T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ERGODİK TEOREMLER ve MAKSİMAL EŞİTSİZLİK

Müzeyyen PADAK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2009

T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ERGODİK TEOREMLER ve MAKSİMAL EŞİTSİZLİK

Müzeyyen PADAK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2009

Doç. Dr. Seyit TEMİR danışmanlığında, Müzeyyen PADAK'ın hazırladığı "Ergodik teoremler ve maksimal eşitsizlik" konulu bu çalışma 19/06/ 2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Seyit TEMİR

Üye : Doç. Dr. Vatan KARAKAYA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Aydın İZGİ

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım

Prof. Dr. İbrahim BOLAT
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

ÖZ

Yüksek Lisans Tezi

ERGODİK TEOREMLER ve MAKSİMAL EŞİTSİZLİK

Müzeyyen PADAK

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Seyit TEMİR
Yıl: 2009, Sayfa: 72

$\left(X,\mathscr{A},\mu,T\right)$ dinamik sistemi üzerindeki $A_n f\left(x\right)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right)$ ortalamasının yakınsaklığı ergodik teorinin temel bir sorusu olup konunun araştırılması 1931'den beri devam etmektedir. Ergodik teorinin iki önemli sonucu ortalama ve noktasal ergodik teoremlerdir. Bu teoremlerin genelleştirilmesi ve genişlemesi devam etmekte olup güncelliğini korumaktadır. Ergodik teorinin, analizin ve olasılık teorinin temel yakınsaklık problemlerinin çoğu maksimal eşitsizlik teknikleriyle ispat edilebilir. Maksimal eşitsizliğin yakınsaklık teoremini nasıl ürettiğini tam olarak göstermek için noktasal ergodik teoremin ispatına bakmak gerekir. Ergodik teoride belirlenen bir çok açık problemin çözülmesi son zamanlarda bir çok yazar tarafından ele alınmış ve hemen hemen her yerde yakınsaklığının gerçeklenmesi zor bir çalışma olduğundan maksimal eşitsizliğin $A_n f\left(x\right)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right)$ ortalamasının yakınsaklığını gerçeklediği gösterilmeye çalışılmıştır. Noktasal ergodik teoremin ispatı maksimal ergodik teoremin bir sonucu olarak verildiğinden bu çalışmada maksimal ergodik teorem ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Calderon-Zygmund ve Kakutani ayrışım metotları kullanılarak maksimal ergodik teoremin ispatı ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu ayrışım metotları yardımıyla maksimal fonksiyonun integrallenebilirliği ve hemen hemen her yerde birbirine eşit olan ergodik maksimal fonksiyonların durumu göz önüne alınmıştır. Ayrıca, ergodik kare fonksiyonların maksimal eşitsizliği gerçeklediği ve hareketli ortalamaya göre kare fonksiyonların integrallenebilirliği araştırılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Maksimal Eşitsizlik, Ergodik Teoremler, Maksimal Fonksiyonlar, Kare Fonksiyonlar

ABSTRACT

Master Thesis

ERGODIC THEOREMS AND MAXIMAL INEQUALITY

Müzeyyen PADAK

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Seyit TEMİR
Year: 2009, Page: 72

The average convergence of $A_n f\left(x\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right)$ on the dynamic system $\left(X,\mathscr{A},\mu,T\right)$ is the basic quesiton of ergodic theory. The research of this subject has been proceeding since 1931. The two important results of the ergodic theory are mean and pointwise ergodic thoerems.The generalization and the extension of these theroms have been continuing and keeping their currency. The most of the basic convergence problems of ergodic theory, analysis and probability theory can be proven by maximal inequality techniques. It is necessary to look the proof of pointwise ergodic theorem in order to show exactly how the maximal inequality produces convergence theorem. The solution of most open problems determined in ergodic theory were recently handled by most author and tried to show the yield of convergence of $A_n f\left(x\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right)$ by maximal inequality since its yield of almost everywhere convergence is a diffucult study. As the proof of pointwise ergodic theorem is given as the result of maximal ergodic theorem, in this study, maximal ergodic theorem is handled as in detailed. It was investigated the maximal ergodic theorem's proof as in detailed by using Calderon-Zygmund and Kakutani decomposition methods. The integrability and the case of almost everywhere being equal ergodic maximal functions is handled by the help of these decomposition methods. Furthermore; the yield of maximal inequality by ergodic square functions and the integrability of square functions according to moving averages are researched.

KEY WORDS : Maksimal Inequality, Ergodic Theorems, Maximal Functions,
Square Functions

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında benden desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerinden yaralandığım saygıdeğer hocam Doç. Dr. Seyit Temir'e, bana yeni ufukların kapısını aralamamda her türlü desteği veren anneanneme, varlıklarını her zaman yanımda hissettiğim aileme, tez sürecinde bana her anlamda destek olan eşim Arş. Gör. Ali Serol Ertürk'e teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

$(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ bir dinamik sistem olmak üzere, $A_n f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right)$ ortalamasının yakınsaklığı 1931'de Birkhoff ve von Neumann tarafından ispat edilmiştir. Bu iki çalışmadan sonra bu konuyla ilgili genelleştirmeler yapılmıştır (Petersen (1983), Walters (1982), Krengel (1985)).

1939 yılında Yosida ve Kakutani, Birkhoff ergodik teoreminden maksimal ergodik teoreminin ispatını yaptılar. Daha sonra, Yosida ve Kakutani'nin maksimal ergodik teoremine denk ergodik teoremler düşünüldü. 1965'de Garsia, maksimal ergodik teoremin çok kısa bir sonucunu ispatladı (Garsia (1970), Petersen (1983)) .

Jones (1977), Kakutani ve Calderon-Zygmund ayrışımlarını, ergodik teoride bilinen sonuçları ispatlamak için kullanmış, ergodik maksimal fonksiyon ve kare fonksiyonlarla ilgili birçok sonuç elde etmiştir.

Rosenblatt ve Wierdl (1992) yeni ortalamalar ve maksimal eşitsizlik arasında farklı örnekleri içeren birçok önerme ve uygulamalar kurmuşlardır.

Ornstein (1971) maksimal fonksiyonun integrallenebilirliğini açıklamaktadır.

Ergodik teori içindeki ortalamaların davranışının birçoğu, özel bir olayın oluş zamanının sayısını hesaplama problemidir. Jones ve arkadaşları (1999), ortalamaların birçok davranışlarını eşitsizlikler ve bunlarla bağlantılı konular için incelemişlerdir. Burada, hareketli ortalamaya göre kare fonksiyonunun hemen hemen her yerde sonlu olduğunu ve integrallenebilirliğini incelenmiştir.

Ephremidze (1995), herhangi ölçülebilir fonksiyonların simetrik (sağ-sol taraflı) maksimal fonksiyonların integrallenebilirliğini göstermiştir. Benzer olarak, ergodik maksimal fonksiyonların da integrallenebilirliğini ispatlamıştır. Ephremidze

(1996) herhangi integrallenebilir iki fonksiyonun maksimal fonksiyonları eşit olduğunda, bu iki fonksiyonun hemen hemen heryerde eşit olduğunu göstermiştir. Ephremidze (2002)'de de, herhangi integrallenebilir iki fonksiyonun ergodik maksimal fonksiyonları eşit olduğunda bu iki fonksiyonun hemen hemen her yerde eşit olduğunu göstermiştir. Jones (2003), Ephremidze'nin gösterdiği bu sonucu, Kakutani ayrışımını kullanarak daha farklı bir ispatını vermiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Ölçüm Uzayları

Tanım 2.1.1. X boştan farklı bir küme ve $P(X)$, X'in tüm alt kümelerinin bir sınıfı olsun. $\mathscr{A} \subset P(X)$ aşağıdaki şartları sağlarsa $\mathscr{A}$'ya halka denir.

(i) $\forall A, B \in \mathscr{A}$ için $A \cup B \in \mathscr{A}$.

(ii) $\forall A, B \in \mathscr{A}$ için $A \cap B \in \mathscr{A}$.

Tanım 2.1.2. Eğer $\mathscr{A} \subset P(X)$ aşağıdaki şartları sağlarsa $\mathscr{A}$'ya yarı halka denir.

(i) $\forall A, B \in \mathscr{A}$ için $A \cap B \in \mathscr{A}$.

(ii) Herhangi $A,\ A_1 \in \mathscr{A}$ ve $A_1 \subset A$ için $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ olacak şekilde $A_2, A_3, \ldots A_n$ vardır ve $\forall k \neq j$ için $A_k \cap A_j \neq \varnothing$'dir.

Tanım 2.1.3. X bir küme ve $\mathscr{A}$, X'in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa $\mathscr{A}$'ya cebir denir.

(i) $X \in \mathscr{A}$.

(ii) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^t \in \mathscr{A}$.

(iii) $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ için $A_k \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{A}$

Eğer (i) ve (ii) ile birlikte, $k \geq 1$ için $A_k \in \mathcal{A}$ iken $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ olursa $\mathcal{A}$ 'ya $\sigma - cebir$ denir.

Tanım 2.1.4. X bir küme ve $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ-cebir olsun. $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay, $\mathcal{A}$ 'daki her bir kümeye de $\mathcal{A}$ - ölçülebilir küme (veya kısaca ölçülebilir küme) denir.

Tanım 2.1.5. X keyfi bir küme, $\mathcal{A} \subset P(X)$ bir cebir olsun. $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ dönüşümü için aşağıdaki şartlar sağlanırsa μ dönüşümüne sonlu toplamsal ölçüm denir.

(i) $\forall A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$.

(ii) $k = 1, 2, \ldots, n$ için $A_k \in \mathcal{A}$ ve A_k kümeleri ikişer ikişer ayrık olmak üzere,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Eğer (i) ile birlikte, X 'in $(A_k)_{k\geq 1}$ ayrık alt kümelerinin ailesi için $A_k \in \mathcal{A}$, $\forall k \neq j$ için $A_k \cap A_j = \varnothing$ ve $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ ise ve $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ özelliği sağlanırsa μ dönüşümüne $\sigma - toplamsal\ ölçüm$ denir.

Tanım 2.1.6. X keyfi bir küme, $\mathcal{A}$, X 'in alt kümelerinin bir cebiri olsun. Eğer $\mu(X) < \infty$ ise μ 'ye sonlu ölçüm denir.

Bir sonlu ölçüm için $\mu(X) = 1$ ise μ 'ye olasılık ölçümü denir.

Tanım 2.1.7. μ, bir sonsuz ölçüm olsun. $X=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ olacak şekilde $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots$ kümelerinin sayılabilir sayıdaki ayrışımıyla X elde edilsin. $k=1,\ 2,\ \ldots$ için $\mu\left(A_k\right)<\infty$ ise μ'ye $\sigma-$sonlu ölçüm denir.

Örnek 2.1.1. Reel sayılar kümesi üzerinde alışılmış μ ölçümü $\sigma-$sonludur. Çünkü $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $\mathbb{R}=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\left[k,k+1\right)$ ve $\mu\left(\left[k,k+1\right)\right)=1$ olduğundan μ ölçümü $\sigma-$sonludur.

Tanım 2.1.8. X keyfi bir küme, $\mathscr{A}$, X'in alt kümelerinin bir cebiri ve μ, $\mathscr{A}$ üzerinde bir ölçüm olmak üzere $\left(X,\mathscr{A},\mu\right)$ üçlüsüne bir ölçüm uzayı denir.

Tanım 2.1.9. Eğer $\mu\left(X\right)=1$ ise $\left(X,\mathscr{A},\mu\right)$'ye olasılık ölçüm uzayı denir.

Tanım 2.1.10. $\left(X,\mathscr{A},\mu\right)$ bir ölçüm uzayı olsun. Bu ölçüm uzayında ölçümü sıfır olan her kümenin herhangi bir alt kümesi ölçülebilir ise μ ölçümü tamdır. Yani,

$A\subset B\in\mathscr{A}$ ve $\mu\left(B\right)=0$ iken $A\in\mathscr{A}$ ise $\left(X,\mathscr{A},\mu\right)$ tamdır.

Tanım 2.1.11. $\left(X,\mathscr{A},\mu\right)$ ölçüm uzayı olmak üzere $A\subset\mathscr{A}$ için $\mu\left(A\right)>0$ olduğunda $0<\mu\left(E\right)<\mu\left(A\right)$ olacak şekilde $E\subset A$ varsa μ dönüşümüne atomik olmayan ölçüm denir.

Tanım 2.1.12. μ atomik olmayan ölçüm olmak üzere $\left(X,\mathscr{A},\mu\right)$'ye atomik olmayan ölçüm uzayı denir.

Tanım 2.1.13. $\left(X,\mathscr{A},\mu\right)$ bir ölçüm uzayı olsun. Eğer bir önerme ölçüsü sıfır olan bir küme veya kendisi $\mathscr{A}$'ya ait olmadığında, sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanan bir kümenin tümleyeni üzerinde doğru ise, o önerme hemen hemen her yerde doğrudur denir. Yani, $p(x)$ önermesinin doğru olmadığı x noktalarının kümesi sıfır ölçülü bir küme veya sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanıyorsa $p(x)$ önermesi hemen hemen her x için doğrudur denir. Bu, h.h.h. x için doğrudur şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.14. X boştan farklı bir küme ve $\zeta \subset P(X)$ olsun. ζ aşağıdaki şartları sağlarsa ζ 'ya bir topoloji denir.

(i) $X,\ \varnothing \in \zeta$.

(ii) ζ ailesinin herhangi bir alt ailesinin birleşimi ζ ailesinin bir elemanıdır.

(iii) ζ ailesine ait her sonlu sayıdaki kümenin kesişimi ζ ailesinin bir elemanıdır.

Tanım 2.1.15. X bir topolojik uzay olmak üzere, X 'in açık alt kümeleri tarafından üretilen σ - cebire X in Borel σ - cebiri denir. X 'in Borel σ - cebirine ait kümeler X 'in Borel kümeleri diye adlandırılır.

Teorem 2.1.1. $\mathscr{A}$, $\mathbb{R}^n$ 'nin Borel σ-cebiri olsun. Her açık $A=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\ldots\times(a_n,b_n)\in\mathscr{A}$ için $\lambda(A)=(b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n)$ olacak şekilde bir tek $\lambda:\mathscr{A}\to[0,\infty]$ ölçümü vardır. Bu ölçüme Lebesque ölçümü denir (Mane, 1987).

Tanım 2.1.16. $(X,\mathscr{A})$ ve $(Y,\mathscr{B})$ iki ölçülebilir uzay olsun ve $f:X\to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall A\in\mathscr{B}$ için $f^{-1}(A)\in\mathscr{A}$ oluyorsa f 'ye ölçülebilir fonksiyon denir.

Tanım 2.1.17. $(X,\mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A\in\mathcal{A}$ olsun. $f:A\to[-\infty,\infty]$ fonksiyonu ölçülebilirdir $\Leftrightarrow\forall a\in\mathbb{R}$ için $f^{-1}((a,\infty])=\{x\in X : f(x)>a\}\in\mathcal{A}$.

X üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli $\mathcal{A}$–ölçülebilir bütün fonksiyonların kümesi $M(X,\mathcal{A})$ ile, $M(X,\mathcal{A})$’daki negatif olmayan fonksiyonların kümesi ise $M^{+}(X,\mathcal{A})$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.18. $(X,\mathcal{A},\mu)$ ve $(Y,\mathcal{B},\eta)$ iki ölçüm uzayı olmak üzere $T:X\to Y$ ölçülebilir dönüşüm olsun. Eğer $\forall A\in\mathcal{B}$ için $\eta(A)=\mu(T^{-1}(A))$ oluyorsa T ’ye ölçümü koruyan dönüşüm denir.

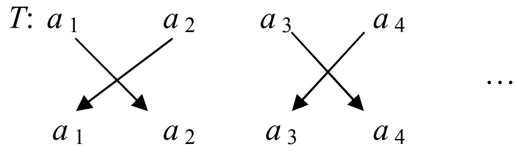
Örnek 2.1.2. $X=\{a,b,c\}$ olsun. X üzerinde $P(X)$ bir σ-cebirdir.

$\mu(\{a\})=\frac{1}{3}$, $\mu(\{b\})=\frac{1}{3}$, $\mu(\{c\})=\frac{1}{3}$ olsun.

$$\begin{aligned} T : X &\to X \\ a &\to b \\ b &\to c \\ c &\to a \end{aligned}$$

şeklindeki dönüşüm ölçülebilirdir ve ölçümü korur. Çünkü $\forall A\in P(X)$ için $\mu(A)=\mu(T^{-1}(A))$’dir.

Örnek 2.1.3. $X=\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\}$, $\mathcal{A}=P(X)$ ve $\mu(\{a_k\})=\frac{1}{2^k}$ olsun. $T:X\to X$ dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlansın.



$$\begin{aligned} T &: X \to X \\ a_{2k} &\to a_{2k-1} \\ a_{2k-1} &\to a_{2k} \end{aligned}$$

T dönüşümü ölçülebilirdir fakat ölçümü korumaz. Çünkü $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}\in P(X)$ için

$$\mu(A)=\mu(\{a_1,\ a_2,\ a_3\})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8},$$

$$\mu(T^{-1}A)=\mu(\{a_1,\ a_2,\ a_4\})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}=\frac{13}{16}$$

olur.

$\mu(A)\neq\mu(T^{-1}A)$ olduğundan T dönüşümünün ölçümü korumadığı görülür.

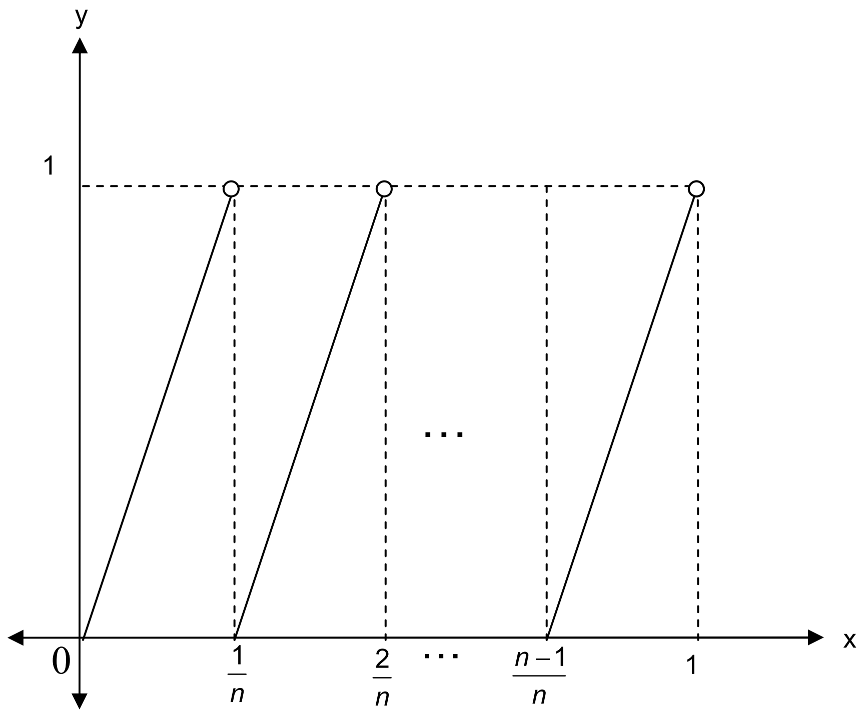
Örnek 2.1.4. $X=[0,1),\ T:X\to X$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$Tx=2x \pmod 1=\begin{cases} 2x & ,0\le x<\frac{1}{2} \\ 2x-1 & ,\frac{1}{2}\le x<1 \end{cases}$$

T, 2-adic dönüşümü ölçümü korur. Genel anlamda $n\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$Tx = \begin{cases} nx & , \ 0 \le x < \dfrac{1}{n} \\ nx - 1 & , \ \dfrac{1}{n} \le x < \dfrac{2}{n} \\ \vdots & \qquad \vdots \\ nx - (n-1) & , \ \dfrac{n-1}{n} \le x < 1 \end{cases}$$

n-adic dönüşümü ölçümü korur. T n-adic dönüşümünün grafiği Şekil 2.1.'deki gibidir.



Şekil 2.1. T n-adic dönüşümünün grafiği

Şimdi T 'nin ölçümü koruduğunu göstermek için $A = [a,b) \subset [0,1)$ kümesi alınsın.

$\mu(A) = b - a$ 'dır.

A kümesinin ters görüntüsü bulunup ölçümü alınırsa,

$$T^{-1}(A)=\left[\frac{a}{n},\frac{b}{n}\right)\cup\left[\frac{a+1}{n},\frac{b+1}{n}\right)\cup\cdots\cup\left[\frac{a+(n-1)}{n},\frac{b+(n-1)}{n}\right)$$

ve

$$\mu\left(T^{-1}A\right)=\mu\left(\left[\frac{a}{n},\frac{b}{n}\right)\cup\left[\frac{a+1}{n},\frac{b+1}{n}\right)\cup\cdots\cup\left[\frac{a+(n-1)}{n},\frac{b+(n-1)}{n}\right)\right)$$

$$=\mu\left(\left[\frac{a}{n},\frac{b}{n}\right)\right)+\mu\left(\left[\frac{a+1}{n},\frac{b+1}{n}\right)\right)+\cdots+\mu\left(\left[\frac{a+(n-1)}{n},\frac{b+(n-1)}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{b-a}{n}+\frac{b-a}{n}+\cdots+\frac{b-a}{n}$$

$$=\cancel{n}\frac{b-a}{\cancel{n}}=b-a \quad \text{olur.}$$

$\mu(A)=\mu\left(T^{-1}A\right)$ olduğundan T n-adic dönüşümü ölçümü korur.

Tanım 2.1.19. $\phi:[0,1]\to[0,1]$, $\phi(0)=0$ ve $x\neq 0$ için

$$\phi(x)=\frac{1}{x}-\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]$$

olarak tanımlanan dönüşüme Gauss dönüşümü denir.

$0<x<1$ için $x=\dfrac{1}{n_1+\phi(x)}$, $n_1=\left[\!\left[\dfrac{1}{x}\right]\!\right]$

şeklinde yazılabilir.

Eğer $\phi(x)\neq 0$ durumunda bu işlem tekrarlanırsa,

$$x=\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{n_2+\phi^2(x)}},\ n_2=\left[\!\left[\frac{1}{\phi(x)}\right]\!\right]$$

olur.

$\phi^j(x)\neq 0$ ise $(n_k(x))_k \geq 1$ pozitif tamsayıların bir dizisi olmak üzere $j\neq 1$ için

$$x=\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{n_2+\cfrac{1}{\cfrac{\vdots}{\ddots+\cfrac{1}{n_j+\phi^j(x)}}}}},\ n_j=\left[\!\left[\frac{1}{\phi^j(x)}\right]\!\right]$$

olur.

Eğer $\forall n$ için $\phi^n(x)\neq 0$ ise bu özellik x'in irrasyonel olmasına denktir. Ayrıca herhangi bir n için $\phi^n(x)=0 \Leftrightarrow x$ rasyoneldir.

Örnek 2.1.5. $\phi:[0,1]\to[0,1]$, $\phi(x)=\frac{1}{x}-\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]$ dönüşümü, $A\subset[0,1]$ olmak üzere

$$\mu(A)=\frac{1}{\log 2}\int_A \frac{1}{1+x}\,d\lambda$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm, ölçümü korur. Başka bir deyişle $[0,1]$'in tüm Borel A kümeleri için $\mu(A)=\mu\left(\phi^{-1}(A)\right)$'dir.

İspat : $b\in(0,1)$ olmak üzere $[0,b]$ aralığı göz önüne alınsın.

$\phi^{-1}\left(\left[0,b\right]\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{b+k},\frac{1}{k}\right]$'dir.

$$\mu\left(\phi^{-1}\left(\left[0,b\right]\right)\right)=\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{b+k},\frac{1}{k}\right]\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\mu\left(\left[\frac{1}{b+k},\frac{1}{k}\right]\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\log 2}\int_{\frac{1}{b+k}}^{\frac{1}{k}}\frac{1}{1+t}dt$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\log 2}\int_{\frac{1}{b+k}}^{\frac{1}{k}}\frac{1}{1+t}dt$$

$$=\frac{1}{\log 2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\log\left(1+t\right)\Big|_{\frac{1}{b+k}}^{\frac{1}{k}}\right]$$

$$=\frac{1}{\log 2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\log\left(1+\frac{1}{k}\right)-\log\left(1+\frac{1}{b+k}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\log 2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\log\left(\frac{k+1}{k}\right)-\log\left(\frac{b+k+1}{b+k}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\log 2}\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k+1}{k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{b+k+1}{b+k}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\log 2}\lim_{n\to\infty}\left[\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)\right.$$
$$\left.-\log\left(\frac{b+2}{b+1}\cdot\frac{b+3}{b+2}\cdot\cdots\cdot\frac{b+n+1}{b+n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\log 2}\lim_{n\to\infty}\left[\log(n+1)-\log\left(\frac{b+n+1}{b+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\log 2}\lim_{n\to\infty}\left[\log\frac{(n+1)\cdot(b+1)}{b+n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{\log 2}\log\left[\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot(b+1)}{b+n+1}\right]=\frac{1}{\log 2}\log(b+1)=\frac{1}{\log 2}\int_0^b\frac{1}{1+t}dt$$

$$=\mu([0,b]).$$

$\mu\left(\phi^{-1}(A)\right)=\mu(A)$ olduğundan ϕ Gauss dönüşümü ölçümü korur.

Gauss dönüşümünün ölçümü koruduğu, $[0,1]$ aralığının $[a,b]$ şeklindeki Borel alt kümeleri için de gösterilebilir. Bunu göstermek için $[a,b]=[0,b]\setminus[0,a)$ olduğu kullanılacaktır.

Bu kümenin ters görüntüsü bulunup ölçümü alınırsa,

$$\phi^{-1}([a,b])=\phi^{-1}([0,b]\setminus[0,a))=\phi^{-1}([0,b])\setminus\phi^{-1}([0,a))$$

$$=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{b+k},\frac{1}{k}\right]\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{a+k},\frac{1}{k}\right)$$

ve

$$\mu\left(\phi^{-1}([a,b])\right)=\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{b+k},\frac{1}{k}\right]\right)-\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{a+k},\frac{1}{k}\right]\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\mu\left(\left[\frac{1}{b+k},\frac{1}{k}\right]\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\mu\left(\left[\frac{1}{a+k},\frac{1}{k}\right]\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\log 2}\int_{\frac{1}{b+k}}^{\frac{1}{k}}\frac{1}{1+t}dt-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\log 2}\int_{\frac{1}{a+k}}^{\frac{1}{k}}\frac{1}{1+t}dt$$

$$=\frac{1}{\log 2}\log(b+1)-\frac{1}{\log 2}\log(a+1)$$

$$=\frac{1}{\log 2}\log\frac{b+1}{a+1}=\frac{1}{\log 2}\int_a^b \frac{1}{1+t}dt$$

olur.

Yani, $\mu\left(\phi^{-1}\left([a,b]\right)\right)=\mu\left([a,b]\right)$’dir.

2.2. Pozitif Fonksiyonların İntegrali

Tanım 2.2.1.: Bir A kümesi için

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & ,x\in A\\ 0 & ,x\notin A\end{cases}$$

biçiminde tanımlanan χ_A fonksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir.

Buna göre $A,\ B\subset\mathbb{R}$ için

$$\chi_{A\cap B}=\chi_A\cdot\chi_B$$

$$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B$$

olur.

Tanım 2.2.2. Görüntü kümesi sonlu elemandan meydana gelen fonksiyona basit fonksiyon denir.

Tanım 2.2.3. $a_1, a_2, ..., a_n$ sayıları basit φ fonksiyonunun bir X kümesi üzerinde aldığı farklı değerler ve $A_k = \{x \in X : \varphi(x) = a_k\}$ olmak üzere

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}(x)$$

gösterimine, φ fonksiyonunun standart gösterimi denir.

X üzerinde tanımlı, reel değerli $\mathscr{A}$-ölçülebilir basit fonksiyonların kümesi $S = S(X, \mathscr{A})$, S'deki negatif olmayan fonksiyonların kümesi S^+ ile gösterilir.

Tanım 2.2.4. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı olsun. a_k lar negatif olmayan reel sayılar ve $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ler $\mathscr{A}$'ya ait ayrık kümeler olmak üzere;

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X,$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}(x)$$

gösterimine sahip bir $\varphi \in S^+$ fonksiyonunun μ ölçümüne göre integrali

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)$$

reel sayısıdır.

Tanım 2.2.5. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı olsun. $f \in M^+(X, \mathscr{A})$ olsun. O zaman f fonksiyonunun μ ölçümüne göre integrali

$$\int_X f \, d\mu = \sup\left\{ \int_X \varphi \, d\mu : \ \varphi \in S^+ \ \ ve \ \ \varphi \le f \right\} \text{'dir.}$$

$A \in \mathscr{A}$ olsun. f 'nin μ 'ye göre A üzerindeki integrali

$$\int_A f \, d\mu = \int_X f \chi_A \, d\mu \text{ olur.}$$

Teorem 2.2.1. (Monoton Yakınsaklık Teoremi) $(X, \mathscr{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve (f_n) de $M^+(X, \mathscr{A})$ 'daki fonksiyonların monoton artan bir dizisi olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna yakınsak ise

$$\int_X f \, d\mu = \lim \int_X f_n \, d\mu$$

olur (Kolmogorov, Fomin, 1970; Cohn 1980).

Teorem 2.2.2. Eğer $f_k(x) > 0$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k \, d\mu < \infty$ ise o zaman $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, A üzerinde h.h.h. yakınsaktır ve $\sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k(x) \, d\mu = \int_A \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) d\mu$ 'dir (Kolmogorov, Fomin, 1970).

