

**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ÇATLAK İÇEREN DEĞİŞKEN KESİTLİ KİRİŞLERDE TİTREŞİM
PROBLEMİNİN SONLU ELEMANLAR METODUYLA MODELLENMESİ**

Mehmet HASKUL

MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**ŞANLIURFA
2010**

**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ÇATLAK İÇEREN DEĞİŞKEN KESİTLİ KİRİŞLERDE TİTREŞİM
PROBLEMİNİN SONLU ELEMANLAR METODUYLA MODELLENMESİ**

Mehmet HASKUL

MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**ŞANLIURFA
2010**

Doç. Dr. Murat KISA danışmanlığında, Mehmet HASKUL'un hazırladığı "Çatlak İçeren Değişken Kesitli Kirişlerde Titreşim Probleminin Sonlu Elemanlar Metoduyla Modellenmesi" konulu bu çalışma 29.01.2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Makine Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Murat KISA

Üye : Doç. Dr. M.Arif GÜREL

Üye : Yrd. Doç. Dr. Tamer ÖZBEN

Bu Tezin Makine Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Prof. Dr. Mehmet CİCİ
Enstitü Müdür V.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZ	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜRLER	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
SİMGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	2
3. MATERYAL ve YÖNTEM	5
3.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi	5
3.1.1. Eleman denklemlerinin elde edilmesi	7
3.1.2. Sonlu elemanlar yönteminde kullanılan elemanlar	8
3.1.3. İnterpolasyon fonksiyonlarının seçimi	8
3.1.4. Eleman rijitlik matrisinin oluşturulması	9
3.1.5. Sistem rijitlik matrisinin oluşturulması	9
3.1.6. Sisteme etki eden kuvvetlerin bulunması	9
3.1.7. Sınır şartlarının belirlenmesi	10
3.2. Kirişlerde Titreşim Analizi	10
3.2.1. Değişken kesitli bir kirişin titreşim analizi	10
3.2.2. Kiriş elemanı için rijitlik ve kütle matrislerinin elde edilmesi.....	11
3.2.3. Değişken kesitli kirişler için rijitlik matrisi	11
3.2.4. Basit eğilme hali için rijitlik matrisi.....	12
3.2.5. Eksenel yüke maruz değişken kesitli kiriş için rijitlik matrisi.....	22
3.2.6. Genişliği doğrusal değişen bir kiriş elemanı için rijitlik matrisi.....	26
3.2.7. Genişliği doğrusal değişen bir kiriş elemanı için kütle matrisi.....	29
3.2.8. Kalınlığı doğrusal değişen bir kiriş elemanı için rijitlik matrisi.....	32
3.2.9. Kalınlığı doğrusal değişen bir kiriş elemanı için kütle matrisi.....	34
3.2.10. Kalınlığı ve genişliği doğrusal değişen bir kiriş elemanı için rijitlik matrisi	37
3.2.11. Kalınlığı ve genişliği doğrusal değişen bir kiriş elemanı için kütle matrisi.....	38
3.3. Çatlak İçeren bir kirişin titreşim analizi	43
3.3.1. Çatlaktan dolayı meydana gelen direngenliğin bulunması	44
3.3.2. Gerilme yığılma faktörü	44
3.3.3. Gerilme yığılma faktörünün analitik ifadesi	46
3.3.4. Gerilme yığılma faktörü ve şekil değiştirme enerjisi salıverim oranı arasındaki bağıntı	48
3.3.5. Esneklik (kompliyans) katsayıları ve matrisi	48
3.3.6. Dikdörtgen kesitli bir kiriş elemanı için fleksibilite katsayılarının bulunması	49
3.3.7. Esneklik ve rijitlik matrislerinin oluşturulması	50
3.3.8. Çatlak içeren değişken kesitli bir kiriş elemanı için titreşim analizi	51
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	52
4.1. Bir Ucu Sabit Diğer Ucu Kayıcı Kiriş	52
4.1.1. Problemin sonlu elemanlar yöntemiyle çözümü	52
4.1.2. Önerilen çözüm metodunun doğruluğunun araştırılması.....	59

4.2. Bir Ucu Sabit Diğer Ucu Kayıcı Kalınlığı Doğrusal Değişen Kiriş.....	60
4.2.1. Bulgular.....	69
4.3. Bir Ucu Sabit Diğer Ucu Kayıcı Kalınlığı ve Genişliği Doğrusal Değişen Kiriş.....	70
4.3.1. Bulgular.....	75
4.4. Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Kalınlığı Doğrusal Değişen Kiriş	75
4.4.1. Bulgular.....	82
4.5. Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Kalınlığı ve Genişliği Doğrusal Değişen Kiriş	83
4.5.1. Bulgular.....	90
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	91
5.1. Sonuçlar	91
5.2. Öneriler	92
KAYNAKLAR.....	93
ÖZGEÇMİŞ.....	96
ÖZET.....	97
SUMMARY.....	98

ÖZ

Yüksek Lisans Tezi

**ÇATLAK İÇEREN DEĞİŞKEN KESİTLİ KİRİŞLERDE TİTREŞİM
PROBLEMİNİN SONLU ELEMANLAR METODUYLA MODELLENMESİ**

Mehmet HASKUL

**Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Mühendisliği Anabilim dalı**

**Danışman : Doç. Dr. Murat KISA
Yıl: 2010 , Sayfa: 98**

Bu çalışmada çatlak içeren değişken kesitli kirişlere ait titreşim analizi yapılmıştır. Kirişin dinamik karakteristiklerini (doğal frekans ve vektör) hesaplamak için sonlu elemanlar metodu kullanılarak bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Kirişin çatlak bölgesi, çatlaktan dolayı meydana gelen yerel esnekliğe bağlı olarak kütsüz bir yay şeklinde modellenmiştir. Yayın rijitliği, kırılma mekaniği teorileri kullanılarak hesaplanan gerilme yığılma faktörü ve şekil değiştirme enerjisi salıverinim oranlarına ait esneklik matrisinin tersi alınarak türetilmiştir. Önerilen metodu açıklamak, çatlak derinliği ve yerinin doğal frekans ve doğal vektör üzerindeki etkilerini araştırmak için çeşitli örnekler verilmiştir. Bu çalışma ile elde edilen sonuçlar ile literatürde bulunan sonuçlar karşılaştırılarak sonuçlar arasında iyi bir uyum olduğu görülmüştür. Bu da önerilen metodun basit ve güvenilir olduğunu göstermiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Değişken kesitli kiriş, titreşim, sonlu elemanlar metodu, çatlak

ABSTRACT

Master Thesis

**FINITE ELEMENT METHOD FOR THE VIBRATION OF CRACKED
BEAMS WITH VARYING CROSS SECTION**

Mehmet HASKUL

**Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mechanical Engineering**

**Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat KISA
Year: 2010, Page: 98**

In this study, the vibration analysis of the non-uniform cracked beams has been investigated. A computer program using the finite element method has been written to find the dynamical characteristics (natural frequencies and mode shapes) of the beam. The cracked section in the beam has been modeled by a massless spring whose flexibility depends on the local flexibility induced by the crack. The stiffness of spring has been derived from the linear elastic fracture mechanics theory as the inverse of the compliance matrix calculated using stress intensity factors and strain energy release rate expressions. Some examples have been given to explain the proposed method and investigate the effects of the depth and location of cracks on the natural frequencies and mode shapes. The results of current study and those in the literature are compared and good agreements have been found. Consequently it is shown that proposed method is reliable and simple.

KEY WORDS: Non uniform beam, vibration, finite element method, crack

TEŐEKKÜR

Bu tez alıőmasının hazırlanmasında baőından sonuna kadar her aőamasında bana yardımcı olan danıőmanım Do. Dr. Murat KISA'ya, ayrıca maddi ve manevi desteğini hiç esirgemeyen aileme teőekkürlerimi sunarım.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 3.1. Bazı sonlu eleman tipleri... ..	6
Şekil 3.2. Değişken kesitli bir kiriş elemandaki moment ve kuvvetlerin gösterimi	11
Şekil 3.3. Değişken kesitli kiriş elemana ait serbestlik dereceleri	11
Şekil 3.4. Basit eğilme etkisindeki değişken kesitli bir kirişe uygulanan kuvvet ve momentler	13
Şekil 3.5. Basit eğilme etkisindeki değişken kesitli bir kirişte serbestlik dereceleri.....	13
Şekil 3.6. Kesim yapılan bir kirişte ortaya çıkan kesit tesirleri	15
Şekil 3.7. Kesim yapılan bir kirişte ortaya çıkan kesit tesirleri.....	17
Şekil 3.8. Kirişe ait serbest cisim diyagramı	20
Şekil 3.9. Eksenel yüke maruz değişken kesitli bir kirişte yer değiştirmeler ile ilgili yükler...	22
Şekil 3.10. Sağ tarafı sabit tutulup sol tarafına eksenel yük uygulanan değişken kesitli kiriş...	23
Şekil 3.11. Sol tarafı sabit tutulup sağ tarafına eksenel yük uygulanan değişken kesitli kiriş...	24
Şekil 3.12. Eksenel yüke maruz değişken kesitli kiriş	25
Şekil 3.13. Genişliği doğrusal değişen değişken kesitli kiriş.....	26
Şekil 3.14. Genişliği doğrusal değişen kirişin üstten görünümü	27
Şekil 3.15. Kalınlığı doğrusal değişen değişken kesitli kiriş	32
Şekil 3.16. Kalınlığı ve genişliği doğrusal olarak değişen değişken kesitli kiriş	37
Şekil 3.17. Temel deformasyon modları	45
Şekil 3.18. Polar koordinat sisteminde çatlak ucundaki gerilmeler	45
Şekil 3.19. Çatlak içeren değişken kesitli kiriş ve yükleme durumu	47
Şekil 4.1. Tek çatlak içeren bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kiriş	52
Şekil 4.2. Değişken kesitli bir kirişin SEM modeli	53
Şekil 4.3. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı olan kirişin çatlaklı doğal frekansının çatlaksız doğal frekansına olan oranı	58
Şekil 4.4. Tek çatlaklı bir ucu sabit diğer ucu kayıcı değişken kesitli kiriş.....	61
Şekil 4.5. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0.8$, çatlak yeri $L_c/L=0.1$, $L_c/L=0.3$, $L_c/L=0.5$ olarak alınan kirişin 1. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi	61
Şekil 4.6. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0.8$, çatlak yeri $L_c/L=0.1$, $L_c/L=0.3$, $L_c/L=0.5$ olarak alınan kirişin 2. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi	62
Şekil 4.7. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0.8$, çatlak yeri $L_c/L=0.1$, $L_c/L=0.3$, $L_c/L=0.5$ olarak alınan kirişin 3. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi	62
Şekil 4.8. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0.8$, çatlak oranı $a/b=0.4$, $a/b=0.6$, $a/b=0.8$ olarak alınan kirişin 1. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi	63
Şekil 4.9. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0.8$, çatlak oranı $a/b=0.4$, $a/b=0.6$, $a/b=0.8$ olarak alınan kirişin 2. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi	63
Şekil 4.10. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0.8$, çatlak oranı $a/b=0.4$, $a/b=0.6$, $a/b=0.8$ olarak alınan kirişin 3. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi	64
Şekil 4.11. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 1. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi ...	65
Şekil 4.12. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 2. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi ...	65
Şekil 4.13. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 3. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi ...	66
Şekil 4.14. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0.8$ ve çatlak oranı $a/b=0.5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 1. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	66

Şekil 4.15. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 2. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	67
Şekil 4.16. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen kiriş için kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 3. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	67
Şekil 4.17. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak yeri $L_c/L=0,5$ olan kiriş için 1. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	68
Şekil 4.18. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak yeri $L_c/L=0,5$ olan kiriş için 2. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	68
Şekil 4.19. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak yeri $L_c/L=0,5$ olan kiriş için 3. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	69
Şekil 4.20. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$, çatlak oranı $a/b=0,4$, $a/b=0,6$, $a/b=0,8$ olarak alınan kirişin 1. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi	70
Şekil 4.21. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$, çatlak oranı $a/b=0,4$, $a/b=0,6$, $a/b=0,8$ olarak alınan kirişin 2. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi.....	71
Şekil 4.22. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$, çatlak oranı $a/b=0,4$, $a/b=0,6$, $a/b=0,8$ olarak alınan kirişin 3. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi	71
Şekil 4.23. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı ve genişliği değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 1. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	72
Şekil 4.24. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı ve genişliği değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 2. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	72
Şekil 4.25. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı ve genişliği değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 3. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	73
Şekil 4.26. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı, kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 1. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	73
Şekil 4.27. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı, kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 2. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	74
Şekil 4.28. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı, kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 3. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	74
Şekil 4.29. Tek çatlaklı bir ucu ankastre diğer ucu serbest değişken kesitli kiriş.....	76
Şekil 4.30. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$, çatlak yeri $L_c/L=0,1$, $L_c/L=0,3$, $L_c/L=0,5$ olarak alınan kirişin 1. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi	76
Şekil 4.31. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$, çatlak yeri $L_c/L=0,1$, $L_c/L=0,3$, $L_c/L=0,5$ olarak alınan kirişin 2. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi	77
Şekil 4.32. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest, kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$, çatlak yeri $L_c/L=0,1$, $L_c/L=0,3$, $L_c/L=0,5$ olarak alınan kirişin 3. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi	77
Şekil 4.33. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$, çatlak oranı $a/b=0,4$, $a/b=0,6$, $a/b=0,8$ olarak alınan kirişin 1. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi	78
Şekil 4.34. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$, çatlak oranı $a/b=0,4$, $a/b=0,6$, $a/b=0,8$ olarak alınan kirişin 2. doğal frekans	

değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi.....	78
Şekil 4.35. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen, , kalınlık oranı $DR/DL=0.8$, çatlak oranı $a/b=0.4$, $a/b=0.6$, $a/b=0.8$ olarak alınan kirişin 3. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi	79
Şekil 4.36. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 1. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi....	79
Şekil 4.37. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 2. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi....	80
Şekil 4.38. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 3. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi....	80
Şekil 4.39. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 1. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi.....	81
Şekil 4.40. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 2. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	81
Şekil 4.41. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 3. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	82
Şekil 4.42. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0.8$, çatlak yeri $Lc/L=0.1$, $Lc/L=0.3$, $Lc/L=0.5$ olarak alınan kirişin 1. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi	83
Şekil 4.43. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0.8$, çatlak yeri $Lc/L=0.1$, $Lc/L=0.3$, $Lc/L=0.5$ olarak alınan kirişin 2. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi	84
Şekil 4.44. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0.8$, çatlak yeri $Lc/L=0.1$, $Lc/L=0.3$, $Lc/L=0.5$ olarak alınan kirişin 3. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi.....	84
Şekil 4.45. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0.8$, çatlak oranı $a/b=0.4$, $a/b=0.6$, $a/b=0.8$ olarak alınan kirişin 1. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi	85
Şekil 4.46. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0.8$, çatlak oranı $a/b=0.4$, $a/b=0.6$, $a/b=0.8$ olarak alınan kirişin 2. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi.....	85
Şekil 4.47. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0.8$, çatlak oranı $a/b=0.4$, $a/b=0.6$, $a/b=0.8$ olarak alınan kirişin 3. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi.....	86
Şekil 4.48. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 1. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	86
Şekil 4.49. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 2. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	87
Şekil 4.50. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 3. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	87
Şekil 4.51. Bir ucu sabit diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 1. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	88
Şekil 4.52. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 2. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	88
Şekil 4.53. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 3. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi	89

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa No
Çizelge 4.1. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kirişe ait süreklilik tablosu.....	55
Çizelge 4.2. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı çatlak içeren kirişe ait süreklilik tablosu.....	57
Çizelge 4.3. Çatlaksız ve çatlaklı kirişe ait doğal frekans değerleri.....	58
Çizelge 4.4. Kalınlığı lineer değişen kirişin serbest titreşim analizinde literatür ve önerilen programla elde edilen sonuçların karşılaştırılması.....	59
Çizelge 4.5. Kalınlığı ve genişliği lineer değişen kirişin serbest titreşim analizinde literatür ve önerilen programla elde edilen sonuçların karşılaştırılması.....	60

SİMGELER DİZİNİ

M	Kütle Matrisi
C	Sönüm Katsayısı
K	Rijitlik Matrisi
x	Yer Değiştirme
$f(t)$	Uygulanan Kuvvet
w^2	Doğal Frekans
φ	Doğal Vektör
L	Kirişin Boyu
P	Eksenel Kuvvet
Q	Kesme Kuvvet
u	x Eksenine Doğrultusundaki Yer Değiştirmeler
v	y Eksenine Doğrultusundaki Yer Değiştirmeler
θ	z Eksenine Göre Dönme
$M(x)$	Eğilme Momenti
E	Elastisite Modülü
$I_z(x)$	Atalet Momenti
A_i, B_i	Fleksibilite Matrisi
D_i	Determinant
ΣM	Toplam Moment
σ	Gerilme
ε	Birim Şekil Değiştirme
$A(x)$	x Mesafesindeki Kesit Alanı
ρ	Yoğunluk
N	Şekil Fonksiyonu Matrisi
$[k]^A$	Eksenel Rijitlik Matrisi
$[k]^B$	Eğilme Rijitlik Matrisi
$[m]^A$	Eksenel Kütle Matrisi
$[m]^B$	Eğilme Kütle Matrisi
f	Şekil Fonksiyonu
t_i	Kirişin Kalınlığı
$[K]_{cr}$	Çatlaktan dolayı meydana gelen rijitlik matrisi
$[K]_{wcr}$	Çatlak içeren yapının rijitlik matrisi
J	Şekil değiştirme enerjisi salıverinim oranı
K	Gerilme şiddet faktörü
a	Çatlak derinliği
V	Kesme kuvveti
ν	Poisson oranı

1. GİRİŞ

Günümüz mühendislik uygulamalarında özellikle uzay, inşaat ve makine sanayinde değişken kesitli yapılara sıklıkla rastlanmaktadır. Uzay sanayinde örneğin uçak kanatlarında değişken kesitli kiriş ile karşılaşılır. Mukavemetten de bilindiği üzere eşit mukavemetli çubuklarda kesit değişken yapıda olup kiriş dayanımı her noktada aynıdır. Eşit mukavemetli çubuklarda bazı durumlarda malzemeden oldukça kazanç sağlanabilmekte ve bu yüzden daha ekonomik yapı elde edilmektedir. Literatürde düzgün kesitli yapılara ait yapılmış olan yeterince çalışma olmasına karşın değişken kesitli yapılardaki çalışmalar daha sınırlıdır. Günümüz yapılarında maksimum güvenlik, minimum maliyet ve maksimum estetik ön planda olduğundan yapıdaki fazla malzemeler minimuma indirilmelidir ve buna bağlı olarak ta birçok eleman değişken kesitli hale gelmektedir.

Bu çalışmada öncelikle değişken kesitli kirişler konusunda yapılmış olan çalışmalar detaylı olarak verilmiştir. Daha sonra değişken kesitli kirişlerin titreşim analizinde kullanılacak olan sonlu elemanlar sayısal yöntemi hakkında bilgi verilerek titreşim analizine geçilmiştir. Titreşim analizi için gerekli olan denklem sistemleri elde edilerek rijitlik ve kütle matrisleri çıkarılmıştır. Çatlaktan dolayı meydana gelecek olan rijitlik düşümü, lineer elastik kırılma mekaniği prensiplerinden faydalanarak elde edilmiş ve elde edilmiş olan kütle, rijitlik ve çatlaktan dolayı meydana gelen rijitlik matrislerini kullanarak değişken kesitli kirişlerin serbest titreşim analizini yapabilecek olan bir bilgisayar programı yazılmıştır. Program kullanılarak değişik sınır şartlarına sahip değişken kesitli çatlak içeren kirişlerin serbest titreşim analizi yapılmış ve elde edilen sonuçlar ile literatürdeki sonuçlar karşılaştırılarak önerilen çözüm yönteminin güvenilirliği ortaya konmuştur.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Değişken kesitli kirişlere birçok makine ve inşaat yapılarında rastlanmaktadır. Değişken kesitli yapıların önemine ilk olarak Amirikian (1972) tarafından değinilmiştir. Düzgün veya değişken kesitli kirişlerdeki statik yer değiştirmeler ve momentlerin tespitinde kullanılabilir manüel bir yaklaşık yöntem Newmark (1943) tarafından geliştirilmiştir. Değişken kesitli kirişlerin analizlerinde sıkça kullanılan yöntemlerin başında sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri gelmektedir (Ghali ve Neville, 1972; Martin, 1966). Sonlu elemanlar yönteminde, değişken kesitli kiriş genellikle yeterli sayıda düzgün kiriş elemanlarına bölünür.

Statik analizlerde değişken kesitli kiriş yeterince elemana bölünürse doğruya yakın sonuçlar elde edilebilmektedir. Değişken kesitli bir kirişin düzgün kesitli elemanlara bölünmesi yine de hata miktarının artmasına neden olur. Literatürde değişken kesitli kiriş elemana ait yapılan çalışmalar önemli fakat yetersizdir. Just (1975; 1977) değişken kesitli kirişlere ait rijitlik matrisini geliştirmiştir.

Kirchoff (1879) Bessel fonksiyonlarından faydalanarak değişken kesitli kirişlerin titreşim analizini yapan ilk araştırmacıdır. Değişken kesitli kirişlerin serbest titreşim analizi konusunda birçok araştırmacı çalışmalar yapmıştır (Suppiger ve Talep, 1956; Cranch nad ve Adler,1956; Conway ve Becker, 1964; Conway ve Dobil, 1965; Wang, 1967; Mabie ve Rogers, 1972; Mabie ve Rogers 1976; Gorman, 1975).

Kenarların değişimi doğrusal değil de herhangi bir fonksiyona bağlı şekilde değişen kirişlere ait en genel çözüm Wang (1967) tarafından geliştirilmiştir. Wang çalışmasında genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar yardımıyla modal çözümü elde etmiştir. Basit değişken kesitli kirişlere ait frekans analizleri, yaklaşık analitik ve nümerik tekniklerle analiz edilmiştir. Martin (1956) perturbasyon tekniğiyle, Gaines

ve Volterra (1966; 1968) Euler ve Timoshenko kiriş teorileriyle ve Klein (1974) Rayleigh-Ritz prosedürüyle serbest titreşim analizlerini gerçekleştirmişlerdir.

Sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemiyle titreşim analizi karşımıza özdeğer problemlerini çıkarır ve genellikle matris iterasyon yöntemleriyle çözülür. Rissone ve Williams (1965) Euler ve Timoshenko kiriş teorilerini kullanarak değişken kesitli kirişlere ait detaylı bir frekans analizini sonlu farklar yöntemiyle gerçekleştirmiştir.

Sonlu elemanlar yönteminde, yayılmış kütle matrisleri kullanımıyla titreşim analizi problemlerindeki doğruluk oranı artmıştır (Archer, 1963). Lindberg (1965) kübik bir yer değiştirme fonksiyonu kullanarak dikdörtgen, dairesel veya üçgen değişken kesitli kiriş elemanlar geliştirerek titreşim analizi yapmış ve son derece doğru sonuçlar elde etmiştir. Gallagher ve Lee (1970) kübik bir yer değiştirme fonksiyon esaslı değişken kesitli bir kiriş geliştirerek serbest titreşim analizleri yapmıştır.

Thomas ve Dokumacı (1973) altıncı dereceden Hermitian polinomları kullanarak değişken kesitli bir eleman geliştirmişlerdir. Kolousek (1973) genel değişken kesitli bir kiriş elemana ait dinamik rijitlik matrisini geliştirmiştir. Avakian ve Bestos (1976) genel ve doğrusal olmayan değişken kesitli kirişlere ait serbest titreşim problemini dinamik rijitlik matrisleri yardımıyla analiz etmişlerdir. Karabalis ve Bestos (1983) çalışmalarında genişliği sabit, kalınlığı değişen kirişlerin statik, dinamik ve stabilite analizini yapabilen bir numerik yapı önermişlerdir.

Friedman ve Kosmatka (1992) herhangi bir formda olan değişken kesitli kirişlere ait rijitlik matrisini geliştirmişlerdir. Friedman ve Kosmatka (1993) kayma deformasyonunu göz önüne alarak değişken kesitli bir kirişe ait eğilme rijitlik matrisini hesaplamışlardır. Baker (1996) çalışmasında prizmatik olmayan yapılarda meydana gelen küçük yer değiştirmeleri bulan kapalı formda bir çözüm yapısı geliştirmiştir. De Rosa ve Auciello (1996) esnek sınır şartlı doğrusal değişken kesitli kirişlerin dinamik davranışlarını araştırmışlardır. Kirişe ait hareket denklemini Bessel fonksiyonunu kullanarak çözmüşlerdir. Al-Gahtani (1996) değişken kesitli

elemanlara ait rijitlik matrisi terimlerinin kapalı form çözümlerini verecek basit bir yöntem önermişlerdir. Çalışmalarında sınır integral yöntemini kullanmışlardır.

Colugna (1997) iki ve üç boyutlu prizmatik olmayan elemanlara ait elastik rijitlik matrislerini geleneksel kiriş teorisine göre bulacak bir yöntem ortaya koymuştur. Bu çalışmasında kayma etkisi göz önüne alınmamıştır. Qiusheng, Hong ve Guiging (1996) değişken kesitli çubukların statik ve dinamik analizini yapmışlardır. Data ve Sil (1996) değişken kesitli konsol kirişlerin doğal frekanslarını bulmuşlardır.

Takahashi (1998) transfer matrisi yöntemini kullanarak eksenel yüklü tek çatlak içeren değişken kesitli kolonların burkulma ve titreşim analizini yapmıştır. Franciosi ve Mecca (1998) değişken kesitli kirişin statik analizi için üç tane sonlu eleman çeşidi önermiştir. Bu elemanların performansı çeşitli örneklerle kontrol edilerek elemanların güvenli olduğu gösterilmiştir. Al-Gahtani ve Khan (1998) prizmatik olmayan kirişlerin genel sınır şartları için bir analiz yöntemi gerçekleştirmişlerdir. Analizlerinde sınır integral yöntemini kullanmıştır.

Zheng ve Fan (2001) birden fazla çatlak içeren değişken kesitli bir kirişin doğal frekanslarını fourier serilerini kullanarak bulmuştur. Li (2002) çalışmasında birden fazla çatlak içeren kirişlerin serbest titreşim analizini yapmıştır. Modelinde kiriş kesitinde çatlaktan dolayı meydana gelen bölgesel esnekliği kütesiz bir yay ile modellemiştir. Ruta (2002) elastik zemin üzerinde değişken kesitli çubuklara ait bir dinamik rijitlik matrisi geliştirmiştir. Mazanoğlu ve Sabuncu (2009) çok çatlaklı değişken kesitli kirişlerin eğilme titreşim analizini yapmışlardır.

3.MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi

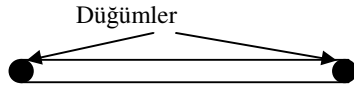
Sonlu elemanlar yöntemi; analitik olarak çözümü çok zor ve bazen de imkânsız olan problemlerin daha basit olan alt problemlere ayrılarak her birinin kendi içinde çözülmesi ve bu çözümlerin denge ve süreklilik göz önüne alınarak birleştirilmeleri ile tam çözümün bulunduğu sayısal bir çözüm yöntemidir. Yani bu yöntem sürekli bir sistemi problemin karakterine uygun sonlu elemanlara ayırarak elde edilen elemanlar üzerinde iç ve dış kuvvetlerin enerjisinin minimizasyonu ve sonra bu elemanların birleştirilmesi tarzında bir uygulama getirir (Topçu ve Taşgetiren, 1998).

Sonlu elemanlar çözüm yönteminde, geometrik olarak karmaşık olan çözüm bölgesi sonlu elemanlar olarak adlandırılan geometrik olan basit alt bölgelere ayrılır. Her elemandaki, sürekli fonksiyonların, cebirsel polinomların doğrusal kombinasyonu olarak tanımlanabileceği kabul edilir. Aranacak değerlerin her eleman içinde sürekli olan tanım denklemlerinin belirli noktadaki (düğüm noktaları) değerlerinin elde edilmesinin problemin çözümünde yeterli olacağı kabul edilir. Kullanılan yaklaşım fonksiyonları interpolasyon teorisinin genel kavramları kullanılarak polinomlardan seçilir. Seçilen polinomların derecesi ise çözülecek problemin tanım denkleminin derecesine ve çözüm yapılacak elemandaki düğüm sayısına bağlıdır.

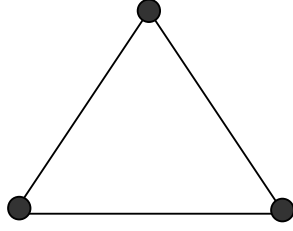
Sonlu elemanlar yöntemi, özellikle kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde çok etkin bir şekilde kullanılan bir yöntemdir. Sürekli bir ortamda, alan değişkenleri (gerilme, yer değiştirme, basınç, sıcaklık vs.) sonsuz sayıda farklı değere sahiptir. Eğer sürekli bir ortamın belirli bir bölgesinin de aynı şekilde sürekli ortam özelliği gösterdiği biliniyorsa, bu alt bölgede, alan değişkenlerinin değişimi

sonlu sayıda bilinmeyi olan bir fonksiyon ile tanımlanır. Bilinmeyen sayısının az ya da çok olmasına göre seçilen fonksiyon doğrusal ya da yüksek mertebeden olabilir.

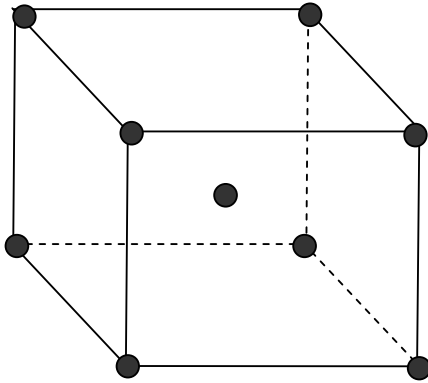
Sürekli ortamın alt bölgeleri de aynı karakteristik özellikleri gösteren bölgeler olduğundan, bu bölgelere ait olan denklem takımları birleştiğinde bütün sistemi ifade eden denklem takımı elde edilir. Denklem takımının çözümüyle de sürekli ortamdaki alan değişkenleri sayısal olarak elde edilir.



a) İki düğümlü çubuk eleman



b) Üç düğümlü üçgen eleman



c) Dokuz düğümlü üç boyutlu eleman

Şekil 3.1 Bazı sonlu eleman tipleri

Şekil 3.1’de bazı sonlu eleman tipleri verilmiştir. Sonlu elemanlar metodunda sistem sonlu elemana ayrılmaktadır. Sistemi oluşturan elemanların her birine sonlu

eleman denir. Bu elemanların birleştikleri noktalar da düğüm noktaları olarak adlandırılır. Eleman boyutları küçüldükçe problemin hata oranı azalmakta fakat çözüm süresi uzamaktadır. Sonlu eleman yüzeyinin şekil değiştirmesi, düğüm noktalarının deplasman parametresine bağlı olarak ifade edilebilir. Deplasman parametreleri; deplasman bileşenleri, dönmeler ve burulma eğriliği gibi deplasman vektörlerini içermektedir.

Sonlu elemanlar metodunu diğer nümerik yöntemlerden üstün kılan başlıca unsurlar şöyle sıralanabilir (Topçu ve Taşgetiren, 1998).

- a) Değişik boyut ve şekillere sahip sonlu elemanlar ile, analizi yapılacak geometri yeterli derecede hassas olarak modellenebilir.
- b) Ani kesit değişiklikleri, köşeler ve delikler modellenerek inceleme yapılabilir.
- c) Sonlu elemanlar yöntemine her elemana değişik malzeme ve geometrik özellikler atanabildiğinden, değişken kesitli ve birden fazla malzemeden oluşmuş problemler kolaylıkla modellenebilir.
- d) Değişik sınır şartlarının uygulaması kolaydır.

3.1.1. Eleman denklemlerinin elde edilmesi

Sonlu elemanlar metodunun temel prensibi, öncelikle bir elemana ait sistem özelliklerini içeren denklemlerin çıkartılıp tüm sistemi temsil edecek şekilde eleman denklemlerini birleştirerek sisteme ait doğrusal denklem takımının elde edilmesidir. Bir elemana ait denklemlerin elde edilmesinde değişik yöntemler kullanılabilir. Bunlar içinde en çok kullanılan dört temel yaklaşım direkt, varyasyonel, ağırlıklı kalanlar ve enerji dengesi yaklaşımlarıdır (Topçu ve Taşgetiren, 1998).

Sonlu elemanlar metodu ile problem çözümünde kullanılacak olan yaklaşım çözüm işleminde izlenecek yolu değiştirmez. Çözüm yöntemindeki adımlar şunlardır:

- Cismin sonlu elemanlara bölünmesi,
- İnterpolasyon fonksiyonlarının seçimi,

- Eleman rijitlik matrisinin teşkili,
- Sistem rijitlik matrisinin hesaplanması,
- Sisteme etki eden kuvvetlerin bulunması,
- Sınır şartlarının belirlenerek problemlere uygulanması,
- Sistem denklemlerinin çözümü.

3.1.2. Sonlu elemanlar yönteminde kullanılan elemanlar

Sonlu eleman problemin çözümünde ilk adım eleman tipinin belirlenmesi ve çözüm bölgesinin elemanlara ayrılmasıdır. Çözüm bölgesinin geometrik yapısı belirlenerek bu geometrik yapıya en uygun gelecek elemanlar seçilmelidir. Seçilen elemanların çözüm bölgesini temsil etme oranında, elde edilecek neticeler gerçek çözüme yaklaşmış olacaktır. Sonlu elemanlar metodunda kullanılan elemanlar boyutlarına göre dört sınıfa ayrılabilir. Bunlar; tek boyutlu, iki boyutlu, dönele ve üç boyutlu elemanlardır (Topçu ve Taşgetiren, 1998).

