T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FARK DENKLEMLERİNDE STABİLİTE ANALİZİ

Serap SAYĞAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2010

T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FARK DENKLEMLERİNDE STABİLİTE ANALİZİ

Serap SAYĞAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2010

Yrd. Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ danışmanlığında Serap SAYĞAN'ın hazırladığı "**FARK DENKLEMLERİNDE STABİLİTE ANALİZİ"** adlı çalışma 05.02.2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ

Üye: Yrd. Doç. Dr. İsmail YILDIZ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Nayil KILIÇ

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında yapıldığını ve Enstitümüzün kurallarına göre düzenlendiğini onaylarım.

Prof. Dr. Mehmet CİCİ
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZ	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
1. GİRİŞ	1
1.1 Birinci Mertebeden Fark Denklemlerinin Dinamiği	1
1.2 Lineer Birinci Mertebeden Fark Denklemleri	2
1.2.1 Önemli özel haller	4
1.3 Denge Noktaları	6
1.3 1 Merdiven basamaklı diyagramlar	9
1.4 Denge Noktalarının Asimptotik Stabilitesi için Kriter	14
1.5 Periyodik Noktalar ve Devirliler	17
1.6 Lojistik Denklem ve Bayfurkasyon	19
1.6.1 Denge noktaları	20
1.6.2 İki devirli lojistik denklemin fixed noktaları	20
1.6.3 2^2 Devirliler	21
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	22
2.1 Yüksek Mertebeli Lineer Fark Denklemleri	22
2.1.1 Kuvvet değişimi	23
2.1.2 Faktöriyel polinomlar	24
2.1.3. Ters fark operatörü	26
2.2 Lineer Fark Denklemlerinin Genel Teorisi	27
2.3 Sabit Katsayılı Lineer Homojen Denklemler	35
2.4 Homojen Olmayan Lineer Denklemler	39
2.4.1 Parametrelerin değişim metodu	43
2.5 Çözümlerin Limitsel Davranışı	44
2.6 Nanlineer Denklemlerin Lineer Denklemlere Transformu	49
2.7 Uygulamaları	53
2.7.1 Ulusal gelir	53
2.7.2 Bilgi aktarımı	54
3. MATERYAL VE YÖNTEM	56
3.1 Fark Denklemlerinde Sistemler	56
3.1.1 Putzer algoritmasının diskrit şekli	57
3.1.2 A^n için algoritmanın gelişimi	58
3.2 Temel Teori	60
3.3 Jordan Form: Otonom Sistemler	67
3.4 Lineer Periyodik Sistemler	79
3.5 Uygulamalar	84
3.5.1 Markov zinciri	84
3.5.2 Regüler markov zincirleri	85
3.5.3 Çekici markov zinciri	88
3.5.4 Ticaret modeli	90
3.5.5 Isı denklemi	91
3.6 Stabilite Teorisi	95
3.6.1 Önbilgiler	95
3.6.2 Lineer sistemlerin stabilitesi	100
3.6.3 Skaler denklemler	105
3.6.4 Faz uzay analizi	108
3.6.5 Lineer yaklaşım yardımıyla kararlılık	116
3.6.6 Liapunov direkt metodu	123
3.7 Z Transformasyonu	133
3.7.1 Z transformasyonu metodu	133

