T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BANACH UZAYLARINDA GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN YAKINSAKLIK TEOREMLERİ

Göknur AYKANAT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2008

Doç. Dr. Seyit TEMİR danışmanlığında, Göknur AYKANAT'ın hazırladığı "Banach Uzaylarında Genişlemeyen Dönüşümler İçin Yakınsaklık Teoremleri" konulu bu çalışma 04/07/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Seyit TEMİR

Üye : Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hasan AKIN

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım

Prof. Dr. İbrahim BOLAT
Enstitü Müdürü

.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZ

Yüksek Lisans Tezi

BANACH UZAYLARINDA GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN YAKINSAKLIK TEOREMLERİ

Göknur AYKANAT

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Seyit TEMİR
Yıl: 2008, Sayfa: 78

Banach uzaylarında ve metrik uzaylarda genişlemeyen ve sözde genişlemeyen dönüşümler için sabit noktalar üzerinde birçok çalışma yapılmıştır. Asimtotik sözde genişlemeyen dönüşümler ya da asimtotik genişlemeyen dönüşümler için iterasyon dizilerinin sabit noktaya yaklaşımı ile ilgili problemler de son zamanlarda birçok yazar tarafından çalışılmaktadır. Özellikle, sunulan Mann ve Ishikawa iterasyon dizilerinin genişlemeyen ve onun genelleşmeleri olan dönüşümler için kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları ile ilgili birçok sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için kapalı iterasyon sürecinin kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları araştırılmıştır. Bu tezde genişlemeyen ve sözde genişlemeyen dönüşümlerin zayıf ve kuvvetli yakınsaklıkları ayrıntılı olarak incelenmektedir. Ayrıca genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için kapalı iterasyon sürecinin kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları gösterilmekte ve yeni sonuçlar elde edilmektedir. Ayrıca I-genişlemeyen ve onun genelleşmeleri olan dönüşümlerin sonlu bir ailesi için iterasyon dizilerinin yakınsaklıkları incelenmektedir. Önceki yapılan çalışmalara bu konunun uygulanabilirliği araştırılmaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: Genişlemeyen Dönüşümler, Asimtotik Genişlemeyen Dönüşümler, Yakınsaklık Teoremleri

ABSTRACT

MSc Thesis

CONVERGENCE THEOREMS FOR NONEXPANSIVE MAPPINGS IN BANACH SPACES

Göknur AYKANAT

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Seyit TEMİR

Year: 2008, Page: 78

There have been a number of results on fixed points of nonexpansive and quasi nonexpansive mappings in Banach and metric spaces. Recently, the convergence problems of an iterative process to fixed point of asymptotically nonexpansive mappings or asymptotically quasi-nonexpansive mappings have been also considered by several authors. In particular, a number of the results of the strong and weak convergence of the introduced Mann and Ishikawa iteration process to fixed point for nonexpansive mappings, asymptotically nonexpansive mappings, asymptotically quasi-nonexpansive mappings have been obtained. In addition, the strong and weak convergence theorems for the implicit iterative process to common fixed point for a finite family of nonexpansive mappings in real uniformly convex Banach spaces have been studied. In this thesis, we investigate the strong and weak convergence of iterative process to fixed point for nonexpansive mappings in detail. In addition, we obtain the strong and weak convergence of implicit iteration process to a common fixed point for a finite family of generalized nonexpansive mappings and thus we have new results. Further, convergence theorems of implicit iteration process for a finite family of I-nonexpansive mappings are investigated. The applicabilities of this subject to the previous studies have also been analyzed.

KEY WORDS: Nonexpansive Mappings, Asymptotically Nonexpansive Mappings, Convergence Theorems

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım tez danışmanım sayın Doç. Dr. Seyit TEMİR ´e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu zorlu süreçte her zaman desteklerini hissettiğim canım ailem ve sevgili arkadaşlarıma sonsuz teşekkürler…

1. GİRİŞ

Banach ve metrik uzaylarda genişlemeyen (nonexpansive) ve sözde genişlemeyen (quasi nonexpansive) dönüşümler için sabit noktalar üzerinde son zamanlarda birçok çalışma yapılmıştır. Asimtotik sözde genişlemeyen (asymptotically quasi nonexpansive) dönüşümler ya da asimtotik genişlemeyen (asymptotically nonexpansive) dönüşümler için iterasyon dizilerinin sabit noktaya yaklaşımı ile ilgili problemler birçok yazar tarafından çalışılmaktadır. Browder (1965), Banach uzaylarında lineer olmayan genişlemeyen dönüşümleri çalışmıştır. Diaz ve Metcalf (1967), sözde genişlemeyen dönüşüm kavramını vermişlerdir. Goebel ve Kirk (1972), asimtotik genişlemeyen dönüşümlerin notasyonunu sunmuşlardır. Mann (1953), Mann iterasyon dizisini sunmuştur. Dotson (1970), Mann iterasyonlarını çeşitli özel durumlarda incelemiştir. Petryshyn ve Williamson (1973), sözde genişlemeyen dönüşümlerin Mann iterasyonlarının zayıf ve kuvvetli yakınsaklığını ispatlamışlardır. Ishikawa (1974), Ishikawa iterasyon dizisini tanımlamıştır. Tan ve Xu (1993), genişlemeyen dönüşümlerin Ishikawa iterasyonlarının yakınsaklık teoremlerini kurmuşlardır. Ghosh ve Debnath (1997), Banach uzaylarında sözde genişlemeyen dönüşümleri için Ishikawa iterasyonlarının yakınsaklığını göstermişlerdir. Daha sonra, Liu (2001), asimtotik sözde genişlemeyen dönüşümler için Ishikawa iterasyon dizilerinin sabit noktaya yakınsaklığı için gerekli ve yeterli koşulları göstermişlerdir. Xu ve Ori (2001), genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için kapalı (implicit) iterasyon sürecini sunmuşlardır. Xu ve Ori (2001), Hilbert uzayında tanımlanan sonlu ailenin ortak sabit bir noktaya bu sürecin zayıf yakınsaklığını ispatlamışlardır. Zhou ve Chang (2002), genişlemeyen dönüşümlerin ve asimtotik genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için ortak sabit bir noktaya bu sürecin zayıf ve kuvvetli yakınsaklığını çalışmışlardır. Sun (2003), asimtotik sözde genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için ortak sabit bir noktaya kapalı iterasyon sürecinin kuvvetli yakınsaklığını ispatlamıştır. Chidume ve Shahzad (2003), genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için ortak sabit bir noktaya kapalı iterasyon sürecinin kuvvetli yakınsaklığını göstermişlerdir. Shahzad ve Zegeye (2007), genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için ortak sabit bir noktaya kapalı iterasyon sürecinin kuvvetli yakınsaklığını çalışmışlardır. Shahzad (2004), genelleştirilmiş I-genişlemeyen (I-nonexpansive) dönüşümler için bir iyi yaklaşım sonucunun değişmeli olmayan versiyonunu göstermiştir. Temir ve Gül (2007), Hilbert uzayında I-asimtotik sözde genişlemeyen (I-asymptotically quasi nonexpansive) dönüşüm için zayıf yakınsaklık teoremi, yukarıda geliştirilen sonuçlardan farklı bir yaklaşım kullanılarak ispatlamışlardır. Rhoades ve Temir (2006), Opial koşulunu sağlayan düzgün konveks Banach uzayında I-genişlemeyen dönüşümün Mann iterasyon dizisinin zayıf yakınsaklığını kurmuşlardır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Diziler

Tanım 2.1.1. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinden $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesine tanımlanan her fonksiyona bir reel terimli dizi veya kısaca dizi denir ve (x_n) şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (x_n) dizisine üstten sınırlıdır denir. M sayısına da bu dizinin bir üst sınırı adı verilir. Üst sınırlarının en küçüğüne de dizinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir. $\sup x_n$ veya $\text{eküs} x_n$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq K$ olacak şekilde bir K reel sayısı varsa (x_n) dizisine alttan sınırlıdır denir. K sayısına da bu dizinin bir alt sınırı adı verilir. Alt sınırlarının en büyüğüne dizinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir. $\inf x_n$ veya $\text{ebas} x_n$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. Her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq A$ olacak şekilde bir A pozitif reel sayısı varsa (x_n) dizisine sınırlı dizi denir.

Tanım 2.1.5 (x_n) bir reel sayı dizisi olsun ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|x_n - x_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x_0 a yakınsaktır denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ veya $(x_n) \to x_0$ şeklinde gösterilir.

Yakınsak her dizi sınırlıdır ve limiti tektir (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

Tanım 2.1.6. Bir (x_n) dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n < x_{n+1}$ ise bu diziye monoton artan dizi denir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > x_{n+1}$ ise monoton azalan dizi denir.

Tanım 2.1.7. $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x(n) = x_n$ dizisi verilsin. $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n(k) = n_k$ dizisi bir artan dizi olmak üzere $(x \circ n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bileşke fonksiyonuna (x_n) dizisinin bir alt dizisi denir ve $(x \circ n)(k) = x(n(k)) = x(n_k) = x_{n_k}$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.1. Gerçel değerli bir (x_n) dizisinin yakınsak ve limitinin L olması için gerekli ve yeterli koşul (x_n) dizisinin bütün (x_{n_k}) alt dizilerinin de aynı L limitine yakınsamasıdır. Her sınırlı reel sayı dizisinin en az bir yakınsak alt dizisi vardır (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

Tanım 2.1.8 Herhangi bir X uzayında (x_n) dizisi verilsin. O zaman

$$\overline{\lim} x_n = \limsup x_n = \inf_{m \geq 1} \left(\sup_{n \geq m} (x_n) \right)$$

şeklinde tanımlanan limit değerine (x_n) dizisinin üst limiti denir.

Benzer olarak

$$\underline{\lim} x_n = \liminf x_n = \sup_{m \geq 1} \left(\inf_{n \geq m} (x_n) \right)$$

şeklinde tanımlanan limit değerine (x_n) dizisinin alt limiti denir.

Teorem 2.1.2. (x_n) sınırlı bir dizi ise $\limsup x_n$ ve $\liminf x_n$ sırasıyla (x_n) dizisinin en büyük ve en küçük limit noktasıdır ve

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n \text{ ve } \liminf(-x_n) = -\limsup x_n$$

dir (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

Teorem 2.1.3. (x_n) reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. O zaman

$$\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = x \Leftrightarrow \lim x_n = x$$

dir (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

Tanım 2.1.9. (x_n) reel terimli bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşı gelen bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı m,n$\geq n_0$ alındığında $|x_m - x_n| < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi adı verilir.

2.2. Metrik Uzaylar

Tanım 2.2.1. X boş olmayan bir küme olsun. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x, y, z \in X$ için

(M1) $d(x,y) \geq 0$

(M2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M3) $d(x,y) = d(y,x)$

(M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik adı verilir. (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir. (X,d) metrik uzayı kısaca X ile gösterilir.

Tanım 2.2.2. X bir metrik uzay ile bu uzayın bir x_0 noktası ve pozitif bir r reel sayısı verilsin. Bu durumda

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar,

$$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in X : d(x_0,x)\le r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0,r)=\{x\in X : d(x_0,x)=r\}$$

kümesine de x_0 merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

Tanım 2.2.3. $\mathbb{R}$ nin bazı alt kümelerinin bir $\mathcal{M}$ sınıfı göz önüne alınsın. Bir $A\subset\mathbb{R}$ kümesi için, $A\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$, $A_\lambda\in\mathcal{M}$ yazılabiliyorsa $\mathcal{M}$ sınıfına A kümesinin bir örtüsü adı verilir. Bu durumda A kümesinin her noktası $\mathcal{M}$ sınıfı içinde bulunur. $\mathcal{M}$ deki bütün kümeler açıksa bu sınıf bir açık örtü adını alır. $\mathcal{M}$ sınıfı $A_1,A_2,...,A_n,...$ gibi kümelerin oluşturduğu sayılabilir bir sınıfsa ve $A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ yazılabiliyorsa $\mathcal{M}$ sınıfına A nın sayılabilir örtüsü denir.

Tanım 2.2.4. $\mathcal{M}$ sınıfı bir $A\subset\mathbb{R}$ kümesinin bir örtüsü olsun. $\mathcal{A}$, her üyesi $\mathcal{M}$ nin içinde olan bir alt kümeler sınıfıysa ve $\mathcal{A}$ sınıfı da A kümesinin bir örtüsü ise $\mathcal{A}\subset\mathcal{M}$ alt sınıfı A nın bir alt örtüsü adını alır.

Tanım 2.2.5. Bir $A\subset\mathbb{R}$ kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A ya kompakt küme adı verilir.

Önerme 2.2.1. Bir metrik uzayın kompakt alt kümesi kapalı ve sınırlıdır (Bayraktar, 1992).

Tanım 2.2.6. X kompakt bir küme ise X metrik uzayına kompakt metrik uzay denir.

Her kompakt metrik uzay tamdır (Bayraktar, 1992).

Tanım 2.2.7. X bir metrik uzay ve A bir alt kümesi olsun. Bir $x\in X$ noktasının A kümesine uzaklığı bu noktanın A nın tüm noktalarına uzaklıklarının infimumudur.

$$d\left(x,A\right)=\inf\left\{d\left(x,y\right):y\in A\right\}$$

Tanım 2.2.8. X bir metrik uzay ve A ile B birer alt kümesi olsun. A ve B kümesinin birbirine uzaklığı, $x\in A$ ve $y\in B$ için

$$d\left(A,B\right)=\inf\left\{d\left(x,y\right):x\in A,y\in B\right\}$$

dir. Bu tanımda $d\left(A,B\right)=d\left(B,A\right)$ olduğu açıktır.

İki küme arasındaki uzaklığın sıfır olmasının bu kümelerin aynı olduğunu ifade etmediği açıktır.

Tanım 2.2.9. X metrik uzayının bir alt kümesi A olsun. $x,y\in A$ için bir A alt kümesinin çapı,

$$d\left(A\right)=\sup\left\{d\left(x,y\right):x,y\in A\right\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.2.10. X bir metrik uzay, bu uzay içinde bir dizi $\left(x_n\right)$ ve $x\in X$ olsun. Her $\varepsilon>0$ için $n_0\leq n$ olduğunda $d\left(x_n,x\right)<\varepsilon$ ya da $x_n\in B\left(x,\varepsilon\right)$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa $\left(x_n\right)$ dizisi x noktasına yakınsıyor denir. Bu durum $x_n\to x$ ya da $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ şeklinde ifade edilir.

Önerme 2.2.2. Bir X metrik uzayında yakınsak her dizi sınırlıdır ve limiti tektir (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

Tanım 2.2.11. X bir metrik uzay ve $\left(x_n\right)$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon>0$ için m,n$\geq n_0$ olduğunda

$$d\left(x_m,x_n\right)<\varepsilon$$

olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa $\left(x_n\right)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.2.12. Bir X metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde yakınsak ise X metrik uzayına tam metrik uzay denir.

2.3. Normlu Lineer Uzaylar

Tanım 2.3.1. X boş olmayan bir küme ve K bir sayı cismi olsun. Her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

1) $x + y = y + x$

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

3) $x + \theta = x$ olacak biçimde bir θ öğesi var

4) $x + x' = \theta$ olacak biçimde bir $x' \in X$ öğesi var

5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

7) $(\alpha\beta x) = \alpha(\beta x)$

8) $1.x = x$

koşulları sağlanıyorsa X kümesine K cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör) uzayı denir.

Tanım 2.3.2. X bir lineer uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer $x, y \in A$ için $0 \le \lambda \le 1$ olmak üzere $\lambda x + (1 - \lambda) y \in A$ oluyorsa A kümesine konveks küme denir.

Tanım 2.3.3. X bir lineer uzay olsun. $N : X \to \mathbb{R}$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in K$ için

N1) $N(x) \ge 0$ ve $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N2) $N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$

N3) $N(x + y) = N(x) + N(y)$

koşullarını sağlıyorsa bu dönüşüme norm denir. X bir lineer uzay ve bu uzay üzerinde bir norm tanımlanmış olsun. Bu uzaya normlu lineer uzay denir. Genel olarak, N norm dönüşümü yerine $\| \cdot \|$ sembolü kullanılır.

X normlu bir lineer uzay olmak üzere,

$$d : X \times X \to \mathbb{R} \ ; \ d(x,y) = \|x-y\|$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü X uzayı üzerinde bir metriktir. Bu metriğe norm metriği denir. Bu nedenle her normlu uzay bir metrik uzaydır (Bayraktar, 1992).

Tanım 2.3.4. $(X, \| \cdot \|)$ normlu lineer uzayının alt kümesi A olsun. Eğer

$$R_A = \sup\{\|x-y\| : x \in A, y \in A\} < \infty$$

oluyorsa A kümesine X içinde sınırlı küme denir.

Tanım 2.3.5. $(X, \| \cdot \|)$ normlu lineer uzayı içinde bir (x_n) dizisi verilmiş olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsaktır denir ve $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.3.1. $(X, \| \cdot \|)$ normlu lineer uzayı içinde yakınsak her dizi sınırlıdır ve limiti tektir (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

Tanım 2.3.6. $(X, \| \cdot \|)$ normlu lineer uzayı içinde (x_n) dizisi verilmiş olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\mathrm{m}, n \geq n_0$ olduğunda

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi adı verilir.

Önerme 2.3.2. $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı içinde her Cauchy dizisi sınırlıdır (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

Önerme 2.3.3. $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayında (x_n) bir Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisine sahip ise (x_n) dizisi de x e yakınsaktır (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

Tanım 2.3.7. $(X, \|\cdot\|_1)$, $(Y, \|\cdot\|_2)$ birer normlu lineer uzay, X uzayından Y içine f bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\|x - x_0\|_1 < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_2 < \varepsilon$$

ya da buna denk olarak

$$f\big(B(x_0, \delta)\big) \subset B\big(f(x_0), \varepsilon\big)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir.

Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayının her noktasında sürekli olan f dönüşümüne X üzerinde sürekli bir fonksiyon adı verilir.

2.4. Banach Uzayları

Tanım 2.4.1. X normlu lineer uzay olsun. X, norm metriğine göre tam ise X uzayına Banach uzayı denir.

Tanım 2.4.2. X in normlu reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayına, reel veya kompleks Banach uzayı denir.

Örnek 2.4.1. $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ kümesi toplama, skalerle çarpma ve

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

normuna göre bir reel Banach uzaydır.

Tanım 2.4.3. X ve Y aynı bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T : X \to Y$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ için

$$T(x+y) = T(x) + T(y)$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

ya da buna denk olarak her $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

şartını sağlıyorsa T dönüşümüne lineer dönüşüm denir.

Eğer T dönüşümü yukarıdaki şartlardan herhangi birini gerçeklemezse T dönüşümüne lineer olmayan dönüşüm denir.

Tanım 2.4.4. $(X, \|\cdot\|)$ ve $(Y, \|\cdot\|)$ iki normlu uzay ve $T : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için

$$\|T(x)\| \leq M \|x\|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti varsa, T dönüşümüne sınırlı dönüşüm denir.

