\delta\phi\rangle+\lambda\langle K\phi+K\delta\phi,\phi+\delta\phi\rangle$$

$$=J[\phi]+\langle f-\phi+\lambda K\phi,\delta\phi\rangle+\langle \delta\phi,f-\phi+\lambda K\phi\rangle-\langle\{1-\lambda K\}\delta\phi,\delta\phi\rangle$$

$$=J[\phi]-\langle\{1-\lambda K\}\delta\phi,\delta\phi\rangle \tag{3.301}$$

Çünkü, ϕ (3.298) denklemini sağlar. (3.301) ifadesindeki ikinci terimin ihmali neticesinde,

$$\delta J[\phi]=0 \tag{3.302}$$

varyasyonel prensibi elde edilir. Üstelik, eğer $\lambda K<0$ ise

$$\delta J[\phi]\le 0\,. \tag{3.303}$$

Bu şu demektir, $\psi=\phi$ için $J[\psi]$ fonksiyoneli maximum değerini alır, dolayısıyla $J[\psi]$ fonksiyoneli $\langle f,\phi\rangle$ için bir alt sınır sağlar. $J[\psi]$ fonksiyoneli için bir alternatif ifade yazılabilir. Yani, $\psi=\alpha\chi$ yazılarak ve α parametresine optimize edilirse

$$J[\alpha\chi]=\bar{\alpha}\langle f,\chi\rangle+\alpha\langle \chi,f\rangle-\alpha\bar{\alpha}\langle \chi,\chi\rangle+\lambda\alpha\bar{\alpha}\langle K\chi,\chi\rangle$$

elde edilir ve $\frac{\partial J}{\partial a}=\frac{\partial J}{\partial \overline{a}}=0$, $\alpha=\frac{\langle f,\chi\rangle}{\langle \chi,\chi\rangle-\lambda\langle K\chi,\chi\rangle}$. Bunun neticesinde,

$$J[\chi]=\frac{\langle f,\chi\rangle\langle \chi,f\rangle}{\langle \chi,\chi\rangle-\lambda\langle K\chi,\chi\rangle}. \tag{3.304}$$

Bu ifadede (3.299) nın kullanımıyla $J[\phi]=(f,\phi)$ olduğu açıktır.

3.2.4.12. Rayleigh-Ritz varyasyonel metodu

Rayleigh-Ritz varyasyonel metodu kısaca eigen değerlerin yaklaşığını tasarlayan bir metottur. $\psi_1,\psi_2,...,\psi_n$ n tane lineer bağımsız kare integrallenebilir fonksiyonlar olsun.

$$\psi=\sum_{r=1}^{n}c_r\psi_r \tag{3.305}$$

burada, c_r $(r=1,2,...,n)$ n tane uyarlanabilir parametreler olsun. Bu halde,

$$\mathrm{I}[\psi]=\frac{\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}c_r\overline{c_s}k_{rs}}{\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}c_r\overline{c_s}a_{rs}}. \tag{3.306}$$

Burada, $k_{rs}=\langle k\psi_r,\psi_s\rangle$ ve $a_{rs}=\langle \psi_r,\psi_s\rangle$. c_r parametresine göre optimize edilirse

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial c_r}=\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \overline{c_r}}=0 \qquad (r=1,2,...,n). \tag{3.307}$$

Buradan da n tane lineer homojen denklemler kümesi yani,

$$\lambda\sum_{s=1}^{n}k_{rs}\overline{c_s}-\sum_{s=1}^{n}a_{rs}\overline{c_s}=0, \quad (r=1,2,...,n). \tag{3.308}$$

$\frac{1}{\lambda}$, $\mathrm{I}[\psi]$nün değeridir. (3.308) sisteminin trivial olmayan bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart katsayılar determinantının sıfır olması gerekir. Yani,

$$\begin{vmatrix} \lambda k_{11}-a_{11} & \lambda k_{12}-a_{12} & \cdots & \lambda k_{1n}-a_{1n} \\ \lambda k_{21}-a_{21} & \lambda k_{22}-a_{22} & \cdots & \lambda k_{2n}-a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda k_{n1}-a_{n1} & \lambda k_{n2}-a_{n2} & \cdots & \lambda k_{nn}-a_{nn} \end{vmatrix}=0. \tag{3.309}$$

Doğal olarak (3.309) determinantı n tane $\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},...,\lambda^{(n)}$ kökleri K ya karşılık gelen eigen değerlerinin varyasyonel yaklaşıklarını verir. Özellikle, K pozitif ve $\lambda^{(1)}$ bu eigen değerlerin en küçüğü ise $0<\lambda_1\leq\lambda^{(1)}$ yazılır.

Örnek 3.2.4.12.1:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}=F(x,\phi) \qquad a\leq x\leq b$$

aralığında denklemini ele alalım.

Çözüm: Özel olarak $a=0,\ b-a=l$ olsun. Bu halde, $F(x,\phi)$ in

$$F(x,\phi)=r(x)-q(x)\phi(x)$$

(F lineer ise) olması halinde karşılık gelen ikinci tip Fredholm integral denklemi

$$\phi(x)=f(x)+\int_0^l K(x,s)q(s)\phi(s)ds\,.$$

Burada,

$$f(x)=\phi(0)+\frac{\phi(l)-\phi(0)}{l}x-\int_0^l K(x,s)r(s)ds\,,$$

$$K(x,s)=\begin{cases}\dfrac{s(l-x)}{l} & (s\leq x)\\[2mm] \dfrac{x(l-s)}{l} & (s\geq x)\end{cases}.$$

Rayleigh-Ritz metodu bu probleme uygulanırsa deneme fonksiyonu olarak

$$\psi(x)=c_1x+c_2x^2$$

alalım. Bu halde,

$$a_{11}=\frac{l^3}{3},\quad a_{12}=a_{21}=\frac{l^4}{4},\quad a_{22}=\frac{l^5}{5}$$

ve

$$k_{11}=\frac{l^5}{45},\quad \mathrm{k}_{12}=\mathrm{k}_{21}=\frac{l^6}{72},\quad \mathrm{k}_{22}=\frac{l^7}{112}.$$

Buradan da (3.309) determinantının kullanılmasıyla

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\lambda l^5}{45}-\dfrac{l^3}{3} & \dfrac{\lambda l^6}{72}-\dfrac{l^4}{4} \\ \dfrac{\lambda l^6}{72}-\dfrac{l^4}{4} & \dfrac{\lambda l^7}{112}-\dfrac{l^5}{5} \end{vmatrix}=0.$$

Yukarıdaki determinantın açılmasıyla,

$$5(\lambda l^2)^2-432\lambda l^2+3780=0$$

ikinci dereceden polinomu bulunur. En küçük kökü $\lambda^{(1)}=\dfrac{9.880}{\lambda^2}$ dır.

3.2.5. Transformasyon metodları

3.2.5.1. Laplace transformasyonu

$$L\left[F\right] = f(s) = \int_0^\infty F(t)e^{-ts}dt \tag{3.310}$$

ifadesine F nin Laplace transformasyonu denir. Bu halde, Ters Laplace

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(s)e^{st}ds\,. \tag{3.311}$$

Laplace transformasyonu lineerdir. a ve b sabit olacak şekilde

$$L\left[aF + bG\right] = aL\left[F\right] + bL\left[G\right].$$

Laplace transformasyonu ile ilgili önemli özelliklerini ispatsız verelim.

Eğer $L\left[F(t)\right] = f(s)$ ise,

1. $L\left[e^{at}F(t)\right] = f(s-a)$

2. $L\left[F(at)\right] = \dfrac{1}{a}f(\dfrac{s}{a})$

3. $L\left[F'\right] = sf(s) - F(0)$

$L\left[F''\right] = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$

$\ldots$

$L\left[F^{(k)}\right] = s^k f(s) - s^{k-1}F(0) - s^{k-2}F'(0) - \ldots - F^{(k-1)}(0)$

4. $G(t) = \begin{cases} F(t-a), & t > a \\ 0\quad, & t < a \end{cases}$ ise $L\left[G(t)\right] = e^{-as}f(s)$

5. $L\left[\int_0^t F(u)du\right] = \dfrac{f(s)}{s}$

6. $L\left[\dfrac{F(t)}{t}\right] = \int_0^\infty f(u)du$

7. $T > 0$ için $F(t+T) = F(t)$ ise $L\left[F(t)\right] = \dfrac{\int_0^T e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-st}}$.

8. Yukarıdaki özelliklere Ters Laplace uygulanarak aynı özellikler tekrar edilir.

9. $F(t) * G(t) = \int_0^t F(u)G(t-u)du = \int_0^t F(t-u)G(u)du = G(t) * F(t)$

ifadesine konvulasyon (convulation) denir. Bu halde,

$$L[F * G] = L[F] * L[G] = f(s)g(s).$$

3.2.5.1.1. Konvulasyon tipi integral denklemleri

$$Y(t) = F(t) + \int_0^t K(t-u)Y(u)du \tag{3.312}$$

Volterra integral denklemini ele alalım. Bu integral denkleminin her iki yanına Laplace transformasyonu uygulanırsa ve

$$L[Y(t)] = y(s), \qquad L[F(t)] = f(s), \qquad L[K] = k(s)$$

$$y(s) = f(s) + k(s)y(s) \Rightarrow y(s) = \frac{f(s)}{1-k(s)}.$$

Örnek 3.2.5.1.1.1:

$$F(t) = \int_0^t \frac{G(u)}{(t-u)^\alpha}du, \qquad F(0) = 0\text{, } 0 \le \alpha < 1$$

Abel integral denklemini çözelim.

Çözüm: Bu konvulasyon tipi bir integral denklemdir ve denklemin her iki tarafına Laplace transformasyonu uygulanırsa

$$f(s) = g(s)k(s),\ k(t) = t^{-\alpha}.$$

$$L\left[t^n\right] = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

olduğundan

$$f(s) = g(s)\frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}},\quad g(s) = \frac{sf(s)}{s^\alpha\Gamma(1-\alpha)}.$$

Burada, ters Laplace uygulanırsa

$$G(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}(f' * t^{\alpha-1}).$$

Burada,

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1} \quad F(0) \ne 0 \text{ ise,}$$

$$G(t)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left[F(0)t^{\alpha-1}+g'*t^{\alpha-1}\right].$$

Örnek 3.2.5.1.1.2:

$$Y(t)=5\cos t+\int_0^t (t-u)Y(u)du \tag{3.313}$$

denklemini çözelim.

Çözüm: Denklemin her iki tarafına Laplace transformasyonu uygulanırsa

$$y(s)=5L\left[\cos t\right]+L\left[t*y\right]=5\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2}y(s)\,.$$

$$y(s)=\frac{5s^3}{(s^2+1)(s^2-1)}=\frac{5}{4}\frac{1}{s-1}+\frac{5}{4}\frac{1}{s+1}+\frac{5}{2}\frac{s}{s^2+1}\ .$$

Ters Laplace uygulanırsa,

$$Y(t)=\frac{5}{4}e^t+\frac{5}{4}e^{-t}+\frac{5}{2}\cos t\,.$$

Örnek 3.2.5.1.1.3:

$$\int_0^t \frac{Y(u)}{\sqrt{t-u}}du=1+t+t^2$$

integral denklemini çözelim.

Çözüm: Konvulasyon tipi bir integral denklemidir.

$$Y*t^{\frac{-1}{2}}=1+t+t^2$$

denkleminin her iki tarafına Laplace transformasyonu uygulanırsa,

$$y(s)\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3}\ .$$

$$\left\{\begin{array}{l}\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n! \\ -\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2})=\Gamma(\frac{1}{2})\Rightarrow\Gamma(-\frac{1}{2})=-2\Gamma(+\frac{1}{2})\end{array}\right\}.$$

Ters Laplacedan,

$$Y(t)=\left\{t^{-1/2}+2t^{1/2}+\frac{8}{3}t^{3/2}\right\}\frac{1}{\pi}.$$

3.2.5.1.2. Laplace transformasyonu ve kısmi türevli denklemler

Başlangıç değer problemlerinin çözümünde ve Volterra integral denklemlerinin kullanımında Laplace transformasyonu oldukça faydalıdır.

- $L\left[U_t\left(x,t\right)\right]=su(x,s)-U(x,0)$.
- $L\left[U_{tt}\left(x,t\right)\right]=s^2u(x,s)-sU(x,0)-U_t(x,0)$.
- $L\left[U_x\right]=\int\limits_0^\infty e^{-st}U_x dt=\dfrac{d}{dx}\int\limits_0^\infty e^{-st}U(x,t)dt=u_x(x,s)$.
- $L\left[U_{xx}\right]=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
- $L\left[\dfrac{\partial^n U(x,t)}{\partial t^n}\right]=s^n u(x,s)-\sum\limits_{k=0}^{n} s^{n-k-1}U_k(x,0)$, $U_k(x)=\left.\dfrac{\partial^k U(x,t)}{\partial t^k}\right|_t=0$
- $L\left[\dfrac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x\partial x}\right]=\dfrac{\partial}{\partial x}L\left[\dfrac{\partial U}{\partial t}\right]=su_x(x,s)-U_x(x,0)$

Örnek 3.2.5.1.2.1:

$$U_x=2U_t+U \tag{3.314}$$

denkleminin $U(x,0)=6e^{-3x}$ başlangıç koşullunu sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm: Laplace transformasyonu alınırsa

$$u_x=2\left\{su(x,s)-U(x,0)\right\}+u(x,s)\,,\quad u_x-(2s+1)u(x,s)=-12e^{-3x}$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

$$\frac{d}{dx}\left\{ue^{-(2s+1)x}\right\}=-12e^{-(2s+4)x}$$

integre edilirse

$$ue^{-(2s+1)x}=\frac{6}{s+2}e^{-(2s+4)x}+C\Rightarrow u(x,s)=\frac{6}{s+2}e^{-3x}+Ce^{(2s+1)x}.$$

$x\to\infty$ için $U(x,t)$ sınırlı olacağından $C=0$ dır. Yani,

$$U(x,s)=\frac{6}{s+2}e^{-3x}.$$

Ters Laplacedan, $U(x,t)=6e^{-2t-3x}$.

Örnek 3.2.5.1.2.2:

$$\Phi(t)-\lambda\int_0^x K(x-y)\Phi(y)dy = F(t) \tag{3.315}$$

integral denklemini çözelim.

Çözüm: Her iki tarafa Laplace transformasyonu uygulanırsa konvulasyonla beraber

$$\phi(s)-\lambda K(s)\phi(s)= f(s) \Rightarrow \phi(s)=\frac{1}{1-\lambda K(s)} f(s).\ 1-\lambda K(s)\neq 0.$$

Ters Laplace transformasyonu uygulanırsa çözüm,

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+p}^{i\infty+p} e^{st}\frac{1}{1-\lambda K(s)} f(s)ds.$$

Örnek 3.2.5.1.2.3:

$$\Phi(t)-\lambda\int_0^t e^{t-y}\Phi(y)dy = F(t)$$

integral denklemini çözelim.

Çözüm: Bu konvulasyon tipi bir integral denklemidir. $L\left[e^t\right]=\frac{1}{s-1},\ s>0$ olduğundan, bir önceki örneğin sonucunu kullanarak çözüm,

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+p}^{i\infty+p} e^{st}\frac{s-1}{s-(\lambda+1)} f(s)ds.$$

Bu integral direkt hesaplanabilir fakat kolay yaklaşımlardan bir tanesi de konvulasyonları kullanmaktır. Eğer,

$$G(t)=e^{(1+\lambda)t} \text{ ise } g(s)=\frac{1}{s-(\lambda+1)}.$$

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+p}^{i\infty+p} e^{st}\frac{s-1}{s-(\lambda+1)} f(s)ds$$

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+p}^{i\infty+p} e^{st}\left[1+\frac{\lambda}{s-(\lambda+1)}\right] f(s)ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+p}^{i\infty+p} e^{st} f(s)ds+\frac{\lambda}{2\pi i}\int_{-i\infty+p}^{i\infty+p} e^{st} f(s)g(s)ds.$$

Baştaki orijinal değişkenler cinsinden yazılırsa,

$$\Phi(t)=F(t)+\lambda\int_0^t e^{(1+\lambda)(t-y)}F(y)dy = F(t)+\lambda(F*G)(t).$$

3.2.5.2. Fourier transformasyonu

$$T\left[F\right]=\hat{f}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)e^{isx}dx \tag{3.316}$$

şeklinde tanımlanır. Ters Fourier transformasyonu

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(s)e^{-isx}ds\,.$$

- Fourier Transformasyonu lineerdir.

$$T(\alpha f+\beta g)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\alpha f(t)+\beta g(t)\right]e^{ist}dt$$

$$=\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{ist}dt+\frac{\beta}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)e^{ist}dt$$

$$=\alpha T(f)+\beta T(g)\,,$$

- f kare integrallenebilir bir fonksiyon olsun.

$$\left\|F(f)\right\|=\left\|\hat{f}\right\|=\left\|f\right\|.$$

Yani f in Fourier transformasyonu uniterdür veya izometriktir.

- $F\left[f(t-a)\right]=e^{ias}F(\hat{f}(t))=e^{ias}\hat{f}$,
- $F\left[f(at)\right]=(\frac{1}{|a|})F\left[f(t)\right]_{s\to s/a}=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{s}{a}\right)$,
- $F\left[f^{(k)}(t)\right]=(-is)^{k}F\left[f(t)\right]=(-is)^{k}\hat{f}$,
- Eğer $h(t)=\int_{a}^{t}f(x)dx$ ise $F\left[h(t)\right]=\frac{1}{is}F\left[f(t)\right]=\frac{1}{is}\hat{f}(s)$.
- Fourier transformasyonlarında ki konvulasyon

$$h(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-x)g(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t-x)f(x)dx$$

ifadesinin her iki yanına Fourier Transformasyonları uygulanırsa

$$F\left[h(t)\right]=F(f)F(g)\ \text{ veya }\ \hat{h}(s)=\hat{f}(s)\,\hat{g}(s)\,.$$

Teorem 3.2.5.2.1: Polinomlarını normalleştirecek şekilde bir sabit olsun. Hermite polinomları,

$$H_n(x) = c_n e^{x^2} (\frac{d}{dx})^n e^{-x^2} \tag{3.317}$$

ile ifade edilir. Bu ifade Rodriguez Formülü olaraktа bilinir.

İspat: $u_n(x) = e^{-(x^2/2)} H_n(x)$

$$u_n'' + (\lambda_n - x^2) u_n = 0$$

diferansiyel denklemini sağlar. Burada, $\lambda_n = 2n+1, \quad (n = 0,1,2,...)$. $u_n = e^{x^2/2} V_n$ olsun. Buradan, $V_n = e^{-x^2} H_n(x)$.

$$V_n'' + 2xV_n' + (2n+2)V_n = 0. \tag{3.318}$$

$$V_0'' + 2xV_0' + 2V_0 = 0$$

denkleminin çözümü $V_0 = e^{-x^2}$ dır. V_0 için bilinen denklem ard arda türetilirse

$$V_0''' + 2xV_0'' + 4V_0' = 0,$$

$$V_0^{(n+2)} + 2xV_0^{(n+1)} + (2n+2)V_0^{(n)} = 0$$

$V_0^{(n)} = V_n$ alınırsa (3.318) diferansiyel denklemi elde edilir.

$$V_n = \left(\frac{d}{dx}\right)^n V_0 = \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2},$$

$$H_n(x) = e^{x^2} V_n = e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$$

elde edilir. $H_n(x)$ fonksiyonları normalleştirilirse uygun c_n çarpanı bulunabilir. Yani, ortonormalleştirilmiş

$$H_n(x) = c_n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}.$$

Teorem 3.2.5.2.2: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{x^2/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} \right\}$

kümesi $L_2\left[-\infty, \infty\right]$ de tam ortonormaldir. (Bu tam bir taban teşkil eder.)

İspat: $\phi_n(x) = k_n e^{(-\frac{x^2}{2})} H_n(x)$ kümesi $L_2[-\infty,\infty]$ üzerinde tam ortogonal bir kümedir. Bir önceki teoremden,

$$\phi_n(x) = c_n k_n e^{x^2/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}.$$

Buradan, eğer $c_n k_n$ bulunursa ispat biter.

$$\|\phi_n(x)\|^2 = c_n^2 k_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}\right]^2 dx.$$

Yukarıdaki denkleme, n defa kısmi integral uygulanırsa

$$\|\phi_n(x)\|^2 = c_n^2 k_n^2 (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} dx.$$

$e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$ derecesi n olan bir polinom olduğundan direkt türevden

$$e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} = (-2x)^n + \ldots, \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} = (-2)^n n!.$$

Yani,

$$1 = \|\phi_n(x)\|^2 = c_n^2 k_n^2 (2^n n!) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = c_n^2 k_n^2 (2^n n!)\sqrt{\pi}$$

ifadesinden $c_n k_n$ bulunur.

Lemma 3.2.5.2.2.1:

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{x^2/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$$

olsun**.** Bu halde

$$F(\phi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} \phi_n(x) dx = i^n \phi_n(s). \qquad (3.319)$$

İspat:

$$F(\phi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{s^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{y^2/2} \left(\frac{d}{dy}\right)^n e^{-(y-is)^2} dy$$

denkleminde $y - x = is$ dönüşümü yapılırsa ve

$$\frac{d}{dy}e^{-(y-is)^2}=i\frac{d}{ds}e^{-(y-is)^2}$$

kullanılırsa,

$$F\left(\phi_n\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{s^2/2}\left(\frac{d}{ds}\right)^n\int_{-\infty}^{+\infty}e^{y^2/2}e^{-(y-is)^2}dy.$$

Buradan da,

$$e^{-s^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left[(y/\sqrt{2})-i\sqrt{2}s\right]^2 dy}=\sqrt{2\pi}e^{-s^2}$$

ve nihayet

$$F\left(\phi_n\right)=i^n\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{s^2/2}\left(\frac{d}{ds}\right)^n e^{-s^2}=i^n\phi_n(s).$$

(3.319) ile ifade edilen operatör $L_2\left[-\infty,\infty\right]$ üzerinde sürekli bir operatördür. Bu özelliği aşağıdaki şekilde ispat edelim. $f(x)\in L_2\left[-\infty,\infty\right]$ ve

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}f_k\phi_k(x)$$

olsun. Limiti $f(x)$ olan

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f_k\phi_k(x)$$

dizisi $L_2\left[-\infty,\infty\right]$da bir Cauchy dizisidir. Çünkü,

$$\left\|F(p_n)-F(p_m)\right\|^2=\sum_{k=m+1}^{n}|f_k|^2=\left\|p_n(x)-p_m(x)\right\|^2$$

Şimdi,

$$\lim_{n\to\infty}F(p_n)=\sum_{k=0}^{\infty}i^k f_k\phi_k(s)=F(f) \tag{3.320}$$

ifadesinden

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F(f)\right|^2 ds=\sum_{n=0}^{\infty}|f_n|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2 dx \tag{3.321}$$

elde edilir. (3.321) ifadesinden aynı zamanda f nin izometrik bir operatör olduğu görülür. Daha genel olarak, eğer

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\phi_n(x),\quad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n\phi_n(x)$$

ise

$$F(f)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n i^n \phi_n(s)\,,\ F(g)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n i^n \phi_n(s)$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\,\overline{g}dx=\int_{-\infty}^{\infty} F(f)\overline{F(g)}ds. \tag{3.322}$$

Şimdide Fourier transformasyonun adjointini irdeleyelim.

$$F^*(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x)dx \tag{3.323}$$

ile ifade edilir. Dolayısıyla,

$$F^*(\phi_n(x))=(-i)^n \phi_n(s) \tag{3.324}$$

ve buradan da,

$$F(F^*(\phi_n((x))=F^*(F(\phi_n(x))=\phi_n(x) \tag{3.325}$$

yazılabilir. Yani, F nin tersi F^* dır.

(3.319) ifadesi kullanılarak F nin eigen değerlerini araştıralım. F nin Fourier transformasyonunun bazı $f(x)$ ve λ lar için

$$F(f)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n i^n \phi_n(s)=\lambda\sum_{n=0}^{\infty} f_n \phi_n(s)$$

olsun. Bu halde, tüm n ler için

$$\left(\lambda-i^n\right) f_n=0\,.$$

Buradan, λ nın eigen değerleri 1, i, -1, $-i$ dir. Eğer $\lambda=1$ ve $n=4k$ alınırsa f_n nin keyfi olduğu görülür. Aksi halde, $f_n=0$ dır.

Eğer $f=\sum_{k=0}^{\infty} f_{4k}\phi_{4k}(x)$ ise $F(f)=f$.

Eğer $f=\sum_{k=0}^{\infty} f_{4k+1}\phi_{4k+1}(x)$ ise $F(f)=if$.

Eğer $f=\sum_{k=0}^{\infty} f_{4k+2}\phi_{4k+2}(x)$ ise $F(f)=-f$.

Eğer $f=\sum_{k=0}^{\infty} f_{4k+3}\phi_{4k+3}(x)$ ise $F(f)=-if$.

Her eigen değerin katlılığı sonsuzdur. Buradan F operatörünün sınırlı fakat kompakt bir operatör olmadığı kesindir. Bu sonuçları aşağıdaki teoremle ifade edelim.

Teorem 3.2.5.2.3:

$$F(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x)dx$$

integral operatörü

1. $L_2\left[-\infty,\infty\right]$ uzayını kendisine götürür.

2. Operatör üniter olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|F(f)\right|^2 ds=\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx$$

Parseval formu elde edilir.

3. $F^*(f)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x)dx$

adjointi aynı zamanda kendisinin tersidir.