3.1.3. İnterpolasyon fonksiyonlarının seçimi

İnterpolasyon fonksiyonu alan değişkeninin (koordinat, yer değiştirme) eleman üzerindeki değişimini temsil etmektedir. İnterpolasyon fonksiyonunun belirlenmesi seçilecek eleman tipine ve çözülecek denklemin derecesine bağlıdır. Ayrıca interpolasyon fonksiyonları şu şartları sağlamalıdır (Topçu ve Taşgetiren, 1998).

- İnterpolasyon fonksiyonunda bulunan alan değişkeninin en yüksek dereceden bir önceki dereceye kadar olan kısmi türevleri eleman sınırlarında sürekli olmalıdır.
- İnterpolasyon fonksiyonunda bulunan alan değişkenlerinin bütün türevleri, eleman boyutları limitte sıfıra gitse bile alan değişkenini karakterize etmelidir.
- Seçilen interpolasyon fonksiyonu koordinat değişiminden etkilenmemelidir.

Hem yukarıdaki şartları sağlamaları hem de türev ve integral almadaki kolaylığından dolayı interpolasyon fonksiyonu olarak genelde polinomlar seçilir. Seçilen polinom, yukarıdaki şartların gerçekleşmesi ile uygun terimler içermelidir.

3.1.4. Eleman rijitlik matrisinin oluşturulması

Eleman rijitliğinin bulunması, elemana etki eden dış yükler ile alan değişkenleri arasında bir ilişki kurmak anlamına gelir. Eleman rijitliği elde edilirken çözülecek problemin konusu, alan değişkeni, seçilen eleman tipi, seçilen interpolasyon fonksiyonu, eleman özelliklerini elde ederken kullanılan yöntem gibi pek çok faktör göz önüne alınır. Etki eden bu faktörlere göre eleman rijitlik matrisi hesaplanır.

3.1.5. Sistem rijitlik matrisinin hesaplanması

Sistem rijitlik matrisi sistemin düğüm sayısı ve her düğümdeki serbestlik derecesine bağlı olarak belirlenir. Elemanlar için hesaplanan rijitlik matrisleri, eleman üzerindeki düğüm noktalarına bağlı olarak genel rijitlik matrisinde ilgili satır ve sütuna yerleştirilir. Farklı elemanlar tarafından ortak kullanılan düğümlerdeki terimler genel rijitlik matrisinin ilgili satır ve sütununda üst üste eklenmelidir. Elemanların düğüm numaralaması bir sistematiğe göre yapılırsa genel rijitlik matrisinde diagonal üzerinde üst üste eklenir. Genelde rijitlik matrisi simetriktir.

3.1.6. Sisteme etki eden kuvvetlerin bulunması

Bir problemde sisteme etki edebilecek kuvvetler şunlar olabilir (Topçu ve Taşgetiren, 1998).

- *Tekil kuvvetler:* Tekil kuvvetler hangi elemanın hangi düğümüne, hangi yönde etki ediyorsa genel kuvvet vektöründe etki ettiği düğüme karşılık gelen satıra yerleştirilir.
- *Yayıllı kuvvetler:* Bu kuvvetler bir kenar boyunca ya da bir alanda etkili olurlar.
- *Kütle kuvvetleri:* Eleman hacmi için geçerli olan merkezkaç kuvveti ve ağırlık kuvvetleri gibi kuvvetlerdir.

3.1.7. Sınır şartlarının belirlenmesi

Her problemin tabii ya da yapay sınır şartları vardır. Sınır şartları cismin çeşitli kısımlarındaki elastik yer değiştirmelerin ölçülebileceği bir referans sağlar (Topçu ve Taşgetiren, 1998).

3.2. Kirişlerde Titreşim Analizi

3.2.1. Değişken kesitli bir kirişin titreşim analizi

Kusursuz bir kiriş için hareket denklemi;

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t) \quad (3.1)$$

olarak verilir. Bu toplu bir kütle için hareket denklemdir. Burada $M, C, K, f(t)$ ve x sırası ile kütle, sönüm katsayısını, rijitliği, uygulanan kuvveti ve yer değiştirmeyi göstermektedir.

Serbest sönümsüz bir kiriş için hareket denklemi, $C = f(t) = 0$ alınarak

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (3.2)$$

olarak elde edilir. Yer değiştirme (x) aşağıda gösterildiği gibi ifade edilip yukarıda verilen (3.2) denkleme yerleştirilirse;

$$\left. \begin{aligned} x &= X \sin(\omega t + \beta) \\ \dot{x} &= \omega X \cos(\omega t + \beta) \\ \ddot{x} &= -\omega^2 X \sin(\omega t + \beta) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

serbest titreşim yapan bir kirişin hareket denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$\omega^2 M \varphi = K \varphi \quad (3.4)$$

$$(\omega^2 M - K) \varphi = 0 \quad (3.5)$$

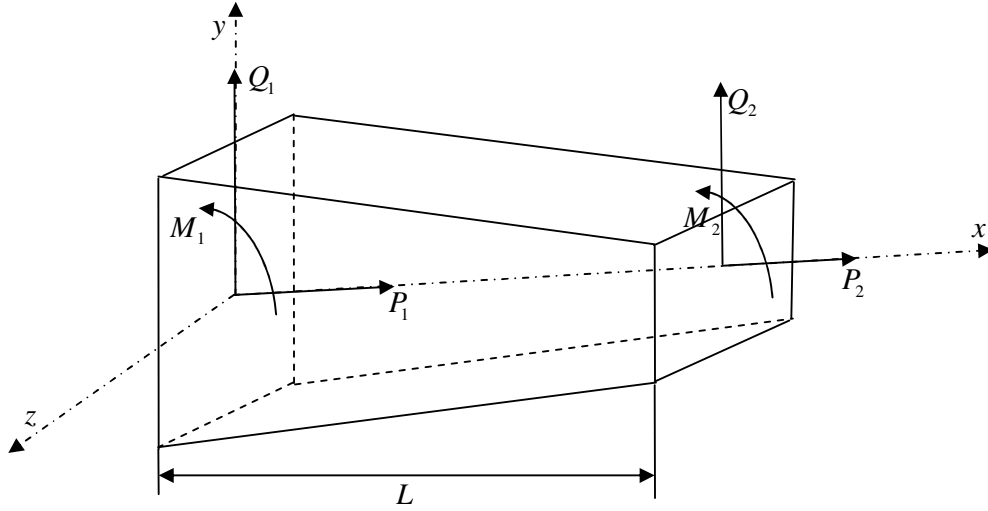
Burada ω^2 doğal frekansları, φ ise doğal vektörleri göstermektedir.

En son denklem bir öz değer problemidir. Bu çalışmada Jacobi yöntemi uygulanarak (3.5) eşitliği çözülmüştür. Bu eşitlikten görüleceği üzere çözüm yapılabilmesi için değişken kesitli kirişe ait sistem matrisleri (K, M) elde edilmelidir.

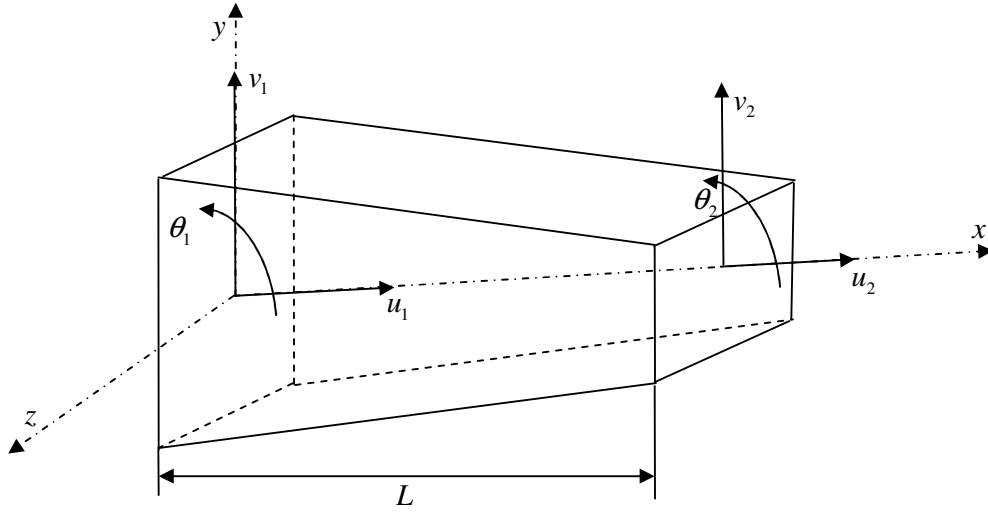
3.2.2. Kiriş elemanı için rijitlik ve kütle matrislerinin elde edilmesi

Bu çalışma ile iki düğümlü ve her düğümünde üç serbestlik derecesi olan değişken kesitli kiriş elemanı için rijitlik ve kütle matrisleri elde edilecektir.

3.2.3. Değişken kesitli kirişler için rijitlik matrisi



Şekil 3.2. Değişken kesitli bir kiriş elemandaki moment ve kuvvetlerin gösterimi



Şekil 3.3. Değişken kesitli kiriş elemana ait serbestlik dereceleri

Şekil 3.2'de görüldüğü gibi L boyunda olan izotropik ve değişken kesitli kiriş ele alınsın. x eksenini kirişin eksenine ile çakışmaktadır. P, Q, M sırasıyla düğümlerdeki aksenal ve kesme kuvvetleri ile eğilme momentini, u, v, θ ise sırasıyla x eksenine ve y

ekseni doğrultusundaki yer değiştirmeleri ve z eksenini etrafındaki d6nmeyi g6stermektedir. G6r6ld6ęu gibi her d6ę6mde 6ç serbestlik derecesi (u, v, θ) bulunmaktadır. Bir elemanda iki d6ę6m noktası olduğundan bir eleman için toplam 6 serbestlik derecesi olmaktadır. Dolayısıyla bir eleman için rijitlik matrisi 6×6 boyutunda, eleman serbestlik dereceleri vekt6r6 6×1 boyutunda ve eleman dış y6k vekt6r6 6×1 boyutunda olup simgesel olarak aşağıdaki gibi verilir.

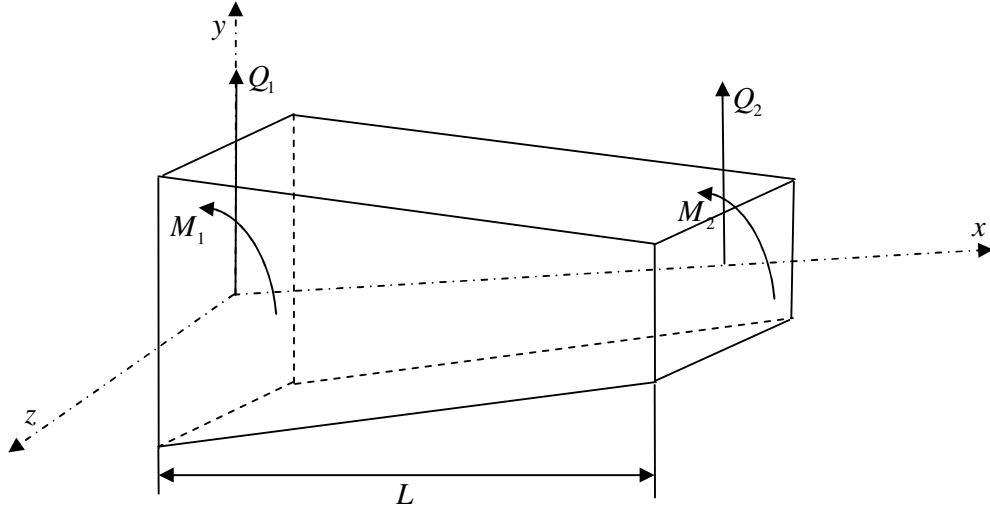
$$K_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (3.6)$$

$$\{Q\}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \{F\}_e = \begin{Bmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad \{F\}_e = [K]\{Q\}_e \quad (3.7)$$

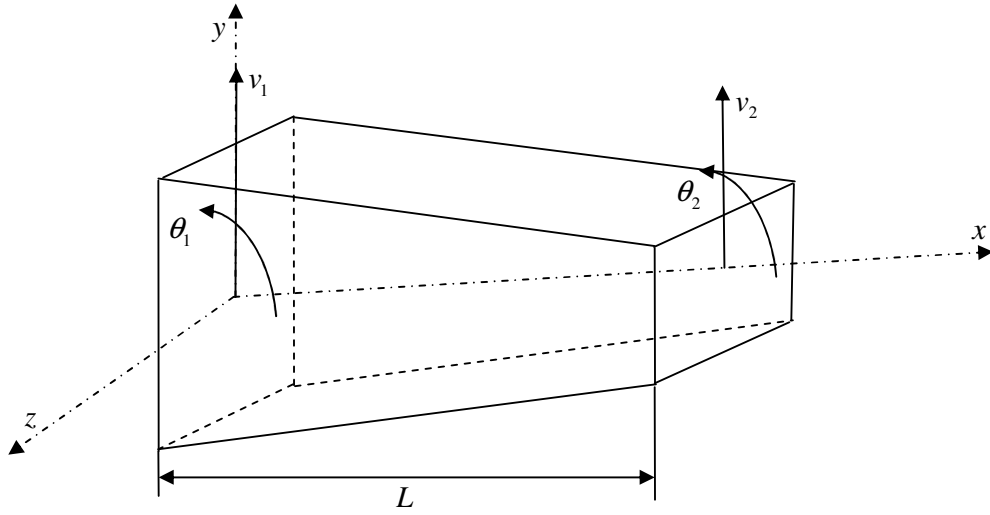
Değişken kesitli bir kirişe ait rijitlik matrisi, kirişin basit eğilme ve aksenal deformasyon halleri için elde edilecek rijitlik matrislerinin uygun biçimde birleştirilmesi ile elde edilecektir.

3.2.4. Basit eğilme hali için rijitlik matrisi

şekil 3.4 ve şekil 3.5’de basit eğilme etkisindeki değişken kesitli bir kirişteki eğilme momentleri, kesme kuvvetleri ile ilgili serbestlik dereceleri g6r6lmektedir.



Şekil 3.4. Basit eğilme etkisindeki değişken kesitli bir kirişe uygulanan kuvvet ve momentler



Şekil 3.5. Basit eğilme etkisindeki değişken kesitli bir kirişte serbestlik derecelerinin gösterimi

Yukarıdaki şekillerde görülen basit eğilme halindeki bir eleman için rijitlik matrisi, yük ve yer değiştirme vektörleri simgesel olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\left. \begin{aligned}
 [K^B] &= \begin{bmatrix} k_{11}^B & k_{12}^B & k_{13}^B & k_{14}^B \\ k_{21}^B & k_{22}^B & k_{23}^B & k_{24}^B \\ k_{31}^B & k_{32}^B & k_{33}^B & k_{34}^B \\ k_{41}^B & k_{42}^B & k_{43}^B & k_{44}^B \end{bmatrix}_{4 \times 4} \\
 \{Q\}^B &= \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}_{4 \times 1}, \{F\}^B = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}_{4 \times 1} \\
 \{F\}^B &= [K^B] \cdot \{Q\}^B
 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$[K^B]_{4 \times 4}$ basit eğilmede meydana gelen eğilme rijitlik matrisidir ve Maxwell teoremine göre bulunur. $[K^B]$ 'nin bulunması için iki adımdan faydalanılır. İlk önce bir fleksibite yöntemi geliştirilerek birinci ve ikinci düğümler için kuvvet -yer değiştirme ilişkisi elde edilir. Daha sonra birinci ve ikinci düğümlerin etkileşim terimleri dengeden elde edilir. Eğilme rijitlik matrisindeki

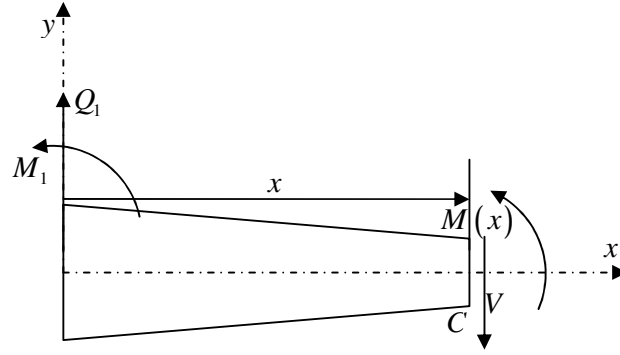
$$(K_{ij} \quad i, j = 1, 2) \quad \begin{bmatrix} k_{11}^B & k_{12}^B \\ k_{21}^B & k_{22}^B \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

rijitlik katsayılarını elde etmek için v_2 ve θ_2 sıfır alınarak Q_1, M_1 yükleri altında v_1 ve θ_1 eşitlikleri aşağıdaki adımlar sonucunda elde edilecektir.

Değişken kesitli kiriş için şekil değiştirme enerjisi;

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M(x)^2}{EI_{zz}(x)} dx \quad (3.10)$$

eşitliği ile verilir. Burada $M(x), E, I_{zz}(x)$ sırası ile kiriş kesitindeki eğilme momentini, elastisite modülünü ve kesit boyunca değişen alan atalet momentini göstermektedir. $M(x)$ momentini bulmak için x mesafede bir kesim yapılsın.



Şekil 3.6. Kesim yapılan bir kirişte ortaya çıkan kesit tesirleri

Yukarıdaki şekilde C noktasına göre moment dengesi yazılarak $M(x)$ eğilme momenti elde edilir.

$$\begin{aligned} \sum M_C &= 0 \\ \left. \begin{aligned} M(x) + M_1 - Q_1 x &= 0 \\ M(x) &= Q_1 x - M_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.11) \end{aligned}$$

(3.11) eşitliğinin karesi alınarak;

$$M(x)^2 = Q_1^2 x^2 - 2Q_1 x M_1 + M_1^2 \quad (3.12)$$

şeklinde $M(x)^2$ elde edilir.

Birinci düğüm için yer değiştirme ile ilgili yükler arasındaki ilişki Castigliano'nun 2. teoremi kullanılarak bulunabilir.

$$v_1 = \frac{dU}{dQ_1} \quad (3.13)$$

$$\theta_1 = \frac{dU}{dM_1} \quad (3.14)$$

(3.13). eşitliğini oluşturmak için gerekli olan şekil değiştirme enerjisi (3.12) eşitliği ile verilen eğilme momentinden faydalanılarak elde edilir ve

$$\frac{dU}{dQ_1} = \left(\frac{1}{2} \int_0^L \frac{[Q_1^2 x^2 - 2Q_1 x M_1 + M_1^2]}{EI_{zz}(x)} dx \right) \quad (3.15)$$

eşitliği elde edilir. Gerekli işlemler yapılarak

$$\frac{dU}{dQ_1} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{2Q_1 x^2 - 2M_1 x}{EI_{zz}(x)} dx \quad (3.16)$$

elde edilir ve bu denklem matris formatına dönüştürülürse;

$$v_1 = \left[\int_0^L \frac{x^2}{EI_{zz}(x)} dx \quad - \int_0^L \frac{x}{EI_{zz}(x)} dx \right] \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

eşitliği elde edilir.

Benzer şekilde (3.14) eşitliğini oluşturmak için yine eğilme momentinden faydalanılarak bulunan şekil değiştirme enerjisi kullanılır ve

$$\frac{dU}{dM_1} = \left(\frac{1}{2} \int_0^L \frac{[Q_1^2 x^2 - 2Q_1 M_1 x + M_1^2]}{EI_{zz}(x)} dx \right) \quad (3.18)$$

eşitliği elde edilir ve gerekli işlemler yapılarak;

$$\frac{dU}{dM_1} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{-2Q_1 x + 2M_1}{EI_{zz}(x)} dx \quad (3.19)$$

elde edilen bu eşitlik matris formatına dönüştürülürse;

$$\theta_1 = \left[- \int_0^L \frac{x}{EI_{zz}(x)} dx \quad \int_0^L \frac{1}{EI_{zz}(x)} dx \right] \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

eşitliği elde edilir.

Flexibilite metoduna göre yer değiştirme ile ilgili yükler arasındaki eşitlik bulunacağı için (3.17) ve (3.20) eşitlikleri birleştirilir.

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^L \frac{x^2}{EI_{zz}(x)} dx & - \int_0^L \frac{x}{EI_{zz}(x)} dx \\ - \int_0^L \frac{x}{EI_{zz}(x)} dx & \int_0^L \frac{1}{EI_{zz}(x)} dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Bu eşitlik simgesel olarak

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 & -A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki A_1, A_2, A_3 terimleri;

$$A_i = \int_0^L \frac{x^{(i-1)}}{EI_{zz}(x)} dx, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.23)$$

eşitliği ile verilir. Buradaki A_i 'lerden oluşan matris fleksibilite matrisi olup bu matrisin tersi birinci düğüm için rijitlik matrisini verecek olup bu matris aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 & -A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \quad \text{Her iki tarafı } \begin{bmatrix} A_3 & -A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix}^{-1} \text{ ile çarpılırsa}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 & -A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{D_1} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

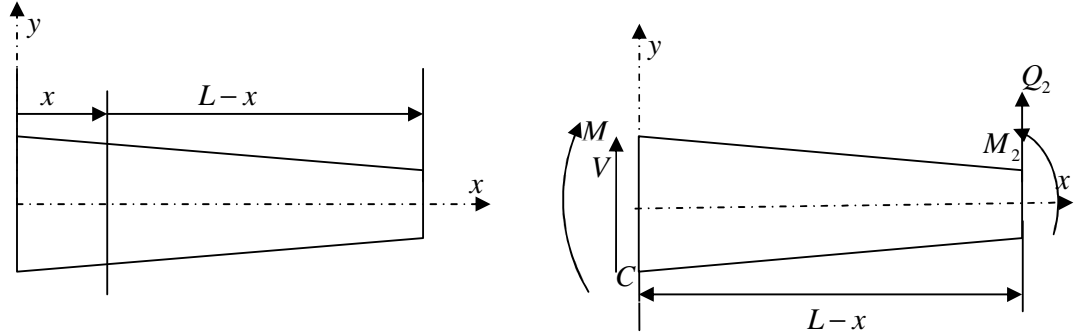
elde edilir. Burada D_1 matrisin determinantı olup

$$D_1 = A_1 \cdot A_3 - A_2^2 \quad (3.25)$$

ile bulunur.

Birinci düğümde yapılan işlemler benzer olarak ikinci düğüm için de yapılmalıdır.

Burada $v_1, \theta_1 = 0$ alınarak ikinci düğüme Q_2 ve M_2 yükleri uygulanır. Bu durumda eğilme momenti şöyle bulunur.



Şekil 3.7. Kesim yapılan bir kirişte ortaya çıkan kesit tesirleri

C noktasına göre moment dengesi yazılırsa;

$$\sum M_c = 0$$

$$\begin{cases} M(x) - Q_2(L-x) - M_2 = 0 \\ M(x) = Q_2(L-x) + M_2 \end{cases} \quad (3.26)$$

$$M(x)^2 = (Q_2(L-x))^2 + 2Q_2(L-x)M_2 + M_2^2 \quad (3.27)$$

elde edilir. v_2 ve θ_2 aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$v_2 = \frac{dU}{dQ_2} \quad (3.28)$$

$$\theta_2 = \frac{dU}{dM_2} \quad (3.29)$$

Değişken kesitli kirişlerde şekil değiştirme enerji denklemi yeniden yazılırsa;

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M(x)^2}{EI_{zz}(x)} dx$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(Q_2(L-x))^2 + 2Q_2(L-x)M_2 + M_2^2}{EI_{zz}(x)} dx \quad (3.30)$$

eşitliği elde edilir. (3.28) eşitliğini oluşturmak için aşağıdaki işlemler gerçekleştirilir.

$$v_2 = \frac{dU}{dQ_2} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{[Q_2^2(L-x)^2 + 2Q_2(L-x)M_2 + M_2^2]}{EI_{zz}(x)} dx \quad (3.31)$$

$$\frac{dU}{dQ_2} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{2Q_2(L-x)^2 + 2M_2(L-x)}{EI_{zz}(x)} dx \quad (3.32)$$

Yukarıdaki eşitlik matris formatında düzenlenirse;

$$v_2 = \left[\int_0^L \frac{(L-x)^2}{EI_{zz}(x)} dx \quad \int_0^L \frac{(L-x)}{EI_{zz}(x)} dx \right] \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

elde edilir.

Aynı işlemler (3.29) eşitliğinin oluşturulması için tekrar edilirse;

$$\theta_2 = \frac{dU}{dM_2} = \frac{d}{dM_2} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \frac{Q_2^2(L-x)^2 + 2Q_2(L-x)M_2 + M_2^2}{EI_{zz}(x)} dx \right] \quad (3.34)$$

$$\frac{dU}{dM_2} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{2M_2 + 2(L-x)Q_2}{EI_{zz}(x)} dx \quad (3.35)$$

sonucu elde edilir ve bu sonuç matris formatına dönüştürülürse;

$$\theta_2 = \left[\int_0^L \frac{(L-x)}{EI_{zz}(x)} dx \quad \int_0^L \frac{1}{EI_{zz}(x)} dx \right] \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

şeklinde elde edilir.

(3.33) ve (3.36) denklemler birleştirilirse,

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_3 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

eşitliği elde edilir.

Buradaki B_1, B_2, B_3 terimleri;

$$B_i = \int_0^L \frac{(L-x)^{i-1}}{EI_{zz}(x)} dx, \quad i=1,2,3 \quad (3.38)$$

eşitliği ile verilir. Buradaki B_i 'ler den oluşan matris fleksibilite matrisi olup bu matrisin tersi ikinci düğüm için rijitlik matrisini verecektir. Bu rijitlik matrisi aşağıdaki işlemler sonucunda elde edilecektir.

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_3 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \text{ Her iki tarafı } \begin{bmatrix} B_3 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}^{-1} \text{ ile çarpılırsa,}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_3 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{D_2} \begin{bmatrix} B_1 & -B_2 \\ -B_2 & B_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

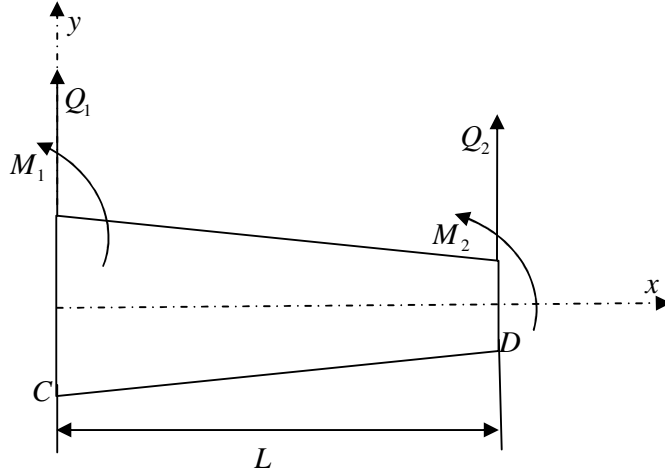
eşitliği elde edilir. Burada D_2 , matrisin determinantı olup aşağıdaki gibidir.

$$D_2 = B_1 \cdot B_3 - B_2^2 \quad (3.40)$$

İki düğümlü ve her düğümünde 2 serbestlik derecesi olan basit eğilme etkisindeki bir kiriş için 4x4 lük eğilme rijitlik matrisi (3.24) ve (3.39) denklemleri kullanılarak aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_1}{D_1} & \frac{A_2}{D_2} & k_{13}^B & k_{14}^B \\ \frac{A_2}{D_1} & \frac{A_3}{D_1} & k_{23}^B & k_{24}^B \\ k_{31}^B & k_{32}^B & \frac{B_1}{D_2} & \frac{-B_2}{D_2} \\ k_{41}^B & k_{42}^B & \frac{-B_2}{D_2} & \frac{B_3}{D_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

Yukarıdaki eşitlikte görülen ve birinci ve ikinci düğüm etkileşimini temsil eden $k_{13}, k_{14}, k_{23}, k_{24}$ terimleri bulunmalıdır. Bu terimler kuvvet ve moment dengesinden elde edilebilir. Değişken kesitli kirişe ait serbest cisim diyagramı Şekil 3.8.'de görülmektedir.



Şekil 3.8. Kirişe ait serbest cisim diyagramı

Yukarıda serbest cisim diyagramı verilen kiriş üzerinde statik denge denklemleri uygulanır.

$$\sum Fy = 0$$

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow Q_1 = -Q_2 \quad (3.42)$$

(3.41) denklemleri kullanılarak Q_1 ve Q_2

$$Q_1 = \frac{A_1}{D_1} v_1 + \frac{A_2}{D_1} \theta_1 + k_{13}^B v_2 + k_{14}^B \theta_2 \quad (3.43)$$

$$-Q_2 = -k_{31}^B v_1 - k_{32}^B \theta_1 - \frac{B_1}{D_2} v_2 + \frac{B_2}{D_2} \theta_2 \quad (3.44)$$

şeklinde verilir. Bu iki denklemin birbirine olan eşitliği (3.42) göz önüne alınırsa,

$$k_{1i}^B = -k_{3i}^B, \quad i = 3, 4 \quad (3.45)$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda k_{13} , k_{14} , k_{33} ve k_{34} terimleri

$$\left. \begin{aligned} k_{13} &= -k_{33} = \frac{-B_1}{D_2} \\ k_{14} &= -k_{34} = \frac{B_2}{D_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

olarak elde edilir. Rijitlik matrisinin simetrik olduğu bilindiğinden $k_{31} = k_{13}$, $k_{41} = k_{14}$ olarak alınır. (3.41) eşitliğindeki k_{23} ve k_{24} terimleri bulunduğu takdirde

basit eğilme etkisindeki değişken kesitli kiriş için eğilme rijitlik matrisi elde edilmiş olacaktır. Şekil 3.8.'de verilen serbest cisim diyagramında C noktasına göre moment alınırsa;

$$M_1 + M_2 + Q_2 L = 0 \quad (3.47)$$

olur. (3.41) denkleminde faydalanarak (3.48) eşitliği elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{A_2}{D_1} v_1 + \frac{A_3}{D_1} \theta_1 + k_{23}^B v_2 + k_{24}^B \theta_2 \\ M_2 &= k_{41}^B v_1 + k_{42}^B \theta_1 - \frac{B_2}{D_2} v_2 + \frac{B_3}{D_2} \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

(3.44) ve (3.48) eşitlikleri (3.47) eşitliğinden yerine yerleştirilerek aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{D_1} v_1 + \frac{A_3}{D_1} \theta_1 + k_{23}^B v_2 + k_{24}^B \theta_2 + k_{41}^B v_1 + k_{42}^B \theta_1 - \frac{B_2}{D_2} v_2 + \frac{B_3}{D_2} \theta_2 + k_{31}^B v_1 L + k_{32}^B \theta_1 L + \frac{B_1}{D_2} L v_2 - \frac{B_2}{D_2} L \theta_2 = 0 \\ v_1 \left(\frac{A_2}{D_1} + k_{41}^B + k_{31}^B L \right) + \theta_1 \left(\frac{A_3}{D_1} + k_{42}^B + k_{32}^B L \right) + v_2 \left(k_{23}^B - \frac{B_2}{D_2} + \frac{B_1}{D_2} L \right) + \theta_2 \left(k_{24}^B + \frac{B_3}{D_2} - \frac{B_2}{D_2} L \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Burada k_{24}^B aşağıdaki gibi elde edilir.

$$k_{24}^B = \frac{B_2 L - B_3}{D_2} \quad (3.50)$$

Benzer şekilde k_{23}^B terimini bulabilmek için D noktasına göre moment alınırsa;

$$M_1 + M_2 - Q_1 L = 0 \quad (3.51)$$

bu eşitlikten k_{23}^B terimi;

$$k_{23}^B = \frac{-A_2}{D_1} \quad (3.52)$$

olarak elde edilir. (3.41) eşitliği tekrar yazılırsa;

$$\left\{ \begin{array}{c} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{A_1}{D_1} & \frac{A_2}{D_1} & \frac{-B_1}{D_1} & \frac{B_2}{D_2} \\ & \frac{A_3}{D_1} & \frac{-A_2}{D_1} & \frac{B_2 \cdot L - B_3}{D_2} \\ & & \frac{B_1}{D_2} & \frac{-B_2}{D_2} \\ \text{simetrik} & & & \frac{B_3}{D_2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\} \quad (4.53)$$

$[K^B]_{4 \times 4}$ eğilme rijitlik matrisi elde edilir.

A_i ve B_i denklemleri bağımsız değildir ve birbirleriyle olan eşitliği yazılırsa,

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_1 L - A_2 \\ B_3 &= A_1 L^2 - 2A_2 L + A_3 \\ D_2 &= D_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

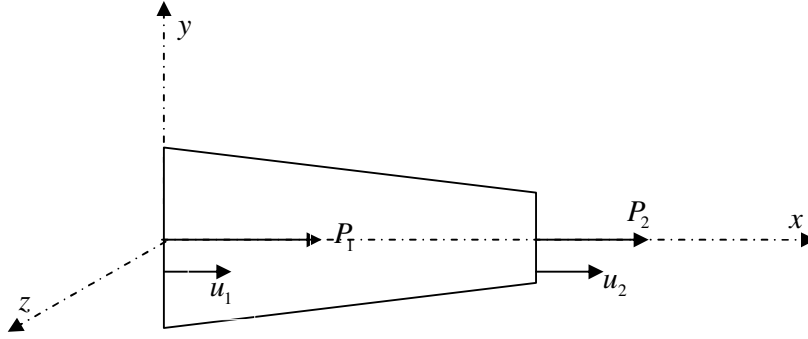
olarak elde edilir. (3.53) denklemi tekrar düzenlenerek aşağıdaki gibi elde edilir;

$$[K^B] = \frac{1}{D_1} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & -A_1 & A_1 L - A_2 \\ & A_3 & -A_2 & A_2 L - A_3 \\ & & A_1 & -(A_1 L - A_2) \\ \text{simetrik} & & & (A_1 L^2 - 2A_2 L + A_3) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Bu denklem basit eğilmeye maruz değişken kesitli bir kirişe ait eğilme rijitlik matrisidir.

3.2.5. Eksenel yüke maruz değişken kesitli kiriş için rijitlik matrisi

Eksenel yük altındaki bir kiriş elemana ait yer değiştirmeler ve ilgili yükler Şekil 3.9'da gösterilmiştir.