Tanım 2.4.5. X bir lineer uzay olsun. Bu uzayın bir vektörüne bir skaler sayı karşı getiren bir $f : X \to \mathrm{F}$ fonksiyonu lineer fonksiyonel olarak adlandırılır.

Lineer fonksiyonellerin oluşturduğu $X^* = L(X, \mathrm{F})$ lineer uzayına da X uzayının cebirsel duali adı verilir.

Tanım 2.4.6. $\left(X,\|\cdot\|\right)$ bir normlu lineer uzayı üzerindeki tüm sürekli lineer fonksiyonellerin oluşturduğu lineer uzayına X uzayının topolojik duali adı verilir. $f':X\to \mathrm{F}$ sınırlı lineer fonksiyonellerin oluşturduğu topolojik dual $X'=B\left(X,\mathrm{F}\right)$ ile gösterilir.

X' de bir normlu lineer uzaydır ve F tam olduğu için X tam olmasa bile X' daima bir Banach uzayıdır. X' topolojik dualinin, X^{*} cebirsel dualin alt uzayı olduğu açıktır.

Tanım 2.4.7. X normlu lineer uzayının X' duali de normlu lineer uzay olduğundan bu uzayın da duali, yani X üzerinde her sınırlı sürekli fonksiyonele bir skaler sayı karşı getiren sürekli lineer fonksiyonellerin oluşturduğu lineer uzay tanımlanabilir. $\left(X'\right)'=X''$ lineer uzayına X in bi duali (ikinci duali) adı verilir. X'' bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.4.8. $\Gamma:X\to X''$ fonksiyonu lineerdir. Γ fonksiyonuna, X uzayının X'' uzayı içine kanonik dönüşümü adı verilir. Γ kanonik dönüşümünün erişim uzayı X'' bi dualinin tümünü kapsarsa yani $\Re\left(\Gamma\right)=X''$ ise X uzayı norm refleksif ya da kısaca refleksif olarak adlandırılır. X'' daima tam olduğundan bir X normlu lineer uzayı ancak Banach uzayı ise refleksif olabilir.

Bir Banach uzayı ancak ve ancak duali refleksif ise refleksif olur (Şuhubi, 2001).

Tanım 2.4.9. X bir Banach uzayı olsun. Her $x,y\in X$ için $\|x\|\le 1$, $\|y\|\le 1$ ve $\|x-y\|>0$ iken $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|<1$ ise X uzayına sıkı (strictly) konveks Banach uzayı adı verilir.

Tanım 2.4.10. X bir Banach uzayı olsun. Eğer her $x,y\in X$ ve herhangi bir $\varepsilon\in\left(0,2\right]$ için

$$\|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1 \text{ ve } \|x-y\| > \varepsilon$$

iken

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \delta$$

olacak biçimde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa X uzayına düzgün (uniformly) konveks Banach uzayı denir.

Düzgün konveks Banach uzayı refleksifdir (Şuhubi, 2001).

Tanım 2.4.11. X normlu lineer uzayı içinde bir dizi (x_n) ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

ise (x_n) dizisi x_0 noktasına kuvvetli yakınsıyor denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.4.12. X normlu lineer uzayı içinde bir dizi (x_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer, her $f \in X'$ için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

olacak biçimde bir $x_0 \in X$ elemanı varsa (x_n) dizisi (x_0) a zayıf yakınsıyor denir ve $x_n \xrightarrow{z} x_0$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.4.13. X normlu lineer uzayı üzerinde sınırlı lineer fonsiyonellerin bir dizisi (f_n) olsun. Eğer her $x \in X$ için $f_n(x) \to f(x)$ olacak şekilde bir $f \in X'$ fonksiyoneli varsa, (f_n) dizisi f ye $*-$zayıf yakınsar denir ve $f_n \xrightarrow{z^*} f$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.4.2. X Banach uzayı, $x_n, x \in X$, $f_n, f \in X'$, $n \in \mathbb{N}$ olsun.

(a) $x_n \to x_0$, $f_n \to f$

(b) $x_n \xrightarrow{z} x_0$, $f_n \longrightarrow f$

(c) $x_n \longrightarrow x_0$, $f_n \xrightarrow{*z} f$

ise $n \to \infty$ iken $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$ dir.

Teorem 2.4.1. X normlu lineer uzayı içinde (x_n) bir dizi olsun. O zaman,

(i) $x_n \to x_0$ ise $x_n \xrightarrow{z} x_0$ dır.

(ii) (i) şartının tersi genelde doğru değildir.

(iii) boy $X < \infty$ ise $x_n \to x_0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{z} x_0$ dır (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

İspat: (i) $x_n \to x$ ise $\|x_n - x\| \to 0$ dır. Her $f \in X'$ için, $n \to \infty$ iken

$$|f_n(x) - f(x)| = |f(x_n - x)| \le \|f\| \|x_n - x\| \to 0$$

dır. Böylece $x_n \xrightarrow{z} x$ dir.

(ii) $1 < p < \infty$ için l_p uzayı alınsın. Her $f \in l_p^*$ ve her $x \in l_p$, $y \in l_q$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ için

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

dır. Eğer,

$\delta^1=(1,0,0,...,0)$, $\delta^2=(0,1,0,...,0)$, $\delta^3=(0,0,1,...,0)$ ise o zaman $n\neq m$ için $\left\|\delta^n-\delta^m\right\|=2^{\frac{1}{p}}$ olur. Böylece, (δ^n) kuvvetli yakınsak değildir. Her $f\in l_p^*$ için $f(\delta^n)=y_n$, $y\in l_q$, $n\to\infty$ iken $y_n\to 0$ ı sağlar yani $f(\delta^n)\to 0$ dır. Bu sebeple (δ^n), 0 (sıfıra) zayıf yakınsaktır.

(iii) $boy(X)=k$ ve $x_n\xrightarrow{z}x$ ve X in bir tabanı da $(e_1,e_2,...,e_k)$ olsun.

$$x_n=\alpha_1^{(n)}e_1+\alpha_2^{(n)}e_2+...+\alpha_k^{(n)}e_k$$

$$x=\alpha_1^{(1)}e_1+\alpha_2^{(1)}e_2+...+\alpha_k^{(1)}e_k$$

şeklinde ifade edilsin. Kabulden dolayı her $f\in X'$ için $f(x_n)\to f(x)$ dir. Özel olarak $f_1, f_2,..., f_k$ ailesi alınsın.

$$f_j(x_n)\to f_j(x)$$

olarak tanımlanırsa o zaman, $f_j(x_n)=\alpha_j^{(n)}$ ve $f_j(x)=\alpha_j^{(1)}$ olur. Böylece $f_j(x_n)\to f_j(x)\Rightarrow \alpha_j^{(n)}\to\alpha_j^{(1)}$ dir. Bu sebeple, $n\to\infty$ iken

$$\left\|x_n-x\right\|=\left\|\sum_{j=1}^{k}\left(\alpha_j^{(n)}-\alpha_j^{(1)}\right)e_j\right\|\leq\sum_{j=1}^{k}\left|\left(\alpha_j^{(n)}-\alpha_j^{(1)}\right)\right|\left\|e_j\right\|\to 0$$

elde edilir. Bu (x_n) dizisinin x e kuvvetli yakınsadığını gösterir.

Örnek 2.4.3. Bir refleksif Banach uzayında her sınırlı dizi, zayıf yakınsak bir alt diziye sahiptir (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

Çözüm: X refleksif Banach uzayı ve (x_n), X içinde sınırlı bir dizi olsun. Her n için $\left\|x_n\right\|\leq k$ olacak şekilde bir k sabiti vardır. M, $x_1,x_2,x_3,...$ vektörleri ile tanımlı kapalı alt uzay olsun. O zaman, M ayrılabilirdir. M aynı zamanda refleksifdir. Çünkü X refleksif Banach uzayının kapalı alt uzayıdır.

Böylece $M = M^{**}$ dır. Bu sebeple M^{**} ayrılabilirdir. Sonuç olarak M^{*} ayrılabilirdir.

$\{ f_i : i = 1, 2, 3, ... \}$, M^{*} ın sayılabilir yoğun alt kümesi olsun. Her n için

$$\left| f_1\left(x_n\right)\right| \le \| f \| \|x_n\| \le k \| f_n \|$$

dir. $\left(f_1\left(x_n\right)\right)$, skalerlerin sınırlı bir dizisidir. Bu sebeple, $k \to \infty$ iken $\left(f_1\left(x_1, k\right)\right)$ yakınsak olacak şekilde $\left(x_n\right)$ in $s_1 = \left(x_{11}, x_{12}, x_{13}, ...\right)$ bir alt dizisi vardır. Benzer şekilde $k \to \infty$ iken $\left(f_2\left(x_2, k\right)\right)$ yakınsak olacak şekilde $\left(s_1\right)$ in $s_2 = \left(x_{21}, x_{22}, x_{23}, ...\right)$ bir alt dizisi vardır. Genel olarak, $k \to \infty$ iken $\left(f_n\left(x_n, k\right)\right)$ yakınsak olacak şekilde $\left(s_{n-1}\right)$ in $s_n = \left(x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, ...\right)$ bir alt dizisi vardır. $s = \left(x_{11}, x_{22}, x_{33}, ...\right)$ diagonal dizisi alınsın. O zaman, $n = 1, 2, 3, ...$ için s_n bir alt dizisi s dir. Her bir $f_i \in M^{*}$ için $n \to \infty$ iken $\left(f_i\left(x_m\right)\right)$ yakınsaktır. Böylece her $f \in M^{*}$ için $\left(f\left(x_{nn}\right)\right)$ yakınsaktır. $F\left(f \right) = \lim_{n\to\infty} f\left(x_{nn}\right)$ tanımlansın. O zaman, $\left| F\left(f \right)\right| \le \| f \| \sup_{(n)} \|x_{nn}\| \le k \| f \|$, $f \in M^{**}$ olduğunu gösterir.

$f\left(p\right) = F\left(f \right)$ olacak şekilde $p \in M$, M nin refleksif olmasından sağlanır. Her $f \in M^{*}$ için

$$f\left(p\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(x_{nn}\right)$$

olur. Bu nedenle $\left(x_{nn}\right)$ dizisi p noktasına zayıf yakınsaktır.

Tanım 2.4.14. T, C den C içine tanımlı bir dönüşüm olmak üzere $F = F\left(T\right) = \left\{ x \in C : T\left(x\right) = x \right\}$ şeklinde bir küme tanımlansın. F kümesinin her bir

x elemanına T dönüşümünün sabit noktası, F kümesine de T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi denir. C kümesi boş olmayan bir kümedir.

Örnek 2.4.4. $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}$ dönüşümünün sabit noktalarından biri,

$$g\left(\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

dir.

Tanım 2.4.15. $\phi:\mathbb{R}^{+}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu 0 da sürekli, artan bir fonksiyon ve $\phi(0)=0$ koşulunu sağlasın. (X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar olmak üzere $f:X\rightarrow Y$ fonksiyonu her $x_1,x_2\in X$ için

$$\rho\left(f(x_1),f(x_2)\right)\leq\phi\left(d(x_1,x_2)\right)$$

bağıntısını gerçeklerse ϕ ye f fonksiyonun bir süreklilik modülü adı verilir.

Tanım 2.4.16. $k>0$ bir sabit olmak üzere süreklilik modülü $\phi(d)=kd$ şeklinde olan fonksiyonlar Lipschitz sınıfını oluşturur ve her $x_1,x_2\in X$ için

$$\rho\left(f(x_1),f(x_2)\right)\leq kd(x_1,x_2)$$

olduğundan Lipschitz sürekli fonksiyonlar olarak adlandırılır. k sayısına Lipschitz sabiti adı verilir.

Tanım 2.4.17. X bir metrik uzay ve $f:X\rightarrow X$ fonksiyonu bu uzayı kendi içine dönüştürsün. Her $x,y\in X$ nokta çifti ve $0<k<1$ koşulunu sağlayan bir k reel sayısı için

$$d\left(f(x),f(y)\right)\leq kd(x,y)$$

koşulu sağlanıyorsa f ye bir büzülme dönüşümü adı verilir. Bir büzülme dönüşümünün Lipschitz sürekli bir fonksiyon olduğu açıktır. k Lipschitz sabiti bu durumda büzülme sabiti olarak adlandırılır.

Teorem 2.4.2. Tam metrik uzay üzerinde her büzülme dönüşümü, bir tek sabit noktaya sahiptir (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

İspat: $x_0 \in X$ ve (x_n) dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$x_1 = Tx_0\,,\ x_2 = Tx_1\,,\ x_3 = Tx_2\,,\ \dots\,,\ x_n = Tx_{n-1}\,,\ \dots$$

x_n dizisine iterasyon dizisi adı verilir.

$$d(x_1,x_2) = d\big(T(x_0),T(x_1)\big) \le kd(x_0,x_1) = k^1 d\big(x_0,T(x_0)\big)$$

$$d(x_2,x_3) = d\big(T(x_1),T(x_2)\big) \le kd(x_1,x_2) = k^2 d\big(x_0,T(x_0)\big)$$

$$d(x_3,x_4) = d\big(T(x_2),T(x_3)\big) \le kd(x_2,x_3) = k^3 d\big(x_0,T(x_0)\big)$$

$$\dots$$
$$\dots$$
$$\dots$$

$$d(x_n,x_{n+1}) = d\big(T(x_{n-1}),T(x_n)\big) \le kd(x_{n-1},x_n) = k^n d\big(x_0,T(x_0)\big)$$

dir. Herhangi bir m pozitif tam sayısı için

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\le d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1},x_m) \\ &\le k^n d\big(x_0,T(x_0)\big) + k^{n+1} d\big(x_0,T(x_0)\big) + \dots + k^{m-1} d\big(x_0,T(x_0)\big) \\ &\le \left(k^n + k^{n+1} + \dots + k^{m-1}\right) d\big(x_0,T(x_0)\big) \\ &= \frac{k^n - k^m}{1-k}\, d\big(x_0,T(x_0)\big) \\ &< \frac{k^n}{1-k}\, d\big(x_0,T(x_0)\big) \end{aligned}$$

ve $0 < k < 1$ dir.

Bu sebeple $n \to \infty$ iken $d(x_n, x_m) \to 0$ elde edilir. Böylece (x_n) dizisi Cauchy dizisidir. X tam olduğu için (x_n) dizisi x e yakınsaktır. x, T nin sabit bir noktası yani $T(x) = x$ olsun.

$$\begin{aligned} d(x, T(x)) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, T(x)) \\ &\leq d(x, x_n) + d(T(x_{n-1}), T(x)) \\ &\leq d(x, x_n) + kd(x_{n-1}, x) \end{aligned}$$

sebebiyle $d(x, T(x)) \to 0$ bulunur. Böylece $T(x) = x$ yani x, T nin sabit bir noktasıdır.

$T(y) = y$ olacak şekilde $y \in X$ olsun.

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) = kd(x, y)$$

elde edilir. Eğer $x \neq y$ ise $d(x, y) > 0$ dır. $c \geq 1$, $0 < c < 1$ olmasıyla çelişir. Bu çelişki $x = y$ olduğunu gösterir. Böylece tek sabit nokta mevcuttur.

Teorem 2.4.3. Tam metrik uzay üzerinde büzülme dönüşümü olmayan dönüşümlerin de sabit noktası var, hatta tek olabilir (Şuhubi, 2001).

Örnek 2.4.5. $T(x) = 2 + \frac{1}{2}x$, $x \in [0,1]$ şeklinde tanımlanan $T : [0,1] \to \mathbb{R}$ dönüşümü $[0,1]$ üzerinde büzülme dönüşümüdür, fakat bu aralıkta sabit bir noktaya sahip değildir.

Çözüm: $d : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}_+$, $d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde tanımlanan uzaklık fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde bir metriktir. d metriğine $\|\cdot\|$ normunun indirgediği metrik adı verilir. Her $x, y \in [0,1]$ ve $0 < k < 1$ koşulunu sağlayan bir k reel sayısı için

$$d\left(T\left(x\right),T\left(y\right)\right)\leq kd\left(x,y\right)$$
$$\left\|T\left(x\right)-T\left(y\right)\right\|\leq k\left\|x-y\right\|$$
$$\left\|2+\frac{1}{2}x-\left(2+\frac{1}{2}y\right)\right\|\leq k\left\|x-y\right\|$$
$$\left\|2+\frac{1}{2}x-2-\frac{1}{2}y\right\|\leq k\left\|x-y\right\|$$
$$\left\|\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right\|\leq k\left\|x-y\right\|$$
$$\frac{1}{2}\left\|x-y\right\|\leq k\left\|x-y\right\|$$
$$\left\|x-y\right\|\leq 2k\left\|x-y\right\|$$

$$0<2k<1\Rightarrow 0<k<\frac{1}{2}$$

dir. T, $\left[0,1\right]$ üzerinde büzülme dönüşümüdür. $x\in\left[0,1\right]$ için

$$T\left(x\right)=x\Rightarrow 2+\frac{1}{2}x=x\Rightarrow 2=\frac{x}{2}\Rightarrow x=4\notin\left[0,1\right]$$

dir. Gerçekten T dönüşümü $\left[0,1\right]$ aralığında sabit bir noktaya sahip değildir.

2.5 Genişlemeyen Dönüşümler

Tanım 2.5.1. X Banach uzayı ve C, X in kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Eğer $T:C\to C$ lineer olmayan dönüşümü her $x,y\in C$ için

$$\left\|T\left(x\right)-T\left(y\right)\right\|\leq\left\|x-y\right\|$$

eşitsizliğini gerçekliyorsa T dönüşümüne C üzerinde genişlemeyen dönüşüm denir.

Örnek 2.5.1. X Banach uzayı ve C, X in kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $T:C\to C$ dönüşümü, $T\left(x\right)=\frac{x}{2}+a$, $\left(a\neq 0\right)$ şeklinde tanımlansın. O zaman T genişlemeyen bir dönüşümdür.

Çözüm: Gerçekten her $x, y \in C$ ve $a \neq 0$ için

$$\|T(x)-T(y)\| = \left\|\frac{x}{2}+a-\left(\frac{y}{2}+a\right)\right\| = \left\|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right\| = \frac{\|x-y\|}{2} \leq \|x-y\|$$

dir.

Teorem 2.5.1. X Hilbert uzayı ve C, X in kapalı sınırlı konveks bir alt kümesi olsun. O zaman $T: C \to C$ ye her bir genişlemeyen dönüşüm en az bir tane sabit noktaya sahiptir (Petryshyn ve Williamson, 1973).

Düzgün konveks Banach uzayında da Teorem 2.5.1. geçerlidir.

Uyarı 2.5.1. $C = [0,1]$ ve $E(x) = x \in C$ olsun. Sabit noktanın tekliği E dönüşümünde ki gibi Teorem 2.5.1. de tanımlı T dönüşümünde gerekli değildir (Petryshyn ve Williamson, 1973).