4. Daha genel bir ifadeyle f ve $g\in L_2\left[-\infty,\infty\right]$ herhangi iki fonksiyon olsun.

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(f)\overline{F(g)}ds=\int_{-\infty}^{\infty} f\overline{g}dx\,.$$

5. Bu operatör tam olarak sonsuz katlılığa sahip dört tane eigen değere sahiptir.

Teorem(Convulasyon)3.2.5.2.4: f ve $g\in L_2\left[-\infty,\infty\right]$ olsun. Bunların konvulasyonları

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy. \tag{3.326}$$

Fourier transformasyonu ise

$$F(f*g)=\sqrt{2\pi}F(f)F(g) \tag{3.327}$$

İspat: $f*g$ genellikle $L_2\left[-\infty,\infty\right]$un bir fonksiyonu değildir. Cauchy Schwarz eşitsizliğinden,

$$|f*g|=\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy\right|$$

$$\leq\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-y)|^2 dy\right\}^{1/2}$$

$$= \|f\|\|g\|.$$

Buradan, $f * g$ sınırlıdır. Bir an için,

$$F(f * g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} g(x-y) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) F(g(x-y)) dy$$

olduğunu kabul edelim. Fakat

$$F(g(x-y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} g(x-y) dx = \frac{e^{isy}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isu} g(u) du = e^{isy} F(g).$$

Burada, $x = y + u$. Şimdi,

$$F(f * g) = F(g) \int_{-\infty}^{\infty} e^{isy} f(y) dy = \sqrt{2\pi} F(f) F(g)$$

elde edilir bu ise (3.327) nin doğruluğunu garantiler. $F(f).F(g)$ kare integrallenebilirdir. Bu halde,

$$F^*(\sqrt{2\pi} F(f) F(g)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} F(f) F(g) ds.$$

Denklemin doğruluğu

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} F(f) F(g) ds \right| \le \|F(f)\| \|F(g)\|$$

yardımıyla elde edilir. Şimdide,

$$F^*(\sqrt{2\pi} F(f) F(g)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(x-y)} F(g) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy$$

yazılır. Bu ise, $F^* F(f * g) = f * g$ dir. İntegrallenebilir bir fonksiyonun Fourier transformasyonu da integrallenebilirdir. Böylece $f * g$ sadece sınırlı değil aynı zamanda integrallenebilir olduğuda gösterilebilir.

$f(x) = L_2[0, \infty]$ olsun. $f(x) = f(-x)$ ise f fonksiyonun $L_2[-\infty, \infty]$ a uzanımı yapılabilir. Yani,

$$F(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{isx}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos sxf(x)dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\cos sxf(x)dx.$$

f çift ise $F(f)$ de bir çift fonksiyondur. Ters transformasyon kullanılırsa,

$$f(x)=F^{*}(F(f))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-isx}F(f)dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\cos sxF(f)ds\,. \tag{3.328}$$

Aynı zamanda,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f|^{2}dx=2\int_{0}^{\infty}|f|^{2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}|F(f)|^{2}dx=2\int_{0}^{\infty}|F(f)|^{2}ds.$$

Sonuç olarak çift bir fonksiyonun Fourier operatörü

$$F_{c}(f)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\cos sxf(x)dx\,. \tag{3.329}$$

Bu çift operatörün adjointi de,

$$F_{c}^{*}(F_{c}(f))=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\cos sxF_{c}(f)ds=f$$

ile verilir. Yani, tüm çift fonksiyonların Fourier transformasyonu kendisidir. Aynı zamanda, tüm f ve $g\in L_{2}\left[-\infty,\infty\right]$ için

$$\int_{0}^{\infty}F_{c}(f)\overline{F_{c}(g)}ds=\int_{0}^{\infty}f\overline{g}dx \tag{3.330}$$

$$F_{c}(\phi_{4n}(x))=\phi_{4n}(s) \tag{3.331}$$

$$F_{c}(\phi_{4n+2}(x))=-\phi_{4n+2}(s) \tag{3.332}$$

ifadelerinin doğruluğu kolaylıkla görülebilir. Böylece F_{C} Fourier cosinüs transformasyonu ise F_{C} nin eigen değerleri ∓ 1 dır.

Benzer şekilde $f(-x)=-f(x)$ ise

$$F_{s}(f)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\sin sxf(x)dx. \tag{3.333}$$

$$F_{s}^{*}(F_{s}(f))=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\sin sxF_{s}(f)ds\,. \tag{3.334}$$

$$\int_{0}^{\infty}F_{s}(f)\overline{F_{s}(g)}ds=\int_{0}^{\infty}f\overline{g}dx \tag{3.335}$$

yazılır. $F_s(\phi_{4n+1}(x)) = \phi_{4n+1}(s)$ ve $F_s(\phi_{4n+3}(x)) = \phi_{4n+3}(s)$. Böylece Fourier sinüs transformasyonu ∓ 1 eigen değerlerine sahip olur.

3.2.5.2.1. Fourier transformasyonunun uygulamaları

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\phi(y)dy = f(x) \tag{3.336}$$

integral denklemi uygulamalarda sıkça karşılaşılan bir tiptir. Bu ifadenin sol tarafı konvulasyondur. Eğer $K(x)$ ve $f(x) \in L_2\left[-\infty,\infty\right]$ ise (3.336) ifadesinin her iki tarafının Fourier transformasyonu alınarak

$\sqrt{2\pi}F(K)F(\phi) = F(f)$ ve $F(K) \neq 0$ ise

$$F(\phi) = \frac{F(f)}{\sqrt{2\pi}F(K)}. \tag{3.337}$$

(3.337) ifadesinin sağ tarafı $L_2\left[-\infty,\infty\right]$ ise,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F^*\left(\frac{F(f)}{F(K)}\right). \tag{3.338}$$

Örnek 3.2.5.2.1.1:

$$\phi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|}\phi(y)dy = f(x), \qquad f(x) \in L_2\left[-\infty,\infty\right] \tag{3.339}$$

denklemini sağlayan ϕ çözümünü bulalım.

Çözüm: (3.339) integral denklemi konvulasyon tipi bir integral denklemidir. Eğer $F(e^{-|x|})$ bilinirse ϕ çözümü kolaylıkla bulunur. Burada,

$$F(e^{-|x|}) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{1+s^2}$$

ifadesiyle beraber (3.339) denklemine Fourier transformasyonu uygulanırsa

$$F(\phi) - \lambda\sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{2/\pi}}{1+s^2}F(\phi) = F(f)$$

elde edilir. Yani,

$$F(\phi) = \frac{1+s^2}{1+s^2-2\lambda}F(f). \tag{3.340}$$

Eğer, $\lambda \geq \frac{1}{2}$ ise (3.340) ifadesi s nin bazı değerleri için sıfır olacaktır. λ nın diğer bütün değerleri için (reel veya kompleks) $F(f) \in L_2\left[-\infty,\infty\right]$ ise $F(\phi) \in L_2\left[-\infty,\infty\right]$ olacaktır. Ters Fourier transformasyonundan,

$$\phi = F^*\left(\frac{1+s^2}{1+s^2-2\lambda}F(f)\right). \tag{3.341}$$

Özel olarak, $f(x) = e^{-|x|}$ ise

$$\phi = F^*\left(\frac{\sqrt{2/\pi}}{1-2\lambda+s^2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-isx}}{1-2\lambda+s^2}ds.\ \lambda < \frac{1}{2} \text{ için } \phi = \frac{e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x|}}{\sqrt{1-2\lambda}}.$$

Not: (3.339) integral operatörünün sınırlı bir operatör olduğu açık değildir. Fakat Fourier transformasyonu ile bu operatörün sadece sınırlı değil aynı zamanda normunun da sınırlı olduğu görülebilir.

$$K\phi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\phi(y)dy \text{ ise } F(K\phi) = \frac{2}{1+s^2}F(\phi).\ F \text{ üniter olduğundan,}$$

$$\|F(K\phi)\| = \|K\phi\| \leq 2\|\phi\|$$

elde edilir. Bu ise $\|K\| \leq 2$ olduğunu gösterir.

Örnek 3.2.5.2.1.2: $g(x) \in L_2\left[-\infty,\infty\right]$ olsun.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = g(x) \tag{3.342}$$

denklemini sağlayan u çözümünü bulalım.

Çözüm: Burada u, u_x, u_{xx} ifadeleri $L_2\left[-\infty,\infty\right]$da olsun. Kısmi integrasyonla,

$$F(u_{xx}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}e^{isx}dx = -s^2F(u)$$

elde edilir. (3.342) ifadesine Fourier transformasyonu uygulanırsa

$$\frac{\partial F(u)}{\partial t} = -s^2F(u)$$

$$F(u)\big|_{t=0} = F(g)$$

ve burada bu diferansiyel denklemin çözülmesiyle

$$F(u) = e^{-s^2t}F(g)$$

elde edilir. Ters Fourier transformasyonu konvulasyonla beraber uygulanırsa

$$u = F^*(e^{-s^2t}F(g)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(e^{-s^2t})g(x-y)dy$$

elde edilir. $F(e^{-(x^2/2)}) = e^{-(s^2/2)}$ denklemini kullanarak değişken değiştirmeyle

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-(x^2/4t)}\right) = e^{-s^2t}.$$

Bunların neticesinde,

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(y^2/4t)}}{2\sqrt{\pi t}} g(x-y)dy \tag{3.343}$$

elde edilir. Sonuçta; $u,\ u_x,\ u_{xx} \in L_2[-\infty,\infty]$da olduğu gösterilebilir. Bu problem aynı zamanda ısı denklemi olarak bilinir.

Örnek 3.2.5.2.1.3:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{aligned} \tag{3.344}$$

dalga denklemini sağlayan u çözümünü bulalım. Burada $f(x) \in L_2[-\infty,\infty]$.

Çözüm: Bir önceki örnekte olduğu gibi Fourier transformasyonu alınırsa

$$\frac{\partial^2 F(u)}{\partial t^2} = -s^2 F(u),$$

$$F(u)\big|_{t=0} = F(f), \qquad \left.\frac{\partial \mathrm{F(u)}}{\partial \mathrm{t}}\right|_{t=0} = 0$$

elde edilir. Buradan da,

$$F(u) = F(f)\cos st$$

elde edilir. Ters Fourier transformasyonu uygulanırsa

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\cos st F(f)ds = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-is(x-t)} + e^{-is(x+t)}\right]F(f)ds.$$

$\cos(st) = \dfrac{e^{ist}+e^{-ist}}{2}$ ifadesi kullanılarak elde edildi. Bu ise,

$$u = \frac{1}{2}\left[f(x+t) + f(x-t)\right]. \tag{3.345}$$

Örnek 3.2.5.2.1.4:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \tag{3.346}$$

dalga denklemini sağlayan çözümü bulalım.

Çözüm: Her iki tarafa Fourier transformasyonu uygulanırsa

$$\frac{\partial^2 F(u)}{\partial t^2} = -s^2 F(u)$$

$$F(u)\big|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \mathrm{F(u)}}{\partial \mathrm{t}}\right|_{t=0} = F(g)$$

ve böylece

$$F(u) = \frac{1}{s} F(g) \sin st.$$

Kısmi integrasyonla,

$$\frac{1}{is} e^{isx} g(y)\, dy\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

kabulü altında,

$$F\left(\int_0^x g(y) dy\right) = \frac{i}{s} F(g)$$

olduğu gösterilebilir. Ters Fourier transformasyonundan

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \frac{1}{s} F(g) \sin st ds$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-is(x-t)} - e^{-is(x+t)}\right] F(\int_0^x g(y) dy) ds$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\int_0^{x-t} g(y) dy - \int_0^{x+t} g(y) dy\right] = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y) dy\,. \tag{3.347}$$

Örnek 3.2.5.2.1.5:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x+y)\phi(y) dy = f(x), \qquad f(x) \in L_2\left[-\infty, \infty\right] \tag{3.348}$$

denklemini sağlayan çözümü bulalım.

Çözüm: (3.348) denklemi konvulasyon tipi bir integral denklemi değildir. Fakat Fourier transformasyonu uygulanarak ve

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} K(x+y)e^{isx}dx = e^{-isy}F(K)$$

ile beraber $F(K)\neq 0$ olacak şekilde

$$\sqrt{2\pi}F(K)F^*(\phi) = F(f)$$

elde edilir. Buradan,

$$\phi = F\left(\frac{F(f)}{\sqrt{2\pi}F(K)}\right). \tag{3.349}$$

Örnek 3.2.5.2.1.6:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\phi(y)}{x+y}dy = f(x), \qquad f(x)\in L_2\left[0,\infty\right] \tag{3.350}$$

integral denkleminin çözümünü bulalım.

Çözüm: İlk bakışta Fourier transformasyonunun uygulanabilirliğini görmek kolay değildir. Fakat,

$$x = e^{2\xi}, \quad y = e^{2\eta}, \quad \phi(e^{2\eta})e^{\eta} = \psi(\eta), \quad f(e^{2\xi})e^{\xi} = g(\xi)$$

dönüşümleriyle verilen integral denklemi

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\eta)}{\cosh(\xi-\eta)}d\eta = g(\xi) \tag{3.351}$$

denklemine dönüşür. Bu konvulasyon tipi bir integral denklemidir. Dolayısıyla, bu son denkleme Fourier transformasyonu uygulanırsa

$$F(\psi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{F(g)}{F(\frac{1}{\cosh\xi})}$$

elde edilir. Bununla beraber,

$$F(\frac{1}{\cosh\xi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{is\xi}}{\cosh\xi}d\xi$$

integralini hesaplamak için rezidülerle ilgili integral yöntemleri ithal edilebilir.

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{is\xi}}{\cosh\xi}d\xi + \int_0^{\pi}\frac{e^{isz}}{\cosh z}i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\,d\theta\Big|_{z=\mathrm{Re}^{i\theta}} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{is\xi}}{\cosh\xi}d\xi$$

integrali $\left|z\right| = R$ çemberinin üst yarısını düşünmekle beraber $s>0$ almakla bu integrale katkı sıfır olur.

denkleminin kutup noktaları $\cosh\xi = 0$ denkleminin kökleridir. Bu kökler $\xi = (n+\frac{1}{2})\pi i$ olup $n = 0,1,2,....$ Bu noktalardaki rezidü,

$$\lim_{\xi\to(n+\frac{1}{2})\pi i} \frac{\left[\xi-(n+\frac{1}{2})\pi i\right]e^{is\xi}}{\cosh\xi} = -i(-1)^n e^{-s(2n+1)(\pi/2)} e^{-s(2n+1)(\pi/2)}$$

ile verilir. Böylece,

$$F(\frac{1}{\cosh\xi}) = \sqrt{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-s(2n+1)(\pi/2)} = \frac{\sqrt{\pi/2}}{\cosh(\pi/2)s}$$

istenilen sonuca varılır.

Not: $s<0$ olması halinde yukarıdaki contourun tersi alınarak aynı sonuç çıkarılabilir.

$$\phi(e^{2\xi})e^{\xi} = \psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\xi}\cosh\frac{\pi}{2}sF(g)ds \tag{3.352}$$

integral denkleminin varlığıyla istenilen sonuca varılır. Benzer olarak,

$$\phi(x) - \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\phi(y)}{x+y}dy = f(x)$$

denklemi analiz edilerek

$$\phi(e^{2\xi})e^{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-is\xi}\cosh(\pi/2)sF(g)}{\cosh(\pi/2)s-\lambda}ds$$

elde edilir. $\lambda<1$ olması halinde bu integral vardır. Bunu takiben (3.350) integral operatörünün sınırlı olduğu görülür. Gerçekten,

$$\left\|\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\phi(y)}{x+y}dy\right\| \le \|\phi\|. \tag{3.353}$$

Örnek 3.2.5.2.1.7:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty^*}\frac{\phi(y)}{x-y}dy = f(x), \quad f(x)\in L_2\left[-\infty,\infty\right] \tag{3.254}$$

operatörünün çözümünü bulalım.

Çözüm: (3.354) denkleminin sol tarafındaki operatör Hilbert transformasyonu olarak bilinir. $*$ notasyonundan esas değerli integral kastedilmektedir. Yani,

$$\int_{-\infty}^{\infty^*} \frac{\phi(y)}{x-y}dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(y)}{x-y}dy .$$

Buradan da,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\int_{-\infty}^{\infty^*}\frac{\phi(y)}{x-y}dydx = F(\phi)\int_{-\infty}^{\infty^*}\frac{e^{isy}}{y}dy \qquad (3.355)$$

elde edilir. Fakat,

$$\int_{-\infty}^{\infty^*}\frac{e^{isy}}{y}dy = \int_{-\infty}^{\infty^*}\frac{\cos sy}{y}dy + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin sy}{y}dy$$

denkleminde ilk integraldeki fonksiyon tek olduğundan bu integral sıfırdır. Buna binaen, s nin $\pm$ oluşuna göre $\operatorname{sgn} s = \mp 1$ gerçeğinden

$$\int_{-\infty}^{\infty^*}\frac{e^{isy}}{y}dy = 2i\int_{0}^{\infty}\frac{\sin sy}{y}dy = \pi i \operatorname{sgn} s \qquad (3.356)$$

ifadesi yazılır. (3.354) ifadesine Fourier transformasyonu uygulanırsa

$$i\operatorname{sgn} sF(\phi) = F(f)$$

elde edilir. (3.355) ve (3.356) denklemlerinin kullanılmasıyla

$$\phi(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty^*}\frac{f(y)}{x-y}dy \qquad (3.357)$$

bulunur. (3.354) denklemindeki integral operatörü geleneksel olarak Hilbert adıyla anılmaktadır ve literatürdeki gösterimi

$H(\phi) = f$ tersi ise $\phi = -Hf$

ile verilir. Bunun yanında, Hilbert operatörü

$$H(H(\phi)) = -\phi \qquad (3.358)$$

denklemini sağlar. Yukarıdaki değerlendirmelerden

$$F(H\phi) = -i\operatorname{sgn} sF(\phi)$$

elde edilir. Bu ise $H(\phi)\in L_2[-\infty,\infty]$ olduğu sonucuna götürür.

Örnek 3.2.5.2.1.8:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty^*}\frac{\phi(y)}{x-y}dy = f(x), \qquad f(x)\in L_2[0,\infty] \qquad (3.359)$$

integral denklemini çözelim.

Çözüm: (3.2.5.2.1.6) örneğindeki değişkenlerin aynısı kullanılırsa

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty^*}\frac{\psi(\eta)}{\sinh(\xi-\eta)}d\eta = g(\xi) \tag{3.360}$$

elde edilir. Buradan,

$$\int_{-\infty}^{\infty^*}\frac{e^{is\eta}}{\sinh\eta}d\eta = 2\pi i\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-ns\pi}\right] = \frac{\pi i\sinh \pi s/2}{\cosh \pi s/2}$$

ifadesi bilindikten sonra (3.360) nın çözümüne kolayca ulaşılır. (3.360) denklemi

$$F(\psi) = \frac{1}{i}\frac{\cosh \pi s/2}{\sinh \pi s/2}F(g)$$

denklemine indirgenir. C sabit ise

$$\psi(\xi) = C + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi-\eta)d\eta\int_{-\infty}^{\infty^*}\frac{e^{-is\eta}\cosh \pi s/2}{\sinh \pi s/2}ds \tag{3.361}$$

elde edilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty^*}\frac{C}{\sinh(\xi-\eta)}d\eta = 0$$

ifadesinin oluşundan (3.359) denkleminin homojen biçimi sıfırdan farklı (trivial olmayan) çözümlere sahiptir. (3.361) ifadesindeki iç integral daha önceden olduğu gibi rezidüler yardımıyla,

$$\int_{-\infty}^{\infty^*}\frac{e^{-is\eta}\cosh \pi s/2}{\sinh \pi s/2}ds = -2\pi i\left[\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-2n\eta}\right] = -2i\frac{\cosh\eta}{\sinh\eta}.$$

$$\psi(\xi) = C - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty^*}\frac{\cosh(\xi-\eta)}{\sinh(\xi-\eta)}g(\eta)d\eta .$$

Baştaki orijinal değişkenlere dönülürse,

$$\phi(x) = \frac{C}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty^*}\frac{x+y}{x-y}.\frac{f(y)}{\sqrt{yx}}dy \tag{3.362}$$

elde edilir. (3.353) da olduğu gibi

$$\left\|\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty^*}\frac{\phi(y)}{x-y}dy\right\| \le \|\phi\| \tag{3.363}$$

Örnek 3.2.5.2.1.9:

$$K\phi = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi^*}\frac{\sin y}{\cos x-\cos y}\phi(y)dy = f(x), \quad f(x)\in L_2[0,\pi] \tag{3.364}$$

integral denklemini analiz edelim.

Çözüm: Buradan,

$$K^*\phi = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi^*} \frac{\sin x}{\cos x - \cos y}\phi(y)dy \qquad (3.365)$$

olduğu kolaylıkla görülür. K nın $\sqrt{2/\pi}\sin nx$ üzerindeki etkisini belirleyelim. Bu küme $L_2[0,\pi]$ aralığında tam ortonormaldir. Şimdide K nın bu uzay üzerindeki etkisini hesaplayalım.

$$K\sin nx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi^*} \frac{\sin y \sin ny}{\cos x - \cos y}dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi^*} \frac{\cos(n-1)y - \cos(n+1)y}{\cos x - \cos y}dy$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi^*} \frac{\cos(n-1)y - \cos(n+1)y}{\cos x - \cos y}dy$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi^*} \frac{e^{i(n-1)y} - e^{i(n+1)y}}{\cos x - \cos y}dy.$$

Bu operasyonun son iki adımında simetrik özelliği hesaba katılmıştır. $e^{iy} = z$ denirse

$$K\sin nx = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{n-1} - z^{n+1}}{(z - e^{ix})(z - e^{-ix})}dz$$

elde edilir. Burada, C birim çemberdir. Bu integrallerin kutup noktaları çember üzerindedir. Böylece rezidü ile ilgili integral kavramı kullanılırsa rezidülerin yarısı alınmalıdır. Bu halde,

$$K\sin nx = \frac{-[\sin(n-1)x - \sin(n+1)x]}{2\sin x} = \cos nx, \quad n = 1,2,... \qquad (3.366)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$K^*\cos nx = \sin nx, \quad n=1,2,... \qquad (3.367)$$

Yani, $K^*1 = 0$. (3.366) ile (3.367) birlikte düşünülürse

$$K^*K\sin nx = \sin nx \qquad (3.368)$$

elde edilir. Yani, $KK^* = \mathrm{I}$ dır. Benzer olarak,

$$KK^{*}\cos nx = \cos nx, \qquad n \neq 0$$
$$KK^{*}1 = 0 \tag{3.369}$$

Buradan da, $KK^{*}1 = 0$ olduğundan KK^{*} birim değildir. Şimdi (3.364) denklemine dönülürse,

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$$

biçiminde yazılarak

$$K\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx = f(x) \tag{3.370}$$

elde edilir. Eğer $\int_0^{\pi} f(x)dx = 0$ ise açıkça (3.364) ifadesi (buna denk olan (3.370) ifadesi) çözüme sahiptir. Bu durumda,

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(y)\cos ny dy \, ,$$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(y)\cos ny dy \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \tag{3.371}$$

elde edilir. Bu ise (3.364) ifadesinin bir çözümüdür. Bu ifade aynı zamanda

$$\phi(x) = K^{*} f = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi^{*}} \frac{\sin x}{\cos x - \cos y} f(y)dy \tag{3.372}$$

formatında yazılır.

Örnek 3.2.5.2.1.10:

$$K^{*}\phi = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi^{*}} \frac{\sin x}{\cos x - \cos y} \phi(y)dy = f(x), \qquad f(x) \in L_2\left[0,\pi\right] \tag{3.373}$$

denklemini analiz edelim.

Çözüm:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx$$

şeklinde olsun. Bu halde,

$$K^{*}\phi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx = f(x)$$

elde edilir. Buradan da a_n katsayıları

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(y) \sin ny dy$$

ile verilir. Bir önceki problemde çözümün varlığı için f üzerine bazı koşullar yüklendi. Burada böyle bir durum söz konusu değildir. Çünkü, tüm $f(x) \in L_2[0,\infty]$ için çözümler mevcuttur. Gerçekten tüm $n \geq 1$ için a_n ler $f(x)$ tarafından belirlenir. Burada a_0 keyfi olarak seçilir. Bunun neticesinde,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(y) \sin ny dy \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} a_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi^*} \frac{\sin y}{\cos x - \cos y} f(y) dy \tag{3.374}$$

yazılır. Bu (3.374) çözümü a_0 keyfi olduğundan tek değildir.

Örnek 3.2.5.2.1.11:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi^*} \frac{\phi(y)}{x-y} dy = f(x), \qquad f(x) \in L_2[0,\infty], \tag{3.375}$$

denklemini tekrar ele alalım.

Çözüm:

$$y = \frac{1}{1+\cos\eta} - \frac{1}{2}, \qquad x = \frac{1}{1+\cos\xi} - \frac{1}{2}$$

$$\psi(\eta) = \frac{\phi(y)\sin\eta}{1+\cos\eta}, \qquad g(\xi) = \frac{f(x)\sin\xi}{1+\cos\xi}.$$

değişkenleriyle

$$K^*\psi = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi^*} \frac{\sin\xi}{\cos\xi - \cos\eta} \psi(\eta) d\eta = g(\xi)$$

elde edilir. (3.374) ifadesinin kullanımıyla

$$\psi(\xi) = C + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi^*} \frac{\sin\eta}{\cos\xi - \cos\eta} g(\eta) d\eta .$$

Burada, C keyfi sabittir. Orijinal değişkenlere dönülürse (3.375)in çözümü olan

$$\phi(x) = \frac{C}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty^*} \frac{(x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2})}{x-y} \sqrt{\frac{y}{x}} f(y) dy . \tag{3.376}$$

(3.362) ile (3.376) denklemlerinin ilk bakışta birbirine özdeş olmadığı görülür. Buna rağmen farkları

$$\int_0^{\infty^*} \frac{(x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2})}{x-y}\sqrt{\frac{y}{x}}f(y)dy - \frac{1}{2}\int_0^{\infty^*} \frac{x+y}{x-y}\frac{f(y)}{\sqrt{yx}}dy \; = \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{\infty} \frac{y-\frac{1}{2}}{y+\frac{1}{2}}\frac{f(y)}{\sqrt{y}}dy \,.$$

Bu fark ise $\frac{C}{\sqrt{x}}$ cinsinden absorbe edilebilir.

Diğer bir alternatif metot ise aşağıdaki gibidir. $\psi(\eta)$ ve $g(\xi)$ değişkenleri yerine,

$$\overline{\psi}(\eta) = \frac{\phi(y)}{1+\cos\eta}, \qquad \overline{g}(\xi) = \frac{f(x)}{1+\cos\xi}$$

denklemleri tanımlanırsa (3.375) denklemi

$$K\overline{\psi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi^*} \frac{\sin\xi}{\cos\xi - \cos\eta}\overline{\psi}(\eta)d\eta = -\overline{g}(\xi)$$

şeklini alır. (3.372) denklemi kullanılırsa ve $\int_0^{\pi} \overline{g}(\eta)d\eta = 0$ ile beraber

$$\overline{\psi}(\xi) = -K^*\overline{g}(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi^*} \frac{\sin\xi}{\cos\xi - \cos\eta}\overline{g}(\eta)d\eta$$

bulunur. Orijinal değişkenlerine dönülürse

$$\int_0^{\infty} \frac{f(y)}{\sqrt{y}}dy = 0 \qquad (3.377)$$

ile beraber,

$$\phi(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty^*} \frac{(y+\frac{1}{2}\big/x+\frac{1}{2})\sqrt{x/y}\,f(y)dy}{x-y} \,. \qquad (3.378)$$

(3.376) ile (3.377) çözümleri arasındaki fark (3.377) şartı ile beraber $(\frac{C}{\sqrt{x}})$ formundadır.

