T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FENBİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNTEGRAL OPERATÖR AİLELERİYLE GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLERE YAKLAŞIM

Lütfi AKIN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2008

Yrd. Doç. Dr. Yusuf ZEREN danışmanlığında, Lütfi AKIN'nın hazırladığı "İntegral Operatör Aileleriyle Genelleştirilmiş Türevlere Yaklaşım" konulu bu çalışma 05/09/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Üye : Doç. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hasan AKIN

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Prof. Dr. İbrahim BOLAT
Enstitü Müdürü

Bu Çalışma HÜBAK Tarafından Desteklenmiştir.
Proje No: 804

ÖZ

Yüksek Lisans Tezi

İNTEGRAL OPERATÖR AİLELERİYLE GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLERE YAKLAŞIM

Lütfi AKIN

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yusuf ZEREN
Yıl: 2008, Sayfa: 38

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmı ile tez için gerekli temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır. İkinci bölüm de önceki çalışmalara yer verilmiştir. Üçüncü bölüm de materyal ve yöntemlere yer verilmiştir. Dördüncü bölüm ise araştırma bulguları ve tartışma kısmına ayrılmış olup, integral operatör aileleriyle Taylor, Peano, Riemann türevlerine yaklaşımı ve asimptotik değerleri incelenmiştir. Son bölüm ise sonuçlar ve önerilere ayrılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: İntegral operatör, Peano türev, Riemann türev, Taylor türev

ABSTRACT

Master Thesis

APPROXIMATION TO GENERALIZED DERIVATIVES

BY INTEGRAL OPERATOR FAMILIES

Lütfi AKIN

Harran University
Graduate School of Natural Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Yusuf ZEREN
Year: 2008, Page: 38

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction with preliminaries, fundamental definitions and theorems needed for the thesis. In the second chapter the previous studies are given. The chapter three is devoted to the material and methods used in the thesis. In chapter four the results of the research and discussion section are given and the approximation to the Taylor, Peano and Riemann Derivatives by integral operator families and their asymptotic values are investigated. In the final chapter results and suggestions are given.

KEYWORDS : Integral operator, Peano derivative, Riemann derivative, Taylor derivative

TEŞEKKÜR

Bu tezin başlangıcından bitiş safhasına kadar bana yol gösteren, çalışmalarımda yardımlarını esirgemeyen Eğitim Danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yusuf ZEREN(Har. Üniv. Fen. Fak.)'e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER DİZİNİ

$K(x,t)$	: Çekirdek Fonksiyonu
$f^{r}(x_0)$	: r inci mertebeden Adi türev
$f^{(r)}(x_0)$	: r inci mertebeden Taylor türev
$f^{\langle r\rangle}(x_0)$	: r inci mertebeden Peano türev
$f^{[r]}(x_0)$	: r inci mertebeden Riemann türev

1. GİRİŞ

Pozitif çekirdekli integral operatörlere fonksiyonlar teorisi ve diferansiyel denklemler teorisinin bir çok probleminde rastlayabiliriz. Bunlardan Fourier serilerinin bazı toplanabilme yöntemleri bu tür integrallerle ifade edilmektedir. Ayrıca Dirichlet probleminin çözümü ve ısı denklemleri için sınır değer probleminin çözümü de pozitif çekirdekli integraller biçiminde verilmektedir. Bundan dolayı pozitif çekirdekli integral operatörler kullanılarak genelleştirilmiş türevlere yaklaşım probleminin incelenmesi hem teorik açıdan hem de pratik açıdan büyük önem taşımaktadır.

$$L_\lambda(f,x) = \int_a^b f(t)K_\lambda(t-x)dt \tag{1.1}$$

$L_\lambda : f(t) \to L_\lambda(f,x)$ operatörleri f fonksiyonuna $L_\lambda(f,x)$ fonksiyonlar ailesini karşılık getirmektedir.

Bu tür integral operatörler ailesinin yakınsaklıklarıyla ilgili esas problemler şöyledir

1. Belirli bir x_0 noktasında, $\lambda \to \lambda_0$ için $L_\lambda(f,x_0) \to f(x_0)$ yakınsaklığının incelenmesi,
2. X bir normlu lineer uzay, $f \in X, L_\lambda : X \to X$ olduğunda,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \|L_\lambda f - f\|_X = 0$$

yakınsaklığının incelenmesi,

3. 1 ve 2 deki problemlerin yakınsaklık hızlarının bulunması, yani $\lambda \to \lambda_0$ iken $\alpha_\lambda, \beta_\lambda$ sıfır dizileri olmak üzere,

$$|L_\lambda(f,x_0) - f(x_0)| = o(\alpha_\lambda),$$

$$\|L_\lambda f - f\|_X = o(\beta_\lambda),$$

$$\left|L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)\right|=O(\alpha_\lambda),$$

$$\left\|L_\lambda f-f\right\|_X=O(\beta_\lambda),$$

gibi önermelerin ispatlanması,

4. Yaklaşım hızının bulunması probleminden daha genel problem, yaklaşımın asimptotik değerinin bulunması problemidir. L_λ integral operatörler ailesinin f fonksiyonuna bir x_0 noktasında yaklaşımın asimptotik değeri matematikçiler tarafından incelenmiştir.

Konvolüsyon tipli olan bu tür problemler Weierstrasse, Gauss, Perron, Landau, Picard, Lebesgue, Faddeev, Romanovsky, Natanson, Korovkin, Butzer gibi matematikçiler tarafından incelenmiştir. Söz konusu olan çalışmalarda f fonksiyonunun bir noktada n inci mertebeden türevlenebilir olmasının yaklaşım hızına etkisi problemi araştırılmıştır.

Bizde integral operatör aileleriyle genelleştirilmiş türevlere yaklaşımı inceleyeceğiz. Şimdi tezimiz için gerekli temel tanım ve teoremleri verelim.

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1: X, D kümesinde tanımlı ve Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonlar uzayı olsun. Yani $X=\left\{f \,\middle|\, f:D\to R, \int_D |f|d\mu<\infty\right\}$ olsun. Bu uzayda dönüşüm yapan bir lineer integral operatörü;

$$\int_D f(t)K(x,t)dt, \quad x\in D$$

biçiminde verilebilir. Burada $K(x,t)$, DxD de tanımlı, önceden özellikleri belli olan bir fonksiyondur. Bu integral operatörün tüm özellikleri $K(x,t)$ fonksiyonunun özelliklerine bağlı olduğundan $K(x,t)$ fonksiyonuna L_λ integral operatörün çekirdeği denir. Bu çekirdek,

$$K(x,t)=K_1(x-t)$$

olduğunda,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)K_1(x-t)dt$$

integral operatörüne veya K_1 ve f, 2π periyotlu olduğunda,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_1(x-t)dt$$

şeklindeki integral operatörüne '*konvolüsyon tipli operatör* ' denir.

Tanım 1.1.2 : Belirsiz fonksiyonun integral altında olduğu denklemlere '*integral denklemler'* denir.

$$\int_{a}^{b} f(t)K(x,t)dt = g(x) \tag{1.2}$$

Şimdi $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu ile ilgili biraz bilgi verelim. (1.2) denkleminde $f(x)$ bilinmeyen bir fonksiyon, $K(x,t)$ sabit bir fonksiyondur. Yani önceden özellikleri belli bir fonksiyondur. Çekirdek fonksiyonu belirli bir fonksiyon olduğundan integralin anlamlı olabilmesi için $K(x,t)$ nin özellikleri önemlidir. Çekirdek fonksiyonu genel olarak ikiye ayrılır.

a) *Değişkenlerine ayrılabilen çekirdekler*

b) *Değişkenlerine ayrılamayan çekirdekler*

Şimdi bunları inceleyelim.

a) *Değişkenlerine ayrılabilen çekirdekler*

i. $K(x,t) = \dfrac{M(x)}{N(t)}$

ii. $K(x,t) = \dfrac{N(t)}{M(x)}$

iii. $K(x,t) = M(x).N(t)$

durumlarından birisidir. Bu tip bir çekirdeğe sahip İntegral denlemin çözümü oldukça basittir. Bunlardan en bilineni II. Fredholm denklemidir. Bu denklem φ bilinmeyen, $K(x,t)$ değişkenlerine ayrılabilen, f ise bilinen bir fonksiyon olmak üzere; λ kompleks bir sayı iken,

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \varphi(t) K(x,t) dt = f(x)$$

biçimindedir.