Tanım 2.5.2. X Banach uzayı ve C, X in kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Eğer $T: C \to C$ sürekli dönüşümü her $x \in C$ ve her $p \in F(T)$ için

$$\|T(x)-p\| \leq \|x-p\|$$

eşitsizliğini gerçekliyorsa T dönüşümüne C üzerinde sözde genişlemeyen dönüşüm denir.

Örnek 2.5.2. X Banach uzayı olsun. T dönüşümü $T(0)=0$ ve $T(x) = \frac{x}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $(x \neq 0)$ şeklinde tanımlansın. T sözde genişlemeyen dönüşümdür.

Çözüm: Gerçekten $x = 0$ için $T(0) = \frac{0}{2}\sin\left(\frac{1}{0}\right) = 0$ ve $x \neq 0$ için $T(x) = \frac{x}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow 2 = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ dir. Bu mümkün değildir. O zaman T nin tek sabit noktası 0 dır. $y \in X$ ve $p = 0$ için T sözde genişlemeyen dönüşümdür.

$$\left\|T(y)-p\right\| = \left\|T(y)-0\right\| = \left|\frac{y}{2}\right|\left|\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| \le \left|\frac{y}{2}\right| \le |y| = \left\|y-p\right\|$$

bulunur.

Tanım 2.5.3. X Banach uzayı C, X in boş olmayan bir alt kümesi ve $F(T)$, T nin sabit noktalarının kümesi olsun. $T:C\to C$ dönüşümü, her $x,y\in C$ ve $n\ge 1$ için

$$\left\|T^n(x)-T^n(y)\right\| \le (1+r_n)\left\|x-y\right\|$$

olacak şekilde $n\to\infty$ iken $r_n\to 0$ ile $(r_n)\subset[0,\infty)$, pozitif reel sayı dizisi varsa T dönüşümüne asimtotik genişlemeyen dönüşüm adı verilir.

Tanım 2.5.4. X Banach uzayı, C, X in boş olmayan bir alt kümesi ve $F(T)$, T nin sabit noktalarının kümesi olsun. $T:C\to C$ dönüşümü her $x\in C$, her $p\in F(T)$ ve $n\ge 1$ için

$$\left\|T^n(x)-T^n(p)\right\| \le (1+r_n)\left\|x-p\right\|$$

olacak şekilde $n\to\infty$ iken $r_n\to 0$ ile $(r_n)\subset[0,\infty)$, pozitif reel sayı dizisi varsa T dönüşümüne asimtotik sözde genişlemeyen dönüşüm adı verilir.

Tanım 2.5.5. X Banach uzayı, C, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. $T:C\to C$ dönüşümü her $x,y\in C$ ve $n\ge 1$ için

$$\left\|T^n(x)-T^n(y)\right\| \le L\left\|x-y\right\|$$

olacak şekilde $L>0$ sabiti varsa T dönüşümüne düzgün $L-$Lipschitzian adı verilir.

Uyarı 2.5.2. Asimtotik genişlemeyen dönüşüm, sabit nokta kümesi boştan farklı olmak şartıyla aynı zamanda asimtotik sözde genişlemeyen dönüşümdür. Tersi her zaman doğru değildir (Shahzad ve Zegeye, 2007).

Tanım 2.5.6. X Banach uzayı, C, X in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi, $T : C \to C$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in C$, her $p \in F(T)$ ve $n \geq 1$ için

$$\left\| T^n(x) - p \right\| \leq \left\| x - p \right\| + s_n \left\| x - p \right\| + c_n$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $\lim_{n \to \infty} s_n = 0 = \lim_{n \to \infty} c_n$ ile $(s_n), (c_n) \subset [0, \infty)$ reel sayı dizileri mevcutsa ve $F(T) \neq \varnothing$ ise T ye genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşüm adı verilir. Genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşümü aşağıdaki şekilde de tanımlayabiliriz.

$$\left\| T^n(x) - p \right\| \leq \left\| x - p \right\| + s_n \left\| x - p \right\| + c_n \left\| x - T^n(x) \right\|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $\lim_{n \to \infty} s_n = 0 = \lim_{n \to \infty} c_n$ ile $(s_n), (c_n) \subset [0, 1)$ reel sayı dizileri mevcutsa ve $F(T) \neq \varnothing$ ise T ye (s_n) ve (c_n) ile ilişkili genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşüm adı verilir.

Uyarı 2.5.3. Aşağıdakileri bu şekilde de ifade edebiliriz.

Eğer, her $n \geq 1$ için $c_n \equiv 0$ ise o zaman genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşüm, asimtotik sözde genişlemeyen dönüşüme kısıtlanır.

Eğer, her $n \geq 1$ için $s_n \equiv c_n \equiv 0$ ise o zaman genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşüm, sözde genişlemeyen dönüşüm olur.

Eğer, her $n \geq 1$ için $s_n \equiv 0$ ise o zaman genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşüm, genelleştirilmiş sözde genişlemeyen dönüşüme kısıtlanır.

Genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşüm olan, genelleştirilmiş sözde genişlemeyen dönüşüm olmayana aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 2.5.3. $X = l^2$ ile $\| \cdot \|$ normu her $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in X$ için

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\,2}}$$

şeklinde tanımlı ve $C = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) : x_1 \le 0, x_i \in \mathbb{R}, i = 2,3,...\}$ olsun. O zaman C, X in boş olmayan bir alt kümesidir.

Çözüm: Herhangi bir $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in C$ için

$$T(x) = (0, 4x_1, 0, 0, ..., 0, ...)$$

şeklinde bir $T : C \to C$ dönüşümü tanımlansın. T nin genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşüm olduğunu görmek kolaydır. Gerçekten herhangi bir $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in X$ için $T(x) = x$ alınırsa,

$$(0, 4x_1, 0, 0, ..., 0, ...) = (x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n, ...), \quad F(T) = \{0\} \quad \text{ve her} \quad n = 2,3,...$$

için

$$T^n(x) = (0, 0, 0, ..., 0, ...)$$

dır.

Her $s_1 \in [0,1)$ ve $c_1 \in [0,1)$ için

$$\begin{aligned} &\|T(x) - p\| - (1+s_1)\|x - p\| - c_1\|x - T(x)\| \\ &= \|(0, 4x_1, 0, 0, ..., 0, ...)\| - (1+s_n)\|(x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n, ...)\| \\ &\quad - c_1\|(x_1, x_2, -4x_1, x_4, ..., x_n, ...)\| \\ &= 4x_1 - (1+s_1)\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\,2}} - c_1\sqrt{x_1^{\,2} + (x_2 - 4x_1)^2 + \sum_{i=3}^{\infty} x_i^{\,2}} \\ &\le 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\left\|T^n(x)-p\right\|-(1+s_n)\left\|x-p\right\|-c_n\left\|x-T^n(x)\right\| \\
&=0-(1+s_n)\|x\|-c_n\|x\| \\
&=0-(1+s_n+c_n)\|x\| \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

dır. Her $n=2,3,...$ için (s_n) ve (c_n) $\subset[0,1)$ ile $\lim_{n\to\infty} s_n=0=\lim_{n\to\infty} c_n$ ve bu sebeple T genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat T, genelleştirilmiş sözde genişlemeyen dönüşüm değildir. Gerçekten,

$$x^0=(-2,-2,0,0,...,0,...)\in C,\ s_1=\frac{4}{5}\in[0,1)$$

alınırsa o zaman,

$$\begin{aligned}
&\left\|T(x^0)-p\right\|-\left\|x^0-p\right\|-c_1\left\|x^0-T(x^0)\right\| \\
&=\left\|(0,-8,0,0,...,0,...)\right\|-\left\|(-2,-2,0,0,...,0,...)\right\|-\frac{4}{5}\left\|(-2,6,0,0,...,0,...)\right\| \\
&=8-\sqrt{8}-0,8\sqrt{40}=0,11192861...>0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise T nin genelleştirilmiş sözde genişlemeyen dönüşüm olmadığını gösterir.

Örnek 2.5.4. $C=\left[-\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}\right]$ ve $x\neq 0$ için $T(x)=\frac{x}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x=0$ için $T(x)=0$ olsun. T dönüşümü genelleştirilmiş sözde genişlemeyen dönüşümdür fakat asimtotik sözde genişlemeyen ve asimtotik genişlemeyen dönüşüm değildir. Çünkü Lipschitz değildir.

Tanım 2.5.7. X Banach uzayı ve C, X in herhangi bir alt kümesi olsun. $T,I:C\to C$ lineer olmayan dönüşümleri verilsin. Her $x,y\in C$ için

$$\left\|T(x)-T(y)\right\|\leq\left\|I(x)-I(y)\right\|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne I-genişlemeyen dönüşüm adı verilir.

Tanım 2.5.8. X Banach uzayı ve C, X in herhangi bir alt kümesi olsun. $T, I : C \to C$ lineer olmayan dönüşümleri verilsin. Her $x \in C$ ve her $p \in F(T)$ için

$$\|T(x) - p\| \leq \|I(x) - p\|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne, I -sözde genişlemeyen dönüşüm adı verilir.

Örnek 2.5.5. X reel normlu uzay ve $C = [0,1]$ olsun. $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ için $T(x)=1$

$\frac{1}{2} < x \leq 1$ için $T(x)=0$ ve $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ için $I(x)=0$, $\frac{1}{2} < x \leq 1$ için $I(x)=1$ olsun.

O zaman $F(I) = \{0,1\}$ konvekstir ama T ve I dönüşümlerinin ortak sabit bir noktası yoktur.

Örnek 2.5.6. $X = \mathbb{R}^2$ ve $\|(x,y)\| = |x| + |y|$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ olsun. T ve I dönüşümleri X üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlansın

$$T(x,y) = \left(\frac{1}{2}(x-2), \frac{1}{2}(x^2 + y - 4) \right) \ , I(x,y) = \left(\frac{1}{2}(x-2), x^2 + y - 4 \right)$$

açıktır ki $T, I-$genişlemeyen bir dönüşümdür. Ek olarak $F(T) = \{-2,0\}$,

$F(I) = \{(-2,y) : y \in \mathbb{R}\}$ ve $C(I,T) = \{(x,y) : y = 4 - x^2, x \in \mathbb{R}\}$ olur.

Böylece (T,I) sürekli dönüşümüdür. $F(I)$ konvekstir ve T ile I dönüşümlerinin ortak sabit noktası $(-2,0)$ dır.

Tanım 2.5.9. X Banach uzayı C , X in herhangi bir alt kümesi olsun. $T : C \to C$ ye dönüşümü tanımlansın. C içinde (x_n) dizisi ile $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T(x_n)\| = 0$ verilsin. $x_{n_i} \to p \in C$ olacak şekilde (x_n) in bir alt dizisi (x_{n_i}) mevcutsa o zaman T dönüşümüne yarı kompaktır (semi-compact) denir.

Tanım 2.5.10. X Banach uzayı olsun. $x \in X$ ve bu x elemanına zayıf yakınsayan herhangi bir (x_n) dizisi ile her $x \neq y$ için

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

ise o zaman X, Opial şartını sağlar denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Çalışma tamamen teorik olup, bu tezde kaynaklar kısmında verilen çalışmalar detaylı olarak incelenerek mevcut sonuçlar karşılaştırılmaktadır. Daha iyi bir yaklaşım elde etmek için hangi koşullar altında sonuçların elde edildiği incelenip, bu verilmiş olan koşullar yerine özel koşullar alınarak iterasyon dizilerinin zayıf ve kuvvetli yakınsaklıkları araştırılmaktadır. Özellikle, Mann ve Ishikawa iterasyon dizilerinin genişlemeyen ve onun genelleşmeleri olan dönüşümler için kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları ile ilgili olan makaleler internet ortamından ve değişik kütüphanelerden temin edilerek, çalışmalarımıza esas teşkil eden konu ayrıntıları ile ele alınmıştır. Bu makalelerde elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak, genişlemeyen ve onun genelleşmeleri olan dönüşümlere uygulanabilirliği incelenmiştir. İterasyon dizilerinin zayıf ve kuvvetli yakınsaklıkları için gerek ve yeter koşullar bu dönüşümler için araştırılmıştır. Ayrıca genişlemeyen ve sözde genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için kapalı iterasyon sürecinin kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Sözde Genişlemeyen Dönüşümlerin İterasyon Dizileri için Kuvvetli ve Zayıf Yakınsaklıkları

Bu bölümde, Petryshyn ve Williamson (1973), ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ayrıca Petryshyn ve Williamson (1973), Banach uzaylarında sözde genişlemeyen dönüşümler için Mann iterasyon dizilerinin ortak sabit bir noktaya yakınsaklıkları kullanılarak elde edilen sonuçlar geliştirilmektedir.

Tanım 4.1.1. X Banach uzayı, C, X in konveks bir alt kümesi ve $T:C\to C$ bir dönüşüm olsun. $x_0\in C$, $\lambda\in(0,1)$ ve $\mu\in[0,1)$ için

$$x_n=T_{\lambda,\mu}^n(x_0),\; T_{\lambda,\mu}=(1-\lambda)E+\lambda T\left[(1-\mu)E+\mu T\right]$$

olacak şekilde $x_n=T_{\lambda,\mu}^n(x_0)$ iterasyon dizisine Ishikawa iterasyon dizisi adı verilir. $\mu=0$ ise $T_{\lambda,\mu}=T_\lambda$ dır (Ishikawa, 1974).

Burada $E:C\to C,\; E(x)=x$ olan birim dönüşümdür.

Ishikawa iterasyon dizisi aşağıdaki şekilde de tanımlanabilir.

$\alpha_n,\beta_n\in[0,1]$ ve $n\geq 1$ için,

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Ty_n\\ y_n&=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tx_n\end{aligned}$$

dir.

Eğer $T_\mu=(1-\mu)E+\mu T$ ise $T_{\lambda,\mu}=(1-\lambda)E+\lambda TT_\mu$ olur.

$x_n = T_\lambda^n(x_0)$, $T_\lambda = (1-\lambda)E + \lambda T$ olacak şekilde (x_n) dizisi tanımlansın. $x_n = T_\lambda^n(x_0)$ iterasyon dizisine Mann iterasyon dizisi adı verilir (Ghosh ve Debnath, 1997).

Mann iterasyon dizisi aşağıdaki şekilde de tanımlanabilir.

$\alpha_n \in [0,1]$ ve $n \geq 1$ için,

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n$$

$\beta_n = 0$ ise her n için Ishikawa iterasyon dizisi Mann iterasyon dizisine dönüşür.

C içinde T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir. Genel olarak $F(T) \neq F(T_{\lambda,\mu})$ dir. $F(T) \subset F(T_{\lambda,\mu})$ olduğu kolayca gösterilebilir. Eğer T dönüşümü genişlemeyen bir dönüşüm ise $F(T) = F(T_{\lambda,\mu})$ dir. $p \in F(T_{\lambda,\mu})$ olsun. Bu halde $TT_\mu(p) = p$ yi sağlar o zaman,

$$\|T(p) - p\| = \|T(p) - TT_\mu(p)\| \leq \|p - T_\mu(p)\| = \mu\|T - p\|$$

ve $\mu < 1$ olduğu için $T(p) = p$ dir. Böylece,

$$F(T_{\lambda,\mu}) \subset F(T)$$

bulunur. Böylece $F(T) = F(T_{\lambda,\mu})$ olur.

Teorem 4.1.1. X Banach uzayı, C X in kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T : C \to C$ sürekli bir dönüşüm olsun. T dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın.

i) $F(T) \neq \varnothing$

ii) T, sözde genişlemeyen bir dönüşümdür.

Yani $x \in C$ ve $p \in F(T)$ için

$$\|T(x)-p\| \leq \|x-p\|$$

dir. O zaman, $x_0 \in C$ için $x_n = T_{\lambda,\mu}^n(x_0)$ ile tanımlı (x_n) dizisinin C içinde T nin sabit bir noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart $n \to \infty$ iken $d(x_n, F(T)) \to 0$ dır (Ghosh ve Debnath, 1997).

İspat: $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$ olduğu kabul edilsin. İlk önce (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğu gösterilmelidir. Verilen $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq N$ için $d(x_n, F(T)) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde n pozitif tamsayısı mevcuttur. Herhangi iki pozitif tamsayı l ve k, $p \in F(T) \subset F(T_{\lambda,\mu})$ için,

$$\|x_l - x_k\| \leq \|x_l - p\| + \|x_k - p\|$$

dir. $l, k \geq N$ için

$$\|x_l - p\| = \|T_{\lambda,\mu}^l(x_0) - p\| \leq \|T_{\lambda,\mu}^N(x_0) - p\| = \|x_N - p\|$$
$$\|x_k - p\| = \|T_{\lambda,\mu}^l(x_0) - p\| \leq \|T_{\lambda,\mu}^N(x_0) - p\| = \|x_N - p\|$$

olur. Böylece,

$$\|x_l - x_k\| \leq 2\|x_N - p\|$$

dir. $p \in F(T)$ üzerinde infimum alınırsa $l, k \geq N$ için

$$\|x_l - x_k\| \leq 2d(x_N, F(T)) < \varepsilon$$

elde edilir. Buradan (x_n) dizisi Cauchy dizisidir ve C X Banach uzayının kapalı bir alt kümesidir. Bu sebeple C içinde sabit bir noktaya yakınsaktır. Ek olarak, T dönüşümü C üzerinde sürekli bir dönüşümdür. O zaman $F(T) \subset C$ kapalıdır. Bu sebeple $x \in F(T)$ dir.

X reel Banach uzayı, C, X in kapalı bir alt kümesi ve $T:C\to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. $x_0\in C$, $\lambda\in(0,1)$ ve (x_n) iterasyon dizisi aşağıdaki iterasyon metodu ile tanımlansın.

i) $n=1,2,3,...$ için $x_n=T(x_{n-1})=T^n(x_0)$ ya da basit iterasyon metodu,

ii) $n=1,2,3,...$ için $x_n=T_\lambda(x_{n-1})=T_\lambda^n(x_0)$, $T_\lambda=\lambda E+(1-\lambda)T$ iyi tanımlıdır. Ayrıca C içinde T nin sabit bir noktasına (x_n) iterasyon dizisinin zayıf ve kuvvetli yakınsaklıkları verilmişdir (Petryshyn ve Williamson, 1973).

Teorem 4.1.2. X Banach uzayı, C, X in kapalı bir alt kümesi ve $T:C\to X$ tanımlı, sürekli bir dönüşüm olsun. T dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın.

1) $F(T)\neq\emptyset$

2) T, sözde genişlemeyen bir dönüşümdür. Yani herhangi bir $x\in C$ ve her $p\in F(T)$ için

$$\|T(x)-p\|\leq\|x-p\|$$

dir.

3) Her $n\geq 1$ için $x_n=T^n(x_0)\in C$ olacak şekilde bir $x_0\in C$ vardır.

O zaman, (x_n) dizisinin C içinde T nin sabit bir noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart $n\to\infty$ iken $\lim_n d(x_n,F(T))=0$ olmasıdır (Petryshyn ve Williamson, 1973).