Örnek 3.2.5.2.1.12:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty^*} \left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}\right)\phi(y)dy = f(x), \qquad f(x) \in L_2\left[0,\infty\right] \qquad (3.379)$$

denklemini çözelim.

Çözüm: (3.2.5.2.1.6) örneğindeki aynı değişkenler kullanılır ve bu denkleme Fourier transformasyonu uygulanırsa

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty^*}\left[\frac{1}{\cosh(\xi-\eta)}-\frac{1}{\sinh(\xi-\eta)}\right]\psi(\eta)d\eta = g(\xi).$$

Burada,

$$F(\psi)=\frac{\cosh \pi s/2}{1-i\sinh \pi s/2}F(g),$$

$$\psi(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi-\eta)d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-is\eta}\cosh \pi s/2}{1-i\sinh \pi s/2}ds.$$

Son integraldeki iç ifade rezidü yardımıyla,

$$\psi(\xi)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty^*}\frac{g(\xi-\eta)e^{\eta}}{\sinh 2\eta}d\eta.$$

Orijinal değişkenlere dönülürse,

$$\phi(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty^*}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}\right)f(y)dy. \qquad (3.380)$$

$$\left\|\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty^*}\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right)\phi(y)dy\right\|\le\|\phi\|. \qquad (3.381)$$

(3.381) denkleminin de doğruluğunu göstermek kolaydır.

(3.380) nın çözümünü bulmak için diğer bir alternatif metot ise aşağıdaki gibidir. (3.379) denklemi $L_2\left[0,\infty\right]$da tanımlıdır. Fakat, bu $\phi(x)$, $\left[0,\infty\right)$dan $\left(-\infty,0\right]$a tek fonksiyon gibi düşünerek $L_2\left[-\infty,\infty\right]$a genişletilebilir (yani uzanımı alınabilir). $f(x)$ çift bir fonksiyon olarak düşünülürse (3.379) denklemi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty^*}\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right)\phi(y)dy = f(x)$$

şeklinde yazılabilir. (3.354) denklemindeki H operatörü kullanılırsa

$$\frac{1}{2}\left[\mathrm{H}\phi(-x)-\mathrm{H}\phi(x)\right]=f(x)$$

yazılır. $\mathrm{H}^2=-\mathrm{I}$ ile beraber

$$-\frac{1}{2}\left[\phi(-x)-\phi(x)\right]=\mathrm{H}f(x).$$

$f(x)$ ve $\phi(x)$ in simetrik özelliği kullanılırsa

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}\right) f(y)dy \ .$$

Örnek 3.2.5.2.1.13:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1^*} \frac{\phi(y)}{x-y} dy = f(x), \qquad f(x) \in L_2[-1,1] \tag{3.382}$$

airfoil integral denklemini aynı yöntemle çözelim.

Çözüm:

$$x = \cos\xi, \qquad\qquad y = \cos\eta$$
$$g(\xi) = f(\cos\xi)\sin\xi, \qquad \psi(\eta) = \phi(\cos\eta)\sin\eta$$

değişkenleri yardımıyla denklem

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi^*} \frac{\sin\xi}{\cos\xi - \cos\eta}\psi(\eta)d\eta = g(\xi) \ . \tag{3.383}$$

Örnek 3.2.5.2.1.10 ve özellikle (3.374) denkleminin kullanımıyla beraber orijinal değişkenlere dönülürse

$$\phi(x) = \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1^*} \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \frac{f(y)}{x-y} dy. \tag{3.384}$$

Burada, C sabittir. Eğer,

$$\overline{g}(\xi) = f(\cos\xi), \qquad \overline{\psi}(\eta) = \phi(\cos\eta)$$

denklemleri kullanılmış olsaydı (3.383) denklemi yerine

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi^*} \frac{\sin\eta}{\cos\xi - \cos\eta}\overline{\psi}(\eta)d\eta = \overline{g}(\xi)$$

integral denklemi yazılırdı. Bunun çözümü ise (3.372) nin kullanımıyla

$$\phi(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1^*} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} \frac{f(y)}{x-y} dy \tag{3.385}$$

ile verilir. Bu çözüm,

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy = 0 \tag{3.386}$$

şartına bağlıdır. (3.384) ve (3.385) denklemlerinin karşılaştırılmasıyla iki çözümün farkı (3.386) ile beraber $\dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}}$ biçimindedir.

3.2.5.3. Hankel transformasyonu

Fourier transformasyon teorisi çok değişkenli fonksiyonlara genişletilebilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|^2\, dxdy < \infty. \tag{3.387}$$

Bu halde,

$$F(s,\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{i(sx+\sigma y)}dxdy \tag{3.388}$$

tanımlanır. Yani önce x e göre sonrada y e göre transformasyon alınır. Elde edilen transformasyon ise s ve σ 'a bağlı bir fonksiyon olur. Ters transformasyon uygulanırsa,

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(s,\sigma)e^{-i(sx+\sigma y)}dsd\sigma \tag{3.389}$$

elde edilir. $f(x,y)$ fonksiyonu, $f(x,y) = f(r)e^{in\theta}$ biçiminde olsun. Burada r ve θ kutupsal koordinatlardır. Dolayısıyla, (3.387) şartı

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} |f(r)|^2\, rdrd\theta = 2\pi\int_0^{\infty} r\,|f(r)|^2\, dr < \infty \tag{3.390}$$

biçiminde yazılır. Eğer, $s = \rho\cos\alpha,\ \sigma=\rho\sin\alpha$ ise (3.388) ve (3.389) ile

$$F(\rho,\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(r)e^{i[r\rho\cos(\theta-\alpha)+n\theta]}rdrd\theta \tag{3.391}$$

ve

$$f(r)e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} F(\rho,\alpha)e^{-ir\rho\cos(\theta-\alpha)}\rho d\rho d\alpha \tag{3.392}$$

denklemlerine indirgenir. Bessel fonksiyonları için standart integral reprezentasyonlarından (sembollerinden) bir tanesi

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i[z\cos\alpha+n\alpha-n\pi/2]}d\alpha \tag{3.393}$$

ile verilir. Bu sembol (3.391) denklemindeki integralde kullanılırsa

$$F(\rho,\alpha) = e^{in(\alpha+\pi/2)}\int_0^{\infty} rf(r)J_n(rp)dr\ . \tag{3.394}$$

Benzer düşünceyle,

$$f(r)e^{in\theta}=e^{in\theta}\int_0^{\infty}\rho\left(\int_0^{\infty}r_1 f(r_1)J_n(r_1\rho)dr_1\right)J_n(r\rho)d\rho\,. \tag{3.395}$$

$$\int_0^{\infty} r\left|f(r)\right|^2 dr<\infty \tag{3.396}$$

şartı altındaki tüm $f(r)$ fonksiyonları için

$$H(f)=\int_0^{\infty} rf(r)J_n(r\rho)dr \tag{3.397}$$

tanımlansın. Dolayısıyla (3.397) denklemi

$$f(r)=\int_0^{\infty}\rho H(f)J_n(r\rho)d\rho \tag{3.398}$$

biçimine indirgenir. (3.397) denklemine Hankel transformasyonu denir. (3.398) denklemi ise ters Hankel transformasyonu olarak bilinir. (3.396) ile her $f(r)$ için

$$H^2(f)=f\,.$$

Teorem 3.2.5.3.1: $L_2\left(r\right)$ (3.396) şartını sağlayan tüm fonksiyonların Hilbert uzayını göstersin. Bu taktirde, Hankel transformasyonu üniter bir operatör olmakla beraber self-adjointtir.

Örnek 3.2.5.3.2:

$$\phi(x)-\lambda\int_0^{\infty} yJ_n(xy)\phi(y)dy=f(x)$$

integral denklemini çözelim. Burada, $f(x)\in L_2\left(\left[0,\infty\right],x\right)$ dır. Yani,

$$\int_0^{\infty} x\left|f(x)\right|^2 dx<\infty\,.$$

Çözüm: Hankel transformasyonu kullanılırsa

$$\phi-\lambda H(\phi)=f\,.$$

Bu ise,

$$\phi=\frac{f+\lambda H(f)}{1-\lambda^2},\qquad \lambda^2\neq 1$$

olduğu açıktır. Bunun açıklığını gösterelim. $\phi-\lambda H(\phi)=f$ ifadesinin her iki tarafına Hankel transformasyonu uygulanırsa

$$H\phi-\lambda H^2(\phi)=Hf\,,\qquad\qquad (H^2\phi=\phi)$$

$$H\phi - \lambda\phi = Hf\ , \qquad\qquad \phi - \lambda H(\phi) = f$$

denkleminlerinden, $H\phi = \dfrac{\phi - f}{\lambda}$, $H\phi - \lambda\phi = Hf$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\phi = \frac{f + \lambda H(f)}{1-\lambda^2}.$$

Hankel transformasyonu kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde de kullanılabilir.

Örnek 3.2.5.3.3:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u(r,0) = f(r) \tag{3.399}$$

integral denklemini çözelim**.** Burada, $\int_0^\infty r\left|f(r)\right|^2 dr < \infty.$

Çözüm: Verilen denklemin her iki tarafına Hankel transformasyonu uygulanırsa

$$H\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \int_0^\infty r\frac{\partial u}{\partial t} J_0\left(\rho r\right) dr = \frac{\partial}{\partial t} H(u)$$

$$H\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial r} r\frac{\partial u}{\partial r}\right) J_0(\rho r) dr$$

$$= \int_0^\infty u\left(\frac{\partial}{\partial r} r\frac{\partial}{\partial r} J_0(\rho r)\right) dr = -\rho^2 \int_0^\infty r u J_0(\rho r) dr = -\rho^2 H(u).$$

Ayrıca, $J_0(\rho r)$ Bessel fonksiyonu

$$J_0''(\rho r) + \frac{1}{r} J_0'(\rho r) + \rho^2 J_0(\rho r) = 0$$

diferansiyel denklemini sağladığı bilinmektedir. Bu halde, (3.399) kısmi diferansyel denklemi

$$H(u)\big|_{t=0} = H(f(r))$$

başlangıç şartını sağlamak şartıyla

$$\frac{\partial}{\partial t} H(u) + \rho^2 H(u) = 0$$

denklemine indirgenir. Buradan

$$H(u) = e^{-\rho^2 t} H(f(r))$$

elde edilir. Buradan çözüm

$$u = H(e^{-\rho^2 t} H(f(r))) = \int_0^\infty \rho e^{-\rho^2 t} (\int_0^\infty r_1 f(r_1) J_0(\rho r_1) dr_1) J_0(\rho r) d\rho$$

$$= \int_0^\infty r_1 f(r_1) \left(\int_0^\infty \rho e^{-\rho^2 t} J_0(\rho r_1) J_0(\rho r) d\rho \right) dr_1. \quad (3.400)$$

3.2.5.4. Mellin transformasyonu

Şimdiye kadar ele alınan transformasyonlara benzer özellik gösteren bir transformasyonda Mellin transformasyondur. Bu transformasyonu anlamak için Fourier transformasyonu ile başlamakta fayda vardır.

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx\,, \quad f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{-isx} dx\,.$$

$L_2\left[-\infty, \infty\right]$ üzerinde tanımlı olan Fourier çiftlerini ele alalım. $u = e^x$ ise

$$\int_0^\infty \frac{1}{u} \left| f(lnu) \right|^2 du < \infty \quad (3.401)$$

sağlanmak şartıyla

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(lnu) u^{is-1} du \quad (3.402)$$

ve

$$f(lnu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(f) u^{-is} ds\,. \quad (3.403)$$

(3.401), (3.402) ve (3.403) denklemlerinde $s = i\sigma$ ve $f(lnu) = \sqrt{2\pi}\, f(u)$ yazılır ve (3.402) nin sağ tarafına da $M(\sigma)$ denirse

$$M(\sigma) = \int_0^\infty f(u) u^{\sigma-1} du \quad (3.404)$$

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} M(\sigma) u^{-\sigma} d\sigma \quad (3.405)$$

denklemleri

$$\int_0^\infty \frac{1}{u} \left| f(u) \right|^2 du < \infty \quad (3.406)$$

şartıyla elde edilir. (3.404) denklemine f nin Mellin transformasyonu denir. (3.405) denklemi ise ters Mellin transformasyonu olarak bilinir. (3.406) denkleminden Mellin transformasyonu $\operatorname{Re}\sigma = 0$ olacak şekilde $L_2\left(\left[0,\infty\right], \frac{1}{u}\right)$ uzayındaki tüm fonksiyonlar için tanımlıdır.

$k \in R$ olmak üzere $u^k f(u) \in L_2\left(\left[0,\infty\right], \frac{1}{u}\right)$ olsun. Bu halde

$$M(\sigma) = \int_0^\infty f(u)u^{\sigma+k-1}du \tag{3.407}$$

ve

$$u^k f(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} M(\sigma)u^{-\sigma}d\sigma. \tag{3.408}$$

(3.407) ve (3.408) denklemlerinde $\sigma + k$ yerine σ yazılırsa ($\operatorname{Re}\sigma = 0$ yerine $\operatorname{Re}\sigma = k$)

$$\int_0^\infty u^{2k-1}\left|f(u)\right|^2 du < \infty \tag{3.409}$$

sağlanmak şartıyla,

$$M(\sigma) = \int_0^\infty f(u)u^{\sigma-1}du \tag{3.410}$$

ve

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+k}^{i\infty+k} M(\sigma)u^{-\sigma}d\sigma \tag{3.411}$$

elde edilir. Fourier transformasyonları için Parseval formülüne,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(f)\right|^2 ds = \int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2 dx$$

benzer bir formül Mellin transformasyonları içinde yazılabilir. Yani;

$$\int_0^\infty \frac{1}{u}\left|f(u)\right|^2 dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left|M(\sigma)\right|^2 d\sigma. \tag{3.412}$$

Eğer daha genel olarak, $N(\sigma) = \int_0^\infty g(u)u^{\sigma-1}du$ ve $g(u)$ (3.406) denklemini sağlıyorsa

$$\int_0^\infty \frac{1}{u} f(u)\overline{g(u)}du = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} M(\sigma)\overline{N(\sigma)}d\sigma. \tag{3.413}$$

Daha genel bir ifadeyle $u^k f(u) \in L_2\left([0,\infty], \frac{1}{u}\right)$ ve $u^k g(u)$ aynı sınıftan ise

$$\int_0^\infty u^{2k-1} f(u)\overline{g(u)}du = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} M(\sigma+k)\overline{N(\sigma+k)}d\sigma. \tag{3.414}$$

Fourier transformasyonları için geçerli olan formüllerin çoğuna benzer formüller Mellin transformasyonu ve Mellin transformasyonun tersi içinde geçerlidir. Örneğin, burada konvulasyon

$$(f*g)(u) = \int_0^\infty \frac{1}{v} f(v) g(\frac{u}{v}) dv \tag{3.415}$$

ile tanımlanır. Buradan da,

$$\int_0^\infty \left(f*g\right)(u)u^{\sigma-1}du = M(\sigma)N(\sigma). \tag{3.416}$$

Mellin transformasyonun bazı uygulamalarını düşünelim. Bu uygulamaların bir taneside belli sonsuz serilerin toplamı anlamında kullanılabilir. $f(u)$ ve $M(\sigma)$ uygun fonksiyonlar olsun. Ayrıca $M(\sigma)$ f nin bir Mellin transformasyonu olsun.

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+k}^{i\infty+k} M(\sigma)u^{-\sigma}d\sigma.$$

Buradan da,

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+k}^{i\infty+k} M(\sigma)\sum_{n=1}^\infty n^{-\sigma}d\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+k}^{i\infty+k} M(\sigma)\zeta(\sigma)d\sigma \tag{3.417}$$

elde edilir. Burada,

$$\zeta(\sigma) = \sum_{n=1}^\infty n^{-\sigma} \tag{3.418}$$

ile verilir. Bu ise kompleks fonksiyonlar teorisinde meşhur zeta fonksiyonu olarak bilinir. Bu fonksiyon $\zeta(\sigma)$ ve $\mathrm{Re}(\sigma) > 1$ bölgesinde tanımlıdır. $\sigma = 1$ olması halinde bunun bir basit kutup noktasına sahip olduğu ve rezidüsünün de

$$\lim_{\sigma\to 1}(\sigma-1)\zeta(\sigma) = 1. \tag{3.419}$$

Zeta'nın bilinen önemli bir özelliği

$$\pi^{-\sigma/2}\Gamma(\frac{\sigma}{2})\zeta(\sigma) = \pi^{-(1-\sigma)/2}\Gamma\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)\zeta(1-\sigma) \tag{3.420}$$

fonksiyonel denklemiyle verilir. Bu denklem yardımıyla $\zeta(\sigma)$ nın tüm σ düzlemine genişletilebilir. Yine bu fonksiyonelin sadece bir singüler noktaya sahip olduğu ve bu singüler noktanında yukarıda ifade edildiği gibi $\sigma=1$ olduğu görülür.

Örnek 3.2.5.4.1:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2x^2}$$

serisinin toplamını bulalım.

Çözüm: Verilen serinin Mellin transformasyonu kullanılırsa

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos ux}{u^2x^2}u^{\sigma-1}du=\frac{x^{-\sigma}2^{\sigma-3}\sqrt{\pi}\,\Gamma((\sigma-2)/2)}{\Gamma((3-\sigma)/2)}, \qquad 2<\operatorname{Re}\sigma<3$$

$$S=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+k}^{i\infty+k}\frac{x^{-\sigma}2^{\sigma-3}\sqrt{\pi}\,\Gamma((\sigma-2)/2)\xi(\sigma)}{\Gamma((3-\sigma)/2)}d\sigma, \qquad 2<k<3$$

elde edilir. $\sigma=2,1,0$ noktaları integralin basit kutup noktalarıdır. Bu rezidüler sırasıyla,

$$\frac{\zeta(2)}{x^2},\quad \frac{-\pi}{2x},\quad \frac{1}{4}$$

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

standart sonuçlarıyla verilir. Dolayısıyla serinin toplamı

$$S=\frac{\pi^2}{6x^2}-\frac{\pi}{2x}+\frac{1}{4}.$$

Fourier sinüs ve Fourier cosünüs transformasyonları sırasıyla

$$T(f)=\int_0^{\infty}f(x)K(xy)dx \tag{3.421}$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}T(f)K(xy)dy \tag{3.422}$$

denklemlerini sağlarlar. Daha genel bir ifadeyle,

$$T(f)=\int_0^{\infty}f(x)K(xy)dx \tag{3.423}$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}T(f)H(xy)dy \tag{3.424}$$

var mıdır? Sorusuna yanıt arayalım. Mellin transformasyonu sorunun yanıtını kolaylaştırmaktadır. (3.423) ve (3.424) denklemlerinin Mellin transformasyonları

$$L(\sigma)=\int_0^\infty K(u)u^{\sigma-1}du\,,\ M(\sigma)=\int_0^\infty H(u)u^{\sigma-1}du$$

ile verilsin. Dolayısıyla,

$$\int_0^\infty T(f)y^{\sigma-1}dy=\int_0^\infty f(x)\left(\int_0^\infty K(xy)y^{\sigma-1}dy\right)dx$$

$$=\int_0^\infty f(x)x^{-\sigma}dx\int_0^\infty K(u)u^{\sigma-1}du\ =L(\sigma)\int_0^\infty f(x)x^{-\sigma}dx$$

$$\int_0^\infty f(x)x^{-\sigma}dx=\int_0^\infty T(f)\left(\int_0^\infty H(xy)x^{-\sigma}dx\right)dy$$

$$=\int_0^\infty T(f)y^{\sigma-1}dy\int_0^\infty H(u)u^{-\sigma}du\ =M(1-\sigma)\int_0^\infty T(f)y^{\sigma-1}dy\,.$$

Son iki denklemin sağlanması için

$$L(\sigma)M(1-\sigma)=1 \tag{3.425}$$

gereklidir. Özellikle, $K(u)=H(u)$ ise $L(\sigma)M(1-\sigma)=1$ denklemi

$$L(\sigma)L(1-\sigma)=1 \tag{3.426}$$

denklemine indirgenir. Fourier sinüs transformasyonu durumunda

$$K(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin u$$

vardır ve böylece,

$$L(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin u\, u^{\sigma-1}du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(\sigma)\sin\frac{\pi\sigma}{2}\,.$$

Buradan,

$$L(\sigma)M(1-\sigma)=\frac{2}{\pi}\Gamma(\sigma)\Gamma(1-\sigma)\sin\frac{\pi\sigma}{2}\sin\frac{\pi}{2}(1-\sigma)$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{\sin\pi\sigma}\sin\frac{\pi}{2}\sigma\cos\frac{\pi\sigma}{2}=1\,.$$

Yukarıdaki operasyonda, $\Gamma(\sigma)\Gamma(1-\sigma)=\dfrac{\pi}{\sin\pi\sigma}$ formüllü kullanıldı. Dolayısıyla, Fourier sinüs transformasyonu self-resiprokaldir. Benzer olarak, Fourier cosinüs transformasyonu için aynı işlemler yapılırsa

$$L(\sigma)L(1-\sigma)=1$$

şartı ile beraber

$$L(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos u u^{\sigma-1}du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(\sigma)cos\frac{\pi\sigma}{2}$$

elde edilir. Fakat, Hankel transformasyonları resiprokal değildir. Ama basit bir modifikasyonla bu formata getirilebilir. $K(u)=\sqrt{u}J_n(u)$ olacak şekilde

$$\sqrt{\rho}H(f)=\int_0^\infty \sqrt{r}f(r)\sqrt{r\rho}J_n(r\rho)dr \tag{3.427}$$

$$\sqrt{r}f(r)=\int_0^\infty \sqrt{\rho}H(f)\sqrt{r\rho}J_n(r\rho)d\rho \tag{3.428}$$

biçiminde yazılır.

$$L(\sigma)=\int_0^\infty \sqrt{u}J_n(u)u^{\sigma-1}du=\frac{2^{\sigma-1/2}\Gamma\left[(n+\sigma)/2+\frac{1}{4}\right]}{\Gamma\left[(n-\sigma)/2+\frac{3}{4}\right]}$$

ile

$$L(\sigma)L(1-\sigma)=\frac{2^{\sigma-1/2}\Gamma\left[(n+\sigma)/2+\frac{1}{4}\right]}{\Gamma\left[(n-\sigma)/2+\frac{3}{4}\right]}\,\frac{2^{1/2-\sigma}\Gamma\left[(n-\sigma)/2+\frac{3}{4}\right]}{\Gamma\left[(n+\sigma)/2+\frac{1}{4}\right]}$$

elde edilir. Bu ise (3.426) şartıdır.

3.2.5.5. Projeksiyon metodu

$$H\phi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(y)}{x-y}dy \tag{3.429}$$

ifadesinin bir Hilbert transformasyonu olduğu bilinmektedir. H operatörü $L_2[-\infty,\infty]\to L_2[-\infty,\infty]$a götürür. Ayrıca,

$$H^2\phi = -\phi \tag{3.430}$$

ve

$$F(H\phi) = i\,\mathrm{sgn}\, sF(\phi) \tag{3.431}$$

özelliklerini sağladığını ve tersi $-H$ ve $\|H\| = 1$ olduğu bilgilerimizin dahilindedir. $\phi \in L_2\left[-\infty,\infty\right]$ olsun. Bu taktirde, $\phi(x)$, $\phi_+(x)$ ve $\phi_-(x)$ ile tanımlanabilir.

$$\phi_+(x) = \frac{1}{2}\left[\phi + iH\phi\right] \tag{3.432}$$

ve

$$\phi_-(x) = \frac{1}{2}\left[\phi - iH\phi\right] \tag{3.433}$$

Fourier transformasyonu alınırsa

$$\begin{aligned} F(\phi_+) &= \frac{1}{2}\left[F(\phi) + iF(H\phi)\right] = \frac{1}{2}\left[F(\phi) - \mathrm{sgn}\, sF(\phi)\right] \\ &= 0, \qquad s > 0 \\ &= F(\phi), \qquad \mathrm{s}<0\,. \end{aligned} \tag{3.434}$$

Benzer olarak,

$$\begin{aligned} F(\phi_-) &= F(\phi), \qquad \mathrm{s}>0 \\ &= 0, \qquad s < 0\,. \end{aligned} \tag{3.435}$$

Bunlar yardımıyla,

$$\phi(x) = \phi_+ + \phi_- \tag{3.436}$$

ve

$$F(\phi) = F(\phi_+) + F(\phi_-) \tag{3.437}$$

bulunur. $s = 0$ da ki davranışı önemsizdir. Çünkü, $L_2\left[-\infty,\infty\right]$daki tüm fonksiyonlar Hilbert uzayında kalmak şartı ile tek nokta olarak modife edilebilir.

$L_2\left[-\infty,\infty\right]$ uzayını L_2^+ ve L_2^- alt uzaylarının kombinasyonu olarak yazabiliriz.

$$L_2^{\pm} = \left\{\phi \in L_2\left[-\infty,\infty\right] \middle\| F(\phi) = 0, s \gtrless 0\right\}. \tag{3.438}$$

Açık olarak, $\phi \in L_2^{\pm}$ için

$$H\phi = {}^{-}_{+} i\phi \tag{3.439}$$

ϕ_+ yı L_2^+ nın benzer olarak ϕ_- yi L_2^- nin üzerinde $\phi(x)$ in projeksiyonu olarak görebiliriz. (3.432) ve (3.433) denklemleriyle Hilbert uzayında ki bu dekompozisyon tektir. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

$$L_2\left[-\infty,\infty\right] = L_2^+ \cup L_2^- \tag{3.440}$$

$$\left\{0\right\} = L_2^+ \cap L_2^-. \tag{3.441}$$

Burada, (3.441) ifadesi aşağıdaki argümanın bir sonucudur. Eğer $\phi \in L_2^+ \cap L_2^-$ tüm s ler için $F(\phi) = 0$ öyle ki $\phi = 0$. ($L_2\left[-\infty,\infty\right]$ uzayında sıfıra denk olan Null fonksiyon demektir.)