Şekil 3.9. Eksenel yüke maruz değişken kesitli bir kirişte yer değiştirmeler ile ilgili yükler

Değişken kesitli kirişte kuvvet ve yer değiştirme arasındaki bağıntı yazılırsa;

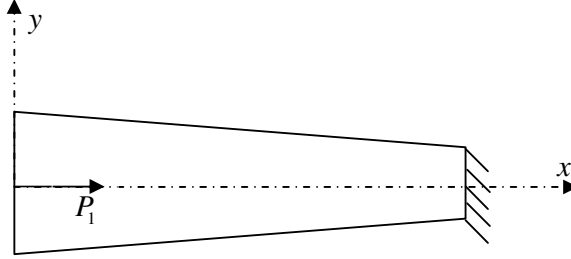
$$\{F^A\} = [K^A] \{q^A\} \quad (3.56)$$

Burada;

$$\{F^A\}^T = \{P_1, P_2\} \quad (3.57)$$

$$\{q^A\}^T = \{u_1, u_2\} \quad (3.58)$$

ile verilir. Fleksibilite metoduna göre ilk önce fleksibilite matrisi sonra da bu fleksibilite matrisinin tersi alınarak eksenel yüke maruz değişken kesitli kirişe ait eksenel rijitlik matrisi elde edilir.



Şekil 3.10. Sağ tarafı sabit tutulup sol tarafına eksenel yük uygulanan değişken kesitli kiriş

Şekil 3.10'da görüldüğü gibi kirişin sağ tarafı sabit tutulsun ve sol düğümüne bir P_1 kuvveti uygulansın. Bu durumda şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki gibi verilir.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \sigma \varepsilon A(x) dx \quad (3.59)$$

Burada σ gerilmeyi, ε birim şekil değiştirmeyi ve $A(x)$ ise x eksenindeki kesit alanını göstermektedir. Hooke kanununun

$$\sigma = E \varepsilon \quad (3.60)$$

olduğu bilinmektedir. (3.60) denklemini (3.59) eşitliğinde yerine yerleştirilirse;

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\sigma^2 A(x)}{E} dx \quad (3.61)$$

elde edilir. Gerilme, σ 'nın denklemini

$$\sigma = \frac{P_1}{A(x)} \quad (3.62)$$

olduğu bilinmektedir. Elde edilen bu eşitlik (3.61) eşitliğinde yerine yazılırsa, şekil değiştirme enerjisi;

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{P_1^2}{A(x)E} dx \quad (3.63)$$

olarak elde edilir.

Castigliano'nun ikinci teoremine göre, uygulanan P_1 kuvveti yönünde u_1 yer değiştirmesi;

$$u_1 = \frac{dU}{dP_1} = \int_0^L \frac{P_1}{A(x)E} dx \quad (3.64)$$

olarak elde edilir.

Burada;

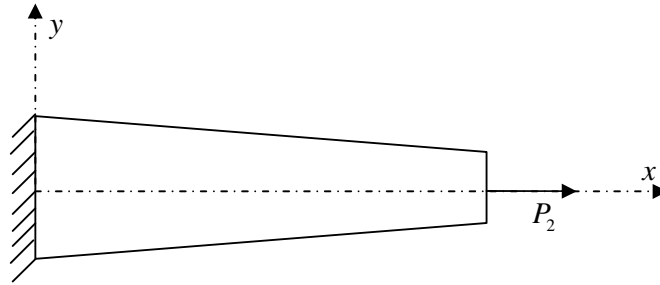
$$C = \int_0^L \frac{1}{A(x)E} dx \quad (3.65)$$

ile gösterilir ve (3.64) denklemi tekrar düzenlenirse;

$$u_1 = P_1 C \quad (3.66)$$

eşitliğine ulaşılır.

Uygulanan P_2 kuvveti ile ilgili yer değiştirme u_2 arasındaki bağıntıyı bulmak için yukarıda verilen yönteme benzer olarak kirişin sol tarafını sabitleyip sağ tarafa P_2 kuvveti uygulansın.



Şekil 3.11. Sol tarafı sabit tutulup sağ tarafına aksenal yük uygulanan değişken kesitli kiriş

Üstte verilen kısımda uygulanan işlemler ikinci düğüme de uygulanır ve şekil değiştirme enerjisi tekrar yazılırsa;

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{P_2^2}{A(x)E} dx \quad (3.67)$$

elde edilir.

Castigliano'nun ikinci teoremi uygulanarak P_2 kuvveti ile u_2 yer değiştirmesi ile arasındaki bağıntı;

$$u_2 = \frac{dU}{dP_2} = \int_0^L \frac{P_2}{A(x)E} dx \quad (3.68)$$

olarak elde edilir. (3.65) eşitliğinden faydalanılarak (3.68) eşitliği aşağıdaki gibi verilebilir.

$$u_2 = P_2 C \quad (3.69)$$

(3.66) ve (3.69) eşitlikleri matris formatında yazılırsa;

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [C \quad C] \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (3.70)$$

eşitliği elde edilir. Burada P_1 ve P_2 aksenal yükleri;

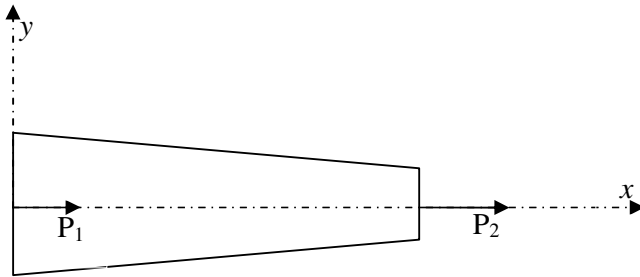
$$\begin{cases} P_1 = \frac{1}{C} u_1 \\ P_2 = \frac{1}{C} u_2 \end{cases} \quad (3.71)$$

olarak elde edilir.

(3.71) eşitliği matris formatında aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & k_{12} \\ k_{21} & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3.72)$$

Eşitlikten görüldüğü üzere k_{11} ve k_{22} bulunmuş olup k_{12} ve k_{21} değerleri aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 3.12. Aksenal yüke maruz değişken kesitli kiris

Şekil 3.12'den yararlanarak denge denklemleri yazılırsa;

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ P_1 + P_2 &= 0 \Rightarrow P_1 = -P_2 \end{aligned} \quad (3.73)$$

(3.72) denkleminde göre P_1 ve P_2 yazılsın.

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{C}u_1 + k_{12}u_2 \\ -P_2 &= -k_{21}u_1 - \frac{1}{C}u_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.74)$$

Bu eşitlikten faydalanılarak k_{12} ve k_{21} ;

$$k_{12} = k_{21} = -\frac{1}{C} \quad (3.75)$$

olarak elde edilir. Elde edilen rijitlik terimleri matris formatında;

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3.76)$$

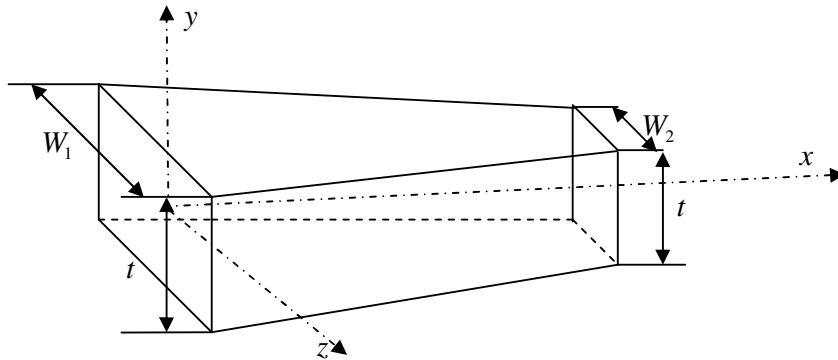
olarak elde edilir. Buna göre eksenel rijitlik matrisi aşağıdaki gibi verilebilir.

$$[K^A] = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Bu kısımda basit eğilmeye ve eksenel yüklemeye maruz kirişlere ait eğilme ve eksenel rijitlik matrisleri elde edilmiştir. Daha sonraki kısımlarda bu matrislerden faydalanarak; genişliği, kalınlığı ve genişliği ile kalınlığı doğrusal değişen, değişken kesitli kirişlere ait rijitlik matrisleri elde edilecektir. Bu kirişlere ait kütle matrisleri de ayrıca elde edilecektir.

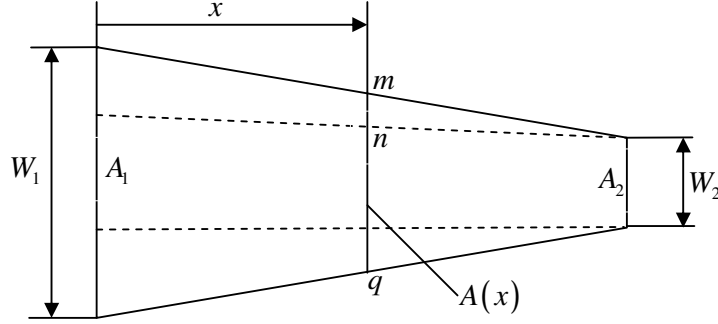
3.2.6. Genişliği doğrusal değişen bir kiriş eleman için rijitlik matrisi

Şekil 3.13.'te genişliği x eksenini boyunca doğrusal değişen bir kiriş gösterilmiştir.



Şekil 3.13. Genişliği doğrusal değişen değişken kesitli kiriş

Bu kirişin üstten görünüşü Şekil 3.14.'te ayrıca görülmektedir. Burada W_1 ve W_2 , kirişin sırası ile sol ve sağ uçtaki genişliğini göstermektedir.



Şekil 3.14. Genişliği doğrusal değişen kirişin üstten görünümü

Kirişe ait genişlik değişken olduğundan, kesit alanı x 'e bağlı olacaktır. Kesit alanı x eksenini boyunca doğrusal olarak değişen kirişin kalınlığı (t) sabit olup genişliği doğrusal bir şekilde değişmektedir. Önceki kısımda rijitlik terimlerinin elde edilmesi için $A(x)$ ifadesinin elde edilmesi gerektiği belirtilmişti. Genişliği doğrusal değişen kirişe ait herhangi bir x mesafesine ait kesit alanı $A(x)$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = W_1 t \\ A_2 = W_2 t \end{array} \right\} \quad (3.78)$$

Burada A_1 sol uçtaki A_2 ise sağ uçtaki kesit alanlarıdır. Kalınlık;

$$t = \frac{A_1}{W_1} \quad (3.79)$$

olarak verilebilir. x mesafedeki kesit alanı Şekil 3.14.'de görüleceği üzere

$$A(x) = |mq| \cdot t \quad (3.80)$$

olarak bulunabilir. mq uzunluğu;

$$|mq| = 2|mn| + W_2 \quad (3.81)$$

ile verilebilir. Buradaki mn mesafesi benzerlikten;

$$\frac{|mn|}{L-x} = \frac{(W_1 - W_2)/2}{L} \Rightarrow |mn| = \frac{W_1 - W_2}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (3.82)$$

olarak elde edilir.

(3.82) denklemi (3.81) denkleminde yerine yazılırsa, mq ;

$$|mq| = (W_1 - W_2) \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) + W_2 \quad (3.83)$$

olarak elde edilir. (3.79) ve (3.83) denklemleri (3.80) eşitliğinde yerine yerleştirilerek $A(x)$ kesit alanı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A(x) = A_1 \left(1 + \left(\frac{W_2 - W_1}{W_1}\right) \frac{x}{L}\right) \quad (3.84)$$

$\frac{W_2 - W_1}{W_1}$ oranı aşağıdaki gibi gösterilsin.

$$\frac{W_2 - W_1}{W_1} = \alpha \quad (3.85)$$

Sol uçtan x mesafedeki $EI_z(x)$ ve $EA(x)$ değerleri aşağıdaki gibi verilir.

$$EI_{zz}(x) = EI_{zz1} \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L}\right)\right) \quad (3.86)$$

$$EA(x) = EA_1 \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L}\right)\right) \quad (3.87)$$

Burada I_{zz1} ve A_1 değerleri sırasıyla sol uçtaki alan atalet momentini ve kesit alanını göstermektedir. (3.55) ve (3.77) eğilme ve eksenel rijitlik matrislerinin bulunabilmesi

için $\frac{1}{C}$, $\frac{A_1}{D_1}$, $\frac{A_2}{D_1}$, $\frac{A_3}{D_1}$ terimlerinin elde edilmesi gereklidir. Bunun için (3.86) ve (3.87)

eşitlikleri (3.23), (3.25) ve (3.65). eşitliklerinde yerine yazılırsa;

$$\frac{1}{C} = \frac{EA_1}{L} \left[\frac{\alpha}{\ln(\alpha + 1)} \right] \quad (3.88)$$

$$\frac{A_1}{D_1} = \frac{EI_{zz1}}{L^3} \left[\frac{2\alpha^2 \ln(\alpha + 1)}{(\alpha + 2)\ln(\alpha + 1) - 2\alpha} \right] \quad (3.89)$$

$$\frac{A_2}{D_1} = \frac{EI_{zz1}}{L^2} \left[\frac{2\alpha(\alpha - \ln(\alpha + 1))}{(\alpha + 2)\ln(\alpha + 1) - 2\alpha} \right] \quad (3.90)$$

$$\frac{A_3}{D_1} = \frac{EI_{zz1}}{L} \left[\frac{2\ln(\alpha + 1) + \alpha(\alpha - 2)}{(\alpha + 2)\ln(\alpha + 1) - 2\alpha} \right] \quad (3.91)$$

elde edilir.

(3.55) ve (3.77) eğilme ve aksenal rijitlik matrisleri birleştirilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}^A & 0 & 0 & k_{12}^A & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^B & k_{12}^B & 0 & k_{13}^B & k_{14}^B \\ 0 & k_{21}^B & k_{22}^B & 0 & k_{23}^B & k_{24}^B \\ k_{21}^A & 0 & 0 & k_{22}^A & 0 & 0 \\ 0 & k_{31}^B & k_{32}^B & 0 & k_{33}^B & k_{34}^B \\ 0 & k_{41}^B & k_{42}^B & 0 & k_{43}^B & k_{44}^B \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (3.92)$$

(3.88 – 3.91) eşitliklerinde bulunan değerler (3.92)'de yerine yazılıp tekrar düzenlenerek aşağıdaki matris elde edilir.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 & 0 & -\frac{1}{C} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_1}{D_1} & \frac{A_2}{D_1} & 0 & -\frac{A_1}{D_1} & \frac{A_1 L - A_2}{D_1} \\ 0 & \frac{A_2}{D_1} & \frac{A_3}{D_1} & 0 & -\frac{A_2}{D_1} & \frac{A_2 L - A_3}{D_1} \\ -\frac{1}{C} & 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A_1}{D_1} & -\frac{A_2}{D_1} & 0 & \frac{A_1}{D_1} & \frac{A_2 - A_1 L}{D_1} \\ 0 & \frac{A_1 L - A_2}{D_1} & \frac{A_2 L - A_3}{D_1} & 0 & \frac{A_2 - A_1 L}{D_1} & \frac{A_1 L^2 - 2A_2 L + A_3}{D_1} \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Elde edilen bu matris genişliği doğrusal değişen kiriş için rijitlik matrisini temsil etmektedir. Genişliği doğrusal değişen bir kirişe ait serbest titreşim analizini yapabilmek için rijitlik matrisinin yanında kütle matrisinin de bulunması gerekmektedir.

3.2.7. Genişliği doğrusal değişen bir kiriş eleman için kütle matrisi

Burada elde edilecek kütle matrisi aksenal ve eğilme kütle matrisi olarak iki kısımdan oluşmaktadır. Aksenal kütle matrisi aşağıdaki eşitlikte bulunabilir (Friedman and Kosmatka, 1991).

$$[m]^A = \int_0^L \rho \{N\} \{N\}^T A(x) dx \quad (3.94)$$

Burada ρ , A_l , ve N değerleri sırasıyla yoğunluk, sol uçtaki kesit alanı ve şekil fonksiyonunu göstermektedir.

x mesafesindeki kesit alanı aşağıdaki gibidir.

$$A(x) = A_1 \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L} \right) \right) \quad (3.95)$$

Şekil fonksiyonu matris formatında olup N değerleri aşağıdaki gibidir (Friedman and Kosmatka, 1991).

$$\left. \begin{aligned} [N] &= [N_1 \quad N_2] \\ N_1 &= \frac{L-x}{L} \\ N_2 &= \frac{x}{L} \end{aligned} \right\} \quad (3.96)$$

N değerleri yerine yerleştirilerek aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[N] = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

(3.97) ile verilen şekil fonksiyonları matrisinin transpozesi aşağıdaki gibi alınır.

$$[N]^T = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

(3.97) ve (3.98) eşitlikleri (3.94) eşitliğinde yerine konursa, eksenel kütle matrisi;

$$[m]^A = \rho \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} A dx \quad (3.99)$$

$$[m]^A = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \rho A_1 L (4 + \alpha) & \frac{1}{12} \rho A_1 L (2 + \alpha) \\ \frac{1}{12} \rho A_1 L (2 + \alpha) & \frac{1}{12} \rho A_1 L (4 + 3\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu matris 2x2 boyutunda olup eksenel yük yönünde meydana gelen kütle matrisini oluşturmaktadır.

Eksenel kütle matrisi bulunduktan sonra, eğilme kütle matrisi de elde edilmelidir. Bu matrise ait eşitlik aşağıdaki gibidir (Friedman and Kosmatka, 1991).

$$[m]^B = \int_0^L \rho \{f\} \{f\}^T A(x) dx \quad (3.101)$$

f_i şekil fonksiyonları olup matris formatında;

$$[f] = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4] \quad (3.102)$$

ile verilir.

Buradaki f değerleri aşağıda verilmiştir (Friedman and Kosmatka, 1991).

$$[f] = \left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad x\left(1 - 2\left(\frac{x}{L}\right) + \left(\frac{x}{L}\right)^2\right) \quad 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad x\left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)\right) \right] \quad (3.103)$$

(3.101) eşitliğinden faydalanarak eğilme kütle matrisini oluşturmak için şekil fonksiyonlarının transpozesi gerekmekte olup bu matris aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$[f]^T = \begin{bmatrix} 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ x\left(1 - 2\left(\frac{x}{L}\right) + \left(\frac{x}{L}\right)^2\right) \\ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ x\left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)\right) \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

(3.103) ve (3.104) eşitlikleri (3.101) eşitliğinde yerine konulup denklem düzenlenirse, eğilme kütle matrisi;

$$[m]^B = \begin{bmatrix} \frac{1}{35} \rho A_1 L (13+3\alpha) & \frac{1}{420} \rho A_1 L^2 (22+7\alpha) & \frac{9}{140} \rho A_1 L (2+\alpha) & -\frac{1}{420} \rho A_1 L^2 (13+6\alpha) \\ & \frac{1}{840} \rho A_1 L^3 (8+3\alpha) & \frac{1}{420} \rho A_1 L^2 (13+7\alpha) & -\frac{1}{280} \rho A_1 L^3 (2+\alpha) \\ & & \frac{1}{35} \rho A_1 L (13+10\alpha) & -\frac{1}{420} \rho A_1 L^2 (22+15\alpha) \\ \text{Simetrik} & & & \frac{1}{840} \rho A_1 L^3 (8+5\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

olarak elde edilir. Burada, A_1 ve α terimleri

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= tW_1 \\ \alpha &= \frac{W_2 - W_1}{W_1} \end{aligned} \right\} \quad (3.106)$$

olarak verilmektedir.

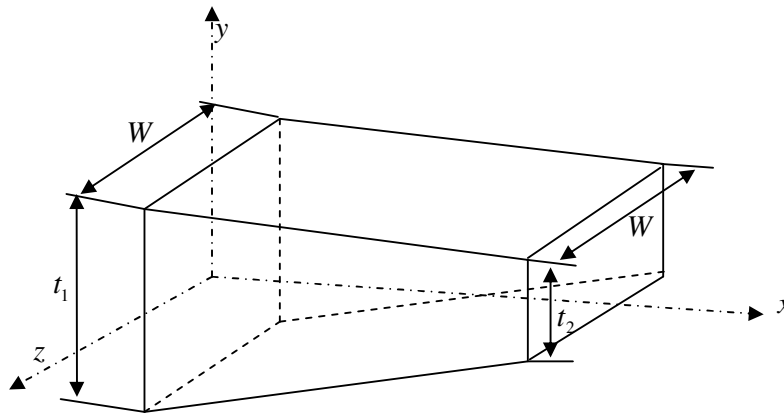
(3.100) ve (3.105) eşitlikleri ile elde edilen aksel ve eğilme kütle matrisleri serbestlik derecelerine uygun olarak birleştirilirse iki düğümlü, her düğümde üç serbestlik derecesi bulunan genişliği doğrusal değişen kirişe ait kütle matrisi simgesel olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11}^A & 0 & 0 & m_{12}^A & 0 & 0 \\ 0 & m_{11}^B & m_{12}^B & 0 & m_{13}^B & m_{14}^B \\ 0 & m_{21}^B & m_{22}^B & 0 & m_{23}^B & m_{24}^B \\ m_{21}^A & 0 & 0 & m_{22}^A & 0 & 0 \\ 0 & m_{31}^B & m_{32}^B & 0 & m_{33}^B & m_{34}^B \\ 0 & m_{41}^B & m_{42}^B & 0 & m_{43}^B & m_{44}^B \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (3.107)$$

Değişken kesitli bir kiriş eleman için sistem matrisleri olan rijitlik ve kütle matrisleri bu bölümde verilen eşitlikler yardımıyla elde edildikten sonra, titreşim analizi uygun bir yöntemle yapılır.

3.2.8. Kalınlığı doğrusal değişen bir kiriş eleman için rijitlik matrisi

Bu kısımda Şekil 3.15'te görülen genişliği sabit kalınlığı doğrusal değişen bir kiriş incelenecektir.



Şekil 3.15. Kalınlığı doğrusal değişen değişken kesitli kiriş

Sol uçtan x mesafesindeki kesite ait $EI_{zz}(x)$ ve $EA(x)$ değerleri aşağıdaki gibidir.

$$EI_{zz}(x) = EI_{zz1} \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L} \right) \right)^3 \quad (3.108)$$

$$EA(x) = EA_1 \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L} \right) \right) \quad (3.109)$$

Burada, α terimi;

$$\alpha = \frac{t_2 - t_1}{t_1} \quad (3.110)$$

olarak verilir.

Kalınlığı doğrusal değişen bir kiriş elemana ait eksenel rijitlik katsayısı ($1/C$) genişliği doğrusal değişen bir kiriş için elde edilen değere eşittir. Yani

$$\frac{1}{C} = \frac{EA_1}{L} \left[\frac{\alpha}{\ln(\alpha + 1)} \right] \text{ olacaktır. Kalınlığı değişen bir kirişe ait } \frac{A_1}{D_1}, \frac{A_2}{D_1}, \frac{A_3}{D_1}$$

terimlerinin bulunması gerekmektedir. (3.108) ve (3.109) eşitlikleri (3.22) ve (3.24) eşitliklerine yerleştirilirse;

$$\frac{A_1}{D_1} = \frac{EI_{zz1}}{L^3} \left[\frac{\alpha^3 (\alpha + 2)}{(\alpha + 2) \ln(\alpha + 1) - 2\alpha} \right] \quad (3.111)$$

$$\frac{A_2}{D_1} = \frac{EI_{zz1}}{L^2} \left[\frac{\alpha^3}{(\alpha + 2) \ln(\alpha + 1) - 2\alpha} \right] \quad (3.112)$$

$$\frac{A_3}{D_1} = \frac{EI_{zz1}}{L} \left[\frac{2(\alpha + 1)^2 \ln(\alpha + 1) - \alpha(3\alpha + 2)}{(\alpha + 2) \ln(\alpha + 1) - 2\alpha} \right] \quad (3.113)$$

olarak elde edilir. Bulunan bu değerler (3.93) eşitliğinde yerine yazılarak kalınlığı değişen bir kirişe ait rijitlik matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 & 0 & \frac{-1}{C} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_1}{D_1} & \frac{A_2}{D_1} & 0 & \frac{-A_1}{D_1} & \frac{A_1L - A_2}{D_1} \\ 0 & \frac{A_2}{D_1} & \frac{A_3}{D_1} & 0 & \frac{-A_2}{D_1} & \frac{A_2L - A_3}{D_1} \\ \frac{-1}{C} & 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-A_1}{D_1} & \frac{-A_2}{D_1} & 0 & \frac{A_1}{D_1} & \frac{A_2 - A_1L}{D_1} \\ 0 & \frac{A_1L - A_2}{D_1} & \frac{A_2L - A_3}{D_1} & 0 & \frac{A_2 - A_1L}{D_1} & \frac{A_1L^2 - 2A_2L + A_3}{D_1} \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Titreşim analizinin yapabilmek için kalınlığı doğrusal değişen bir kiriş elemana ait rijitlik matrisinin yanında kütle matrisinin de bulunması gerekmektedir.

3.2.9. Kalınlığı doğrusal değişen bir kiriş eleman için kütle matrisi

Burada elde edilecek kütle matrisi aksenal ve eğilme kütle matrisi olarak iki kısımdan oluşmaktadır. Bu matrisler önceki kısımda verilen yöntemle bulunur. Aksenal kütle matrisi;

$$[m]^A = \int_0^L \rho \{N\} \{N\}^T A(x) dx \quad (3.115)$$

olarak verilebilir. Burada ρ , A_1 , ve N değerleri sırasıyla yoğunluk, sol uçtaki kesit alanı ve şekil fonksiyonunu göstermektedir. Şekil fonksiyonu matris formatında;

$$[N] = [N_1 \quad N_2] \quad (3.116)$$

olarak verilir.

N değerleri aşağıdaki gibidir.

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{L-x}{L} \\ N_2 &= \frac{x}{L} \end{aligned} \right\} \quad (3.117)$$

(3.117) eşitliği (3.116) eşitliğinde yerine konularak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[N] = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

(3.118) ile verilen şekil fonksiyonları matrisinin transpozesi aşağıdaki gibi alınır.

$$[N]^T = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

(3.118) ve (3.119) eşitlikleri (3.115) eşitliğinde yerine konursa, eksenel kütle matrisi;

$$[m]^A = \rho \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} A(x) dx \quad (3.120)$$

$$[m]^A = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \rho A_1 L (4 + \alpha) & \frac{1}{12} \rho A_1 L (2 + \alpha) \\ \frac{1}{12} \rho A_1 L (2 + \alpha) & \frac{1}{12} \rho A_1 L (4 + 3\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu matris 2x2 boyutunda olup eksenel yük yönünde meydana gelen kütle matrisini oluşturmaktadır. Eksenel kütle matrisi bulunduğundan sonra, eğilme kütle matrisi de elde edilmelidir. Bu matrise ait eşitlik aşağıdaki gibidir.

$$[m]^B = \int_0^L \rho \{f\} \{f\}^T A(x) dx \quad (3.122)$$

Burada f şekil fonksiyonları olup matris formatında;

$$[f] = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4] \quad (3.123)$$

İle verilir. Buradaki f değerleri aşağıda verilmiştir (Friedman and Kosmatka, 1991).

$$[f] = \left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad x \left(1 - 2\left(\frac{x}{L}\right) + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right) \quad 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad x \left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right) \right) \right] \quad (3.124)$$

(3.122) eşitliğinden faydalanarak eğilme kütle matrisini oluşturmak için şekil fonksiyonlarının transpozesi gerekmekte olup bu matris aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$[f]^T = \begin{bmatrix} 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ x\left(1 - 2\left(\frac{x}{L}\right) + \left(\frac{x}{L}\right)^2\right) \\ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ x\left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)\right) \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

(3.124) ve (3.125) eşitlikleri (3.122) eşitliğinde yerine konulup denklem düzenlenirse, eğilme kütle matrisi;

$$[m]^B = \begin{bmatrix} \frac{1}{35}\rho A_1 L(13+3\alpha) & \frac{1}{420}\rho A_1 L^2(22+7\alpha) & \frac{9}{140}\rho A_1 L(2+\alpha) & -\frac{1}{420}\rho A_1 L^2(13+6\alpha) \\ & \frac{1}{840}\rho A_1 L^3(8+3\alpha) & \frac{1}{420}\rho A_1 L^2(13+7\alpha) & -\frac{1}{280}\rho A_1 L^3(2+\alpha) \\ & & \frac{1}{35}\rho A_1 L(13+10\alpha) & -\frac{1}{420}\rho A_1 L^2(22+15\alpha) \\ \text{Simetrik} & & & \frac{1}{840}\rho A_1 L^3(8+5\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

olarak elde edilir. Burada, A_1 ve α terimleri aşağıdaki gibidir.

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = t_1 W \\ \alpha = \frac{t_2 - t_1}{t_1} \end{array} \right\} \quad (3.127)$$

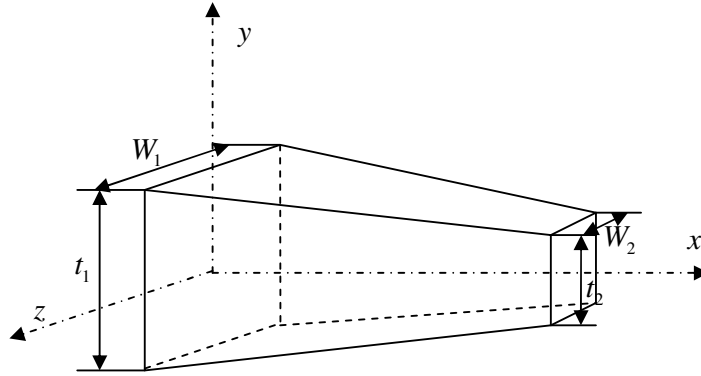
(3.121) ve (3.126) eşitlikleri ile elde edilen aksenal ve eğilme kütle matrisleri uygun serbestlik derecelerine göre birleştirilirse iki düğümlü, her düğümlüde üç serbestlik derecesi bulunan genişliği doğrusal değişen kirişe ait kütle matrisi simgesel olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11}^A & 0 & 0 & m_{12}^A & 0 & 0 \\ 0 & m_{11}^B & m_{12}^B & 0 & m_{13}^B & m_{14}^B \\ 0 & m_{21}^B & m_{22}^B & 0 & m_{23}^B & m_{24}^B \\ m_{21}^A & 0 & 0 & m_{22}^A & 0 & 0 \\ 0 & m_{31}^B & m_{32}^B & 0 & m_{33}^B & m_{34}^B \\ 0 & m_{41}^B & m_{42}^B & 0 & m_{43}^B & m_{44}^B \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (3.128)$$

Değişken kesitli bir kiriş eleman için sistem matrisleri olan rijitlik ve kütle matrisleri bu kısımda verilen eşitlikler yardımıyla elde edildikten sonra, titreşim analizi uygun bir yöntemle yapılır.

3.2.10. Kalınlığı ve genişliği doğrusal değişen bir kiriş eleman için rijitlik matrisi

Bu bölümde Şekil 3.16'da görülen kalınlığı ve genişliği doğrusal değişen bir kiriş ele alınarak incelenecektir.



Şekil 3.16. Kalınlığı ve genişliği doğrusal olarak değişen kiriş

Sol uçtan x mesafedeki kesite ait $EA(x)$ ve $EI_{zz}(x)$ değerleri (Friedman and Kosmatka, 1991);

$$EA(x) = EA_1 \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L} \right) \right)^2 \quad (3.129)$$

$$EI_{zz}(x) = EI_{zz1} \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L} \right) \right)^4 \quad (3.130)$$

ile verilir. Bu çalışmada $\frac{W_1}{W_2} = \frac{t_1}{t_2}$ olarak alınacaktır. Bundan dolayı

$\frac{t_2 - t_1}{t_1} = \frac{W_2 - W_1}{W_1} = \alpha$ olacaktır. Eksenel ve eğilme rijitlik matrisleri birbirlerinden

bağımsız olup bu matrisleri elde etmek için gerekli olan terimler aşağıda verilmiştir.

$$\frac{1}{C} = \frac{EA_1}{L} (\alpha + 1) \quad (3.131)$$

$$\frac{A_1}{D_1} = \frac{4EI_{zz1}}{L^3}(\alpha + 1)(\alpha^2 + 3\alpha + 3) \quad (3.132)$$

$$\frac{A_2}{D_1} = \frac{2EI_{zz1}}{L^2}(\alpha + 1)(\alpha + 3) \quad (3.133)$$

$$\frac{A_3}{D_1} = \frac{4EI_{zz1}}{L}(\alpha + 1) \quad (3.134)$$

Sonuç olarak elde edilen bu eşitlikler (3.93) eşitliğinde yerine yazılarak genişliği ve kalınlığı doğrusal değişen, değişken kesitli bir kirişe ait rijitlik matrisi aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 & 0 & \frac{-1}{C} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_1}{D_1} & \frac{A_2}{D_1} & 0 & \frac{-A_1}{D_1} & \frac{A_1L - A_2}{D_1} \\ 0 & \frac{A_2}{D_1} & \frac{A_3}{D_1} & 0 & \frac{-A_2}{D_1} & \frac{A_2L - A_3}{D_1} \\ \frac{-1}{C} & 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-A_1}{D_1} & \frac{-A_2}{D_1} & 0 & \frac{A_1}{D_1} & \frac{A_2 - A_1L}{D_1} \\ 0 & \frac{A_1L - A_2}{D_1} & \frac{A_2L - A_3}{D_1} & 0 & \frac{A_2 - A_1L}{D_1} & \frac{A_1L^2 - 2A_2L + A_3}{D_1} \end{bmatrix} \quad (3.135)$$

Elde edilen bu denklem genişliği ve kalınlığı doğrusal değişen kiriş için rijitlik matrisini vermektedir.

3.2.11. Kalınlığı ve genişliği doğrusal değişen bir kiriş eleman için kütle matrisi

Burada elde edilecek kütle matrisi aksenal ve eğilme kütle matrisi olarak iki kısımdan oluşmaktadır.

Eğilme yönünde meydana gelen kütle matrisinin elde etmek için;

$$[m]^B = \int_0^L \rho \{f\} \{f\}^T A(x) dx \quad (3.136)$$

eşitliği kullanılmıştır. Burada f şekil fonksiyonu olup matris formatında;

$$[f] = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4] \quad (4.137)$$

ile verilebilir. Her bir f değeri aşağıda verilmiştir (Friedman and Kosmatka, 1991).