İspat: $\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, F(T)\right) = 0$ olduğu kabul edilsin. (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğu gösterilmelidir. Verilen her $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq n_1$ için $d\left(x_n, F(T)\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Her $l, k \geq n_1$ ve her $p \in F(T)$ için

$$\|x_l - x_k\| \leq \|x_l - p\| + \|x_k - p\|$$

dir. 2) den

$$\|x_l - p\| = \|T^l(x_0) - p\| \leq \|T^{n_1}(x_0) - p\|$$
$$\|x_k - p\| = \|T^k(x_0) - p\| \leq \|T^{n_1}(x_0) - p\|$$

dir. Böylece $p \in F(T)$ için

$$\|x_l - x_k\| \leq 2\|x_{n_1} - p\|$$

bulunur. $p \in F(T)$ için infimum alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\|x_l - x_k\| \leq 2d\left(x_{n_1}, F(T)\right) < \varepsilon$$

dir. (x_n) Cauchy dizisidir ve böylece C kapalı olduğu için bazı $p \in C$ ye yakınsar. Ayrıca T sürekli bir dönüşüm olduğu için $F(T)$ kapalıdır ve bu sebeple $\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, F(T)\right) = 0$ şartı $p \in F(T)$ olmasını gerçekler.

Tanım 4.1.2. Eğer $T : C \to C$ dönüşümü her $x \in C$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n(x) - T^{n+1}(x)\| = 0$$

şartını gerçeklerse o zaman T dönüşümüne C üzerinde asimtotik regülerdir denir.

Teorem 4.1.3. X Banach uzayı, C, X in kapalı bir alt kümesi ve $T : C \to X$ tanımlı, sürekli bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki şartlar kabul edilsin.

1) $F(T) \neq \emptyset$

2) T, sözde genişlemeyen bir dönüşümdür.

3) Her $n \geq 1$ için $x_n = T^n(x_0) \in C$ olacak şekilde bir $x_0 \in C$ vardır.

4) T, x_0 da asimtotik regülerdir.

5) Eğer $(y_n) \subseteq C$, $n \geq 1$ ve $n \to \infty$ iken $\|(E-T)y_n\| \to 0$ ise $\liminf_n d(y_n, F(T)) = 0$ olur. O zaman, (x_n) dizisi C içinde T nin sabit bir noktasına yakınsaktır (Petryshyn ve Williamson, 1973).

İspat: $n \geq 1$ için $T^n(x_0) \in C$, T x_0 da asimtotik regüler ve $(E-T)T^n(x_0) = T^n(x_0) - T^{n+1}(x_0)$ olduğu için $\lim_{n\to\infty} \|(E-T)x_n\| = 0$ dır. Böylece 5) şartından,

$$\liminf_n d(x_n, F(T)) = 0$$

elde edilir. 2)'den yani T nin sözde genişlemeyen dönüşüm olmasından dolayı $\left(d(x_n, F(T))\right)_{n\geq 1}$ dizisi monoton azalandır ve böylece $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$ dır. Bu sebeple (x_n) dizisi C içinde T nin sabit bir noktasına kuvvetli yakınsaktır.

Tanım 4.1.3. X ile Y normlu lineer uzaylar ve $T : X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Ancak ve ancak her (x_n) dizisi için $(T(x_n)) \subset Y$ dizisinin bir $y \in Y$ elemanına yakınsayan bir alt dizisi varsa T ye kompakt dönüşüm adı verilir.

Örnek 4.1.1. $B = B(0,1)$, $\mathbb{R}^2$ de birim çember olsun. $T : B \to B$ dönüşümü $T(x,y) \to \left(-\frac{x}{2}, -y\right)$ olarak tanımlansın.

(i) T, genişlemeyen bir dönüşümdür.

(ii) $F(T) \neq \emptyset$, B içinde T nin sadece tek sabit noktası $(x,y)=(0,0)$ dır.

(iii) Eğer $(x,y) \in B$ ise o zaman basit bir hesaplama ile herhangi bir n için

$$\left\|T^n(x,y)-T^{n+1}(x,y)\right\|^2 = \left(\frac{3x}{2^{n+1}}\right)^2 + (2y)^2$$

dir.

Çözüm: **(i)** T genişlemeyen bir dönüşümdür. Eğer (x_1,y_1) ve $(x_2,y_2) \in B$ ise

$$\begin{aligned}\left\|T(x_1,y_1)-T(x_2,y_2)\right\|^2 &= \left\|\left(-\frac{x_1}{2},-y_1\right)-\left(-\frac{x_2}{2},-y_2\right)\right\|^2 \\ &= \left\|\left(\left(\frac{-x_1+x_2}{2}\right),(-y_1+y_2)\right)\right\|^2 \\ &= \frac{1}{4}(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \\ &\leq (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 \\ &= \left\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\right\|^2\end{aligned}$$

bulunur. Böylece T genişlemeyen bir dönüşümdür. B kompakt olduğu için T de kompakt bir dönüşümdür.

(ii) $F(T) \neq \emptyset$ ise herhangi bir $(x,y) \in B$ için

$$\begin{aligned}T(x,y)=(x,y) &\Rightarrow \left(-\frac{x}{2},-y\right)=(x,y) \\ &\Rightarrow -\frac{x}{2}=x \quad \text{ve} \quad -y=y \\ &\Rightarrow x=0 \quad \text{ve} \quad y=0\end{aligned}$$

elde edilir. O zaman T nin tek sabit noktası B içinde $(x,y)=(0,0)$ olur.

(iii) Eğer $(x,y) \in B$ ise herhangi bir n için

$$T^1(x,y)=\left(-\frac{x}{2},-y\right)$$
$$T^2(x,y)=\left(\frac{x}{4},y\right)$$
$$T^3(x,y)=\left(-\frac{x}{8},-y\right)$$
$$T^4(x,y)=\left(\frac{x}{16},y\right)$$
$$\vdots$$
$$T^{n-1}(x,y)=\left((-1)^{n-1}\frac{x}{2^{n-1}},(-1)^{n-1}y\right)$$
$$T^{n}(x,y)=\left((-1)^{n}\frac{x}{2^{n}},(-1)^{n}y\right)$$
$$T^{n+1}(x,y)=\left((-1)^{n+1}\frac{x}{2^{n+1}},(-1)^{n+1}y\right)$$

$$\left\|T^n(x,y)-T^{n+1}(x,y)\right\|^2=\left\|\left((-1)^n\frac{x}{2^n},(-1)^n y\right)-\left((-1)^{n+1}\frac{x}{2^{n+1}},(-1)^{n+1}y\right)\right\|^2$$
$$=\left\|(-1)^n\left(\frac{x}{2^n}+\frac{x}{2^{n+1}}\right),(-1)^n y(1+1)\right\|^2$$
$$=\left\|(-1)^n\frac{x}{2^n}\left(1+\frac{1}{2}\right),(-1)^n 2y\right\|^2$$

$$=\left\|(-1)^n\frac{x}{2^n}\frac{3}{2},(-1)^n 2y\right\|^2$$
$$=\left((-1)^n\frac{x}{2^n}\frac{3}{2}\right)^2+\left((-1)^n 2y\right)^2$$
$$=\left(\frac{x^2 3^2}{2^{2n+2}}\right)+\left(4y^2\right)$$
$$=\left(\frac{3x}{2^{n+1}}\right)^2+(2y)^2$$

Böylece $y=0$ eksenindeki B içindeki bütün z noktaları için T asimtotik regülerdir ve B içindeki diğer noktalarda T asimtotik regüler değildir.

Teorem 4.1.4. X Banach uzayı, C X in kapalı bir alt kümesi ve $T:C\to C$ tanımlı, sürekli bir dönüşüm olsun. T dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın.

1) $F(T)\neq\emptyset$

2) T, sözde genişlemeyen bir dönüşümdür.

6) Her $x\in C-F$ için

$$\|T(x)-q_x\|<\|x-q_x\|$$

olacak şekilde $q_x\in F(T)$ mevcuttur.

7) Her $n\geq 1$ için $T^n(x_0)\in C$ olacak şekilde $x_0\in C$ vardır ve $(x_n)=\left(T^n(x_0)\right)_{n\geq 1}$ dizisi bazı $x^*\in C$ ye yakınsayan $\left(x_{n_j}\right)_{j\geq 1}$ bir alt dizisini içerir.

O zaman $x^*\in F(T)$ ve (x_n) dizisi de x^* a yakınsar (Petryshyn ve Williamson, 1973).

İspat: **2)** şartı sözde genişlemeyen dönüşüm özelliğini yani $d=\lim_{n\to\infty} d\left(x_n,F(T)\right)\geq 0$ varlığını gerçekler. Böylece $d=0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer $x^*\in F(T)$ ise $d=0$ dır. $x^*\notin F(T)$ ise o zaman 6) şartından,

$$\left\|T\left(x^*\right)-p\right\|<\left\|x^*-p\right\|$$

olacak şekilde $p=q_{x^*}\in F(T)$ vardır. T dönüşümü sürekli olduğundan,

$$\left\|T\left(x^*\right)-p\right\|=\left\|T\left(\lim_{j\to\infty}x_{n_j}\right)-p\right\|=\lim_{j\to\infty}\left\|T^{n_j+1}(x_0)-p\right\|$$

olur. 7) şartı gereği $x_n=\left(T^n(x_0)\right)_{n\geq 1}$ olduğundan,

$$\left\|T\left(x^*\right)-p\right\|=\lim_{j\to\infty}\left\|T^n(x_0)-p\right\|=\lim_{j\to\infty}\left\|T^{n_j}(x_0)-p\right\|=\left\|x^*-p\right\|$$

elde edilir. Böylece $\lim_{n\to\infty}\left\|T^n\left(x_0\right)-p\right\|$ mevcuttur. Bu da çelişkidir. Bu sebeple $x^* \in F\left(T\right)$ olur.

Sonuç 4.1.1. X Banach uzayı, C X in kapalı bir alt kümesi ve $T:C\to C$ sürekli bir dönüşüm olsun.

1) $F\left(T\right)\neq\varnothing$

9) Her $x\in C$, $x\notin F\left(T\right)$ ve her $p\in F\left(T\right)$ için

$$\left\|T\left(x\right)-p\right\|<\left\|x-p\right\|$$

olur (Petryshyn ve Williamson, 1973).

x_0, C nin herhangi bir elemanı olsun ve $n\geq 1$ için $x_n \equiv T^n\left(x_0\right)$ olarak tanımlansın. Eğer $\left(x_n\right)$ dizisi yakınsak bir alt dizi içerirse o zaman dizinin kendisi yani $\left(x_n\right)$, C içinde T nin sabit bir noktasına yakınsar (Petryshyn ve Williamson, 1973).

Tanım 4.1.4. X Banach uzayı, C X in kapalı bir alt kümesi ve $T:C\to X$ sözde genişlemeyen bir dönüşüm olsun. $F\left(T\right)\neq\varnothing$ ise T ye şartlı sözde genişlemeyen dönüşüm adı verilir.

Teorem 4.1.5. X Banach uzayı, C X in kapalı bir alt kümesi, $T:C\to X$ tanımlı, şartlı sözde genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bazı $x_0\in C$ için $\left(T^n\left(x_0\right)\right)_{n\geq 1}\subseteq C$ olduğu kabul edilsin. O zaman, $\left(T^n\left(x_0\right)\right)_{n\geq 1}$ dizisinin C içinde T nin sabit bir noktasına kuvvetli yakınsak olması için gerek ve yeter şart,

4) T, x_0 da asimtotik regülerdir.

10) $\lim_{n\to\infty} d\left(T^n\left(x_0\right),K\right)=0$ olacak şekilde bir K kompakt kümesi vardır.

şartlarını sağlamasıdır (Petryshyn ve Williamson, 1973).

İspat: $(\Rightarrow)$ 1), 2) ve 3) şartları sağlandığı için açıktır.

$(\Leftarrow)$ 4) ve 10) şartları kabul edilsin 10) şartı gerçeklendiğinden ve K kompakt bir küme olduğu için $y_0 \in K \cap C$ vardır ve $T^{n_j}(x_0) \to y_0$ olacak şekilde $\left(T^n(x_0)\right)_{n\geq 1}$ dizisinin bir alt dizisi $\left(T^n(x_0)\right)_{j\geq 1}$ dir. T nin sürekliliğinden $T^{n_j+1}(x_0) \to Ty_0$ dır. T, x_0 da asimtotik regüler olduğundan,

$$\left\|y_0 - T(y_0)\right\| \leq \left\|y_0 - T^{n_j}(x_0)\right\| + \left\|T^{n_j+1}(x_0) - T(y_0)\right\| + \left\|T^{n_j}(x_0) - T^{n_j+1}(x_0)\right\|$$

$T(y_0) = y_0$ olur. Böylece $y_0 \in F(T)$ ve T şartlı sözde genişlemeyen dönüşüm olduğu için $\left(T^n(x_0)\right)_{j\geq 1}$ dizisi y_0 a kuvvetli yakınsaktır.

Teorem 4.1.6. X Banach uzayı, C X in kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: C \to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. T dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın.

1) $F(T) \neq \varnothing$

2) T, sözde genişlemeyen bir dönüşümdür.

11) Her $n \geq 1$ ve bazı $\lambda \in (0,1)$ için $x_n = T_\lambda^n(x_0)$ olacak şekilde $x_0 \in C$ vardır. O zaman, (x_n) dizisinin C içinde T nin sabit bir noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart,

$$\lim_{n\to\infty} d\left(T_\lambda^n(x_0), F(T)\right) = 0$$

olmasıdır (Petryshyn ve Williamson, 1973).

İspat: Bu teoremi ispat etmek için T_λ dönüşümünün 1), 2) ve 3) şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. C kümesi konveks bir küme olduğundan T_λ dönüşümü C üzerinde iyi tanımlıdır ve $F(T) = F(T_\lambda)$ dır.

Her $\lambda \in (0,1)$, $x \in C$ ve $p \in F(T)$ için 1) şartı sağlandığından,

$$\begin{aligned}\|T_\lambda(x) - p\| &= \|\lambda x + (1-\lambda)T(x) - \lambda p - (1-\lambda)p\| \\ &\leq \lambda\|x-p\| + (1-\lambda)\|T(x)-p\| \\ &\leq \|x-p\|\end{aligned}$$

olur. T_λ sözde genişlemeyen bir dönüşümdür. Her $n \geq 1$ için $T_\lambda^n(x_0) \in C$ olacak şekilde $x_0 \in C$ vardır.

Tanım 4.1.5. X Banach uzayı, C X in kapalı, sınırlı, konveks bir alt kümesi, $T : C \to C$ bir dönüşüm olsun. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - T(x_n)) = f$ olacak şekilde C için herhangi bir (x_n) sınırlı dizisi için $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_j} = x$ ve $x - T(x) = f$ olacak şekilde $x \in C$ ve (x_{n_j}) bir alt dizisi varsa o zaman T dönüşümüne, demi-kompaktır denir.

T, C üzerinde demi-kompakt ise aynı zamanda 0 da demi-kompaktır. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

Sonuç 4.1.2. X düzgün konveks Banach uzayı, C X in kapalı, sınırlı konveks bir alt kümesi ve $T : C \to C$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. T dönüşümü aşağıdaki iki şarttan herhangi birini sağlasın.

12) $(E - T)$ dönüşümleri, C içindeki kapalı kümeleri, X içindeki kapalı kümelere dönüştürür.

13) T, 0 da demi-kompaktır.

Herhangi bir λ, $0 < \lambda < 1$ için $T_\lambda \equiv \lambda E + (1-\lambda)T$ olarak tanımlanır. O zaman herhangi bir $x_0 \in C$ ve $n \geq 1$ için $x_n \equiv T_\lambda^n(x_0)$, dizisi C içinde T nin sabit bir noktasına kuvvetli yakınsaktır (Petryshyn ve Williamson, 1973).

İspat: T_λ dönüşümü 1)-5) şartlarını sağlar. Düzgün konveks Banach uzayında, kapalı, sınırlı ve konveks bir kümeden yine kendi içine tanımlı genişlemeyen bir dönüşüm sabit bir noktaya sahiptir. Yani $F(T)\neq\varnothing$ dir. Açık olarak $F(T)=F(T_\lambda)\neq\varnothing$ ve $T_\lambda : C\to C$ konvekstir. T nin genişlemeyen bir dönüşüm oluşu (ve T_λ içinde) 2) şartını gerçekler. C içindeki her x_0 elemanı için 3) şartı da sağlanır. C üzerinde T_λ nın asimtotik regüler oluşundan dolayı her $x_0\in C$ için 4) şartı da gerçeklenir. $n\geq 1$ için $(y_n)\subseteq C$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}\|(E-T)y_n\|=0$ kabul edilsin. 12) şartı sağlansın ve (y_n) nin kuvvetli kapanışı G kümesi olsun. G, C nin bir alt kümesidir. 12) den ve $(E-T_\lambda)G=(1-\lambda)(E-T)G$ den $(E-T_\lambda)(G)$ kapalıdır. Böylece $0\in(E-T_\lambda)(G)$ dir. O zaman, $(E-T_\lambda)y^*=0$ olacak şekilde $y^*\in G$ vardır. $\lim\limits_{j\to\infty}y_{n_j}=y^*$ olacak şekilde (y_n) dizisinin $\left(y_{n_j}\right)_{j\geq 1}$ $(j\geq 1)$ bir alt dizisi mevcuttur ve $y^*\in F(T)$ dir. Böylece $\lim\limits_{j\to\infty}d\left(y_{n_j},F(T_\lambda)\right)=0$ bulunur. Bu sebeple,

$$\liminf_{n} d\left(y_n,F(T_\lambda)\right)=0$$

elde edilir. Dolayısıyla 5) şartı gerçeklenir. Eğer T, 13) şartını sağlarsa o zaman T nin 0 da demi-kompaktlığı görülür.

Sonuç 4.1.3. X düzgün konveks Banach uzayı, C X in kapalı, sınırlı konveks bir alt kümesi, $T:C\to C$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki 14) şartı kabul edilsin.

14) Her $x\in C$ için

$$\|(E-T)(x)\|\geq cd\left(x,F(T)\right)$$

olacak şekilde $c>0$ sayısı vardır.

x_0, C nin herhangi bir keyfi elemanı, $n\geq 1$ ve $0<\lambda<1$ için $x_n\equiv T_\lambda^n(x_0)$ olsun. O zaman $(x_n)_{n\geq 0}$ dizisi C içinde T nin sabit bir noktasına kuvvetli yakınsaktır (Petryshyn ve Williamson, 1973).

İspat: 1) ve 5) şartlarının sağlandığı kabul edilsin. 2), 3) ve 4) şartları da gerçeklenir. Eğer $(y_n) \subseteq C$ ve $\lim_{n\to\infty}\left\|\left(E - T_\lambda\right) y_n\right\| = 0$ ise o zaman 14) sağlanır. Yani $\lim_n d\left(y_n, F(T)\right) = 0$ dır.

$E - T_\lambda = (1-\lambda)(E-T)$ ve $F(T) = F(T_\lambda)$ olur. Böylece T_λ ve $F(T_\lambda)$ için 5) gerçeklenir.