Örnek 1.1.1 : $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 e^{3(t-x)} \varphi(t) dt = x$ integral denklemi rahatlıkla çözülebilir.

b) *Değişkenlerine Ayrılamayan Çekirdekler*

Bu tip denklemlere İntegral dönüşümler denir. İntegral dönüşümlerin, integral denklemlerden farkı değişkenlerin birbiriyle bağlantılı olmasıdır. İntegral dönüşümlerin çözümünü bulabilmek için özel uzaylar tanımlamak gerekir. Çünkü bağımlı x ve t değişkenlerinin her ikisinin birden, integrali anlamlı yaptığı bir bölge bulmak gerekir. Poisson ve Abel-Poisson çekirdekleri bunlara örnek olarak verilebilir.

Şimdi Poisson çekirdeğinin elde edilişini verelim.

U fonksiyonu C çemberinin üzerinde sürekli ve dairenin içinde harmonik olsun. C çemberi üzerindeki bir nokta $w = \mathrm{R}e^{i\phi}$ ve daire içinde ki bir noktada $z = re^{i\theta}$ ise,

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) U(R,\phi)}{R^2 - 2Rr\cos(\phi - \theta) + r^2} d\phi$$

dir.

C çemberinin dışında ve $|z_1| . |z| = R^2$ koşulunu sağlayan bir z_1 noktası seçelim.

Bu durumda $z_1 = \dfrac{R^2 e^{i\theta}}{r}$ dir. Çünkü $|z_1| = \dfrac{R^2}{r}$ dir ve z_1 ile z aynı doğru üzerinde seçildiklerinden $z_1 = \dfrac{R^2 e^{i\theta}}{r}$ olur. O halde,

$$z_1 = \frac{R^2 e^{i\theta}}{r} = \frac{R^2}{re^{-i\theta}} = \frac{w.\overline{w}}{\overline{z}}$$

yazılır.

z_1 noktası C çemberinin dışında olduğundan,

$$U(z_1)=\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{U(w)}{w-z_1}dw=0$$

dır. C çemberinin içindeki bir z noktası için,

$$U(z)=\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{U(w)}{w-z}dw$$

elde edilir. Eğer U(z)=U(z)-U(z_1) yazarsak,

$$U(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{w}{w-z}-\frac{w}{w-z_1}\right)U(w)dw$$

eşitliğini yazabiliriz. Ayrıca,

$$\frac{w}{w-z}-\frac{w}{w-z_1}=\frac{w}{w-z}-\frac{w}{w-\frac{w.\overline{w}}{\overline{z}}}=\frac{w}{w-z}+\frac{\overline{z}}{\overline{w}-\overline{z}}=\frac{w.\overline{w}-w.\overline{z}+w.\overline{z}-z.\overline{z}}{w.\overline{w}-w.\overline{z}-z.\overline{w}+z.\overline{z}}=\frac{R^2-r^2}{\left|w-z\right|^2}$$

dir. Bu değer integralde yazılırsa,

$$U(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{R^2-r^2}{\left|w-z\right|^2}U(w)dw$$

olur. Kutupsal koordinatlara geçilirse, $w=\mathrm{Re}^{i\phi}$ ise $dw=i\,\mathrm{Re}^{i\phi}\,d\phi=iwd\phi$ olur. O halde,

$$U(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)U(R,\phi)}{R^2-2Rr\cos(\phi-\theta)+r^2}d\phi$$

eşitliği bulunur. Özel olarak R = 1 alınırsa,

$$U(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)U(e^{it})}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}dt$$

formülü elde edilmiş olur.

Tanım 1.1.3 (Altomare ve Campiti, 1994)**:** Birim dairede Dirichlet problemi birim dairede harmonik, yani Laplace denklemini sağlayan ve dairenin sınırında sürekli bir U fonksiyonunu bulmaktır. Bu problem,

$$U(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}U(e^{it})dt \qquad 0<r<1$$

şeklindedir. Burada,

$P_r(\theta)=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$ ifadesine '*Poisson Çekirdeği* 'denir. Bu çekirdek θ değişkenine göre 2π periyotludur ve çifttir. Aynı zamanda,

$$1-2r\cos\theta+r^2=1-2r+r^2+2r-2r\cos\theta=(1-r)^2+4r\sin^2\frac{\theta}{2}>0$$

eşitliği Poisson çekirdeğinin negatif olmadığını gösterir. Ayrıca,

$$\int_0^{2\pi}P_r(\theta)d\theta=1$$

dir. Şimdi $P_r(\theta)$ nın bazı durumlarını inceleyelim.

$\theta\neq 0$ ise $\qquad \lim\limits_{r\to 1}P_r(\theta)=\lim\limits_{r\to 1}\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}=0$

$\theta=0$ ise $\qquad \lim\limits_{r\to 1}P_r(\theta)=\lim\limits_{r\to 1}\dfrac{1-r^2}{(1-r)^2}=\infty$

dir. Dolayısıyla,

$$\int_0^{2\pi}P_r(\theta)d\theta=1, \qquad \forall r\in(0,1)$$

$$\lim_{r\to 1}P_r(\theta)=0, \qquad \theta\neq 0 \quad \text{ise,}$$

$$\lim_{r\to 1}P_r(\theta)=\infty, \qquad \theta=0 \quad \text{ise,}$$

dır ve bu ise $P_r(\theta)$ nın bir deltasal çekirdek olduğunu gösterir.

Tanım 1.1.4 (Altomare ve Campiti, 1994): Üst yarı düzlemde Dirichlet probleminin çözümü,

$$f_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{1}{\varepsilon^2+(t-x)^2}dt, \qquad \varepsilon>0$$

biçiminde bir integral şeklinde verilmektedir. Bu integral '*Abel-Poisson integrali* ' olarak adlandırılır.

$$A_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon}{\pi}\frac{1}{\varepsilon^2+x^2}$$

ifadesine ise '*Abel-Poisson çekirdeği'* denir. Görüldüğü gibi bu çekirdek de Poisson çekirdeği gibi negatif olmayan, çift bir fonksiyondur. Onun integralinin değeri,

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_\varepsilon(x)dx = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^2+x^2}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} = 1$$

olduğundan $\forall\varepsilon > 0$ için,

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_\varepsilon(x)dx = 1$$

olarak elde edilir. Şimdi $\varepsilon \to 0$ iken $A_\varepsilon(x)$ çekirdeğinin limitini inceleyelim.

Eğer $x \neq 0$ ise,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(x) = 0$$

olduğu açıktır. Ayrıca $x = 0$ ise,

$$A_\varepsilon(0) = \frac{\varepsilon}{\pi\varepsilon^2} = \frac{1}{\pi\varepsilon}$$

olduğundan,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(x) = \infty$$

olur. Dolayısıyla,

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_\varepsilon(x)dx = 1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(x) = 0 \quad (x \neq 0 \text{ ise})$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(x) = \infty \quad (x = 0 \text{ ise})$$

olduğundan $A_\varepsilon(x)$ çekirdeği bir deltasal çekirdektir. Şimdi de fonksiyonel kavramını ve lineerliğini verelim.

Tanım 1.1.5: Tanım bölgesi F vektör uzayı, değer bölgesi ise K skaler cismi (IR veya C) olan bir ϕ operatörüne '*fonksiyonel*' denir.

Tanım 1.1.6: ϕ fonksiyoneli; f ve φ, F vektör uzayında herhangi iki fonksiyon, a ve b keyfi iki reel sayı olmak üzere;

$$\phi(af + b\varphi) = a\phi(f) + b\phi(\varphi)$$

eşitliğini gerçekliyorsa '*lineer*'dir, denir.

Örnek 1.1.2: $\phi(f) = \mathrm{A} f(\alpha)$ ve A, $\alpha \in IR$ olsun. Bu durumda ϕ fonksiyoneli, $f \in F$ ve $x=\alpha$ noktasında tanımlı $f(x)$ fonksiyonları için geçerlidir. ϕ' nin lineerliği aşağıdaki eşitlikten çıkar. $f\ ,\varphi \in F$ ve $a,b \in IR$ için

$$\phi(af + b\varphi) = A[af(\alpha) + b\varphi(\alpha)] = aAf(\alpha) + bA\varphi(\alpha)$$
$$= a\phi(f) + b\phi(\varphi)$$

Örnek 1.1.3 : $\psi(x)$, $[c,d]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $f \in F$ olmak üzere, ϕ fonksiyonelini $\phi(f) = \int_c^d f(x)\psi(x)dx$ olarak tanımlayalım. ϕ nin lineerliği,

$$\phi(af + b\varphi) = \int_c^d [af(x) + b\varphi(x)]\psi(x)dx = a\int_c^d f(x)\psi(x)dx + b\int_c^d \varphi(x)\psi(x)dx$$
$$= a\phi(f) + b\phi(\varphi)$$

eşitliğinden görülmektedir.