Örnek 3.2.5.5.1: $f(x) \in L_2\left[-\infty,\infty\right]$ için

$$\phi - \frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty^*} \frac{\phi(y)}{x-y}dy = f(x) \tag{3.442}$$

integral denklemini çözelim**.**

Çözüm: (3.432) ve (3.433) denklemleriyle (3.442)

$$\phi_+ + \phi_- + i\lambda(\phi_+ - \phi_-) = f_+ + f_-$$

şeklinde yazılabilir veya buna denk olarak

$$(1+i\lambda)\phi_+ - f_+ = -(1-i\lambda)\phi_- + f_-.$$

(3.441)den dolayı yukarıdaki denklemlerin her iki yanının sıfır olması gerekir.

$$\phi_+ = \frac{f_+}{1+i\lambda}, \quad \phi_- = \frac{f_-}{1-i\lambda}, \quad \phi = \phi_+ + \phi_- = \frac{(1-i\lambda)f_+ + (1+i\lambda)f_-}{1+\lambda^2}$$

yazılır ve buradan da,

$$\phi = \frac{f + \lambda Hf}{1+\lambda^2}\ . \tag{3.443}$$

$\lambda \neq \mp i$ için (3.342) integral denklemi çözüme sahiptir.

Eğer, $\lambda = -i$ ise $f_- = 0$ böylece $\phi_+ = \frac{1}{2}f_+$. Böylece, ϕ_- keyfidir.

$L_2^\pm$ uzayları farklı bir şekilde karakterize edilebilir. $\phi \in L_2^+$ olsun. Bu halde,

$F(\phi) = 0 \quad$ s>0

ve

$$\phi = F^{*}F(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} F(\phi)e^{-isx}ds. \qquad (3.444)$$

Şimdi de,

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} F(\phi)e^{-isz}ds. \qquad (3.445)$$

denklemini düşünelim. Burada, z komplekstir. $y = \operatorname{Im} z > 0$ için $\phi(z)$ analitik bir fonksiyondur ve sınırdaki değeri $y = 0$ üzerindeki değeri (3.444) ile verilir. Genellikle, ϕ nin analitik uzanımı $\operatorname{Im} z < 0$ için olmayabilir, çünkü (3.445) denkleminin $\operatorname{Im} z < 0$ için değeri yoktur. Benzer olarak $\phi \in L_2^-$ ise

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} F(\phi)e^{-isz}ds. \qquad (3.446)$$

ifadesi $\operatorname{Im} z < 0$ için analitik bir fonksiyondur.

Teorem 3.2.5.5.2: $\phi \in L_2^+$ olsun. $z = x + iy$ ve $y \geq 0$ için $a(z)$ sürekli ve $y > 0$ için ($z = \xi$ hariç mertebesi n olan) analitik, $z = \xi$ noktası hariç $a(z)$ sınırlı olsun. Yani, $z = \xi$ komşuluğu hariç tüm üst yarı düzlemde $a(z)$ sınırlıdır. Bu halde uygun $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ için

$$a(x)\phi(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{(x-\xi)^k} \in L_2^+ .$$

Eğer $a(z)$ nin kutup noktaları yoksa $a(x)\phi(x) \in L_2^+$.

İspat: $F(\phi(x)) = \Phi(s)$, $F(a(x)e^{-\in|x|}) = A_{\in}(s)$, $\in > 0$ konvulasyon teoreminden,

$$F(a(x)\phi(x)e^{-\in|x|}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\sigma)A_{\in}(s-\sigma)d\sigma$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\Phi(\sigma)A_{\in}(s-\sigma)d\sigma . \qquad (3.447)$$

Çünkü, $s > 0$ için $\Phi(s) = 0$. İntegralin yakınsaklığı için $\in > 0$ gereklidir.

$$A_{\in}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} a(x)e^{-\in|x|+isx}dx$$

integral denkleminin yapısını incelemek gerekir. $s > 0$ hali incelenecektir üstelik $\operatorname{Re}\xi > 0$ olduğunu kabul edelim. $\operatorname{Re}\xi \leq 0$ durumu gözle görülebilir bir modifikasyonla ele alınabilir. $a(z)$ singüler noktaya sahip olmadığından Countour integrasyonuyla,

$$\int_{-\infty}^{0} a(x)e^{\in x+isx}dx = -i\int_{0}^{\infty} a(iy)e^{i\in y-sy}dy$$

yazılır. Koordinat düzleminin birinci çeyreğinde Contour integrasyonuyla

$$\int_{0}^{\infty} a(x)e^{-\in x+isx}dx = R + i\int_{0}^{\infty} a(iy)e^{i\in y-sy}dy\,.$$

Burada R, $z=\xi$ kutup noktasından gelen rezidüdür. Eğer,

$$a(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{(x-\xi)^k}+b(z)$$

şeklinde yazılırsa, burada $b(z)$, $z=\xi$ noktasında analitiktir. Bu halde uygun $r_1,\ r_2,...,\ r_n$ değerleri için

$$R=(\sum_{1}^{n} r_k(is-\in)^{k-1})e^{(is-\in)\xi}$$

kolaylıkla bulunur.

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x)e^{-\in|x|+isx}dx = R+2\int_{0}^{\infty} a(iy)\sin\in ye^{-sy}dy \tag{3.448}$$

yazılır. $|a(iy)|\leq M$ olduğundan son integral için bir üst yazılabilir. Yani,

$$\left|\int_{0}^{\infty} a(iy)\sin\in ye^{-sy}dy\right| \leq M\in\int_{0}^{\infty} ye^{-sy}dy=\frac{M\in}{s^2}\,.$$

(3.447) denklemine dönülür ve (3.448) integral denkleminde $\in\to 0$ gönderilirse

$$F(a(x)\phi(x))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\Phi(\sigma)(\sum_{1}^{n} r_k i^{k-1}(s-\sigma)^{k-1})e^{i(s-\sigma)\xi}d\sigma\,, \qquad s>0\,. \tag{3.449}$$

Şimdi de,

$$b(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{(z-\xi)^k} \tag{3.450}$$

ifadesini ele alalım.

$$F(b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} b(x)e^{isx}dx=\sqrt{2\pi}i\sum_{1}^{n}\frac{\alpha_k(is)^{k-1}e^{is\xi}}{(k-1)!},\quad s>0\,. \tag{3.451}$$

$s>0$ için (3.449) ifadesi $e^{is\xi}p(s)$ biçimindedir. Burada, $p(s)$ derecesi $(n-1)$ olan bir polinomdur. Daha kesin bir ifadeyle,

$$F(a(x)\phi(x)) = e^{is\xi}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}s^j\sum_{k=j+1}^{n}\frac{r_k i^{k-1}(k-1)!}{\sqrt{2\pi}(k-1-j)!}\int_{-\infty}^{0}\Phi(\sigma)(-\sigma)^{k-1-j}e^{-i\sigma\xi}d\sigma.$$

Yukarıdaki argümanlarla beraber (3.451) denklemi kullanılarak, (3.450) denkleminde uygun $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ seçimiyle

$$F(a(x)\phi(x)-b(x)) = 0, \qquad s>0$$

yazılır. Sonuç olarak,

$$a(x)\phi(x)-b(x)\in L_2^+.$$

Özellikle $a(z)$ üst yarı düzlemde kutup noktalarına sahip değilse $a(x)\phi(x)\in L_2^+$ dir.

Benzer olarak L_2^- için teorem yazılır.

Örnek 3.2.5.5.3:

$$\phi(x)-\frac{\lambda}{\pi}\int_0^{\infty^*}\frac{\phi(y)}{x-y}dy = f(x), \qquad f(x)\in L_2\left[0,\infty\right] \tag{3.452}$$

İntegral denklemini çözelim.

Çözüm: $\lambda^2 \notin \left(-\infty,-1\right]$ olsun. Bu kabulün niçin yapıldığını problemin çözümündeki gelişimden anlaşılacaktır.

$$\int_1^{\infty} x\left|f\right|^2 dx < \infty \quad \text{ve} \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}\left|f\right|^2 dx<\infty \tag{3.453}$$

Bu şartlar kesin olarak gerekli değildir, fakat bu şartlar (3.452)yi tüm λ lar için çözmemizi kolaylaştırır.

$L_2\left[-\infty,\infty\right]$ uzayında çalışabilmek ve projeksiyon metodunu kullanabilmek için $f(x)$ ve $\phi(x)$ i $\left(-\infty,0\right)$ aralığı üzerinde genişletmemiz gerekir. Bu aşağıda ki şekilde yapılır.

$$f(x)=\phi(x)=0, \qquad x<0\,.$$

Bu halde (3.452) denklemi

$$\phi_+ + \phi_- + i\lambda(\phi_+ - \phi_-) = f, \qquad x>0$$

$$\phi_+ + \phi_- = 0, \qquad\qquad x<0$$

ve

$$\phi_- = -\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\phi_+ + \frac{f}{1-\lambda i}, \qquad\qquad x>0$$

$$= -\phi_+, \qquad x < 0 \tag{3.454}$$

şeklinde yeniden yazılır.

$$p(x) = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}, \qquad x > 0$$
$$= 1, \qquad x < 0$$

şeklinde tanımlanırsa (3.454) denklemi daha kompakt bir biçimde ifade edilir. Yani,

$$\phi_- = -p(x)\phi_+ + \frac{f}{1-\lambda i}, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{3.455}$$

Projeksiyon metodunu uygulayabilmek için (3.455) denklemini iki grup halinde incelememiz gerekir. Yani, bu gruplardan biri L_2^+ ve diğeri ise L_2^- uzayında olmalıdır. Bu amaca ulaşmak için aşağıdaki işlem takip edilir.

$$\rho = \frac{1}{2\pi i}\log\frac{1-\lambda i}{1+\lambda i} \tag{3.456}$$

olsun. Bu halde,

$$|\mathrm{Re}\,\rho| < \frac{1}{2} \tag{3.457}$$

ve

$$e^{-2\pi i\rho} = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$$

olur. Şimdi de,

$$q(z) = (e^{-\pi i}z)^{\rho}$$

denklemini ele alalım. Burada $z = x < 0$ için $q(z) = (-x)^{\rho} = e^{\rho ln(-z)}$ burada $ln(-x)$ reeldir. Şimdi,

$$q^+(x) = \lim_{y\to+0} q(z), \quad q^-(x) = \lim_{y\to-0} q(z)$$

olsun. Bu halde,

$$q^+(x) = e^{-\pi i\rho}x^{\rho}, \qquad x > 0$$
$$= (-x)^{\rho}, \qquad x < 0 \tag{3.458}$$

ve

$$q^-(x) = e^{\pi i\rho}x^{\rho}, \qquad x > 0$$
$$= (-x)^{\rho}, \qquad x < 0. \tag{3.459}$$

Böylece,

$$p(x)=\frac{q^{+}(x)}{q^{-}(x)}. \tag{3.460}$$

(3.460) denklemini kullanarak (3.455) denklemi

$$q^{-}\phi_{-}=-q^{+}\phi_{+}+\frac{fq^{-}}{1-\lambda i} \tag{3.461}$$

biçiminde yazılır. (3.453) ve (3.457) gerçeğinden dolayı $fq^{-}\in L_2\left[-\infty,\infty\right]$ dir. Eğer λ fixed tutulursa (3.453) daha uygun bir şart ile ifade edilir. Yani,

$$\int_0^{\infty} x^{2\rho}\left|f\right|^2 dx<\infty\,. \tag{3.462}$$

$fq^{-}\in L_2\left[-\infty,\infty\right]$ olduğundan L_2^{+} ve L_2^{-} nin ayrışımı olarak yazılabilir. Bu taktirde (3.461) denklemi

$$q^{-}\phi_{-}-\frac{(fq^{-})_{-}}{1-\lambda i}=-\left[q^{+}\phi_{+}-\frac{(fq^{-})_{+}}{1-\lambda i}\right]. \tag{3.463}$$

Eğer $q^{\pm}$ sınırlı ise (3.463) denklemine 3.2.5.5.2. teorem uygulanabilir. Bu taktirde, sol taraf L_2^{-} ve sağ taraf L_2^{+} dadır ve her iki yanı sıfırdır. Fakat, (3.458) ve (3.459) denklemleri $q^{\pm}$ nin ya $x=0$ ya da $x=\infty$ da $\operatorname{Re}\rho$ nun işaretine bağlı olarak sınırsız olduğunu gösterir. $q^{\pm}$ büyük x ler için sınırsız olacak şekilde $\operatorname{Re}\rho>0$ (benzer olarak $\operatorname{Re}\rho<0$) olsun. (3.463) denkleminin her iki tarafı $x-i$ ile bölünürse

$$\frac{q^{-}}{x-i}\phi_{-}-\frac{(fq^{-})_{-}}{(x-i)(1-\lambda i)}=-\left[\frac{q^{+}}{x-i}\phi_{+}-\frac{(fq^{-})_{+}}{(x-i)(1-\lambda i)}\right]. \tag{3.464}$$

$\phi_{-}\in L_2^{-}$ ve $\dfrac{q^{-}}{(x-i)}$ tüm x ler için sınırlı ve alt yarı düzlemde analitiktir. Teorem 3.2.5.5.2 den dolayı $\dfrac{q^{-}\phi_{-}}{(x-i)}\in L_2^{-}$. Benzer olarak $(fq^{-})_{-}\in L_2^{-}$ ve $\dfrac{1}{(x-i)}$ tüm x ler için sınırlı ve alt yarı düzlemde analitik olduğundan (3.464) denkleminin sol tarafı L_2^{-} dir. (3.464) nın sağ tarafı L_2^{+} da değildir, çünkü tüm x ler için ϕ_{+} ve $(fq^{-})_{+}$ nın katsayıları tüm reel x ler için sınırlı fakat $x=i$ de basit kutup noktasına sahiptir.

Teorem 3.2.5.5.2 den uygun α seçimi ile $\dfrac{\alpha}{(x-i)}$ çıkarılarak sağ taraf L_α^+ da olacak şekilde yazılır. Bu halde,

$$\frac{q^-}{x-i}\phi_- - \frac{(fq^-)_-}{(x-i)(1-\lambda i)} - \frac{\alpha}{x-i} = -\left[\frac{q^+}{x-i}\phi_+ - \frac{(fq^-)_+}{(x-i)(1-\lambda i)}\right] - \frac{\alpha}{x-i}. \tag{3.465}$$

Şimdi (3.365)in sağ tarafı L_2^+ dadır. Fakat,

$$F\left(\frac{1}{x-i}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{isx}}{x-i}dx = \sqrt{2\pi}ie^{-s}, \qquad s>0$$

$$= 0, \qquad s<0$$

sol tarafı L_2^- dedir. Yani, (3.465)in her iki tarafının özdeş olarak sıfır olduğu ve bunun neticesinde,

$$\phi_+ = \frac{(fq^-)_+}{q^+(1-\lambda i)} - \frac{\alpha}{q^+}$$

$$\phi_- = \frac{(fq^-)_-}{q^-(1-\lambda i)} + \frac{\alpha}{q^-}.$$

Nihayet, yukarıya bir ekleme yaparak $x>0$ için $q^\pm$ için kesin bir reprezantasyon kullanılarak, (3.432) ve (3.433) ile beraber

$$\phi = \frac{f}{1+\lambda^2} + \frac{\lambda x^{-\rho}}{1+\lambda^2}Hfx^\rho - 2\pi i\alpha\sin\pi\rho x^{-\rho}. \tag{3.466}$$

Buradan da α nın belirlenmesi gerekir. Bunun yapılabilmesi için (3.465) in sol tarafını ele almamız gerekir. İlk terim için

$$\left|\int_1^\infty \frac{q^-}{x-i}\phi_- dx\right| \le K\int_1^\infty x^{\rho-1}|\phi_-|dx \le K\left\{\int_1^\infty x^{2\rho-2}dx\int_1^\infty |\phi_-|^2 dx\right\}^{1/2} < \infty$$

üst sınırı elde edilir. Benzer olarak,

$$\left|\int_1^\infty \frac{(fq^-)_-}{x-i}dx\right| < \infty$$

Fakat, (3.365) in sol tarafı özdeş olarak sıfır olduğundan

$$\left|\int_1^\infty \frac{\alpha}{x-i}dx\right| < \infty$$

gereklidir. Tüm $\alpha \neq 0$ için yukarıdaki integral ıraksaktır.

Amaca ulaşmak için $\alpha = 0$ seçilmelidir. Neticede (3.452) nin çözümü

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{1+\lambda^2} + \frac{\lambda x^{-\rho}}{(1+\lambda^2)\pi} \int_0^{\infty^*} \frac{f(y)y^{\rho}}{x-y} dy. \tag{3.467}$$

Örnek 3.2.5.5.4:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty^*} \frac{\phi(y)}{x-y} dy = f(x) \tag{3.468}$$

integral denklemini çözelim.

Çözüm: Bu problem farklı metotlarla örnek (3.2.5.2.1.8) ve örnek (3.2.5.2.1.11)de çözüldü. Fakat, (3.452) denkleminde $f = -\lambda f$ ve $\lambda \to \infty$ için (3.452) denklemi (3.468)e indirgenir. (3.467)de olduğu gibi aynı operasyon uygulanarak çözüm

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty^*} \sqrt{\frac{y}{\lambda}} \frac{f(y)}{x-y} dy. \tag{3.469}$$

$\lim\limits_{\lambda \to \infty} \rho = \frac{1}{2}$. (3.460) ifadesindeki $p(x)$in nasıl olduğu ifadesine dönelim. Bunun için aşağıdaki ön teorem yazılır.

Teorem 3.2.5.5.5: $\phi(\tau) \in L_2[-\infty, \infty]$ ve

$$q(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\tau)}{\tau - z} d\tau \tag{3.470}$$

integral denklemini ele alalım. Burada, $y = \operatorname{Im} z \neq 0$. $q(z)$, $y > 0$ ve $y < 0$ için sınırlı ve burada analitiktir. $y = 0$ üzerindeki sınır değerleri

$$\lim_{y \to \pm 0} q(z) = q^{\pm}(x) = \pm\phi(x) + iH\phi(x). \tag{3.471}$$

İspat: Eğer $y \neq 0$ ise

$$|q(z)| \leq \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\tau)|^2 d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau - x)^2 + y^2} \right\}^{1/2} < \infty$$

yazılır. Yani, $q(z)$ sınırlıdır. Benzer hesaplamayla $q(z)$, z'nin sürekli bir fonksiyonu olduğu gösterilebilir. C üst yarı düzlemde kapalı bir eğri olsun. Bu halde,

$$\int_C q(z) dz = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) d\tau \int_C \frac{dz}{\tau - z} = 0.$$

Çünkü, τ C nin dışındadır. Dolayısıyla, Morera teoreminden $q(z)$ analitik olmalıdır. Şimdi sınır değerlerini belirlemek için $q(z)$'nin x'in bir fonksiyonuymuş gibi düşünülerek Fourier transformasyonu alınır. Bu halde,

$$F(q(z)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} q(x+iy)e^{isx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\tau)d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{isx}}{\tau - z}dx.$$

$s>0$ ise üst yarı düzlemdeki Contouru ve $s<0$ ise alt yarı düzlemdeki Contourları kapatılabilir. $y>0$ ise

$$F(q(z)) = 0, \qquad s>0$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{sy}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\tau)e^{is\tau}d\tau, \qquad s<0.$$

$y \to 0_+$

$$F(q^+(x)) = 0, \qquad s>0$$

$$= 2F(\phi), \qquad s<0.$$

Benzer olarak,

$$F(q^-(x)) = -2F(\phi), \qquad s>0$$

$$= 0, \qquad s<0.$$

Böylece,

$$F(q^+ + q^-) = -2\operatorname{sgn} sF(\phi)\,,\ F(q^+ - q^-) = 2F(\phi).$$

$$F(H\phi) = i\operatorname{sgn} sF(\phi)$$

doğruluğu kullanılırsa

$$q^+ + q^- = 2iH\phi \qquad (3.472)$$

ve

$$q^+ - q^- = 2\phi. \qquad (3.473)$$

Bunlarda, (3.471) denkemine denktir. Bu teorem yardımıyla (3.460) denkleminin ayrışımını bulmak için bir metot sunmak mümkündür.

Teorem 3.2.5.5.6:

$$\lim_{|x|\to\infty} p(x) = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to\infty}\log p(x) = 0 \ \text{üstelik,} \ \lim_{x\to-\infty}\log p(x) = 0$$

olsun. $\log p(x) \in L_2\left[-\infty,\infty\right]$. Bu halde $\operatorname{Im} z \neq 0$ için sınırlı ve analitik bir $q(z)$ fonksiyonu vardır. Yani,

$$p(x) = \frac{q^+(x)}{q^-(x)}. \tag{3.474}$$

Burada,

$$q^{\pm}(x) = \lim_{y \to \pm 0} q(z).$$

İspat: $\phi(x)$ yerine $\frac{1}{2}\log p(x)$ yazılarak Teorem 3.2.5.5.5 uygulanır. Bu halde ϕ_+ ve ϕ_-,

$$\log p = \log q^+ - \log q^-, \; iH \log p = \log q^+ + \log q^-$$

ve

$$\log q(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log p(\tau)}{\tau - z} d\tau. \tag{3.475}$$

$\log p(x)$ üzerindeki kabulden dolayı (3.475) denklemi $\log q(z)$ fonksiyonun

$$q^{\pm} = \exp\frac{1}{2}\{iH \log p \pm \log p\}$$

sınır değerleri ile verildiğini ifade eder. Bu değerlendirmeden,

$$\frac{q^+}{q^-} = p(x).$$

Örnek 3.2.5.5.7:

$$\begin{aligned} p(x) &= a, \qquad |x| < 1 \\ &= 1, \qquad |x| > 1 \end{aligned}$$

tanımlansın, burada $a \notin (-\infty, 0]$. Bu taktirde, $p(x)$ Teorem 3.2.5.5.4 ün şartlarını sağlar. Şimdi,

$$\log q(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log p(\tau)}{\tau - z} d\tau = \frac{\log a}{2\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{d\tau}{\tau - z} = \frac{\log a}{2\pi i}\log\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

yazılır. $|x| > 1$ için,

$$q^{\pm} = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\log a / 2\pi i}$$

ile verilir. $|x| < 1$ içinde

$$q^{\pm}=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\log a/2\pi i} a^{\pm 1/2}. \tag{3.476}$$

Örnek 3.2.5.5.8:

$$\phi(x)-\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(y)}{x-y}dy=f(x), \qquad f(x)\in L_2\left[-1,1\right] \tag{3.477}$$

integral denklemini çözelim. Burada $\lambda^2 \notin \left(-\infty,-1\right]$ ve $\int_{-1}^{1}\frac{\left|f(x)\right|^2}{1-x^2}dx<\infty$.

Çözüm: $L_2\left[-1,1\right]$ kapalı aralığını $L_2\left[-\infty,\infty\right]$ kapalı aralığına genişletelim.

$$\phi(x)=f(x)=0, \qquad |x|>1$$

tanımlansın. Örnek 3.2.5.5.3 de olduğu gibi (3.477) integral denklemi

$$\phi_+ + \phi_- + i\lambda(\phi_+ - \phi_-)=f, \qquad |x|<1$$

$$\phi_+ + \phi_- = 0, \qquad |x|>1$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu

$$\phi_- = -p(x)\phi_+ + \frac{f}{1-\lambda i} \tag{3.478}$$

biçiminde tek denklem altında yazılır. Burada,

$$p(x)=\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}, \qquad |x|<1$$

$$=1, \qquad |x|>1$$

ile verilir. Teorem 3.2.5.5.6 nın sonuçları kullanılarak

$$p(x)=\frac{q^+}{q^-}$$

ve

$$q^{\pm}=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\rho}, \qquad |x|>1$$

$$=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\rho}e^{\pm i\pi\rho}, \qquad |x|<1. \tag{3.479}$$

Burada yine,

$$\rho=\frac{1}{2\pi i}\log\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}.$$

λ nın üzerindeki hipotezlerden dolayı $\operatorname{Re}\rho < \frac{1}{2}$. (3.478) denklemi

$$q^-\phi_- - \frac{(fq^-)_-}{1-\lambda i} = -\left[q^+\phi_+ - \frac{\left(fq^-\right)_+}{1-\lambda i}\right] \tag{3.480}$$

şeklinde yeniden yazılır. $\operatorname{Re}\rho \geq 0$ olsun. $\operatorname{Re}\rho < 0$ durumu benzer bir şekilde ele alınır. $x=-1$ de $q^{\pm}$ sınırsızdır. Teorem 3.2.5.5.3 ün uygulanabilirliği için sınırlılığa gerek vardır. Bu hedefe varmak için (3.380) denklemi $\frac{(x+1)}{(x-i)}$ ile çarpılır. Dolayısıyla,

$$\frac{x+1}{x-i}q^-\phi_- - \frac{\left[(x+1)/(x-i)\right](fq^-)_-}{1-\lambda i}$$
$$= -\left[\frac{x+1}{x-i}q^+\phi_+ - \frac{\left[(x+1)/(x-i)\right]\left(fq^-\right)_+}{1-\lambda i}\right]. \tag{3.481}$$

Teorem 3.2.5.5.2.2 den dolayı bu denklemin sol tarafı L_2^- dedir fakat sağ tarafı $x=i$ den dolayı L_2^+ da değildir. Bu problemi çözmek için (3.481) denkleminin her iki tarafından $\frac{\alpha}{(x-i)}$ çıkarılarak L_2^+ elde edilir. $\frac{\alpha}{(x-i)} \in L_2^-$ olduğundan dolayı sol taraf yine L_2^- uzayındadır.

$$\frac{x+1}{x-i}q^-\phi_- - \frac{\left[(x+1)/(x-i)\right](fq^-)_-}{1-\lambda i} - \frac{\alpha}{x-i}$$
$$= -\left[\frac{x+1}{x-i}q^+\phi_+ - \frac{\left[(x+1)/(x-i)\right]\left(fq^-\right)_+}{1-\lambda i} + \frac{\alpha}{x-i}\right]. \tag{3.482}$$

$L_2^+ \cap L_2^- = \{0\}$ olduğundan (3.482) integral denkleminin her iki tarafı sıfır olur. Bu ise $\phi^{\pm}$ nin α nın kombinasyonu biçiminde yazmamızı sağlar. Yani,

$$q^-\phi_- = \frac{(fq^-)_-}{1-\lambda i} + \frac{\alpha}{x+1}, \quad q^+\phi_+ = \frac{(fq^-)_+}{1-\lambda i} - \frac{\alpha}{x+1}.$$

$$\int_{-1}^{1}\left|q^-\phi_- - \frac{\left(fq^-\right)_-}{1-\lambda i}\right|dx < \infty$$

denkleminin doğruluğu kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla,

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{\alpha}{x+1}\right|dx<\infty .$$

Böylece, $\alpha = 0$ dır. Nihayet çözüm,

$$\phi=\frac{f}{1+\lambda^2}+\frac{2\lambda}{\pi(1+\lambda^2)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\rho}\int_{-1}^{1^*}\frac{f(y)}{x-y}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{\rho}dy . \tag{3.483}$$

Örnek 3.2.5.5.9: λ ve f üzerinde ki sınırlamalar örnek 3.2.5.5.8 deki gibi olsun. Bu halde,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1^*}\frac{\phi(y)}{x-y}dy = f(x), \qquad f(x)\in L_2\left[-1,1\right] \tag{3.484}$$

integral denklemini çözelim.