Lemma 4.1.1. X düzgün konveks Banach uzayı, C X in bir alt kümesi ve $F(T) \neq \emptyset$ olacak şekilde $T: C \to X$ sözde genişlemeyen bir dönüşüm olsun. C içinde kalan her $n \geq 1$ için $T_\lambda^n(x_0)$ olacak şekilde tanımlı $\lambda \in (0,1)$ ve $x_0 \in C$ varsa ve $T_\lambda = \lambda E + (1-\lambda)T$ ise o zaman,

$$\lim_{n\to\infty} T_\lambda^n(x_0) - T_\lambda^{n+1}(x_0) = 0$$

yani T_λ dönüşümü x_0 da asimtotik regülerdir (Petryshyn ve Williamson, 1973).

İspat: $n \geq 1$ için $x_n = T_\lambda^n(x_0)$ olacak şekilde $\lambda \in (0,1)$, $x_0 \in C$ ve $q \in F(T)$ olsun. T_λ dönüşümü sözde genişlemeyen dönüşüm olduğu için $F(T_\lambda) = F(T) \neq \emptyset$ ve her $x \in C$ için

$$\begin{aligned}
\left\|T_\lambda(x) - q\right\| &= \left\|\left(\lambda E + (1-\lambda)T\right)(x) - q\right\| \\
&= \left\|\lambda E(x) + (1-\lambda)T(x) - q\right\| \\
&= \left\|\lambda x + (1-\lambda)T(x) - q\right\| \\
&= \left\|\lambda x - \lambda + (1-\lambda)\left(T(x) - q\right)\right\| \\
&\leq \lambda\left\|x - q\right\| + (1-\lambda)\left\|x - q\right\| \\
&= \left\|x - q\right\|
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece her bir $n \geq 1$ için

$$\left\|x_{n+1} - q\right\| = \left\|T_\lambda(x_n) - q\right\| \leq \left\|x_n - q\right\|$$

dir ve bazı $d_0 \geq 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x_n - q\right\| = d_0$ olur. Eğer $d_0 = 0$ ise o zaman $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = q$ dır ve bu durumda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n - x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} T_\lambda^n\left(x_0\right) - T_\lambda^{n+1}\left(x_0\right) = 0$, yani T_λ, x_0 da asimtotik regülerdir. $d_0 > 0$ kabul edilsin. Her bir n için,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - q\right\| = d_0 \text{ ve } \left\|T_\lambda\left(x_n\right) - q\right\| \leq \left\|x_n - q\right\|$$

olduğu için

$$\left\|x_{n+1} - q\right\| = \left\|T_\lambda\left(x_n\right) - q\right\| \leq \left\|x_n - q\right\|$$

eşitsizliğinde limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_{n+1} - q\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|T_\lambda\left(x_n\right) - q\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|x_n - q\right\| = d_0$$

elde edilir. X , düzgün konveks Banach uzayı olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - x_{n+1}\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\left(x_n - q\right) - \left(x_{n+1} - q\right)\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\left(x_n - q\right) - \left(T_\lambda\left(x_n\right) - q\right)\right\| = 0$$

yani,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - T_\lambda\left(x_n\right)\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|T_\lambda^n\left(x_0\right) - T_\lambda^{n+1}\left(x_0\right)\right\| = 0$$

bulunur.

Teorem 4.1.7. X düzgün konveks Banach uzayı, C X in sınırlı, kapalı konveks bir alt kümesi $T : C \to C$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. O zaman, $T_{\lambda,\mu}$ dönüşümü asimtotik regülerdir (Ghosh ve Debnath, 1997).

Lemma 4.1.2. X sıkı konveks Banach uzayı, C X in kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Eğer $T : C \to X$, $F\left(T\right) \neq \varnothing$ ve

2) $x \in C - F$ ve $p \in F$ için $\left\|T\left(x\right) - p\right\| \leq \left\|x - p\right\|$ olacak şekilde sürekli bir dönüşüm ise o zaman $F\left(T\right)$ konveks bir kümedir (Petryshyn ve Williamson, 1973).

Teorem 4.1.8. X reel Banach uzayı, C X in kapalı konveks bir alt kümesi ve $T:C\to C$ şartlı sözde genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Ayrıca T dönüşümü aşağıdaki şartları da sağlasın.

15) Her bir $x\in C$ için

$$d\left(T\left(x\right),K\right)\leq kd\left(x,K\right)$$

olacak şekilde $k<1$ ve K, X in kompakt bir alt kümesi vardır.

16) T, şartlı sıkı sözde genişlemeyen bir dönüşümdür.

O zaman her bir $x_0\in C$ için $\left(T^n\left(x_0\right)\right)$ dizisi T nin sabit bir noktasına yakınsaktır (Petryshyn ve Williamson, 1973).

Lemma 4.1.3. C X in kapalı konveks bir alt kümesi ve $k<1$, her $x\in C$ ve K, X in bazı konveks, kompakt alt kümesi için

$$d\left(T\left(x\right),K\right)\leq kd\left(x,K\right)$$

olacak şekilde $T:C\to C$ bir dönüşüm olsun.

Eğer $\lambda\in\left(0,1\right)$ ve $T_\lambda=\lambda E+\left(1-\lambda\right)T$ ise o zaman her bir $x\in C$ ve $k_\lambda=\lambda+\left(1-\lambda\right)k<1$ için,

$$d\left(T_\lambda\left(x\right),K\right)\leq k_\lambda d\left(x,K\right)$$

olur (Petryshyn ve Williamson, 1973).

Teorem 4.1.9. C, X in kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T:C\to C$ aşağıdaki şartları sağlayan sürekli bir dönüşüm olsun

17) $x\in C$ için,

$$d\left(T\left(x\right),K\right)\leq d\left(x,K\right)$$

olacak şekilde X in kompakt, konveks bir K alt kümesi vardır.

18) Eğer $x \in C - K$ ise o zaman,

$$d\left(T\left(x\right), K\right) < d\left(x, K\right)$$

dir.

19) $\left(T^{n_j}\left(x_0\right)\right)$ yakınsak bir alt diziyi içeren $\left(T^n\left(x_0\right)\right)$ olacak şekilde $x_0 \in C$ sabiti vardır.

O zaman, T dönüşümü C içinde sabit bir noktaya sahiptir (Petryshyn ve Williamson, 1973).

İspat: $\left(T^n\left(x_0\right)\right)_{n\geq 1}$ nin yakınsak bir alt dizisi $\left(T^{n_j}\left(x_0\right)\right)$ ve $x^* \in C$ limit noktası olsun. Bazı $d_0 \geq 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(T^n\left(x_0\right), K\right)$ için 17) şartı gerçeklenir. Buradan $d_0 = 0$ dır. $d_0 > 0$ doğru olsaydı o zaman $x^* \notin K$ olurdu ve 18) şartı yani $d\left(T\left(x^*\right), K\right) < d\left(x^*, K\right)$ sağlanırdı. Diğer taraftan T dönüşümü sürekli olduğundan,

$$d\left(T\left(x^*\right), K\right) = d\left(T\left(\lim_{j\to\infty} T^{n_j}\left(x_0\right), K\right)\right) = \lim_{j\to\infty} d\left(T^{n_j+1}\left(x_0\right), K\right)$$

bulunur. $x_n = \left(T^n\left(x_0\right)\right)$ olduğundan,

$$d\left(T\left(x^*\right), K\right) = \lim_{n\to\infty} d\left(T^n\left(x_0\right), K\right) = d\left(\lim_{j\to\infty} T^{n_j}\left(x_0\right), K\right) = d\left(x^*, K\right)$$

dır. Böylece $d_0 = 0$ ve $x^* \in K \cap C$ elde edilir. K ve C konvekstir ve K da kompaktır. 17) şartından $K \cap C$ kompakt ve konvekstir ve $T\left(K \cap C\right) \subseteq K \cap C$ olur. $F_{K\cap C}\left(T\right) \neq \varnothing$ yani $F\left(T\right) \neq \varnothing$ dir.

Teorem 4.1.10. X Banach uzayı, C, X in kapalı konveks bir alt kümesi ve $T : C \to X$ e bir dönüşüm olsun. T dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın.

20) $n \geq 1$ için $x_n = \left(T^n\left(x_0\right)\right)$ olacak şekilde $x_0 \in C$ ve $\left(x_n\right)$ zayıf dizisel kompakt dizisi vardır.

21) T, x_0 da asimtotik regülerdir.

22) $x_{n_j} \xrightarrow{z} y \in C$ olacak şekilde $\left(x_n\right)$ nin herhangi bir alt dizisi $\left(x_{n_j}\right)$ ve $j \to \infty$ iken $\left(E-T\right)\left(x_{n_j}\right) \to 0$ ise o zaman $y - T\left(y\right) = 0$ dır.

O zaman, $\left(x_n\right)$ nin zayıf yakınsak alt dizisinin bir limiti olarak C nin içinde T, sabit bir noktaya sahiptir. Üstelik $\left(x_n\right)$ in her zayıf yakınsak alt dizisinin de bir limiti olarak T, sabit bir noktaya sahiptir. Ek olarak, T nin en fazla tek sabit noktaya sahip olduğu kabul edilsin. O zaman $\left(x_n\right)$ dizisi zayıf yakınsaktır ve onun zayıf limiti T nin tek sabit noktasıdır (Petryshyn ve Williamson, 1973).

İspat: $\left(x_n\right) \subset C$ zayıf dizisel kompakt ve C kapalı konveks ve sınır noktaları limite denk geldiği için $j \to \infty$ iken $x_{n_j} \xrightarrow{z} y^*$ olacak şekilde $y^* \in C$ ve $\left(x_{n_j}\right)$ alt dizisi vardır. Bu ve T nin x_0 da asimtotik regülerliğinden, $j \to \infty$ iken $x_{n_j} - T\left(x_{n_j}\right) \to 0$ olur. Buradan ve 22) şartından dolayı $y^* - T\left(y^*\right) = 0$ yani $F\left(T\right) \neq \varnothing$ bulunur.

Eğer $\left(x_{n_k}\right)$, $\left(x_n\right)$ in zayıf yakınsak bir alt dizisi ve y onun zayıf limiti ise o zaman $y \in C$ dir. 21) ve 22) şartları $y \in F\left(T\right)$ olmasını sağlar.

Eğer T dönüşümü en fazla tek sabit noktaya sahipse o zaman, $y \in C$ dir. Fakat $\left(x_n\right)$ in her zayıf yakınsak alt dizisi, onun zayıf bir limiti olarak y elemanına sahip olmak zorunda olduğundan $n \to \infty$ iken $x_n \xrightarrow{z} y$ elde edilir.

Sonuç 4.1.4. X Banach uzayı, C X in konveks ve zayıf kompakt bir alt kümesi ve $T : C \to C$, 21) ve 22) şartlarını sağlayacak şekilde bir dönüşüm olsun.

Bazı $x_0 \in C$ için o zaman T dönüşümü C içinde sabit bir noktaya sahiptir. Üstelik $\left(T^n\left(x_0\right)\right)$ ın her zayıf yakınsak alt dizisinin bir limiti olarak T, sabit bir noktaya sahiptir (Petryshyn ve Williamson, 1973).

Teorem 4.1.11. X refleksif Banach uzayı, C X in kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: C \to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. T dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın.

23) $F\left(T\right) \neq \varnothing$

24) T, sözde genişlemeyen dönüşümdür.

25) $n \geq 1$ için $x_n = T^n\left(x_0\right) \in C$ olacak şekilde $x_0 \in C$ vardır.

Eğer T dönüşümü 21) ve 22) şartlarını da sağlarsa o zaman, $\left(x_n\right)$, $F\left(T\right)$ içinde onun limiti ile zayıf yakınsak alt dizisini içerir. Üstelik, $\left(x_n\right)$ in her zayıf yakınsak alt dizisi, $F\left(T\right)$ içinde bir noktaya sahiptir. $F\left(T\right)$ bir noktaya sahip ve bu noktada p^* ise o zaman $n \to \infty$ iken $x_n \xrightarrow{z} p^*$ olur (Petryshyn ve Williamson, 1973).

İspat: $F\left(T\right) \neq \varnothing$ ve T, C üzerinde sözde genişlemeyen dönüşüm olduğundan, $F\left(T\right)$ nin içerisinde herhangi bir sabit nokta p^* ve her bir n için

$$\left\|x_n - p^*\right\| = \left\|T\left(x_{n-1}\right) - p^*\right\| \leq \left\|x_{n-1} - p^*\right\|$$

elde edilir. Bu eşitsizlik C içinde kalan $\left(x_n\right)$ dizisinin sınırlı bir dizi olduğunu ve X refleksif uzay olduğu için zayıf dizisel kompakt olmasını sağlar. T dönüşümü, x_0 da asimtotik regüler ve 22) şartı gerçeklendiğinden ispat tamamlanır.

Tanım 4.1.6. $F:C\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $(x_n)\in C$ ve $y^*\in C$, $x_n \xrightarrow{z} y^*$ olacak şekilde C içinde (x_n) dizisi varsa ve $F(x_n)\to g$, $g\in X$ ise o zaman $F(y^*)=g$ ve F dönüşümüne de demi-kapalıdır adı verilir.

C kapalı konveks bir küme, C den C ye her zayıf sürekli dönüşüm zayıf kapalıdır ve kendisinden kendisine her zayıf kapalı dönüşüm, demi-kapalıdır.

Eğer X düzgün konveks Banach uzayı ise $\lambda\in(0,1)$ için $(T^n(x_0))$ iterasyonlarının yerine $(T_\lambda^n(x_0))$ asimtotik regülerlik yaklaşımı ihmal edilebilir.

Teorem 4.1.12. X düzgün konveks Banach uzayı, C X in kapalı konveks bir alt kümesi ve $T:C\to X$ e $F(T)\neq\varnothing$ ve T sözde genişlemeyen sürekli bir dönüşüm olsun. Her bir $n\geq 1$ için $T_\lambda^n(x_0)\in C$ olacak şekilde $x_0\in C$ alınsın. Eğer T_λ dönüşümü 22) şartını sağlarsa Teorem 4.1.11'in sonuçlarını gerçekler.

İspat: $\lambda\in(0,1)$ için T_λ dönüşümünün $F(T)\neq\varnothing$ ve sözde genişlemeyen bir dönüşüm olduğu daha önceki teoremlerde ispatlandı. Ayrıca X üzerindeki şartlar altında, T ile T_λ da x_0 da asimtotik regülerdir.

Teorem 4.1.13. X sıkı konveks ve refleksif Banach uzayı, C X in kapalı konveks bir alt kümesi ve $T:C\to X$ e sürekli bir dönüşüm olsun. T dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın.

23) $F(T)\neq\varnothing$

24) T, sözde genişlemeyen dönüşümdür.

25) $n\geq 1$ için $x_n=T^n(x_0)\in C$ olacak şekilde $x_0\in C$ vardır.

21) T, x_0 da asimtotik regülerdir.

22) $(E-T)\left(x_{n_j}\right)\to 0$ ve $x_{n_j}\xrightarrow{z} y\in C$ olacak şekilde $(x_n)=\left(T^n(x_0)\right)$ in bir alt dizisi $\left(x_{n_j}\right)$ ise o zaman $(E-T)(y)=0$ dır.

26) X uzayı Opial şartına sahiptir.

Eğer X içinde y_0 a zayıf yakınsak olan herhangi bir (x_n) dizisi varsa o zaman, her $y\neq y_0$ için

$$\liminf\|y_n-y\|>\liminf\|y_n-y_0\|$$

olur. O zaman, (x_n) dizisi C içinde T nin sabit bir noktasına zayıf yakınsaktır (Petryshyn ve Williamson, 1973).

İspat: (x_n) dizisi limiti $F(T)$ içinde olan zayıf yakınsak bir alt diziyi içerir. Üstelik (x_n) in her zayıf yakınsak alt dizisi, onun limiti için $F(T)$ içinde bazı q^* noktasına sahiptir.

(x_n) in her zayıf yakınsak alt dizisi için q^* aynıdır. $n\to\infty$ iken $x_n\xrightarrow{z} q^*$ dır.

X sıkı konveks Banach uzayı ve $T:C\to X$ sözde genişlemeyen dönüşüm olduğundan $F(T)$, C kapalı kümesinin konveks bir alt kümesidir. Çünkü T sürekli bir dönüşümdür. $B(q_0,r)$ kapalı bir yuvar olsun. Burada $T^n(x_0)\subseteq C$ olduğundan $B(q_0,r)$ bazı q_0 noktasını içeren kapalı bir yuvardır. $\left(T^n(x_0)\right)$, $C_0=C\cap B(q_0,r)$ kapalı konveks sınırlı kümesi içindedir. T, sözde genişlemeyen dönüşüm olduğundan, $p_0\in F(T)$ ve $x_0\in C$ için

$$\|T(x_0)-q_0\|\le\|x_0-q_0\|\le r$$

dir. Yani $x_1\in C_0$ dır.

$k > 1$ için x_k nın C_0 içinde kaldığı kabul edilsin. x_{k+1} de C_0 içerisinde kalır çünkü,

$$\|x_{k+1} - q_0\| \le \|T(x_k) - q_0\| \le \|x_k - q_0\| \le r$$

dir.

Sonuç olarak T nin C_0 a kısıtlaması göz önüne alınsın. Bu kısıtlama tekrar T ile gösterilsin. $F_0 = F(T) \cap C_0$ kümesi, C_0 ın boş olmayan kapalı sınırlı konveks bir alt kümesidir. F_0, kısıtlanmış dönüşümün sabit noktalarının kümesi olur. F_0 içindeki her x ve her n için T dönüşümü sözde genişlemeyen bir dönüşüm olduğundan,

$$\|x_n - x\| \le \|T^n(x_0) - x\| = \|T(x_{n-1}) - x\| \le \|x_{n-1} - x\|$$

elde edilir. $x \in F_0$ için

$$\lim_n \|x_n - x\|$$

mevcuttur. $\lim_n \|x_n - x\|$, F_0 ın zayıf kompakt bir küme olması sebebiyle F_0 üzerinde infimuma ulaşır. Yani $n \to \infty$ iken $x_n = T^n(x_0) \xrightarrow{z} q^*$ olacak şekilde $q^* \in F_0$ vardır. Tersi kabul edilsin. O zaman, (x_n) in sınırlılığı ve X in refleksifliğinden limiti q olan (x_n) in zayıf yakınsak bir alt dizisi (x_{n_j}) vardır. q noktası F_0 içinde kalır ve $q \ne q^*$ olur. Her $x \in F_0$ için $\lim_n \|x_n - x\|$ varlığından ve X, Opial şartına sahip olduğundan,

$$\lim_n \|x_n - q^*\| = \lim_j \|x_{n_j} - q^*\| > \lim \|x_{n_j} - q\| = \lim_n \|x_n - q\|$$

olur. Yani

$$\lim_n \|x_n - q^*\| > \lim_n \|x_n - q\|$$

dir. Bu da q^* ın tanımlanmasıyla çelişkilidir. Böylece $q = q^*$ olmak zorundadır. Böylece $n \to \infty$ iken $x_n \xrightarrow{z} q^*$ olur.