Tanım 1.1.7: Bir ϕ fonksiyoneli, her bir pozitif $f(x)$ fonksiyonu için $\phi(f) \geq 0$ eşitsizliğini sağladığında ϕ fonksiyoneline '*pozitif fonksiyonel* ' denir (Bir fonksiyon eğer negatif değerler almıyorsa sıfır yada pozitif'dir). Lineer pozitif fonksiyoneller monoton artandır. Gerçekten, her x için,

$$f_1(x) \geq f_2(x) \ \text{ ise } \ f_1(x) - f_2(x) \geq 0$$

dır. ϕ pozitif fonksiyonel olduğundan $\phi(f_1(x) - f_2(x)) \geq 0$ olur ve lineerlikten dolayı $\phi(f_1(x)) - \phi(f_2(x)) \geq 0$ olduğundan,

$$\phi(f_1(x)) \geq \phi(f_2(x))$$

sağlanır.

Örnek 1.1.4 : $\phi(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ fonksiyoneli yalnız ve yalnız $A_k \geq 0$ (k=0,1,…,n) ise pozitifdir. Gerçekten $A_k \geq 0$ (k=0,1,…,n) ve $f(x) \geq 0$ ise,

$$\phi(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \geq 0$$

olur. Fakat, herhangi bir k_0 için, $1 \leq k_0 \leq n$ ve $A_{k_0} < 0$ olduğunda

ϕ fonksiyoneli pozitif olamaz. Bunu görmek için,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = x_{k_0} \\ 0 & x \neq x_{k_0} \end{cases}$$

biçiminde bir f fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon için,

$$\phi(f) = A_{k_0} f(x_{k_0}) = A_{k_0} < 0$$

dır ve ϕ fonksiyoneli pozitif f fonksiyonuna negatif A_{k_0} sayısını karşılık getirir. Dolayısıyla ϕ pozitif fonksiyonel değildir.

Tanım 1.1.8: $a \in \overline{IR}$, ($a \in IR$, $a = \pm\infty$ veya $a = \infty$) $X \subset IR$ kümesinin bir limit noktası ve ele alınacak tüm fonksiyonların X kümesi üzerinde tanımlı (a noktasında tanımlı olmayabilir de) oldukları kabul edilir.

Eğer $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ ise f 'ye, $x \in X$, $x \to a$ iken " *sonsuz küçük* " fonksiyon denir. Ve $f(x) = o(1)$ şeklinde gösterilir.

Eğer $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$ ise f 'ye, $x \in X$, $x \to a$ iken " *sonsuz büyük* " fonksiyon denir. Ve $f(x) = O(1)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.9: $A \subset IR$ olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisi A üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için $\exists n_0$ öyle ki $\forall n > n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Burada sözü edilen n_0 sayısı hem ε ' na hemde x noktasına bağlıdır.

$A \subset IR$ olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisi A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0$ öyle ki $\forall n \geq n_0$ ve $\forall x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Burada sözü edilen n_0 sayısı sadece ε ' na bağlı olup, x noktalarından bağımsızdır.

Tanım 1.1.10: $(a,b) \subset IR$ açık bir aralık ve f fonksiyonuda (a,b) den IR ye bir fonksiyon olsun. $t, x \in (a,b)$ olmak üzere,

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = A(x) \tag{1.3}$$

sonlu limiti varsa, bu $A(x)$ sayısına ' *f fonksiyonunun x noktasındaki türevi* ' denir ve $f'(x)$ (veya $Df(x)$ yada $\dfrac{df(x)}{dx}$) ile gösterilir. Bu durumda, f fonksiyonu x noktasında türevlenebilirdir denir ve

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \tag{1.4}$$

veya $t = x + h$ dersek, $t \to x \Leftrightarrow h \to 0$ olacağından,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.5}$$

şeklinde gösterilir.

Eğer $f : (a,b) \to IR$ fonksiyonu $E \subset (a,b)$ kümesinin her noktasında türevlenebilir ise, $y = f(x)$ fonksiyonu E üzerinde türevlenebilirdir denir. Eğer $f : [a,b] \to IR$ fonksiyonu için $x \in (a,b)$ olmak üzere,

$$\lim_{t \to x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \qquad \text{ve} \qquad \lim_{t \to x^-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

limitleri varsa, bu limitler sırası ile f nin x noktasındaki sağ ve sol türevi denir ve $f'(x^+)$, $f'(x^-)$ ile gösterilir. Bu durumda, f fonksiyonu sırası ile sağdan ve soldan türevlenebilirdir denir ve

$$f'(x^+) = \lim_{t \to x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad \text{veya} \quad f'(x^-) = \lim_{t \to x^-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \tag{1.6}$$

veya

$$f'(x^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{ve} \quad f'(x^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.7}$$

şeklinde gösterilir.

Şimdi de tezimizin içeriği ile ilgili daha önce yapılmış olan çalışmaları verelim.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Korovkin (1960) tarafından Nikolsky teoreminde operatörün 1. türeve sağdan ve soldan yaklaşımı incelenmiştir.

Teorem 2.1: Eğer $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında sol ve sağ türevleri varsa o zaman,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n(f;x_0)-f(x_0)}{F_n\left(\left|\sin\frac{t}{2}\right|;0\right)}=f'_+(x_0)-f'_-(x_0) \qquad (2.1)$$

dir. (S. M. Nikolsky)

İspat : Teoremde verilenlere göre,

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t+x_0)-f(x_0)}{t}=f'_+(x_0) \qquad \text{ve} \qquad \lim_{t\to 0^-}\frac{f(t+x_0)-f(x_0)}{t}=f'_-(x_0)$$

dir.

$$\varphi(t)=\frac{f(t+x_0)-f(x_0-t)}{2}-f(x_0) \quad \text{ve} \quad \psi(t)=\frac{f(t+x_0)+f(x_0-t)}{2}$$

şeklinde iki fonksiyon alalım. Buradan,

$$\varphi(t)+\psi(t)=f(t+x_0)-f(x_0)$$

elde edilir. Şimdi,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|}=f'_+(x_0)-f'_-(x_0) \qquad (2.2)$$

ifadesini göstermeliyiz. Soldan türevine bakalım.

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{\varphi(t)}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|}=\lim_{t\to 0^-}\frac{\varphi(t)}{-\sin\frac{t}{2}}=\lim_{t\to 0^-}\frac{f(t+x_0)-f(x_0)}{t}.\frac{t}{-\sin\frac{t}{2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{t\to 0^-}\frac{f(t+x_0)-f(x_0)}{-t}.\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{f'_-(x_0).(-2)+f'_+(x_0).2\right\}=f'_+(x_0)-f'_-(x_0)$$

olur. Benzer şekilde $t \to 0^+$ içinde gösterebiliriz.

$$F_n(f;x_0)-f(x_0)=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x_0+t)-f(x_0)\right\}\frac{\sin^2(\frac{nt}{2})}{2\sin^2(\frac{t}{2})}dt$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\frac{\sin^2(\frac{nt}{2})}{2\sin^2(\frac{t}{2})}dt+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\frac{\sin^2(\frac{nt}{2})}{2\sin^2(\frac{t}{2})}dt$$

dir. Bu ifadedeki son integral sıfıra eşittir. Bundan dolayı,

$$F_n(f;x_0)-f(x_0)=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\frac{\sin^2(\frac{nt}{2})}{2\sin^2(\frac{t}{2})}dt = F_n(\varphi;0)$$

olur. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n(f;x_0)-f(x_0)}{F_n\left(\left|\sin\frac{t}{2}\right|;0\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_n(\varphi;0)}{F_n\left(\left|\sin\frac{t}{2}\right|;0\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|}=f'_+(x_0)-f'_-(x_0)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Gadjiev ve arkadaşları (1962) tarafından integral operatör ailelerinin birinci mertebeden adi türevlenebilen fonksiyonlarla yaklaşımının asimptotik değeri incelenmiştir.