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= 1 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 \\ f_2 &= -x\left(\frac{x}{L} - 1\right)^2 \\ f_3 &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ f_4 &= -x\left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.138)$$

Burada x mesafedeki kesit alanı $A(x)$;

$$A(x) = A_1 \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L}\right)\right)^2 \quad (3.139)$$

ile verilmektedir. (3.138) eşitliği (3.137)'de yerine konularak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[f] = \left[\begin{array}{cccc} 1 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 & -x\left(\frac{x}{L} - 1\right)^2 & 3\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 & -x\left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right) \end{array} \right] \quad (3.140)$$

Bu matrisin tranpozesi aşağıdaki gibidir.

$$[f]^T = \left[\begin{array}{c} 1 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 \\ -x\left(\frac{x}{L} - 1\right)^2 \\ 3\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ -x\left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right) \end{array} \right] \quad (3.141)$$

Elde edilen bu iki matrisin $[f]$ ve $[f]^T$ çarpımı yapılarak 4×4 'lük bir matris elde edilecektir. Bu matris aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
& [f] \cdot [f]^T = \\
& \left[\begin{array}{cccc}
\left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)^2 & -x \left(\frac{x}{L} - 1\right) \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) & \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) \left(\frac{3x^4}{L^4} - \frac{2x^3}{L^3}\right) & -x \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) \\
& x^2 \left(\frac{x}{L} - 1\right)^4 & -x \left(\frac{x}{L} - 1\right) \left(\frac{3x^4}{L^4} - \frac{2x^3}{L^3}\right) & x^2 \left(\frac{x}{L} - 1\right)^2 \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L}\right) \\
& & \left(\frac{3x^4}{L^4} - \frac{2x^3}{L^3}\right)^2 & -x \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{3x^4}{L^4} - \frac{2x^3}{L^3}\right) \\
\text{Simetrik} & & & x^2 \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L}\right)^2
\end{array} \right]
\end{aligned} \tag{3.142}$$

(3.139) ve (3.142) eşitlikleri, (3.136) eşitliğinde yerine yerleştirilerek kütle matris terimleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\left. \begin{aligned}
m_{11}^B &= \rho \int_0^L \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)^2 \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L}\right)\right)^2 A_1 dx \\
m_{11}^B &= \frac{L \rho A_1}{630} (234 + 108\alpha + 19\alpha^2)
\end{aligned} \right\} \tag{3.143}$$

$$\left. \begin{aligned}
m_{12}^B &= m_{21}^B = \rho \int_0^L -x \left(\frac{x}{L} - 1\right) \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L}\right)\right)^2 A_1 dx \\
m_{12}^B &= m_{21}^B = \frac{L^2 \rho A_1 (132 + 84\alpha + 17\alpha^2)}{2520}
\end{aligned} \right\} \tag{3.144}$$

$$\left. \begin{aligned}
m_{13}^B &= m_{31}^B = \rho \int_0^L \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) \left(\frac{3x^4}{L^4} - \frac{2x^3}{L^3}\right) \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L}\right)\right)^2 A_1 dx \\
m_{13}^B &= m_{31}^B = \frac{L \rho A_1 (\alpha^2 - 3\alpha - 9)}{1260}
\end{aligned} \right\} \tag{3.145}$$

$$\left. \begin{aligned}
m_{14}^B &= m_{41}^B = \rho \int_0^L -x \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L}\right)\right)^2 A_1 dx \\
m_{14}^B &= m_{41}^B = \frac{-L^2 \rho A_1 (78 + 72\alpha + 19\alpha^2)}{2520}
\end{aligned} \right\} \tag{3.146}$$

$$\left. \begin{aligned}
m_{22}^B &= \rho \int_0^L x^2 \left(\frac{x}{L} - 1\right)^4 \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L}\right)\right)^2 A_1 dx \\
m_{22}^B &= \frac{L^3 \rho A_1 (12 + 9\alpha + 2\alpha^2)}{1260}
\end{aligned} \right\} \tag{3.147}$$

$$\left. \begin{aligned} m_{23}^B = m_{32}^B &= \rho \int_0^L -x \left(\frac{x}{L} - 1 \right)^2 \left(\frac{3x^4}{L^4} - \frac{2x^3}{L^3} \right) \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L} \right) \right)^2 A_1 dx \\ m_{23}^B = m_{32}^B &= \frac{L^2 \rho A_1 (\alpha^2 - 3)}{2520} \end{aligned} \right\} \quad (3.148)$$

$$\left. \begin{aligned} m_{24}^B = m_{42}^B &= \rho \int_0^L x^2 \left(\frac{x}{L} - 1 \right)^2 \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \right) \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L} \right) \right)^2 A_1 dx \\ m_{24}^B = m_{42}^B &= \frac{-L^3 \rho A_1 (18 + 18\alpha + 5\alpha^2)}{2520} \end{aligned} \right\} \quad (3.149)$$

$$\left. \begin{aligned} m_{33}^B &= \rho \int_0^L \left(\frac{3x^4}{L^4} - \frac{2x^3}{L^3} \right)^2 \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L} \right) \right)^2 A_1 dx \\ m_{33}^B &= \frac{L \rho A_1 (495 + 924\alpha + 434\alpha^2)}{6930} \end{aligned} \right\} \quad (3.150)$$

$$\left. \begin{aligned} m_{34}^B = m_{43}^B &= \rho \int_0^L -x \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \right) \left(\frac{3x^4}{L^4} - \frac{2x^3}{L^3} \right) \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L} \right) \right)^2 A_1 dx \\ m_{34}^B = m_{43}^B &= -\frac{L^2 \rho A_1 (15 + 30\alpha + 14\alpha^2)}{2520} \end{aligned} \right\} \quad (3.151)$$

$$\left. \begin{aligned} m_{44}^B &= \rho \int_0^L x^2 \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \right)^2 \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L} \right) \right)^2 A_1 dx \\ m_{44}^B &= \frac{L^3 \rho A_1 (12 + 15\alpha + 5\alpha^2)}{1260} \end{aligned} \right\} \quad (3.152)$$

Bu işlemler sonucunda bulunan değerler 4x4'lük eğilme kütle matrisini vermektedir.

Eksenel kütle matrisinin elde edilmesi için;

$$[m]^A = \int_0^L \rho \{N\} \{N\}^T A(x) dx \quad (3.153)$$

eşitliği kullanılmıştır. Burada, N şekil fonksiyonları olup matris formatında;

$$[N] = [N_1 \quad N_2] \quad (3.154)$$

olarak verilir. N değerleri aşağıda verilmiştir.

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{L-x}{L} \\ N_2 &= \frac{x}{L} \end{aligned} \right\} \quad (3.155)$$

(3.155) eşitliği, (3.154) eşitliğinde yerine konularak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[N] = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

Bu matrisin transposesi alınırsa aşağıdaki gibidir.

$$[N]^T = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

Bu iki matrisin $[N]$ ve $[N]^T$ çarpımı yapılarak 2×2 'lik bir matris elde edilecektir. Bu matris aşağıda verilmiştir.

$$[N][N]^T = \begin{bmatrix} \frac{(L-x)^2}{L^2} & \frac{(L-x)x}{L^2} \\ \frac{(L-x)x}{L^2} & \frac{x^2}{L^2} \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

(3.139) ve (3.158) eşitlikleri, (3.153) eşitliğinde yerine konularak kütle matrisi elemanlarının değerleri elde edilir. Bu işlemler aşağıda yapılmıştır.

$$\left. \begin{aligned} m_{11}^A &= \rho \int_0^L \frac{(L-x)^2}{L^2} \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L}\right)\right)^2 A_1 dx \\ m_{11}^A &= \frac{1}{30} L \rho A_1 (10 + 5\alpha + \alpha^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.159)$$

$$\left. \begin{aligned} m_{12}^A &= m_{21}^A = \rho \int_0^L \frac{(L-x)x}{L^2} \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L}\right)\right)^2 A_1 dx \\ m_{12}^A &= m_{21}^A = \frac{1}{60} L \rho A_1 (10 + 10\alpha + 3\alpha^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.160)$$

$$\left. \begin{aligned} m_{22}^A &= \rho \int_0^L \frac{x^2}{L^2} \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{L}\right)\right)^2 A_1 dx \\ m_{22}^A &= \frac{1}{30} L \rho A_1 (10 + 15\alpha + 6\alpha^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.161)$$

Burada, α ve A_1 değerleri aşağıdaki gibidir.

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{W_2 - W_1}{W_1} = \frac{t_2 - t_1}{t_1} \\ A_1 &= W_1 t_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.162)$$

Matris eleman değerleri hesaplandıktan sonra eksene kütle matrisi elde edilmiştir.

Eğilme ve eksenel kütle matrislerinden faydalanarak iki düğümlü ve her düğümünde üç serbestlik derecesi bulunan kalınlığı ve genişliği doğrusal değişen, değişken kesitli bir kirişe ait kütle matrisi simgesel olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11}^A & 0 & 0 & m_{12}^A & 0 & 0 \\ 0 & m_{11}^B & m_{12}^B & 0 & m_{13}^B & m_{14}^B \\ 0 & m_{21}^B & m_{22}^B & 0 & m_{23}^B & m_{24}^B \\ m_{21}^A & 0 & 0 & m_{22}^A & 0 & 0 \\ 0 & m_{31}^B & m_{32}^B & 0 & m_{33}^B & m_{34}^B \\ 0 & m_{41}^B & m_{42}^B & 0 & m_{43}^B & m_{44}^B \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (3.163)$$

Değişken kesitli bir kiriş eleman için sistem matrisleri olan rijitlik ve kütle matrisleri elde edildikten sonra, titreşim analizi uygun bir yöntemle yapılır.

3.3. Çatlak İçeren Bir Kirişin Titreşim Analizi

Makine elemanlarının birçoğunda tekrarlı yükler nedeniyle hasar ve kırılma meydana gelir. Yorulma nedeni ile oluşan yüzey çatlakları hızlı olarak ilerleyerek büyük hasarlara ve ani kırılmalara neden olabilir. Yüzey çatlaklı parçaların kırılma dayanımlarının ve çatlak ilerleme hızlarının belirlenmesi gereken problemlerin kesin çözümü yapılamadığından, yaklaşık çözüm yöntemleri kullanılmaktadır. Yüzey çatlaklı ilerleme davranışlarının analizinin yapılabilmesi için gerilme yığılma faktörü ve çatlak ilerleme miktarlarının belirlenmesi gereklidir. Genellikle yüzeydeki bir pürüz, çentik, çizik, kılcal çatlak veya ani kesit daralması bulunan bölgelerde hızlı bir şekilde ortaya çıkan çatlaklar malzemeleri belirli yük tekrarı sonunda hasara uğrattır. Çatlak içeren yapılara ait birçok çalışma değişik araştırmacılar tarafından gerçekleştirilmiştir (Ruotolo, Surace, Crespo ve Storer, 1996; Kısa, Brandon ve Topcu, 1998; Kısa ve Brandon, 2000; Viola, Federici, Nobie, 2001; Kısa, 2004). Son yıllarda titreşimle kontrol, çatlaklar gibi yapısal kusurları belirlemek için kullanılan hızlı ve etkili bir yöntem olmuştur (Dimarogonas, 1970). Prensipinde çatlak yeri ve boyutu; doğal frekansların ve titreşim mod şekillerinin genliklerindeki değişimlerden bilgi elde edilerek bulunabilir (Pafelias, 1974).

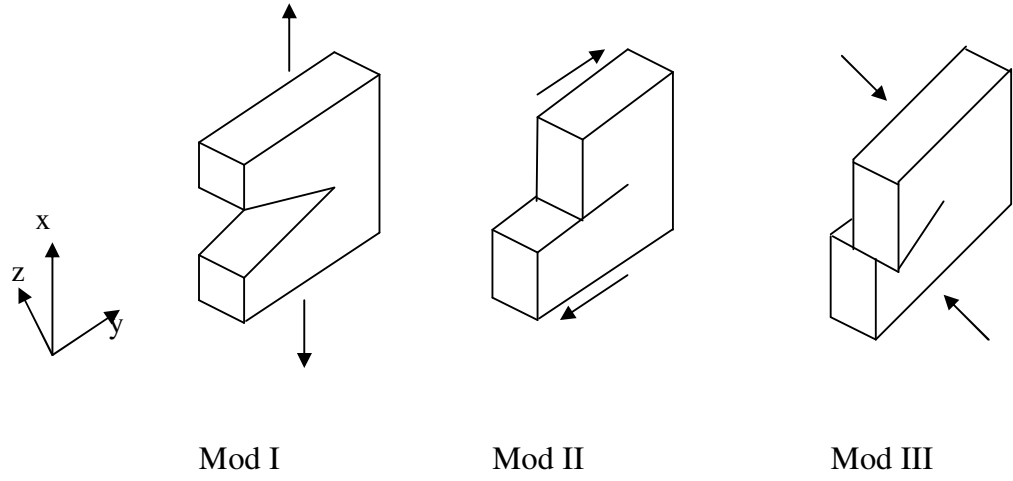
Makinelerin, çeşitli yapı elemanlarında meydana gelen çatlaklar, buldukları bölgede rijitlik düşümlerine neden oldukları için bu elemanların statik ve dinamik karakteristiklerini (statik yer değiştirme, doğal frekanslar, titreşim genlikleri, vb.) değiştirirler. Bu nedenle, titreşim analizlerini yapabilmek için elemandaki çatlaktan dolayı meydana gelen rijitlik düşümü için gerekli bağıntı ve denklemlerin oluşturulması gerekir.

3.3.1. Çatlaktan dolayı meydana gelen direngenliğin bulunması

Ortam sıcaklığı, malzeme tokluğu, tasarımdan kaynaklanan çeşitli hatalar, kaynak, artık gerilmeler ve yorulma gibi birçok faktör makine elemanlarında ve yapılarda çatlaklara neden olabilir. Bununla beraber herhangi bir elemanda kırılmaya neden olarak üç temel faktör belirlenmiştir (Topçu ve Taşgetiren, 1998). Bunlar: malzeme tokluğu, çatlak büyüklüğü ve gerilme seviyesidir. Kırılma mekaniğinin temel prensibi, keskin bir çatlak ucundaki gerilme alanının K olarak tanımlanan bir parametreyle ifade edilmesine dayanmaktadır. K , gerilme yığılma faktörü olarak adlandırılır. Bu faktör uygulanan gerilme ve çatlak boyutu arasında bir bağıntı kurulmasını sağlar. Buna göre çatlak içeren herhangi bir eleman veya deney numunesi aynen çatlaksız malzemelerin çeşitli gerilme seviyelerine kadar yüklenebilmeleri gibi çeşitli K değerine kadar yüklenebilirler. Böylece K değeri malzemenin bir özelliği olur.

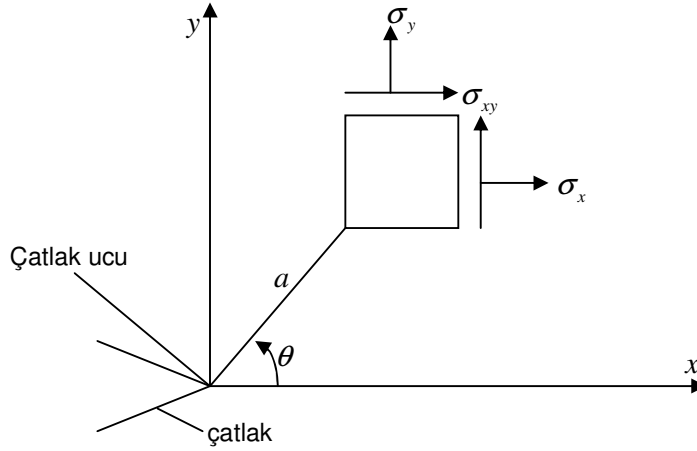
3.3.2. Gerilme yığılma faktörü

Kusurlu yapılardaki çatlağın davranışı gerilme yığılma faktörü ile belirlenebilir. Elastik cisimlerdeki gerilme analizi için kırılma mekaniği çatlak tiplerini üçe ayırmıştır. Şekil 3.17.'de görüldüğü gibi bunlar; açılma modu (mod I), kayma modu (mod II) ve yırtılma modu (mod III) olarak tanımlanır.



Şekil 3.17. Temel deformasyon modları

Bu deformasyon modlarının uygun süper pozisyonu ile bir çatlakın davranışı belirlenir. Dolayısıyla elemanın geometrisine ve dış yük durumuna bağlı olan gerilme yığılma faktörünün tespit edilmesi gerekmektedir. Her çatlak modu farklı bir gerilme alanına karşılık gelmektedir.



Şekil 3.18. Polar koordinat sisteminde çatlak ucundaki gerilmeler

Çatlak civarında meydana gelecek gerilme σ_{ij} (Şekil 3.18) üç deformasyon modunun süperpozisyonu ile bulunabilir. Buna göre herhangi bir çatlak civarında

meydana gelecek gerilmeler, I., II., ve III. deformasyon modları için aşağıdaki gibi verilir (Irwin, 1960; Uğuz, 1996).

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx,i} \sqrt{r} &= K_i f_{x,i}(\theta) \\ \sigma_{xy,i} \sqrt{r} &= K_i f_{xy,i}(\theta) \\ \sigma_{yy,i} \sqrt{r} &= K_i f_{y,i}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.164)$$

Burada f_x, f_{xy} ve f_y , θ açısının birer fonksiyonlarıdır. r çatlak ucundan olan mesafeyi, $i=I, II, III$ deformasyon modlarını gösterir. K_i i modu için gerilme yığılma faktörüdür.

Genel olarak K_i ;

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{array} \right\} = \lim_{a \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yy} \end{array} \right\} \quad (3.165)$$

olarak verilir.

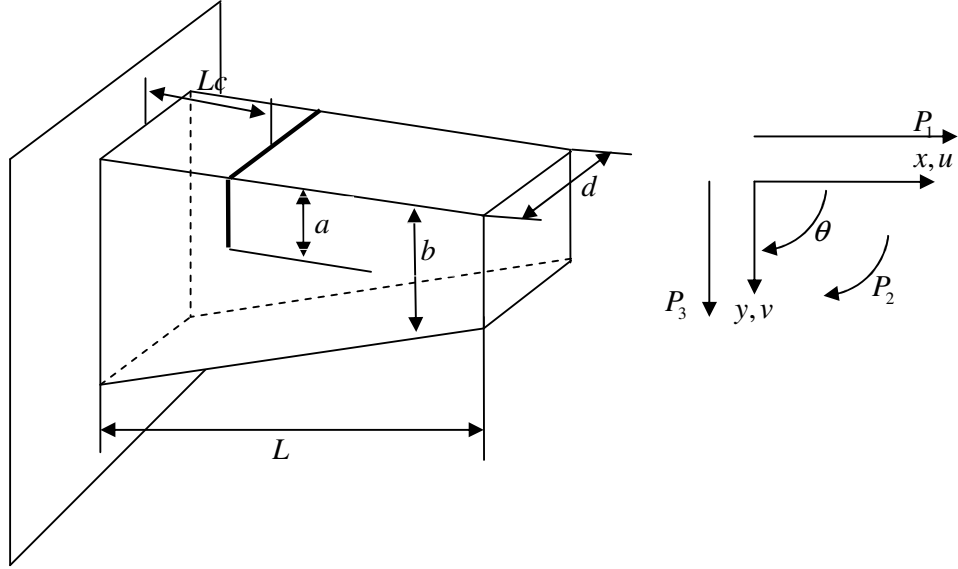
Çatlağın iki kenarındaki yer değiştirme düzensizliği gerilme yığılma faktörü ile orantılı olup aralarındaki ilişki aşağıdaki gibidir (Uğuz, 1996)

$$\left. \begin{aligned} u_x(a, \pi) - u_x(a, -\pi) &= \frac{K_I}{G} (k+1) \sqrt{a/2\pi} \\ u_y(a, \pi) - u_y(a, -\pi) &= \frac{K_{II}}{G} (k+1) \sqrt{a/2\pi} \\ u_z(a, \pi) - u_z(a, -\pi) &= \frac{4K_{III}}{G} \sqrt{a/2\pi} \end{aligned} \right\} \quad (3.166)$$

(3.166) nolu denklemlerde “ k ” ifadesi düzlem şekil değiştirme için $k = 3 - 4\nu$ düzlem gerilme hali için $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ olup denklemdeki ν poisson oranıdır.

3.3.3. Gerilme yığılma faktörünün analitik ifadesi

Doğrusal elastik kırılma mekaniğinde kusurlu yapıların davranışlarını incelemek için enerji salıverinim oranları veya gerilme şiddet faktörlerinin hesaplanması gerekmektedir. Karmaşık olan sistemlerde gerilme yığılma faktörü ancak sayısal modelleme yöntemleri ile bulunabilir. Şekil 3.19’da boyutlarıyla birlikte verilen değişken kesitli bir kiriş için gerilme yığılma faktörü (K_i) aşağıdaki gibi hesaplanır. (Tada ve ark, 1985)



Şekil 3.19. Çatlak içeren değişken kesitli kiriş ve yükleme durumu

$$\left. \begin{aligned} K_I(P_1) &= \frac{P_1}{bd} \sqrt{\pi a} F_1\left(\frac{a}{b}\right) \\ K_I(P_2) &= \frac{6P_2}{b^2 d} \sqrt{\pi a} F_2\left(\frac{a}{b}\right) \\ K_{II}(P_3) &= \frac{\kappa P_3}{bd} \sqrt{\pi a} F_3\left(\frac{a}{b}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.167)$$

olup $F_1\left(\frac{a}{b}\right)$, $F_2\left(\frac{a}{b}\right)$, $F_3\left(\frac{a}{b}\right)$ aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\left. \begin{aligned} F_1\left(\frac{a}{b}\right) &= \sqrt{\frac{2b}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{2b}\right)} \frac{0,752 + 2,02\left(\frac{a}{b}\right) + 0,37\left(1 - \sin\frac{\pi a}{2b}\right)^3}{\cos\left(\frac{\pi a}{2b}\right)} \\ F_2\left(\frac{a}{b}\right) &= \sqrt{\frac{2b}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{2b}\right)} \frac{0,923 + 0,199\left(1 - \sin\frac{\pi a}{2b}\right)^4}{\cos\left(\frac{\pi a}{2b}\right)} \\ F_3\left(\frac{a}{b}\right) &= \frac{1,122 - 0,561\left(\frac{a}{b}\right) + 0,085\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 0,180\left(\frac{a}{b}\right)^3}{\sqrt{1 - \frac{a}{b}}} \end{aligned} \right\} \quad (3.168)$$

Formüldeki κ , nümerik bir faktör olup elemanın kesitine bağlı olarak Timoshenko kiriş teorisi yardımıyla belirlenir (Tada ve ark, 1985). κ dikdörtgen kesit için 0,67 olarak alınır. Formüllerde a/b çatlak derinlik oranını göstermektedir.

3.3.4. Gerilme yığılma faktörü ve şekil değiştirme enerjisi saliverinim oranı arasındaki bağıntı

Çatlak önünde meydana gelecek birim uzama için gerekli olan enerji miktarına şekil değiştirme enerjisi saliverinim oranı denir ve “ J ” ile gösterilir. Düzlem şekil değiştirme hali için J :

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 + \frac{1-\nu^2}{E} K_{II}^2 + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (3.169)$$

olarak verilir (Tada ve ark., 1985). Şekil değiştirme enerjisi saliverinim oranı daima pozitif olup birbirinden bağımsız olan üç şekil değiştirme modunu içermektedir. J 'nin tespitinde süperpozisyon prensibinden faydalanınca;

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} (K_{I1} + K_{I2} + \dots + K_{In})^2 + \frac{1-\nu^2}{E} (K_{II1} + K_{II2} + \dots + K_{IIn})^2 + \frac{1+\nu}{E} (K_{III1} + K_{III2} + \dots + K_{III3})^2 \quad (3.170)$$

elde edilir.

3.3.5. Esneklik (kompliyans) katsayıları ve matrisi

Castigliano teoremi ve gerilme yığılma faktörleri kullanılarak çatlaktan dolayı yapı içerisinde meydana gelen flexibilitate katsayıları bulunabilir. Eğer U , A çatlak alanı ve P_i yüküne maruz bir kusurlu yapının sahip olduğu şekil değiştirme enerjisi ise, şekil değiştirme enerjisi saliverinim miktarı Griffith – Irwin teorisine göre aşağıdaki gibi ifade edilir (Irwin, 1960).

$$J = \frac{\partial U(P_i, A)}{\partial A} \quad (3.171)$$

Castigliano teoremine göre, çatlaktan dolayı meydana gelen P_i yükü yönündeki ek yer değiştirme miktarı aşağıdaki gibidir.

$$u_i = \frac{\partial U(P_i, A)}{\partial P_i} \quad (3.172)$$

(3.171) eşitliği (3.172) eşitliğine yerleştirilirse;

$$u_i = \frac{\partial}{\partial P_i} \int_A J(P_i, A) dA \quad (3.173)$$

denklemleri elde edilir. Böylece, flexibilitate katsayıları aşağıdaki gibi bulunur.

$$c_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \int_A J(P_i, A) dA \quad (3.174)$$

3.3.6. Dikdörtgen kesitli bir kiriş eleman için flexibilitate katsayılarının bulunması

Şekil 3.19'daki kiriş için üç yükleme durumu verilen değişken kesitli bir kiriş için şekil değiştirme enerjisi salıverinim miktarı J ;

$$J = \frac{1-\nu^2}{E^*} \left\{ (K_I(P_1) + K_I(P_2))^2 + K_{II}(P_3)^2 \right\} \quad (3.175)$$

ifadesi ile verilir. Burada E^* elastisite modülü düzlem şekil değiştirme hali için $E^* = E$ ve düzlem gerilme hali için $E^* = \frac{E}{(1-\nu)^2}$ olarak alınır. Denklem (3.167)'de bulunan

K_I ve K_{II} ifadeleri yerlerine yerleştirilirse;

$$J(a) = \frac{1-\nu^2}{E^*} \pi r \left\{ \frac{P_1^2}{b^2 d^2} F_1^2 \left(\frac{a}{b} \right) + \frac{36 P_2^2}{b^4 d^2} F_2^2 \left(\frac{a}{b} \right) + \frac{12 P_1 P_2}{b^3 d^2} F_1 \left(\frac{a}{b} \right) F_2 \left(\frac{a}{b} \right) + \frac{\kappa^2 P_3^2}{b^2 d^2} F_3^2 \left(\frac{a}{b} \right) \right\} \quad (3.176)$$

ifadesi elde edilir. Kompliyans katsayıları, denklem (3.169) kullanılarak, d enli, a çatlak derinlikli dikdörtgen bir kesit için;

$$c_{ij} = d \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \int_0^a J(\xi) d\xi \quad (3.177)$$

olarak verilir. Sonuç olarak flexibilitate katsayıları c_{11} , c_{13} , c_{22} ve c_{33} aşağıdaki gibi verilirler:

$$\left. \begin{aligned}
 c_{11} &= \frac{2\pi}{E^*b^2d} \int_0^a \xi F_1^2 \left(\frac{\xi}{b} \right) d\xi \\
 c_{13} = c_{31} &= \frac{12\pi}{E^*b^3d} \int_0^a \xi F_1 \left(\frac{\xi}{b} \right) F_2 \left(\frac{\xi}{b} \right) d\xi \\
 c_{22} &= \frac{2\pi\kappa^2}{E^*b^2d} \int_0^a \xi F_2^2 \left(\frac{\xi}{b} \right) d\xi \\
 c_{33} &= \frac{72\pi}{E^*b^4d} \int_0^a \xi F_3^2 \left(\frac{\xi}{b} \right) d\xi
 \end{aligned} \right\} \quad (3.178)$$

3.3.7. Esneklik ve rijitlik matrislerinin oluşturulması

Kesme kuvvetinin çatlğın açılma şekline etki etmediği kabul edilirse, δ (u , v , θ) yer değiştirme vektörü için esneklik katsayıları matris formatında aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} \\ 0 & c_{22} & 0 \\ c_{31} & 0 & c_{33} \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad (3.179)$$

Flexibilite matrisinin tersi, bir düğüm noktası için rijitlik matrisini verecektir. Burada rijitlik matrisi;

$$[C]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{c_{33}}{-c_{13}^2 + c_{11}c_{33}} & 0 & \frac{c_{13}}{c_{13}^2 - c_{11}c_{33}} \\ 0 & \frac{1}{c_{22}} & 0 \\ \frac{c_{13}}{c_{13}^2 - c_{11}c_{33}} & 0 & \frac{c_{11}}{-c_{13}^2 + c_{11}c_{33}} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (3.180)$$

ile verilir.

İki düğüm ve her bir düğümünde üç serbestlik derecesine sahip olan bir kiriş için çatlak bölgesinde çatlğın neden olduğu rijitlik matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$K_{cr} = \begin{bmatrix} [C]^{-1} & -[C]^{-1} \\ -[C]^{-1} & [C]^{-1} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \quad (3.181)$$

Burada K_{cr} çatlaktan dolayı kirişte meydana gelen rijitlik matrisidir. Bu matris değişken kesitli kirişlerin titreşim probleminin modellenmesi esnasında yazılan programa eklenecektir.

3.3.8. Çatlak içeren değişken kesitli bir kiriş eleman için titreşim analizi

Yapıda bulunan çatlağın belirli bir rijitlik düşüşüne neden olduğu daha önceki bölümlerde anlatılmıştır. Bu nedenle önceki bölümlerde elde edilen genişliği değişen kiriş için rijitlik matrisi (3.93), kalınlığı değişen kiriş için rijitlik matrisi (3.114) ve genişliği ve kalınlığı değişen kiriş için rijitlik matrisi (3.135) eşitliklerine çatlaktan dolayı meydana gelen rijitlik matrisi (3.181) eşitliği eklenerek her bir çatlak içeren kiriş için rijitlik matrisi ($[K]_{wcr}$) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[K]_{wcr} = [K] + [K]_{cr} \quad (3.182)$$

Çatlaklı yapı için elde edilen rijitlik matrisi ile titreşim davranışları için oluşturulan (3.5) nolu denklem tekrar düzenlenerek;

$$|[K]_{wcr} - \lambda[M]| \varphi = 0 \quad (3.183)$$

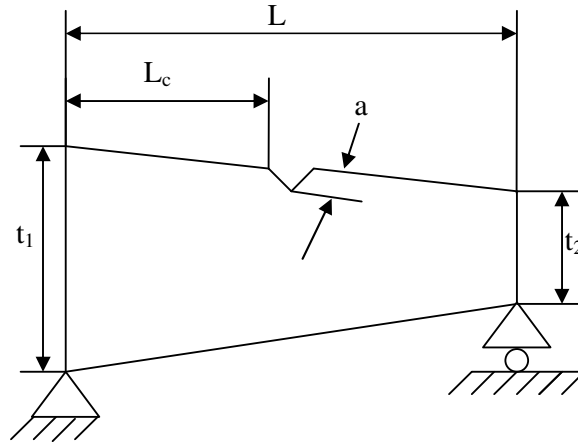
şeklinde özdeğer problemi elde edilir.

Bu problemin çözümünden elde edilen λ değerleri çatlak içeren yapının doğal frekansını (ω^2) ve φ değerleri ise çatlaklı yapının doğal vektörlerini verecektir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Bir Ucu Sabit Diğer Ucu Kayıcı Kiriş

Bu bölümde kullanılan yöntemin güvenilirliğini belirlemek için boyutları Şekil 4.1’de verilen bir ucu sabit diğer ucu kayıcı olan genişliği sabit kalınlığı lineer değişen kiriş ele alınmıştır. Seçilen malzemenin geometrik özellikleri kirişin boyu (L)=0.2m, t_1 =0.0078m, t_2 = 0.00624m t_1 ve t_2 sırası ile sol ve sağ uçtaki kalınlığı göstermektedir. Kirişin genişliği (W)=0.025m olarak alındı. Malzemeye ait Elastisite modülü E =216GPa olarak alınmıştır.

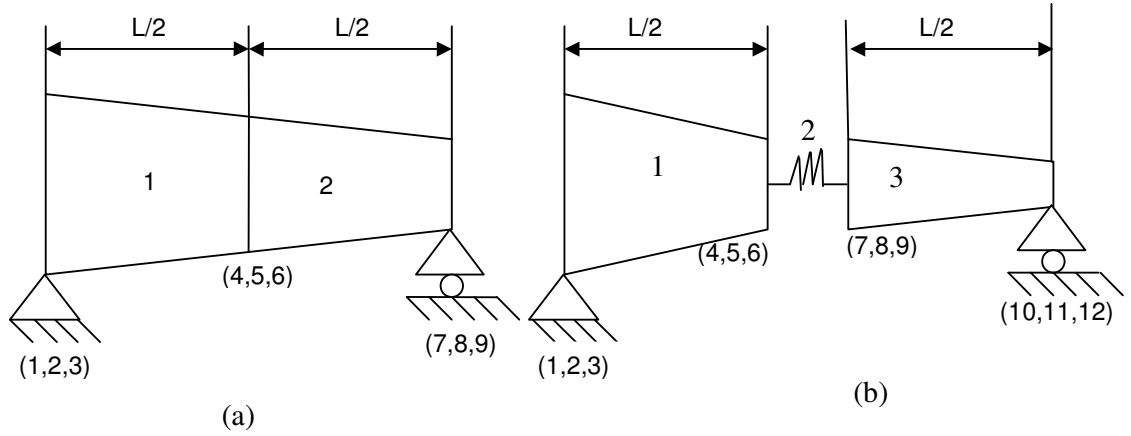


Şekil 4.1. Tek çatlak içeren bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kiriş

4.1.1. Problemin sonlu elemanlar yöntemiyle çözümü

Çatlak içeren değişken kesitli bir kirişin sonlu elemanlar yöntemiyle çözülmesi için kiriş çatlaksız (Şekil 4.2(a))ve çatlaklı (Şekil 4.2.(b)) olarak iki ayrı şekilde modellenmiştir. Daha sonra elemanlara ait rijitlik ve kütle matrisleri oluşturulmuştur. Şekil 4.2.(b)’de çatlak yeri $L_c=0.1$ m ve çatlağın derinliği o bölgedeki kalınlığın $a/b = 0.2$ ’si, $a/b = 0.4$ ’ü, $a/b = 0.6$ ’sı alınarak hesaplama

yapılmıştır. Çatlaklı kirişin modellenmesi yapılırken kiriş tam orta noktasından iki ayrı bölgeye ayrılarak çatlak olan yerde çatlağı temsil edecek bir yay olacak şekilde sistem üç elemanlı olarak modellenmiştir. Modellemeler yapılırken çatlak haricindeki elemanlar için iki düğümüne sahip ve her düğümünde üç serbestlik derecesi olan elemanlar kullanılmıştır.