Teorem 4.1.14. X düzgün konveks Banach uzayı, C X in kapalı konveks alt kümesi ve $T : C \to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. T dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın.

23) $F(T) \neq \varnothing$

24) T, sözde genişlemeyen dönüşümdür.

25) $n \geq 1$ için $\left(T_\lambda^n(x_0)\right) \subset C$ olacak şekilde $\lambda \in (0,1)$ ve $x_0 \in C$ vardır.

22) $(E-T)_{\left(x_{n_j}\right)} \to 0$ ve $x_{n_j} \xrightarrow{z} y \in C$ olacak şekilde $(x_n) = \left(T^n(x_0)\right)$ in bir alt dizisi $\left(x_{n_j}\right)$ ise o zaman $(E-T)(y) = 0$ dır.

26) X uzayı Opial şartına sahiptir.

O zaman $\left(T_\lambda^n(x_0)\right)$ dizisi T nin sabit bir noktasına zayıf yakınsaktır (Petryshyn ve Williamson, 1973).

İspat: $p^* \in F(T_\lambda)$ için $\lim_{n\to\infty} \left\| x_n - p^* \right\|$ mevcuttur. X düzgün konveks Banach uzayı olduğundan refleksiftir. X refleksif olduğundan $p_1 \in C$ ye yakınsayan (x_n) in $\left(x_{n_j}\right)$ alt dizisi vardır. 21), 22) ve 25) şartlarından $\lim_{n\to\infty} \left\| x_n - Tx_n \right\| = 0$ ve $E-T$, 0 da yarı kapalıdır. Bu yüzden $T_\lambda(p_1) = p_1$ elde edilir. Yani $p_1 \in F(T_\lambda)$ dır. (x_n) dizisinin p_1 e zayıf yakınsadığı gösterilmelidir. (x_n) in $p_2 \in C$ ye zayıf yakınsayan başka bir alt dizisi seçilsin. $p_1 = p_2$ ise ispat tamamlanır.

Kabul edilsin ki, $p_1 \neq p_2$ olsun. 26) şartı yani Opial şartından,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - p_1\right\| &= \lim_{n_j\to\infty}\left\|x_{n_j} - p_1\right\| \\ &< \lim_{n_j\to\infty}\left\|x_{n_j} - p_2\right\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\|x_n - p_2\right\| \\ &= \lim_{n_k\to\infty}\left\|x_{n_k} - p_2\right\| \\ &< \lim_{n_k\to\infty}\left\|x_{n_k} - p_1\right\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\|x_n - p_1\right\|\end{aligned}$$

dir.

Bu çelişki $p_1 = p_2$ gerçeklenir. Böylece $x_n \xrightarrow{z} p^* \in F\left(T_\lambda\right)$ elde edilir.

4.2. I – Sözde Genişlemeyen Dönüşümler için Mann İterasyon Dizilerinin Yakınsaklıkları

Bu bölümde, Petryshyn ve Williamson (1973)'de verilen Banach uzaylarında sözde genişlemeyen dönüşümler için Mann iterasyon dizilerinin ortak sabit bir noktaya yakınsaklıkları kullanılmıştır. T, I-sözde genişlemeyen ve I, genişlemeyen dönüşümlerin ortak sabit bir noktasına kuvvetli yakınsaklığı incelenmektedir

Lemma 4.2.1. X Banach uzayı, C X in kapalı bir alt kümesi ve T, $I : C \to C$ ye T, I-sözde genişlemeyen, sürekli I, genişlemeyen birer dönüşüm olsun. $x_0 \in C$, $\lambda \in (0,1)$ için

$$x_n = T_\lambda^n x_0, \; T_\lambda = (1-\lambda)I + \lambda T$$

olacak şekilde (x_n) dizisi tanımlansın. Eğer T, I-sözde genişlemeyen ve I genişlemeyen dönüşümler ise o zaman sadece $p \in F\left(T_\lambda\right) \cap F(I)$ için T_λ, I-sözde genişlemeyen dönüşümdür. $n \to \infty$ iken $T_\lambda^n\left(x_0\right) - T_\lambda^{n+1}\left(x_0\right) \to 0$ olur. Yani T_λ $x_0 \in C$ de asimtotik regülerdir.

İspat: $x \in C$ ve $p \in F(T_\lambda) \cap F(I)$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\|T_\lambda(x) - p\| &= \|(1-\lambda) I(x) + \lambda T(x) - p\| \\ &= \|(1-\lambda)(I(x) - p) + \lambda T(x) - \lambda p\| \\ &\le (1-\lambda)\|I(x) - p\| + \lambda \|T(x) - p\| \\ &\le (1-\lambda)\|I(x) - p\| + \lambda \|I(x) - I(p)\| \\ &\le \|I(x) - p\|\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $p \in F(T) \cap F(I) = F(T_\lambda) \cap F(I)$ için T_λ, I -sözde genişlemeyen dönüşümdür.

$p \in F = F(T) \cap F(I)$ alınsın. T_λ dönüşümü I -sözde genişlemeyen bir dönüşüm olduğu için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ mevcuttur. Bu sebeple $n \ge 1$ için (x_n) dizisi sınırlıdır ve bazı $d \ge 0$ için $n \to \infty$ iken $\|x_n - p\| \to d$ olur. $d = 0$ ise $n \to \infty$ iken $x_n \to p$ dir. Böylece $n \to \infty$ iken

$$x_n - x_{n+1} = T_\lambda^n(x_0) - T_\lambda^{n+1}(x_0) \to 0$$

elde edilir. Yani T_λ dönüşümü x_0 da asimtotik regülerdir. $d > 0$ olsun. $n \to \infty$ iken $\|x_n - p\| \to d$ $n \ge 1$ için

$$\begin{aligned}&\|T_\lambda(x_n) - p\| = \|x_{n+1} - p\| \to d \\ &\|(x_n - p) - (T_\lambda(x_n) - p)\| \to 0 \\ &\|x_n - T_\lambda(x_n)\| = \|T_\lambda^n(x_0) - T_\lambda^{n+1}(x_0)\| \to 0\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla T_λ dönüşümü $x_0 \in C$ de asimtotik regülerdir.

Teorem 4.2.1. X Banach uzayı, C X in kapalı bir alt kümesi ve T, $I : C \to C$ ye T, I sözde genişlemeyen sürekli, I genişlemeyen birer dönüşüm ve $F = F(T) \cap F(I) \ne \emptyset$ olsun. $x_0 \in C$, $\lambda \in (0,1)$ için

$$x_n = T_\lambda^n x_0 \,,\; T_\lambda = (1-\lambda) I + \lambda T$$

olacak şekilde (x_n) dizisi tanımlansın. Ek olarak T dönüşümünün yarı kompakt olduğu kabul edilsin. O zaman (x_n) dizisi T ve I dönüşümlerinin ortak sabit bir noktasına kuvvetli yakınsaktır.

İspat: $p \in F = F(T) \cap F(I)$ olsun. T_λ, I-sözde genişlemeyen ve I genişlemeyen dönüşümlerdir. $p \in F(T) \cap F(I)$ ve $n \geq 1$ için

$$\|x_{n+1} - p\| = \|T_\lambda(x_n) - p\| \leq \|I(x_n) - p\| \leq \|x_n - p\|$$

elde edilir. (x_n) dizisi sınırlıdır ve $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ mevcuttur. Bu sebeple $d(x_{n+1}, F) \leq d(x_n, F)$ dir. Böylece $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F)$ vardır ve T yarı kompakt olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - T(x_n)\| = 0$$

bulunur.

(x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğu gösterilmelidir. $\varepsilon > 0$ ve her $n > N$ için $d(x_n, F) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde N pozitif tam sayısı mevcuttur. Her $n, m \geq N$ için ve $p \in F(T) \cap F(I) = F(T_\lambda) \cap F(I)$ için

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - p\| + \|x_m - p\|$$

dir. O zaman her $n, m \geq N$ için

$$\|x_n - p\| \leq \|T_\lambda^n(x_0) - p\| \leq \|T_\lambda^N(x_0) - p\| \leq \|I^N(x_0) - p\| \leq \|x_N - p\|$$
$$\|x_m - p\| \leq \|T_\lambda^m(x_0) - p\| \leq \|T_\lambda^N(x_0) - p\| \leq \|I^N(x_0) - p\| \leq \|x_N - p\|$$

olur. Bu sebeple,

$$\|x_n - x_m\| \leq 2d\left(x_n, F\right) < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece $\left(x_n\right)$ dizisi Cauchy dizisidir.

Bu sebeple $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ ve $p \in F\left(T\right) \cap F\left(I\right)$ olduğundan X tamdır. $\|x_n - T\left(x_n\right)\|$ in varlığı $\left(x_n\right)$ dizisinin $p \in F\left(T\right) \cap F\left(I\right)$ sabit noktasına kuvvetli yakınsaklığını gerçekler.

4.3. Genelleştirilmiş Asimtotik Sözde Genişlemeyen Dönüşümlerin Sonlu Bir Ailesi için Kapalı İterasyon Sürecinin Yakınsaklıkları

Bu bölümde, Shahzad ve Zegeye (2007)'de verilen genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşüm tanımı, kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları incelenmiştir.

Xu ve Ori (2001), genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için kapalı iterasyon sürecini aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır.

$D = \{1, 2, ...N\}$, $\left(\alpha_n\right)$, $\left(0,1\right)$ içinde bir reel sayı dizisi ve $x_0 \in C$ olsun. $\{T_i : i \in D\}$, genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi olarak tanımlansın.

$$x_1 = \alpha_1 x_0 + \left(1-\alpha_1\right) T_1 x_1,$$
$$x_2 = \alpha_2 x_1 + \left(1-\alpha_2\right) T_2 x_2,$$

.

.

.

$$x_N = \alpha_N x_N + \left(1-\alpha_N\right) T_N x_N,$$
$$x_{N+1} = \alpha_{N+1} x_N + \left(1-\alpha_{N+1}\right) T_1 x_{N+1},$$

.

.

.

Her $n \geq 1$ ve $T_n = T_{n(\bmod N)}$ için,

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n) T_n x_n$$

dir.

Tanım 4.3.1. X reel Banach uzayı, C X in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi, $\{T_i : i \in D\}$ N tane genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşüm olsun. $(\alpha_n) \in (0,1)$ de bir reel sayı dizisi, (u_n) de C içinde sınırlı bir dizi ve x_0 da herhangi bir başlangıç noktası kabul edilsin. O zaman $(x_n) \in C$ aşağıdaki gibi tanımlanır. $\forall n \geq 1$, $i \in D$ için

$$n = (k-1)N + i,\ T_n = T_n(\bmod N) = T_i$$

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n) T_{i(n)}^{k(n)}(x_n) + u_n$$

olur.

Lemma 4.3.1. X Banach uzayı, $p > 1$ ve $R > 1$ olsun. O zaman X in düzgün konveks Banach uzayı olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in B_R(0) = \{x \in X : \|x\| \leq R\}$, $\lambda \in [0,1]$ ve $W_p(\lambda) = \lambda(1-\lambda)^p + \lambda^p(1-\lambda)$ için

$$\|\lambda x + (1-\lambda) y\|^p \leq \lambda \|x\|^p + (1-\lambda)\|y\|^p - w_p(\lambda) g(\|x-y\|)$$

olacak şekilde $g(0) = 0$ ile $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ a tanımlı sürekli, sıkı, artan ve konveks bir fonksiyonun varlığıdır (Shahzad ve Zegeye, 2007).

Lemma 4.3.2. $\lambda_{n+1} \leq (1+\alpha_n)\lambda_n + \sigma_n$, her $n \geq 1$ olacak şekilde (λ_n), (α_n) ve (σ_n) negatif olmayan reel sayı dizileri olsun. Eğer,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty, \ \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$$

ise o zaman $\lim_{n\to\infty} \lambda_n$ vardır. Üstelik $j \to \infty$ iken $\lambda_{n_j} \to 0$ olacak şekilde (λ_n) in (λ_{n_j}) bir alt dizisi varsa o zaman $n \to \infty$ iken $\lambda_n \to 0$ olur (Tan ve Xu, 1993).

Aşağıdaki teoremler ve lemmalar ile Shahzad ve Zegeye (2007), çalışmasından hareketle elde edilen hata oranlı genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için iterasyon dizilerinin kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları ispat edilmektedir.

Teorem 4.3.1. X reel Banach uzayı, C X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Her $i \in D$ için $\sum_{n=1}^{\infty} s_{in} < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} c_{in} < \infty$ olacak şekilde (s_{in}), $(c_{in}) \subset [0,\infty)$ ile C den C ye $\{T_i : i \in D\}$ ailesi N tane genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşüm ve $F = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \neq \varnothing$ kapalı olduğu kabul edilsin. Bazı $\delta \in (0,1)$ için $(\alpha_n)_{n\geq 1} \subset [\delta, 1-\delta]$ ve (u_n), C içinde sınırlı bir dizi olmak üzere $x_0 \in C$ ve her $n \geq 1$ için $x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n) T_{i(n)}^{k(n)} x_n + u_n$ tanımlansın. O zaman (x_n) dizisinin, $\{T_i : i \in D\}$ ailesinin ortak sabit bir noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} \inf d(x_n, F) = 0$$

olmasıdır.

İspat: $x^* \in F$ olsun.

$$\|x_n - x^*\| = \|\alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n) T_n^k x_n + u_n - x^*\|$$

$$\|x_n - x^*\| = \|\alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n) T_n^k x_n + u_n - x^* + \alpha_n x^* - \alpha_n x^*\|$$

$$\|x_n - x^*\| = \|\alpha_n (x_{n-1} - x^*) + (1-\alpha_n)(T_n^k x_n - x^*) + u_n\|$$

$$\|x_n - x^*\| \leq \alpha_n \|x_{n-1} - x^*\| + (1-\alpha_n) \|T_i^k x_n - x^*\| + \|u_n\|$$

elde edilir. Burada T_i ler genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşüm olduklarından,

$$\begin{aligned}\left\|x_n - x^*\right\| &\le \alpha_n \left\|x_{n-1} - x^*\right\| + (1-\alpha_n)\left\{\left\|x_n - x^*\right\| + s_{ik}\left\|x_n - x^*\right\| + c_{ik}\right\} + \left\|u_{ik}\right\| \\ &= \alpha_n \left\|x_{n-1} - x^*\right\| + (1-\alpha_n)(1+s_{ik})\left\|x_n - x^*\right\| + (1-\alpha_n)c_{ik} + \left\|u_{ik}\right\| \\ &\le \alpha_n \left\|x_{n-1} - x^*\right\| + (1-\alpha_n + s_{ik})\left\|x_n - x^*\right\| + (1-\alpha_n)c_{ik} + \left\|u_{ik}\right\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left\|x_n - x^*\right\| - (1-\alpha_n)\left\|x_n - x^*\right\| \le \alpha_n \left\|x_{n-1} - x^*\right\| + s_{ik}\left\|x_n - x^*\right\| + (1-\alpha_n)c_{ik} + \left\|u_{ik}\right\| \\ &\alpha_n \left\|x_n - x^*\right\| \le \alpha_n \left\|x_{n-1} - x^*\right\| + s_{ik}\left\|x_n - x^*\right\| + (1-\alpha_n)c_{ik} + \left\|u_{ik}\right\|\end{aligned}$$

dir. Eşitsizliğin her iki tarafı α_n e bölünürse,

$$\left\|x_n - x^*\right\| \le \left\|x_{n-1} - x^*\right\| + \frac{s_{ik}}{\alpha_n}\left\|x_n - x^*\right\| + \frac{(1-\alpha_n)}{\alpha_n}c_{ik} + \frac{\left\|u_{ik}\right\|}{\alpha_n}$$

$\alpha_n \subset [\delta, 1-\delta]$ olduğundan,

$$\begin{aligned}&\left\|x_n - x^*\right\| \le \left\|x_{n-1} - x^*\right\| + \frac{s_{ik}}{\delta}\left\|x_n - x^*\right\| + \left(\frac{1}{\delta} - 1\right)c_{ik} + \frac{\left\|u_{ik}\right\|}{\delta} \\ &\left(1 - \frac{s_{ik}}{\delta}\right)\left\|x_n - x^*\right\| \le \left\|x_{n-1} - x^*\right\| + \left(\frac{1}{\delta} - 1\right)c_{ik} + \frac{\left\|u_{ik}\right\|}{\delta}\end{aligned}$$

olur. Her $i \in D$ için $\sum_{k=1}^{\infty} s_{ik} < \infty$ olduğu için, $\lim_{k\to\infty} s_{ik} = 0$ dır ve böylece $k \ge \frac{n_1}{N} + 1$ ya da $n \ge n_1$ için $s_{ik} < \frac{\delta}{2}$ olacak şekilde n_1 doğal sayısı mevcuttur. Bu sebeple $n > n_1$ için

$$\left\|x_n - x^*\right\| \le \frac{\delta}{\delta - s_{ik}}\left\|x_{n-1} - x^*\right\| + \frac{\delta}{\delta - s_{ik}}\left(\frac{1}{\delta} - 1\right)c_{ik} + \frac{\delta}{\delta - s_{ik}}\frac{\left\|u_{ik}\right\|}{\delta}$$

elde edilir.

$1+v_{ik}=\dfrac{\delta}{\delta-s_{ik}}$ olsun. $1+v_{ik}=1+\dfrac{s_{ik}}{\delta-s_{ik}}$ ise $v_{ik}=\dfrac{s_{ik}}{\delta-s_{ik}}$ olur. $s_{ik}<\dfrac{\delta}{2}$ olduğu için $v_{ik}=\dfrac{s_{ik}}{\delta-s_{ik}}<\dfrac{2}{\delta}s_{ik}$ olur. Buradan,

$$\sum_{k=1}^{\infty}v_{ik}<\frac{2}{\delta}\sum_{k=1}^{\infty}s_{ik}<\infty$$

dir. Böylece,

$$\left\|x_n-x^*\right\|\le\left(1+v_{ik}\right)\left\|x_{n-1}-x^*\right\|+\left(1+v_{ik}\right)\left(\frac{1}{\delta}-1\right)c_{ik}+\left(1+v_{i\cdot k}\right)\frac{\left\|u_{ik}\right\|}{\delta}$$

$\gamma_{ik}=\left(\dfrac{1}{\delta}-1\right)\left(1+v_{ik}\right)c_{ik}$ ve $t_{ik}=\dfrac{1}{\delta}\left(1+v_{ik}\right)\left\|u_{ik}\right\|$ olsun. Her $i\in D$ için $\sum_{k=1}^{\infty}v_{ik}<\infty$ ve $\sum_{k=1}^{\infty}c_{ik}<\infty$ olduğu için $\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{ik}<\infty$ elde edilir. Aynı şekilde her $i\in D$ için $\sum_{k=1}^{\infty}v_{ik}<\infty$ ve $\sum_{k=1}^{\infty}\left\|u_{ik}\right\|<\infty$ olduğu için $\sum_{k=1}^{\infty}t_{ik}<\infty$ bulunur. $\mu_{ik}=\gamma_{ik}+t_{ik}$ olsun. Buradan,

$$\left\|x_n-x^*\right\|\le\left(1+v_{ik}\right)\left\|x_{n-1}-x^*\right\|+\mu_{ik}$$

elde edilir. Böylece Lemma 4.3.2.'den $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x_n-x^*\right\|$ vardır. $n>n_1$ için

$$d\left(x_n,F\right)\le\left(1+v_{ik}\right)d\left(x_{n-1},F\right)+\mu_{ik}$$

ve $\liminf\limits_{n\to\infty}d\left(x_n,F\right)=0$ kabulünden $\lim\limits_{n\to\infty}d\left(x_n,F\right)=0$ olur. $\left(x_n\right)$ dizisinin Cauchy dizisi olduğu gösterilmelidir. $x>0$, $1+x\le e^x$ ve $d\left(x_n,F\right)\le\left(1+v_{ik}\right)d\left(x_{n-1},F\right)+\mu_{ik}$ olmasından dolayı $x^*\in F$ için

$$\left\|x_{n+m}-x^*\right\|\le\exp\left\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}v_{ik}\right\}\left\|x_{n-1}-x^*\right\|+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{ik}$$

eşitsizliği, $M=\exp\left\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}v_{i\cdot k}\right\}+1<\infty$ olacak şekilde m,n doğal sayıları için elde edilir.