Teorem 2.2 : $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasının komşuluğunda $(n-1)$ inci mertebeden türevlenebilir, x_0 noktasında ise n inci mertebeden $f_+^{(n)}(x_0)$, $f_-^{(n)}(x_0)$ sağ ve sol türevleri mevcut olsun. $x \in (-\infty,\infty)$ için $1 \le \varphi(x) < \infty$ olmak üzere

$$\left|f(x)\right| \le \varphi(x)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $\varphi(x)$ mevcut ve $K_\lambda(t)$ çekirdeği negatif olmayan, çift fonksiyon olsun. Aynı zamanda,

$$\int_{-\infty}^{\infty}K_\lambda(t)dt=1$$

eşitliği sağlansın. Eğer $\forall\delta > 0$ için,

$$\mu(t) = \sup_{\substack{-\infty<x<\infty \\ |y|<t}} \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)} < \infty$$

olmak üzere $\lambda \to \infty$ iken,

$$\int_{\delta}^{\infty} \mu(\alpha^{*} t)\Phi(t)K_{\lambda}(t)dt = o(\Delta_{\lambda})$$

sağlanıyorsa, bu takdirde,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{L_{\lambda}(f;x_0) - f(x_0)}{R_{n,\lambda}.\Delta_{\lambda}} = \frac{f_{+}^{n}(x_0) \pm f_{-}^{n}(x_0)}{n!}$$

eşitsizliği sağlanır. (Gadjiev ve arkadaşları, 1962)

Butzer ve Nessel (1971) tarafından,

Riemann türevi: $$f^{[n]}(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k (n,k) f(x_0 + (\frac{n}{2} - k)h)\right]$$

Peano türevi: $$f^{\langle n\rangle}(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{n!}{h^n}\left\{f(x_0 + h) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{h^k}{k!} l_k\right\}$$

Taylor türevi: $$f^{(n)}(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{n!}{h^n}\left[f(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h^k}{k!} f^{k}(x_0)\right]$$

genelleşmiş türevleri verilmiştir.

Feirlej ve Rempulska (1995) tarafından Gauss – Weierstrass singüler integrallerinin, C ‘ de ve L_P uzaylarının normunda yaklaşımı incelenmiştir.

Zeren, (2006) tarafından Schwartz anlamında 2. mertebeden türevlenebilir fonksiyonlara integral operatör aileleriyle yaklaşımı incelenmiştir.

Tanım 2.1 (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995): X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınmış herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa o takdirde X uzayında bir ‘*operatör’* tanımlanmıştır denir ve

$$g(x) = L(f(t);x) = L(f;x)$$

şeklinde gösterilir. X uzayına L operatörünün tanım bölgesi denir ve $X = D(L)$ ile gösterilir.

Bu durumda $g(x)=L(f;x)$, Y uzayının bir elemanı olur ve bu şekildeki g fonksiyonları kümesine L operatörünün değer kümesi denir. Bu küme $R(L)$ ile gösterilir. Buradan $R(L)\subset Y$ olduğu açıktır.

Lineer operatörler kümesi içinde çok önemli bir alt sınıf vardır ki o da pozitif operatörlerdir.

Kabul edelim ki $X^{+}=\{f\in X, f(x)\geq 0\}$, $Y^{+}=\{g\in Y, g(x)\geq 0\}$ olsun. Eğer X uzayında tanımlanmış L lineer operatörü X^{+} kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyor ise o takdirde L operatörüne "l*ineer pozitif operatör*" denir. L lineer pozitif operatörü için $LX^{+}\subset Y^{+}$ sağlanır. Yani $f(x)\geq 0$ olduğunda $L(f;x)\geq 0$ olur.O halde açıktır ki her x için $f(x)\leq g(x)$ olursa o takdirde $L(f;x)\leq L(g;x)$ olur ve dolayısıyla lineer pozitif operatörler monoton artandır.

Kolayca görebiliriz ki,

$$L_1(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f(a_k)P_k(x)$$

operatörü lineerdir ve bunun pozitif olabilmesi için gerek ve yeter koşul $P_k(x)$ in tüm x ve k değerleri için pozitif olmasıdır. Gerçekten de eğer $P_k(x)\geq 0$ olursa bu durumda $f(a_k)\geq 0$ olduğunda $L_1(f;x)\geq 0$ olur.

Şimdi,

$$L_2(f;x)=\int_a^b f(t)K(t,x)dt$$

lineer operatörünü göz önüne alalım ve kabul edelim ki $K(t,x)$, t değişkenine göre sürekli bir fonksiyon olsun. $K(t,x)$ fonksiyonuna L_2 operatörünün çekirdeği denir. L_2 operatörünün pozitif olabilmesi için gerek ve yeter koşul, çekirdeğinin pozitif fonksiyon olmasıdır. Yeterlik açıktır. Gerekliliği ispatlayalım.

Kabul edelim ki bir $t=t_0$ noktasında $K(t_0,x)<0$ olsun. Bu durumda K sürekli fonksiyon olmak üzere bir $[\alpha,\beta]$ küçük aralığı vardır ki bu aralıkta K fonksiyonu kendi işaretini korur.

Bu durumda,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [\alpha, \beta] \\ 1, & x \notin [a,b] - [\alpha, \beta] \end{cases}$$

fonksiyonu için,

$$L_2(f;x) = \int_{\alpha}^{\beta} K(t,x)dt < 0$$

yani L_2 pozitif operatör değildir.

Şimdi de kabul edelim ki L pozitif operatör olsun. Bu durumda,

$$|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Gerçekten her x için,

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

eşitsizliğinin sağlandığı açıktır. Bu durumda L operatörünün monoton özelliğinden yararlanarak,

$$-L(|f|;x) \leq L(f;x) \leq L(|f|;x)$$

$$|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$$

elde edilir.

Teorem 2.3 : Eğer L_n lineer pozitif operatörler dizisi $[a,b]$ aralığında,

$$L_n(1;x) \overset{\rightarrow}{\rightarrow} 1 \tag{2.3}$$

$$L_n(t;x) \overset{\rightarrow}{\rightarrow} x \tag{2.4}$$

$$L_n(t^2;x) \overset{\rightarrow}{\rightarrow} x^2 \tag{2.5}$$

koşullarını sağlıyorsa o takdirde $C(a,b)$ uzayında olan ve tüm reel eksende sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için n sonsuza gittiğinde;

$$L_n(f;x) \overset{\rightarrow}{\rightarrow} f(x), \qquad a \leq x \leq b$$

olur. **(**P.P.Korovkin, 1960**)**

İspat: f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğu için öyle bir M pozitif sayısı bulabiliriz ki tüm x ‘ ler için,

$$|f(x)| \leq M \tag{2.6}$$

sağlanır. $f \in C(a,b)$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulabiliriz ki $t \in (-\infty,\infty)$ ve $x \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda,

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.7}$$

olur. $x,t \in [a,b]$ olduğunda (2.7) eşitsizliği f fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli olduğu için gerçeklenir. $x \in [a,b]$, $t \notin [a,b]$ olduğunda ise (2.7) eşitsizliği f fonksiyonu a ve b noktalarında, sırasıyla soldan ve sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için gerçeklenir.

(2.6) ve (2.7) eşitsizliklerinden dolayı tüm $t \in (-\infty,\infty)$ ve $x \in [a,b]$ için,

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \tag{2.8}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Çünkü $|t-x| < \delta$ olduğunda (2.8) eşitsizliği (2.7) eşitsizliğinden dolayı $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2$ ifadesi pozitif olduğu için sağlanır.

$|t-x| \geq \delta$ olduğunda ise,

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$$

olacağından,

$$\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 2M$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda $\varepsilon > 0$ olduğu için (2.6) eşitsizliğinden (2.8) eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned}\|L_n(f;x) - f(x)\|_c &= \|L_n(f(t) - f(x);x) + f(x)L_n(1;x) - f(x)\|_c \\ &\leq \|L_n(|f(t) - f(x)|;x)\|_c + \|f\|_c \|L_n(1;x) - 1\|_c\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikteki ikinci terim $n \to \infty$ için (2.3) den ötürü sıfıra yakınsar. Yani,

$$\|f\|_c \|L_n(1;x) - 1\|_c \le \varepsilon_n \ , \qquad \varepsilon_n \to 0$$

dır.

O halde,

$$\|L_n(f;x) - f(x)\|_c \le \|L_n(|f(t) - f(x)|;x\|_c + \varepsilon_n \tag{2.9}$$

eşitsizliği doğrudur. Birinci terime bakılırsa (2.8) eşitsizliğinden dolayı,

$$L_n(|f(t) - f(x)|;x) \le \varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n((t-x)^2;x)$$

$$= \varepsilon[L_n(1;x) - 1] + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}[L_n(t^2;x) - 2xL_n(t;x) + x^2 L_n(1;x)]$$

$$= \varepsilon[L_n(1;x) - 1] + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\{[L_n(t^2;x) - x^2] - 2x[L_n(t;x) - x] + x^2[L_n(1;x) - 1]\}$$

elde ederiz. O halde,

$$\|L_n(|f(t) - f(x)|;x)\|_c \le C_1 \|L_n(t^2;x) - x^2\|_c + C_2 \|L_n(1;x) - 1\|_c$$

yazılabilir. (2.3), (2.4) ve (2.5) koşullarından ötürü $n \to \infty$ için,

$$\|L_n(|f(t) - f(x)|;x)\|_c \to 0$$

olur. Bu sonuç ve (2.9) eşitsizliğinden ,

$$\|L_n(f;x) - f(x)\|_c \to 0$$

elde ederiz. Bu da ispatımızı tamamlar.