Şekil 4.2. (a)Değişken kesitli bir kirişin SEM modeli

(b)Tek çatlak içeren değişken kesitli kirişin SEM modeli

İlk olarak Şekil 4.2.(a)'daki çatlak içermeyen kirişe ait rijitlik ve kütle matrisleri hesaplanmıştır.

$$K_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (4.1)$$

$$M_e = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (4.2)$$

(4.1) ve (4.2) matrislerindeki terimler önceki bölümde verilen eşitlikler yardımıyla hesaplanarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

$$K_1 = \begin{bmatrix} 3.997 \times 10^8 & 0 & 0 & -3.997 \times 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & 2.193 \times 10^6 & 115444 & 0 & -2.193 \times 10^6 & 103900 \\ 0 & 115444 & 7896.79 & 0 & -115444 & 3647.63 \\ -3.997 \times 10^8 & 0 & 0 & 3.997 \times 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & -2.193 \times 10^6 & -115444 & 0 & 2.193 \times 10^6 & -103900 \\ 0 & 103900 & 3647.63 & 0 & -103900 & 6742.35 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 3.576 \times 10^8 & 0 & 0 & -3.576 \times 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.57 \times 10^6 & 83142.9 & 0 & -1.57 \times 10^6 & 73904.8 \\ 0 & 83142.9 & 5704.08 & 0 & -83142.9 & 2610.21 \\ -3.576 \times 10^8 & 0 & 0 & 3.576 \times 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & -1.57 \times 10^6 & -83142.9 & 0 & 1.57 \times 10^6 & -73904.8 \\ 0 & 73904.8 & 2610.21 & 0 & -73904.8 & 4780.27 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.049749 & 0 & 0 & 0.024236 & 0 & 0 \\ 0 & 0.055544 & 0.00077630 & 0 & 0.018697 & -0.00045193 \\ 0 & 0.00077630 & 0.000014031 & 0 & 0.00044829 & -0.000010387 \\ 0.024236 & 0 & 0 & 0.047198 & 0 & 0 \\ 0 & 0.018697 & 0.00044829 & 0 & 0.0524829 & -0.00074715 \\ 0 & -0.00045193 & -0.000010387 & 0 & -0.00074715 & 0.000013667 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0.0446469 & 0 & 0 & 0.021685 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0498587 & 0.00069612 & 0 & 0.016728 & -0.00040455 \\ 0 & 0.00069612 & 0.00001257 & 0 & 0.00040091 & -9.2938 \times 10^{-6} \\ 0.0216856 & 0 & 0 & 0.042095 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0167289 & 0.00040091 & 0 & 0.0467972 & -0.0006669 \\ 0 & -0.00040455 & -9.2938 \times 10^{-6} & 0 & -0.0006669 & 0.000012209 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Elde edilen bu matrisler her bir elamana ait rijitlik ve kütle matrisleridir. Sisteme ait genel rijitlik ve kütle matrisinin elde edilmesi için süreklilik tablosu oluşturulmuştur.

Çizelge 4.1. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kirişe ait süreklilik tablosu

Eleman No	Düğüm No	L	Serbestlik değerleri
1	1 2	0.1m	q_1, q_2, q_3 q_4, q_5, q_6
2	2 3	0.1m	q_4, q_5, q_6 q_7, q_8, q_9

Sisteme ait genel rijitlik ve kütle matrisleri, süreklilik tablosu göz önüne alınarak ve aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & k_{15}^1 & k_{16}^1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & k_{25}^1 & k_{26}^1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 & k_{35}^1 & k_{36}^1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 + k_{11}^2 & k_{45}^1 + k_{12}^2 & k_{46}^1 + k_{13}^2 & k_{14}^2 & k_{15}^2 & k_{16}^2 \\ k_{51}^1 & k_{52}^1 & k_{53}^1 & k_{54}^1 + k_{21}^2 & k_{55}^1 + k_{22}^2 & k_{56}^1 + k_{23}^2 & k_{24}^2 & k_{25}^2 & k_{26}^2 \\ k_{61}^1 & k_{62}^1 & k_{63}^1 & k_{64}^1 + k_{31}^2 & k_{65}^1 + k_{32}^2 & k_{66}^1 + k_{33}^2 & k_{34}^2 & k_{35}^2 & k_{36}^2 \\ 0 & 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 & k_{45}^2 & k_{46}^2 \\ 0 & 0 & 0 & k_{51}^2 & k_{52}^2 & k_{53}^2 & k_{54}^2 & k_{55}^2 & k_{56}^2 \\ 0 & 0 & 0 & k_{61}^2 & k_{62}^2 & k_{63}^2 & k_{64}^2 & k_{65}^2 & k_{66}^2 \end{bmatrix}_{9 \times 9} \quad (4.7)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 & m_{13}^1 & m_{14}^1 & m_{15}^1 & m_{16}^1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21}^1 & m_{22}^1 & m_{23}^1 & m_{24}^1 & m_{25}^1 & m_{26}^1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{31}^1 & m_{32}^1 & m_{33}^1 & m_{34}^1 & m_{35}^1 & m_{36}^1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41}^1 & m_{42}^1 & m_{43}^1 & m_{44}^1 + m_{11}^2 & m_{45}^1 + m_{12}^2 & m_{46}^1 + m_{13}^2 & m_{14}^2 & m_{15}^2 & m_{16}^2 \\ m_{51}^1 & m_{52}^1 & m_{53}^1 & m_{54}^1 + m_{21}^2 & m_{55}^1 + m_{22}^2 & m_{56}^1 + m_{23}^2 & m_{24}^2 & m_{25}^2 & m_{26}^2 \\ m_{61}^1 & m_{62}^1 & m_{63}^1 & m_{64}^1 + m_{31}^2 & m_{65}^1 + m_{32}^2 & m_{66}^1 + m_{33}^2 & m_{34}^2 & m_{35}^2 & m_{36}^2 \\ 0 & 0 & 0 & m_{41}^2 & m_{42}^2 & m_{43}^2 & m_{44}^2 & m_{45}^2 & m_{46}^2 \\ 0 & 0 & 0 & m_{51}^2 & m_{52}^2 & m_{53}^2 & m_{54}^2 & m_{55}^2 & m_{56}^2 \\ 0 & 0 & 0 & m_{61}^2 & m_{62}^2 & m_{63}^2 & m_{64}^2 & m_{65}^2 & m_{66}^2 \end{bmatrix}_{9 \times 9} \quad (4.8)$$

Genel rijitlik ve kütle matrisi oluşturulduktan sonra sınır şartları uygulanmıştır. Modellemesi yapılan sistemde bir ucu sabit diğer ucu kayıcı olan kirişin başlangıç noktasında x ve y yönünde herhangi bir deplasman meydana gelmeyecektir. Bitiş noktasında ise y eksenini yönünde bir deplasman meydana gelmeyecektir. Oluşturulan genel rijitlik ve kütle matrisinin ilgili satır ve sütunu

silindikten sonra elde edilen matrislerin determinantı alınarak sisteme ait doğal frekanslar hesaplanmıştır.

$$\det[[K]-\lambda[M]]=4.67125 \times 10^{34} - 7.2357 \times 10^{27} \lambda + 6.5684 \times 10^{19} \lambda^2 - 1.15667 \times 10^{11} \lambda^3 = 0 \quad (4.9)$$

(4.9) eşitliğinde verilen denklemin çözümüyle elde edilen λ değerleri kirişin doğal frekanslarını verecektir. İlk üç doğal frekans değerleri, $\lambda_1 = 2623.05 \text{ Hz}$, $\lambda_2 = 11580.1 \text{ Hz}$, $\lambda_3 = 28958.5 \text{ Hz}$ olarak elde edilmiştir. Elde edilen bu doğal frekanslar çatlak içermeyen kirişe aittir.

Çatlak içeren değişken kesitli bir kirişin sonlu elemanlar yöntemiyle modellenmesi yapılırken çatlak kısım kirişin orta noktasında alınmıştır ve çatlak derinliği birinci durumda o noktadaki yüksekliğin $a/b=0.2$ 'si, ikinci durumda çatlak derinliği o noktadaki yüksekliğin $a/b=0.4$ 'ü ve üçüncü durumda ise çatlak derinliği o noktadaki yüksekliğin $a/b=0.6$ 'sı alınacak şekilde üç elemanlı olarak modellenmiştir (Şekil 4.2(b)).

Modellemesi yapılan Şekil 4.2 (b)'deki kirişin 1. ve 3. elemanlarına ait rijitlik matrisleri (4.3), (4.4) ve kütle matrisleri (4.5), (4.6) eşitlikleriyle verilenlerle aynıdır. Çatlak içeren kısma ait rijitlik matrisi (3.181) nolu eşitlikten faydalanarak bulunmuştur. Çatlak bölgesinde çatlak eleman boyunun sıfır olduğundan dolayı geometrik açıdan sistemin kütesine herhangi bir etkisi yoktur. Bundan dolayı kütle matrisi sıfır alınmıştır. Çatlaktan dolayı meydana gelen rijitlik matrisi aşağıdaki gibidir.

$$K_{cr} = \begin{bmatrix} 1.379 \times 10^{11} & 0 & -1.774 \times 10^8 & -1.379 \times 10^{11} & 0 & 1.774 \times 10^8 \\ 0 & 8.92 \times 10^{10} & 0 & 0 & -8.92 \times 10^{10} & 0 \\ -1.774 \times 10^8 & 0 & 274074 & 1.774 \times 10^8 & 0 & -274074 \\ -1.379 \times 10^{11} & 0 & 1.774 \times 10^8 & 1.379 \times 10^{11} & 0 & -1.774 \times 10^8 \\ 0 & -8.92 \times 10^{10} & 0 & 0 & 8.92 \times 10^{10} & 0 \\ 1.774 \times 10^8 & 0 & -274074 & -1.774 \times 10^8 & 0 & 274074 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Elde edilen çatlaktan dolayı meydana gelen rijitlik matrisi ve diğer elemanlara ait rijitlik matrisleri, Çizelge 4.2'deki süreklilik tablosu göz önüne alınarak sisteme ait rijitlik matrisi, kutucuk yöntemi ile aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Çizelge 4.2. Bir ucu sabit diğer ucu kayacı çatlak içeren kirişe ait süreklilik tablosu

Eleman No	Düğüm No	L	Serbestlik değerleri
1	1 2	0.1m	q_1, q_2, q_3 q_4, q_5, q_6
2	2 3	0	q_4, q_5, q_6 q_7, q_8, q_9
3	3 4	0.1m	q_7, q_8, q_9 q_{10}, q_{11}, q_{12}

$$[K]_{wcr} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & k_{15}^1 & k_{16}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & k_{25}^1 & k_{26}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 & k_{35}^1 & k_{36}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 + k_{11}^2 & k_{45}^1 + k_{12}^2 & k_{46}^1 + k_{13}^2 & k_{14}^2 & k_{15}^2 & k_{16}^2 & 0 & 0 & 0 \\ k_{51}^1 & k_{52}^1 & k_{53}^1 & k_{54}^1 + k_{21}^2 & k_{55}^1 + k_{22}^2 & k_{56}^1 + k_{23}^2 & k_{24}^2 & k_{25}^2 & k_{26}^2 & 0 & 0 & 0 \\ k_{61}^1 & k_{62}^1 & k_{63}^1 & k_{64}^1 + k_{31}^2 & k_{65}^1 + k_{32}^2 & k_{66}^1 + k_{33}^2 & k_{34}^2 & k_{35}^2 & k_{36}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 + k_{11}^3 & k_{45}^2 + k_{12}^3 & k_{46}^2 + k_{13}^3 & k_{14}^3 & k_{15}^3 & k_{16}^3 \\ 0 & 0 & 0 & k_{51}^2 & k_{52}^2 & k_{53}^2 & k_{54}^2 + k_{21}^3 & k_{55}^2 + k_{22}^3 & k_{56}^2 + k_{23}^3 & k_{24}^3 & k_{25}^3 & k_{26}^3 \\ 0 & 0 & 0 & k_{61}^2 & k_{62}^2 & k_{63}^2 & k_{64}^2 + k_{31}^3 & k_{65}^2 + k_{32}^3 & k_{66}^2 + k_{33}^3 & k_{34}^3 & k_{35}^3 & k_{36}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{41}^3 & k_{42}^3 & k_{43}^3 & k_{44}^3 & k_{45}^3 & k_{46}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{51}^3 & k_{52}^3 & k_{53}^3 & k_{54}^3 & k_{55}^3 & k_{56}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{61}^3 & k_{62}^3 & k_{63}^3 & k_{64}^3 & k_{65}^3 & k_{66}^3 \end{bmatrix}$$

$$[M]_{wcr} = \begin{bmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 & m_{13}^1 & m_{14}^1 & m_{15}^1 & m_{16}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21}^1 & m_{22}^1 & m_{23}^1 & m_{24}^1 & m_{25}^1 & m_{26}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{31}^1 & m_{32}^1 & m_{33}^1 & m_{34}^1 & m_{35}^1 & m_{36}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41}^1 & m_{42}^1 & m_{43}^1 & m_{44}^1 & m_{45}^1 & m_{46}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{51}^1 & m_{52}^1 & m_{53}^1 & m_{54}^1 & m_{55}^1 & m_{56}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{61}^1 & m_{62}^1 & m_{63}^1 & m_{64}^1 & m_{65}^1 & m_{66}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{11}^2 & m_{12}^2 & m_{13}^2 & m_{14}^2 & m_{15}^2 & m_{16}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{21}^2 & m_{22}^2 & m_{23}^2 & m_{24}^2 & m_{25}^2 & m_{26}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{31}^2 & m_{32}^2 & m_{33}^2 & m_{34}^2 & m_{35}^2 & m_{36}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{41}^2 & m_{42}^2 & m_{43}^2 & m_{44}^2 & m_{45}^2 & m_{46}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{51}^2 & m_{52}^2 & m_{53}^2 & m_{54}^2 & m_{55}^2 & m_{56}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{61}^2 & m_{62}^2 & m_{63}^2 & m_{64}^2 & m_{65}^2 & m_{66}^2 \end{bmatrix}$$

Burada $[K]_{wcr}$ ve $[M]_{wcr}$ sırasıyla çatlak içeren değişken kesitli kirişe ait sistem rijitlik ve kütle matrisleridir. Genel rijitlik ve kütle matrisleri oluşturulduktan sonra, sınır

şartları uygulanmıştır ve sınır şartları uygulandıktan sonra ilgili satır ve sütunlar silinerek elde edilen matrislerin determinantı alınarak sisteme ait doğal frekanslar hesaplanmıştır.

$$\det[[K]-\lambda[M]] = 2.6297 \times 10^{61} - 4.20562 \times 10^{54} \lambda + 3.85251 \times 10^{46} \lambda^2 = 0 \quad (4.11)$$

(4.11) denkleminin çözümüyle elde edilen doğal frekanslar aşağıda verilmiştir. Bu değerler; $\lambda_1 = 2579.43 \text{ Hz}$ $\lambda_2 = 11577.4 \text{ Hz}$ $\lambda_3 = 28383 \text{ Hz}$ olarak elde edilmiştir. Elde edilen bu değerler çatlak derinliğinin o noktadaki kiriş kalınlığının $a/b=0.2$ 'si alınarak hesaplanmıştır. Çatlak derinliğinin o noktadaki kiriş kalınlığının $a/b=0.4$ 'ü alınarak yapılan hesaplama sonucu elde edilen ilk üç doğal frekans değerleri aşağıda verilmiştir.

$$\lambda_1 = 2445.29 \text{ Hz} \quad \lambda_2 = 11568.8 \text{ Hz} \quad \lambda_3 = 26707.1 \text{ Hz}$$

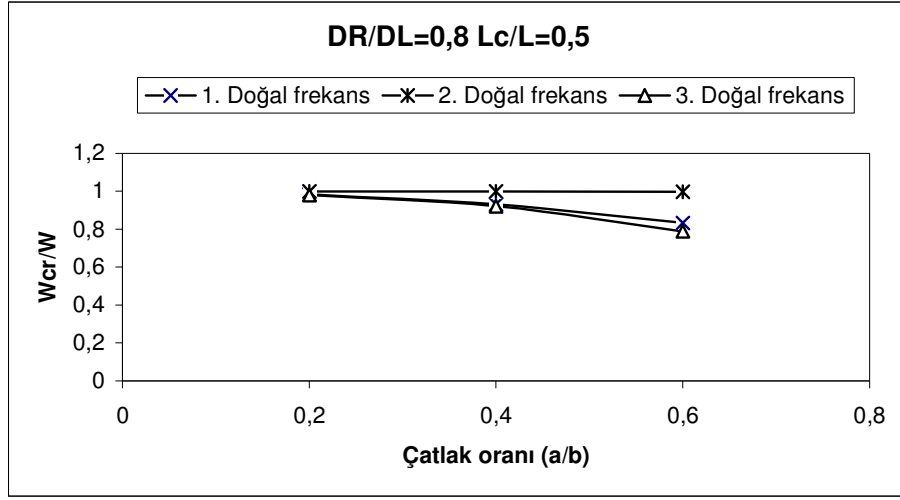
Son olarak çatlak derinliğinin o noktadaki kiriş kalınlığının $a/b=0.6$ 'sı alınarak hesaplama yapılmıştır. Bu değerler;

$$\lambda_1 = 2186.44 \text{ Hz} \quad \lambda_2 = 11548.4 \text{ Hz} \quad \lambda_3 = 22875.5 \text{ Hz} \text{ olarak elde edilmiştir.}$$

Çizelge 4.3. Çatlaksız ve çatlaklı kirişe ait doğal frekans değerleri

	Çatlaksız	$\frac{a}{b} = 0,2$	$\frac{a}{b} = 0,4$	$\frac{a}{b} = 0,6$
1.Doğal Frekans	2623.05	2579.43	2445.29	2186.44
2.Doğal Frekans	11580.1	11577.4	11568.8	11548.4
3.Doğal Frekans	28958.5	28383	26707.1	22875.5

Grafiklerde bulunan DR/DL kirişin kalınlık oranındaki değişimi göstermektedir.



Şekil 4.3. Bir ucu ankastre diğer ucu kayıcı olan kirişin çatlaklı durumdaki doğal frekansının çatlaksız durumdaki doğal frekansına olan oranı

Çatlaklı durumda elde edilen frekanslarla çatlaksız durumda elde edilen frekanslar karşılaştırılarak Şekil 4.3 te gösterilmiştir. Şekil 4.3'te görüldüğü gibi, çatlak kirişin orta noktasında olduğu için birinci ve üçüncü doğal frekanstaki düşüş miktarı ikinci doğal frekanstaki düşüş miktarından fazladır. Bunun nedeni çözümü yapılan kirişin mesnetlerine bağlı olarak birinci ve üçüncü modda maksimum moment dağılımının kirişin orta noktasında meydana gelmesidir. Çatlak oranı arttıkça enerji kaybı da artacağından doğal frekanstaki düşüş artmaktadır.

4.1.2. Önerilen çözüm metodunun doğruluğunun araştırılması

Kirişin titreşim problemine geçmeden önce uygulanan metodun güvenilirliği ve uygulanabilirliği ile ilgili literatür taraması yapılmış ve literatürden elde edilen sonuçlar ile programda elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak çok küçük oranda bir fark görülmüştür. Aşağıdaki çizelgede literatür (Karnovsky and Lebed, 2001) ve programda elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.4. Kalınlığı lineer değişen kirişin serbest titreşim analizinde literatür ve önerilen programla elde edilen sonuçların karşılaştırılması

dr/dl=0,9	Literatür	Program	% Hata
1. Doğal frekans	1050.82	1050.81	0.0009
2. Doğal frekans	6300.74	6300.93	0.003

3. Doğal frekans	17420.2	17419.97	0.001
dr/dl=0,8			
1. Doğal frekans	1065.46	1065.45	0.0009
2. Doğal frekans	6089	6089.17	0.002
3. Doğal frekans	16595.5	16596.49	0.006
dr/dl=0.7			
1. Doğal frekans	1082.71	1082.72	0.0009
2. Doğal frekans	5870.37	5870.51	0,002
3. Doğal frekans	15746.1	15748.63	0.016
dr/dl=0,6			
1. Doğal frekans	1103.5	1103.48	0.0018
2. Doğal frekans	5643.95	5644.05	0.0017
3. Doğal frekans	14868.8	14871.64	0.019
dr/dl=0,5			
1. Doğal frekans	1129.1	1129.09	0.0008
2. Doğal frekans	5408.76	5408.79	0.0005
3. Doğal frekans	13959	13959	0

Çizelge 4.5. Kalınlığı ve genişliği lineer değişen kirişin serbest titreşim analizinde literatür ve önerilen programla elde edilen sonuçların karşılaştırılması

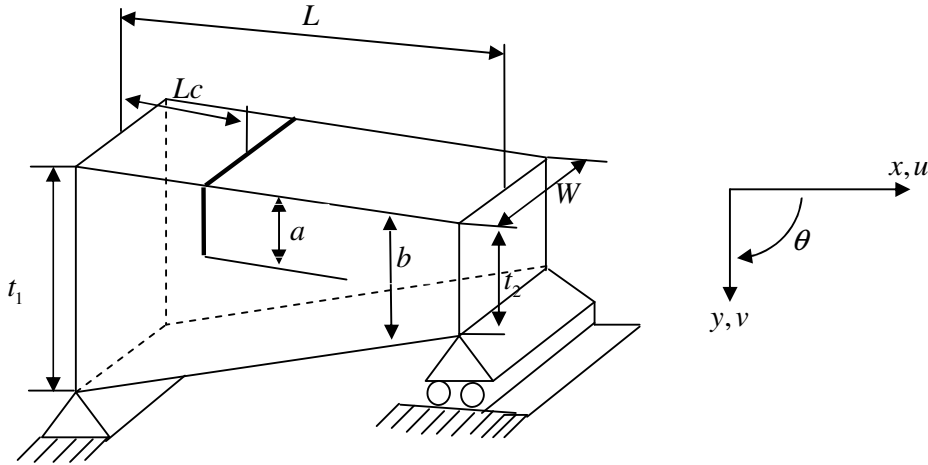
dr/dl=0,7, hr/hl=0,7	Literatür	Program	% Hata
1. Doğal frekans	1200.89	1200.88	0.0008
2. Doğal frekans	6069.66	6069.77	0.0018
3. Doğal frekans	15959.7	15953.06	0.04

Bu projede önerilen çözüm metoduyla elde edilen sonuçlar ile literatürdeki sonuçlar arasında hemen hemen hiçbir fark görülmemiştir. Bu da önerilen metodun basit ve güvenilir olduğunu göstermiştir.

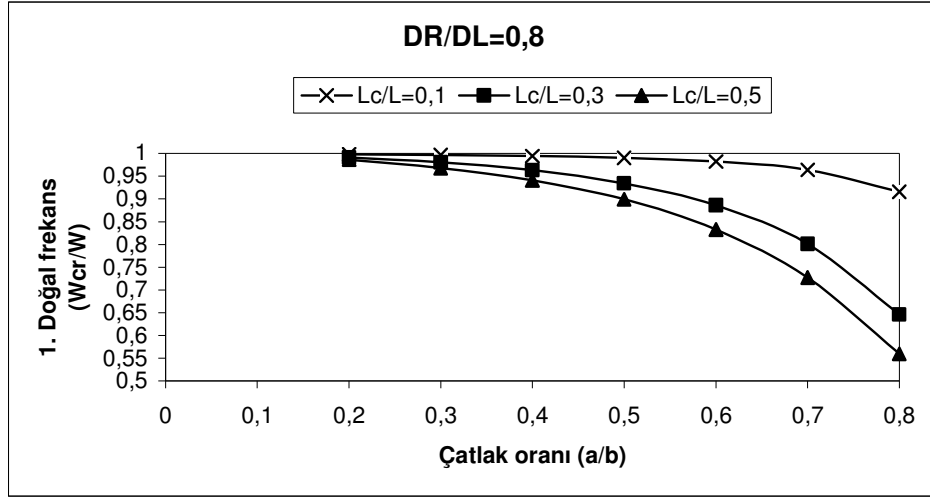
4.2. Bir Ucu Sabit Diğ er Ucu Kayıcı Kalınlığı Doğrusal Değ iş en Kiriş

Çalışmanın bu bölümünde hazırlanan program aracılığıyla tek çatlaklı kalınlığı lineer değ iş en kiriş e ait serbest titreş im analizi yapılarak kiriş in sahip olduğ u doğ al frekans ve doğ al vektörler elde edilmiştir. Ş ekil 4.4'te gösterilen değ iş ken kesitli kiriş in geometrik özellikleri; $L=0.2m$, t_1/t_2 oranı lineer şekilde değ iş mektedir. Mekanik özellikleri $E=216 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\nu=0,3$ ve $\rho=7850 \text{ kg/m}^3$ şeklindedir.

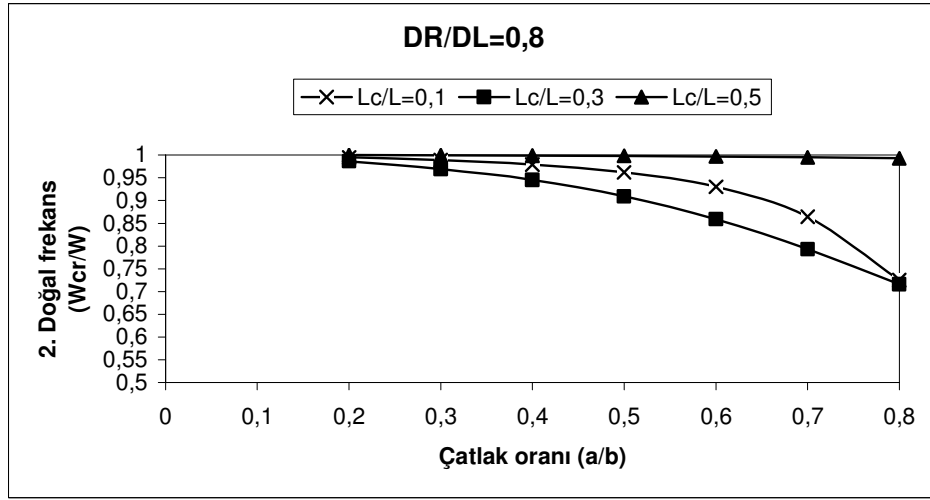
Hazırlanan program ile ilk olarak yukarıda bahsedilen geometrik ve mekanik özelliklere sahip kusursuz bir kiriş e ait doğ al frekans ve doğ al vektörler hesaplanmıştır. Daha sonra tek çatlaklı, kalınlığı lineer değ iş en kiriş için doğ al frekans ve doğ al vektör değ erleri çeş itli çatlak yeri ve çatlak derinliklerine göre hesaplanmıştır. Her bir doğ al frekans değ erleri ve doğ al vektör değ erleri için, çatlak yeri ve çatlak oranına bağ lı bazı grafikler çizilmiştir. Bu grafikler kalınlığı değ iş en geniş lığı sabit değ iş ken kesitli kiriş için verilmiştir.



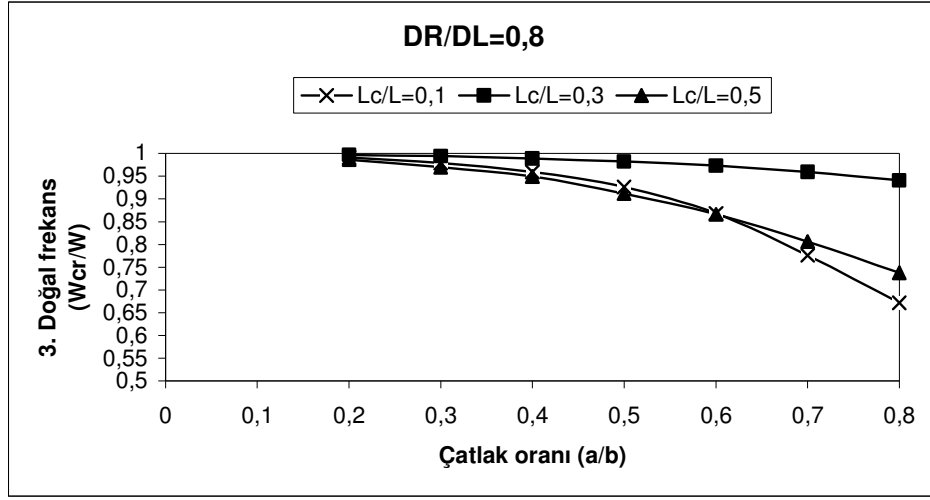
Ş ekil 4.4. Tek çatlaklı bir ucu sabit diğ er ucu kayıcı değ iş ken kesitli kiriş



Şekil 4.5. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$, çatlak yeri $Lc/L=0,1$, $Lc/L=0,3$, $Lc/L=0,5$ olarak alınan kirişin 1. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi

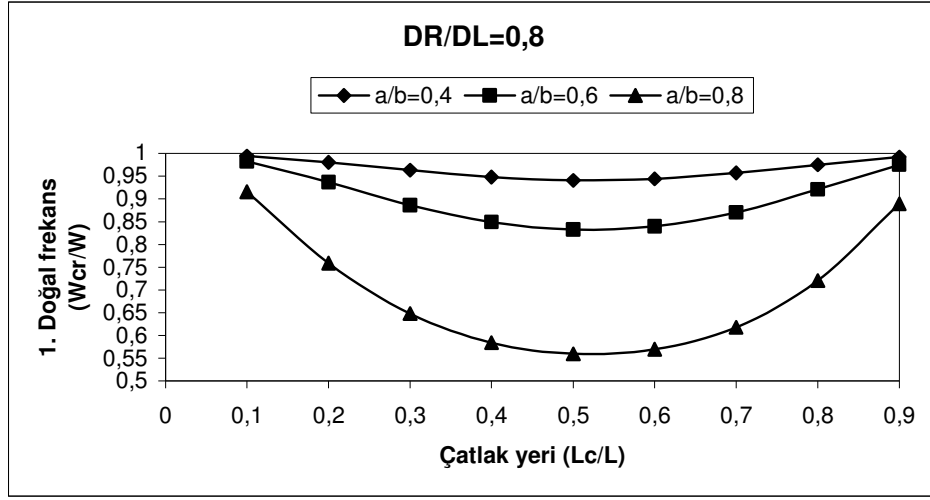


Şekil 4.6. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$, çatlak yeri $Lc/L=0,1$, $Lc/L=0,3$, $Lc/L=0,5$ olarak alınan kirişin 2. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi

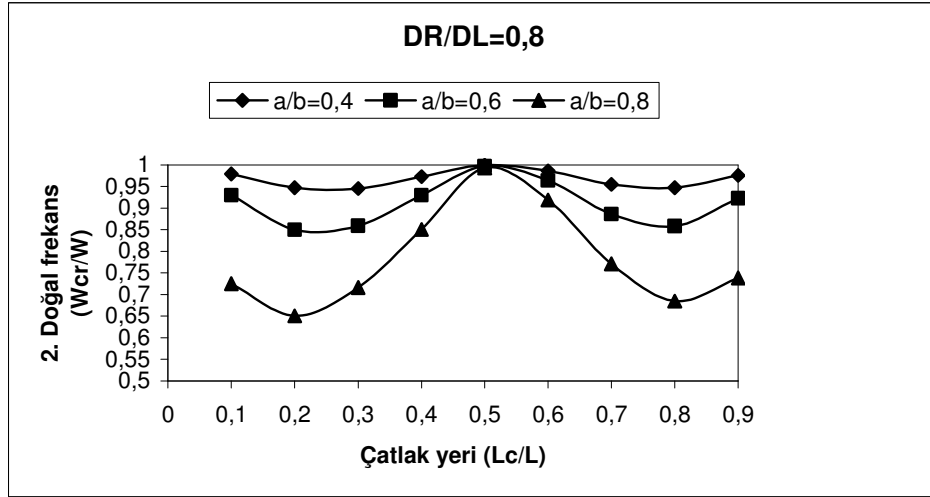


Şekil 4.7. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$, çatlak yeri $Lc/L=0,1$, $Lc/L=0,3$, $Lc/L=0,5$ olarak alınan kirişin 3. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi

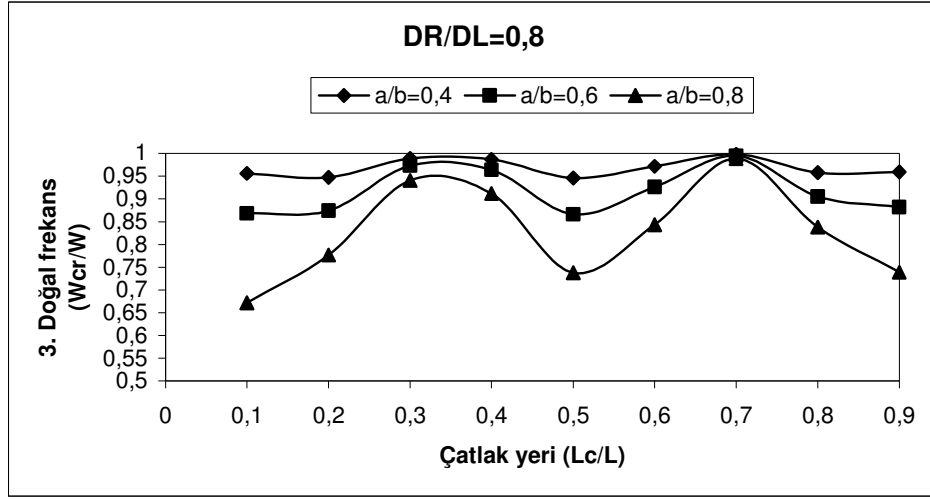
Şekil 4.5, Şekil 4.6 ve Şekil 4.7’de bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı lineer değişen, kalınlık oranı $DR/DL= 0,8$, çatlak yeri oranları $Lc/L=0,1$, $Lc/L=0,3$, ve $Lc/L= 0,5$ olarak alınan kiriş için birinci, ikinci ve üçüncü boyutsuz doğal frekansların çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi verilmiştir. Bu şekillerden görüleceği üzere birinci doğal frekanstaki en büyük düşüş çatlak kiriş ortasında olduğu durumda meydana gelmiş, ikinci doğal frekanstaki maksimum frekans düşüşü çatlağın kiriş boyunun $1/3$ ’ünde bulunduğu durumda meydana gelmiş ve üçüncü doğal frekanstaki en büyük düşüş ise çatlak yerinin kiriş boyunun $1/10$ ’unda olması durumunda meydana gelmiştir. Birinci, ikinci ve üçüncü doğal frekanslardaki en büyük düşüşlerin çatlağın, kirişin farklı konumlarında bulunması ile meydana gelmesi, bu bölgelerdeki çatlakların ilgili modda titreşen kirişte maksimum enerji kaybına neden olmalarından kaynaklanmaktadır.