Çözüm: Bu problem daha önce örnek farklı bir metotla çözüldü. Eğer (3.477) denkleminde $f=-\lambda f(x)$ ve $\lambda\to\infty$ gönderilirse

$$\phi=-\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\int_{-1}^{1^*}\frac{f(y)}{x-y}\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}dy. \tag{3.485}$$

3.2.5.6. Wiener-Hopf tekniği-I

$$\phi(x)-\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\left\{\int_{|x-y|}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\right\}\phi(y)dy=0 \tag{3.486}$$

integral denklemini göz önüne alalım. Bu integral denklemi

$$\phi(x)-\int_{0}^{\infty}K(x-y)\phi(y)dy = f(x), \qquad f(x)\in L_2\left[0,\infty\right] \tag{3.487}$$

integral denkleminin özel bir durumudur. (3.487) integral denkleminde aralık $\left(-\infty,\infty\right)$a genişletilirse bu integral denklemi Fourier transformasyonu yardımıyla çözülebilir. (3.486) veya (3.487) integral denkleminin çözüm metodu N. Wiener ve E. Hopf metodu yardımıyla çözülecektir ve bu metod literatürde Wiener–Hopf tekniği olarak bilinmektedir. (3.487) tipi integral denkleminin çözümü için bir önceki kısımda tartışılan projeksiyon metodu kullanılacaktır.

$$\phi(x)= f(x)=0, \qquad x<0 \tag{3.488}$$

yardımıyla (3.487) integral denklemi $\left(-\infty,\infty\right)$ aralığına genişletilebilir.

$$g(x) = -\int_{0}^{\infty} K(x-y)\phi(y)dy, \qquad x<0$$

$$= 0, \qquad\qquad x>0 \qquad (3.489)$$

ile yeni bir $g(x)$ fonksiyonu tanımlansın. Bu taktirde (3.487) denklemi

$$\phi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\phi(y)dy = f(x) + g(x) \qquad (3.490)$$

biçiminde yazılır. $x>0$ için (3.490) denklemi (3.487) ye ve $x<0$ için bu denklem (3.489) yardımıyla özdeş fonksiyona indirgenir. $g(x)$, (3.487) nin çözümü olan $\phi(x)$ e bağlı olduğu bilinmektedir. (3.490) denklemine Fourier transformasyonu uygulanırsa,

$$F(\phi) - \sqrt{2\pi}F(K)F(\phi) = F(f) + F(g). \qquad (3.491)$$

(3.491) ifadesini elde etmek için sözü edilen tüm fonksiyonlar $L_2\left[-\infty,\infty\right]$dadır. (3.491) denklemini çalışmak yerine Ters Fourier transformasyonu çalışmak daha uygundur. (3.490) denklemine Ters Fourier transformasyonu uygulanırsa

$$F^*(\phi) - \sqrt{2\pi}F^*(K)F^*(\phi) = F^*(f) + F^*(g)$$

veya buna denk olarak,

$$p(s)F^*(\phi) - F^*(f) = F^*(g). \qquad (3.492)$$

Burada,

$$p(s) = 1 - \sqrt{2\pi}F^*(K). \qquad (3.493)$$

(3.492) yi çözmek için Projeksiyon metodu kullanılacaktır. Diğer bir ifadeyle (3.492) denklemini $L_2^{\pm}$ nin ayrışımı olacak şekilde yazalım. (3.488) den dolayı

$$F(F^*(\phi(x)) = \phi(x) = 0, \qquad x<0 \text{ için.}$$

Böylece, $F^*(\phi) \in L_2^-$. Benzer olarak, $F^*(f) \in L_2^-$ ve $F^*(g) \in L_2^+$. Dolayısıyla,

$$p(s)F_-^*(\phi) - F_-^*(f) = F_+^*(g).$$

$$p(s) = \frac{q^-(s)}{q^+(s)} \qquad (3.494)$$

biçiminde yazılır ve Teorem 3.2.5.5.6 uygulanır. Teoremi uygulamak için $p(s)$

$$\lim_{|s|\to\infty} p(s) = 1 \tag{3.495}$$

ve

$$\log p(s) \in L_2\left[-\infty,\infty\right] \tag{3.496}$$

şartlarını sağlamalıdır. Bu şartlarla (3.487) denkleminde $K(x)$ çekirdeği üzerine ek koşullar tanımlamamızı zorlar. Yani,

$$\lim_{|s|\to\infty} F^*(K) = 0\,. \tag{3.497}$$

Genellikle, $K(x) \in L_2\left[-\infty,\infty\right]$ ise (3.497) geçerli olmaz. Bu nedenle (3.497) denklemi genel $K(x) \in L_2\left[-\infty,\infty\right]$ şartına yeni bir yükleme yapmamız gerektiğini önerir. Bu şart,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|K(x)\right| dx < \infty\,. \tag{3.498}$$

Eğer (3.498) sağlanırsa Riemann-Lebesque teoremine göre (3.497) doğrudur. Eğer (3.497) sağlanırsa $\log p(s)$,

$$\lim_{s\to\infty} \log p(s) = 0$$

denklemini sağlayacak şekilde tanımlanır. Fakat, yukarıdaki işlem $s \to -\infty$ olması halinde geçerli değildir. Bazı n tamsayıları için,

$$\lim_{s\to-\infty} \log p(s) = 2n\pi i \tag{3.499}$$

olabilir. Bir an için (3.499) denkleminde $n = 0$ olsun. $|s|$ yeterince büyükse (3.497) den dolayı ,

$$\left|F^*(K)\right| < \in$$

vardır. Bu halde,

$$\left|\log p(s)\right| = \left|\log(1 - \sqrt{2\pi} F^*(K)\right| \le \frac{\sqrt{2\pi}\left|F^*(K)\right|}{1 - \sqrt{2\pi}\left|F^*(K)\right|} \le \frac{\sqrt{2\pi}\left|F^*(K)\right|}{1 - \in}$$

yazılır. Çünkü, $F^*(K) \in L_2\left[-\infty,\infty\right]$. Sonuç olarak $\log p(s) \in L_2\left[-\infty,\infty\right]$. Teorem 3.2.5.5.6 dan dolayı,

$$p(s) = \frac{q^-(s)}{q^+(s)}\,.$$

Burada,

$$q^{-}(s)=\sqrt{p(s)}\exp\left\{-\frac{i}{2}H\log p(s)\right\} \tag{3.500}$$

$$q^{+}(s)=\frac{1}{\sqrt{p(s)}}\exp\left\{-\frac{i}{2}H\log p(s)\right\}. \tag{3.501}$$

Nihayet (3.493),

$$q^{-}F_{-}^{*}(\phi)-q^{+}F_{-}^{*}(f)=q^{+}F_{+}^{*}(g) \tag{3.502}$$

formatında yazılır. Burada, q^{+} ve q^{-} sırasıyla üst ve alt yarı düzlemlerde sınırlı ve analitik fonksiyonun sınır değerleridir. Teorem 3.2.5.5.2 den dolayı $q^{-}F_{-}^{*}(\phi)\in L_2^{-}$ ve $q^{+}F_{+}^{*}(q)\in L_2^{+}$ dir. $q^{+}F_{-}^{*}(f)$ fonksiyonu

$$q^{+}F_{-}^{*}(f)=(q^{+}F_{-}^{*}(f))_{+}+(q^{+}F_{-}^{*}(f))_{-}$$

şeklinde yazılabilir. (3.432) ve (3.433) denklemlerinden

$$(q^{+}F_{-}^{*}(f))_{\pm}=\frac{1}{2}\left[(q^{+}F_{-}^{*}(f)\pm iH(q^{+}F_{-}^{*}(f)\right].$$

Bu halde (3.502) denklemi,

$$q^{-}F_{-}^{*}(\phi)-(q^{+}F_{-}^{*}(f))_{-}=(q^{+}F_{-}^{*}(f))_{+}+q^{+}F_{+}^{*}(g) \tag{3.503}$$

şeklini alır. (3.503) denkleminin sol yanı L_2^{-}de sağ yanı ise L_2^{+}dadır. $L_2^{+}\cap L_2^{-}=\{0\}$ olduğundan her iki yanıda sıfır olmak zorundadır. Bu halde,

$$F_{-}^{*}(\phi)=\frac{\left(q^{+}F_{-}^{*}(f)\right)_{-}}{q^{-}}. \tag{3.504}$$

Fakat,

$$F_{-}^{*}(\phi)=F^{*}(\phi),\qquad F_{-}^{*}(f)=F^{*}(f)$$

ifadesinden dolayı (3.487) denkleminin çözümü

$$\phi=F\left(\frac{\left(q^{+}F^{*}(f)\right)_{-}}{q^{-}}\right). \tag{3.505}$$

Yukarıda ki prosedürden dolayı (3.505) in çözümü tektir. $f(x)=0$ için (3.504) denkleminden $\phi(x)=0$ özdeş olarak orijinal denklemi sağlar.

Örnek 3.2.5.6.1:

$$p(x)=\frac{x^{2}+a^{2}}{x^{2}+1},\qquad \operatorname{Re}a>0 \tag{3.506}$$

fonksiyonunu düşünelim.

Çözüm:

$$p(x) = \frac{q^{-}(x)}{q^{+}(x)}$$

sağlayacak şekilde q^{+} ve q^{-} değerlerini bulalım. $p(x)$ açık olarak (3.495) ve (3.496) şartını sağlar. Dolayısıyla, ifade edilen genel prosedür uygulanabilir. $\operatorname{Re} a > 0$ şartı (3.495) ve (3.496) şartlarını sağlaması için gereklidir. Büyük $|x|$ değerleri için $p(x) = 1 + O(1/x^2)$ olması halinde (3.496) sağlanır. $p(x)$ fonksiyonun pay ve paydası üst ve alt yarı düzlemlerde birer sıfıra sahiptir.

$H \log p$ değerini hesaplamak için ilk olarak $F(\log p)$ değerini hesaplamak gerekir.

$$F(H \log p) = i \operatorname{sgn} s F(\log p)$$

gerçeği kullanmakla beraber F^{*} uygulanırsa

$$F(\log p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \log \frac{x^2 + a^2}{x^2 + 1} e^{isx} dx.$$

Yukarıdaki ifade a parametresine göre türevlendikten sonra kalan integral rezidü yardımıyla hesaplanırsa,

$$\frac{\partial}{\partial a} F(\log p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{x^2 + a^2} e^{isx} dx.$$

$$= \sqrt{2\pi} e^{-as}, \qquad s > 0$$

$$= \sqrt{2\pi} e^{as}, \qquad s < 0$$

$$= \sqrt{2\pi} e^{-a|s|}.$$

$F(\log p)$ değerini bulmak için yukarıdaki integre edilir ve integral sabiti

$$F(\log p)\big|_{a=1} = 0$$

ifadesini sağlayacak şekilde seçilir, çünkü $p(x) = 1$. Buradan,

$$F(\log p) = \sqrt{2\pi} \frac{e^{-|s|} - e^{-a|s|}}{|s|} = \sqrt{2\pi} \frac{e^{-|s|} - e^{-a|s|}}{s} \operatorname{sgn} s \text{ ve}$$

$$F(H \log p) = \sqrt{2\pi} i \frac{e^{-|s|} - e^{-a|s|}}{s}.$$

$$H\log p = i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\frac{e^{-|s|}-e^{-a|s|}}{s}ds$$

denkleminin a parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial a}H\log p = i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|s|}\frac{|s|}{s}e^{-isx}ds = 2\int_{0}^{\infty} e^{-as}\sin sxds = \frac{2x}{x^2+a^2}.$$

İntegrasyonla,

$$H\log p = 2\left[\tan^{-1}\frac{a}{x}-\tan^{-1}\frac{1}{x}\right].$$

Nihayet,

$$q^{-} = \sqrt{p(x)}\exp\left\{-\frac{i}{2}H\log p\right\} = \sqrt{p(x)}\frac{x-ia}{\sqrt{x^2+a^2}}\frac{x+i}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x-ia}{x-i} \qquad (3.507)$$

ve

$$q^{+} = \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\exp\left\{-\frac{i}{2}H\log p\right\} = \frac{x+i}{x+ia}\ . \qquad (3.508)$$

Açık olarak, q^{+} ve q^{-} bulundukları yarı düzlemde analitik, sınırlı ve (3.506) denklemini sağlar.

Örnek 3.2.5.6.2: $L_2\left[0,\infty\right]$de

$$\phi(x)-\lambda\int_{0}^{\infty} e^{-|x-y|}\phi(y)dy = f(x), \qquad f(x)\in L_2\left[0,\infty\right] \qquad (3.509)$$

integral denklemini çözelim.

Çözüm: Her zaman olduğu gibi, $\phi(x)$ ve $f(x)$

$$\phi(x) = f(x) = 0, \qquad x<0$$

olacak şekilde genişletilebilir.

$$g(x) = -\lambda\int_{0}^{\infty} e^{-|x-y|}\phi(y)dy = -\lambda e^{x}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\phi(y)dy, \qquad x<0$$

$$= 0, \qquad x>0$$

ile tanımlansın. Bu halde, (3.409) denklemi

$$\phi(x)-\lambda\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\phi(y)dy = f(x)+g(x) \qquad (3.510)$$

şeklini alır. (3.492) denkleminde olduğu gibi F^{*} uygulanırsa

$$\frac{s^2+1-2\lambda}{s^2+1}F_-^*(\phi)-F_-^*(f)=F_+^*(g) \tag{3.511}$$

elde edilir. (3.511) denklemindeki $p(s)$ fonksiyonu

$$p(s)=\frac{s^2+a^2}{s^2+1}, \qquad a^2=1-2\lambda \tag{3.512}$$

ile verilir. Amaca varabilmek için $\operatorname{Re} a>0$ veya buna denk olarak $\lambda \notin \left[\frac{1}{2},\infty\right)$.Örnek 3.2.5.6.2 dan $p(s)=\dfrac{q^-}{q^+}$ ve burada, $q^-=\dfrac{s-ia}{s-i}$, $q^+=\dfrac{s+ia}{s+i}$. (3.511) denklemi yeniden yazılarak,

$$\frac{s-ia}{s-i}F_-^*(\phi)-\frac{s+i}{s+ia}F_-^*(f)-\frac{\alpha}{s+ia}=\frac{s+i}{s+ia}F_+^*(g)-\frac{\alpha}{s+ia}.$$

3.2.5.5.2. teoremden yukarıdaki denklemde sol taraftaki ilk terim L_2^-dedir. Uygun α seçimi yapılarak kalan terimlerin L_2^-de olduğu görülebilir. Sağ taraf ise L_2^+dadır. Dolayısıyla, her iki tarafta sıfır olmak zorundadır. Şimdi $F_-^*(\phi)$ için çözerek nihayet ϕ çözümünü bulabiliriz. Şimdi,

$$\phi=F\left\{F^*(f)+\frac{2\lambda}{s^2+1-2\lambda}F^*(f)+\frac{s-i}{s^2+1-2\lambda}\alpha\right\}.$$

Şimdi, $F(F^*(f))=f$ ve böylece,

$$F^*\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}e^{-a|x|}\right)=\frac{1}{s^2+a^2}$$

ifadesinden dolayı konvulasyonla beraber

$$F\left(\frac{2\lambda}{s^2+1-2\lambda}F^*(f)\right)=\frac{\lambda}{a}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|x-y|}f(y)dy=\frac{\lambda}{a}\int_{0}^{\infty}e^{-a|x-y|}f(y)dy$$

elde edilir. Burada, $x<0$ için $f(x)=0$ dır. Nihayet rezidü yardımıyla

$$F\left(\frac{s-i}{s^2+a^2}\right)=\frac{\sqrt{2\pi}i}{2a}(a\operatorname{sgn}x-1)e^{-a|x|}.$$

Bu taktirde, β, α nın katı olacak şekilde

$$\phi(x)=f(x)+\frac{\lambda}{a}\int_0^{\infty}e^{-a|x-y|}f(y)dy+\beta(a\operatorname{sgn}x-1)e^{-a|x|}.$$

$$\phi(x)=0, \qquad x<0$$

şartını kullanarak β belirlenir. Bu halde,

$$\beta = \frac{\lambda}{a(a+1)}\int_0^\infty e^{-ay} f(y)dy$$

ile verilir ve nihayet çözüm

$$\phi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}}\int_0^\infty e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x-y|} f(y)dy$$

$$+\frac{\lambda(\sqrt{1-2\lambda}-1)}{1-2\lambda+\sqrt{1-2\lambda}} e^{-\sqrt{1-2\lambda}x}\int_0^\infty e^{-\sqrt{1-2\lambda}y} f(y)dy, \quad x > 0. \tag{3.513}$$

(3.487) denkleminde exponansiyel olarak büyüyen ve fiziksel uygulamalara sahip çözümler vardır. Bu durumlara çalışmak için $\phi(x) = e^{\alpha x}\psi(x)$ ve $f(x) = e^{\alpha x}k(x)$ yazılır. Bu taktirde (3.487) denklemi

$$\psi(x) - \int_0^\infty K(x-y)e^{-\alpha(x-y)}\psi(y)dy = k(x) \tag{3.514}$$

şeklini alır. Eğer $K(x-y)e^{-\alpha(x-y)}$ çekirdeği ve $k(x)$ fonksiyonu gerekli bütün şartları sağlıyorsa (3.514) denklemi daha önce yapıldığı gibi çözülebilir ve çözümü $\psi(x) \in L_2\left[0,\infty\right]$. $\phi(x) = e^{\alpha x}\psi(x)$ fonksiyonu exponansiyel artışla (3.487) denklemini sağlar.

Örnek 3.2.5.6.3:

$$\phi(x) - \lambda\int_0^\infty e^{-|x-y|}\phi(y)dy = f(x)$$

integral denklemini sağlayan exponansiyel çözümü bulalım.

Çözüm: Bu halde

$$\psi(x) - \lambda\int_0^\infty e^{-|x-y|-\alpha(x-y)}\psi(y)dy = k(x)$$

yazılır. Buradan da (3.2.5.6.2) örneğindeki prosedürün aynısı takip edilir α seçimi $0 \le \alpha < 1$ olacak şekilde yapılır.

$$\psi(x) = \mathrm{k}(x) = 0, \qquad x < 0$$

$$g(x) = -\lambda\int_0^\infty e^{-|x-y|-\alpha(x-y)}\psi(y)dy, \qquad x < 0$$

$$= 0, \qquad x > 0$$

olsun. Bu halde,

$$\psi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|-\alpha(x-y)} \psi(y)dy = k(x) + g(x)$$

yazılır. F^* uygulanırsa,

$$\frac{(s-i\alpha)^2+1-2\lambda}{(s-i\alpha)^2+1} F_-^*(\psi) - F_-^*(k) = F_+^*(g)\,. \tag{3.515}$$

$\alpha = 0$ ile (3.515) denklemi (3.511)e indirgenir. Burada,

$$p(s) = \frac{(s-i\alpha)^2+1-2\lambda}{(s-i\alpha)^2+1} \tag{3.516}$$

ve $0 \le \alpha < 1$ payda üst ve alt yarı düzlemde birer sıfıra sahiptir.

$$\log p(s) \in L_2\left[-\infty, \infty\right]$$

şartını sağlamak için (3.516) denkleminin payında bulunan sıfırların birisi üst yarı düzlemde birisi alt yarı düzlemde olacak şekilde ayarlanır. Her iki sıfırın aynı yarı düzlemde olması hali sonradan incelenecektir.

$$(s-i\alpha)^2 + 1 - 2\lambda = \left[s - i(\alpha + a)\right]\left[s - i(\alpha - a)\right].$$

Burada, $\alpha^2 = 1 - 2\lambda$ ve $\operatorname{Im} i(\alpha + a) > 0$, $\operatorname{Im} i(\alpha - a) < 0$. Ayrıca,

$$p(s) = \frac{q^-(s)}{q^+(s)}$$

olduğunu görmek kolaydır. Burada,

$$q^-(s) = \frac{s - i(\alpha + a)}{s - i(\alpha + 1)}, \qquad q^+(s) = \frac{s - i(\alpha - a)}{s - i(\alpha - 1)}.$$

Bu taktirde (3.515) denklemi

$$\frac{s-i(\alpha+a)}{s-i(\alpha+1)} F_-^*(\psi) - \frac{s-i(\alpha-1)}{s-i(\alpha-a)} F_-^*(k) - \frac{\beta}{s-i(\alpha-a)}$$
$$= \frac{s-i(\alpha-1)}{s-i(\alpha-a)} F_+^*(g) - \frac{\beta}{s-i(\alpha-a)}$$

biçiminde yeniden yazılır. Bu denklemin sol tarafındaki ilk terim teorem 3.2.5.5.2 den dolayı L_2^- dedir. Geri kalan terimler için uygun β seçimiyle aynı zamanda L_2^- dedir. Sağ taraf L_2^+ dadır. Bu nedenle özdeş olarak her iki taraf sıfır olmak zorundadır.

$$\psi = F\left\{F^*(k) + \frac{2\lambda}{(s-i\alpha)^2 + a^2} F^*(k) + \frac{\beta\left[s - i(\alpha+1)\right]}{(s-i\alpha)^2 + a^2}\right\}$$

denkleminde (3.2.5.6.2) örneğindeki yapılan işlemlerin benzeri yürütülerek

$$\psi(x) = k(x) + \frac{\lambda}{a}\int_0^\infty e^{-a|x-y|-\alpha(x-y)} k(y)dy + \frac{\lambda(a-1)}{a(a+1)} e^{-(\alpha+a)x}\int_0^\infty e^{-(a-\alpha)y} k(y)dy$$

elde edilir. Nihayet, $\psi(x) = e^{-\alpha x}\phi(x)$ ve $k(x) = e^{-\alpha x} f(x)$ ile

$$\phi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}}\int_0^\infty e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x-y|} f(y)dy$$

$$+ \frac{\lambda(\sqrt{1-2\lambda}-1)}{\sqrt{1-2\lambda}(\sqrt{1-2\lambda}+1)} e^{-\sqrt{1-2\lambda}x}\int_0^\infty e^{-\sqrt{1-2\lambda}y} f(y)dy. \quad (3.517)$$

(3.513) ve (3.517) denklemleri özdeştir. Buna rağmen tek farkı $\phi(x)$ ve $f(x)$in hangi uzayda olduğudur. Bu (3.513) denklemi $L_2\left[0,\infty\right]$ uzayı için gereklidir. (3.517) denklemi ise $\mathrm{Re}\sqrt{1-2\lambda} - \alpha > 0$ olması halinde uygun $f(x)$ ve $\phi(x)$ seçimleriyle $e^{-\alpha x} f(x)$ ve $e^{-\alpha x}\phi(x)$ $L_2\left[-\infty,\infty\right]$ uzayındadır.

3.2.5.7. Wiener-Hopf tekniği-II

Bir önceki kısımda $K(x)$ belli şartları sağlamak şartıyla

$$\phi(x) - \int_0^\infty K(x-y)\phi(y)dy = f(x) \quad (3.518)$$

integral denklemi analiz edildi. Burada, $K(x) \in L_2\left[-\infty,\infty\right]$ ve aynı zamanda

$$\lim_{|s|\to\infty} F^*(K) = 0\,. \quad (3.519)$$

Bu şartlar yardımıyla, $p(s) = 1 - F^*(K)$ ile $\lim_{s\to\infty}\log p(s) = 0$ olacak şekilde $\log p(s)$ tanımlanabilir. (3.519) denkleminden

$$\lim_{s\to\infty}\log\left|p(s)\right| = 0 \quad (3.520)$$

elde edilir. s ekseni $-\infty$ dan $+\infty$ a seçilerek

$$\lim_{s\to-\infty}\log p(s) = 2n\pi i \quad (3.521)$$

elde edilir. Burada, $n \in \mathrm{Z}$ dir. Bunu görebilmek için $p(s)=|p(s)|e^{i\theta(s)}$ yazılır. Burada log fonksiyonunun bir dalı seçilmiştir. Öyle ki, $\lim\limits_{s\to\infty}\theta(s)=0$ sağlanır. Burada,

$$\lim_{|s|\to\infty} p(s)=1$$

olduğu bilinmektedir. Bu muhakemeden

$$\lim_{s\to-\infty} p(s)=\lim_{s\to-\infty}|p(s)|e^{i\theta(s)}=\lim_{s\to-\infty} e^{i\theta(s)}=1 \text{ ve } \lim_{s\to-\infty}\theta(s)=2n\pi$$

vardır. (3.521) in tesisi için n, $\mathrm{I}-K(x)$ in indeksi olarak bilinmektedir. Bir önceki kısımda n nin sıfır olduğu kabul edildi. Bu şart altında $\log p(s)\in L_2\left[-\infty,\infty\right]$ ve 3.2.5.5.4. teoremden dolayı $p(s)$ fonksiyonu $\dfrac{q^-(s)}{q^+(s)}$ biçiminde reprezente edilebildi. $q^{\pm}(s)$ fonksiyonları üst ve alt yarı düzlemlerde analitik olan $q^{\pm}(z)$ fonksiyonun reel eksen üzerindeki sınır değerlerini reprezente eder. Eğer $n\neq 0$ ise $p(s)$ ayrışıma sahip değildir.