Tanım 2.2 (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995): L lineer operatörü X uzayından Y uzayına dönüşüm yapıyor ve

$$\|L(f;x)\|_Y \le C\|f\|_X$$

eşitsizliğini gerçekliyorsa o takdirde L operatörüne ‘ *sınırlı operatör* ‘ denir. Bu C sabitlerinin en küçüğüne L operatörünün normu denir ve $\|L\|_{X \to Y}$ yada $\|L\|$ şeklinde gösterilir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Çalışmanın yapılmasında kaynak kitap ve makalelerden yararlanılacaktır. Konumuzla ilgili kitap ve makaleler değişik kütüphanelerde vardır. Gerekli olan literatür desteği Ankara da bulunan üniversite kütüphanelerinden, YÖK Dökümantasyon merkezinden ve Harran Üniversitesi Elektronik veri kaynaklarından ve de internet yardımıyla elde edilebilecek kitap ve makaleler ile temin edilmeğe çalışılacaktır. Korovkin (1960) Nikolsky teoreminde operatörün 1. türeve sağdan ve soldan yaklaşımını incelemiştir. Bizde tezimizde Nikolsky teoreminden faydalanacağız. Aynı zamanda Gadjiev ve arkadaşları (1962) tarafından integral operatör ailelerinin 1. mertebeden adi türevlenebilen fonksiyonlarla yaklaşımının asimptotik değeri incelenmiştir. Bizde tezimizde Gadjiev ve arkadaşları (1962) teoreminden yararlanacağız. Bununla birlikte özellikle 2006 yılında yayınlanan Zeren ve Hazar (2006) makalesi incelenip bu makalede kullanılan teknik ve yöntemlerin benzer şekilde genelleştirilmiş türevlere uygulanabilirliği araştırılmıştır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde öncelikle genelleşmiş türev (Taylor, Peano ve Riemann) kavramlarından bahsedeceğiz. Sonra bu türevlerin Adi türevle olan ilişkilerini örneklerle inceleyeceğiz. En sonda ise integral operatör aileleriyle bu genelleştirilmiş türevlere yaklaşımı ve asimptotik değerlerine bakacağız.

4.1. İntegral Operatör Aileleriyle Taylor Türevlerine Yaklaşımı ve Asimptotik Değeri

Tanım 4.1.1 (Butzer ve Nessel, 1971) **:** f , x_0 noktasının komşuluğunda tanımlansın. Eğer $f^{r-1}(x_0)$ adi türevi varsa,

$$f^{(r)}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{r!}{h^r}\left[f(x_0+h) - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{h^k}{k!} f^k(x_0) \right]$$

ifadesi, f *nin* r *inci mertebeden Taylor türevi* olarak adlandırılır.

Araştırmalarımız neticesinde aşağıdaki lemma 4.1.1 ve lemma 4.1.2 elde edilmiştir

Lemma 4.1.1: $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında birinci adi türevi varsa bu durumda birinci Taylor türevi de vardır ve bu türevler birbirine eşittir. Bu lemmanın tersi de doğrudur.

İspat : $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında birinci adi türevi varsa bu türev

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

şeklindedir. Bu türev aynı zamanda birinci Taylor türevidir.

Bu türev,

$$f^{(1)}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

şeklindedir. Dolayısıyla,

$$f'(x_0) = f^{(1)}(x_0)$$

dır.

Lemma 4.1.2 : $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında ikinci adi türevi varsa bu durumda ikinci Taylor türevi de vardır ve bu türevler birbirine eşittir. Bu lemmanın tersi doğru olmayabilir.

Yani $f''(x_0)$ varsa $f^{(2)}(x_0)$ vardır. Fakat $f^{(2)}(x_0)$ varsa $f''(x_0)$ olmayabilir.

İspat : $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında ki Taylor açılımı

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ...$$

şeklindedir. Yukarıda ki denklemde $x = x_0 + h$ yazılırsa,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{(f''(x_0) + \alpha)}{2!}h^2 \qquad h \to 0 \ , \ \alpha \to 0$$

elde edilir. Buradan,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h = \frac{(f''(x_0) + \alpha)}{2!}h^2$$

$$\frac{2}{h^2}\left[f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\right] = \lim_{h\to 0}\left(f''(x_0) + \alpha\right)$$

olduğundan,

$$f^{(2)}(x_0) = f''(x_0)$$

elde edilir.

Dolayısıyla herhangi bir fonksiyonun bir noktada ikinci adi türevi varsa ikinci Taylor türevi de vardır ve birbirine eşittir. Fakat bunun karşıtı doğru olmayabilir.

Örnek 4.1.1 : $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin x^{-2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında ikinci Taylor türevi var fakat ikinci adi türevi yoktur.

Bu lemma'lar vede çalışmalarımız sonucundan aşağıdaki teoremi ispatı ile birlikte verebiliriz.

Teorem 4.1.1. $f(x)$ fonksiyonu Taylor anlamında türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

$$L_\lambda(f;x_0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0+t)K_\lambda(t)dt$$

integral operatörler ailesini gözönüne alalım. Bununla birlikte,

$$\Delta_\lambda=\int_0^\infty \frac{t^4}{2}K_\lambda(t)dt\to 0 \quad , \quad (\lambda\to\infty)$$

olsun. Aynı zamanda çekirdek fonksiyonumuzda,

i. $K_\lambda(t)>0 \quad , \quad \lambda\geq 0$

ii. $K_\lambda(-t)=K_\lambda(t)$

iii. $\int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(t)dt=1$

koşullarını sağlasın. Bu durumda,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(t)dt=2\int_0^\infty K_\lambda(t)dt$$

olmak üzere,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)}{\Delta_\lambda}=f^{(2)}(x_0) \tag{4.1}$$

dır.

İspat : $L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)$ farkını göz önüne alalım.

$$L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)=\int_0^\infty \left[f(x_0+t)-2f(x_0)\right]K_\lambda(t)dt$$

$$=\int_0^\infty \left[f(x_0+t)-f(x_0)-tf'(x_0)+tf'(x_0)\right]K_\lambda(t)dt-\int_0^\infty f(x_0)K_\lambda(t)dt$$

$$=\int_0^\infty \frac{2}{t^2}\left[f(x_0+t)-f(x_0)-tf'(x_0)\right]\frac{t^2}{2}K_\lambda(t)dt+\int_0^\infty tf'(x_0)K_\lambda(t)dt$$

$$-\int_0^\infty f(x_0)K_\lambda(t)dt \tag{4.2}$$

Şimdi,

$$\alpha_\lambda(t) = \frac{\frac{2}{t^2}\left[f(x_0+t) - f(x_0) - tf'(x_0)\right]}{t^2} - f^{(2)}(x_0) \tag{4.3}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım.

Burada $t \to 0$ iken $\alpha_\lambda(t) \to 0$ dır.

Buradan,

$$\frac{2}{t^2}\left[f(x_0+t) - f(x_0) - tf'(x_0)\right] = t^2\alpha_\lambda(t) + t^2 f^{(2)}(x_0)$$

elde edilir. Bu ifade (4.2) da yerine yazılırsa,

$$L_\lambda(f, x_0) - f(x_0) = \int_0^\infty t^2\alpha_\lambda(t)\frac{t^2}{2}K_\lambda(t)dt + f^{(2)}(x_0)\int_0^\infty \frac{t^4}{2}K_\lambda(t)dt +$$

$$+ f'(x_0)\int_0^\infty tK_\lambda(t)dt - f(x_0)\int_0^\infty K_\lambda(t)dt$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi Peano türev kavramından bahsedip, integral operatör aileleriyle Peano türevlerine yaklaşımı ve asimptotik değerini verelim.

4.2. İntegral Operatör Aileleriyle Peano Türevlerine Yaklaşımı ve Asimptotik Değeri

Tanım 4.2.1 (Butzer and Nessel, 1971): $f(x)$, x_0 noktasının komşuluğunda tanımlansın. Eğer $1 \le k \le r-1$ olmak üzere öyle l_k katsayıları vardır ki x_0 noktasında f nin, r inci dereceden Peano bölüm türevi $h^{-r} \Diamond_h^r f(x_0)$, $h \to 0$ iken bir limiti varsa o zaman bu limite x_0 da f 'nin r inci mertebeden '*Peano türevi*' denir. Ve $f^{\langle r \rangle}(x_0)$ ile gösterilir.

$$f^{\langle r \rangle}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{r!}{h^r} \left\{ f(x_0 + h) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{h^k}{k!} l_k \right\}$$

Veya şu şekilde de bir tanım yapılabilir. Bir x_0 noktasının komşuluğunda tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu için, $\lim\limits_{t \to 0} \alpha(t) = 0$ olmak üzere,

$$f(x_0 + t) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!} t + \frac{\alpha_2}{2!} t^2 + \ldots + \frac{\alpha_r + \alpha(t)}{r!} t^r$$

biçiminde gösterilebilen $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında r inci mertebeden Peano türevi vardır denir ve bu türev α_r dir. Peano türevi, bildiğimiz adi türevden daha geneldir. Gerçekten bir x_0 noktasında $f^r(x_0)$ adi türevinin olması $f^{\langle r \rangle}(x_0)$ peano türevinin olmasını gerektirir. Fakat tersi doğru değildir. Yani Peano türev varsa adi türev olmayabilir.