2.3. İntegrallenebilen Fonksiyonlar

Tanım 2.3.1. f, X 'den $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ 'a bir fonksiyon olsun.

$$f^+(x) = maks\{f(x), 0\}$$
$$f^-(x) = maks\{-f(x), 0\}$$

biçiminde tanımlanan f^{+} ve f^{-} fonksiyonları X üzerinde tanımlı ve negatif olmayan fonksiyonlardır. f^{+} fonksiyonuna f 'nin pozitif parçası, f^{-} fonksiyonuna da f ' nin negatif parçası denir. Bu tanım göz önüne alındığında

$f = f^{+} - f^{-}$ olur.

Tanım 2.3.2. $(X,\mathscr{A},\mu)$ bir ölçüm uzayı ve $f \in M(X,\mathscr{A})$ olsun. Eğer $\int_X f^{+}\, d\mu$ ve $\int_X f^{-}\, d\mu$ integrallerin her ikisi de sonlu ise f fonksiyonu X üzerinde μ 'ye göre integrallenebilirdir ve bu integral

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f^{+}\, d\mu - \int_X f^{-}\, d\mu$$

reel sayısıdır. Eğer $A \in \mathscr{A}$ ise f 'nin μ 'ye göre A üzerindeki integrali

$$\int_A f\, d\mu = \int_A f^{+}\, d\mu - \int_A f^{-}\, d\mu$$

biçiminde tanımlanır.

X üzerinde μ ölçüsüne göre integrallenebilen fonksiyonların sınıfı $L = L(X,\mathscr{A},\mu)$ ile gösterilir. Bu küme $L(X)$ şeklinde de gösterilebilir.

$0 < p < \infty$ olmak üzere $L^{p}(X,\mathscr{A},\mu) = \left\{ f \in M(X,\mathscr{A}) : |f|^{p} \in L(X,\mathscr{A},\mu) \right\}$ kümesine $p-$ninci dereceden integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir.

Teorem 2.3.1. (Tchebichev eşitsizliği) $(X,\mathscr{A},\mu)$ bir ölçüm uzayı ve $f : X \to [0,\infty]$ fonksiyonu ölçülebilir olsun. $\alpha > 0$ için

$A_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ denirse,

$$\mu(A_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{A_\alpha} f \, d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f \, d\mu$$

dir (Kolmogorov, Fomin 1977; Cohn 1980).

Teorem 2.3.2. $E_1, E_2, \ldots, E_n$ kümeleri ikişer ikişer ayrık ve $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ olsun. Bu halde $f \in M(X, \mathscr{A})$ için

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{\bigcup_{k=1}^{n} E_k} f(x)\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{E_n} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x)\,dx$$

dir (Kolmogorov, Fomin 1977; Cohn 1980).

Teorem 2.3.3 $E_1, E_2, E_3, \ldots$ kümeleri ikişer ikişer ayrık ve $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots$ olsun. Ayrıca $\int_E f(x)\,dx$ integralinin var olduğu kabul edilsin.

Bu halde $f \in M(X, \mathscr{A})$ için,

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx$$

olur (Kolmogorov, Fomin 1977).

Teorem 2.3.4. Eğer E kümesinde h.h.h. $f(x) \geq 0$ ise

$$\int_E f(x)\,dx \geq 0$$

olur (Kolmogorov, Fomin 1977).

Teorem 2.3.5. Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının her biri bir E kümesinde sınırlı, ölçülebilir ve h.h.h. $f(x) \leq g(x)$ ise,

$$\int_E f(x)\,dx \leq \int_E g(x)\,dx$$

olur (Kolmogorov, Fomin 1977).

Teorem 2.3.6. $A \subset B$ ve $f(x) \geq 0$ ise

$$\int_A f(x)\,dx \leq \int_B f(x)\,dx$$

dir (Kolmogorov, Fomin 1977).

2.4. Ergodik Teoremler

Tanım 2.4.1. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ölçüm uzayı ve T ölçümü koruyan dönüşüm olmak üzere $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ dörtlüsüne soyut dinamik sistem denir.

Tanım 2.4.2. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ bir olasılık ölçüm uzayı ve $T : X \to X$ ölçümü koruyan dönüşüm olmak üzere bir $A \in \mathscr{A}$ için $T^{-1}A = A$ olursa A'ya invaryant küme denir.

Tanım 2.4.3. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ bir olasılık ölçüm uzayı ve $T: X \to X$ ölçümü koruyan dönüşüm olsun. $T^{-1}A = A$ şartını sağlayan $\forall A \in \mathscr{A}$ için $\mu(A) = 0$ veya $\mu(A) = 1$ ise T dönüşümüne "ergodiktir" denir.

Örnek 2.4.1. $X = \{a, b\}$, bir σ-cebir ve $\mu(\{a\}) = \frac{1}{2}$, $\mu(\{b\}) = \frac{1}{2}$ olsun. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ bir olasılık ölçüm uzayıdır.

$$\begin{aligned} T &: X \to X \\ &a \to b \\ &b \to a \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. T ölçümü korur ve ergodiktir. Çünkü $T^{-1}A = A$ olacak şekilde bir tek $A = \{a, b\}$ vardır ve $\mu(\{a, b\}) = 1$ dir. Dolayısıyla T ergodiktir.

Örnek 2.4.2. 2-adic dönüşümü ergodiktir (Billingsley, 1965).

Örnek 2.4.3. Gauss dönüşümü ergodiktir (Mane, 1987; Billingsley, 1965).

Teorem 2.4.1. $T: X \to X$ ölçümü koruyan dönüşüm ve $(X, \mathscr{A}, \mu)$ olasılık ölçüm uzayı olsun. Aşağıdakiler denktir.

(i) T ergodiktir;

(ii) $B \in \mathscr{A}$ için $\mu(T^{-1}B \Delta B) = 0$ olduğunda $\mu(B) = 0$ veya $\mu(B) = 1$ dir;

(iii) $\forall A \in \mathscr{A}$ olduğunda $\mu(A) > 0$ için $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k} A\right) = 1$ dir;

(iv) $\mu(A) > 0$ ve $\mu(B) > 0$ olan $\forall A, B \in \mathscr{A}$ için $\mu(T^{-k} A \cap B) > 0$ olacak şekilde k doğal sayısı vardır (Walters, 1982).

Teorem 2.4.2. (Birkhoff Ergodik Teoremi) $T:(X,\mathscr{A},\mu)\to(X,\mathscr{A},\mu)$ dönüşümü ölçümü koruyan dönüşüm ve $f\in L^1(X,\mathscr{A},\mu)$ olsun (Burada $(X,\mathscr{A},\mu)$ σ-sonlu olabilir). O zaman ,

(i) Hemen hemen her yerde $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right)$ bir $\overline{f}\in L^1(X,\mathscr{A},\mu)$ fonksiyonuna yakınsar.

(ii) Hemen hemen her yerde $\overline{f}\circ T=\overline{f}$ dir.

(iii) $\mu(X)<\infty$ ise $\int_X \overline{f}\,d\mu=\int_X f\,d\mu$ dir (Walters, 1982; Petersen,1983; Krengel, 1985).

Uyarı 2.4.1.

(i) T ergodikse $\overline{f}$ h.h.h. sabittir.

(ii) $\mu(X)<\infty$ ise h.h.h. $\overline{f}=\frac{1}{\mu(X)}\int_X f\,d\mu$ dir.

(iii) T ergodik ve $(X,\mathscr{A},\mu)$ bir olasılık uzayı ise $\forall f\in L^1(X,\mathscr{A},\mu)$ için h.h.h. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right)=\int_X f\,d\mu$ 'dir (Walters, 1982; Petersen,1983; Krengel, 1985).

Teorem 2.4.3. (von Neumann L^p Ergodic Teoremi) $1\le p<\infty$ ve T bir $(X,\mathscr{A},\mu)$ olasılık uzayının ölçümü koruyan bir dönüşümü olsun. Eğer $f\in L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ ise h.h.h. $\overline{f}\circ T=\overline{f}$ olacak şekilde $\overline{f}\in L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ mevcuttur ve

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k-\overline{f}\right\|_p=0$$

dır (Walters, 1982; Petersen,1983; Krengel, 1985).

Teorem 2.4.4. (Maksimal Ergodik Teorem) $U : L^1(X, \mathscr{A}, \mu) \to L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$, $\|U\| \le 1$ ile pozitif bir lineer operatör, $N > 0$ bir tamsayı ve $f \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ olsun.

$f_0 = 0$, $n \ge 1$ için $f_n = f + Uf + U^2 f + \cdots + U^{n-1} f$ ve

$$F_N = \max_{0 \le n \le N} f_n \ge 0$$

fonksiyonu tanımlansın. O zaman,

$$\int_{\{x : F_N(x) > o\}} f \, d\mu \ge 0$$

dır (Garsia 1965**;** Walters,1982).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Ergodik teorinin, analizin ve olasılık teorinin temel yakınsaklık problemlerinin çoğu maksimal eşitsizlik teknikleriyle ispat edilebilir. Maksimal eşitsizliğin yakınsaklık teoremini nasıl ürettiğini tam olarak göstermek için ergodik teoremlerin ispatına bakmak gerekir. Ergodik teoride belirlenen bir çok açık problemin çözülmesi son zamanlarda bir çok yazar tarafından ele alınmış olup, analizin birçok sonuçlarının ve tekniklerinin kullanımıyla, kaynaklar kısmında belirtilen çok sayıda makalede bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışma tamamen teorik olup, kaynaklar kısmında verilen çalışmalar detaylı olarak incelenerek mevcut sonuçlar karşılaştırılmaktadır. Konuyla ilgili makaleler internet ortamından ve değişik kütüphanelerden temin edilerek, konu ayrıntıları ile incelenmiştir. Özellikle kaynaklar kısmında verilen Jones (1977) ve Jones ve ark. (1999) makaleleri ayrıntılı olarak ele alınmaktadır. Bu çalışmalardan, Jones (1977) in makalesinde, maksimal eşitsizliğin Kakutani ve Calderon-Zygmund tarafından sunulan ayrışımlar kullanılarak maksimal fonksiyon ve kare fonksiyonlar için bazı sonuçlar elde edildiği, ergodik teoride bilinen sonuçlara bu yolla bakıldığında ispatlarının daha kolay olduğu ve Jones ve ark. (1999) çalışmasında da hareketli ortalamaya göre kare fonksiyonların integrallenebilir olduğu görülmüştür. Bu çalışmaların ışığında, bu ayrışımlara göre maksimal ve kare fonksiyonların bazı maksimal eşitsizlikleri sağlayıp sağlamadığı detaylı olarak incelenmiştir ve bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca Ephremidze (2002) ve Jones (2003) çalışmalarında hemen hemen her yerde ergodik maksimal fonksiyonları eşit olan fonksiyonların hemen hemen her yerde birbirine eşit olduğu ele alınmıştır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Ergodik Maksimal Fonksiyonlar için Eşitsizlik

Kakutani tarafından sunulan ayrışım, ergodik teorideki bilinen bazı sonuçları ispatlamak için kullanılır. Bu ispatlar, reel eksen üzerindeki sonuçlar ile ergodik teoride elde edilen sonuçlar arasında bir bağlantının olduğunu gösterir. Ayrıca Kakutani tarafından verilen bir X olasılık uzayının ayrışımı kullanılarak, $\mathbb{R}^n$ üzerinde verilen Calderon-Zygmund ayrışımına benzer bir ayrışım elde edilmektedir. Bu ayrışımla, Calderon-Zygmund ayrışımında kullanılan metotlar ergodik teoride ortaya çıkan problemlere uygulanabilir ve birçok problem bu yolla yaklaşıldığında daha açık olarak çözülebilir.

Bu bölümde Jones (1977)'in makalesi ayrıntılı olarak ele alınmaktadır. Kakutani ve Calderon-Zygmund ayrışımları tanıtılıp, bu ayrışımlar yardımıyla maksimal ergodik teoremin ispatı incelenmektedir.

Bu kesim boyunca $(X, \mathscr{A}, \mu)$ bir atomik olmayan, tam olasılık uzayı ve *T*, *X*'den *X*'e bir dönüşümdür.

Teorem 4.1.1. (Kakutani Ayrışımı) $T : X \to X$ ergodik, terslenebilir, ölçümü koruyan bir dönüşüm ve X bir olasılık uzayı olmak üzere $\mu(B) \geq 0$ ile $B \subset X$ verilsin.

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_0^j = B_0^1 \cup B_0^2 \cup B_0^3 \cup \ldots$$

ve

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{j-1} B_k^j \text{ ve } T\left(B_k^j\right) = B_{k+1}^j, \ \left(k \neq j-1\right)$$

olacak şekilde ayrık B_k^j $\left(0 \leq k \leq j-1,\ 1 \leq j < \infty\right)$ kümeleri vardır (Jones, 1977; Petersen,1983).

Teorem 4.1.2. (Calderon-Zygmund ayrışımı) $f \in L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ verilsin. $f \geq 0$ ve $\lambda > \|f\|_1$ olsun. Üst üste gelmeyen $\{Q_N\}_{N=1}^{\infty}$ küplerinin bir topluluğu için

(i) Hemen hemen her $x \notin \bigcup_{N=1}^{\infty} Q_N$ için $f\left(x\right) < \lambda$,

(ii) f, λ ve Q_N 'den bağımsız

$$C_1\lambda \leq \frac{1}{|Q_N|}\int_{Q_N} f\left(x\right)dx \leq C_2\lambda$$

olacak şekilde C_1 ve C_2 vardır (Jones, 1977).

Tanım 4.1.1. T ergodik, terslenebilir, ölçümü koruyan bir dönüşüm olmak üzere

$$f^*\left(x\right) = \sup_{n>0}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(T^k x\right)\right|$$

ile tanımlı fonksiyona ergodik maksimal fonksiyon denir.

Teorem 4.1.3. $f \geq 0$ ve $\lambda > \|f\|_1$ olacak şekilde $f \in L^1\left(X, \mathcal{A}, \mu\right)$ verilsin.

(i) Hemen hemen her $x \notin \bigcup_{N=2}^{\infty} C_N$ için $f\left(x\right) \leq \lambda$,

(ii) Her bir N için

$$\lambda \leq \frac{1}{\mu(C_N)} \int_{C_N} f(x)\, dx \leq 2\lambda$$

olacak şekilde X 'in $\{C_N\}_{N=2}^{\infty}$ ayrık alt kümelerin bir sınıfı vardır (Jones, 1977).

İspat: İlk olarak (i) ispatlansın:

$$B = \left\{x \in X : f^*(x) \leq \lambda\right\} = \left\{x \in X : \sup_{n>0} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|f\left(T^k x\right)\right| \leq \lambda\right\}$$

olsun ve B kümesi üzerinde Kakutani ayrışımı oluşturulsun.

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_0^j = B_0^1 \cup B_0^2 \cup B_0^3 \cup ... \quad ,$$

$$X = \left(B_0^1 \cup B_0^2 \cup B_0^3 \cup \ldots\right) \cup \left(B_1^2 \cup B_1^3 \cup B_1^4 \cup \ldots\right) \cup \ldots \quad ,$$

$$C_N = \bigcup_{j=1}^{N-1} B_j^N = B_1^N \cup B_2^N \cup \ldots B_{N-1}^N \quad \text{ve } T^j B_0^N = B_j^N \text{ 'dir.}$$

T 'nin tanımından

$$C_N = \bigcup_{j=1}^{N-1} B_j^N = \bigcup_{j=1}^{N-1} T^j\left(B_0^N\right)$$

yazılabilir.