Bu kısımda Wiener-Hopf denkleminin $n\neq 0$ olması durumu analiz edilecektir. $n=0$ olması halinde (3.518) denklemi $f(x)\in L_2\left[-\infty,\infty\right]$un $L_2\left[0,\infty\right]$ uzayında tek çözüme sahip olduğu gösterildi. $n\neq 0$ olması halinde varlık ve teklik şartları daha bir hasastır. Bu sebepten ötürü önce homojen durum bunu takiben homojen olmayan denklemler irdelenecektir.

3.2.5.7.1. n>0 için homojen denklem

(3.487)-(3.493) adımlarında yürütülen prosedürde

$$p(s)F_-^*(\phi)-F_-^*(f)=F_+^*(g)$$

denklemi elde edildi. Bu denklem $f=0$ ile

$$p(s)F_-^*(\phi)=F_+^*(g) \tag{3.522}$$

denklemine indirgenir. $\mathrm{I}-K(x)=n>0$ olsun. Yani, eğer,

$$\lim_{s\to\infty}\log p(s)=0 \text{ ise } \lim_{s\to-\infty}\log p(s)=2n\pi i$$

elde edilir. Bu durum için $\phi(x)$ denkleminin bir tek $\phi(x)=0$ çözümüne sahip olduğunu gösterelim.

$$\tau(s) = \frac{s-i}{s+i} \tag{3.523}$$

denklemini ele alalım. Burada, $\log \tau(s) = -2i \tan^{-1}\frac{1}{s}$. $\lim\limits_{s\to\infty} \tan^{-1}\frac{1}{s} = 0$, öyle ki;

$$\lim_{s\to-\infty} -2\tan^{-1}\frac{1}{s} = -2\pi$$

sağlanacak şekilde seçelim. $\log \tau^n(s)$

$$\log_{s\to\infty} \tau^n(s) = 0$$

$$\log_{s\to-\infty} \tau^n(s) = -2n\pi i$$

denklemlerini sağlar. Buradan da,

$$\log \tau^n(s) p(s) \in L_2[-\infty,\infty]. \tag{3.524}$$

(3.522) denklemini $\tau^n(s)$ ile çarparak çözebiliriz. Yani,

$$\tau^n(s) p(s) F_-^*(\phi) = \tau^n(s) F_+^*(g). \tag{3.525}$$

Burada, $\tau^n(s)p(s)$ 3.2.5.5.4. teoremin şartlarını sağlar. Dolayısıyla, $\dfrac{q^-(s)}{q^+(s)}$ biçiminde ayrıştırılabilir. (3.525) denkleminden

$$q^-(s) F_-^*(\phi) = \tau^n(s) q^+(s) F_+^*(g) \tag{3.526}$$

denklemi elde edilir. $\tau(s)$ üst yarı düzlemde kutup noktasına sahip olmadığından denklemin sol tarafı L_2^-, sağ tarafı ise L_2^+. Dolayısıyla, her iki taraf sıfırdır. $F_-^*(\phi) = 0$ .Yani, $\phi(x) = 0$ dır.

Böylece, (3.522) denkleminin bir tek çözüme sahip olduğunu göstermiş olduk. Bu sonuçtan hareketle homojen olmayan (3.518) denkleminin en çok bir çözüme sahip olduğu çıkarımı yapılabilir. Aksi halde, iki çözümü olmuş olsaydı ve bunlar

$$\phi_1 - K\phi_1 = f\ ,\ \phi_2 - K\phi_2 = f$$

denklemini sağlayacak öyle ki;

$$(\phi_1 - \phi_2) - K(\phi_1 - \phi_2) = 0$$

bulunur. Fakat, bu (3.522) denkleminin kendisidir ve (3.522) denkleminin bir tek $\phi(x) = 0$ çözümüne sahip olduğu bilgilerimizin dâhilindedir.

Yani (3.518) denklemi $n>0$ için en fazla bir çözüme sahiptir. (3.518) çözümünün tüm $f(x)$ ler mevcut olup olmadığı bir sonraki kısımda tartışılacaktır. Yine, (3.518) denkleminin tüm keyfi $f(x)\in L_2\left[0,\infty\right]$ için çözülemeyeceği görülecektir. Ayrıca çözümün varlığı için $f(x)$ üzerindeki gerekli ve yeterli şartlar ifade edilecektir.

3.2.5.7.2. n<0 İçin homojen denklem

Bir önceki kısımda (3.526) denklemine kadar olan adımların aynısı takip edilir. Fakat $n<0$ olması halinde $\tau^n(s)$ üst yarı düzlemde kutup noktasına sahip olacaktır. Denklemin sol tarafı L_2^- de fakat sağ tarafı L_2^+ da değildir. Bu nedenle teorem 3.2.5.5.2 vasıtasıyla denklemin her iki yanından uygun terim çıkarılarak öyle ki sağ tarafı L_2^+ dadır. Bu durumda,

$$q^-(s)F_-^*(\phi)-\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-i)^k}=\tau^n(s)q^+(s)F_+^*(g)-\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-i)^k}\,.$$

Uygun $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{|n|}$ seçimiyle sağ taraf L_2^+ dadır sol tarafında L_2^- de olacak şekilde gerçekleştirmek kolaydır. Böylece her iki taraf sıfır olacaktır. Bu netice itibarıyla,

$$F_-^*(\phi)=\frac{1}{q^-(s)}\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-i)^k}$$

$$\phi(x)=F\left[\frac{1}{q^-(s)}\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-i)^k}\right] \tag{3.527}$$

ve benzer olarak,

$$g=F\left[\frac{1}{\tau^n(s)q^+(s)}\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-i)^k}\right]. \tag{3.528}$$

$F^*(\phi)\in L_2^-$ ve $F^*(g)\in L_2^+$ olduğunu görmek kolaydır. Bu çözümler, (3.522) denklemini sağlar.

$n<0$ olması halinde (3.522) denklemi tek olmayan çözümlere ve $|n|$ sayıda lineer bağımsız çözümlere sahiptir. Gerçekten $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{|n|}$ nin her seçimi için

(3.527) ve (3.528) homojen Wiener-Hopf denklemini sağlar. $\log\tau^n(s)p(s)\in L_2\left[-\infty,\infty\right]$ için $\tau^n(s)p(s)$ çarpımında $\tau^n(s)$ fonksiyonun gerekliliği zorunludur. Örneğin, $\left(\dfrac{(s-ia)}{(s+ia)}\right)^n$ nin $\operatorname{Re}a>0$ için aynı özelliğe sahiptir. (3.527) ve (3.528) çözümlerinin böyle bir seçime sahip olmadığı sorusu sorulabilir. (3.525) denkleminde $\rho(s)$ için bu şartı sağlayan ikinci bir fonksiyon olsun.

$$\rho(s)p(s)F_-^*(\phi)=\rho(s)F_+^*(g)$$

Yukarıdaki denklemde $\sigma(s)=\dfrac{\rho(s)}{\tau^n(s)}$ ve $\rho(s)=\tau^n(s)\sigma(s)$ seçilirse açık olarak her iki yanı $\sigma(s)$ ortak çarpanına sahiptir ve biz böylece (3.525) denklemine dönmüş olduk.

Örnek 3.2.5.7.2.1: $e^{-\alpha x}\phi(x)\in L_2\left[0,\infty\right]$ olacak şekilde

$$\phi(x)-\lambda\int_0^\infty e^{-|x-y|}\phi(y)dy=0 \tag{3.529}$$

integral denklemini çözelim.

Çözüm: Bu denklemin homojen olmayan durumu örnek 3.2.5.6.3 de tartışıldı. $\phi(x)=e^{\alpha x}\psi(x)$ seçilir ve daha önce yürütülen muhakemenin aynısına devamla (3.515) de olduğu gibi

$$\frac{(s-i\alpha)^2+1-2\lambda}{(s-i\alpha)^2+1}F_-^*(\psi)=F_+^*(g)\,. \tag{3.530}$$

$0\le\alpha<1$ için $\operatorname{Re}a=\operatorname{Re}\sqrt{1-2\lambda}>0$ olsun. Bu taktirde,

$$p(s)=\frac{(s-i\alpha)^2+a^2}{(s-i\alpha)^2+1}=\frac{\left[s-i(\alpha-a)\right]\left[s-i\left(\alpha-a\right)\right]}{\left[s-i(1+\alpha)\right]\left[s+i\left(1-\alpha\right)\right]}$$

denkleminin paydası üst ve alt yarı düzlemlerde birer sıfıra sahiptir. Eğer, üstelik

$$\operatorname{Re}\alpha+a>0,\qquad \operatorname{Re}\alpha-a<0$$

varsa pay $n=0$ indeksiyle aynı özelliğe sahiptir. Yani, bu durumda (3.529) bir tek $\phi(x)=0$ çözümüne sahiptir.

$\operatorname{Re}(\alpha\pm a)>0$ olacak şekilde $|a|$ küçük seçilsin. Bu durumda $p(s)$ nin payı üst yarı düzlemde ikişer sıfıra paydası ise üst ve alt yarı düzlemde birer sıfıra sahiptir.

Burada, indeks esasen $p(s)$ nin bir topolojik özelliği olup sıfırlarının ve kutuplarının gerçek lokasyonlarına bağlı değildir. Üstelik, indeks $p(s)$ nin sıfırlarının ve kutuplarının sürekli bir fonksiyonudur. Fakat, aynı zamanda bir tamsayıdır. Bunun sonucu olarak indeks sabit kalır ve $p(s)$ nin sıfırları ve kutup noktalarının sürekli değişimleri altında değişmez yani reel ekseni kesmedikçe indeks invaryanttır. Burada, $\log p(s)$ süreksizlik noktalarına sahip olacaktır. Eğer $p(s)$ üst yarı düzlemde iki sıfıra ve bir kutup noktasına sahip ve alt yarı düzlemde bir kutup noktasına sahip ise $p(s)$ nin indeksi $\left(\dfrac{(s-i)^2}{(s-i)(s+i)}\right)=\dfrac{(s-i)}{(s+i)}$ nin indeksine tekabül edecektir. (3.523) denkleminde gösterildiği gibi bu indeks -1 dir. (3.530) denklemi $\dfrac{\left[s+i(1-\alpha)\right]}{\left[s-i(\alpha-a)\right]}$ ile çarpılırsa (indekse nazaran) ve her iki taraftan $\dfrac{\beta}{\left[s-i(\alpha-a)\right]}$ çıkarılırsa

$$\frac{s-i(\alpha+a)}{s-i(1+\alpha)}F_-^*(\psi)-\frac{\beta}{s-i(\alpha-a)}$$
$$=\frac{s+i(1-\alpha)}{s-i(\alpha-a)}F_+^*(g)-\frac{\beta}{s-i(\alpha-a)}.$$

Şimdi sol taraf L_2^- ve sağ taraf L_2^+ dır. β keyfi olmak üzere

$$\psi(x)=\beta F\left[\frac{s-i(1+\alpha)}{\left(s-i(\alpha+a)(s-i(\alpha-a))\right)}\right]$$
$$=\frac{\beta\sqrt{2\pi}i}{2a}\left[(a-1)e^{-(\alpha+a)x}+(a+1)e^{-(\alpha-a)x}\right].$$

Nihayet, β' keyfi olmak üzere

$$\phi(x)=\beta'\left[\left(\sqrt{1-2\lambda}-1\right)e^{-\sqrt{1-2\lambda}x}+\left(\sqrt{1-2\lambda}+1\right)e^{\sqrt{1-2\lambda}x}\right]. \qquad (3.531)$$

Bu durumda, (3.529) homojen denkleminin tek boyutlu çözüm uzayına sahibiz.

3.2.5.7.3. n<0 olması halinde homojen olmayan denklemin analizi

$\mathrm{I}-K=n<0$ indeksine sahip olması halinde

$$\phi(x)-\int_{0}^{\infty}K(x-y)\phi(y)dy=f(x) \tag{3.532}$$

integral denklemini düşünelim. Standart manipulasyonlardan sonra

$$\tau(s)=\frac{(s-i)}{(s+i)}$$

olacak şekilde $\tau^{n}(s)$ ile çarpılarak

$$p(s)F_{-}^{*}(\phi)-F_{-}^{*}(f)=F_{+}^{*}(g)\,. \tag{3.533}$$

Teorem 3.2.5.5.3 ile $\tau^{n}(s)p(s)$, formunda. Böylece, yukarıdaki denklem

$$q^{-}(s)F_{-}^{*}(\phi)-\tau^{n}(s)q^{+}(s)F_{-}^{*}(f)=\tau^{n}(s)q^{+}(s)F_{+}^{*}(g)$$

şeklinde yeniden yazılır. Sol taraftaki ikinci terimin bir terimi L_2^- değer bir terimide L_2^+ da olacak şekilde iki terimin toplamı şeklinde yazılabilir. (3.432) ve (3.333)de olduğu gibi.) Sol taraftaki ilk terim L_2^- uzayındadır. $\tau^{n}(s)$, $s=i$ noktasında $|n|$ olan bir kutup noktasına sahip olduğundan sağ taraf L_2^+ ya ait değildir. Fakat uygun bir terim çıkarılarak L_2^+ da olacak şekilde yazılabilir. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} q^{-}(s)F_{-}^{*}(\phi)-(\tau^{n}(s)q^{+}(s)F_{-}^{*}(f))_{-}-\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-i)^k} \\ =\tau^{n}(s)q^{+}(s)F_{+}^{*}(g)+\left(\tau^{n}(s)q^{+}(s)F_{+}^{*}(f)\right)_{+}-\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-i)^k}. \end{aligned} \tag{3.534}$$

Bu denklem irdelenirse sol tarafın L_2^- de sağ tarafında L_2^+ da olduğu gösterilebilir. ϕ ve g için denklem çözülürse,

$$\phi=F\left\{\frac{1}{q^{-}(s)}\left[\left(\tau^{n}(s)q^{+}(s)F_{-}^{*}(f)\right)_{-}+\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-i)^k}\right]\right\}$$

ve

$$g=F\left\{\frac{1}{\tau^{n}(s)q^{+}(s)}\left[\left(-\tau^{n}(s)q^{+}(s)F_{-}^{*}(f)\right)_{+}+\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-i)^k}\right]\right\} \tag{3.535}$$

elde edilir. Bu denklemlerin irdelenmesinde α_1, ..., α_2, $\alpha_{|n|}$ seçimine bakmaksızın $F^{*}(\phi)\in L_2^-$ ve $F^{*}(g)\in L_2^+$ (3.533) denklemini sağlar. Netice olarak (3.532) Wiener-Hopf denkleminin tüm $f(x)\in L_2[0,\infty]$ için çözümlere sahiptir. Fakat bu çözümler tek değildir ve bu çözümlerinin farkı karşılık gelen homojen denklemin $|n|$ boyutlu çözüm uzayındadır.

Örnek 3.2.5.7.3.1: $f(x)$ ve $\phi(x)$ exponansiyel olmak şartıyla

$$\phi(x)-\lambda\int_0^\infty e^{-|x-y|}\phi(y)dy = f(x) \tag{3.536}$$

integral denklemini çözelim.

Çözüm: Örnek 3.2.5.6.3 deki prosedürün aynısı (3.535) denklemine kadar yürütülürse

$$\frac{(s-i\alpha)^2+a^2}{(s-i\alpha)^2+1}F_-^*(\psi)-F_-^*(k)=F_+^*(g)$$

elde edilir. Burada, $a^2=1-2\lambda$ ve $\operatorname{Re} a>0$. 3.2.5.7.3.1. örneğinde eğer $0\le\alpha<1$ ve $\operatorname{Re}(\alpha\pm a)>0$ ise $\mathrm{I}-K(x)$ indeksinin $n=-1$ olduğu gösterildi. (3.534) denklemine denk olan formülü çıkarmak için ilk olarak $\dfrac{\left[s-i(1-\alpha)\right]}{\left[s-i(\alpha-a)\right]}$ ile çarpılır ve $\dfrac{\beta}{s-i(\alpha-a)}$.

çıkarılırsa,

$$\frac{s-i(\alpha+a)}{s-i(1+\alpha)}F_-^*(\psi)-\frac{s+i(1-\alpha)}{s-i(\alpha-a)}F_-^*(k)-\frac{\beta}{s-i(\alpha-a)}$$
$$=\frac{s+i(1-\alpha)}{s-i(\alpha-a)}F_+^*(g)-\frac{\beta}{s-i(\alpha-a)}.$$

$\psi(x)$ için çözülürse;

$$\psi(x)=F\left\{F^*(k)+\frac{2\lambda}{(s-i\alpha)^2+a^2}F^*(k)+\beta\frac{s-i(1+\alpha)}{(s-i\alpha)^2+a^2}\right\}$$

$$=k(x)-\frac{2\lambda}{a}\int_0^x e^{-\alpha(x-y)}\sinh a(x-y)k(y)dy$$
$$+\beta'\left[(a-1)e^{-(\alpha+a)x}+(a+1)e^{-(\alpha-a)x}\right],\qquad x>0 \text{ için}$$

elde edilir. Şimdide eğer $\psi(x)=e^{-\alpha x}\phi(x)$ ve $k(x)=e^{-\alpha x}f(x)$ olacak şekilde seçilirse

$$\phi(x)=f(x)-\frac{2\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}}\int_0^\infty \sinh\sqrt{1-2\lambda}(x-y)f(y)dy$$
$$+\beta'\left[(\sqrt{1-2\lambda}-1)e^{-\sqrt{1-2\lambda}x}+(\sqrt{1-2\lambda}+1)e^{\sqrt{1-2\lambda}x}\right],\qquad x>0$$

elde edilir. Burada β' keyfi $x<0$ için $\phi(x)=0$ dır.

3.2.5.7.4. n>0 olması durumunda homojen olmayan denklemin analizi

$$N(L) = R(L^*)^{\perp} \tag{3.537}$$

olduğu bilinmektedir. Burada L Hilbert uzayında sınırlı bir operatör $N(L)$ ise null uzayıdır. L^*, L nin adjointi (ek operatör)dir. Hilbert uzaylarındaki sınırlı operatörler için yürütülen muhakeme sonlu boyutlu uzaylardaki gibidir.

$$K\phi = \int_0^{\infty} K(x-y)\phi(y)dy \tag{3.538}$$

Wiener-Hopf integral operatörünü ele alalım. İlk olarak $L_2\left[0,\infty\right]$ operatörünün sınırlı olduğunu gösterelim. Daha önce olduğu gibi $L_2\left[-\infty,\infty\right]$ uzayına genişletelim. Bu durum $x<0$ için $\phi(x)=0$ almakla mümkündür. (3.538) denklemine Fourier transformasyonu uygulanırsa

$$F(K\phi) = \sqrt{2\pi}F(K)F(\phi)$$

elde edilir. Cauchy Schwarz eşitsizliğinden

$$\left\|F(K\phi)\right\| \le \sqrt{2\pi}\left\|F(K)\right\|\left\|F(\phi)\right\|.$$

F bir üniter operatör olduğundan

$$\left\|K\phi\right\| \le \sqrt{2\pi}\left\|\phi\right\|\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|K(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \tag{3.539}$$

elde edilir. Böylece, (3.538) ile tanımlanan K operatörü sınırlıdır.

$$K\phi = \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy$$

integral denkleminin adjointi

$$K^*\phi = \int_a^b \overline{K(y,x)}\phi(y)dy$$

ile verilir. (3.438) operatörünün adjointi

$$K^*\phi = \int_0^{\infty} \overline{K(y-x)}\phi(y)dy \tag{3.440}$$

ile verilir. Buradan aşağıdaki sonuç çıkarılır.

$$\phi(x)-\int_0^\infty K(x-y)\phi(y)dy = f(x) \tag{3.541}$$

Wiener-Hopf denkleminin çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart

$$f(x)\in R(\mathrm{I}-K)=N(\mathrm{I}-K^*)^\perp .$$

Bu sonuç aynı zamanda aşağıdaki ifade ile eşanlamlıdır. (3.541) in çözüme sahip olması için $f(x)$ tüm $\psi(x)\in L_2\left[0,\infty\right]$ uzayındaki fonksiyonlara ortogonal olmasıdır.

$$\psi(x)-\int_0^\infty \overline{K(y-x)}\psi(y)dy = 0 . \tag{3.542}$$

Daha öncede gösterildiği gibi (3.541)

$$p(s)F_-^*(\phi)-F_-^*(f)=F_+^*(g) \tag{3.543}$$

denklemine indirgenebilir. Burada,

$$p(s)=1-\sqrt{2\pi}F^*(K(x)) . \tag{3.544}$$

Benzer bir prosedürle (3.542) denklemi

$$\left[1-\sqrt{2\pi}F^*\overline{(K(-x))}\right]F_-^*(\psi)=F_+^*(h) \tag{3.545}$$

biçimine indirgenir. Burada,

$$h(x)=-\int_{-\infty}^0 \overline{K(y-x)}\psi(y)dy, \quad x<0$$

$$=0, \qquad x>0 .$$

Benzer bir hesaplamayla,

$$F^*\overline{(K(-x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{K(-x)}e^{-isx}dx=\overline{F^*(K(x))} .$$

Böylece (3.545) denklemi,

$$\overline{p(s)}F_-^*(\psi)=F_+^*(h) \tag{3.546}$$

formatında yeniden yazılır. Burada, $\overline{p(s)}$ (3.533) denkleminde görülen $p(s)$ fonksiyonun eşleniğidir. $\mathrm{I}-K(x)$ in indeksi s, $+\infty$dan $-\infty$ a azalırken $p(s)$ argümentindeki değişiklikle ilişkilidir. Eğer bu değişlik $2n\pi i$ ise $\mathrm{I}-K(x)$ in indeksi n dir. Benzer olarak, $\overline{p(s)}$ nin argümenti s, $+\infty$ dan $-\infty$ a azalırken $-2n\pi i$ kadar artacak ve böylece $\mathrm{I}-\overline{K(-x)}$ in indeksi $-n$ dir. $n>0$ için (3.546) denklemine karşılık gelen indeksi negatif ve (4.546) denkleminin b kısmında elde edilen sonuçlar yardımıyla n tane lineer bağımsız çözümler olacaktır. Sadece, $f(x)$ (3.546) denklemindeki n tane lineer bağımsız ortogonal ise (3.543) denklemi çözümlere sahip olacaktır.

Eğer (3.543) denkleminin indeksi negatif ise (3.546) nın indeksi pozitif ve (3.546) sadece Null çözüme sahiptir. Bu durumda (3.543) denklemi tüm $f(x)\in L_2\left[0,\infty\right]$ için çözüme sahip olacaktır. Bu argüment sadece çözümlerin varlığını garantiler fakat tekliğini garantilemez.

(3.543) denklemini çözmek için $\tau(s)=\dfrac{(s-i)}{(s+i)}$ olmak şartıyla $\tau^n(s)$ ile çarpılırsa

$$\tau^n(s)p(s)F_-^*(\phi)-\tau^n(s)F_-^*(f)=\tau^n(s)F_+^*(g)\,.$$

Eğer, $\tau^n(s)p(s)=\dfrac{q^-(s)}{q^+(s)}$ ise yukarıdaki denklem

$$q^-(s)F_-^*(\phi)-(\tau^n(s)q^+(s)F_-^*(f))_-=(\tau^n(s)q^+(s)F_-^*(f))_++\tau^n(s)q^+(s)F_+^*(g)$$

denklemine indirgenir. Açıkça bu denklemin her iki tarafı sıfır olmalıdır. Yani,

$$\left(F_-^*\phi\right)=\frac{\left[\tau^n(s)q^+(s)F_-^*(f)\right]_-}{q^-(s)}$$

$$F_+^*(g)=\frac{-\left[\tau^n(s)q^+(s)F_-^*(f)\right]_+}{\tau^n(s)q^+(s)}\,.$$

Yukarıda inşa edilen $F_-^*(\phi)\in L_2^-$. Fakat, $F_+^*(g)\in L_2^+$. Çünkü payda $(s-i)^n$ terimini içerir. Böylece üst yarı düzlemde kutup noktası vardır. Çözüm sadece $f(x)$ in (3.542) denklemindeki tüm çözümlere ortogonal olması ile mümkündür. Bu durumda,

$$\phi=F\left\{\frac{1}{q^-(s)}\left[\tau^n(s)q^+(s)F^*(f)\right]_-\right\}, \tag{3.547}$$

$$g=F\left\{\frac{-1}{\tau^n(s)q^+(s)}\left[\tau^n(s)q^+(s)F^*(f)\right]_+\right\}. \tag{3.548}$$

Daha öncede ifade edildiği gibi eğer yukarıdaki çözüm varsa tektir.

Örnek 3.2.5.7.4.1

$$\phi(x)-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-|x-y|+\frac{1}{2}(x-y)}\phi(y)dy = f(x), \qquad f(x)\in L_2\left[0,\infty\right]. \qquad (3.549)$$

integral denkleminin çözüme sahip olması için $f(x)$ in sahip olması gereken şartları yazalım.