Örnek 4.2.1 :
$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin x^{-2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu $x = 0$ noktasında 2 inci mertebeden adi türevi yok fakat 2 inci mertebeden Peano türevi vardır.

Çözüm: f fonksiyonunun 1 inci mertebeden adi türevi,

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin x^{-2} + x^3 \cos x^{-2}(-2x^{-3}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

şeklindedir.

f fonksiyonunun $x = 0$ noktasında ki 2 inci mertebeden Peano türevi ise,

$$f^{\langle 2\rangle}(0) = \lim_{h\to 0}\frac{2}{h^2}\left\{h^3 \sinh^{-2} - f(0) - h.f'(0)\right\}$$

şeklindedir. Burada $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 0$ dır. Dolayısıyla,

$$f^{\langle 2\rangle}(0) = \lim_{h\to 0} 2h \sinh^{-2} = 0$$

dır. Yani f fonksiyonunun $x = 0$ noktasında 2 inci mertebeden Peano türevi var ve sıfıra eşittir. Fakat f fonksiyonunun $x = 0$ noktasında 2 inci mertebeden adi türevi yoktur. Çünkü,

$$f''(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h^2 \sinh^{-2} - 2\cosh^{-2}}{h}$$

ifadesinin limiti mevcut değildir.

Aynı zamanda Peano türevi, Taylor türevinden de daha geneldir.

Örnek 4.2.2 : r, n$\in$ *IN* ve r, n$\geq$ 2 olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} x^{(r-1)(n+1)} \sin x^{-n} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 0$ noktasında [(r-1)(n+1)-1] inci mertebeden Peano türevi vardır. Fakat $x = 0$ noktasında (r+1) inci mertebeden Taylor türevi yoktur.

Teorem 4.2.1 (Zeren, 2002): $f(x)$ fonksiyonu bir x_0 noktasının komşuluğunda $(n-1)$ inci mertebeden Peano anlamında türevlenebilir, x_0 noktasında ise sağdan ve soldan n inci mertebeden α_n^+, α_n^- Peano türevleri mevcut olsun.

Eğer $\forall\delta > 0$ için $\mu(t) = \sup\limits_{\substack{-\infty\leq x\leq\infty \\ |y|<t}}\dfrac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)} < \infty$ olmak üzere $\lambda\to\infty$ iken

$$\int_{\delta}^{\infty}\mu(\alpha^* t)\Phi(t)K_\lambda(t)dt = o(\Delta_\lambda) \tag{4.4}$$

sağlansın. $R_{n,\lambda} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda}\alpha_{k,\lambda}^n$ ve $\lim\limits_{\lambda\to\infty} R_{n,\lambda} = 0$ koşuluyla,

$$\widetilde{\Delta}_{\lambda} = R_{n,\lambda}\Delta_{\lambda} = R_{n,\lambda}\int_{0}^{\infty}\Phi(t)K_{\lambda}(t)dt \tag{4.5}$$

olsun. Eğer $\forall\delta > 0$ için, $\mu(t) = \sup\limits_{\substack{-\infty\le x\le\infty \\ |y|<t}} \dfrac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)} < \infty$

olmak üzere $\lambda \to \infty$ iken,

$$\int_{\delta}^{\infty}\mu(\alpha^{*}t)\Phi(t)K_{\lambda}(t)dt = o(\widetilde{\Delta}_{\lambda}) \tag{4.6}$$

sağlanıyorsa bu takdirde,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{L_{\lambda}(f;x_0) - f(x_0)}{\widetilde{\Delta}_{\lambda}} = \frac{\alpha_n^{+} \pm \alpha_n^{-}}{n!} \tag{4.7}$$

dır. Burada $\pm$ işareti n nin tek ve çift olması durumuna göre değişir.

Not: Burada $R_{n,\lambda} = \infty$ olabilir mi?

$$\left|R_{n,\lambda}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}\alpha_{k,\lambda}^{n}\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|P_{k,\lambda}\right|\left|\alpha_{k,\lambda}\right|^{n} \le \alpha^{*}.\sum_{k=1}^{\infty}\left|P_{k,\lambda}\right| \le \alpha^{*}.\mu < \infty$$

olduğundan $R_{n,\lambda} = \infty$ olamaz.

İspat: $L_{\lambda}(f,x_0) - f(x_0)$ farkına bakalım.

$$\begin{aligned} L_{\lambda}(f,x_0) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}f(x_0+\alpha_{k,\lambda}t)\right]K_{\lambda}(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0}\left[\sum_{k=1}^{\infty}f(x_0+\alpha_{k,\lambda})\right]K_{\lambda}(t)dt + \int_{0}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}f(x_0+\alpha_{k,\lambda})\right]K_{\lambda}(t)dt \\ &= \int_{0}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}f(x_0+\alpha_{k,\lambda}) + f(x_0-\alpha_{k,\lambda}t)\right]K_{\lambda}(t)dt \qquad (4.8) \end{aligned}$$

dır. Ayrıca çekirdek fonksiyonunun özelliğinden dolayı,

$$2\int_{0}^{\infty}K_{\lambda}(t)dt = 1$$

dır ve bu eşitliğin her iki tarafını $f(x_0)$ ile çarparsak,

$$f(x_0) = \int_{0}^{\infty}2f(x_0)K_{\lambda}(t)dt$$

elde ederiz. Ayrıca, $\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} = 1$

olduğundan,

$$f(x_0) = \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} 2 f(x_0) \right] K_\lambda(t) \tag{4.9}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan,

$$L_\lambda(f, x_0) - f(x_0) = \int_0^{\infty} B_\lambda(t) K_\lambda(t) dt \tag{4.10}$$

eşitliğini elde ederiz.

Burada,

$$B_\lambda(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} \left[f(x_0 + \alpha_{k,\lambda} t) + f(x_0 - \alpha_{k,\lambda} t) - 2 f(x_0) \right] \tag{4.11}$$

biçimindedir. n = k-1 için,

$$f(x_0 + t) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!} t + \frac{\alpha_2}{2!} t^2 + \ldots + \frac{\alpha_r + \alpha(t)}{r!} t^r \tag{4.12}$$

eşitliğinde t yerine $\alpha_{k,\lambda} t$ yazarsak,

$$f(x_0 + \alpha_{k,\lambda} t) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!} \alpha_{k,\lambda} t + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{(n-1)!} \alpha_{k,\lambda}^{n-1} t^{n-1} + \frac{\alpha_n^+ + \beta_1(\alpha_{k,\lambda} t)}{n!} \alpha_{k,\lambda}^n t^n \tag{4.13}$$

eşitliğini elde ederiz, burada $t \to +0$ iken k ve λ ya göre düzgün yakınsak olmak üzere $\beta_1(\alpha_{k,\lambda} t) \to 0$ dır.

Yine (4.10) daki eşitlikte t yerine $-\alpha_{k,\lambda} t$ yazarsak,

$$f(x_0 - \alpha_{k,\lambda} t) = \alpha_0 - \frac{\alpha_1}{1!} \alpha_{k,\lambda} t + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{(n-1)!} \alpha_{k,\lambda}^{n-1} t^{n-1} - \frac{\alpha_n^- + \beta_2(\alpha_{k,\lambda} t)}{n!} \alpha_{k,\lambda}^n t^n \tag{4.14}$$

eşitliğini elde ederiz, burada $t \to +0$ iken k ve λ ya göre düzgün yakınsak olmak üzere $\beta_2(\alpha_{k,\lambda} t) \to 0$ dır.

(4.13) ve (4.14) eşitliklerini (4.11) de yerine koyarsak,

$$B_\lambda(t) = \frac{\alpha_n^+ - \alpha_n^-}{n!} R_{n,\lambda} t^n + \gamma_\lambda(t) t^n \tag{4.15}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $\gamma_\lambda(t)$,

$$\gamma_\lambda(t) = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda}\alpha_{k,\lambda}^n\left[\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t) - \beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)\right] \to 0 \qquad (t \to 0 \text{ iken})$$

dir.