Bu C_N ler Calderon-Zygmund ayrışımının Q_N küplerine karşılık gelir. Eğer $x \notin \bigcup_{N=2}^{\infty} C_N$ ise $x \in B$ ' dir. Çünkü,

$$C_2 = \bigcup_{j=1}^{1} B_j^2 = B_1^2,$$

$$C_3 = \bigcup_{j=1}^{2} B_j^3 = B_1^3 \cup B_2^3,$$

$$C_4 = \bigcup_{j=1}^{3} B_j^4 = B_1^4 \cup B_2^4 \cup B_3^4,$$

$$\vdots$$

olduğundan

$$\bigcup_{N=2}^{\infty} C_N = C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup \ldots = \left(B_1^2 \cup B_1^3 \cup B_1^4 \cup \ldots\right)$$
$$\cup \ \left(B_2^3 \cup B_2^4 \cup \ldots\right) \cup \left(B_3^4 \cup \ldots\right) \cup \ldots$$

dir.

Kakutani ayrışımı kullanılarak X kümesi,

$$X = B \cup \left(B_1^2 \cup B_1^3 \cup B_1^4 \cup \ldots\right) \cup \left(B_2^3 \cup B_2^4 \cup \ldots\right) \cup \left(B_3^4 \cup \ldots\right) \cup \ldots$$

şeklinde yazılırsa,

$$X = B \cup \bigcup_{N=2}^{\infty} C_N$$

olduğu görülür. Buradan $x \notin \bigcup_{N=2}^{\infty} C_N$ olduğu göz önüne alınırsa, $x \in B$ olduğu ortaya çıkar. $x \in B$ durumunda $f^*(x) \le \lambda$ olduğu için aynı zamanda $f(x) \le \lambda$'dır. Böylece (i) ispatlanmış olur.

Şimdi (ii) iki aşamalı olarak ispatlansın.

Lemma 4.1.1. Her bir C_N için

$$\frac{1}{\mu(C_N)}\int_{C_N} f(x)d\mu(x) \leq 2\lambda$$

dir.

İspat: $x \in B_0^N$ ise $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_0^j = B_0^1 \cup B_0^2 \cup B_0^3 \cup \ldots$ olduğundan x aynı zamanda B 'nin de elemanıdır. Dolayısıyla bu x elemanı için $f^*(x) \leq \lambda$ olur.

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \sup_{n>0}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(T^k x\right)\right| \\ &= \sup\Big\{\left|f(x)\right|, \frac{1}{2}\left(\left|f(x)\right| + \left|f(Tx)\right|\right), \frac{1}{3}\left(\left|f(x)\right| + \left|f(Tx)\right| + \left|f\left(T^2x\right)\right|\right), \ldots, \\ &\qquad \frac{1}{n}\left(\left|f(x)\right| + \left|f(Tx)\right| + \left|f\left(T^2x\right)\right| \ldots \left|f\left(T^n x\right)\right|\right),\ \ldots\Big\} \leq \lambda \end{aligned}$$

olduğundan bu kümedeki elemanların supremumu λ 'dan küçük veya eşitse diğer elemanların hepsi de λ 'dan küçük veya eşittir. Yani her N için

$$\sum_{k=0}^{N-1} f\left(T^k x\right) < N\lambda$$

dır.

$f \geq 0$ olduğundan $\sum_{k=0}^{N-1} f\left(T^k x\right) \leq N\lambda$ olduğu görülür. $C_N = \bigcup_{j=1}^{N-1} B_j^N$ olduğu hatırlanırsa,

$$\frac{1}{\mu(C_N)}\int_{C_N} f(x)d\mu(x)=\frac{1}{\mu\left(\bigcup_{j=1}^{N-1} B_j^N\right)}\int_{C_N} f(x)d\mu(x)$$

$$=\frac{1}{\sum_{j=1}^{N-1}\mu\left(B_j^N\right)}\int_{C_N} f(x)d\mu(x)$$

$$=\frac{1}{\mu\left(B_1^N\right)+\mu\left(B_2^N\right)+\ldots+\mu\left(B_{N-1}^N\right)}\int_{C_N} f(x)d\mu(x)$$

Kakutani ayrışımında $T^j\left(B_0{}^N\right)=B_j{}^N$ *idi; dolayısıyla;*

$$=\frac{1}{\mu\left(TB_0^N\right)+\mu\left(T^2B_0^N\right)+\ldots+\mu\left(T^{N-1}B_0^N\right)}\int_{C_N} f(x)\,d\mu(x)$$

T terslenebilir ve ölçümü koruyan dönüşüm olduğundan;

$$=\frac{1}{\mu\left(B_0^N\right)+\mu\left(B_0^N\right)+\mu\left(B_0^N\right)+\ldots+\mu\left(B_0^N\right)}\int_{C_N} f(x)\,d\mu(x)$$

$$=\frac{1}{(N-1)\mu\left(B_0^N\right)}\int_{\bigcup_{j=1}^{N-1} B_j^N} f(x)\,d\mu(x)$$

Teorem 2.3.2' den dolayı,

$$=\frac{1}{(N-1)\mu\left(B_0{}^N\right)}\sum_{j=1}^{N-1}\int_{B_j{}^N} f(x)\,d\mu(x)$$

$T^j\left(B_0{}^N\right)=B_j{}^N$ *olduğundan,*

$$=\frac{1}{(N-1)\mu\left(B_0^N\right)}\sum_{j=1}^{N-1}\int_{T^j\left(B_0^N\right)} f(x)\,d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{(N-1)\mu\left(B_0^N\right)} \sum_{j=1}^{N-1} \int_{B_0^N} f\left(T^j x\right) d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{(N-1)\mu\left(B_0^N\right)} \int_{B_0^N} \sum_{j=1}^{N-1} f\left(T^j x\right) d\mu(x)$$

$$\leq \frac{1}{(N-1)\mu\left(B_0^N\right)} \int_{B_0^N} \lambda N d\mu(x)$$

$$= \frac{N}{N-1} \cdot \frac{1}{\cancel{\mu\left(B_0^N\right)}} \cdot \cancel{\mu\left(B_0^N\right)} \cdot \lambda$$

$$\leq 2\lambda .$$

Bu yapılanlar ile, teoremin ikinci iddiasının sağ tarafındaki eşitsizlik ispat edilmiş olur. Şimdi de Teorem 4.1.3.'ün ikinci iddiasının sol tarafındaki eşitsizlik gösterilsin:

Lemma 4.1.2. Her bir C_N için

$$\frac{1}{\mu(C_N)} \int_{C_N} f(x)\, d\mu(x) \geq \lambda$$

dir.

İspat :

$$B = \left\{x \in X : f^*(x) \leq \lambda\right\} = \left\{x \in X : \sup_{n>0} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(T^k x\right)\right| \leq \lambda\right\}$$

$f \geq 0$ *olduğu için*,

$$= \left\{x \in X : \sup_{n>0} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right) \leq \lambda\right\}$$

$$= \left\{x \in X : \sup_{n>0} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right) - \lambda \leq 0\right\}$$

$$=\left\{x\in X:\sup_{n>0}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f-\lambda)\left(T^k x\right)\leq 0\right\}$$

$f-\lambda=g$ *denirse,*

$$=\left\{x\in X:\sup_{n>0}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g\left(T^k x\right)\leq 0\right\}$$

olur.

$\frac{1}{\mu(C_N)}\int_{C_N} f(x)d\mu(x)\geq\lambda$ olduğu gösterilmek istendiğinden,

$$\frac{1}{\mu(C_N)}\int_{C_N} f(x)d\mu(x)-\lambda\geq 0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\mu(C_N)}\int_{C_N}(f-\lambda)(x)d\mu(x)\geq 0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\mu(C_N)}\int_{C_N} g(x)\,d\mu(x)\geq 0$$

olduğunu veya denk olarak

$$\int_{C_N} g(x)d\mu(x)\geq 0$$

olduğunu göstermek gerekir.

$$\int_{C_N} g(x)\,d\mu(x)=\int_{\bigcup_{j=1}^{N-1}T^jB_0^N} g(x)\,d\mu(x)$$

$$=\sum_{j=1}^{N-1}\int_{T^jB_0^N} g(x)\,d\mu(x)$$

$$=\sum_{j=1}^{N-1}\int_{B_0^N} g\left(T^j x\right)d\mu(x)$$

$$= \int_{B_0^N} \sum_{j=1}^{N-1} g\left(T^j x\right) d\mu\left(x\right) \geq 0$$

olduğundan h.h.h. $x \in B_0^N$ için $\sum_{j=1}^{N} g\left(T^j x\right) \geq 0$ olduğunu göstermekle, $\int_{C_N} g\left(x\right) d\mu\left(x\right) \geq 0$ olduğu gösterilmiş olacaktır. Bu yapılanlar ile iki durum söz konusu olur:

$\left(i\right)$ $x \in B$ ve her N için

$$\sum_{j=0}^{N} g\left(T^j x\right) \leq 0$$

dır.

$\left(ii\right)$ $x \notin B$ için $\sum_{j=0}^{p} g\left(T^j x\right) > 0$ olacak şekilde bir $p = p\left(x\right)$ tamsayısı vardır.

İlk olarak $x \in B_{N-1}^N$ durumunda $g\left(x\right) > 0$ olduğu gösterilsin. $x \in B_{N-1}^N$ iken $Tx \in B_0^N$'dir. Bu da Tx'in, B'nin elemanı olduğunu gösterir. O zaman $\left(i\right)$ yapısından $Tx \in B$ durumunda,

$$\forall N \geq 0 \text{ için } \sum_{j=0}^{N} g\left(T^j \left(Tx\right)\right) \leq 0$$

olur.

Bu da $g\left(x\right) \leq 0$ olduğunu gösterir. $g\left(x\right) \leq 0$ ise o zaman,

$$\sum_{j=0}^{p} g\left(T^j x\right) = g\left(x\right) + \sum_{j=1}^{p} g\left(T^j x\right)$$

$$= g(x) + \sum_{j=1}^{p-1} g\left(T^{j}(Tx)\right) \le 0$$

olur. Bu ise p'nin tanımıyla çelişir. Çünkü p, $x \notin B$ için $\sum_{j=0}^{p} g\left(T^{j}x\right) > 0$ olacak şekildeki en küçük tam sayıdır. Sonuç olarak $g(x) > 0$'dır. $g(x) > 0$ bulunması $\int_{C_N} g(x)d\mu(x) > 0$ olduğu anlamına gelir.

Daha genel olarak kolondaki herhangi bir x için benzer bir ifade ile

$$g(x) + g(Tx) + g\left(T^{2}x\right) + \ldots + g\left(T^{p}x\right)$$

toplamının pozitif olduğunu ve $T^{p}(x)$'in sütunda olduğu görülür. Kakutani ayrışımı kullanılarak X kümesi Şekil 4.1.'deki gibi gösterilebilir.

$$\begin{array}{r}
B_{n-1}^{n} \\ \hline
B_{n-2}^{n} \\ \hline
\vdots \quad \vdots \\
B_{4}^{n} \\ \hline
B_{3}^{4} \ \cdots \ B_{3}^{n} \ \cdots \\ \hline
B_{2}^{3} \ B_{2}^{4} \ \cdots \ B_{2}^{n} \ \cdots \\ \hline
B_{1}^{2} \ B_{1}^{3} \ B_{1}^{4} \ \cdots \ B_{1}^{n} \ \cdots \\ \hline
B_{0}^{1} \ B_{0}^{2} \ B_{0}^{3} \ B_{0}^{4} \ \cdots \ B_{0}^{n} \ \cdots \\ \hline
B
\end{array}$$

Şekil 4.1. Kakutani ayrışımı kullanılarak X kümesinin bir gösterimi

$x \in B_1^N$ olsun. $x \notin B$ olduğu için $\sum_{j=0}^{p} g\left(T^j x\right) > 0$'dır. $T^p\left(x\right)$ sütunda olduğundan, ya en yüksektedir veya $T^{p+1}\left(x\right)$ de sütundadır. Eğer $T^p\left(x\right)$ en üstte ise durum gösterilmiş olur, değilse $T^{p+1}\left(x\right)$'den toplam alınarak en üste ulaşılıncaya kadar devam edilir ve istenen sonuç buradan görülür.

Buraya kadar yapılanların amacı aşağıdaki maksimal ergodik teoremin ispatını göstermektir.

Teorem 4.1.4. (Maksimal ergodik teorem) Eğer $f \in L^1\left(X, \mathscr{A}, \mu\right)$, $f \geq 0$ ve $\lambda > \|f\|_1$ ise o zaman

$$\mu\left\{f^* > \lambda\right\} \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\left\{f^* > \lambda\right\}} f\left(x\right) d\mu\left(x\right)$$

dir (Jones,1977).

İspat: Lemma 4.1.2. ile

$$\frac{1}{\mu\left(C_N\right)} \int_{C_N} f\left(x\right) d\mu\left(x\right) \geq \lambda \text{ veya } \frac{1}{\lambda} \int_{C_N} f\left(x\right) d\mu\left(x\right) \geq \mu\left(C_N\right) \text{'dir.}$$

$B = \left\{f^* \leq \lambda\right\}$ olduğu hatırlanırsa $B^c = \bigcup_{N=2}^{\infty} C_N = \left\{f^* > \lambda\right\}$ olur. Bu ifadenin her iki yanının ölçümü alınarak,

$$\begin{aligned}
\mu\left(\left\{f^* > \lambda\right\}\right) &= \sum_{N=2}^{\infty} \mu\left(C_N\right) \\
&\leq \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \int_{C_N} f\left(x\right) d\mu\left(x\right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{N=2}^{\infty} \int_{C_N} f\left(x\right) d\mu\left(x\right)
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\bigcup_{N=2}^{\infty}C_N} f(x)d\mu(x)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\{f^*>\lambda\}} f(x)d\mu(x)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

4.2. Ergodik Maksimal Fonksiyonun Tekliği

Bu bölümde iki maksimal fonksiyonun h.h.h. birbirine eşit olma durumu ele alınmaktadır. Bu problem, L. Ephremidze (2002), Roger L. Jones (2003), Paul Alton Hagelstein (2004) tarafından incelenmiştir.

Roger L. Jones, L. Ephremidze'nin gösterdiği "İki fonksiyon hemen hemen her yerde aynı ergodik maksimal fonksiyona sahipse, bu iki fonksiyon hemen her yerde eşittir" sonucunu Kakutani ayrışımı ile daha farklı bir şekilde göstermiştir. Bu bölümde Roger L. Jones (2003)'in yaptığı çalışma daha detaylı bir şekilde incelenmektedir.

Bu kesim boyunca $(X,\mathscr{A},\mu)$ bir atomik olmayan tam olasılık uzayını ve $T: X\to X$ ölçülebilir, ergodik, ölçümü koruyan nokta dönüşümünü göstermektedir.

Maksimal fonksiyon $f^*(x)=\sup\limits_{n>0}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(T^kx)$ olsun.