Şekil 4.8. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı DR/DL=0,8, çatlak oranı a/b=0,4, a/b=0,6, a/b=0,8 olarak alınan kirişin 1. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi

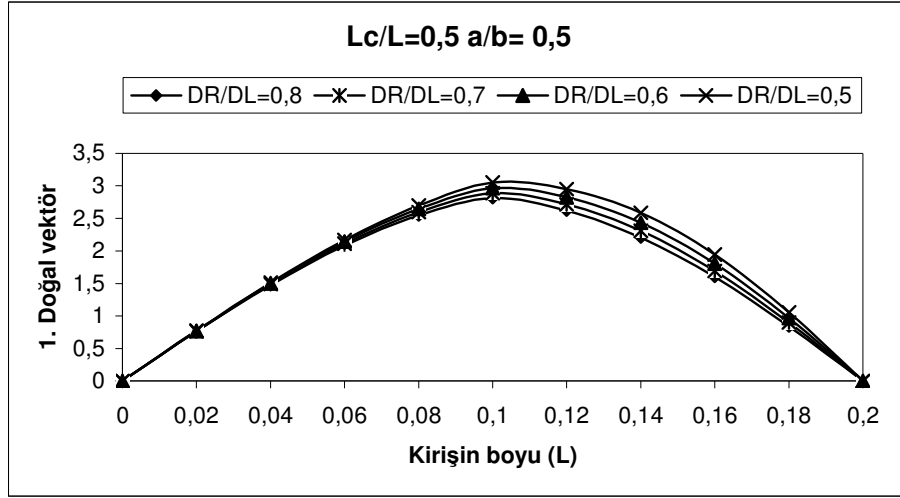


Şekil 4.9. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı DR/DL=0,8, çatlak oranı a/b=0,4, a/b=0,6, a/b=0,8 olarak alınan kirişin 2. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi

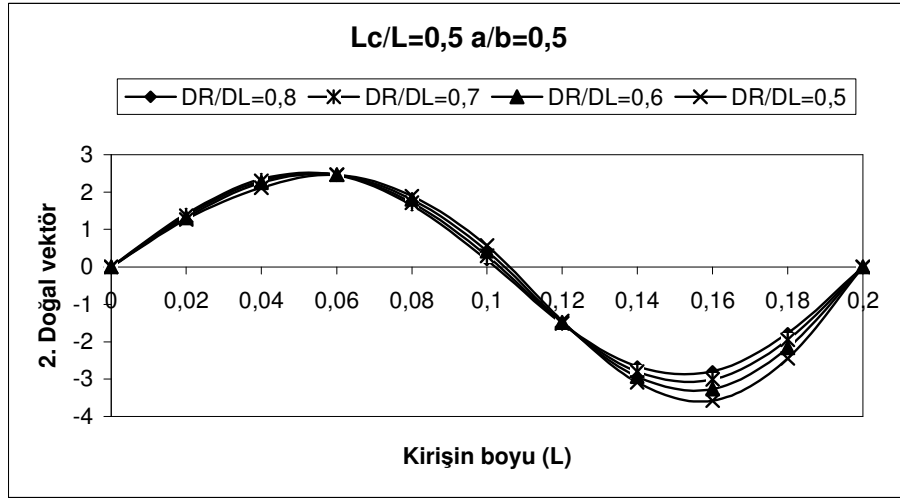


Şekil 4.10. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0.8$, çatlak oranı $a/b=0.4$, $a/b=0.6$, $a/b=0.8$ olarak alınan kirişin 3. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi

Şekil 4.8, Şekil 4.9 ve Şekil 4.10 incelendiğinde çatlak yerinin kirişin doğal frekansları üzerindeki etkileri daha açık şekilde görülmektedir. Şekil 4.8’de görüldüğü gibi çatlak yeri $Lc/L=0.5$ olduğu durumda birinci doğal frekans büyük oranda etkilenmekte, mesnete yakın çatlakların ise birinci doğal frekansta fazla bir değişikliğe neden olmamaktadır. Şekil 4.9’da çatlak yeri $Lc/L=0.2$ veya $Lc/L=0.8$ olması durumunda ikinci doğal frekansa maksimum etki yapmakta, buna karşın $Lc/L=0.5$ olduğu durumda ise ikinci doğal frekans hemen hemen hiç etkilenmemektedir. Benzer olarak Şekil 4.13’te ise çatlak yeri $Lc/L=0.1$, $Lc/L=0.5$ veya $Lc/L=0.9$ olması durumunda üçüncü doğal frekansın en çok etkilendiğini göstermektedir.

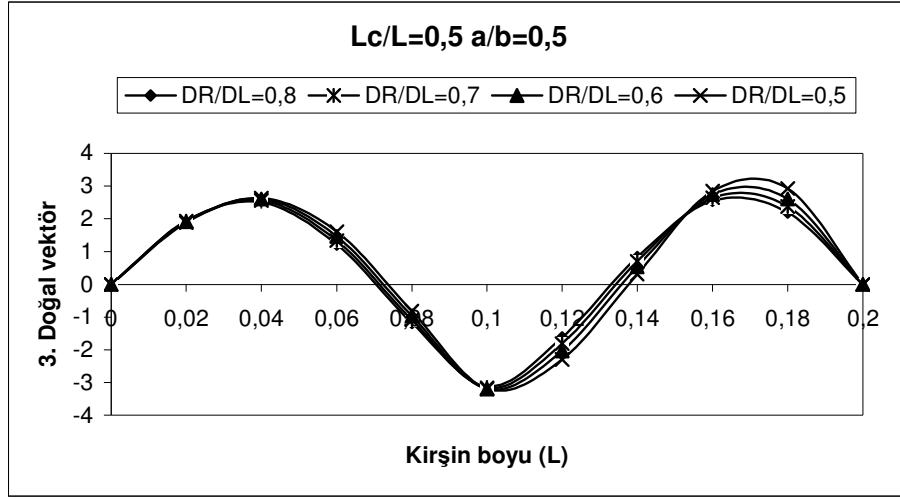


Şekil 4.11. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 1. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

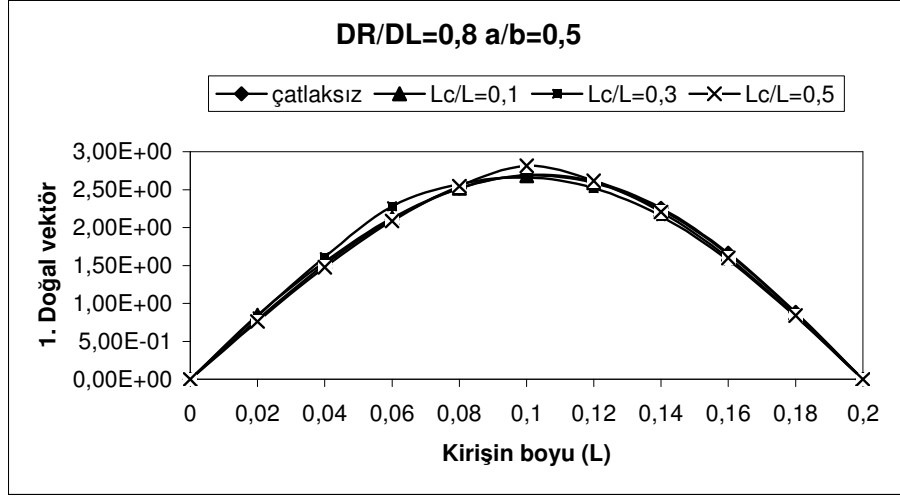


Şekil 4.12. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 2. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

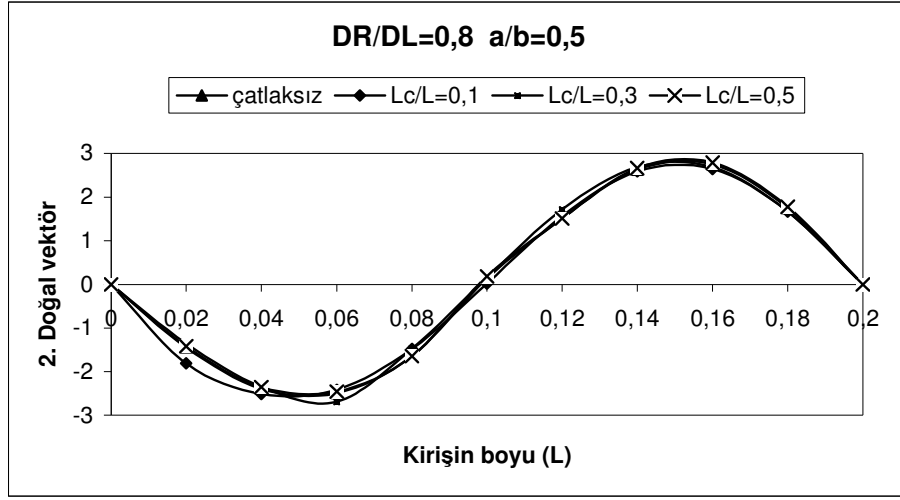
Şekil 4.11, Şekil 4.12 ve Şekil 4.13'de değişik kalınlık oranlarına bağlı olarak birinci, ikinci ve üçüncü doğal vektörler verilmiştir. Kalınlık oranı değiştiğinde kirişin rijitlik ve kütlelerinde değişiklikler olacağından doğal vektörlerde de değişimler meydana gelecektir. Bu değişim verilen şekillerden açıkça görülmektedir.



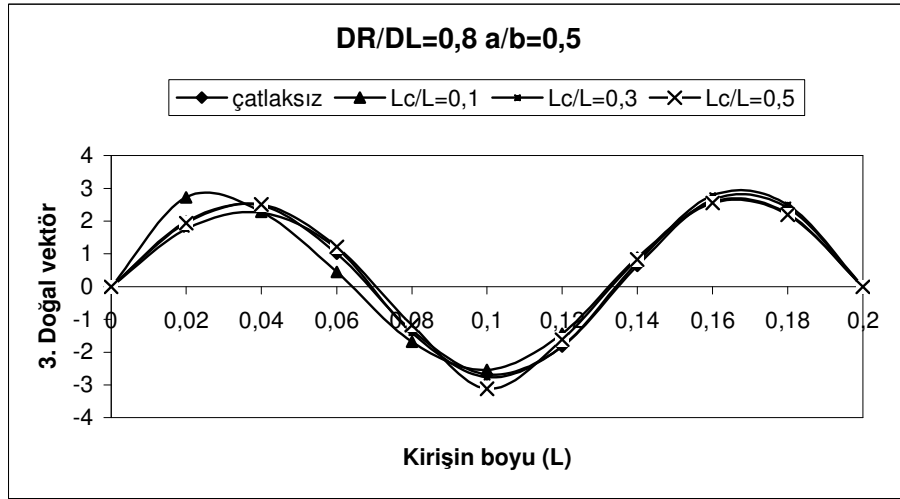
Şekil 4.13. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 3. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi



Şekil 4.14. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı DR/DL=0,8 ve çatlak oranı a/b=0,5 olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 1. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

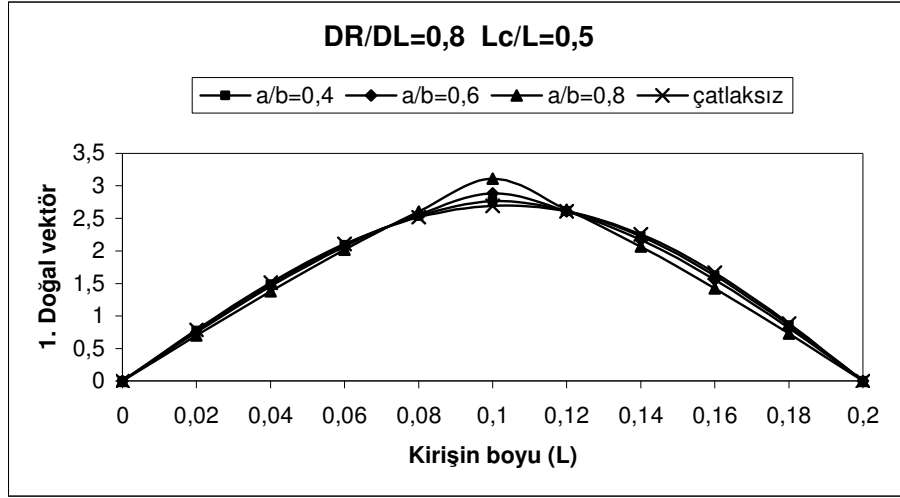


Şekil 4.15. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 2. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

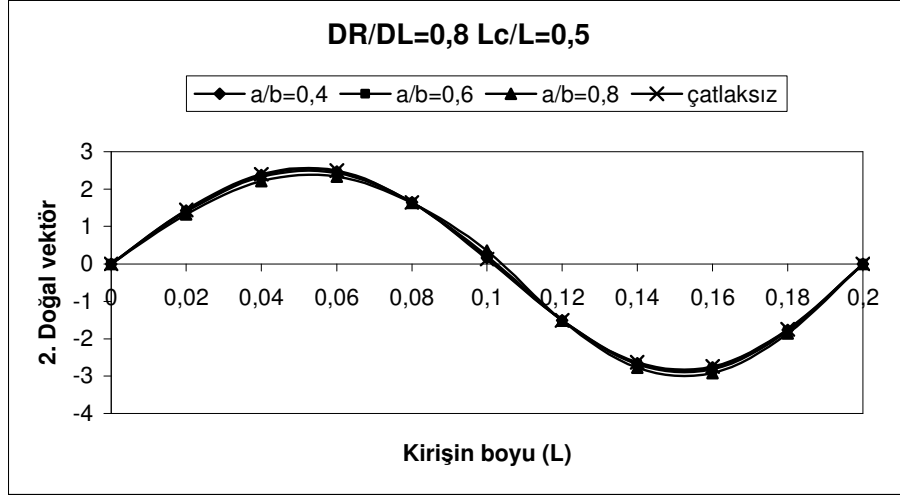


Şekil 4.16. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 3. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

Şekil 4.14, Şekil 4.15 ve Şekil 4.16'da $DR/DL=0,8$ ve $a/b=0,5$ olduğu durumda değişik çatlak yerlerine bağlı olarak birinci, ikinci ve üçüncü doğal vektörlerin çatlaqsız doğal vektörüne göre değişimleri görülmektedir. Şekillerden görüleceği üzere birinci doğal vektör çatlak $Lc/L=0,5$ konumunda, ikinci doğal vektör çatlak $Lc/L=0,2$ ve $Lc/L=0,8$ konumlarında, üçüncü doğal vektör ise çatlak $Lc/L=0,1$ ve $Lc/L=0,9$ konumlarında iken en çok etkilenmektedir.

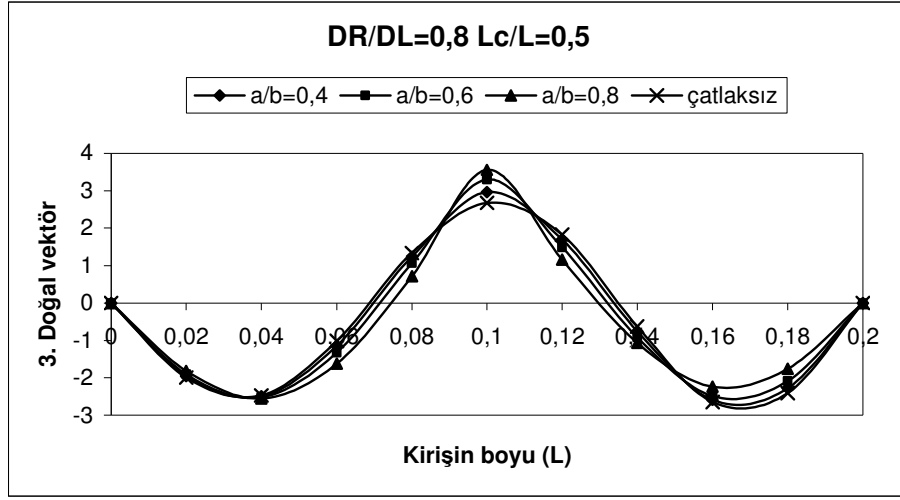


Şekil 4.17. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak yeri $Lc/L=0,5$ olan kiriş için 1. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi



Şekil 4.18. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak yeri $Lc/L=0,5$ olan kiriş için 2. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

Şekil 4.17, Şekil 4.18 ve Şekil 4.19'da değişik çatlak oranlarının doğal vektörler üzerindeki etkileri gösterilmiştir. Şekillerden görüleceği üzere çatlak oranı arttıkça meydana gelecek büyük enerji kayıplarına bağlı olarak doğal vektörlerdeki değişimde artmaktadır.



Şekil 4.19. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0.8$ ve çatlak yeri $Lc/L=0.5$ olan kiriş için 3. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

4.2.1. Bulgular

Mekanik ve geometrik özellikleriyle Şekil 4.4'te verilen tek çatlaklı bir kirişte meydana gelebilecek doğal frekans ve doğal vektörlerin analitik değeri ile hazırlanan programla bulunan değeri arasında birinci doğal frekansta ortalama % 0.0007, ikinci doğal frekansta % 0.0018 ve üçüncü doğal frekansta ise % 0.008 fark gözlemlenmiştir. Bu da kullanılan metodun uygulanabilir ve güvenilir olduğunu göstermektedir.

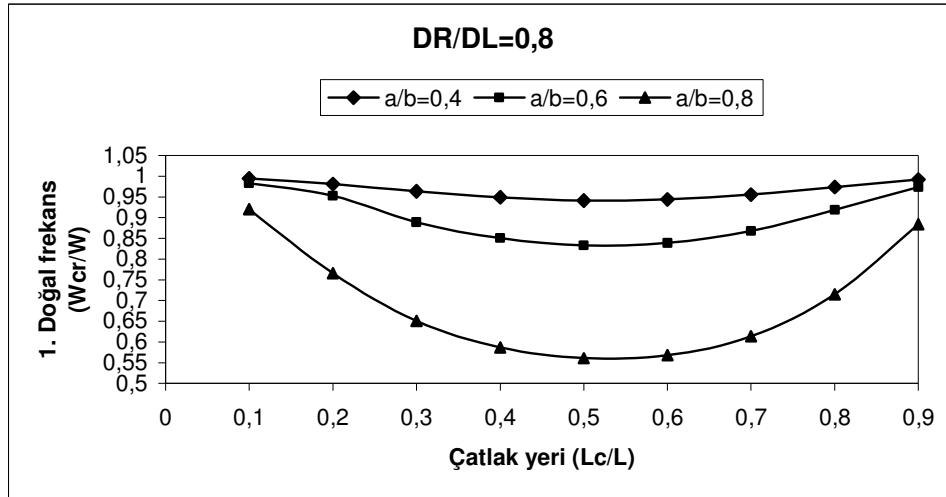
Titreşim analizi için elde edilen şekiller incelenince farklı kalınlık oranları ve çeşitli çatlak yerine sahip bir kirişin çeşitli çatlak oranları için sahip olacağı doğal frekanslar ve vektörlerde değişimler görülmüştür. Bir çatlakın ilgili modda titreşim yapan kiriş kesitinde oluşturduğu moment dağılımına bağlı olarak, kirişin dinamik karakteristiklerine etki ettiği görülmüştür. Örneğin birinci modda titreşim yapan bir kirişte maksimum moment kiriş orta noktasında olacağından bu noktadaki çatlak kirişin doğal frekans ve vektörün önemli ölçüde etkileyecektir. Bu sonucun ikinci ve üçüncü modlar içinde geçerli olduğu şekiller incelendiğinde açıkça görülmektedir.

4.3. Bir Ucu Sabit Diğ er Ucu Kayıcı Kalınlığı ve Genişliği Doğrusal Değiş en Kiriş

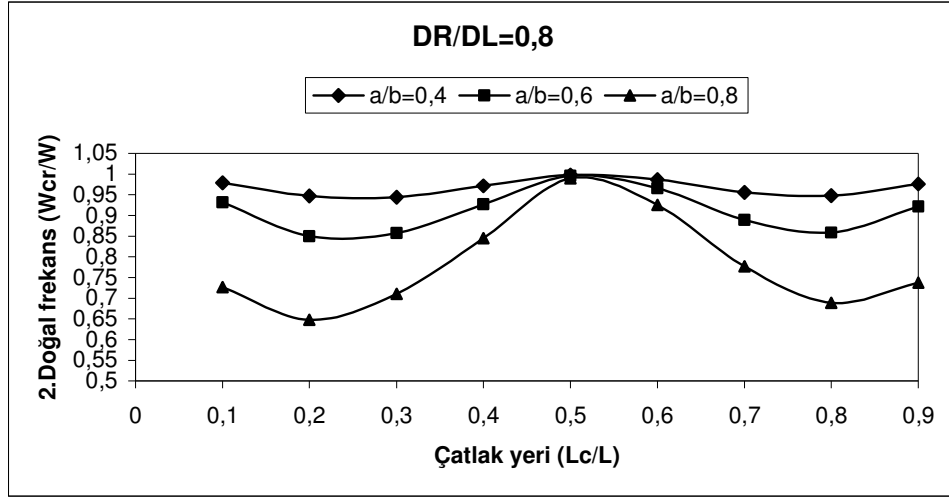
Bu bölümde hazırlanan program aracılığıyla tek çatlaklı kalınlığı ve genişliği lineer değiş en kirişe ait serbest titreşim analizi yapılarak kirişin sahip olduğu doğal frekans ve doğal vektörler elde edilmiştir. şekil 4.4'te gösterilen değiş ken kesitli kirişin geometrik özellikleri; $L=0.2m$, t_1/t_2 oranı ve W_1/W_2 oranı lineer şeklinde değiş mektedir. Mekanik özellikleri $E=216 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\nu=0,3$ ve $\rho=7850 \text{ kg/m}^3$ şeklinde dir.

Hazırlanan program ile ilk olarak yukarda bahsedilen geometrik ve mekanik özelliklere sahip kusursuz bir kirişe ait doğal frekans ve doğal vektörler hesaplanmıştır. Daha sonra tek çatlaklı kalınlığı ve genişliği lineer değiş en kiriş için doğal frekans ve doğal vektör değerleri çeşitli çatlak yeri ve çatlak derinliklerine göre hesaplanmıştır. Her bir doğal frekans değerleri ve doğal vektör değerleri için, çatlak yeri ve çatlak oranına bağlı bazı grafikler çizilmiştir. Bu grafikler kalınlığı ve genişliği değiş en değiş ken kesitli kiriş için verilmiştir.

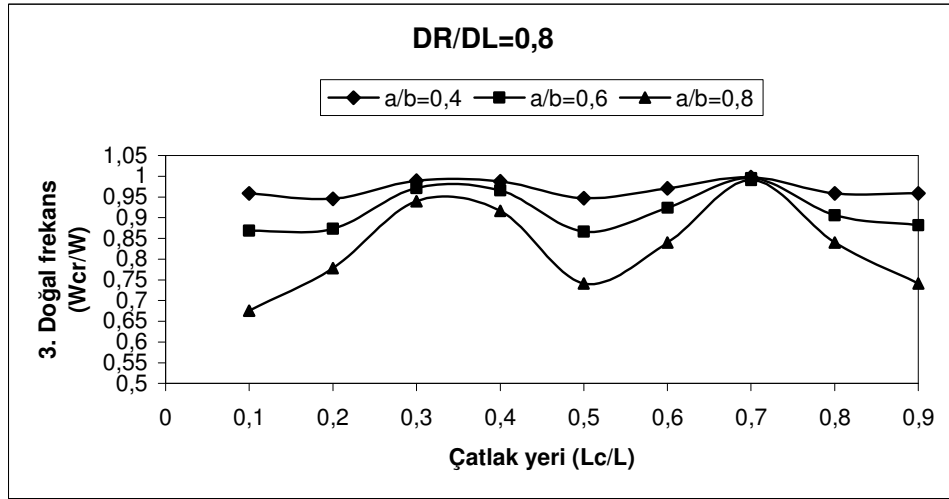
Grafiklerde bulunan DR/DL kalınlık ve genişlik oranındaki değiş imi göstermektedir.



şekil 4.20. Bir ucu sabit diğ er ucu kayıcı kalınlığı ve genişliği değiş en, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$, çatlak oranı $a/b=0,4$, $a/b=0,6$, $a/b=0,8$ olarak alınan kirişin 1. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değiş imi



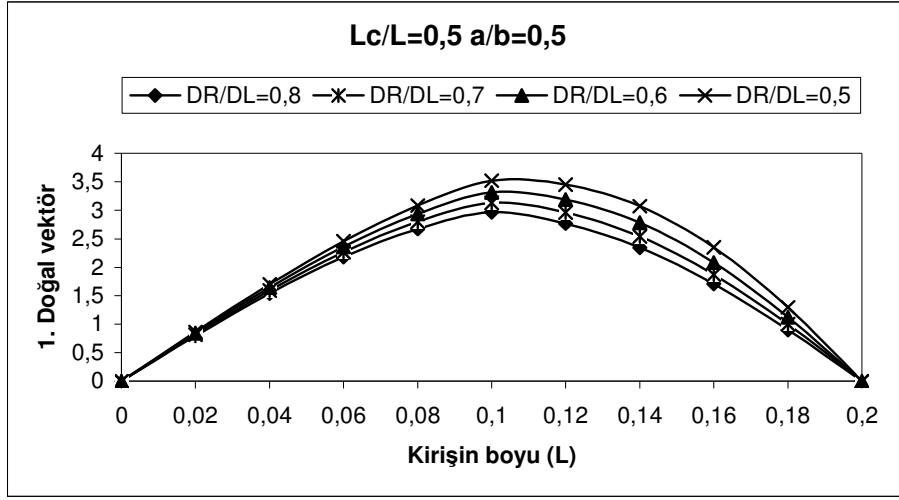
Şekil 4.21. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı DR/DL=0,8, çatlak oranı a/b=0,4, a/b=0,6, a/b=0,8 olarak alınan kirişin 2. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi



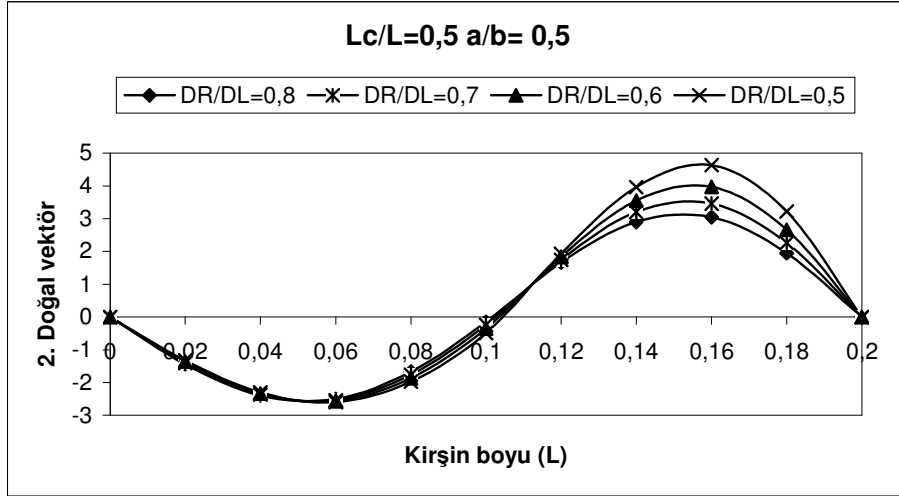
Şekil 4.22. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı DR/DL=0,8, çatlak oranı a/b=0,4, a/b=0,6, a/b=0,8 olarak alınan kirişin 3. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi

Şekil 4.20, Şekil 4.21 ve Şekil 4.22’de bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı ve genişliği lineer değişen, kalınlık oranı DR/DL= 0,8, çatlak oranları a/b=0,4, a/b=0,6, ve a/b= 0,8 olarak alınan kiriş için birinci, ikinci ve üçüncü boyutsuz doğal frekansların çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi verilmiştir. Şekiller incelendiğinde çatlak yerinin kirişin doğal frekansları üzerindeki etkileri şekilde görülmektedir. Şekil 4.20’de görüldüğü gibi çatlak yeri Lc/L=0,5 olduğu durumda birinci doğal frekans büyük oranda etkilenmekte, mesnete yakın çatlakların ise birinci doğal frekansta fazla bir değişikliğe neden olmamaktadır. Şekil 4.21’de çatlak

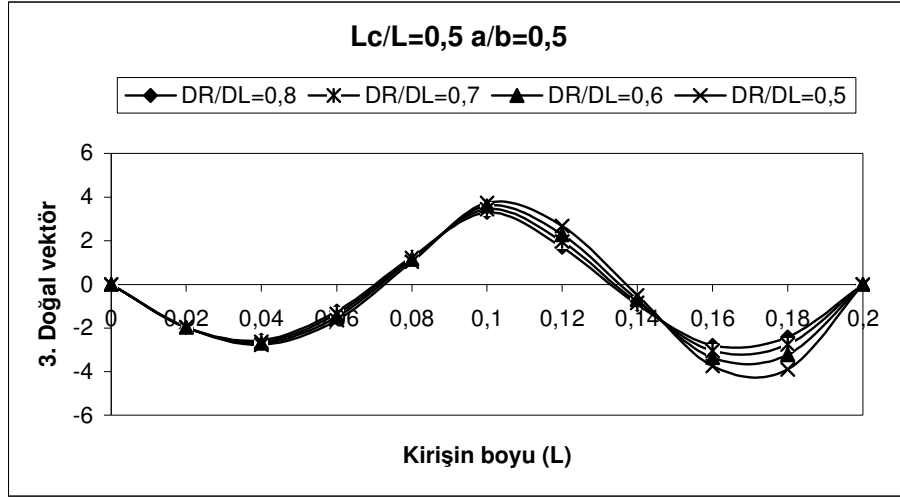
yeri $Lc/L=0.2$ veya $Lc/L=0.8$ olması durumunda ikinci doğal frekansa maksimum etki yapmakta, buna karşın $Lc/L=0.5$ olduğu durumda ise ikinci doğal frekans hemen hemen hiç etkilenmemektedir. Benzer olarak Şekil 4.22’de ise çatlak yeri $Lc/L=0.1$, $Lc/L=0.5$ veya $Lc/L=0.9$ olması durumunda üçüncü doğal frekansın en çok etkilendiğini göstermektedir. Bu sonuçlarla önceki örnekte elde edilen sonuçlara benzerlik göstermektedir.



Şekil 4.23. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı ve genişliği değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 1. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

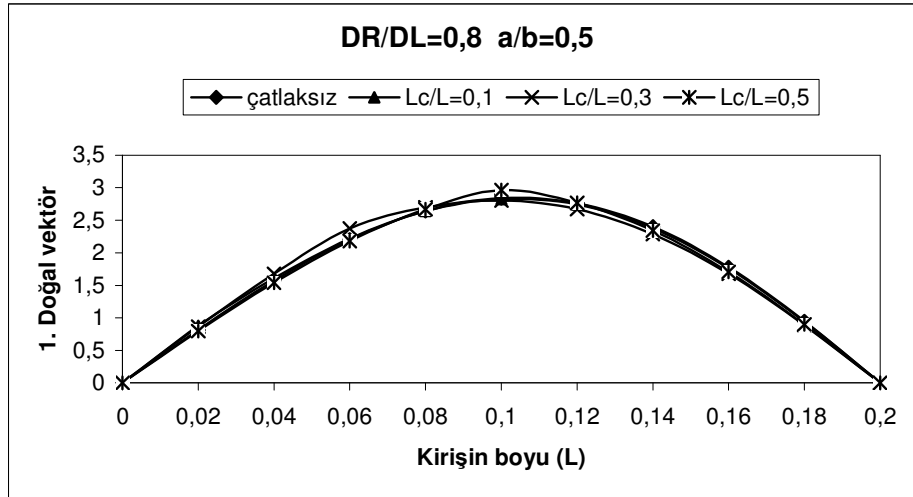


Şekil 4.24. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı kalınlığı ve genişliği değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 2. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

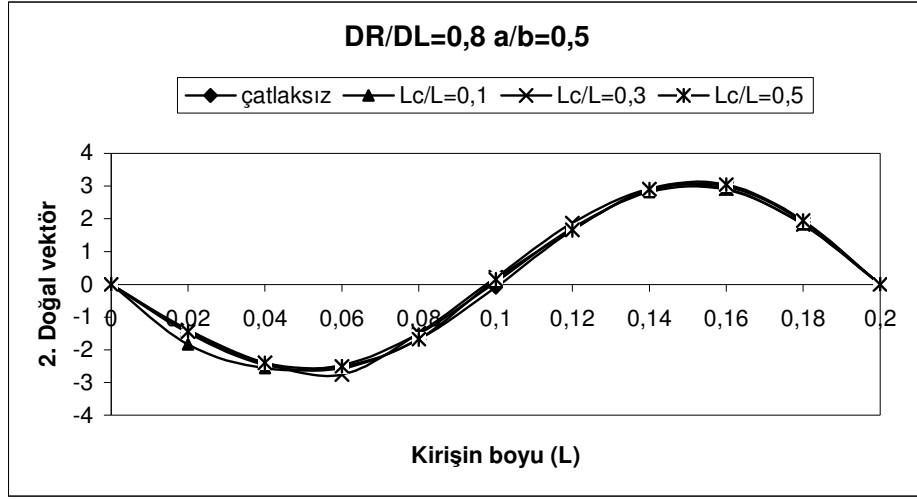


Şekil 4.25. Bir ucu ankastre diğer ucu kayıcı kalınlığı ve genişliği değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 3. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

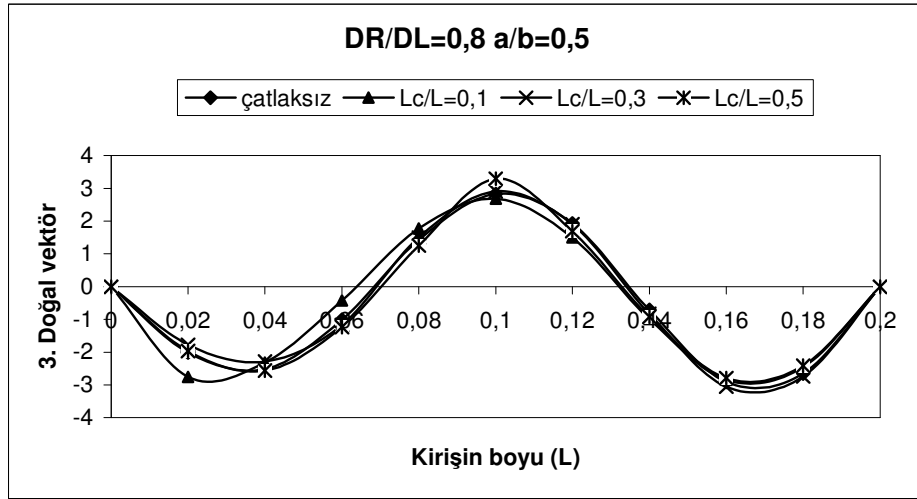
Şekil 4.23, Şekil 4.24 ve Şekil 4.25’de değişik kalınlık oranlarına bağlı olarak birinci, ikinci ve üçüncü doğal vektörler verilmiştir. Kalınlık oranı değiştikçe kirişin rijitlik ve kütlelerinde değişiklikler olacağından doğal vektörlerde de değişimler meydana gelecektir. Bu değişim verilen şekillerden görülmektedir.