Çünkü, hipotezden k ve λ ya göre düzgün yakınsak olarak,

$$\lim_{t\to+0}\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t) = \lim_{t\to+0}\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t) = 0$$

olur. Yani keyfi $\varepsilon > 0$ için k ve λ dan bağımsız öyle bir $\delta > 0$ var, öyle ki $|t| < \delta$ olduğunda $|\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)| < \varepsilon$ kalır.

Buna göre verilen pozitif ε a göre δ sayısını bularak şunları yazabiliriz.

$$|\gamma_\lambda(t)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda}\alpha_{k,\lambda}\left[\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t) - \beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)\right]\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}|P_{k,\lambda}|\alpha_{k,\lambda}\left[|\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)| + |\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)|\right] \leq 2\varepsilon\alpha^*\mu \leq c\varepsilon \qquad \text{(c sabit)}$$

Dolayısıyla biz gösterdik ki eğer $|t| < \delta$ ise keyfi $\varepsilon > 0$ verildiğinde k ve λ dan bağımsız öyle bir $\delta > 0$ bulabiliriz ki, $|t| \leq \delta$ iken,

$$|\gamma_\lambda(t)| < c\varepsilon \tag{4.16}$$

olur. Buda gösterir ki, λ ya göre düzgün yakınsak olmak üzere $t \to 0$ iken $\gamma_\lambda(t)$ nin limiti sıfırdır.

$$\sigma_\lambda(t) = \frac{B(t)}{\Phi(t)} - R_{n,\lambda}\frac{\alpha_n^+ - \alpha_n^-}{n!} \tag{4.17}$$

biçiminde $\sigma_\lambda(t)$ fonksiyonunu ele elalım. Burada,

$$C_0 = (\alpha^*)^n M\frac{\alpha_n^+ - \alpha_n^-}{n!}$$

olmak üzere (4.17) eşitliğinin mutlak değerini alırsak,

$$|\sigma_\lambda(t)| \leq \frac{|B_\lambda(t)|}{\Phi(t)} + C_0$$

elde ederiz.

(4.11) eşitliğini bu eşitsizlik de yerine yazıp $\varphi(x_0)$ ile çarpıp bölersek,

$$\left|\sigma_\lambda(t)\right| \le \frac{\varphi(x_0)}{\Phi(t)} \sum_{k=1}^{\infty} \left|P_{k,\lambda}\right| \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\left|f(x_0+\alpha_{k,\lambda}t)\right|}{\varphi(x_0+\alpha_{k,\lambda}t)} \dfrac{\varphi(x_0+\alpha_{k,\lambda}t)}{\varphi(x_0)} + \\ + \dfrac{\left|f(x_0-\alpha_{k,\lambda}t)\right|}{\varphi(x_0-\alpha_{k,\lambda}t)} \dfrac{\varphi(x_0-\alpha_{k,\lambda}t)}{\varphi(x_0)} + 2\dfrac{\left|f(x_0)\right|}{\varphi(x_0)} \end{array} \right\} + C_0$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$\mu(t) = \sup_{\substack{-\infty<x<\infty \\ |y|<t}} \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)} < \infty$$

olduğundan $\mu(t)$ fonksiyonu $[0,\infty)$ da azalmayandır çünkü t arttıkça tanım bölgesi büyür. Dolayısıyla,

$$\left|\sigma_\lambda(t)\right| \le \frac{\varphi(x_0)}{\Phi(t)} \sum_{k=1}^{\infty} \left|P_{k,\lambda}\right| \left[2\mu(\alpha_{k,\lambda}t)+2\right] + C_0$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Buradan,

$$\left|\sigma_\lambda(t)\right| \le \frac{4\varphi(x_0)}{\Phi(t)} \mu(\alpha^* t) M + C_0 \tag{4.18}$$

buluruz.

$$\lim_{t\to+0} \sigma_\lambda(t) = \lim_{t\to+0} \gamma_\lambda(t) = 0$$

limit tanımından, $\forall\varepsilon > 0$ için öyle $\delta > 0$ var, öyle ki, $0 \le t \le \delta$, $\lambda \ge 0$

$$\left|\sigma_\lambda(t)\right| < \varepsilon \tag{4.19}$$

kalır. $t > \delta$ iken,

$$\left|\sigma_\lambda(t)\right| \le \frac{4\varphi(x_0)}{\Phi(\delta)} \mu(\alpha^* t) M + C_0 \le C\mu(\alpha^* t) \tag{4.20}$$

olur.

Burada C, t ve λ a bağlı sabit sayıdır. $B_\lambda(t)$ yi (4.17) den çekip (4.10) da yerine yazarsak,

$$L_\lambda(f, x_0) - f(x_0) = \frac{\alpha_n^+ - \alpha_n^-}{n!} \widetilde{\Delta}_\lambda + \int_0^\infty \sigma_\lambda(t)\Phi(t)K_\lambda(t)dt \tag{4.21}$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi bu eşitliğin sağındaki integrali çözelim,

$$I(\lambda) = \int_0^\infty \sigma_\lambda(t)\Phi(t)K_\lambda(t)dt$$

$\delta > 0$ için integrali 0 dan δ ya, δ dan da ∞ a iki integralin toplamı şeklinde yazıp (4.19) ve (4.20) eşitsizliklerini kullanırsak,

$$\left|I(\lambda)\right| = \int_0^\delta \left|\sigma_\lambda(t)\right|\Phi(t)K_\lambda(t)dt + \int_\delta^\infty \left|\sigma_\lambda(t)\right|\Phi(t)K_\lambda(t)dt$$

$$< \varepsilon \int_0^\delta \Phi(t)K_\lambda(t)dt + C\int_\delta^\infty \mu(\alpha^*(t))\Phi(t)K_\lambda(t)dt$$

elde ederiz. (4.4) den,

$$\left|I(\lambda)\right| \le \varepsilon\Delta_\lambda + o(\Delta_\lambda)$$

yazabiliriz.

Bu son eşitsizliği (4.21) da yerine yazarsak ispat tamamlanmış olur.

Şimdi ise Riemann türev kavramını, integral operatör aileleriyle Riemann türevlerine yaklaşımı ve asimptotik değerini verelim.

4.3. İntegral Operatör Aileleriyle Riemann Türevlerine Yaklaşımı ve Asimptotik Değeri

Tanım 4.3.1 (Butzer ve Nessel, 1971) **:** $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlansın . x_0 noktasında *f nin n inci Riemann türevi*,

$$f^{[n]}(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k (n,k) f(x_0 + (\frac{n}{2} - k)h)\right]$$

şeklindedir. Limiti vardır ve sonludur.

Başka bir deyişle eğer x_0 noktasında $h \to 0$ ‘ a giderken f fonksiyonu bir limite sahip ise işte biz bu limiti x_0 noktasında f nin r inci Riemann türevi diye isimlendirip $f^{[r]}$ ile de göstereceğiz.

Riemann türevi , bildiğimiz adi türevden daha geneldir.
Gerçekten f nin r inci mertebeden adi türevi varsa, yani $f^{r}(x_0)$ varsa, r inci Riemann türevi yani $f^{[r]}(x_0)$ vardır. Fakat bunun tersi doğru değildir.
Araştırmalarımız sonucundan aşağıdaki lemma 4.3.1 ve lemma 4.3.2’ yi verebiliriz.

Lemma 4.3.1: $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında 1 inci mertebeden adi türevi varsa 1 inci mertebeden Riemann türevi de vardır ve türevler birbirine eşittir.

İspat: $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında 1 inci mertebeden adi türevi olsun.
$f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında Taylor açılımı,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ...$$

şeklindedir.

Bu açılımda $x = x_0 + \frac{h}{2}$ yazılırsa,

$$f(x_0 + \frac{h}{2}) = f(x_0) + \frac{(f'(x_0) + \alpha_1)}{1!}\frac{h}{2}, \qquad \alpha_1 \to 0 \qquad (4.22)$$

elde edilir.

Yine aynı açılımda $x = x_0 - \frac{h}{2}$ yazılırsa,

$$f(x_0 - \frac{h}{2}) = f(x_0) - \frac{(f'(x_0) + \alpha_2)}{1!}\frac{h}{2}, \qquad \alpha_2 \to 0 \qquad (4.23)$$

elde edilir. (4.23) eşitliği eksi ile çarpılıp (4.22) eşitliği ile toplanırsa,

$$f(x_0 + \frac{h}{2}) - f(x_0 - \frac{h}{2}) = [f'(x_0) + (\alpha_1 + \alpha_2)]h$$

elde edilir. Buradan $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ alınıp her iki taraf h ile bölünürse,

$$f'(x_0) + \alpha = \frac{1}{h}\left[f(x_0 + \frac{h}{2}) - f(x_0 - \frac{h}{2}) \right]$$

elde edilir. Limit tanımından, $h \to 0$ ve $\alpha \to 0$ olmak üzere,

$$\lim_{h\to 0}(f'(x_0) + \alpha) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f(x_0 + \frac{h}{2}) - f(x_0 - \frac{h}{2}) \right] = f^{[1]}(x_0)$$

demektir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 4.3.1: $f(x) = 2x$ fonksiyonunun x=0 noktasında hem 1 inci mertebeden adi türevi hem de 1 inci mertebeden Riemann türevi var ve birbirine eşittir.