Teorem 4.2.1. $f,\ g\in L^1(X,\mathscr{A},\mu)$ olsun. Hemen hemen her x için $f^*(x)=g^*(x)$ olduğu varsayılsın. O zaman hemen hemen her yerde $f=g$ 'dir (Jones, 2003).

Aşağıdaki lemma, yukarıdaki teoremin ispatında önemli rol oynar. Teoremi ispatlamadan önce lemma ve ispatı verilecektir.

Lemma 4.2.1. $T : X \to X$ ölçülebilir, terslenebilir, ergodik, ölçümü koruyan dönüşüm ve $f,\ g \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ olsun. Hemen hemen her x için $f^*(x) = g^*(x)$ olduğu varsayılsın. Eğer $0 < \mu\{x : f^*(x) \le \lambda\} \le 1$ ise, $\{f^* > \lambda\}$ üzerinde h.h.h. $f = g$ 'dir.

İspat: $F_\lambda = f - \lambda$, $G_\lambda = g - \lambda$ olsun. Hemen hemen her x için $f^*(x) = g^*(x)$ kabulünden dolayı;

$$
\begin{aligned}
F^*(x) = \sup_{n>0} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f - \lambda)(T^k x) &= \sup_{n>0} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) - \lambda \\
&= \sup_{n>0} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(T^k x) - \lambda \\
&= \sup_{n>0} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (g - \lambda)(T^k x) = G^*(x)
\end{aligned}
$$

yani $F^*(x) = G^*(x)$ olur. Eğer $\{F_\lambda^* > 0\}$ kümesi üzerinde $F_\lambda = G_\lambda$ olduğu gösterilirse $\{f^* > \lambda\}$ üzerinde $f = g$ olduğu gösterilmiş olacaktır.

$B = \{x : F_\lambda^*(x) \le 0\}$ kümesi Kakutani ayrışımı için taban olsun.

$C_1,\ C_2,\ C_3,\ \cdots$ birleşimleri bütün uzay olan ayrık sütunların bir dizisini ve B_n, n.sütunun tabanını göstersin. Bu durumda $B_n \subset B$ 'dir. $i \in \{0,1,2,\cdots,n-1\}$ için $T^i B_n$ kümeleri ayrıktır ve $T^n B_n \subset B$ 'dir. Kakutani ayrışımı kullanılarak X kümesi, Şekil 4.2.'de gösterilmiştir.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & T^{n-1}B_n & \\ \cline{6-6}
 & & & & & T^{n-2}B_n & \\ \cline{6-6}
 & & & & & \vdots & \\
 & & T^2B_3 & \cdots & T^2B_n & \cdots & \\ \cline{2-6}
 & TB_2 & TB_3 & \cdots & TB_n & \cdots & \\ \cline{1-6}
B_1 & B_2 & B_3 & \cdots & B_n & \cdots & \\ \hline
 & & B & & & &
\end{array}
$$

Şekil 4.2. Kakutani ayrışımı kullanılarak X kümesinin bir gösterimi

Şimdi $C_n \setminus B_n$ sütunundaki noktalar için $F_\lambda(x) = G_\lambda(x)$ eşitliği gösterilecektir. Çünkü $C_n \setminus B_n = \{x : F_\lambda^*(x) > 0\}$ kümesi üzerinde $F_\lambda(x) = G_\lambda(x)$ olduğu iddia edilmektedir.

Bunun için ilk olarak $x \in C_n \setminus B_n$ için kuleden ayrılmadan önce maksimum olması gerektiği gösterilsin. Bazı $i \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\}$ için $x \in T^{n-i}B_n$ olduğu varsayılsın. $\varepsilon > 0$ ve m tamsayısı için

$$
0 < F_\lambda^*(x) < \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} F_\lambda\left(T^k x\right) + \varepsilon \tag{4.1}
$$

olacak şekilde pozitif bir m sayısı vardır.

$\varepsilon < \dfrac{1}{i+1} F_\lambda^*(x)$ olacak şekilde ε seçilsin. İlk olarak $m > i$ durumu incelenecektir.

$x \in T^{n-i}B_n$ olduğundan $T^i x \in T^i\left(T^{n-i}B_n\right) = T^n B_n \subset B$ olur. Ayrıca $T^i x = y \in B$ için

$$\sum_{k=i}^{m-1} F_\lambda\left(T^k x\right) = F_\lambda\left(T^i x\right) + F_\lambda\left(T^{i+1} x\right) + \ldots + F_\lambda\left(T^{m-1} x\right)$$

$$= F_\lambda T^0\left(T^i x\right) + F_\lambda T^1\left(T^i x\right) + \cdots + F_\lambda T^{m-i-1}\left(T^i x\right)$$

$y = T^i x$ *denirse,*

$$= \sum_{k=0}^{m-i-1} F_\lambda\left(y\right) \leq 0$$

dır.

4.1 eşitsizliğinde $\sum_{k=i}^{m-1} F_\lambda\left(T^k x\right) \leq 0$ ve $\varepsilon < \frac{1}{i+1} F_\lambda^*\left(x\right)$ seçimi kullanılırsa

$$0 < F_\lambda^*\left(x\right) < \frac{1}{m}\left(\sum_{k=0}^{i-1} F_\lambda\left(T^k x\right) + \sum_{k=i}^{m-1} F_\lambda\left(T^k x\right)\right) + \varepsilon$$

$$\leq \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{i-1} F_\lambda\left(T^k x\right) + \varepsilon$$

$$< \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{i-1} F_\lambda\left(T^k x\right) + \frac{1}{i+1} F_\lambda^*\left(x\right)$$

$$= \frac{i}{m}\cdot\frac{1}{i}\sum_{k=0}^{i-1} F_\lambda\left(T^k x\right) + \frac{1}{i+1} F_\lambda^*\left(x\right)$$

$$< \frac{i}{m} F_\lambda^*\left(x\right) + \frac{1}{i+1} F_\lambda^*\left(x\right)$$

$m > i$ *ve* $i \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\}$ *olduğundan;*

$$< F_\lambda^*\left(x\right)$$

olur.

$F_\lambda^*(x) < F_\lambda^*(x)$ eşitsizliği mümkün olamayacağından dolayı $m > i$ durumu olamaz. Demek ki $m \leq i$ durumu vardır.

Eğer x, sütunun en yükseği olan $T^{n-1}B_n$ kümesinin elemanı ise maksimum kulede meydana geldiğinden ve zaten kulenin en yükseğinde olunduğundan dolayı $F_\lambda^*(x) = F_\lambda(x)$ ve $G_\lambda^*(x) = G_\lambda(x)$ olduğu görülür. Buradan $F_\lambda(x) = G_\lambda(x)$ elde edilir.

Şimdi $T^{n-i}B_n$ kümesinde olunduğu varsayılsın, şu anki bulunulan düzeyin yukarısında $i-1$ düzey vardır. Tümevarımla $x \in \bigcup_{j=1}^{i-1} T^{n-j}B_n$ için $F_\lambda(x) = G_\lambda(x)$ olduğu varsayılabilir. Hala kuledeyken maksimum meydana geldiğinden ve şimdiki düzeyin yukarısındaki her x için $F_\lambda = G_\lambda$ olduğundan dolayı, eğer şu anki bulunan düzeydeki her x için $F_\lambda(x) \neq G_\lambda(x)$ ise $F_\lambda^*(x) = G_\lambda^*(x)$ olamayacaktır. Bu da $\{F_\lambda^* > 0\}$ üzerinde $F_\lambda = G_\lambda$ veya $\{f > \lambda\}$ üzerinde $f = g$ olduğunu gösterir.

Tanım 4.2.1. Bir fonksiyonun esaslı infimumu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\text{ess inf } f = \sup\left\{b \in \mathbb{R} : \mu\left(\{f(x) < b\}\right) = 0\right\}$$

Burada f^* 'ın esaslı infimumunu $I(f)$ ile gösterilecektir.

Ayrıca $\int_X f(x)\,d\mu = E(f)$ olsun.

Lemma 4.2.2. $T : X \to X$ ölçülebilir, terslenebilir, ergodik, ölçümü koruyan dönüşüm olsun. O zaman $I(f) = \int_X f(x)\,d\mu$ 'dir (Jones, 2003).

Şimdi teorem, T terslenebilir olduğu durumunda ispat tamamlansın.

(i) $\mu\{x : f^*(x) = I(f)\} = 0$ olduğu varsayılsın. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = I(f)$ olacak şekilde azalan bir (λ_n) dizisi seçilebilir. Lemma 4.2.2. ile, $\{f^* > \lambda_n\}$ kümelerinin her biri pozitif ölçümlüdür ve Lemma 4.2.1. uygulanarak her bir λ_n için h.h.h. $x \in \{f^* > \lambda_n\}$ ve $f(x) = g(x)$ olur. Bu kümelerin birleşimi $\{f^* > I(f)\}$ 'dir.

(ii) $0 < \mu\{x : f^*(x) = I(f)\} < 1$ olduğu varsayılsın. Bu durumda $\lambda = I(f)$ ve Lemma 4.2.1. uygulanarak $\{f^* > I(f)\}$ kümesindeki h.h.h. x için $f(x) = g(x)$ olur. Lemma 4.2.1.'in ispatındaki metotlar kullanılarak h.h.h. $x \in B_n$ için $\sum_{k=0}^{n-1} F_\lambda(T^k x) = 0$ olur. $H_n = \left\{x \in B_n : \sum_{k=0}^{n-1} F_\lambda(T^k x) < 0\right\}$ olsun. Bazı n ler için $\mu(H_n) \neq 0$ ise $x \in B_n$ için $\sum_{k=0}^{n-1} F_\lambda(T^k x) \leq 0$ olduğu bilindiği varsayılarak,

$$0 = \int_X F_\lambda(x) d\mu(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n/H_n} \sum_{k=0}^{n-1} F_\lambda(T^k x) d\mu(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{H_n} \sum_{k=0}^{n-1} F_\lambda(T^k x) d\mu(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{H_n} \sum_{k=0}^{n-1} F_\lambda(T^k x) d\mu(x) < 0$$

elde edilir.

Bu ise bir çelişkidir. O zaman her bir n için $\mu(H_n) = 0$ olduğu elde edilir. $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ için $F_\lambda(T^k x) = G_\lambda(T^k x)$ olduğundan dolayı $F_\lambda(x) = G_\lambda(x)$ olmalıdır.

(*iii*) $\mu\{x : f^*(x) = I(f)\} = 1$ olsun. Bu durumda $I(f) = I(g)$ olduğu için Lemma 4.2.2. kullanılarak f ve g'nin integrallerinin aynı ve her ikisinin $I(f)$'ye eşit olduğu görülür. f ve g integrallerinden daha büyük olamayacağından, f ve g h.h.h. birbirine eşit olmalıdır.

4.3. Maksimal Fonksiyonun İntegrallenebilirliği

Bu bölümde Ornstein (1971) tarafından daha önce incelenen f^*'ın integrallenebilirliğine, Kakutani ve Calderon-Zygmund ayrışımları kullanarak Jones (1977)'in yaklaşımı ayrıntılı olarak ele almıştır.

Teorem 4.3.1. $f \in L^1(X)$ ve $f \geq 0$ için maksimal fonksiyon integrallenebilirdir $\Leftrightarrow$ $f \log^+ f$ integrallenebilililirdir.

Burada;

$f(x)\log^+ f(x) = f(x)\log \ maks\{f(x),1\}$'dir.

Bu teoremi ispat etmek için, ilk olarak Jones (1977) tarafından verilen aşağıdaki lemma ile bir dağılım eşitsizliği ispatlanacaktır.

Lemma 4.3.1. $\lambda > \|f\|_1$ için

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\{f>\lambda\}} f(x) d\mu(x) \leq 2\mu(\{f^* > \lambda\})$$

olur.

İspat :

$\bigcup_{N=2}^{\infty} C_N = \{f^* > \lambda\}$ ve C_N lerin ayrık olduğu hatırlanarak,

$$\sum_{N=2}^{\infty}\int_{C_N} f(x)d\mu(x)=\int_{\bigcup_{N=2}^{\infty}C_N} f(x)d\mu(x)=\int_{\{f^*>\lambda\}} f(x)d\mu(x)$$

olduğu görülür. Lemma 4.1.1.’den,

$$\int_{\{f^*>\lambda\}} f(x)d\mu(x)=\sum_{N=2}^{\infty}\int_{C_N} f(x)d\mu(x)\le\sum_{N=2}^{\infty}2\lambda\mu(C_N)=2\lambda\mu\{f^*>\lambda\}$$

olur. Böylece $\int_{\{f^*>\lambda\}} f(x)d\mu(x)\le 2\lambda\mu\{f^*>\lambda\}$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı λ ile bölünürse;

$$\frac{1}{\lambda}\int_{\{f^*>\lambda\}} f(x)d\mu(x)\le 2\mu\{f^*>\lambda\}$$

olur. $\{f>\lambda\}\subset\{f^*>\lambda\}$ olduğundan Teorem 2.3.6. kullanılarak;

$$\int_{\{f>\lambda\}} f(x)\,d\mu(x)\le\int_{\{f^*>\lambda\}} f(x)\,d\mu(x)$$

yazılır. Bu eşitsizlik kullanılarak,

$$\frac{1}{\lambda}\int_{\{f>\lambda\}} f(x)d\mu(x)\le\frac{1}{\lambda}\int_{\{f^*>\lambda\}} f(x)d\mu(x)\le 2\mu\{f^*>\lambda\}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{1}{\lambda}\int_{\{f>\lambda\}} f(x)d\mu(x)\le 2\mu\{f^*>\lambda\}$$

olduğu çıkar.

Şimdi bu eşitsizliğin integrali alınarak Teorem 4.3.1.'in ispatı verilsin.

İspat: $G(\lambda)=\mu\left(\left\{x\in X : f^{*}(x)>\lambda\right\}\right)$ olsun.

$h(0)=0$ şartını sağlayan $[0,\infty)$ üzerindeki herhangi artan bir h fonksiyonunu için

$$\int_X h\left(f^{*}(x)\right)d\mu(x)=-\int_0^{\infty}h(y)\,dG(y)=\int_0^{\infty}G(y)\,dh(y)$$

eşitliği vardır. (Son eşitlik sınırlı fonksiyonlar için geçerli olduğundan, Teorem 2.2.1. uygulanır.)