Çözüm: (3.549) denklemi 3.2.5.6.3 örneğinde $\lambda=\frac{1}{2}$ ye karşılık gelmektedir. Orada exponansiyel çözümlerin olduğunu gördük. Bu örnekte $\alpha=-\frac{1}{2}$ seçilirse (3.549) denklemi elde edilir. Cebirsel manipulasyonlarla

$$\frac{\left[s+(i/2)\right]^2}{\left[s-(i/2)\right]\left[s+(3i/2)\right]}F_-^*(\phi)-F_-^*(f)=F_+^*(g). \qquad (3.550)$$

Bu probleme karşılık gelen indeks $n=1$ dir. Bu durumda

$$\tau(s)=\frac{s-(i/2)}{s+(i/2)},\ q^-(s)=1,\ q^+(s)=\frac{s+(3i/2)}{s+(i/2)}$$

elde edilir. Böylece,

$$F_-^*(\phi)-\frac{\left[s+(3i/2)\right]\left[s-(i/2)\right]}{\left[s+(i/2)\right]^2}F_-^*(f)=\frac{\left[s+(3i/2)\right]\left[s-(i/2)\right]}{\left[s+(i/2)\right]^2}F_+^*(g)$$

ve buna denk olarak

$$F_-^*(\phi)-F_-^*(f)-\frac{1}{\left[s+(i/2)\right]^2}F_-^*(f)=\frac{\left[s+(3i/2)\right]\left[s-(i/2)\right]}{\left[s+(i/2)\right]^2}F_+^*(g) \qquad (3.551)$$

elde edilir. Bu denklemin solundaki her iki terim L_2^- dedir, sağ taraftaki terim ise L_2^+ dadır. Soldaki üçüncü terim ise L_2^- ve L_2^+ nın ayrışımı olarak yazılabilir. Standart hesaplamayla,

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left[s+(i/2)\right]^2}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{isx}}{\left[s+(i/2)\right]^2}ds, \qquad x>0$$

$$= xe^{x/2}, \qquad x<0.$$

elde edilir.

$$k(x)=xe^{x/2}, \qquad x<0.$$

$$=0, \qquad x>0.$$

Böylece.

$$F^*\left[\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)f(y)dy\right] = \frac{1}{\left[s+(i/2)\right]^2} F_-^*(f)$$

bulunur. Şimdi,

$$h_1(x) = \int_x^{\infty} (x-y)e^{(x-y)/2} f(y)dy, \qquad x>0$$

$$= 0, \qquad x<0. \tag{3.552}$$

$$h_2(x) = 0, \qquad x>0$$

$$= -\int_0^{\infty} (x-y)e^{(x-y)/2} f(y)dy, \qquad x<0 \qquad (f(x)=0,\ x<0)$$

olsun. Bu halde,

$$h_1(x) - h_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)f(y)dy$$

ve açıkça

$$F^*(h_1) = F_-^*(h_1) \in L_2^-,\ F^*(h_2) = F_+^*(h_2) \in L_2^+$$

ve (3.551)

$$F_-^*(\phi) - F_-^*(f) - F_-^*(h_1) = -F_+^*(h_2) + \frac{[s-(3i/2)][s-(i/2)]}{[s+(i/2)]^2} F_+^*(g)$$

ile tekrar yazılır. Bu işlemlerden dolayı,

$$\phi(x) = f(x) + \int_x^{\infty} (x-y)e^{(x-y)/2} f(y)dy, \quad x>0 \tag{3.553}$$

$$g(x) = F\left[\frac{\left[s+(i/2)\right]^2}{\left[s+(3i/2)\right]\left[s-(i/2)\right]} F_+^*(h_2)\right]. \tag{3.554}$$

$F^*(g) \in L_2^+$ da olduğunu henüz garantilemiş değiliz. Gerçekten,

$$F^*(h_2) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\left[s+(i/2)\right]^2}\left\{\int_0^{\infty} e^{-(y/2)} f(y)dy - i\left(s+\frac{i}{2}\right)\int_0^{\infty} ye^{-(y/2)} f(y)dy\right\},$$

$$g = -\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} F\left(\frac{1}{\left[s+(3i/2)\right]\left[s-(i/2)\right]}\right)$$

$$\left\{\int_0^{\infty} e^{-(y/2)} f(y)dy - i\left(s+\frac{i}{2}\right)\int_0^{\infty} ye^{-(y/2)} f(y)dy\right\}. \tag{3.555}$$

(3.555) denkleminde ki $s = i/2$ kutup noktasından dolayı $F^*(g) \notin L_2^+$. Fakat $f(x)$

$$\int_0^\infty (1+y) e^{-(y/2)} f(y) dy = 0 \tag{3.556}$$

sağlarsa (3.555) denklemi

$$g = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} F\left[\frac{1}{s+(3i/2)} \int_0^\infty e^{-(y/2)} f(y) dy \right] \tag{3.557}$$

denklemine indirgenir. Şimdi, $F^*(g) \in L_2^+$. (3.549) denklemine karşılık gelen homojen denklemin adjointini ele alalım. Yani,

$$\psi(x) - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-|x-y| - \frac{1}{2}(x-y)} \psi(y) dy = 0. \tag{3.558}$$

Wiener-Hopf tekniği ile yukarıdaki denklem (3.546) de olduğu gibi

$$\frac{\left[s-(i/2) \right]^2}{\left[s+(i/2) \right]\left[s-(3i/2) \right]} F_-^*(\psi) = F_+^*(h)$$

indirgenir ve indeksi $n = -1$ dir. Buradan

$$\frac{s-(i/2)}{s-(3i/2)} F_-^*(\psi) - \frac{\alpha}{s-(i/2)}$$
$$= \frac{s+(i/2)}{s-(i/2)} F_+^*(h) - \frac{\alpha}{s-(i/2)}.$$

Şimdi sol taraf L_2^- ve sağ tarafta uygun α seçimiyle L_2^+ dadır. Bu halde de

$$F_-^*(\psi) = \frac{\alpha\left[s-(3i/2) \right]}{\left[s-(i/2) \right]^2}$$

ve

$$\psi(x) = \alpha'(1+x) e^{-x/2}, \qquad x > 0$$
$$= 0, \qquad x < 0. \tag{3.559}$$

Nihayet daha öncede belirtildiği gibi keyfi α' için (3.559), (3.557) yi sağlar. (3.556) şartı $F^*(g) \in L_2^+$ nın garantiliği için gereklidir. Bu şart (3.558) denklemini sağlayan tüm çözümlere $f(x)$ in ortogonal olmasından başka bir şey değildir.

Eğer $f(x)$ bu şartı sağlamıyorsa $F^*(g) \notin L_2^+$ ve böylece (3.549) çözüme sahip olmayacaktır.

3.2.5.8. Wiener-Hopf denklemlerinin birinci tipi

Wiener-Hopf denklemlerinin ikinci tipinin

$p(s)F_{-}^{*}(\phi)-F_{-}^{*}(f)=F_{+}^{*}(g)$

denklemlerine indirgendiği bilinmektedir. Bu denklemin çözümü (3.494) denkleminde anlatıldığı gibi $p(s)=q^{-}(s)/q^{+}(s)$ seçimine bağlıydı. 3.2.5.5.4. teoremin sonucundan dolayı böyle çarpan mevcuttu. Bu teoremi uygulamak için $\lim_{|s|\to\infty} p(s)=1$ şartı gerekir. Benzer teknik Wiener-Hopf denklemlerinin birinci tipine de uygulanabilir. Fakat, genellikle $p(s)$ katsayıları teorem 3.2.5.5.4 formunda olmayabilir. Bunun sonucu olarak, $p(s)$ nin sistematik prosedürle ayrışımı yapılamaz. Birçok önemli fiziksel problemler bu yapıda görülmektedir. Dolayısıyla, bu denklemin çözümü önemlidir.

Örnek 3.2.5.8.1: $L_2\left[0,\infty\right]$ üzerinde

$$\int_0^\infty e^{-|x-y|}h(y)dy=x^n e^{-x} \tag{3.560}$$

integral denklemini çözelim.

Çözüm: Bu problem $L_2\left[-\infty,\infty\right]$a genişletilerek

$$\begin{aligned} h(x)&=0, && x<0\\ f(x)&=x^n e^{-x}, && x>0\\ &=0, && x<0\\ g(x)&=0, && x>0\\ &=\int_0^\infty e^{-|x-y|}h(y)dy=e^{x}\int_0^\infty e^{-y}h(y)dy, && x<0 \end{aligned}$$

ile yapılır. Bu denklem tekrar,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}h(y)dy=f(x)+g(x) \tag{3.561}$$

biçiminde yazılır. Ters Fourier transformasyonu uygulanırsa

$$F^{*}\left(e^{-|x|}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|-isx}dx=\frac{\sqrt{2/\pi}}{1+s^2}=\frac{\sqrt{2/\pi}}{(s+i)(s-i)}$$

ve

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} x^n e^{-(1+is)x}dx = \frac{\left(1/\sqrt{2\pi}\right)\left(-i\right)^{n+1} n!}{\left(s-i\right)^{n+1}}$$

elde edilir. (3.560) denklemine F^* uygulanırsa

$$\frac{\sqrt{2/\pi}}{\left(s-i\right)\left(s+i\right)}F_-^*(h) - \frac{\left(1/\sqrt{2\pi}\right)\left(-i\right)^{n+1} n!}{\left(s-i\right)^{n+1}} = F_+^*(g) \tag{3.562}$$

elde edilir. (3.562) nin solundaki ikinci terim L_2^-, sağ taraf ise L_2^+ dır. Soldaki birinci terim $s=-i$ noktasında kutup noktasına sahip olduğundan L_2^- de değildir. Bu kutup noktası (3.562) denklemini $\left(s+i\right)/\left(s-i\right)$ ile çarpılarak ortadan kaldırılabilir.

$$\frac{\sqrt{2/\pi}}{\left(s-i\right)^2}F_-^*(h) - \frac{\left(1/\sqrt{2\pi}\right)\left(-i\right)^{n+1} n!\left(s+i\right)}{\left(s-i\right)^{n+2}} = \frac{s+i}{s-i}F_+^*(g)$$

elde edilir. Şimdi sol tarafın tamamı L_2^-de. Fakat, sağ tarafı L_2^+ da değildir. Çünkü, $s=i$ noktası kutup noktasıdır. 3.2.5.5.2. teorem kullanılarak ($\alpha/\left(s-i\right)$) biçiminde terimler her iki taraftan çıkarılarak sağ taraf L_2^+ da olacak şekilde yapılır. Önceki örneklerde olduğu gibi bu terimler L_2^- dedir. Bu adımdan sonra,

$$\frac{\sqrt{2/\pi}}{\left(s-i\right)^2}F_-^*(h) - \frac{\left(1/\sqrt{2\pi}\right)\left(-i\right)^{n+1} n!\left(s+i\right)}{\left(s-i\right)^{n+2}} - \frac{\alpha}{\left(s-i\right)} = \frac{s+i}{s-i}F_+^*(g) - \frac{\alpha}{s-i}$$

elde edilir.

$L_2^+ \cap L_2^- = \{0\}$ olduğundan

$$F_-^*(h) = \frac{\left(-i\right)^{n+1} n!\left(s+i\right)}{2\left(s-i\right)^n} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\alpha\left(s-i\right) \tag{3.563}$$

ve

$$F_+^*(g) = \frac{\alpha}{s+i} \tag{3.564}$$

çıkarımı yapılır. (3.563) denkleminin sağ tarafının L_2^- de olması için $n \geq 2$ ve $\alpha = 0$ olmalıdır. Aksi halde $L_2^- \notin \left[-\infty,\infty\right]$. $n=1$ için (3.563) in sağ tarafı L_2^- de değildir. Böylece, (3.560) çözüme sahip değildir.

$$F_-^*(h) = \frac{(-i)^{n+1} n!(s+i)}{2(s-i)^n}, \qquad F_+^*(g) = 0, \quad n \geq 2 .$$

(3.562) denklemi böylece (3.560) denkleminin çözümüne liderlik eder. Nihayet,

$$\begin{aligned} h(x) &= F\left(F_-^*(h)\right) = \frac{(-i)^{n+1} n!}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s+i}{(s-i)^n} e^{isx} ds \\ &= 0, \quad x < 0 \qquad (3.565) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[2nx^{n-1} - n(n-1)x^{n-2}\right] e^{-x}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

3.2.5.9. Dual (İkili) integral denklemleri

Projeksiyon metodu aynı zamanda dual integral denklemlerinde de kullanılabilir. Bu kısımda,

$$\int_0^\infty f(u) J_\nu(\rho u) du = g(\rho), \qquad 0 < \rho < 1, \quad \nu > -\frac{1}{2} \tag{3.566}$$

$$\int_0^\infty u^\alpha f(u) J_\mu(\rho u) du = 0, \qquad 1 < \rho < \infty, \quad \mu > -\frac{1}{2} \tag{3.567}$$

incelenecektir. Eğer $0 < \rho < \infty$ değerleri için (3.566) denklemi sağlanırsa çözüm direk olarak Hankel transformasyonlarıdan bulunur. Aynı işlem, (3.567) içinde doğrudur. (3.566) ve (3.567) denklemleri her biri ρ nun farklı değerleri için sağlandığından bu denklemlerle beraber dual denklemler sistemini oluşturur. (3.566) ve (3.567) denklemlerine Fourier transformasyonu uygulamak için,

$$u = e^{-y}, \qquad \rho = e^x \tag{3.568}$$

değişken değiştirmeleri yapılır. (3.566) denklemi $e^{(1-k)x}$ ve (3.567) e^{ax} ile çarpılırsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ky} f(e^{-y}) J_\nu(e^{x-y}) e^{(1-k)(x-y)} dy = e^{(1-k)x} g(e^x), \qquad -\infty < x < 0 \tag{3.569}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-y)} e^{-ky} f(e^{-y}) J_\mu(e^{x-y}) e^{(1-k)(x-y)} dy = 0 \qquad x > 0 \tag{3.570}$$

elde edilir. (3.569) ve (3.570) denklemleri konvulasyon tipi denklemlerdir. Buna rağmen sağ tarafları sırasıyla $x < 0$ ve $x > 0$ için tanımlıdır. k ise,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|J_\nu(e^x)e^{(1-k)x}\right|^2 dx<\infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{\alpha x}J_\mu(e^x)e^{(1-k)x}\right|^2 dx<\infty \tag{3.571}$$

denklemini sağlayacak şekilde seçilir.

(3.571) integral denklemlerini analiz etmek için Bessel fonksiyon ile ilgili bazı gerçekleri bilmekte fayda vardır. Bessel fonksiyonu standart seçimi

$$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix/2)^{2n}}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \tag{3.572}$$

ile verilir. (3.571) denkleminde x in küçük olması halinde J_ν, x^ν dir. x lerin büyük olması halinde,

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

ile ifade edilen asimtotik tahmini vardır. (3.571) deki ilk integrale dönülür ve $u=e^x$ ise,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|J_\nu(e^x)e^{(1-k)x}\right|^2 dx=\int_0^{\infty}\left|J_\nu(u)\right|^2 u^{1-2k}du$$

elde edilir. Küçük u lar için integrali alınan fonksiyon $u^{2\nu+1-2k}$ gibidir. $u=0$, civarında integralin yakınsaması için $k<1+\nu$ olarak geçerlidir. Büyük u lar için integrali alınan fonksiyon u^{-2k} gibidir ve yakınsaklık için $2k>1$ seçilir. Benzer analiz (3.571) deki ikinci integral için yapılır.

Sonuç olarak k,

$$\nu+1>k>\frac{1}{2}, \qquad \alpha+\mu+1>k>\alpha+\frac{1}{2} \tag{3.573}$$

sağlayacak şekilde seçilir. Burada ν, μ ve α seçimleri k, (3.573) denklemini sağlayacak şekilde yapılır. Burada, k nın seçimi yalnızca $\nu>-\frac{1}{2}$, $\mu>-\frac{1}{2}$ ve (3.573) denkleminin aralıkları çalışacak şekilde yapılır. Şimdi,

$$\begin{aligned} h_+(x)&=e^{(1-k)x}g(e^x), && x<0\\ &=0, && x>0 \end{aligned} \tag{3.574}$$

$$\begin{aligned} h_-(x)&=0, && x<0\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ky}f(e^{-y})J_\nu(e^{x-y})e^{(1-k)(x-y)}dy, && x>0 \end{aligned} \tag{3.575}$$

$$m_+(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y} e^{-ky} f(e^{-y}) J_\mu(e^{x-y}) e^{(1-k)(x-y)} dy, \qquad x<0 \tag{3.576}$$
$$=0, \qquad x>0$$

tanımlanır. Bu fonksiyonların kullanılmasıyla (3.569) ve (3.570) denklemleri yeniden

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(y) J_\nu(e^{x-y}) e^{(1-k)(x-y)} dy = h_+(x) + h_-(x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{3.577}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-y)} w(y) J_\mu(e^{x-y}) e^{(1-k)(x-y)} dy = m_+(x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{3.578}$$

biçiminde yazılır. Burada,

$$w(y) = e^{-ky} f(e^{-y}) . \tag{3.579}$$

$J_\nu(e^x)e^{\beta x} \in L_2[-\infty,\infty]$ için

$$F^*(J_\nu(\rho e^x)e^{\beta x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} J_\nu(e^x) e^{\beta x} e^{-isx} dx$$
$$= \frac{2^{\beta\text{-is-}1}\Gamma((\nu+\beta-is)/2)}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left[(\nu-\beta+is+2)/2\right]} \tag{3.580}$$

olduğundan ters Fourier transformasyonu (3.577) ve (3.578) denklemlerine uygulanırsa,

$$\frac{F^*(w)2^{-is-k}\Gamma\left[(\nu+1-k-is)/2\right]}{\Gamma\left[(\nu+1-k+is)/2\right]} = F^*(h_+) + F^*(h_-) \tag{3.581}$$

ve

$$\frac{F^*(w)2^{-is+\alpha-k}\Gamma\left[(\mu+\alpha+1-k-is)/2\right]}{\Gamma\left[(\mu-\alpha+1+k+is)/2\right]} = F^*(m_+) \tag{3.582}$$

bulunur. Bu operasyonları performe edebilmek için (3.566) denkleminde $g(\rho)$ üzerine $h_+(x) \in L_2[-\infty,\infty]$ olacak şekilde bazı şartlar yüklenir. (3.474), (3.575) ve (3.476) deki tanımlardan dolayı $F^*(h_+)$ ve $F^*(m_+)$ L_2^+ dadır. $F^*(h_-)$, L_2^- dedir. (3.581) ve (3.582) denklemlerden $F^*(w)$ elde etmek için bu iki denklemden $F^*(w)$ yok edilerek

$$\frac{F^*(m_+)2^{-\alpha}\Gamma\left[(\nu+1-k-is)/2\right]\Gamma\left[(\mu-\alpha+1+k+is)/2\right]}{\Gamma\left[(\nu+1+k+is)/2\right]\Gamma\left[(\mu+\alpha+1-k-is)/2\right]} \tag{3.583}$$
$$=F^*(h_+) + F^*(h_-).$$

(3.583) denklemini çözmek için sol taraf L_2^+ da sağ tarafta L_2^- de olacak şekilde yeniden gruplandırma yapılır. Bu prosedürü tamamlamak için gamma fonksiyonu ile ilgili gerçeklerden istifade etmek gerekir.

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt+\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \qquad \text{Rez>0.}$$

Bu denklemdeki ikinci integral z nin bir tam fonksiyondur. İlk integral ise

$$\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt=\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+t-1}dt=\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$$

şeklinde açılır. Öyle ki,

$$\Gamma(z)=\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}+\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{3.584}$$

(3.584) denkleminden $\Gamma(z)$ fonksiyonun $z=0,-1,-2,-3,...$ noktalarında basit kutup noktalarına sahip olduğu gözlenir. Dolayısıyla $z=-n$ noktasındaki rezidüsü $(-1)^n/n!$ ile verilir. z nin büyük olması halinde $\Gamma(z)$ için standart asimptotik formül literatürde stirling formülü olarak bilinir ve bu formül,

$$ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)lnz-z+\frac{1}{2}ln2\pi+O(\frac{1}{z}). \tag{3.585}$$

Bu denklemden z nin yeterince büyük olması halinde

$$\frac{\Gamma(a+z)}{\Gamma(b+z)}\approx z^{a-b} \tag{3.586}$$

denkleminin doğruluğu gösterilebilir. (3.583) denklemi

$$\begin{aligned}\frac{F^*(m_+)2^{-\alpha}\Gamma\left[(\nu+1-k-is)/2\right]}{\Gamma\left[(\mu+\alpha+1-k-is)/2\right]}&=\frac{\Gamma\left[(\nu+1+k+is)/2\right]}{\Gamma\left[(\mu-\alpha+1+k+is)/2\right]}F^*(h_+)\\&+\frac{\Gamma\left[(\nu\text{+1+k+is})/2\right]}{\Gamma\left[(\mu-\alpha+1+k+is)/2\right]}F^*(h_-)\end{aligned} \tag{3.587}$$

biçiminde yeniden yazılır. $F^*(m_+)$ nın katsayısı (3.584) in kullanılmasıyla $n=0,1,2,...$ için $s=-i(2n+\nu+1-k)$ noktasında basit kutup noktasına sahiptir. (3.573) denkleminde bu kutupların tümü alt yarı düzlemdedir. Aynı terim $n=0,1,2,...$ için $s=-i(2n+\mu+\alpha+1-k)$ noktasında da sıfırlara sahiptir. Bu sıfırlarda yine alt yarı düzlemdedir. Burada,

$$\nu-\mu \leq -|\alpha| \tag{3.588}$$

koşullu daha çok gereklidir. $F^*(m_+)$ nın katsayısı (3.585) ile büyük $|s|$ ler ve uygun k katsayıları için,

$$\left|\frac{\Gamma\left[\left(\nu+1-k-is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(\mu+\alpha+1-k-is\right)/2\right]}\right| \leq K|s|^{(\nu-\mu-\alpha)/2}$$

denklemini sağlar. Eğer ν ,μ, α (3.588) i sağlarsa $F^*(m_+)$ nın katsayısı reel s ler için sınırlı ve üst yarı düzlemde analitiktir. Dolayısıyla, (3.587) nin sol tarafı L_2^+ da olur. (3.587) nin sağ tarafındaki ikinci terimi analiz edelim. $n=0,1,2,...$ için $s=i(2n+\nu+1+k)$ noktasında kutup noktası vardır. Bu kutup noktaları üst yarı düzlemdedir. Aynı zamanda,

$$\left|\frac{\Gamma\left[\left(\nu+1+k+is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(\mu-\alpha+1+k+is\right)/2\right]}\right| \leq K|s|^{(\nu-\mu+\alpha)/2}$$

yazılır. Burada, (3.587) nin kullanımıyla reel s ler için katsayı sınırlıdır. $F_-^*(h)$ L_2^- de katsayısı reel s için sınırlı ve üst yarı düzlemde analitiktir. Dolayısıyla, (3.587) nin sağ tarafındaki ikinci denklem L_2^- dedir. (3.587) nin sağ tarafındaki birinci terim için bir terimi L_2^- de diğer terimi L_2^+ da olacak şekilde dekompoze edilir. Bu halde,

$$\begin{aligned}&\frac{F^*(m_+)2^{-\alpha}\Gamma\left[\left(\nu+1-k-is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(\mu+\alpha+1-k-is\right)/2\right]}-\left[\left(\frac{\Gamma\left[\left(\nu+1+k+is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(\mu-\alpha+1+k+is\right)/2\right]}F^*(h_+)\right)\right]_+\\&=\frac{\Gamma\left[\left(\nu+1+k+is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(\mu-\alpha+1+k+is\right)/2\right]}F^*(h_-)+\left[\frac{\Gamma\left[\left(\nu+1+k+is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(\mu-\alpha+1+k+is\right)/2\right]}F^*(h_+)\right]_- .\end{aligned} \tag{3.589}$$

Şimdi sol taraf L_2^+ da, sağ taraf L_2^- dedir. Dolayısıyla, her iki taraf sıfırdır. Bu taktirde,

$$\begin{aligned}F^*(m_+)=&\frac{2^{\alpha}\Gamma\left[\left(\mu+\alpha+1-k-is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(\nu+1-k-is\right)/2\right]}\\&\times\left[\frac{\Gamma\left[\left(\nu+1+k+is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(\mu-\alpha+1+k+is\right)/2\right]}F^*(h_+)\right]_+\end{aligned} \tag{3.590}$$

bulunur. (3.582) denkleminden $F^*(w)$ yı bulmak için (3.590) kullanılırsa

$$F^*(w)=\frac{2^{k+is}\Gamma\left[\left(\mu-\alpha+1+k+is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(\nu+1-k-is\right)/2\right]} \times\left[\frac{\Gamma\left[\left(\nu+1+k+is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(\mu\text{-}\alpha\text{+1+k+is}\right)/2\right]}F^*(h_+)\right]_+ \tag{3.591}$$

bulunur. (3.591) denklemi

$$\int_{-\infty}^{0}\left|e^{(1-k)x}g(e^x)\right|^2 dx<\infty,$$

$$\nu-\mu\leq-|\alpha|,\ \nu+1>k>\frac{1}{2},\ \alpha+\mu+1>k>\alpha+\frac{1}{2} \tag{3.592}$$

şartının sağlanmasıyla yapılır. (3.591) daha kullanılabilir bir halde yazılabilir. Burada, $f(x)$ için çözüm $g(\rho)$ cinsindedir.

$$F^*(h_+)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{(1-k)t}g(e^t)e^{-ist}dt.$$

$V=e^t$ ile $F^*(h_+)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 V^{-is-k}g(V)dV$ elde edilir. Şimdi,

$$\left[\frac{\Gamma\left[\left(\nu+1+k+is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(\mu-\alpha+1+k+is\right)/2\right]}F^*(h_+)\right]_+ =\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 V^{-k}g(V)\left[\frac{\Gamma\left[\left(\nu+1+k+is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(\mu-\alpha+1+k+is\right)/2\right]}V^{-is}\right]_+dV \tag{3.593}$$

olduğu görülür.

$$\left[\frac{\Gamma\left[\left(\nu+1+k+is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(\mu-\alpha+1+k+is\right)/2\right]}V^{-is}\right]_+\equiv[\phi]_+ \tag{3.594}$$

denkleminin hesaplanması gerekir. Bunu yapabilmek için $\phi(x)\in L_2\left[-\infty,\infty\right]$ olması için,

$$\begin{aligned} F(\phi_+)&=F(\phi), && s<0\\ &=0, && s>0\end{aligned}$$

olduğu hatırlanırsa

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\Gamma\left[\left(\nu+1+k+i\xi\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(\mu-\alpha+1+k+i\xi\right)/2\right]}V^{-i\xi}\right]_+e^{is\xi}d\xi=0,\qquad s>0$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma\left[\left(\nu+1+k+i\xi\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(\mu-\alpha+1+k+i\xi\right)/2\right]_{+}} V^{-i\xi} e^{is\xi} d\xi, \qquad s<0$$

elde edilir. Yukarıdaki integrali hesaplamak için,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma\left[\left(\nu+1+k+i\xi\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(\mu-\alpha+1+k+i\xi\right)/2\right]} e^{i\xi(s-lnV)} d\xi \tag{3.595}$$

biçiminde yazılır. $s < lnV$ için $e^{i\xi(s-lnV)}$ ξ nin alt yarı düzleminde exponansiyel olarak azalır. İntegrand alt yarı düzlemde analitiktir. Bunu, $s < lnV$ için Contouru alt yarı düzlemde olacak şekilde seçilir. Böylece integral sıfır olur. $lnV < s < 0$ için üst yarı düzlemde Contouru seçerek (3.595) hesaplanabilir. Bu halde,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma\left[\left(\nu+1+k+i\xi\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(\mu-\alpha+1+k+i\xi\right)/2\right]} e^{i\xi(s-lnV)} d\xi = \frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(e^{-2s}V^2\right)^{n+\left[(\nu+1+k)/2\right]}}{n!\,\Gamma\left[\left(\mu-\alpha-\nu\right)/2-n\right]}$$

$$= \frac{2\sqrt{2\pi}\left(e^{-s}V\right)^{\nu+1+k}}{\Gamma\left[\left(\mu-\alpha-\nu\right)/2\right]} \left(1-e^{-2s}V^2\right)^{(\mu-\alpha-\nu-2)/2}, \qquad lnV < s < 0. \tag{3.596}$$