Şekil 4.26. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı, kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 1. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi



Şekil 4.27. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı, kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 2. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi



Şekil 4.28. Bir ucu ankastre diğer ucu kayıcı, kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 3. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

Şekil 4.26, Şekil 4.27 ve Şekil 4.28'de $DR/DL=0,8$ ve $a/b=0,5$ olduğu durumda değişik çatlak yerlerine bağlı olarak birinci, ikinci ve üçüncü doğal vektörlerin çatlaksız kirişin doğal vektörüne göre değişimleri görülmektedir. Şekillerden görüleceği üzere birinci doğal vektör çatlak $Lc/L=0,5$ konumunda, ikinci doğal vektör çatlak $Lc/L=0,2$ konumunda, üçüncü doğal vektör ise çatlak $Lc/L=0,1$ konumunda iken en çok etkilenmektedir.

4.3.1. Bulgular

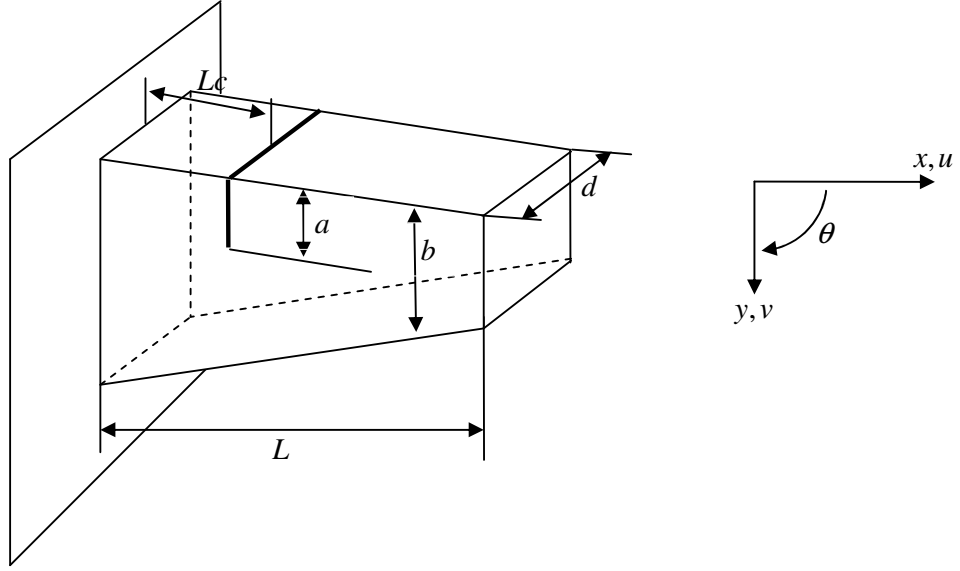
Bir ucu sabit diğ er ucu kayıcı, kalınlığı ve genişliğı lineer değış en çatlak içeren kiriş in titreş im analizi yapılmıştır. Kalınlık oranları, çatlak yeri ve çatlak oranlarının kiriş in doğı al frekans ve vektörleri üzerinde olan etkileri incelenmiştir. Çatlak yeri ilgili moda göre doğı al frekans ve vektör üzerinde değı ş ik etkiler yapmaktadır. Kiriş in ortasında bulunan bir çatlak en çok birinci doğı al frekans ve vektörü etkilemektedir. Çatlak kiriş boyuna göre 0.2-0.8 konumlarında ise ikinci doğı al frekans ve vektör daha fazla etkilenmektedir. Kiriş boyuna göre 0.1-0.5-0.9 konumlarında bulunan çatlak üçüncü doğı al frekans ve vektörü etkilemektedir.

4.4. Bir Ucu Ankastre Diğ er Ucu Serbest Kalınlığı Doğrusal Değı ş en Kiriş

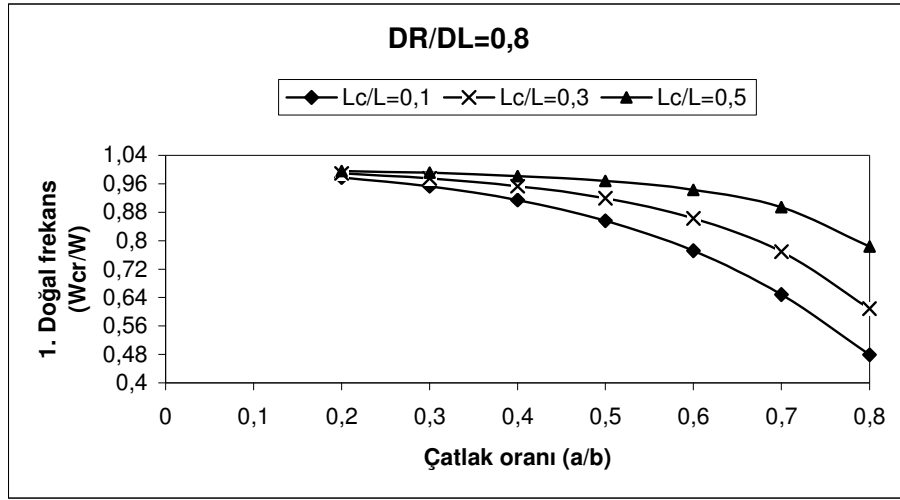
Çalışmamızın bu bölümünde hazırlanan program aracılığıyla tek çatlaklı kalınlığı lineer değı ş en ankastre bir kiriş e ait serbest titreş im analizi yapılarak kiriş in sahip olduğı doğı al frekans ve doğı al vektörler elde edilmiştir. Ş ekil 4.29'da gösterilen değı ş ken kesitli kiriş in geometrik özellikleri; $L=0.2m$, t_1/t_2 oranı lineer şekilde değı ş mektedir. Mekanik özellikleri $E=216 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\nu=0,3$ ve $\rho=7850 \text{ kg/m}^3$ şeklindedir.

Hazırlanan program ile önceki örneklerde olduğı gibi ilk olarak yukarda bahsedilen geometrik ve mekanik özelliklere sahip kusursuz bir kiriş e ait doğı al frekans ve doğı al vektörler hesaplanmıştır. Daha sonra tek çatlaklı kalınlığı lineer değı ş en kiriş için doğı al frekans ve doğı al vektör değı ş erleri çeşitli çatlak yeri ve çatlak derinliklerine göre hesaplanmıştır. Her bir doğı al frekans değı ş erleri ve doğı al vektör değı ş erleri için, çatlak yeri ve çatlak oranına bağı lı grafikler çizilmiştir.

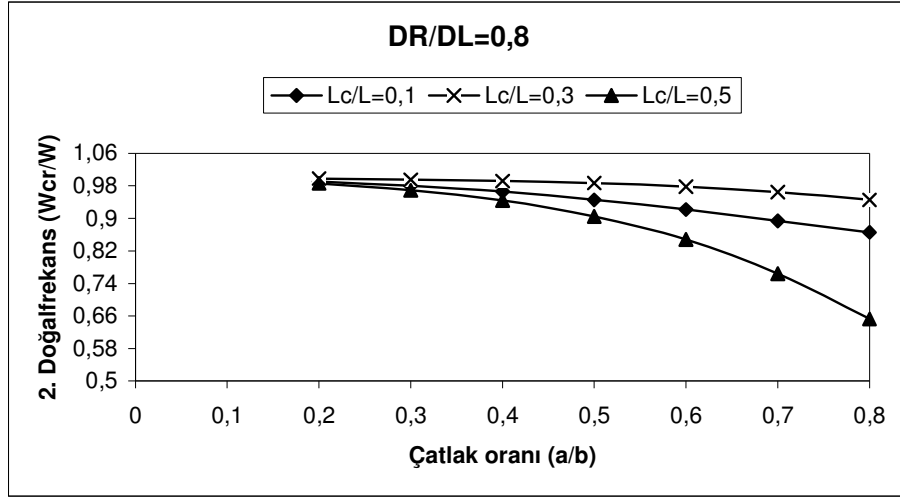
Grafiklerde bulunan DR/DL kiriş in kalınlık oranındaki değı ş imi göstermektedir.



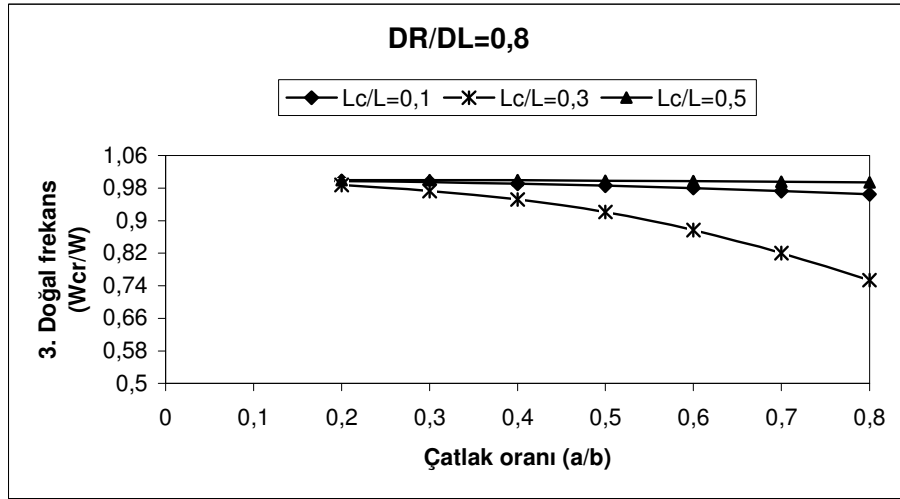
Şekil 4.29. Tek çatlaklı bir ucu ankastre diğer ucu serbest değişken kesitli kiriş



Şekil 4.30. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest, kalınlığı değişen, kalınlık oranı DR/DL=0,8, çatlak yeri Lc/L=0,1, Lc/L=0,3, Lc/L=0,5 olarak alınan kirişin 1. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi



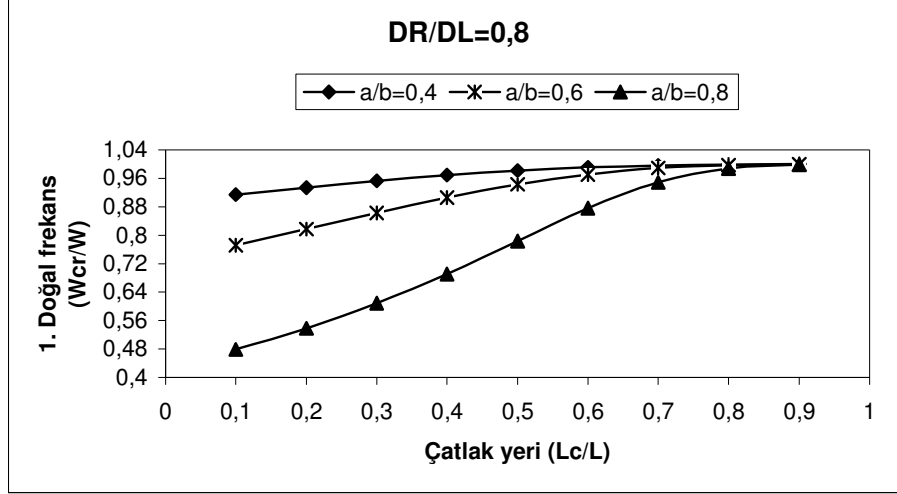
Şekil 4.31. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest, kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$, çatlak yeri $Lc/L=0,1$, $Lc/L=0,3$, $Lc/L=0,5$ olarak alınan kirişin 2. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi



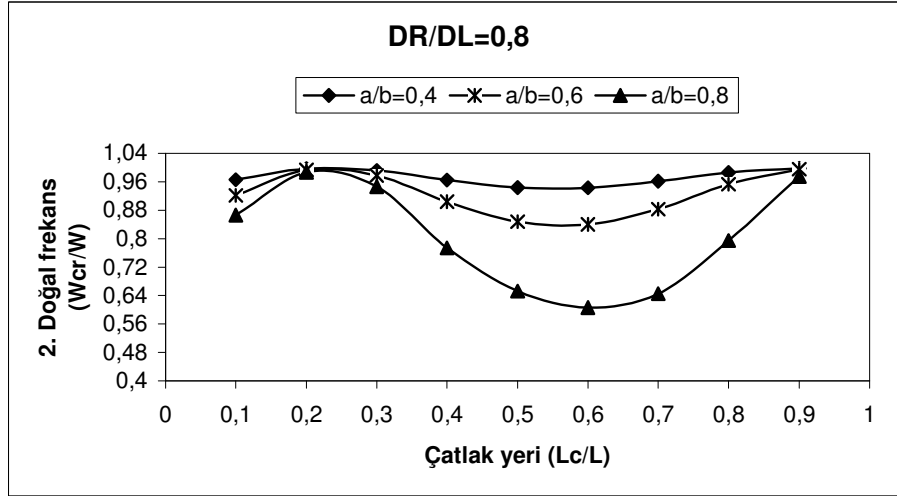
Şekil 4.32. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest, kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$, çatlak yeri $Lc/L=0,1$, $Lc/L=0,3$, $Lc/L=0,5$ olarak alınan kirişin 3. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi

Şekil 4.30, Şekil 4.31 ve Şekil 4.32’de bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı lineer değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$, çatlak yeri oranları $Lc/L=0,1$, $Lc/L=0,3$ ve $Lc/L=0,5$ olarak alınan kiriş için birinci, ikinci ve üçüncü boyutsuz doğal frekansların çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi verilmiştir. Şekil 4.30’da görüldüğü gibi birinci doğal frekanstaki en büyük düşüş çatlak ankastre mesnete yakın olduğu durumda meydana gelmiş, Şekil 4.31’de görüleceği üzere ikinci doğal frekanstaki maksimum frekans düşümü kirişin orta noktasında bulunan

çatlak için meydana gelmiştir. Şekil 4.32’de ise üçüncü doğal frekanstaki en büyük düşüş ise çatlakın giriş boyunun 1/3 ünde olması durumunda meydana gelmiştir.



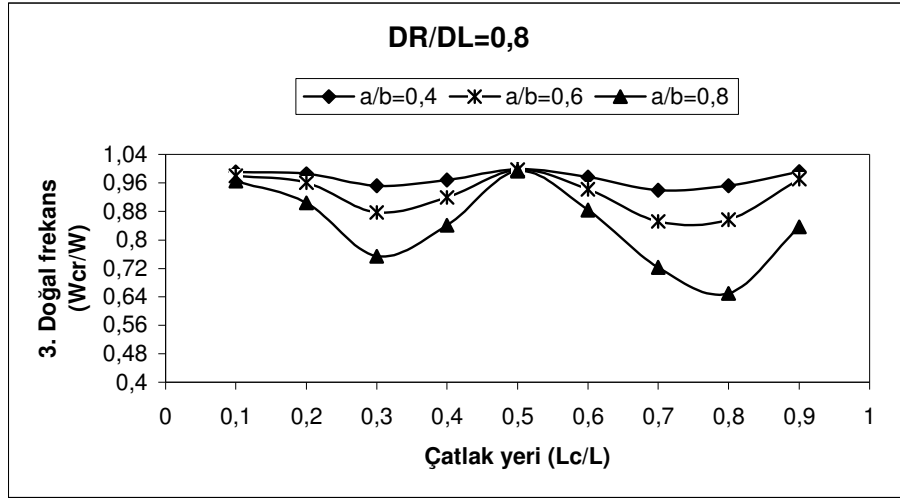
Şekil 4.33. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen, kalınlık oranı DR/DL=0,8, çatlak oranı a/b=0,4, a/b=0,6, a/b=0,8 olarak alınan kirişin 1. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi



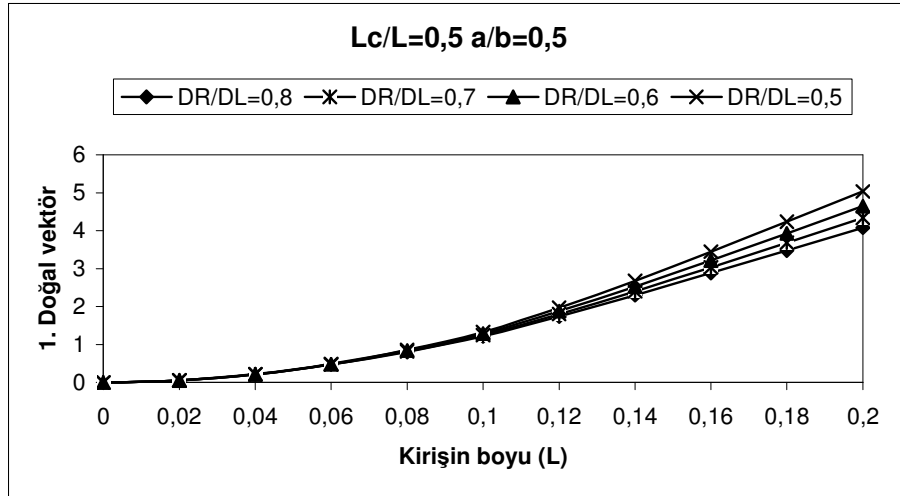
Şekil 4.34. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen, kalınlık oranı DR/DL=0,8, çatlak oranı a/b=0,4, a/b=0,6, a/b=0,8 olarak alınan kirişin 2. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi

Şekil 4.33, Şekil 4.34 ve Şekil 4.35 incelendiğinde çatlak yerinin kirişin doğal frekansları üzerindeki etkileri daha açık şekilde görülmektedir. Şekil 4.33’te görüldüğü gibi çatlak yeri $Lc/L=0,1$ olduğu durumda birinci doğal frekans büyük oranda etkilenmekte, ankastre mesnete uzak olan çatlakların ise birinci doğal frekans üzerinde önemli bir etkisi görülmemiştir. Şekil 4.34 incelendiğinde çatlak yeri

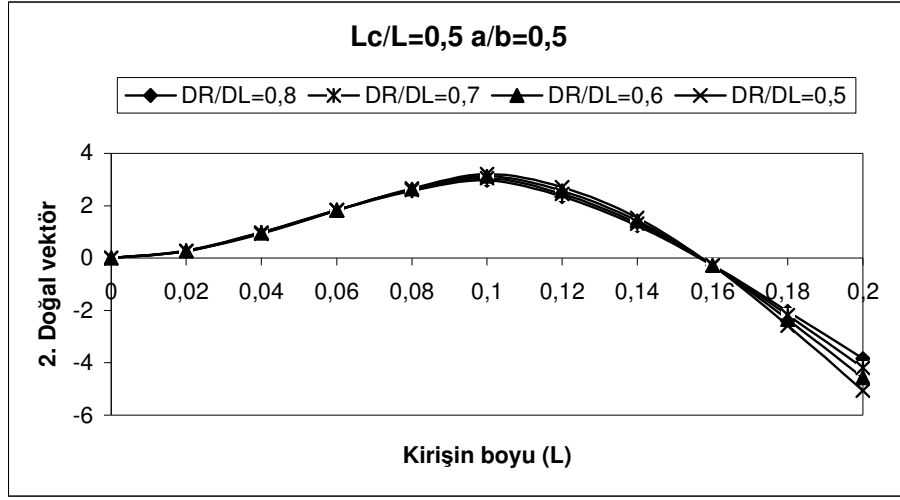
$Lc/L=0.5-0.6$ arasında olması durumunda ikinci doğal frekansa maksimum etki yapmaktadır. Şekil 4.35 incelendiğinde ise çatlak yeri $Lc/L=0.3$ veya $Lc/L=0.7-0.8$ arasında olması durumunda çatlak üçüncü doğal frekansa maksimum etki yapmakta, buna karşın $Lc/L=0.1$ ve $Lc/L=0.5$ olması durumunda ise hemen hemen hiç etkilenmemektedir.



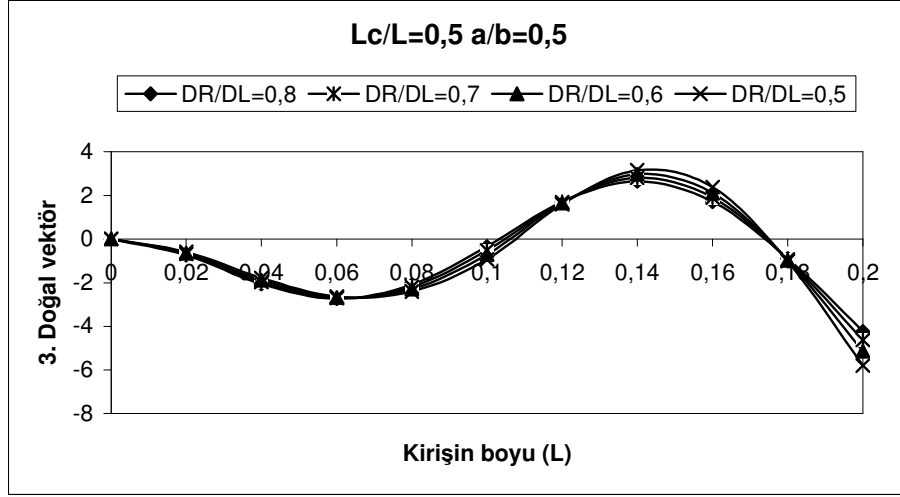
Şekil 4.35. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0.8$, çatlak oranı $a/b=0.4$, $a/b=0.6$, $a/b=0.8$ olarak alınan kirişin 3. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi



Şekil 4.36. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 1. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

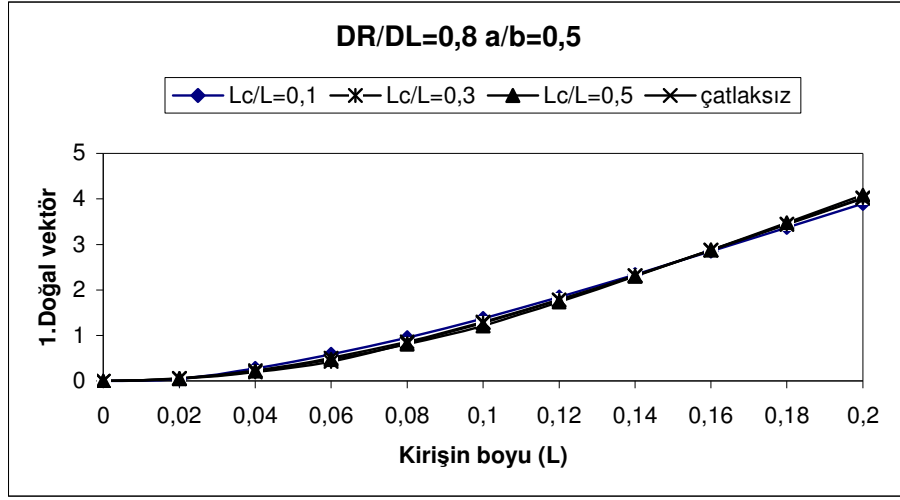


Şekil 4.37. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 2. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

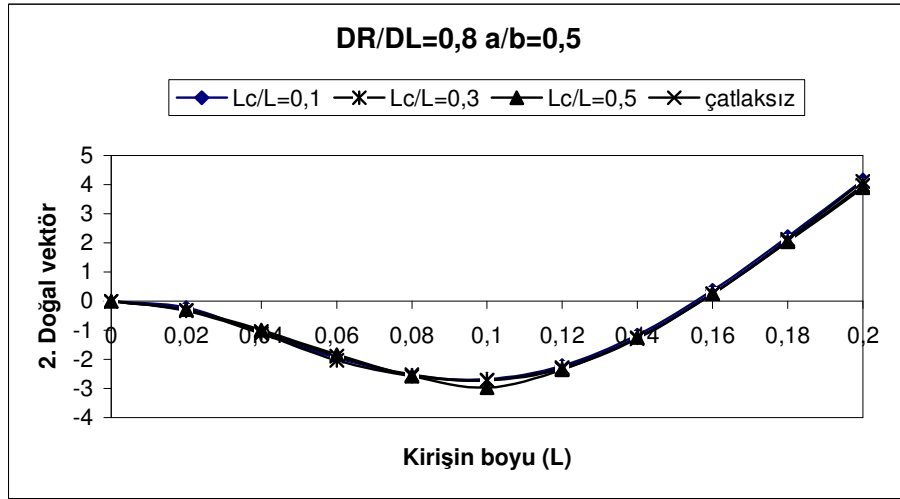


Şekil 4.38. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 3. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

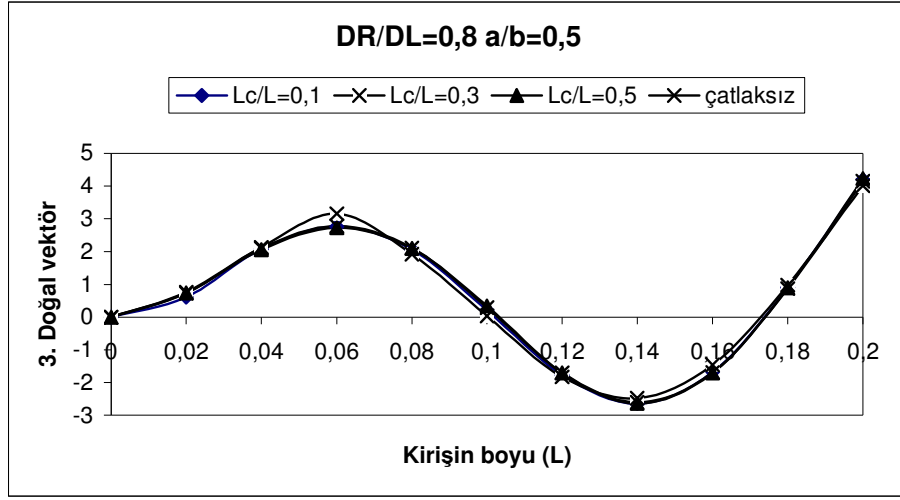
Şekil 4.36, Şekil 4.37 ve Şekil 4.38'de değişik kalınlık oranlarına bağlı olarak birinci, ikinci ve üçüncü doğal vektörler verilmiştir.



Şekil 4.39. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 1. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi



Şekil 4.40. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 2. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi



Şekil 4.41. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 3. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

Şekil 4.39, Şekil 4.40 ve Şekil 4.41’de $DR/DL=0,8$ ve $a/b=0,5$ olduğu durumda değişik çatlak yerlerine bağlı olarak birinci, ikinci ve üçüncü doğal vektörlerin çatlaksız kirişin doğal vektörüne göre değişimleri görülmektedir. Şekillerden de görüleceği gibi birinci doğal vektör çatlak $Lc/L=0,1$ konumunda, ikinci doğal vektör çatlak $Lc/L=0,5$ konumunda, üçüncü doğal vektör ise çatlak $Lc/L=0,3$ konumunda iken en çok etkilenmektedir.

4.4.1. Bulgular

Bu kısımda, bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı lineer değişen, çatlak içeren kirişin titreşim analizi yapılmıştır. Kalınlık oranı, çatlak yeri ve çatlak derinliği oranlarının titreşim parametreleri üzerine olan etkileri şekiller ile verilmiştir. Ankastre mesnete yakın çatlakların kirişin birinci doğal frekans ve vektöründe önemli değişikliklere neden olduğu tespit edilmiştir. Kiriş ortasında bulunan bir çatlak, ikinci doğal frekans ve vektöre etki ederken kiriş boyunun 0.3 ve 0.7’inde bulunan bir çatlak, üçüncü doğal frekans ve vektöre etki etmektedir.

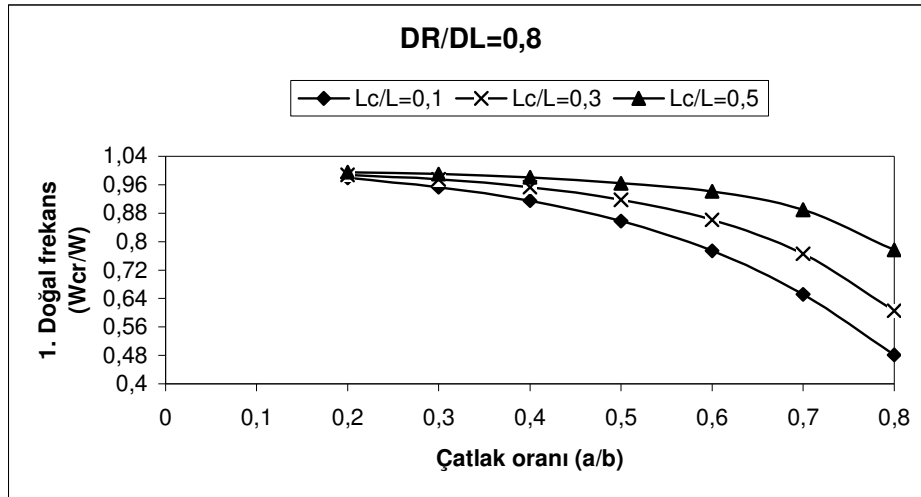
Önceki kısımlarda da ortaya konduğu gibi bu etkilerin nedeni titreşim modlarında meydana gelen moment dağılımıdır. Büyük eğilme momentinin olduğu

kesitteki bir çatlak önemli bir miktarda enerji düşümüne neden olacak bu da titreşim özelliklerini değiştirecektir.

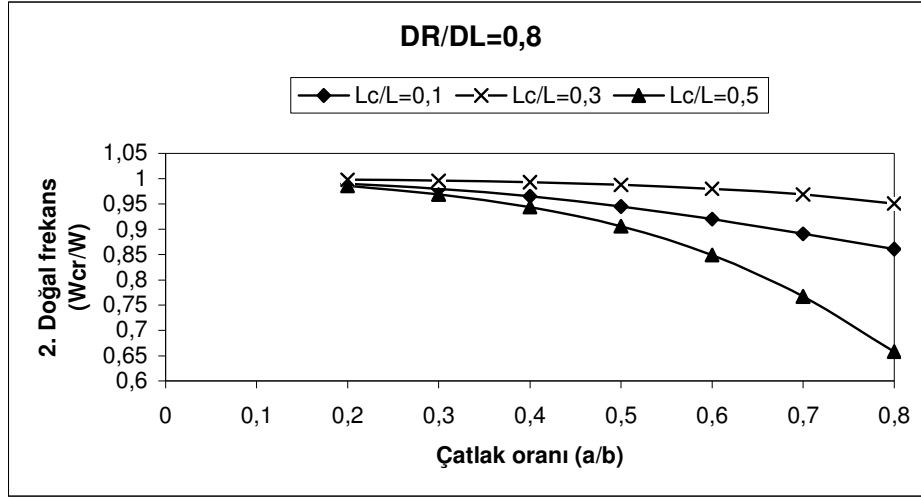
4.5. Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Kalınlığı ve Genişliği Doğrusal Değişen Kiriş

Bu kısımda hazırlanan program aracılığıyla tek çatlaklı kalınlığı ve genişliği lineer değişen ankastre bir kirişe ait serbest titreşim analizi yapılarak kirişin sahip olduğu doğal frekans ve doğal vektörler elde edilmiştir. Şekil 4.29'da gösterilen değişken kesitli kirişin geometrik özellikleri; $L=0.2m$, t_1/t_2 oranı ve W_1/W_2 oranı lineer şekilde değişmektedir. Mekanik özellikleri önceki örneklerde olduğu gibi $E=216 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\nu=0,3$ ve $\rho=7850 \text{ kg/m}^3$ şeklindedir.