Böylece, $h(x)=x$ alınırsa,

$$\int_X f^{*}(x)\,d\mu(x)=\int_0^{\infty}G(\lambda)\,d\lambda=\int_0^{\infty}\mu\left\{f^{*}>\lambda\right\}d\lambda$$

$$=\int_0^{\|f\|_1}\mu\left(\left\{f^{*}>\lambda\right\}\right)d\lambda+\int_{\|f\|_1}^{\infty}\mu\left(\left\{f^{*}>\lambda\right\}\right)d\lambda$$

$$=C+\int_{\|f\|_1}^{\infty}\mu\left(\left\{f^{*}>\lambda\right\}\right)d\lambda$$

Lemma 4.3.1.'den,

$$\geq C+\int_{\|f\|_1}^{\infty}\frac{1}{2\lambda}\int_{\{f>\lambda\}}f(x)\,d\mu(x)\,d\lambda$$

$$=C+\frac{1}{2}\int_{\{f>\|f\|_1\}}f(x)\int_{\|f\|_1}^{f(x)}\frac{d\lambda}{\lambda}d\mu(x)$$

$$= C + \frac{1}{2} \int_{\{f > \|f\|_1\}} f(x)\left[\log f(x) - \log\|f\|_1\right] d\mu(x)$$

$$= C + \frac{1}{2} \int_{\{f > \|f\|_1\}} f(x) \log f(x) - \frac{1}{2} \int_{\{f > \|f\|_1\}} f(x) \log\|f\|_1 \, d\mu(x)$$

$$\geq C + \frac{1}{2} \int_{\{f > \|f\|_1\}} f(x) \log^+ f(x) - \frac{1}{2} \int_{\{f > \|f\|_1\}} f(x) \log\|f\|_1$$

olduğundan

$\int_X f(x) \log^+ f(x) d\mu(x) < \infty$ olur. Yani $f(x)\log^+ f(x)$ integrallenebilirdir.

Şimdi $f(x)\log^+ f(x)$ integralenebilirse, maksimal fonksiyonun integrallenebilir olduğu gösterilecektir.

f fonksiyonu,

$$f \leq f_{1_{\{f>\lambda\}}} + \lambda \cdot \chi_{\{f \leq \lambda\}} = \begin{cases} f & , f > \lambda \\ \lambda & , f \leq \lambda \end{cases}$$

şeklinde yazabilir. Bu fonksiyonların maksimal fonksiyonları göz önüne alınırsa,

$$f^* \leq \left(f . \chi_{\{f>\lambda\}}\right)^* + \lambda$$

olur. Sonuç olarak,

$$\lambda\mu\left(\left\{f^* > 2\lambda\right\}\right) \leq \lambda\mu\left(\left\{\left(f\chi_{\{f>\lambda\}}\right)^* > \lambda\right\}\right)$$

$$\leq \int_{\left\{\left(f\chi_{\{f>\lambda\}}\right)^* > \lambda\right\}} f\chi_{\{f>\lambda\}} \, d\mu(x)$$

$$\leq \int_{\{f>\lambda\}} f(x)\,d\mu(x)$$

olur. Yani,

$$\lambda\mu\left(\left\{f^* > 2\lambda\right\}\right) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{f>\lambda\}} f(x)\,d\mu(x)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin integrali alınırsa $f \in L\log^+ L$ iken $f^* \in L^1(X)$ olduğu sonucuna varılır.

Bu teorem $\mu(X) < \infty$ şartı altında geçerlidir. Eğer $\mu(X) = \infty$ ise $f \geq 0$ ve $\int_X f(x)\,d\mu(x) \neq 0$ ifadelerinin f^*'ın integrallenemeyeceğini vurguladığı, Ornstein (1971) tarafından gösterilmiştir.

4.4. Ergodik Kare Fonksiyonlar

Bu bölümde ergodik kare fonksiyonları tanıtılıp, maksimal eşitsizliği sağladığı gösterilmiştir.

Tanım 4.4.1. $T : (X, \mathscr{A}, \mu) \to (X, \mathscr{A}, \mu)$ dönüşümü ölçümü koruyan dönüşüm ve $f \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ olmak üzere , ergodik teoride

$$A_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right)$$

ortalamasıyla ilgilenilir. $A_n(x)$ yukarıdaki gibi Cesaro ortalaması olduğunda ergodik kare fonksiyonu

$$Sf(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_{n+1}(x) - A_n(x)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ile $S^* f$ fonksiyonu,

$$S^* f(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f(T^n x)}{n+1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlanır.

Eğer $d_n(x) = A_{n+1}(x) - A_n(x)$ denirse,

$$\begin{aligned}
d_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(T^k x) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \\
&= \frac{1}{n+1} \left(f(x) + f(Tx) + f(T^2 x) + \ldots + f(T^{n-1} x) + f(T^n x) \right) \\
&\qquad - \frac{1}{n} \left(f(x) + f(Tx) + f(T^2 x) + \ldots + f(T^{n-1} x) \right) \\
&= \left(\left(f(x) \right) + f(Tx) + f(T^2 x) + \ldots + f(T^{n-1} x) \right) \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right] + \frac{1}{n+1} f(T^n x) \\
&= \cancel{n} . A_n(x) . \left[\frac{\cancel{n} - \cancel{n} - 1}{\cancel{n}(n+1)} \right] + \frac{f(T^n x)}{n+1} \\
&= \frac{f(T^n x)}{n+1} - \frac{A_n(x)}{n+1}
\end{aligned}$$

olacaktır. Böylece,

$$\begin{aligned}
Sf(x) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(d_n(x) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f(T^n x)}{n+1} - \frac{A_n(x)}{n} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{f\left(T^{n}x\right)}{n+1}\right)^{2}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f\left(T^{n}x\right)}{n+1}\cdot A_{n}\left(x\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A_{n}\left(x\right)}{n+1}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A_{n}\left(x\right)}{n+1}\right)^{2}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f\left(T^{n}x\right)}{n+1}\cdot A_{n}\left(x\right)\right)^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A_{n}\left(x\right)}{n+1}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

olur.

$$S^{*}f\left(x\right)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{f\left(T^{n}x\right)}{n+1}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

olduğundan

$$Sf\left(x\right)\leq Cf^{*}\left(x\right)+S^{*}f\left(x\right)$$

eşitsizliği yazılır.

Teorem 4.4.1. Kare fonksiyonu maksimal eşitsizliği sağlar. Yani,

$$\mu\left(\left\{S\left(f\right)>\lambda\right\}\right)\leq\frac{c}{\lambda}\left\|f\right\|_{1}$$

dir (Jones, 1977).

İspat: $Sf\left(x\right)\leq Cf^{*}\left(x\right)+S^{*}f\left(x\right)$ olduğundan

$$\mu\left(\left\{S\left(f\right)>2\lambda\right\}\right)\leq\mu\left(\left\{cf^{*}>\lambda\right\}\right)+\mu\left(\left\{Sf^{*}>\lambda\right\}\right)$$

eşitsizliği yazılabilir. f^{*} maksimal fonksiyonun maksimal eşitsizliği sağladığı Teorem 4.1.4.'de gösterilmiş olduğundan eşitsizliğin ikinci kısmında bulunan $\mu\left(\left\{Sf^{*}>\lambda\right\}\right)$ göz önüne alınacaktır.

$$f \geq 0 \text{ ve } f_k(x) = f\left(T^k x\right)$$

olsun.

$$g_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & , f_k(x) \leq \lambda(k+1) \\ 0 & , f_k(x) > \lambda(k+1) \end{cases}$$

ile $g_k(x)$ fonksiyonu ve

$$\begin{aligned} b_k(x) &= f_k(x) - g_k(x) \\ &= \begin{cases} 0 & , f_k(x) \leq \lambda(k+1) \\ f_k(x) & , f_k(x) > \lambda(k+1) \end{cases} \end{aligned}$$

ile $b_k(x)$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} S^* f(x) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f\left(T^k x\right)}{k+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{f_k(x)}{k+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{g_k(x)}{k+1} + \frac{b_k(x)}{k+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{g_k(x)}{k+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b_k(x)}{k+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\mu\left(\left\{S^*(f)>\lambda\right\}\right)\le \underbrace{\mu\left(\left\{\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{g_k(x)}{k+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}>\frac{\lambda}{2}\right\}\right)}_{I_1}+\underbrace{\mu\left(\left\{\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{b_k(x)}{k+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}>\frac{\lambda}{2}\right\}\right)}_{I_2}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliği göstermek için I_1 ve I_2 ifadeleri ayrı ayrı incelenecektir.

$$I_1=\mu\left(\left\{\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{g_k(x)}{k+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}>\frac{\lambda}{2}\right\}\right)$$

$$=\mu\left(\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{g_k(x)}{k+1}\right)^2>\frac{\lambda^2}{4}\right\}\right)$$

Teorem 2.3.1. kullanılarak,

$$\le\frac{c}{\lambda^2}\int_X\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{g_k(x)}{k+1}\right)^2 d\mu(x)$$

$$=\frac{c}{\lambda^2}\int_X\left(\left(\frac{g_0(x)}{1}\right)^2+\left(\frac{g_1(x)}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{g_k(x)}{k+1}\right)^2+\ldots\right)d\mu(x)$$

$$=\frac{c}{\lambda^2}\left(\int_X\left(\frac{g_0(x)}{1}\right)^2 d\mu(x)+\int_X\left(\frac{g_1(x)}{2}\right)^2 d\mu(x)+\ldots+\int_X\left(\frac{g_1(x)}{2}\right)^2 d\mu(x)+\ldots\right)$$

$$=\frac{c}{\lambda^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}\right)^2\int_X g_k(x)^2 d\mu(x)$$

$$=\frac{c}{\lambda^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}\right)^2\int_0^{\infty}\alpha\mu\left(\left\{g_k>\alpha\right\}\right)d\alpha$$

$$=\frac{c}{\lambda^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}\right)^2\left(\int_0^{\lambda(k+1)}\alpha\mu\left(\left\{g_k>\alpha\right\}\right)d\alpha+\int_{\lambda(k+1)}^{\infty}\alpha\mu\left(\left\{g_k>\alpha\right\}\right)d\alpha\right)$$

$$=\frac{c}{\lambda^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}\right)^2\int_0^{\lambda(k+1)}\alpha\mu\left(\left\{g_k>\alpha\right\}\right)d\alpha$$

$$\leq \frac{c}{\lambda^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}\right)^2\int_0^{\lambda(k+1)}\alpha\mu\{f>\alpha\}da$$

$$\leq \frac{c}{\lambda^2}\int_0^{\infty}\alpha\sum_{k=\left[\!\left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]\!\right]}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}\right)^2\mu(\{f>\alpha\})d\alpha$$

$$\leq \frac{c}{\lambda^2}\int_0^{\infty}\cancel{\alpha}\left(\frac{\lambda}{\cancel{\alpha}}\right)\mu(\{f>\alpha\})d\alpha$$

$$=\frac{c}{\lambda}\int_0^{\infty}\mu(\{f>\alpha\})d\alpha$$

$$=\frac{c}{\lambda}\int_X f\,d\mu$$

$$=\frac{c}{\lambda}\|f\|_1$$

olur. I_2 için aşağıdaki işlemler yapılırsa,

$$I_2=\mu\left(\left\{\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{b_k(x)}{k+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}>\frac{\lambda}{2}\right\}\right)\leq\mu\left(\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{b_k(x)}{k+1}\right)^2>0\right\}\right)$$

$$=\mu\left(\left\{b_0(x)^2+\left(\frac{b_1(x)}{2}\right)^2+\left(\frac{b_2(x)}{3}\right)^2+\ldots>0\right\}\right)$$

$$=\mu\left(\{b_0(x)>0\}\cup\left\{\left(\frac{b_1(x)}{2}\right)^2>0\right\}\cup\ldots\cup\left\{\left(\frac{b_k(x)}{k+1}\right)^2>0\right\}\cup\ldots\right)$$

$$\leq\mu(\{b_0(x)>0\})+\mu\left(\left\{\left(\frac{b_1(x)}{2}\right)^2>0\right\}\right)+\ldots+\mu\left(\left\{\left(\frac{b_k(x)}{k+1}\right)^2>0\right\}\right)+\ldots$$

$$\leq\mu(\{b_0(x)>0\})+\mu(\{b_1(x)>0\})+\ldots+\mu(\{b_k(x)>0\})+\ldots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\mu(\{b_k(x)>0\})$$

$$=\int_0^{\infty}\mu(\{f>\lambda(k+1)\})d\alpha$$

$$\leq \int_0^\infty \mu\left(\{f > \lambda\alpha\}\right) d\alpha$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \left(\mu\{f > \alpha\}\right) d\alpha$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_X f d\mu$$

$$= \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$$

olur.

I_1 ve I_2 için bulunan sonuçlar düzenlenerek istenen sonuç elde edilir.

Bu maksimal eşitsizlik, $S(f)$'nin h.h.h. $f \in L^1\left(X, \mathscr{A}, \mu\right)$ için sonlu olduğunu vurgular.

Teorem 4.4.2. $1 < p \leq \infty$ için

$$\|S(f)\|_p \leq c_p \|f\|_p$$

olacak şekilde sadece p ye bağlı bir c_p sabiti vardır.

İspat: Sıfır ölçümlü bir kümenin dışında,

$$\|S(f)\|_\infty \leq S^*(f)^2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{f\left(T^k(x)\right)}{k+1} \right)^2$$

$$= f(x)^2 + \left(\frac{f(Tx)}{2} \right)^2 + \left(\frac{f\left(T^2 x\right)}{3} \right)^2 + \ldots$$

$$\leq \|f\|_\infty^2 + \frac{\|f\|_\infty^2}{2^2} + \frac{\|f\|_\infty^2}{3^2} + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\|f\|_{\infty}}{k+1} \right)^2$$

$$\leq \|f\|_{\infty}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} \right)^2$$

$$= c_p \|f\|_{\infty}^2$$

Sonuç olarak $\|S(f)\|_{\infty} \leq c_p \|f\|_{\infty}$ eşitsizliği elde edilir.

Şimdi $p > 1$ için $\|S(f)\|_p \leq c_p \|f\|_p$ olduğu ispatlanacaktır.

$$\|Sf(x)\|_p = \left\| \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(d_n(x) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_p = \left\| \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f(T^n x)}{n+1} - \frac{A_n(x)}{n+1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_p$$

$$\leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f(T^n x)}{n+1} - \frac{A_n(x)}{n+1} \right)^2 \right\|_p$$

$$\leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f(T^n x)}{n+1} \right)^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A_n(x)}{n+1} \right)^2 \right\|_p$$

$$\leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f(T^n x)}{n+1} \right)^2 \right\|_p + \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A_n(x)}{n+1} \right)^2 \right\|_p$$

$$= \left(\int_X \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f(T^n x)}{n+1} \right)^{2p} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A_n(x)}{n+1} \right)^{2p} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Teorem 2.2.2.'den,

$$\leq c_p \|f\|_p$$

bulunur.

Lemma 4.4.1. (Kakutani-Rokhlin Teoremi) $T : X \to X$, bir atomik olmayan $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ölçüm uzayı üzerinde ölçümü koruyan ergodik bir dönüşüm, *n* bir pozitif tamsayı ve $\varepsilon \geq 0$ olsun. O zaman $A,\ TA,\ \ldots,\ T^{n-1}A$ ikişer ikişer ayrık olacak şekilde ölçülebilir bir $A \subset X$ kümesi mevcuttur ve ε 'dan daha küçük ölçümlü bir kümenin üzerinde *X'* i örter.

Uyarı 4.4.1. $\forall f \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ için

$$S(f)(x) \leq cf^*(x)$$

olacak şekilde bir *c* sabiti yoktur. Bu şu şekilde görülebilir:

Kakutani-Rokhlin teoremi kullanılarak $A,\ TA,\ \ldots,\ T^{N-1}A$ ikişer ikişer ayrık olacak şekilde bir $A \subset X$ seçilsin.