Son adım Binom teoremi kullanılarak elde edilir.

$$[\phi]_{+} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} F(\phi) e^{-is\xi} ds$$

kullanılarak

$$\left[\frac{\Gamma\left[\left(\nu+1+k+i\xi\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(\mu-\alpha+1+k+i\xi\right)/2\right]} V^{-i\xi}\right]_{+}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{lnV}^{0} \frac{2\sqrt{2\pi}\left(e^{-s}V\right)^{\nu+1+k}}{\Gamma\left[\left(\mu-\alpha-\nu\right)/2\right]} \left(1-e^{-2s}V^2\right)^{(\mu-\alpha-\nu-2)/2} e^{-is\xi} ds$$

elde edilir. Şimdi bulunanlar (3.593) denkleminde yazılır. Burada integrasyon sırası değiştirilerek $V = e^s \rho$ ve nihayet $u = e^s$ alınır. Tüm bu hesaplamalardan sonra

$$\left[\frac{\Gamma\left[\left(\nu+1+k+is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(\mu-\alpha+1+k+is\right)/2\right]} F^*(h_+)\right]_{+}$$

$$= \frac{\sqrt{2/\pi}}{\Gamma\left[\left(\mu-\alpha-\nu\right)/2\right]} \int_0^1 u^{-is-k} du \int_0^1 \rho^{\nu+1} g(V\rho)(1-\rho^2)^{(\mu-\nu-\alpha-2/2)} d\rho. \tag{3.597}$$

bulunur. (3.597) denklemi (3.591)de kullanılır. $w(x)$ değerini bulmak için

$$F\left[\frac{2^{k+is}\Gamma\left[\left(\mu-\alpha+1+k+is\right)/2\right]u^{-is-k}}{\Gamma\left[\left(\nu+1-k-is\right)/2\right]}\right]$$

hesaplanır. Bu denklem,

$$2\sqrt{2\pi}e^{-kx}\left(\frac{ue^{-x}}{2}\right)^{(\mu-\alpha-\nu+2)/2}J_{(\nu+\mu-\alpha)/2}(ue^{-x}) \tag{3.598}$$

şekline indirgenir. Bu son denklem (3.591) denkleminde kullanılarak,

$$w(x)=\frac{2^{(2+\nu+\alpha-\mu)/2}e^{-x\left[k+(\mu-\alpha-\nu+2)/2\right]}}{\Gamma\left[\left(\mu-\alpha-\nu\right)/2\right]}\int_0^1 V^{(\mu-\alpha-\nu+2)/2}J_{(\nu+\mu-\alpha)/2}\left(Ve^{-x}\right)dV$$

$$\int_0^1 \rho^{1+\nu}g(V\rho)(1-\rho^2)^{(\mu-\nu-\alpha-2)/2}d\rho \tag{3.599}$$

elde edilir. (3.579) denklemini kullanarak

$$f(x)=\frac{2^{(2+\nu+\alpha-\mu)/2}x^{\left[(\mu-\alpha-\nu+2)/2\right]}}{\Gamma\left[\left(\mu-\alpha-\nu\right)/2\right]}\int_0^1 V^{(\mu-\alpha-\nu+2)/2}J_{(\nu+\mu-\alpha)/2}\left(Vx\right)dV$$

$$\int_0^1 \rho^{1+\nu}g(V\rho)(1-\rho^2)^{(\mu-\nu-\alpha-2)/2}d\rho \tag{3.600}$$

elde edilir. (3.600) denklemi (3.566) ve (3.567) denklemlerinin çözümünü temsil eder. (3.596) denklemi (3.592) ifadesindeki şartlara bağlı olarak (3.566) ve (3.567) çözümünü temsil eder. (3.592) denkleminde verilen şartlardan farklı olarak (3.566) ve (3.567) hala çözüme sahip olabilir. Bu çözümün varlığı için $g(\rho)$ üzerine daha katı şartlar empoze edilir. Örneğin $\mu=\nu=0$ ve $\alpha=1$ ise

$$\int_0^\infty f(u)J_0(\rho u)du=g(\rho), \qquad 0<\rho<1, \tag{3.601}$$

$$\int_0^\infty uf(u)J_0(\rho u)du=0, \qquad 1<\rho<\infty \tag{3.602}$$

denklemleri ele alınır. Bu taktirde (3.577) ve (3.578) denklemleri

$$\int_{-\infty}^\infty w(y)J_0(e^{x-y})e^{(1-k)(x-y)}dy=h_+(x)+h_-(x), \qquad -\infty<x<\infty \tag{3.603}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(x-y)} w(y) J_0(e^{x-y}) e^{(1-k)(x-y)} dy = m_+(x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{3.604}$$

ve

$$w(y) = e^{-ky} f(e^{-y}) \tag{3.605}$$

denklemlerine indirgenir. Burada $h_+(x)$, $h_-(x)$ ve $m_+(x)$ (3.574), (3.575) ve (3.576) deki gibidir. (3.573) denkleminin incelenmesi ile (3.603) e F^* operatörü uygulanırsa (3.604 hariç) bu durum k, (3.573) denklemindeki her iki eşitliği sağlayacak şekilde seçilemediğindedir. Bu nedenle (3.604),

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y} w(y) J_0(e^{x-y}) e^{(1-k)(x-y)} dy = e^{-x} m_+(x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{3.606}$$

olarak yazılır. F^* uygulanır ve (3.580) kullanılırsa

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(y) e^{-iy(s-i)} dy \frac{2^{-k-is}\Gamma\left[(1-k-is)/2\right]}{\Gamma\left[(1+k+is)/2\right]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} m_+(x) e^{-ix(s-i)} dx . \tag{3.607}$$

elde edilir. Burada, $e^{-y} w(y)$ ve $e^{-x} m_+(x)$ $L_2\left[-\infty,\infty\right]$ olacak şekilde kabul edilir.

Bu durumda aşağıdaki notasyon kullanılır.

$$F_s^*(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(y) e^{-isy} dy .$$

(3.607) denklemi,

$$F_{s-i}^*(w) \frac{2^{-k-is}\Gamma\left[(1-k-is)/2\right]}{\Gamma\left[(1+k+is)/2\right]} = F_{s-i}^*(m_+) \tag{3.608}$$

formatında tekrar yazılır. (3.603) e F^* uygulanırsa

$$F_s^*(w) \frac{2^{-k-is}\Gamma\left[(1-k-is)/2\right]}{\Gamma\left[(1+k+is)/2\right]} = F^*(h_+) + F^*(h_-) \tag{3.609}$$

elde edilir. $F_s^*(w)$ için ikinci bir denkleme ihtiyaç vardır. Bu (3.608) denkleminde $s = s + i$ yazılarak elde edilir. Bu halde,

$$F_s^*(w) 2^{1-k-is} \frac{\Gamma\left[(2-k-is)/2\right]}{\Gamma\left[(k+is)/2\right]} = F_s^*(m_+) \tag{3.610}$$

yazılır. (3.609) ve (3.610) denklemlerinde $F_s^*(w)$ yok edilirse

$$F_s^*(m_+)\frac{\Gamma\left[(1-k-is)/2\right]\Gamma\left[(k+is)/2\right]}{2\Gamma\left[(1+k+is)/2\right]\Gamma\left[(2-k-is)/2\right]}=F^*(h_+)+F^*(h_-). \qquad (3.611)$$

(3.611) denklemi $\mu=\nu=0,\ \alpha=1$ ile özdeştir. Fakat (3.583) denklemi farklı hipotezler altında elde edildi. (3.587) e benzer bir tarzla

$$\frac{F_s^*(m_+)\Gamma\left[(1-k-is)/2\right]}{2\Gamma\left[(2-k-is)/2\right]}$$

$$=\frac{\Gamma\left[(1+k+is)/2\right]}{\Gamma\left[(k+is)/2\right]}F^*(h_+)+\frac{\Gamma\left[(1+k+is)/2\right]}{\Gamma\left[(k+is)/2\right]}F^*(h_-) \qquad (3.612)$$

yazılır. Son olarak (3.612) denklemindeki bir tarafı L_2^+ da diğer tarafı da L_2^- de olacak şekilde gruplandırılır. $F_s^*(m_+)$ nın katsayısı alt yarı düzlemde kutup noktasına sahip fakat üst yarı düzlemde analitiktir. (3.586) denklemine göre,

$$\left|\frac{\Gamma\left[(1-k-is)/2\right]}{\Gamma\left[(2-k-is)/2\right]}\right|\le K|s|^{-1/2}.$$

Böylece, reel s ler için $F_s^*(m_+)$ nın katsayısı sınırlı olur. Bu halde, (3.612) nin sol tarafı L_2^+ dadır. $F^*(h_-)$ nin katsayısı ise alt yarı düzlemde analitik ve

$$\left|\frac{\Gamma\left[(1+k+is)/2\right]}{\Gamma\left[(k+is)/2\right]}\right|\le K|s|^{1/2}$$

eşitliğini sağlar. Sağ taraftaki ikinci terim yeterince büyük $|s|$ ler için

$$\frac{\Gamma\left[(1+k+is)/2\right]}{\Gamma\left[(k+is)/2\right]}F^*(h_-)\in L_2\left[-\infty,\infty\right].$$

$F^*(h_-)$ sıfır oluyorsa L_2^- dedir. Böylece $F^*(h_-)$ fonksiyonu bilinmiyor. Bu fonksiyonun bilinen şartlar sağlanan $F^*(h_+)$ daki homojen olmayan terime bağlıdır. Bu ise (3.601) denklemindeki homojen olmayan $g(\rho)$ terimine bağlıdır. Büyük s ler için şimdide $F^*(h_+)$ nın yeterince küçük olduğunu kabul edelim. Böylece (3.612) nin sağ tarafındaki ilk terim $L_2^{\pm}$ da olur ve

$$F_s^*(m_+)=\frac{2\Gamma\left[(2-k-is)/2\right]}{\Gamma\left[(1-k-is)/2\right]}\left[\frac{\Gamma\left[(1+k+is)/2\right]}{\Gamma\left[(k+is)/2\right]}F^*(h_+)\right]_+. \qquad (3.613)$$

Görüldüğü gibi $F^*(h_+)$ ekstra hipotezler gerektirir. (3.600) kullanılarak

$$F_s^*(w) = \frac{2^{k+is}\Gamma\left[\left(k+is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(1-k-is\right)/2\right]}\left[\frac{\Gamma\left[\left(1+k+is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(k+is\right)/2\right]}F^*(h_+)\right]_+ . \tag{3.614}$$

(3.614) denklemini kullanılabilir kılmak için $g(e^x)$ in

$$\begin{aligned} g(e^x) &= -2\int_x^0 e^{-(1-k)u}\, p(e^u)du, \qquad x<o \\ &=0, \qquad\qquad\qquad\qquad x>0 \end{aligned} \tag{3.615}$$

formatında yazıldığını kabul edelim. Bu seçimin avantajı bundan sonraki adımlarda açıkça anlaşılacaktır. Bu halde,

$$\begin{aligned} h_+(x) &= e^{(1-k)x}g(e^x) = -2\int_x^0 e^{(1-k)(x-u)}\, p(e^u)du, \qquad x<o \\ &=0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x>0 \end{aligned} \tag{3.616}$$

$$F^*(h_+) = \frac{2}{-1+k+is}F^*(p) \tag{3.617}$$

yazılır.

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$$

standart formundan

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left[\left(1+k+is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(k+is\right)/2\right]}F^*(h_+) &= \frac{\Gamma\left[\left(1+k+is\right)/2\right]2/\left(-1+k+is\right)}{\Gamma\left[\left(k+is\right)/2\right]}F^*(p) \\ &= \frac{\Gamma\left[\left(-1+k+is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(k+is\right)/2\right]}F^*(p). \end{aligned} \tag{3.618}$$

(3.597) nin çıkarımında yapılan işlemlerin aynısı takip edilerek

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\Gamma\left[\left(-1+k+is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(k+is\right)/2\right]}F^*(p)\right]_+ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^1 u^{-is-k}du\int_0^u p(V)V^{k-2}\left[\left(1-\frac{V^2}{u^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]dV. \end{aligned} \tag{3.619}$$

Son olarak, $w(x)$ in belirlenmesi gerekir. Öyle ki,

$$w(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 (ue^{-x})^k u^{-1}\cos(ue^{-x})du\int_0^1 p(\rho u)\rho^{k-2}\left[\left(1-\rho^2\right)^{1/2}-1\right]d\rho \tag{3.620}$$

ve

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 u^{k-1}\cos(ux)du\int_0^1 p(\rho u)\rho^{k-2}\left[\left(1-\rho^2\right)^{-1/2}-1\right]d\rho \tag{3.621}$$

gösterilebilir. (3.615) den

$$g'(x)=2x^{k-2}p(x) \tag{3.622}$$

elde edilir. Böylece (3.621)

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1 u\cos(ux)du\int_0^1 g'(\rho u)\left[\left(1-\rho^2\right)^{-1/2}-1\right]d\rho \tag{3.623}$$

formatında yeniden yazılır. $g(x)$ ve $p(x)$ (3.622) ile bağlantılı olarak $p\left(e^u\right)\in L_2\left[-\infty,\infty\right]$ olmak şartıyla yukarıdaki formül geçerlidir.

Örnek 3.2.5.9.1: Çeşitli fiziksel problemlerde örneğin potansiyel ve elastik teorisinde

$$\int_0^\infty f(u)J_0(\rho u)du=1, \qquad 0<\rho<1, \tag{3.624}$$

$$\int_0^\infty uf(u)J_0(\rho u)du=0, \qquad 1<\rho<\infty \tag{3.625}$$

integral denklemleri ile karşılaşılır. Bu denklemler, $g(\rho)=1$ ile (3.601) ile (3.602) denklemleri gibidir.

$$h_+(x)=e^{(1-k)x}, \qquad x<0$$
$$=0, \qquad x>0$$

ile

$$F^*(h_+)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{(1-k)x-isx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-k-is)}.$$

Bu halde (3.613) denkleminden,

$$F^*(w)=\frac{2^{k+is}\Gamma\left[\left(k+is\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(1-k-is\right)/2\right]}\left[\frac{\Gamma\left[\left(1+k+is\right)/2\right]}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left[\left(k+is\right)/2\right](1-k-is)}\right]_+ \tag{3.626}$$

formunu alır. Köşeli parantez içindeki ifade $|s|$nin büyük olması halinde $|s|^{-1/2}$ gibidir. Dolayısıyla, $L_2[-\infty,\infty]$da değildir. Bu neticeyle bir önceki teorem uygulanamaz. Çözümü elde edebilmek için,

$$\left[\frac{\Gamma\left[(1+k+is)/2\right]}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left[(k+is)/2\right](1-k-is)(1-i\in s)}\right]_+$$

ifadesinin limit halini ele alacağız. Bu halde bir önceki teori uygulanır ve $\in\to 0$ gönderilir. Benzer işlemlerle daha önce yürütülen işlemler yardımıyla yukarıdaki denklem

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi(1-k-is)(1-\in+\in k)}-\frac{\Gamma\left\{\left[\left[1+k+(1/\in)\right]/2\right]\right\}\in}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left\{\left[k+(1/\in)\right]/2\right\}\left[1-k-(1/\in)\right](1-\in+\in k)}$$

denklemine indirgenir. $\in\to 0$ gönderilirse $\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi(1-k-is)}$ elde edilir. Böylece,

$$F^*(w)=\frac{2^{k+is}\,\Gamma\left[(k+is)/2\right]}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left[(1-k-is)/2\right](1-k-is)}$$

bulunur. $w(x)$ standart rezidüler yardımıyla elde edilir. Bunun sonucunda elde edilen seriden

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin x}{x}. \qquad (3.627)$$

olduğu görülür.

Not: (3.580) ve (3.590) denklemlerinde

$$F^*(J_v(\rho e^x)e^{\beta x})=\frac{2^{\beta-is-1}\rho^{is-\beta}\,\Gamma\left[(v+\beta-is)/2\right]}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left[(v-\beta+is+2)/2\right]} \qquad (3.628)$$

kullanıldı. (3.628) in ispatı için

$$F\left(\frac{2^{\beta-is-1}\rho^{is-\beta}\,\Gamma\left[(v+\beta-is)/2\right]}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left[(v-\beta+is+2)/2\right]}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2^{\beta-is-1}\rho^{is-\beta}\,\Gamma\left[(v+\beta-is)/2\right]}{\Gamma\left[(v-\beta+is+2)/2\right]}e^{isx}\,ds$$

hesaplamaları yapılır. İntegrali alınan fonksiyonun üst yarı düzlemde $s=-i(2n+v+\beta)$ noktasında kutup noktasına sahiptir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt$$

Ferdholm integral denkleminin birinci tipi ve Ferdholm integral denkleminin ikinci tipi olan

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt$$

denklemleri ve bunların özel bir hali olan sırasıyla Volterra integral denklemi birinci tipi ve ikinci tipi

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt$$

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt$$

şeklindedir. Burada, $\phi(x)$ bilinmeyen fonksiyondur. Bu integral denklemleri ile Fredholm alternatifleri ve klasik Fredholm teorisi tüm detaylarıyla çalışıldı. Bu integral denklemlerin nümerik analizleri yapılmamıştır.

Diferansiyel denklemler integral denklemlerine dönüştürülebilir fakat tersi genellikle doğru değildir. Dolayısıyla, diferansiyel denklemlerinin analizi yerine integral denklemlerinin analizi bazen tercih edilebilir. Bu nedenlede integral denklemlerini çalışmak önemlidir.

İntegral denklemleri ile ilgili elemanter varlık-teklik teoremlerinin yanında fixed (sabit) nokta teoremleri verildi. Ayrıca, integral denklemleri için bilinen çözüm yöntemleri verilerek örneklerle açıklandı. Bununla beraber, integral denklemleri kullanım alanlarına örneğin; diferansiyel denklemler ve matematiksel fizik, mekanik, populasyon dinamiği, ekonomi teorisi, elastik ve potansiyel teorisi v.s. vurgu yapıldı.

Hilbert-Schmidt teorisi ve ilgili tüm argümanları detayları ile verildi. Fourier, Laplace, Hankel, Mellin transformasyonları tüm özellikleri ile anlatıldı. Projeksiyon metodu ile Wiener-Hopf Teknigi I-II ve Dual integral denklemleri tartışıldı.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Lineer integral denklemleri ve çözüm yöntemleri tüm detayları ile verildi. Ele alınan lineer integral denklemlerinin nümerik analizi yapılmamıştır. Bu analiz oldukça geniş ve özel bir gereksinim gerektirir. Bu çalışmada, Nonlineer integral denklemleri ele alınmamıştır. Fakat Varlık-Teklik teoremlerin birkaçı ifade edildi. Bu tip integrallerin analizi de integrallerin nümerik analizi gibi ayrı bir incelik gerektirir.

İntegral denklemler teorisinin matematiğin çok farklı alanlarıyla yakın bağlantısı vardır. Bunların en başında diferansiyel denklemler ve operatörler teorisi gelir.

Bayağı ve kısmi diferansiyel denklemler alanındaki problemlerin çoğu integral denklemi olarak düşünülebilir. Her integral denklem diferansiyel denkleme dönüştürülebilir fakat tersi her zaman doğru değildir. Dolayısıyla, integral denklemlerinin analizi demek diferansiyel denklemlerin analizi demektir.

Uygulamalı matematik ve matematiksel fiziğin hemen hemen her alanında integral denklemlerinin uygulama alanlarını görmek mümkündür.

İntegral denklemler konusu lineer cebirin bir genişlemesi ve modern fonksiyonel analizin başlangıcı olarak düşünülebilir. Özellikle lineer integral denklemleri ile ilgilenirken lineer cebirin temel kavramları olan vektör uzayları, eigen değerler ve eigen fonksiyonlar önemli rol oynar.

Örneklerden anlaşılacağı üzere bunların sınıflandırılmasının ve araştırılmasının nedeni teorideki ve metotlardaki farklılıkla motivasyon vermektir.

Günümüzde ise integral denklemler üzerine çok sayıda değişik dillerde yazılmış kaynaklar mevcuttur. Kısaca, integral denklemleri ve operatörleri alanındaki araştırmanın modern resmini (görselliğini) tahmin etmek oldukça güçtür.

KAYNAKLAR

AKSOY, Y., 1998. İntegral Denklemler. Yıldız Teknik Üniversitesi Basım Yayın Merkezi, 155s, İstanbul.

BURDEN, R. L., and FAIRES, J. D., 1993. Numerical Analysis. PWS-KENT Publishing Company, USA, 768p.

CARSLAW, H. S., 1930. Fourier's Series and Integrals. Macmillan and Co., 368p, London.

CODDINGTON, E. A., and LEVINSON, N., 1955. Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill, 429p.

CORDUNEANU, C., 1991. Integral Equations and Applications. Cambridge University Press, 366p, Cambridge.

EVANS, L. C., 1998. Partial Differential Equations. American Mathematical Society, 662p, USA.

KANWAL, R. P., 1997. Linear Integral Equations. Birkhauser Boston, 318p, USA.

KOLMOGOROV, A. N., and FOMİN, S. V., 1970. Introductory Real Analysis. Translated from the Russian and Edited by Richard A. Silvermann. Dover Publications, Inc., 430p, New York.

KRYSZIG, E., 1980. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, 688p, USA.

HOCHSTADT, H., 1973. Integral Equations. John Wiley & Sons, Inc., 281p, USA.

JERRI, J. A., 1999. Introduction to Integral Equations with Applications. John Wiley & Sons, 433p, USA.

MCLEOD, J. B., 2001. Lecture Notes in Mathematics. Universty of Pittsburgh, Pittsburg.

MOISEWITCH, B. L., 1977. Integral Equations. Dover Publications Inc., 166p, Mineola, New York.

PIPKIN, A. C., 1991. A Course on Integral Equations, Springer-Verlag, New York Inc., 268p, USA.

POLYANIN, A. D., and MANZHIROV, A. V., 1998. Handbook of Integral Equations. CRC Press LLC, 786p, USA.

SIROVICH, L., 1998. Introduction to Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York Inc., 370p, USA.

SPIEGEL, M. R., 1999. Theory and Problems of Complex Variables. Schaum's Outline Series McGraw-Hill, Toronto, 313p.

SPIEGEL, M. R., 1965. Theory and Problems of Laplace Transforms. Schaum's Outline Series McGraw-Hill, Toronto 261p.

STRUBLE, R. A., 1962. Nonlinear Differential Equations. McGraw-Hill Book Company, Inc., 267p, London.

SUHUBİ, E. S., 2001. Fonksiyonel Analiz. İstanbul Teknik Üniversitesi Vakfı, Yayın No:38, 638s, İstanbul.

TANRIVERDİ, T., 2001. Boundary Value Problems in ODE. PhD.Thesis, University of Pittsburgh, 100p, Pittsburg.

TROPPER, A. M., 1968. Integral Equations. Frederick Ungar Publishing Co, 100p.

WEINSTOCK, R., 1974. Calculus of Variations. Dover Publications, Inc., 326p, New York.

ÖZGEÇMİŞ

08.07.1981 yılında Kahramanmaraş'ta doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kahramanmaraş'ta bitirdi. 1996 yılında Almanya'nın Frankfurt şehrinde ortaokul son sınıfı okudu. 1999 yılında liseyi bitirdi. 2003 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik öğretmenliğinden mezun oldu. 2004 yılında Harran Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans'ı kazandı. 2003 yılında öğretmenliğe başladı ve hala çalışmaktadır.

ÖZET

Bu tezde, lineer ve nonlineer integral denklemleri için elemanter Varlık-Teklik teoremleri, Fredholm ve Volterra integral denklemleri tüm detayları ile verildi. Fredholm alternatifi ve fixed nokta teoremi ayrıntlı bir şekilde açıklandı. Bunun yanında, bu integral denklemlerin belli başlı çözüm yöntemleri olan cebirsel sistemlere indirgenme, ardışık yaklaşıklar, çekirdeğin iterasyonu metodları ve uygulamaları ele alındı. Bazı elemanter teknikler özellikle contraction dönüşüm operatörü ve integral denklemlerine olan uygulamaları verildi. Pozitif çekirdekli integral operatörleri detaylı bir şekilde tartışıldı. Lineer cebirdeki gerekli bilgilerin altı çizildi ve Hilbert uzayları üzerinde operatör olarak davranan integral operatörlerine bakıldı. Hilbert-Schmidt teorisi gerekli argümanları ile verildi. Fourier, Laplace, Hankel, Mellin transformasyonları anlatıldı. Projeksiyon metodu ile Wiener-Hopf Teknigi I-II ve Dual integral denklemleri tartışıldı. Uygulamalı matematik ve matematiksel fizik alanında integral denklemlerinin hemen hemen her alanda rol oynadığını söylemek olasıdır. Buna binaen matematiksel fiziğin birçok problemi integral denklemler ile ifade edildi. Bunların birçoğu örnek olarak detaylı bir şekilde tartışıldı.

SUMMARY

In this thesis we discuss linear integral equations. Basic existence and uniqueness theorems are given. For linear and nonlinear Fredholm and Volterra types integral equations with certain methods are given in detail. The Fredholm alternative and the fixed point theorem is discussed fully. Some elementary techniques, in particular the contraction mapping principle and its applications to integral equations are given. Integral operators with positive kernels are also discussed. The necessary background in linear algebra is sketched and some aspects of Hilbert space theory are presented. Hilbert-Schmidt theory with its arguments is also given. Integral transformation methods are discussed very fully. The Fourier transform is presented and used to present the Laplace, Mellin and Hankel transforms. Subsequently, the projection method is discussed and applied to Wiener-Hopf problems and to certain mixed boundary value problems. Integral equations occur naturally in many fields of mechanics and mathematical physics**.** Many problems of mathematical physics and several examples of integral equations are given.