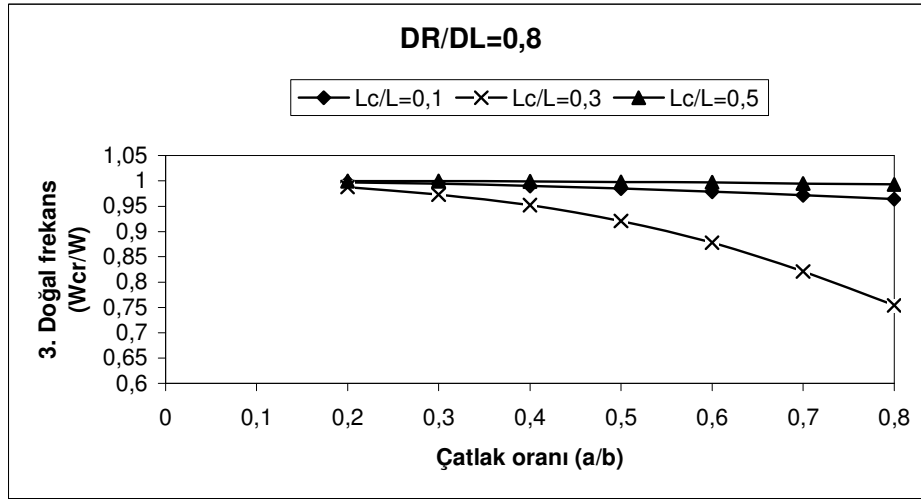
Hazırlanan program ile ilk olarak yukarıda bahsedilen geometrik ve mekanik özelliklere sahip kusursuz bir kirişe ait doğal frekans ve doğal vektörler hesaplanmıştır. Daha sonra tek çatlaklı kalınlığı ve genişliği lineer değişen kiriş için doğal frekans ve doğal vektör değerleri çeşitli çatlak yeri ve çatlak derinliklerine göre hesaplanmıştır. Her bir doğal frekans değerleri ve doğal vektör değerleri için, çatlak yeri ve çatlak oranına bağlı grafikler çizilmiştir. Grafiklerde bulunan DR / DL kirişin kalınlık ve genişlik oranındaki değişimi göstermektedir.



Şekil 4.42. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0.8$, çatlak yeri $Lc/L=0.1$, $Lc/L=0.3$, $Lc/L=0.5$ olarak alınan kirişin 1. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi



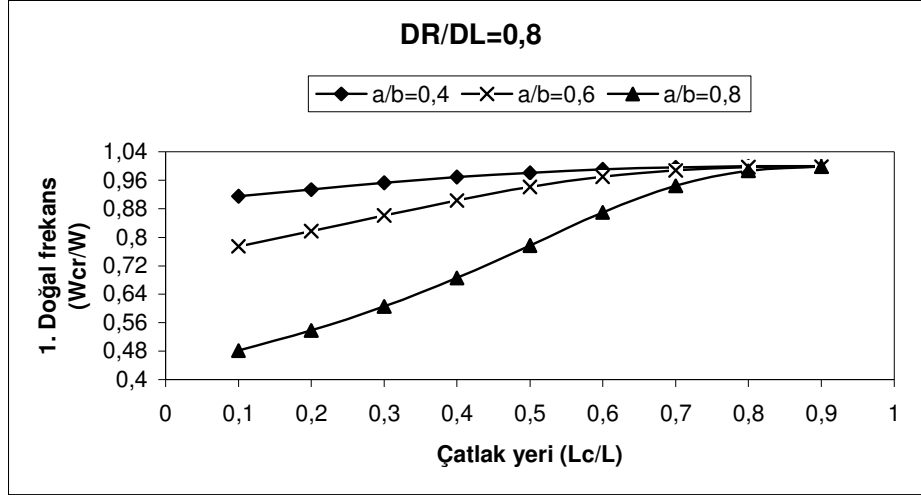
Şekil 4.43. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$, çatlak yeri $Lc/L=0,1$, $Lc/L=0,3$, $Lc/L=0,5$ olarak alınan kirişin 2. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi



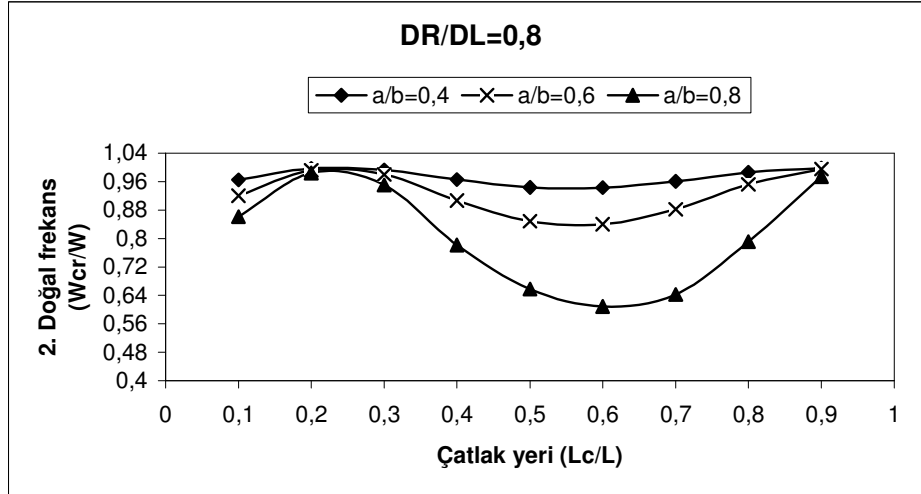
Şekil 4.44. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$, çatlak yeri $Lc/L=0,1$, $Lc/L=0,3$, $Lc/L=0,5$ olarak alınan kirişin 3. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi

Şekil 4.42, Şekil 4.43 ve Şekil 4.44'te bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği lineer değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$, çatlak yeri oranları $Lc/L=0,1$, $Lc/L=0,3$ ve $Lc/L=0,5$ olarak alınan kiriş için birinci, ikinci ve üçüncü boyutsuz doğal frekansların çeşitli çatlak oranına bağlı olarak değişimi verilmiştir. Şekil 4.42'de görüldüğü gibi birinci doğal frekanstaki en büyük düşüş çatlak ankastre mesnete yakın olduğu durumda meydana gelmiş, Şekil 4.43'te ikinci doğal frekanstaki maksimum frekans düşüşü çatlakın kirişin orta noktasında bulunduğu durumda meydana gelmiştir. Şekil 4.44 incelendiğinde ise üçüncü doğal frekanstaki

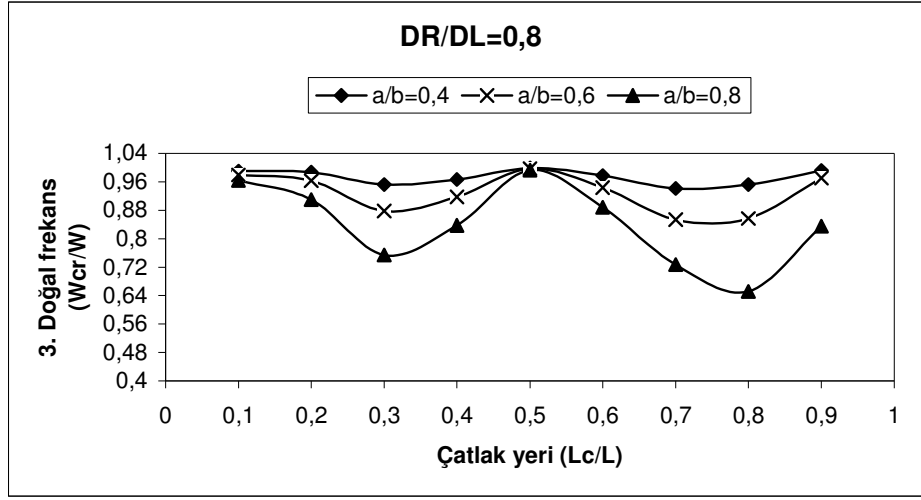
maksimum frekans düşüşü çatlağın kiriş boyunun 1/3 ünde bulunduğu durumda meydana gelmiştir. Bu sonuçlar kalınlığı lineer değişen ankastre kiriş analizinde elde edilenlerle paralellik arz etmektedir.



Şekil 4.45. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı DR/DL=0,8, çatlak oranı a/b=0,4, a/b=0,6, a/b=0,8 olarak alınan kirişin 1. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi

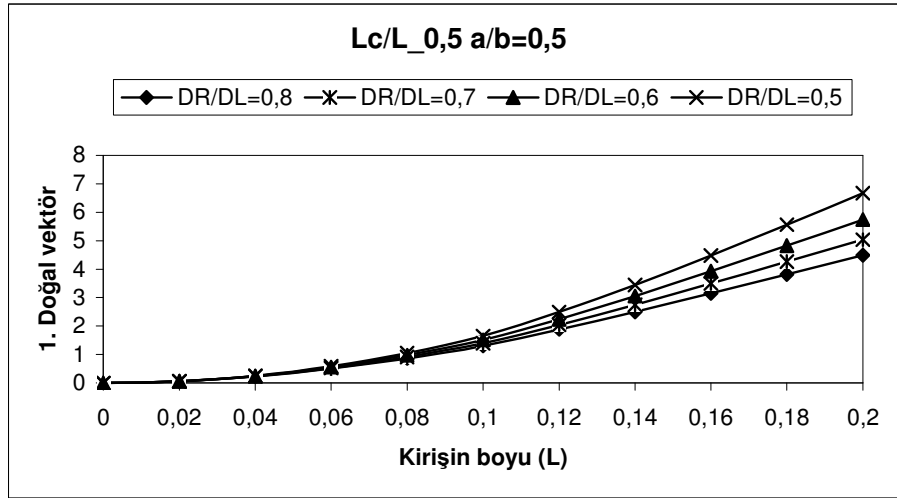


Şekil 4.46. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı DR/DL=0,8, çatlak oranı a/b=0,4, a/b=0,6, a/b=0,8 olarak alınan kirişin 2. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi

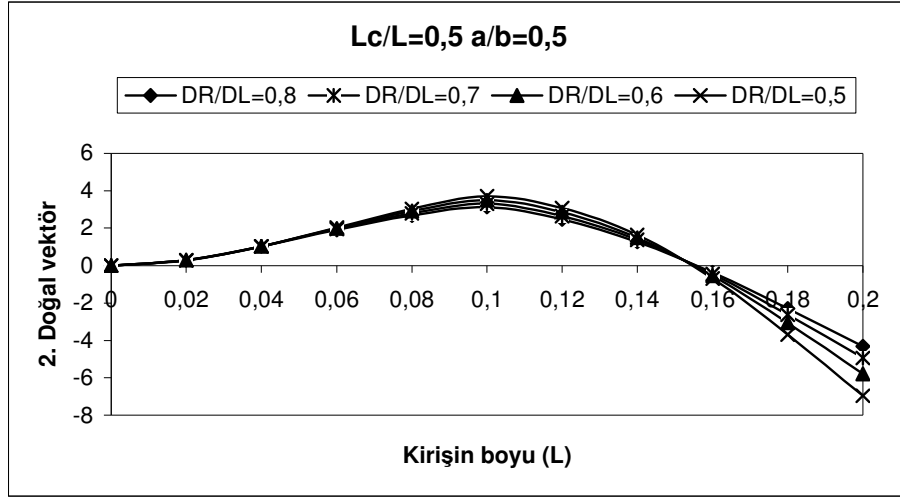


Şekil 4.47. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$, çatlak oranı $a/b=0,4$, $a/b=0,6$, $a/b=0,8$ olarak alınan kirişin 3. doğal frekans değerinin çeşitli çatlak yerine bağlı olarak değişimi

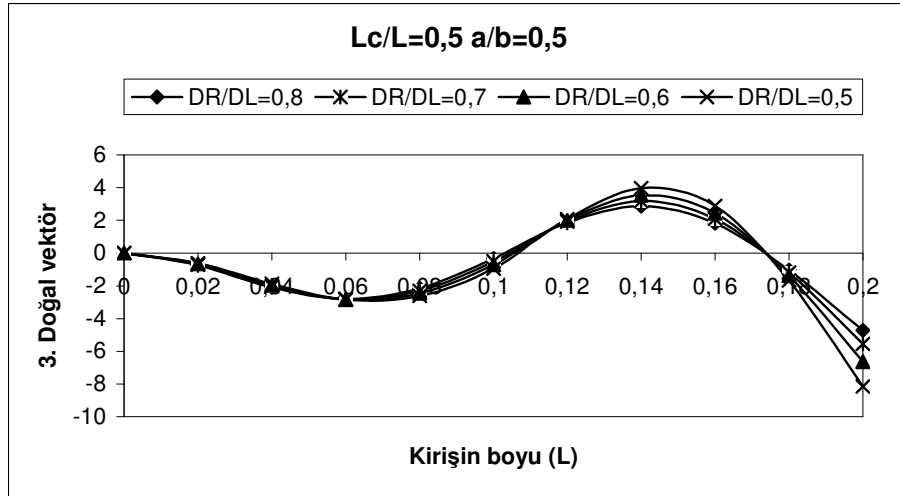
Bu şekiller incelendiğinde bir önceki örnektene benzer sonuçlar elde edilmiştir.



Şekil 4.48. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 1. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

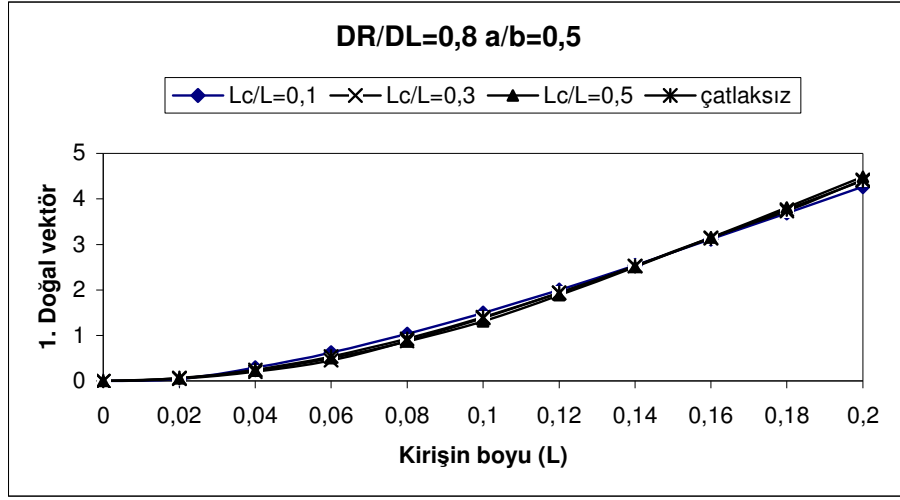


Şekil 4.49. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 2. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

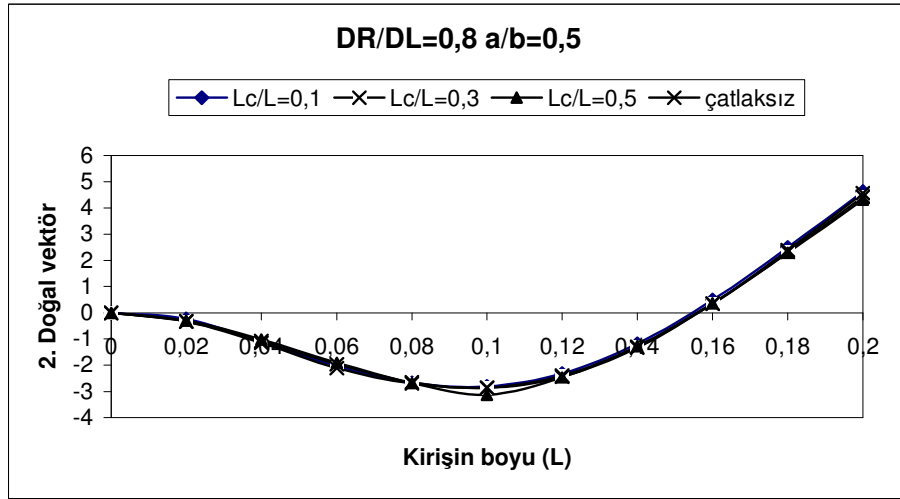


Şekil 4.50. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen kiriş için çeşitli kalınlık oranlarına bağlı olarak 3. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

Şekil 4.48, Şekil 4.49 ve Şekil 4.50'de görüldüğü gibi değişik kalınlık ve genişlik oranlarına bağlı olarak birinci, ikinci ve üçüncü doğal vektörler verilmiştir. Kalınlık ve genişlik oranı değiştikçe doğal vektörlerde de değişimler meydana gelmiştir.

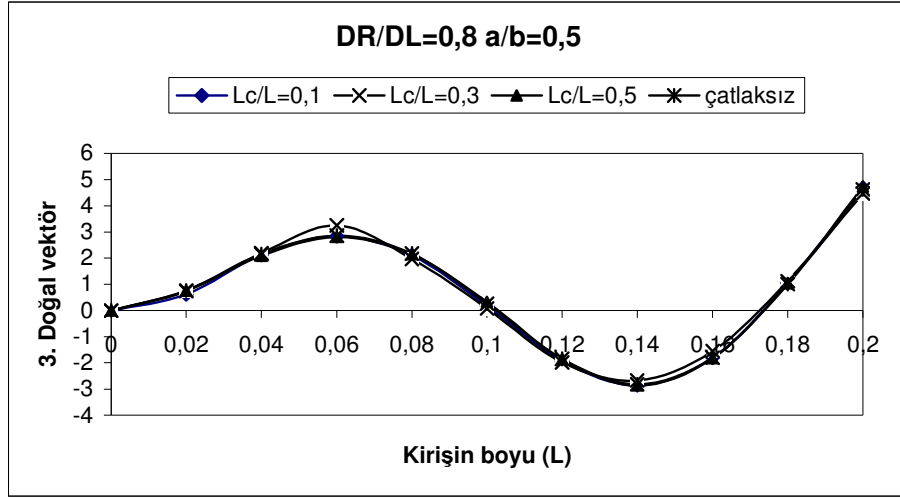


Şekil 4.51. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 1. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi



Şekil 4.52. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 2. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

Şekil 4.51, Şekil 4.52 ve Şekil 4.53'de $DR/DL=0,8$ ve $a/b=0,5$ olduğu durumda değişik çatlak yerlerine bağlı olarak birinci, ikinci ve üçüncü doğal vektörlerin çatlaksız kirişin doğal vektörüne göre değişimleri görülmektedir. Şekillerden de görüleceği gibi birinci doğal vektör çatlak $L_c/L=0,1$ konumunda, ikinci doğal vektör çatlak $L_c/L=0,5$ konumunda ve üçüncü doğal vektör ise çatlak $L_c/L=0,3$ konumunda iken en çok etkilenmektedir.



Şekil 4.53. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği değişen, kalınlık oranı $DR/DL=0,8$ ve çatlak oranı $a/b=0,5$ olan kiriş için çeşitli çatlak oranlarına bağlı olarak 3. doğal vektör değerinin kirişin boyuna bağlı değişimi

4.5.1. Bulgular

Bu bölümde, bir ucu ankastre, diğer ucu serbest kalınlığı ve genişliği lineer değişen, çatlak içeren kirişin titreşim analizi yapılmıştır. Kalınlık oranları, çatlak yeri ve çatlak oranlarının kirişin doğal frekansı ve vektörleri üzerinde olan etkileri şekillerle gösterilmiştir. Şekillerden de görüleceği üzere ankastre mesnete yakın olan bir çatlakın kirişin doğal frekans ve vektörlerinde önemli değişikliklere neden olduğu tespit edilmiştir.

Bu bölümde elde edilen sonuçlar ile bir önceki kısımda elde edilen sonuçlar birbirlerine benzerlik göstermektedir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışma ile çatlak içeren değişken kesitli kirişlerin serbest titreşim analizi yapılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

- Sonlu elemanlar yöntemi, değişik sınır şartlarına sahip değişken kesitli çatlak içeren kirişlerin titreşim analizi için güvenle kullanılabilir bir çözüm yöntemidir.
- Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı değişken kesitli kirişlerde çatlak yeri $L_c/L=0.5$ olması durumunda çatlağın birinci doğal frekans ve vektörü daha fazla etkilenmekte, çatlak yeri kiriş boyuna göre $L_c/L=0.2-0.8$ konumlarında ise ikinci doğal frekans ve vektör daha fazla etkilenmekte, çatlak yeri kiriş boyuna göre $L_c/L=0.1-0.5-0.9$ konumlarında ise üçüncü doğal frekans ve vektör daha fazla etkilenmektedir.
- Bir ucu ankastre diğer ucu serbest kirişlerde, ankastre mesnete yakın çatlakların kirişin birinci doğal frekans ve vektöründe önemli değişikliklere neden olmaktadır. Kiriş ortasında bulunan bir çatlak, ikinci doğal frekans ve vektöre etki ederken kiriş boyuna göre $L_c/L=0.3-0.7$ konumlarında bulunan bir çatlağın, daha çok kirişin üçüncü doğal frekans ve vektörüne etki etmektedir.
- Çatlak içeren değişken kesitli kirişlerin dinamik karakteristikleri (doğal frekans ve vektör), kalınlık oranı, çatlak oranı ve çatlak yerine bağlı olarak önemli oranda değişmektedir.
- Bir çatlak ilgili modda titreşim yapan kiriş kesitinde oluşturduğu moment dağılımına bağlı olarak, kirişin dinamik karakteristiklerine etki etmektedir.
- Çatlak oranı arttıkça doğal frekans ve vektörlerdeki değişimlerde artmaktadır.

5.2. Öneriler

- Bu çalışmada verilen ve güvenilirliği gösterilen sonlu elemanlar esaslı çözüm yöntemi çatlak içeren kompozit malzemelerin titreşim analizini yapabilecek şekilde geliştirilebilir.
- Çözüm yöntemi dairesel değişken kesitli çatlak içeren kirişlerin dinamik karakteristiklerini bulacak şekilde geliştirilebilir.
- Birden çok çatlak içeren ve değişik sınır şartlarına sahip kirişler için analiz yapılarak sonuçlar karşılaştırılabilir.
- Önerilen çözüm yöntemi, aksenal yüklü değişken kesitli kirişler için geliştirilebilir.
- Bu çalışmada çatlağın sürekli açık olduğu varsayılmıştır. Ancak bazı durumlarda çatlak kapanacağından bu çalışma çatlak kapanmasını da kapsayacak şekilde değiştirilebilir.
- Bu çalışma ile elde edilen dinamik veriler (doğal frekans ve vektör) kullanılarak yeni titreşim esaslı hata tespiti yöntemleri geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

- AMIRIKIAN, A., 1972. Wedge – beam framing. Trans. ASCE, 117, 596-652.
- ARCHER, J. J., 1963. Consistent mass matrix for disributed mass systems. Proc. ASCE, 89, ST4, 161-178.
- AVAKIAN, A. and BESKOS, D. E., 1976. Use of dynamic stiffness influence coefficients in vibrations of nonuniform beams. J. Sound vib. 47, 292-295.
- AL-GAHTANI, H., J., 1996. Exact stiffnesses for tapered members, ASCE, 1234-1239.
- AL-GAHTANI, H., J., and KHAN, M., S., 1998. Exact analysis of nonprismatic beams, ASCE, 1290-1293,.
- BAKER, G., 1996. Exact deflections in nonprismatic members, Computers and Structures, 61, 515-528.
- COLUGNA, A., T., 1997. Stiffness formulation for nonprismatic beam elements, ASCE, 1484-1489.
- CINDBERG, G. M, 1965. Vibration of nonuniform beam The Aero Quart. 14, 387-395.
- CRANCH NAD, E. T. ADLER, A. A., 1956. Bending vibration of variable section beams. J. APP. Mech, 23, 103-108.
- CONVAY, H. D., BECKER, E. C. H. and DUBIL, J. F., 1964. Vibration frequencies of tapered bars and circular plates. J. APPI. Mech. 31, 329-331.
- CONVAY, H. D. and DUBIL, J. F., 1965. Vibration frequencies of truncated-cone and wedge-beams. J. APPI Mech. 32, 932-934.
- DIMAROGONAS, A.D., 1970. Dynamic response of cracked rotors, *General Electric Co., Internal Report, Schenectady, NY, U.S.A.*
- DE ROSA M., A., and AUCIELLO, N., M., 1996. Free vibrations of tapered beams with flexible ends, Comput. Struct. Vol. 60, 197-202.
- DATTA, A., K. and SIL, S., N., 1996. An anlysis of free undamped vibration of beams of varying cross-section, Computers and structures Vibration, 59, 479-483.
- FRIEDMAN, Z. and KOSMATKA, L.B., 1992. Exact stiffness matrix of a nonuniform beam-I. Extention torsion, and bending of a Bernoulli-Euler beam. Comput. Struct. 42, 671-682.
- FRIEDMAN, Z. and KOSMATKA, L.B., 1993. Exact stiffness matrix of a nonuniform beam-II. Bending of a Timoshenko beam, Comput. Struct. 49, 545-555.
- FRANCIOSI, C. and MECCA, M., 1998. some finite elements for static analysis of beams with varying cross-section, Computers and Structures 69,191-196.
- GAINES, J. H. and VOLTERRA, E., 1966. Transverse vibrations of cantilever bars of variable cross section. J. Acoust. Soc. Amer. 39, 674-679.
- GAINES, J. H and VOLTERRA, E., 1968. Upper and lower frequencies of tapered beams. Proc ASCE 94, EM2, 465-487
- GALLAGHER, R. H. and LEE, C. H., 1970. Matrix dynamic and instability analysis with nonuniform elements. İnt. J. Num. Meth. Engng. 2, 265-275.
- GORMAN, D. J., 1975. Free vibration analysis of beams and shafts. Wiley New York.

- GHALI, A. and NEVILLE, A. M., 1972. Structural Analysis, Intext Educ, Publ, Scranton, penn.
- IRWIN, G., 1960. Fracture Mechanics, Editors J. N. Goodier and N. J. Hoff, Pergamon Pres, New York. 368p.
- JUST, D. J., 1975. Analysis of plane frames of linearly varying rectangular section. The Struct. Eng 53p.
- JUST, D. J., 1977. Plane frameworks of tapering box and I-section proc.ASCE103,STI, 71-86.
- KARABALIS, D.L. and BESKOS, D.E., 1983. Static, dynamic and stability analysis of structures composed of tapered beams. Comput. Struct. 16, 731-748.
- KARNOVSKY, I. A. and LEBED O. I., 2001. Formulas for Structural Dynamics, McGraw-Hill chapter 12, 353-393.
- KIRCHHOFF, G., 1879. Uber die transversalschwingungen eines stabes von veranderlichem querschnitt. Berliner monatsberichte, 815-828.
- KISA, M., BRANDON, J.A., and M. TOPCU, 1998. "Free Vibration Analysis of Cracked Beams by a Combination of Finite Elements and Component Mode Synthesis Methods" Computers and Structures 67 215-223.
- KISA, M., and BRANDON, J., A., 2000. "Free Vibration Analysis of Multiple Open-Edge Cracked Beams by Component Mode" Structural Engineering and Mechanics 10 81-92.
- KISA, M., 2004. "Free Vibration Analysis of a Cantilever Composite Beam with Multiple Cracks" Composites Science and Technology 64 1391-1402.
- KLEIN, L., 1974. Transverse vibrations of nonuniform beams. J. Sound vib. 37, 491-505.
- KOLOUSEK, V., 1973. Dynamics in Engineering Structures, Butter – Worths, London.
- LI, Q. S. 2002. Free vibration analysis of non-uniform beams with an arbitrary number of cracks and concentrated masses, Journal of Sound and Vibration, 252(3), 509-525.
- MABIE, H. H. and ROGERS, C. B., 1972. Transverse vibration of double-tapered cantilever beams. J. Acoust Soc. Amer. 51, 1771-1774.
- MABIE, H. H. and ROGERS, C. B., 1976. Tecnology transfer in the vibration analysis of linearly tapered cantilever beams. J. Engng. Ind. 98, 1335-1341.
- MARTIN, A. I., 1956. Some integrals relating to the vibration of a cantilever beam and approximation fort he effect of taper on overtone frequencies. The Aero Quart. 7, 109-124.
- MARTIN, H. C., 1966. Introduction to matrix methods of structural Analysis, Mcbraw- Hill, New York.
- MAZANOĞLU, K., and SABUNCU, M., 2009. Vibration analysis of non-uniform beams having multiple edge cracks along the beam's height, International Journal of Mechanical Sciences.
- NEWMARK, N. M., 1943. Numerical procedure for computing deflections, moment and buckling loads. Trans. ASCE 198, 1161 – 1188.
- PAFELIAS, T., 1974. Dynamic behaviour of a cracked rotor. General Electric Co., tecnical Information Series, No. DF-74-LS-79.

- QIUSHENG, L., HONG, C., AND GUIING, L., 1996. Statik and dynamic analysis of straight bars with variable cross-section, *Comput. Struct.* Vol. 59, 1185-1191.
- RISSONE, R. F. and WILIAMS, J., 1965. Vibration nonuniform cantilever beams. *The Engineer* 220,497-506.
- RUTA, P., 2002. Dynamic stability problem of a nonprismatic rod, *Journal and Sound Vibration* 250(3), 445-464.
- RUOTOLO, R., SURACE, C., CRESPO P., and D. STORER, 1996. "Harmonic Analysis of the Vibrations of a Cantilevered Beam with a Closing Crack" *Computers and Structures* 61 1057-1074.
- SUPPIGER, E. W. and TALEP, N. J., 1956. Free lateral vibration of variable of beams of variable cross section. *2AMP* 7, 501-520.
- TOPÇU, M., ve TAŞGETİREN, S., 1998. Mühendisler için sonlu elemanlar metodu. Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Matbaası, Denizli, 289s.
- THOMAS, J. and DOKUMACI, E., 1973. Improved finite elements for vibration analysis of tapered beams. *The Aero. Quart.* 24, 39-46.
- TADA, H., PARIS, P. C., IRWIN, G. R. 2000. *The Stres Analysis of Cracks Handbook*, Second Edition, Paris production Incorporated and Del Research Corporation, St Louis, Missouri, 696p.
- TAKAHASHI, I., 1998. Vibration and stability of non-uniform cracked Timoshenko beam subjected to follower force, *Comput. Struct.* 585-591.
- UĞUZ A., 1996. *Kırılma Mekanikine Giriş*, Uludağ Üniversitesi Basımevi, Bursa, 160s.
- VIOLA, E., FEDERICI, L., and L. NOBIE, 2001. "Detection of Crack Location using Cracked Beam Element Method for Structural Analysis" *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 36 23-35.
- WANG, H. C., 1967. Generalized hypergeometric function solutions on the transverse vibration of a class of nonuniform beam. *J. APPI. Mech* 34, 702-708.
- ZHENG, D., Y., and FAN, S., C., 2001. Natural frequencies of a non-uniform beam with multiple cracks via modified fourier series, *Journal of sound Vibration* 2424(4), 701-717.

ÖZGEÇMİŞ

1979 Malatya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Malatya'da tamamladı. 1999 yılında Zonguldak Karaelmas Üniversitesi'nin Döküm Öğretmenliğini kazandı. Aynı bölümde 2003 yılında mezun oldu. 2006 yılında Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen aynı anabilim dalında Yüksek Lisans Öğrencisi olarak öğrenimine devam etmektedir.

ÖZET

Titreşim analizi özellikle makine ve inşaat mühendisliği uygulamalarında önemli konulardan biridir. Çalışma şartlarında zorlama frekansı, yapının doğal frekansı ile çakışınca rezonans meydana gelecek ve yapının hasar görmesine neden olacaktır. Bir yapıdaki çatlak bölgesel bir esneklik meydana getireceğinden, yapının dinamik ve statik davranışlarını etkilemektedir. Çatlak büyüklüğü arttıkça yapının doğal frekanslarında büyük düşüşler meydana gelerek yapının rezonansa girme olasılığı artacaktır. Bundan dolayı yapıdaki çatlaklar tespit edilerek gerekli önlemler hemen alınmalıdır. Bu çalışmada çatlak içeren değişken kesitli bir kirişin titreşim analizi ele alınmıştır.

Kusurlu yapıların davranışını analiz etmek için gerilme yığılma faktörünün incelenmesi önemli bir yer tutar. Karmaşık olan sistemlerde gerilme yığılma faktörü, nümerik modelleme metotları ile bulunabilir. Bu çalışmada nümerik modelleme metotlarından biri olan Sonlu Elemanlar Metodu kullanılmıştır. Sonlu Elemanlar Metodu; karmaşık olan problemlerin daha basit alt problemlere ayrılarak her birinin kendi içinde çözülmesiyle tam çözümün bulunduğu bir analiz şeklidir. Çatlaktan dolayı meydana gelen rijitlik matrisi lineer elastik kırılma mekaniğiyle bulunan esneklik matrisinin tersi alınarak elde edilmiştir. Elde edilen bu rijitlik matrisi hazırlanan programa yerleştirilerek titreşim analizi yapılmıştır. Bu çalışmada ilk önce kusursuz yapılara ait olan doğal frekans ve doğal vektör değerleri hesaplanmıştır. Sonra çeşitli çatlak yeri, kesit değişim ve çatlak oranlarına ait doğal frekans ve doğal vektörler elde edilmiştir. Bu projede önerilen çözüm yönteminin güvenilirliği, çalışmadan elde edilen sonuçlarla literatür sonuçlarının karşılaştırılması ile ispatlanmıştır.

SUMMARY

Vibration analysis is an important subject especially in the mechanical and civil engineering applications. In working conditions, if the forcing frequency coincides with the natural frequency of the structure, the resonance will occur and consequently, the structure will collapse. A crack in a structure influences its dynamic and static behavior as the crack introduces a local flexibility. If the crack size gets bigger, the natural frequency reductions and the probability of the resonance will increase. Hence, the cracks in the structure should be detected and the necessary precautions should be taken immediately. In this study, the vibration analysis of the non-uniform cracked beams has been investigated..

The investigation of stress intensity factors takes an important place to analyse the behavior of cracked structures. In complex systems, the stress intensity factors can be derived by numerical methods. In this study, the Finite Element Method is used. Finite Element Method is a solution technique which divides complex problems into more simple sub problems and solves each and then finds complete solution. Stiffness matrix induced by the crack is computed by taking the inverse of the compliance matrix evaluated by using the linear elastic fracture mechanics principles. This stiffness matrix has been integrated to a computer program and the free vibration analysis has been done. In this study, firstly, natural frequencies and mode shapes of uncracked beams have been evaluated. Later, natural frequencies and mode shapes for different crack locations, taper ratios and crack depths have been found. The reliability of current study has been verified by comparing the results of the current study with those of literature.