$f_N(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanırsa,

$$f_N(x) = \begin{cases} 2^n & , T^{-(2^n-1)}(x) \in A,\ 1 \leq 2^n - 1 < N \ ise \\ 0 & , diğer \ durumlarda \end{cases}$$

ve $x \in A$ için,

$$f^*(x) = \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right) = \sup_{\substack{n \\ 2^n < N+1}} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} f\left(T^{2^k - 1} x\right)$$

$$= \sup_{\substack{n \\ 2^n < N+1}} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

olur. Bununla beraber eğer $2^m \le N < 2^{m+1}$ ise A'daki her x için $S^*(f)(x)$ tahmin edilebilir.

$$
\begin{aligned}
S(f)(x) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_{n+1}(x) - A_n(x)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\ge \left[\sum_{n=0}^{2^m}\left(A_{n+1}(x) - A_n(x)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\ge \left[\sum_{n=0}^{m}\left(A_{2^n}(x) - A_{2^n-1}(x)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\ge \left[\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{2^{n+1}}{2^n} - \frac{2^n}{2^n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{m}
\end{aligned}
$$

olur. Buradan $\dfrac{S(f)}{f^*}$ oranının sınırsız olduğu görülür. Bu ise $S(f)(x) \le cf^*(x)$ olacak şekilde bir c sayısının olmadığını gösterir.

4.5. Hareketli Ortalamaya Göre Kare Fonksiyonlar

Bu bölümde Roger L. Jones ve ark. (1999)'nın makalesinden faydalanarak hareketli ortalamaya göre kare fonksiyonlar tanıtılmış ve integrallenebilir olup olmadıkları incelenmiştir.

Tanım 4.5.1. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve T, $(X, \mathscr{A}, \mu)$' nin ölçümü koruyan terslenebilir dönüşümü olsun. (v_n), (u_n) iki dizi ve $f \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ olmak üzere,

$$
M_n f(x) = \frac{1}{u_n}\sum_{k=v_n+1}^{v_n+u_n} f\left(T^k x\right)
$$

dizisine hareketli ortalamaların bir dizisi denir.

Tanım 4.5.2. $M_n f(x)$ hareketli ortalamaların bir dizisi ve $\forall f \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ olmak üzere,

$$Sf(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{M_n f(x)}{n} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

dizisine $M_n f(x)$ hareketli ortalaması için kare fonksiyon denir.

Teorem 4.5.1. (u_n) tamsayıların azalmayan bir dizisi ve $\lambda > 0$ olsun. O zaman,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left\{x \in X : M_n f(x) \geq \lambda n\right\}\right) \leq \frac{2}{\lambda} \|f\|_1$$

dır (Rosenblatt, Wierdl, 1999).

Teorem 4.5.2. $\forall f \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ ve azalmayan (u_n) uzunluklu herhangi $M_n f(x)$ hareketli ortalaması için Sf h.h.h. sonludur.

İspat: $\forall f \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$'in h.h.h. pozitif olduğu varsayılsın ve Sf'nin h.h.h. sonlu olduğu gösterilsin.

$$Sf(x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M_n f(x)}{n} \right)^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M_n f(x)}{n} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}} \leq \frac{M_n f}{n} < \frac{1}{2^m}\right\}} + \chi_{\left\{1 \leq \frac{M_n f}{n}\right\}} \right) \right)^2$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_nf}{n}\right)^2\left(\sum_{m=0}^{\infty}\chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}}\le\frac{M_nf}{n}<\frac{1}{2^m}\right\}}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_nf}{n}\right)^2\left(\chi_{\left\{1\le\frac{M_nf}{n}\right\}}\right)^2$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_nf}{n}\right)^2\sum_{m=0}^{\infty}\chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}}\le\frac{M_nf}{n}<\frac{1}{2^m}\right\}}\chi_{\left\{1\le\frac{M_nf}{n}\right\}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_nf}{n}\right)^2\left(\sum_{m=0}^{\infty}\chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}}\le\frac{M_nf}{n}<\frac{1}{2^m}\right\}}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_nf}{n}\right)^2\left(\chi_{\left\{1\le\frac{M_nf}{n}\right\}}\right)^2$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_nf}{n}\right)^2\left(\chi_{\left\{\frac{1}{2}\le\frac{M_nf}{n}<1\right\}}+\chi_{\left\{\frac{1}{4}\le\frac{M_nf}{n}<\frac{1}{2}\right\}}+\cdots\right)\chi_{\left\{1\le\frac{M_nf}{n}\right\}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_nf}{n}\right)^2\left(\sum_{m=0}^{\infty}\chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}}\le\frac{M_nf}{n}<\frac{1}{2^m}\right\}}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_nf}{n}\right)^2\left(\chi_{\left\{1\le\frac{M_nf}{n}\right\}}\right)$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_nf}{n}\right)^2\left(\chi_{\left\{\frac{1}{2}\le\frac{M_nf}{n}<1\right\}}\chi_{\left\{1\le\frac{M_nf}{n}\right\}}+\chi_{\left\{\frac{1}{4}\le\frac{M_nf}{n}<\frac{1}{2}\right\}}\chi_{\left\{1\le\frac{M_nf}{n}\right\}}+\cdots\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_nf}{n}\right)^2\left(\sum_{m=0}^{\infty}\chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}}\le\frac{M_nf}{n}<\frac{1}{2^m}\right\}}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_nf}{n}\right)^2\left(\chi_{\left\{1\le\frac{M_nf}{n}\right\}}\right)^2$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_nf}{n}\right)^2\left(\chi_{\left\{\frac{1}{2}\le\frac{M_nf}{n}<1\right\}\cap\left\{1\le\frac{M_nf}{n}\right\}}+\chi_{\left\{\frac{1}{4}\le\frac{M_nf}{n}<\frac{1}{2}\right\}\cap\left\{1\le\frac{M_nf}{n}\right\}}+\cdots\right)$$

$\chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}}\le\frac{M_nf}{n}<\frac{1}{2^m}\right\}}\cdot\chi_{\left\{1\le\frac{M_nf}{n}\right\}}=\chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}}\le\frac{M_nf}{n}<\frac{1}{2^m}\right\}\cap\left\{1\le\frac{M_nf}{n}\right\}}$, $\left\{\frac{1}{2^{m+1}}\le\frac{M_nf}{n}<\frac{1}{2^m}\right\}$ ve $\left\{1\le\frac{M_nf}{n}\right\}$ kümeleri ayrık ve $\chi_{\varnothing}=0$ olduğundan,

$$Sf(x)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_nf}{n}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}}\le\frac{M_nf}{n}<\frac{1}{2^m}\right\}}\right)\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_nf}{n}\left(\chi_{\left\{1\le\frac{M_nf}{n}\right\}}\right)\right)^2$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki iki terimin karekökleri sırasıyla $S_1f(x)$ ve $S_2f(x)$ ile gösterilsin.

İlk olarak $S_1 f(x)$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Buradaki $\dfrac{M_n f}{n}$ için düzlem kümelerinin ayrıklığı kullanılarak

$$S_1 f(x)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^m}\right)^2 \chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}} \leq \frac{M_n f}{n} < \frac{1}{2^m}\right\}}(x)$$

olduğu görülür. Bu eşitsizliğin her iki tarafının integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}\int_X S_1 f(x)^2 d\mu &\leq \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2m}}\int_X \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}} \leq \frac{M_n f}{n} < \frac{1}{2^m}\right\}} \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left\{\frac{1}{2^{m+1}} \leq \frac{M_n f}{n} < \frac{1}{2^m}\right\}\right)\end{aligned}$$

olur.

$$\mu\left(\left\{\frac{1}{2^{m+1}} \leq \frac{M_n f}{n} < \frac{1}{2^m}\right\}\right) \leq \mu\left(\left\{\frac{1}{2^{m+1}} \leq \frac{M_n f}{n}\right\}\right)$$

olduğundan,

$$\int_X S_1 f(x)^2 d\mu \leq \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left\{\frac{1}{2^{m+1}} \leq \frac{M_n f}{n}\right\}\right) \tag{4.2}$$

şeklinde yazılır. Teorem 4.5.1.'den,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left\{\frac{1}{2^{m+1}} \leq \frac{M_n f}{n}\right\}\right) \leq 2^{m+1} C \|f\|_1 \tag{4.3}$$

olur.

4.3 eşitsizliği, 4.2 eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\int_X S_1 f(x)^2 d\mu \leq C\|f\|_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}} 2^{m+1} = 4C\|f\|_1$$

bulunur. Böylece; $S_1 f(x)^2$ integrallenebilirdir ve h.h.h. sonludur.

Şimdi, $S_2 f(x)$ fonksiyonu ele alınsın.

$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{M_n f \geq n\}) < \infty$ olduğu Teorem 4.5.1.'den biliniyor. Bu, $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\left\{1 \leq \frac{M_n f}{n}\right\}}$ serisinin integrallenebilir ve böylelikle h.h.h. sonlu olduğuna işaret eder. Buradan da h.h.h. x'in yalnızca sonlu çokluktaki $\{M_n f \geq n\}$ kümelerinin içinde olduğu görülür. Bu ise, $S_2 f(x)$ toplamının h.h.h. sonlu bir toplam olduğunu gösterir.

Sonuç olarak $S_1 f(x)$ ve $S_2 f(x)$ fonksiyonları h.h.h. sonlu olduğundan, $Sf(x)$ fonksiyonu da h.h.h. sonlu olur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.5.1. $p > 1$ olsun. Her hangi $f \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ ve azalmayan (u_n) uzunluklu $M_n f(x)$ ortalaması için

$$S_p f(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{M_n f(x)}{n} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

operatörü h.h.h. sonludur.

İspat:

$$S_p(x)^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M_n f(x)}{n} \right)^p$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_n f(x)}{n}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}}\leq\frac{M_n f}{n}<\frac{1}{2^m}\right\}}+\chi_{\left\{1\leq\frac{M_n f}{n}\right\}}\right)\right)^p$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_n f(x)^p}{n}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}}\leq\frac{M_n f}{n}<\frac{1}{2^m}\right\}}+\chi_{\left\{1\leq\frac{M_n f}{n}\right\}}\right)^p\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_n f(x)^p}{n}\left[\binom{p}{0}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}}\leq\frac{M_n f}{n}<\frac{1}{2^m}\right\}}\right)^p+\right.$$

$$\left.\binom{p}{1}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}}\leq\frac{M_n f}{n}<\frac{1}{2^m}\right\}}\right)^{p-1}\chi_{\left\{1\leq\frac{M_n f}{n}\right\}}+\cdots+\binom{p}{p}\left(\chi_{\left\{1\leq\frac{M_n f}{n}\right\}}\right)^p\right]$$

$\chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}}\leq\frac{M_n f}{n}<\frac{1}{2^m}\right\}}\cdot\chi_{\left\{1\leq\frac{M_n f}{n}\right\}}=\chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}}\leq\frac{M_n f}{n}<\frac{1}{2^m}\right\}\cap\left\{1\leq\frac{M_n f}{n}\right\}}$, $\left\{\frac{1}{2^{m+1}}\leq\frac{M_n f}{n}<\frac{1}{2^m}\right\}$ *ve* $\left\{1\leq\frac{M_n f}{n}\right\}$ *kümeleri ayrık ve* $\chi_{\varnothing}=0$ *olduğundan,*

$$S_p(x)^p=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_n f(x)}{n}\sum_{m=0}^{\infty}\chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}}\leq\frac{M_n f}{n}<\frac{1}{2^m}\right\}}(x)\right)^p+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_n f(x)}{n}\chi_{\left\{1\leq\frac{M_n f}{n}\right\}}(x)\right)^p$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki iki terimin p.dereceden kökleri sırasıyla $S_1 f(x)$ ve $S_2 f(x)$ ile gösterilsin.

İlk olarak $S_1 f(x)$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Düzlem kümelerinin ayrıklığını kullanarak,

$$S_1 f(x)^p\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^m}\right)^p\chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}}\leq\frac{M_n f}{n}<\frac{1}{2^m}\right\}}(x)$$

olduğu görülür. Bu eşitsizliğin her iki tarafının integralini alınırsa,

$$\int_X S_1 f(x)^p \, d\mu \le \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{pm}} \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\left\{\frac{1}{2^{m+1}} \le \frac{M_n f}{n} < \frac{1}{2^m}\right\}}$$

$$\le \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{pm}} \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left\{\frac{1}{2^{m+1}} \le \frac{M_n f}{n} < \frac{1}{2^m}\right\}\right)$$

olur.

$$\mu\left(\left\{\frac{1}{2^{m+1}} \le \frac{M_n f}{n} < \frac{1}{2^m}\right\}\right) \le \mu\left(\left\{\frac{1}{2^{m+1}} \le \frac{M_n f}{n}\right\}\right)$$

olduğundan

$$\int_X S_1 f(x)^p \, d\mu \le \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{pm}} \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left\{\frac{1}{2^{m+1}} \le \frac{M_n f}{n}\right\}\right) \tag{4.4}$$

şeklinde yazılır. Teorem 4.5.1'den,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left\{\frac{1}{2^{m+1}} \le \frac{M_n f}{n}\right\}\right) \le 2^{m+1} C \|f\|_1 \tag{4.5}$$

dir.

4.5 eşitsizliği, 4.4 eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\int_X S_1 f(x)^p \, d\mu \le C\|f\|_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{pm}} 2^{m+1}$$

$$= C\|f\|_1 \, 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m(p-1)}}$$

$$= C\|f\|_1 \frac{2^p}{2^{p-1} - 1}$$

bulunur.

Böylece $S_1 f(x)^p$ integrallenebilir ve h.h.h. sonlu olduğu görülür.

Şimdi, $S_2 f(x)$ fonksiyonu ele alınsın.

Teorem 4.5.1.'de, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left\{M_n f \geq n\right\}\right) < \infty$ olduğu verilmişti. Bu, $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\left\{1 \leq \frac{M_n f}{n}\right\}}$ serisinin integrallenebilir ve böylelikle h.h.h. sonlu olduğunu gösterir. Buradan da h.h.h. x'in, yalnızca sonlu çokluktaki $\left\{M_n f \geq n\right\}$ kümelerinin içinde olduğu görülür. Bu ise, $S_2 f(x)$ toplamının h.h.h. sonlu bir toplam olduğunu verir.

Yukarıda yapılanlar ile, $S_1 f(x)$ ve $S_2 f(x)$ fonksiyonları h.h.h. sonlu olduğundan $S_p f(x)$ fonksiyonunun da h.h.h. sonlu olduğu görülür ve sonuç ispatlanmış olur.

Tanım 4.5.3. $T_n : L^1(X, \mathscr{A}, \mu) \to L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ operatör dizisi verilsin. $\forall f \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ için $T^n f \geq 0$ ise T_n' ye güçlü pozitif operatör dizisi denir.

Eğer her bir T_n, negatif olmayan c sabiti ve $\forall f \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ için $T_n(cf) = cT_n f$ şartını sağlarsa T_n'ye pozitif olarak homojen operatör denir.