Verilen herhangi bir $\varepsilon>0$, her $n\geq n_0$ ve $\lim_{n\to\infty}d\left(x_n,F\right)=0$ için

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=n}^{\infty}\mu_{ij}<\frac{\varepsilon}{4} \text{ ve } d\left(x_n,F\right)<\frac{\varepsilon}{4M}$$

olacak şekilde n_0 doğal sayısı mevcuttur. Bu sebeple $\left\|x_{n_0}-y^*\right\|\leq\frac{\varepsilon}{4M}$ olacak şekilde $y^*\in F$ bulunur. Her $n\geq n_0$ ve $m\geq 1$ için

$$\begin{aligned}\left\|x_{n+m}-x_n\right\| &= \left\|x_{n+m}-y^*\right\|+\left\|x_n-y^*\right\| \\ &< M\left\|x_{n_0}-y^*\right\|+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=n_0}^{\infty}\mu_{ij}+\mathrm{M}\left\|x_{n_0}-y^*\right\|+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=n_0}^{\infty}\mu_{ij} \\ &< \frac{M\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{M\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{4} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

yani $\left\|x_{n+m}-x_n\right\|<\varepsilon$ elde edilir. Böylece $\left(x_n\right)$ dizisi Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $\left(x_n\right)$ dizisi yakınsak olmak zorundadır.

$\left(x_n\right)$ dizisi p gibi bir noktaya yakınsasın. O zaman $p\in C$ dir. Çünkü C, X in kapalı bir alt kümesidir.

$F\left(T\right)$ kapalı, T_i dönüşümleri de sürekli olduğundan, $d\left(x_n,F\right)=0$ ve $n\to\infty$ iken $x_n\to p$ yani $d\left(p,F\right)=0$ olur. Buradan $p\in F$ dir.

Lemma 4.3.3. X düzgün konveks Banach uzayı, C X in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Her $i\in D$ için $\sum_{n=1}^{\infty}s_{in}<\infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}c_{in}<\infty$ olacak şekilde $\left(s_{in}\right),\left(c_{in}\right)\subset\left[0,\infty\right)$ ile C den C ye $\left\{T_i : i\in D\right\}$ ailesi N tane genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşüm ve $F=\bigcap_{i=1}^{n} F\left(T_i\right)\neq\varnothing$ kapalı kabul edilsin. Bazı $\delta\in(0,1)$ için $\left(\alpha_n\right)_{n\geq 1}\subset[\delta,1-\delta]$ ve $\left(u_n\right)$ C içinde sınırlı bir dizi olmak üzere $x_0\in C$ ve her $n\geq 1$ için $x_n=\alpha_n x_{n-1}+\left(1-\alpha_n\right)T_{i(n)}^{k(n)}x_n+u_n$ tanımlansın. O zaman her $l\in D$ için $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n-T_l x_n\right\|=0$ dır.

İspat: $\left(x_n\right)$ dizisi sınırlı bir dizidir. Bu sebeple her $n\geq 1$ için $x_n\subset B_R(0)$ olacak şekilde $R>0$ vardır.

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_n^k x_n-x_{n-1}\right\|=0$$

olsun. $n=(k-1)N+i$, $i\in D$ için $\left\|T_n^k x_n-x_{n-1}\right\|=\left\|T_i^k x_n-x_{n-1}\right\|$ dir. O zaman her $n\geq 1$ için $x_n=\alpha_n x_{n-1}+\left(1-\alpha_n\right)T_{i(n)}^{k(n)}x_n+u_n$ ve Lemma 4.3.1.'den,

$$\begin{aligned}\left\|x_n-x^*\right\|&=\left\|\alpha_n x_{n-1}+\left(1-\alpha_n\right)T_i^k x_n+u_n-x^*\right\|\\&=\left\|\alpha_n x_{n-1}+\left(1-\alpha_n\right)T_i^k x_n+u_n-x^*+\alpha_n x^*-\alpha_n x^*\right\|\\&=\left\|\alpha_n\left(x_{n-1}-x^*\right)+\left(1-\alpha_n\right)\left(T_i^k x_n-x^*\right)+u_n\right\|\\&\leq\left\|\alpha_n\left(x_{n-1}-x^*\right)+\left(1-\alpha_n\right)\left(T_i^k x_n-x^*\right)\right\|+\left\|u_n\right\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|x_n-x^*\right\|^p&\leq\left\|\alpha_n\left(x_{n-1}-x^*\right)+\left(1-\alpha_n\right)\left(T_i^k x_n-x^*\right)\right\|^p+\left\|u_n\right\|^p\\\left\|x_n-x^*\right\|^p&\leq\alpha_n\left\|x_{n-1}-x^*\right\|^p+\left(1-\alpha_n\right)\left\|T_i^k x_n-x^*\right\|+\left\|u_n\right\|^p\\&\quad-w_p\left(\alpha_n\right)g\left(\left\|x_{n-1}-x^*-T_i^k x_n+x^*\right\|\right)\\\left\|x_n-x^*\right\|^p&\leq\alpha_n\left\|\left(x_{n-1}-x^*\right)\right\|^p+\left(1-\alpha_n\right)\left\|T_i^k x_n-x^*\right\|\\&\quad-w_p\left(\alpha_n\right)g\left(\left\|x_{n-1}-T_i^k x_n\right\|\right)+\left\|u_n\right\|^p\end{aligned}$$

olur. T_i dönüşümleri genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşüm olduğundan,

$$\left\|x_n - x^*\right\|^p \leq \alpha_n \left\|x_{n-1} - x^*\right\|^p + \left(1-\alpha_n\right)\left\{\left(1+s_{ik}\right)\left\|x_n - x^*\right\| + c_{ik}\right\}^p$$
$$+\left\|u_{ik}\right\|^p - w_p\left(\alpha_n\right) g\left(\left\|T_i^k x_n - x_{n-1}\right\|\right)$$
$$w_p\left(\alpha_n\right) g\left(\left\|T_i^k x_n - x_{n-1}\right\|\right) \leq \alpha_n \left\|x_{n-1} - x^*\right\|^p + \left(1-\alpha_n\right)\left\{\left(1+s_{ik}\right)\left\{\left(1+v_{ik}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.\left\|x_{n-1} - x^*\right\| + \mu_{ik}\right\} + c_{ik}\right\}^p + \left\|u_{ik}\right\|^p - \left\|x_n - x^*\right\|^p$$

elde edilir.

$$2\varepsilon^{p+1} g\left(\left\|T_i^k x_n - x_{n-1}\right\|\right) \leq \alpha_n \left\|x_{n-1} - x^*\right\|^p + \left(1-\alpha_n\right)\left\{\left(1+s_{ik}\right)\left\{\left(1+v_{ik}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.\left\|x_{n-1} - x^*\right\| + \mu_{ik}\right\} + c_{ik}\right\}^p + \left\|u_{ik}\right\|^p - \left\|x_n - x^*\right\|^p$$
$$2\varepsilon^{p+1} g\left(\left\|T_i^k x_n - x_{n-1}\right\|\right) \leq \alpha_n \left\|x_{n-1} - x^*\right\|^p + \left(1-\alpha_n\right)\left\{\left(1+s_{ik}\right)\left(1+v_{ik}\right)\left\|x_{n-1} - x^*\right\|\right.$$
$$\left.+\left(1+s_{ik}\right)\mu_{ik} + c_{ik}\right\}^p + \left\|u_{ik}\right\|^p - \left\|x_n - x^*\right\|^p$$

$p = 2$ ve bazı $M > 0$ için

$$2\varepsilon^3 g\left(\left\|T_i^k x_n - x_{n-1}\right\|\right) \leq \alpha_n \left\|x_{n-1} - x^*\right\|^2 + \left(1-\alpha_n\right)\left\|x_{n-1} - x^*\right\|^2 - \left\|x_n - x^*\right\|^2 +$$
$$\left\|u_{ik}\right\|^2 + \left(s_{ik} + v_{ik} + \mu_{ik} + c_{ik}\right)M$$
$$2\varepsilon^3 g\left(\left\|T_i^k x_n - x_{n-1}\right\|\right) \leq \left\|x_{n-1} - x^*\right\|^2 - \left\|x_n - x^*\right\|^2 + \left\|u_{ik}\right\|^2 + \delta_{ik}M$$

dir. Böylece,

$$\sum_{n=1}^{\infty} g\left(\left\|T_i^k x_n - x_{n-1}\right\|\right) < \infty$$

olur.

Her $i \in D$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_{ik} < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} \left\|v_{ik}\right\| < \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} \left\|x_n - x^*\right\|$ mevcut olması nedeniyle,

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\left\|T_i^k x_n - x_{n-1}\right\|\right) = 0$$

bulunur. g fonksiyonu sıkı artan, sürekli ve $g(0)=0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty}\left\|T_i^k x_n - x_{n-1}\right\| = 0$ dır.

$$\left\|x_n - x_{n-1}\right\| = \left\|\alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n)T_n^k x_n + u_n - x_{n-1}\right\|$$
$$\left\|x_n - x_{n-1}\right\| \le (1-\alpha_n)\left\|x_{n-1} - T_n^k x_n\right\| + \left\|u_n\right\|$$

O zaman $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - x_{n-1}\right\| = 0$ dır. Ayrıca her $l \in D$ için $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - x_{n+l}\right\| = 0$ dır. Böylece $n > N$ için

$$\begin{aligned}\left\|x_{n-1} - T_n x_n\right\| &= \left\|x_{n-1} - T_n x_n + T_n^k x_n - T_n^k x_n\right\| \\ &= \left\|x_{n-1} - T_n x_n + T_n^k x_n - T_n^k x_n + T_{n-N}^k x_{(n-N)-1} - T_{n-N}^k x_{(n-N)-1}\right\| \\ &\le \left\|x_{n-1} - T_n^k x_n\right\| + \left\|T_n^k x_n - T_{n-N}^k x_{n-N}\right\| + \left\|T_{n-N}^k x_{n-N} - T_{n-N}^k x_{(n-N)-1}\right\| + \\ &\quad \left\|T_{n-N} x_{(n-N)-1} - T_n x_n\right\|\end{aligned}$$

olur. Açıktır ki, $n \equiv (n-N)(\operatorname{mod} N)$, bu yüzden $T_n = T_{n-N}$ dir. T_i dönüşümleri düzgün sürekli olduğu için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_{n-1} - T_n x_n\right\| = 0$$

elde edilir. Buradan $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - x_{n-1}\right\| = 0$ olduğu için

$$\begin{aligned}0 \le \left\|x_n - T_n x_n\right\| &= \left\|x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - T_n x_n\right\| \\ &\le \left\|x_n - x_{n-1}\right\| + \left\|x_{n-1} - T_n x_n\right\| \\ &\le 0\end{aligned}$$

olur. Böylece $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - T_n x_n\right\| = 0$ dır. Her $l \in D$ için

$$\begin{aligned}\left\|x_n - T_{n+l} x_n\right\| &= \left\|x_n + x_{n+l} - x_{n+l} - T_{n+l} x_{n+l} + T_{n+l} x_{n+l} - T_{n+l} x_n\right\| \\ &\le \left\|x_n - x_{n+l}\right\| + \left\|x_{n+l} - T_{n+l} x_{n+l}\right\| + \left\|T_{n+l} x_{n+l} - T_{n+l} x_n\right\|\end{aligned}$$

T_i dönüşümleri düzgün sürekli olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - T_{n+l}x_n\right\| = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak her $l \in D$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - T_l x_n\right\| = 0$$

dır.

Teorem 4.3.2. X düzgün konveks Banach uzayı, C X in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Her $i \in D$ için $\sum_{n=1}^{\infty} s_{in} < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} c_{in} < \infty$ olacak şekilde $(s_{in}),(c_{in}) \subset [0,\infty)$ ile C den C ye $\{T_i : i \in D\}$ ailesi N tane genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşüm ve $F = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \neq \varnothing$ kapalı kabul edilsin. Bazı $\delta \in (0,1)$ için $(\alpha_n)_{n\geq 1} \subset [\delta, 1-\delta]$ ile (u_n), C içinde sınırlı bir dizi, ve $\{T_i : i \in D\}$ ailesinde bir T üyesi yarı kompakt olsun. $x_0 \in C$ ve her $n \geq 1$ için $x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n) T_{i(n)}^{k(n)} x_n + u_n$ olarak tanımlansın. O zaman (x_n) dizisi $\{T_i : i \in D\}$ ailesinin ortak sabit bir noktasına kuvvetli yakınsaktır.

İspat: Genelliğe girmeksizin, $\{T_i : i \in D\}$ ailesi içinde $i = 1$ için T_1 dönüşümü yarı kompakt olsun. Lemma 4.3.3.'den $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - T_l x_n\right\| = 0$ dır. $l = 1$ için eşitlik aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - T_1 x_n\right\| = 0$$

olur. Yarı kompaktlığın tanımı kullanılırsa, (x_n) dizisinin $j \to \infty$ iken $x_{n_j} \to x^* \in C$ olacak şekilde (x_{n_j}) alt dizisi vardır. Böylece,

$$\lim_{j\to\infty}\left\|x_{n_j} - T_1 x_{n_j}\right\| = 0$$

dır. Yani

$$\lim_{j\to\infty}\left\|x_{n_j}-T_1x_{n_j}\right\|=\left\|x^*-T_1x^*\right\|=0$$

olur. $\left\|x^*-T_1x^*\right\|=0$ ise $T_1x^*=x^*$ olmalıdır. Buradan $x^*\in F$ elde edilir. O zaman,

$$\liminf_{n\to\infty} d\left(x_n,F\right)=0$$

dır. Böylece $\lim_{n\to\infty} d\left(x_n,F\right)=0$ dır. Sonuç olarak $\left(x_n\right)$ dizisi ortak sabit bir noktaya kuvvetli yakınsaktır.

Teorem 4.3.3. X düzgün konveks Banach uzayı, Opial şartını sağlasın. C X in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $C+C\subset C$ olsun. Her $i\in D$ için $\sum_{n=1}^{\infty}s_{in}<\infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}c_{in}<\infty$ olacak şekilde $\left(s_{in}\right)$, $\left(c_{in}\right)\subset\left[0,\infty\right)$ dizileri ile C den C ye $\left\{T_i:i\in D\right\}$ N tane genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşüm tanımlansın. $F=\bigcap_{i=1}^{N}F\left(T_i\right)\neq\emptyset$ kapalı, bazı $\delta\in\left(0,1\right)$ için $\left\{\alpha_n\right\}_{n\geq1}\subset\left[\delta,1-\delta\right]$ ve $\left(u_n\right)$, C içinde sınırlı bir dizi kabul edilsin. $x_0\in C$ ve her $n\geq1$ için $x_n=\alpha_nx_{n-1}+\left(1-\alpha_n\right)T_{i(n)}^{k(n)}x_n+u_n$ olarak tanımlansın. O zaman $\left(x_n\right)$ dizisi $\left\{T_i:i\in D\right\}$ ailesinin ortak sabit bir noktasına zayıf yakınsaktır.

İspat: X düzgün konveks Banach uzayı olması sebebiyle X in her sınırlı alt kümesi zayıf kompaktır. $\left(x_n\right)$ dizisi C içinde sınırlı bir dizi olduğu için $x_{n_k}\xrightarrow{z}q\in C$ olacak şekilde $\left(x_n\right)$ in bir $\left(x_{n_k}\right)$ alt dizisi vardır. Lemma 4.3.3.'den, her $l=1,2,...,N$ için

$$\lim_{n_k\to\infty}\left\|x_{n_k}-T_l\left(x_{n_k}\right)\right\|=0$$

dır. $q\in F\left(T_l\right)$ için $\left(E-T_l\right)\left(q\right)=0$ idi. l keyfi olduğu için $q\in F=\bigcap_{l=1}^{N}F\left(T_l\right)$ dir.

(x_n) dizisinin q ya zayıf yakınsadığı gösterilmelidir. Tersi kabul edilsin. Yani $q \neq q_1$ ve $q_1 \in C$ olacak şekilde $x_{n_j} \to q_1 \in C$ olan (x_n) in (x_{n_k}) alt dizisi var olsun. Benzer düşünüşle her $l = 1, 2, ..., N$ için

$$\lim_{n_j \to \infty} \left\| x_{n_j} - T_l\left(x_{n_j}\right) \right\| = 0$$

dır. $q_1 \in F = \bigcap_{l=1}^{N} F(T_l)$ için $(E - T)(q_1) = 0$ olur. $p = q$ ve $p = q_1$ alınırsa aşağıdaki iki limitin varlığı ispatlanır.

d_1 ve d_2 iki negatif olmayan sayı olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - q\| = d_1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \|x_n - q_1\| = d_2$$

dir. X in Opial şartını sağladığı kullanılarak,

$$d_1 = \lim_{n_k \to \infty} \left\| x_{n_k} - q \right\| < \lim_{n_k \to \infty} \sup \left\| x_{n_k} - q_1 \right\| = \lim_{n_j \to \infty} \sup \left\| x_{n_j} - q_1 \right\| < \lim_{n_j \to \infty} \left\| x_{n_j} - q \right\| = d_1$$

olur. Buradan,

$$d_1 < d_2 = d_2 < d_1$$

dir. Bu bir çelişkidir. $d_1 = d_2$ dir. Böylece $q = q_1$ olur. Bu da (x_n) dizisinin q ya zayıf yakınsadığını gösterir.