Lemma 4.3.2: $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında 2 inci mertebeden adi türevi varsa 2 inci mertebeden Riemann türevi de vardır ve türevler birbirine eşittir. Fakat tersi doğru olmayabilir.

İspat : $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında 2 inci mertebeden adi türevi mevcut olsun. $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında Taylor açılımı,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

şeklindedir.Bu açılımda $x = x_0 + h$ yazılırsa,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{(f''(x_0) + \alpha_1)}{2!}h^2 \quad , \quad (\alpha_1 \to 0) \qquad (4.24)$$

elde edilir. Yine aynı açılımda $x = x_0 - h$ yazılırsa,

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{(f''(x_0) + \alpha_2)}{2!}h^2 \quad , \quad (\alpha_2 \to 0) \qquad (4.25)$$

elde edilir. Buradan (4.24) ve (4.25) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$f(x_0+h)+f(x_0-h)=2f(x_0)+(f''(x_0)+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})h^2 \quad , \quad (\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=\alpha\to 0)$$

elde edilir. Buradan da,

$$\frac{1}{h^2}[f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)]=(f''(x_0)+\alpha)$$

elde edilir.

Limit tanımından, $h\to 0$ ve $\alpha\to 0$ olmak üzere,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}[f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)]=\lim_{h\to 0}(f''(x_0)+\alpha)$$

olur. Bu ise $f''(x_0)$ varsa $f^{[n]}(x_0)$ vardır demektir. Fakat tersi doğru olmayabilir.

Örnek 4.3.2. $f(x)=\begin{cases} x\sin(x^{-2}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

fonksiyonunun $x=0$ da 2 inci mertebeden Riemann türevi var fakat 2 inci mertebeden adi türevi yoktur.

Şimdi ise bu lemma'lar ve de araştırmalarımız neticesinde teorem 4.3.1'i ispatı ile birlikte verebiliriz.

Teorem 4.3.1 : $f(x)$ fonksiyonunun $x=0$ noktasında 2 inci mertebeden adi türevi mevcut olsun. $K_\lambda(t)$ çekirdeği pozitif ve çift fonksiyon,

$$\int_{-\infty}^{\infty}K_\lambda(t)dt=1$$

olmak üzere aynı zamanda $\lambda\to\infty$ iken, $\Delta_\lambda=\int_0^{\infty}t^4K_\lambda(t)dt\to 0$ olsun.

Bu durumda,

$$L_\lambda(f,x_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x_0+t)K_\lambda(t)dt$$

olmak üzere,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)}{\Delta_\lambda}=f^{[2]}(x_0) \tag{4.26}$$

eşitliği doğrudur.

İspat: $L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)=\int_0^\infty [f(x_0+t)-2f(x_0)+f(x_0-t)]K_\lambda(t)dt$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{t^2}[f(x_0+t)-2f(x_0)+f(x_0-t)].t^2K_\lambda(t)dt \qquad (4.27)$$

elde edilir. Burada $t\to 0$ iken $\alpha_\lambda(t)\to 0$ olacak şekilde bir,

$$\alpha_\lambda(t)=\frac{\frac{1}{t^2}\left[f(x_0+t)-2f(x_0)+f(x_0-t)\right]}{t^2}-f^{[2]}(x_0)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Buradan,

$$\frac{1}{t^2}\left[f(x_0+t)-2f(x_0)+f(x_0-t)\right]=t^2\alpha_\lambda(t)+t^2f^{[2]}(x_0)$$

elde edilir.

Bu ifade (4.27) de yerine yazılırsa,

$$L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)=\int_0^\infty \left[\alpha_\lambda(t)t^2+f^{[2]}(x_0)t^2\right]t^2K_\lambda(t)dt$$

$$=\int_0^\infty \alpha_\lambda(t)t^4K_\lambda(t)dt+f^{[2]}(x_0)\int_0^\infty t^4K_\lambda(t)dt$$

elde edilir.

Buradan $\lambda\to\infty$ iken (4.26) eşitliği sağlanmış olur.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmalarda özellikle integral operatör aileleriyle genelleşmiş türevlere yaklaşımlarının asimptotik değerlerinin ne olabileceği konusu araştırıldı. Bundan dolayı öncelikle integral operatör ailelerini tanımak için biraz geçmişe gidip, P.P. Korovkin' nin bu konudaki çalışmalarına bakıldı. Bununla ilgili olarak Korovkin' in bir teoremi verildi. Daha sonra genelleştirilmiş türev kavramlarının ne olduğu, adi türev kavramıyla nasıl bir ilişki içinde olduğu örneklerle incelendi. Bu çalışmalardan görüldü ki Riemann türev, Peano türevinden daha geneldir. Aynı zamanda Peano türev ise Taylor türevinden daha geneldir. Tabi bu genelleştirilmiş türevler ise adi türevden daha geneldir. Son olarak bu integral operatör ailelerinin genelleşmiş Taylor, Peano, Riemann türevlere yaklaşımları ve asimptotik değerleri incelendi.

KAYNAKLAR

ALTOMARE, F. and CAMPITI, M. 1994. Korovkin Type Approximation Theory and its Application, Walter de Gruyter, Berlin and New York.

BUTZER, P.L., 1960. Representation and Approximation of Function By General Singular Integrals, Proceeding Konikel. Acad. Wet 63, Nederland.

BUTZER, P.L. and NESSEL, R.J., 1971. Fourier Analysis and Approximation, Academic Pres, 555p, New York and London.

GADJİEV, A.D., 1962. On Asymptotic Values of Approximation of Derivatives of functions By Derivatives of Families of Linear Operators.Izvestiya Acad. of Sci. of Azebaijan , 6:15-24.

GADJİEV, A. D., DJIAFAROV, A.S. and LABSKER, L.G., 1962. On Asymtotic Value of Approximation of Functions By Certain Families of Integral Operators, Izvestiya Acad. Sci. of The Azerbaijan., 3:19-28. In Russian.

HACISALİHOĞLU, H. ve HACIYEV, A., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. Ankara, 100s, Ankara.

KOROVKIN, P.P., 1960. Linear Positive Operators and Approximation Theory. Hindustan Publishing Corp., 222pp, Hindustan.

STEIN, E. M., 1993. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Univ. Pres., 289pp, The United States of America.

ZEREN, Y., 2006. Approximation of Schwartz Differentiable Functions of Several Variables By The Sequence of Integral Operators. Khazar Journal of mathematics, 1: 73-78.

ZEREN, Y., 2002. İntegral Operatör Aileleriyle Genelleşmiş Türevlere Yaklaşımın Asimptotik Değeri. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi. Ankara, 50s.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Şanlıurfa'nın Ceylanpınar ilçesinde doğdu. İlk, Orta ve Lise öğrenimini Ceylanpınar'da tamamladı. 1997 yılında girdiği Pamukkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2003 yılında Matematikçi Unvanı ile mezun oldu. Aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığı'nda Matematik Öğretmeni olarak Ceylanpınar Lisesi'ne atandı. Halen bu görevine aynı yerde devam etmektedir. Evli ve bir çocuk babasıdır.

ÖZET

Birinci bölümde tez için gerekli temel tanım ve teoremler fazla detaya girilmeden verilmiştir. İkinci bölümde tezin konusu ve içerikle ilgili daha önce yapılan çalışmalar verilmiştir. Bu çalışmalar tanım ve teoremler yardımıyla verilmiştir. Korovkin'nin bu konudaki teoremi bize çok önemli bilgi kaynağı olmuştur. Üçüncü bölümde yapacağımız çalışmaların yöntem ve tekniği üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölüm de ise asıl çalışmamız olan integral operatör ailelerinin genelleşmiş türevlere olan yaklaşımları ve asimptotik değerleri incelenmiştir. Son bölümümüzde ise bu çalışmadan elde edilen sonuçlar ve önerilere yer verilmiştir.

SUMMARY

In the first chapter, definitions and theorems are given without details that will be needed for the thesis. In the second chapter, the previous studies are given. These studies are given by using definitions and theorems. Korovkin's theorem is very important tool for the thesis that it has become source of information. The chapter three is devoted to the material and methods used in the thesis. In chapter four, the results of the research and discussion section are given and approximation to the Taylor, Peano and Riemann Derivatives by integral operator families and their asymptotic values are investigated. In the final chapter results and suggestions are given.