Teorem 4.5.3. $\left(T_n : n \geq 1\right)$ pozitif olarak homojen, güçlü pozitif operatörlerin bir dizisi ve $Sf(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n f(x)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ olsun. $f \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left\{\left|T_n f\right| \geq 1\right\}\right) \leq C\|f\|_1$$

olduğu varsayılsın. O zaman,

$$\mu\left(\left\{Sf \geq \lambda\right\}\right) \leq \frac{10C}{\lambda}\|f\|_1$$

dir.

Bu da herhangi $f \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ fonksiyonu için $Sf(x) < \infty$ olduğunu gösterir.

İspat: $\lambda = 2$ ve f 'nin pozitif olduğu varsayılsın.

$$
\begin{aligned}
Sf(x) &= \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n f(x)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n f(x)\right)^2\left(\chi_{\{T_n f<1\}}(x) + \chi_{\{T_n f\geq 1\}}(x)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n f(x)\right)^2 \chi_{\{T_n f<1\}}(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n f(x)\right)^2 \chi_{\{T_n f\geq 1\}}(x)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n f(x)\right)^2 \chi_{\{T_n f<1\}}(x)\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n f(x)\right)^2 \chi_{\{T_n f\geq 1\}}(x)\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki iki terimi sırasıyla $S_1(x)$ ve $S_2(x)$ ile gösterilsin.

$$
\mu\left(\{Sf \geq 2\}\right) \leq \mu\left(\{S_1(x) + S_2(x) \geq 2\}\right) \leq \mu\left(\{S_1(x) \geq 1\}\right) + \mu\left(\{S_2(x) \geq 1\}\right)
$$

$I_1 = \mu\left(\{S_1(x) \geq 1\}\right)$ ve $I_2 = \mu\left(\{S_2(x) \geq 1\}\right)$ denirse

$$
\mu\left(\{Sf \geq 2\}\right) \leq I_1 + I_2 \tag{4.6}
$$

eşitsizliği elde edilir.

I_1 ve I_2 ifadeleri ayrı ayrı incelensin.

I_1 ifadesi için,

$$S_1(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n f(x)\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{\left\{\frac{1}{2^{k-1}} \le T_n f < \frac{1}{2^k}\right\}}(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\left\{\frac{1}{2^{k+1}} \le T_n f < \frac{1}{2^k}\right\}}(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

olacak şekilde yazılabilir.

Teorem 4.5.3.'deki varsayım ve Teorem 2.3.1. kullanılarak,

$$I_1 = \mu\left(\left\{S_1(x) \ge 1\right\}\right) = \mu\left(\left\{S_1(x)^2 \ge 1\right\}\right)$$

$$\le \mu\left(\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\left\{\frac{1}{2^{k+1}} \le T_n f < \frac{1}{2^k}\right\}}(x) \ge 1 \right\}\right)$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left\{ T_n f \ge \frac{1}{2^{k+1}} \right\}\right)$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \cdot C \cdot 2^{k+1} \left\| f \right\|_1$$

$$= 4C \left\| f \right\|_1$$

olduğu elde edilir.

I_2 ifadesi için, eğer $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n f(x) \ge 1\}} = 0$ ise $S_2(x) = 0$ olduğundan ispat hemen çıkar. Yine Teorem 4.5.3.'deki varsayım ve Teorem 2.3.1. kullanılarak,

$$I_2 = \mu\left(\left\{S_2(x) \ge 1\right\}\right) = \mu\left(\left\{ x : \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n f(x)\right)^2 \chi_{\{T_n f \ge 1\}}(x) \right)^{\frac{1}{2}} \ge 1 \right\}\right)$$

$$= \mu\left(\left\{ x : \sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n f(x)\right)^2 \chi_{\{T_n f \ge 1\}}(x) \ge 1 \right\}\right)$$

$$\le \mu\left(\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{\{T_n f\ge 1\}}\left(x\right)\ge 1\right\}\right)$$

$$\le \int\limits_{\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{\{T_n f\ge 1\}}(x)\ge 1\right\}} \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{\{T_n f\ge 1\}}\left(x\right)d\mu$$

$$\le \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{\{T_n f\ge 1\}}\left(x\right)d\mu$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left\{T_n f\ge 1\right\}\right)$$

$$\le C\left\|f\right\|_1$$

olduğu elde edilir. $I_1 \le 4C\left\|f\right\|_1$ ve $I_2 \le C\left\|f\right\|_1$ ifadeleri 4.6 eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\mu\left(\left\{Sf\ge 2\right\}\right) &\le \mu\left(\left\{S_1 f\ge 1\right\}\right)+\mu\left(\left\{S_1 f\ge 1\right\}\right)\\ &\le 5C\left\|f\right\|_1\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.5.2. $\left(T_n : n\ge 1\right)$ pozitif olarak homojen, güçlü pozitif operatörlerin bir dizisi ve $Sf\left(x\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}T_n f\left(x\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$ olsun. $f\in L^1(X,\mathscr{A},\mu)$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left\{\left|T_n f\right|\ge 1\right\}\right)\le C\left\|f\right\|_1$$

olduğu varsayılsın. O zaman,

$$\mu\left(\left\{Sf\ge \lambda\right\}\right)\le\left(\frac{2^p}{2^{p-1}-1}+1\right)C\left\|f\right\|_1 \text{'dir.}$$

Bu da herhangi $f \in L^1(X,\mathscr{A},\mu)$ fonksiyonu için $Sf(x) < \infty$ olduğunu gösterir.

İspat: $\lambda = 2$ ve f ' nin pozitif olduğu varsayılsın.

$$Sf(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n f(x)\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n f(x)\right)^p \left(\chi_{\{T_n f<1\}}(x) + \chi_{\{T_n f\geq 1\}}(x)\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n f(x)\right)^p \chi_{\{T_n f<1\}}(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n f(x)\right)^p \chi_{\{T_n f\geq 1\}}(x)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n f(x)\right)^p \chi_{\{T_n f<1\}}(x)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n f(x)\right)^p \chi_{\{T_n f\geq 1\}}(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

olduğu görülür. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki iki terimi sırasıyla $S_1(x)$ ve $S_2(x)$ ile gösterilsin.

$$\mu\left(\{Sf \geq 2\}\right) \leq \mu\left(\{S_1(x) \geq 1\}\right) + \mu\left(\{S_2(x) \geq 1\}\right) \tag{4.7}$$

olduğu biliniyor. $S_1(x)$ ifadesi,

$$S_1(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n f(x)\right)^p \sum_{k=0}^{\infty}\chi_{\left\{\frac{1}{2^{k-1}} \leq T_n f < \frac{1}{2^k}\right\}}(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{kp}}\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{\left\{\frac{1}{2^{k+1}} \leq T_n f < \frac{1}{2^k}\right\}}(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 4.5.3.'deki varsayım ve Teorem 2.3.1. kullanılarak,

$$\mu\left(\left\{S_1(x)\geq 1\right\}\right)=\mu\left(\left\{S_1(x)^p\geq 1\right\}\right)$$

$$\leq \mu\left(\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{kp}}\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{\left\{\frac{1}{2^{k+1}}\leq T_nf<\frac{1}{2^k}\right\}}(x)\geq 1\right\}\right)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{kp}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left\{T_nf\geq\frac{1}{2^{k+1}}\right\}\right)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{kp}}\cdot C\cdot 2^{k+1}\left\|f\right\|_1$$

$$=2C\left\|f\right\|_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k(p-1)}}$$

$$=\frac{2^p}{2^{p-1}-1}C\left\|f\right\|_1$$

olduğu elde edilir. $S_2(x)$ için, eğer $\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{\{T_nf(x)\geq 1\}}=0$ ise $S_2(x)=0$ olduğundan ispat hemen çıkar. Teorem 4.5.3.'deki varsayım ve Teorem 2.3.1. kullanılarak,

$$\mu\left(\left\{S_2(x)\geq 1\right\}\right)=\mu\left(\left\{x:\ \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_nf(x)\right)^p\chi_{\{T_nf\geq 1\}}(x)\right)^{\frac{1}{p}}\geq 1\right\}\right)$$

$$=\mu\left(\left\{x:\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(T_nf(x)\right)^p\chi_{\{T_nf\geq 1\}}(x)\geq 1\right\}\right)$$

$$\leq \mu\left(\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{\{T_nf\geq 1\}}(x)\geq 1\right\}\right)$$

$$\leq \int_{\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{\{T_nf\geq 1\}}(x)\geq 1\right\}}\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{\{T_nf\geq 1\}}(x)d\mu$$

$$\leq \int_X\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{\{T_nf\geq 1\}}(x)d\mu$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left\{T_nf\geq 1\right\}\right)$$

$$\leq C\left\|f\right\|_1$$

olduğu elde edilir. $S_1(x)$ ve $S_2(x)$ için bulunanlar 4.7 eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\mu\left(\left\{Sf \geq 2\right\}\right) \leq \left(\frac{2^p}{2^{p-1}-1}+1\right)C\|f\|_1$$

elde edilir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Ergodik teoride ve analizin diğer alanlarında ortaya çıkan yakınsaklık problemlerinin çözümünde maksimal eşitsizlik teknikleri kullanılır. Bu tezde maksimal ergodik teoremin farklı bir ispatı ele alınmış olup, ergodik kare fonksiyonların maksimal eşitsizliği gerçeklediği ve iki ergodik maksimal fonksiyonu hemen hemen her yerde birbirine eşit olma durumu, hareketli ortalamaya göre kare fonksiyonların integrallenebilirliği ele alınmıştır.

Bu tezden hareketle ergodik teorideki bir çok maksimal fonksiyonun çeşitli maksimal eşitsizlikleri sağladığı, çeşitli maksimal fonksiyonların hemen hemen her yerde birbirine eşit olma durumu, kaynaklar kısmında verilen ve literatür taraması ile elde edilen çalışmalar kullanılarak, daha farklı bir şekilde ele alınabilir.

KAYNAKLAR

BILLINGSLEY, P., 1965. Ergodic Theory and Information, New York .

COHN, L. D., 1980. Measure Theory. Birkhöuser, Boston

EPHREMIDZE, L., 1995. On a Relationship Between the Integrbilities of Various Maximal Functions. Georgian Mathematical Journal, 2(1): 9-20.

EPHREMIDZE, L., 1996. On the Uniqueness of the Maximal Functions. Georgian Mathematical Journal, 3(1):49-52.

EPHREMIDZE, L., 2002. On the Uniqueness of the Ergodic Maximal Function. Fundamenta Mathematicae, 174.

GARSIA, A., 1970. Topics in Almost Everywhere Convergence. Lectures in Advanced Mathematics 4.

HAGELSTEIN, P. A., 2004. On the Uniqueness of the Uncentered Ergodic Maximal Function. Fund. Math. 183(1):81-90.

JONES, R.L., 1977. Inequalities for Ergodic Maximal Function. Studia Mathematica, T. LX.

JONES, R.L., ROSENBLATT, J.M., and WİERDL, M., 1999. Counting in Ergodic Theory. Canad. J. Math. 51(5): 996-1019.

JONES, R.L., 2003. On the Uniqueness of the Ergodic Maximal Function. American Mathematical Society, 132(4):1087-1090.

KOLMOGOROV, A. N., and FOMİN, S. V., 1970. Introductory Real Analysis. Prentice- Hall Inc. London

KRENGEL, U., 1985. Ergodic Theorems. Walter de Gruyter. Berlin.

MANE, R.,1987. Ergodic Theory and Differantiable Dynamics. Springer-Verlag.

ORNSTEİN, D. S., 1971. A Remark on the Birkhoff Ergodic Theorem. Illinois J. Math. 15, 77-79.

PETERSEN, K., 1983. Ergodic Theory. Cambridge University Press. London.

ROSENBLATT, J., and WIERDL, M., 1992. A New Maximal Inequality and its applications. Ergodic Theory Dynam. Sytems 12,509-558.

WALTERS, P., 1982. An Introduction to Ergodic Theory. Springer-Verlag. Berlin

ÖZGEÇMİŞ

01.01.1986 da Şanlıurfa'nın Hilvan ilçesinde doğdu. İlk orta ve lise öğrenimini Şanlıurfa'da tamamladı. 2002 yılında Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2006 yılında bu bölümden mezun oldu ve aynı yılın güz döneminde Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisansa başladı. 2007 yılı güz döneminde Adıyaman Üniversitesinde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Halen Adıyaman Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.

ÖZET

$\left(X, \mathscr{A}, \mu, T\right)$ dinamik sistemi üzerindeki $A_n f\left(x\right)$ ortalamasının yakınsaklığı ergodik teorinin temel sorusudur. Ergodik teoride ve analizin diğer alanlarında ortaya çıkan yakınsaklık problemlerinin çözümünde maksimal eşitsizlik teknikleri kullanılabilir. Bu tezde maksimal ergodik teoremin farklı bir ispatı ele alınmış olup, ergodik maksimal fonksiyonun ve ergodik kare fonksiyonların maksimal eşitsizliği gerçeklediği gösterilmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde önceki çalışmalar ve literatür bilgileri sunulmaktadır. İkinci bölümde bu çalışmada gerekli olan genel tanım ve teoremler verilmektedir. Üçüncü bölümde kullanılan materyal ve yöntemler anlatılmaktadır. Dördüncü bölüm ise beş alt kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, Kakutani'nin vermiş olduğu ayrışım kullanılarak maksimal ergodik teoremin ispatı ele alınmaktadır. İkinci kısımda iki ergodik maksimal fonksiyonun bir birine eşit olma durumu incelenmiştir. Üçüncü kısımda bu ayrışımlar yardımıyla maksimal fonksiyon ve $f \log^{+} f$ fonksiyonunun integrallenebilirliği arasındaki ilişki verilmektedir. Dördüncü kısımda ergodik kare fonksiyonlar tanıtılmıştır ve ergodik kare fonksiyonun maksimal eşitsizliğini sağladığı gösterilmektedir. Son kısımda ise hareketli ortalamaya göre kare fonksiyonu tanımı verilmiş olup, integrallenebilir oldukları ve böylelikle hemen hemen her yerde sonlu oldukları gösterilmiştir.

SUMMARY

The convergence of $A_n f(x)$ average on the $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ dynamic system is the basic question of the ergodic theory. Maximal inequality techniques can be used for the solution of convergence problems occuring in ergodic theory and other fields of analysis. In additon to consideration of a different proof of maximal ergodic theorem, the assurance of maximal ergodic theorem by ergodic maximal function and square ergodic functions was shown.

This thesis consists of four sections. In the first section, previous studies and literature are introduced. In the second sections, general definitions and theorems that are essential in this study are given. In the third section used material and methods are explained. The fourth section consists of five parts. In the first part, using the decomposition given by Kakutani, proof of ergodic theory is handled. In the second part, the case of being equal of the two ergodic maximal functions is investigated. In the third part, by the help of these decompositions, integrability relation between maximal function and $f \log^+ f$ functions are given In the fourth part, ergodic square functions are introduced and the assurance of maximal inequality by ergodic square function are shown. In the last part of it, the definition of square function according to moving average are given and their integrability, and thus their almost everwhere finity are shown.