4.4. I - Genişlemeyen Dönüşümlerin Sonlu Bir Ailesi için Kapalı İterasyon Sürecinin Kuvvetli Yakınsaklığı

Bu bölümde, Xu ve Ori (2001)'de verilen genişlemeyen ve onun genelleşmeleri olan dönüşümlerin sonlu bir ailesi için verilen kapalı iterasyon süreci kullanılmıştır. Rhoades ve Temir (2006), çalışmasında verilen açık probleme, I - genişlemeyen dönüşümün sonlu bir ailesi için kuvvetli yakınsaklığı incelenerek cevap verilmektedir.

X Banach uzayı, C X in alt kümesi, $(T_i)_{i=1}^N$, I_i-genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi ve $(I_i)_{i=1}^N$, genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi olsun. $(\alpha_n),(\beta_n)\subset[0,1]$ de iki reel sayı dizisi ile $(T_i)_{i=1}^N$, I_i-genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için kapalı iterasyon süreci aşağıda verilmiştir. O zaman $(x_n)_{n\geq 1}$ dizisinin genel formu,

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n I_n(y_n),\; y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n T_n(x_n)$$

$T_n=T_{n(\bmod N)}$, $I_n=I_{n(\bmod N)}$ dir.

Lemma 4.4.1. $a_{n+1}\leq a_n+b_n$**,** ve her $n\geq 1$ olacak şekilde (a_n) ve (b_n) negatif olmayan reel sayı dizileri olsun. Eğer,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n<\infty$$

ise o zaman $\lim_{n\to\infty} a_n$ vardır (Tan ve Xu, 1993).

Lemma 4.4.2. X düzgün konveks Banach uzayı, C X in kapalı konveks bir alt kümesi, $\{T_i : i\in\{1,2,...,N\}\}$, N tane I_i-genişlemeyen dönüşüm, $\{I_i : i\in\{1,2,...,N\}\}$, N tane genişlemeyen dönüşüm ve $F=\bigcap_{i=1}^{N} F(T_i)\cap F(I_i)\neq\varnothing$ kabul edilsin. Bazı $\delta\in(0,1)$ için (α_n) ve $(\beta_n)\subset[\delta,1-\delta]$ olsun. Verilen herhangi bir $x\in C$ için $(x_n)_{n\geq 1}$ aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n I_n(y_n),\, y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n T_n(x_n)$$

$T_n=T_{n(\bmod N)}$, $I_n=I_{n(\bmod N)}$ dir.

Eğer $F=\bigcap_{i=1}^{N} F(T_i)\cap F(I_i)\neq\varnothing$ ise o zaman,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$$

mevcuttur.

İspat: Herhangi bir $p \in F$ için

$$\|x_{n+1} - p\| = \|\alpha_n I_n(y_n) + (1-\alpha_n)x_n - p\|$$
$$\leq (1-\alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n \|I_n(y_n) - p\|$$
$$\leq (1-\alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n \|y_n - p\|$$

$$\|y_n - p\| \leq \|(1-\beta_n)x_n + \beta_n T_n(x_n) - p\|$$
$$\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n \|T_n(x_n) - p\|$$
$$\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n \|I_n(x_n) - p\|$$
$$\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n \|x_n - p\|$$
$$\leq \|x_n - p\|((1-\beta_n) - \beta_n)$$
$$\leq \|x_n - p\|$$

dir. Yukarıdaki eşitsizlikler kullanılarak,

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1-\alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n \|x_n - p\|$$
$$\leq \|x_n - p\|$$

bulunur. Böylece,

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|$$

elde edilir. Lemma 4.4.1. den $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ mevcuttur.

Lemma 4.4.3. X düzgün konveks Banach uzayı, C X in kapalı konveks bir alt kümesi, $\{T_i : i \in \{1,2,...,N\}\}$, N tane I_i-genişlemeyen dönüşüm, $\{I_i : i \in \{1,2,...,N\}\}$, N tane genişlemeyen dönüşüm ve $F = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \cap F(I_i) \neq \emptyset$

kabul edilsin. Bazı $\delta \in (0,1)$ için (α_n) ve $(\beta_n) \subset [\delta, 1-\delta]$ olsun. Verilen herhangi bir $x \in C$ için $(x_n)_{n \geq 1}$ aşağıdaki şekilde tanımlansın,

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n) x_n + \alpha_n I_n(y_n), \; y_n = (1-\beta_n) x_n + \beta_n T_n(x_n)$$

$T_n = T_{n(\operatorname{mod} N)}$, $I_n = I_{n(\operatorname{mod} N)}$ dir.

Eğer $F = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \cap F(I_i) \neq \varnothing$ ise o zaman,

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(x_n) - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|I_n(x_n) - x_n\| = 0$$

dir.

İspat: Lemma 4.4.2. den herhangi bir $p \in F$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ mevcuttur.

$$\|y_n - p\| = \|(1-\beta_n) x_n + \beta_n T_n(x_n) - p\|$$

dir. Lemma 4.3.1. den,

$$\|y_n - p\|^p = \|(1-\beta_n)(x_n - p) + \beta_n (T_n(x_n) - p)\|^p$$
$$\leq \beta_n \|T_n(x_n) - p\|^p + (1-\beta_n)\|x_n - p\|^p - w_p(\beta_n) g \|T_n(x_n) - x_n\|$$
$$2\delta^{p+1} g \|T_n(x_n) - x_n\| \leq \beta_n \|T_n(x_n) - p\|^p + (1-\beta_n)\|x_n - p\|^p - \|y_n - p\|^p$$
$$2\delta^{p+1} g \|T_n(x_n) - x_n\| \leq \beta_n \|T_n(x_n) - p\|^p + (1-\beta_n)\|x_n - p\|^p - \|x_n - p\|^p$$

$\sum_{n=1}^{\infty} g(\|T_n(x_n) - x_n\|) < \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} g(\|T_n(x_n) - x_n\|) = 0$ bulunur. g sıkı artan, sürekli ve $g(0) = 0$ olduğu için, $\lim_{n\to\infty} \|T_n(x_n) - x_n\| = 0$ elde edilir.

$$\|x_{n+1} - p\| = \|(1-\alpha_n) x_n + \alpha_n I_n(y_n) - p\|$$
$$\|x_{n+1} - p\| = \|(1-\alpha_n)(x_n - p) + \alpha_n (I_n(y_n) - p)\|$$

dir. Lemma 4.3.1. den,

$$\|x_{n+1}-p\|^p = \|(1-\alpha_n)(x_n-p)+\alpha_n(I_n(y_n)-p)\|^p$$
$$\le \alpha_n\|I_n(y_n)-p\|^p+(1-\alpha_n)\|x_n-p\|^p - w_p g(\|I_n(y_n)-x_n\|)$$
$$2\delta^{p+1} g(\|I_n(y_n)-x_n\|) \le \alpha_n\|y_n-p\|^p+(1-\alpha_n)\|x_n-p\|^p-\|x_{n+1}-p\|^p$$

$\sum_{n=1}^{\infty} g(\|I_n(y_n)-x_n\|)<\infty$ ve $\lim_{n\to\infty} g(\|I_n(y_n)-x_n\|)=0$ bulunur. g sıkı artan, sürekli ve $g(0)=0$ olduğu için, $\lim_{n\to\infty}\|I_n(y_n)-x_n\|=0$ elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n(x_n)-x_n\|=0,\ \lim_{n\to\infty}\|I_n(y_n)-x_n\|=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0$$

bulunur. Her $j=1,2,...,N$ için

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_{n+j}\|=0$$

olur.

$$\|I_n(x_n)-x_n\| \le \|I_n(x_n)-I_n(y_n)\|+\|I_n(y_n)-x_n\|$$
$$\le \|x_n-y_n\|+\|I_n(y_n)-x_n\|$$
$$\le \|x_n-[(1-\beta_n)x_n+\beta_n T_n(x_n)]\|+\|I_n(y_n)-x_n\|$$
$$\le \beta_n\|T_n(x_n)-p\|+\|I_n(y_n)-x_n\|$$

dir. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty}\|I_n(x_n)-x_n\|=0$$

elde edilir.

Teorem 4.4.1. X düzgün konveks Banach uzayı, C X in kapalı konveks bir alt kümesi, $\{T_i : i\in\{1,2,...,N\}\}$, N tane I_i-genişlemeyen dönüşüm, $\{I_i : i\in\{1,2,...,N\}\}$, N tane genişlemeyen dönüşüm ve $F=\bigcap_{i=1}^{N} F(T_i)\cap F(I_i)\neq\varnothing$

kabul edilsin. Bazı $\delta \in (0,1)$ için (α_n) ve $(\beta_n) \subset [\delta, 1-\delta]$ olsun. Verilen herhangi bir $x \in C$ için $(x_n)_{n\geq 1}$ aşağıdaki şekilde tanımlansın,

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n I_n(y_n),\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T_n(x_n)$$

$T_n = T_{n(\bmod N)}$, $I_n = I_{n(\bmod N)}$ dir. Ayrıca $\{T_i : i \in \{1,2,...,N\}\}$ sonlu dönüşüm ailesinden en az bir tane T dönüşümü yarı kompakt olsun.

O zaman (x_n) dizisi T ve I dönüşümlerinin ortak sabit bir noktasına kuvvetli yakınsaktır.

İspat: Herhangi bir $p \in F$ ile $n \geq 1$ için Lemma 4.4.2 den $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ mevcuttur ve $\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|$ dir. Bu sebeple, $d(x_{n+1}, F) \leq d(x_n, F)$ ve $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F)$ vardır. Lemma 4.4.3.den ve T yarı kompakt olduğu için $\lim_{n\to\infty}\|T_n(x_n) - x_n\| = 0$ ile $\lim_{n\to\infty}\|I_n(x_n) - x_n\| = 0$ dır. Böylece $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ elde edilir.

(x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğu gösterilmelidir. $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq N$ için $d(x_n, F) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde N tane pozitif tamsayısı mevcuttur. Her $n, m \geq N$ ve $p \in F$ için

$$\|x_n - p\| \leq \|T^n(x_0) - p\| \leq \|T^N(x_0) - p\| \leq \|I^N(x_0) - p\| \leq \|x_N - p\|$$
$$\|x_m - p\| \leq \|T^m(x_0) - p\| \leq \|T^N(x_0) - p\| \leq \|I^N(x_0) - p\| \leq \|x_N - p\|$$

olur. Böylece,

$$\|x_n - x_m\| \leq 2d(x_N, F) < \varepsilon$$

elde edilir. Buradan (x_n) dizisi Cauchy dizisidir. Böylece $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ ve X tam olduğundan $p \in F$ dir. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ olduğu için $d(p, F) = 0$ bulunur. Böylece,

$$p \in F = \bigcap_{i=1}^{N} F\left(T_i\right) \cap F\left(I_i\right)$$

dir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Genellikle genişlemeyen ve onun genelleşmeleri olan dönüşümler için iterasyon dizilerinin yakınsaklıkları son zamanlarda çalışılan bir konudur. Düzgün konveks Banach uzaylarında veya Hilbert uzaylarında genişlemeyen ve onun genelleşmeleri olan dönüşümlerin sonlu bir ailesi için ortak sabit bir noktaya kapalı veya kapalı olmayan iterasyon sürecinin yakınsaklık problemleri ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Bu tezde, özellikle, Mann ve Ishikawa iterasyon dizilerinin genişlemeyen ve onun genelleşmeleri olan dönüşümler için kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları incelenmiştir. Ayrıca, son zamanlarda incelenen I-genişlemeyen dönüşümlerin iterasyon dizilerinin yakınsaklıkları, kaynaklar kısmında verilen ve literatür taraması ile elde edilen çalışmalardan hareketle, I-genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için kapalı iterasyon sürecinin kuvvetli yakınsaklığı incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, kaynaklar kısmında verilen makalelerin geliştirilmesidir.

Bu tezden hareketle, genişlemeyen dönüşümler ve onun genelleşmeleri olan dönüşümler için zayıf ve kuvvetli yakınsaklık teoremleri, kaynaklar kısmında verilen ve literatür taraması ile elde edilen çalışmalar kullanılarak, bazı Banach uzaylarında Mann ve Ishikawa iterasyon dizilerinin belirlenecek olan özel koşullar altında yakınsaklıkları incelenebilir ve yeni sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

BAYRAKTAR, M., 1992. Fonksiyonel Analiz. Atatürk Üniversitesi Yayınları, Erzurum, 314s.

BROWDER, F. E., 1965. Nonexpansive nonliear operators in Banach spaces. Proc. Natl. Acad. Sci, 54:1041-1044.

CHANG, S. S., TAN, K. K., LEE, H. W. J., and CHAN, C. K., 2006. On the convergence of implicit iteration process with error for a finite family of asymptotically nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl, 313:273-283.

CHIDUME, C. E., and SHAHZAD, N., 2005. Strong convergence of an implicit iteration process for a finite family of nonexpansive mappings. Nonlinear Analysis, 62:1149-1156.

DIAZ, J. B., and METCALF, F. T., 1967. On the structure of the set of subsequential limit points of successive approximations. Bull. Amer. Math. Soc, 73:516-519.

DOTSON, W. G. Jr., 1970. On the Mann iterative process. Trans. Amer. Math. Soc, 149:65-73.

GHOSH, M. K., and DEBNATH, L., 1997. Convergence of Ishikawa iterates of quasi-nonexpansive mapping. J. Math. Anal. Appl, 207:96-103.

GOEBEL, K., and KIRK, W. A., 1972. A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings. Proc. Amer. Math. Soc, 35:171–174.

ISHIKAWA, S., 1974. Fixed points by a new iteration method. Proc. Amer. Math. Soc, 44:147-150.

KOLMOGOROV, A. N., and FOMIN, S. V., 1970. Introductory Reel Analysis. Prentice-Hall Inc., London,. 412p.

MANN, W. R., 1953. Mean value methods in iteration. Proc. Amer. Math. Soc, 4:506-510.

PETRSHYN, W. V., and WILLIAMSON, T. E., 1973. Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mapping. J. Math. Anal. Appl, 43:459-497.

RHOADES, B. E., and TEMIR, S., 2006. Convergence theorems for I-nonexpansive mapping. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 63435:1–4.

SHAHZAD, N., 2004. Generalized I-nonexpansive maps and best approximations in Banach spaces. Demonstratio Math, Vol-XXXVII, 3:597-600.

SHAHZAD, N., and ZEGEYE, H., 2007. Strong convergence of implicit iteration process for a finite family of generalized asymptotically nonexpansive maps. Applied Mathematics and Computation, 2:1058-1065.

ŞUHUBİ, E. S., 2001. Fonksiyonel Analiz. İstanbul Teknik Üniversitesi Yayınları, İstanbul, 638s.

SUN, Z. H., 2003. Strong convergence of an implicit iteration process for a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl, 286:351-358.

TAN, K. K., and XU, H. K., 1993. Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process. J. Math. Anal. Appl, 178:301-308.

TEMIR, S., and GUL, Ö., 2007. Convergence theorem for I-asymptotically quasi-nonexpansive mapping in Hilbert space. J. Math. Anal. Appl, 329:759–765.

XU, H. K., and ORI, M. G., 2001. An implicit iterative process for nonexpansive mappings. Numer. Func. Anal. Optim, 22:767-773.

ZHOU, Y., and CHANG, S. S., 2002. Convergence of implicit iteration process for a finite family of asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces. Numer. Funct. Anal. Appl, 23:911-921.

ÖZGEÇMİŞ

24.08.1981 yılında Kadirli´de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kozan´ da tamamladı. 2003 yılında Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden mezun olarak aynı yıl Hatay´da Matematik öğretmeni olarak göreve atandı. 2005 yılında Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitü` sünde Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2005 yılının Ocak ayında Şanlıurfa Osmangazi Lisesine atandı. Halen bu görevine devam etmektedir.

ÖZET

Banach uzaylarında genişlemeyen ve sözde genişlemeyen dönüşümler için sabit noktalar üzerinde iterasyon dizilerinin yakınsaklıkları bir çok yazar tarafından son zamanlarda çalışılan bir konudur. Özellikle, yakın tarihlerde sunulan Mann ve Ishikawa iterasyon dizilerinin genişlemeyen ve onun genelleşmeleri olan dönüşümlerin kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları ispatlanmıştır. Bu tezde, Mann ve Ishikawa iterasyon dizilerinin genişlemeyen ve onun genelleşmeleri olan dönüşümlerin sonlu bir ailesi için kapalı iterasyon sürecinin kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları çalışılmaktadır. Ayrıca, son zamanlarda incelenen I-genişlemeyen dönüşümlerin iterasyon dizilerinin yakınsaklıkları, son zamanlarda yapılan çalışmalardan hareketle, I-genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için kapalı iterasyon sürecinin yakınsaklığı incelenmektedir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde önceki çalışmalar ve literatür bilgileri sunulmaktadır. İkinci bölümde, bu çalışmada gerekli olan temel tanım ve teoremler verilmektedir. Üçüncü bölümde kullanılan materyal ve yöntemler anlatılmaktadır. Dördüncü bölüm ise dört alt kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda genişlemeyen ve sözde genişlemeyen dönüşümlerin Mann iterasyon süreci için zayıf ve kuvvetli yakınsaklıkları incelenmektedir. İkinci kısımda I-genişlemeyen ve I-sözde genişlemeyen dönüşümlerin Mann iterasyon süreci için yakınsaklığı incelenmektedir. Üçüncü kısımda genelleştirilmiş asimtotik sözde genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için kapalı iterasyon sürecinin kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları araştırılmaktadır. Son kısımda ise önceki çalışmalar göz önüne alınarak son zamanlarda çalışılan I-genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için kapalı iterasyon sürecinin kuvvetli yakınsaklığı elde edilmektedir.

SUMMARY

Recently, the convergence theorems of iterative process to fixed point for nonexpansive mappings and quasi-nonexpansive mappings in Banach spaces have been studied by many authors. Especially certain results have been obtained the strong and weak convergence for nonexpansive mappings, asymptotically nonexpansive mappings, quasi-nonexpansive mappings of recently presented Mann and Ishikawa iteration sequences. In this thesis, we consider the strong and weak convergence of Mann and Ishikawa iteration sequences for nonexpansive mappings and also the strong and weak convergence of implicit iterative sequences to common fixed point for a finite family of generalized nonexpansive mappings. In addition, in the light of references the convergence theorem of implicit iterative sequences to common fixed point for a finite family of I -nonexpansive mappings is given.

Our thesis contains four chapters. In the first chapter, the previous and literature are explained. In the second chapter, necessary definition and theorems are given without going into details. In the third chapter, the materials and methods are explained. The last chapter contains fourth parts. The first part, the strong and weak convergence theorems of Mann iteration sequences of nonexpansive and quasi-nonexpansive mappings are given. In the second part, the convergence theorem of Mann iteration sequences of I -nonexpansive and I -quasi nonexpansive mappings is investigated. In the third part, the convergence theorems of implicit iteration process to common fixed point for a finite family of generalized nonexpansive mappings are studied. In the last part, in the light of previous works which we introduced in the references, the strong convergence theorem of implicit iteration process to common fixed point for a finite family of I -nonexpansive mappings is obtained.