3.7.2 Z transformasyonunun tersi ve fark denklemlerinin çözümleri.................................. 136
3.7.2.1 Kuvvet serileri metodu.. 136
3.7.2.2 Kısmi kesir metodu... 137
3.7.2.3 Ters integral metodu.. 140
3.7.3 Fark denklemlerinde konvulasyon tipi... 143
3.7.4 Volterra denklemlerinin stabilitesi için net kriter... 146
3.7.5 Volterra sistemleri... 148
3.7.6 Fark denklemleri için sabitlerin varyasyon formülü.. 151
3.7.7 Laplace transformasyonunun z transformasyon versiyonu.. 152
3.8 Kontrol Teorisi... 154
3.8.1 Kontrol teorisine giriş.. 154
3.8.1.1 Sürekli sistemler için ayrık denklikler.. 156
3.8.2 Kontrol edilebilirlik... 157
3.8.2.1 Kanonik formların kontrol edilebilirliği.. 164
3.8.3 Gözlenebilirlik... 168
3.8.3.1 Kanonik formların gözlenebilirliği... 175
3.8.4 Geri dönüşüm ile stabilite... 176
3.8.5 Gözlemci.. 185
3.9 Fark Denklemlerinin Asimptotik Davranışı... 193
3.9.1 Yaklaşım ile ilgili ön bilgi... 193
3.9.2 Poincaré Teoremi... 196
3.9.3 İkinci mertebeden fark denklemleri.. 203
3.9.4 Asimptotiksel olarak diyagonal sistemler.. 209
3.9.5 Yüksek mertebeli fark denklemleri.. 216
3.9.6 Lineer olmayan fark denklemleri.. 222
3.10 Salınım Teorisi.. 227
3.10.1 Üç terimli fark denklemleri.. 227
3.10.2 Lineer olmayan fark denklemleri... 232
3.10.3 İkinci mertebeden self-adjoint denklemler.. 234
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA…………….. 241
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER……………………………………………….……………….. 242
KAYNAKLAR…………………………………………………….. 262
ÖZGEÇMİŞ. …………………..…………………………………………….............................. 263
ÖZET…………………………………………………………………... 264
SUMMARY…………………………………………………………………………………….. 265

ÖZ

Yüksek Lisans Tezi

FARK DENKLEMLERİNDE STABİLİTE ANALİZİ

Serap SAYĞAN

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
Yıl: 2010, Sayfa: 265

$F(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k)) = 0,\ k.$ mertebeden bir fark denkleminin çözüm yöntemleri ve stabilitesi için gerekli analiz yapıldı. Literatürde önemli yere sahip olan kaynağın Türkçe çevirisi yapıldı. Bunun yanında daha önce yayınlanmış birkaç makale çalışıldı.

ANAHTAR KELİMELER: Fark Denklemleri, Çözüm Yöntemleri, Stabilite.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

STABILITY ANALYSIS OF DIFFERENCE EQUATIONS

Serap SAYĞAN

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Professor Dr. Tanfer TANRIVERDİ

Year: 2010, Page: 265

In this thesis firstly, we look into some details of the k order equation $F(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k)) = 0$. We give all necessary tools in order to study the stabılity analysis of this equation. To reach our main goal, in the Literature one of the most important books is translated into Turkish. Some important published articles are studied.

KEY WORDS: Difference Equations, Methods of Solving Difference Equations, Stability.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bana rehberlik eden tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ'ye, bu aşamada benden maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

1.1 Birinci Mertebeden Fark Denklemlerinin Dinamiği

Fark denklemleri genellikle belirli bir zaman aralığındaki olayların gelişimini ifade eder. Örneğin, belli bir popülasyon ayrık jenerasyona sahipse, $x(n+1)$ in $n+1$ inci jenerasyonunun büyüklüğü, $x(n)$ nin n inci jenerasyonunun bir fonksiyonudur. Bu bağıntı,

$$x(n+1) = f(x(n)) \qquad (1.1.1)$$

fark denklemiyle elde edilir. Bu probleme farklı bir noktadan da bakılabilir. x_0 başlangıç noktasından başlayarak,

$$x_{0,}\ f(x_0),\ f(f(x_0)),\ f(f(f(x_0))),...$$

dizisi oluşturulur. Bu dizi basitçe,

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)),\ f^3(x_0) = f(f(f(x_0))),...$$

notasyonuyla ifade edilir. Burada $f(x_0)$, x_0 ın f altındaki birinci iterasyonu, $f^2(x_0)$ ise x_0 ın f altındaki ikinci iterasyonu ve daha genel olarak $f^n(x_0)$, x_0 ın n inci iterasyonudur. Tüm (pozitif) iterasyonlarının kümesi olan $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$ x_0 ın (pozitif) orbiti diye adlandırılır. Bu orbit $O^+(x_0)$ sembolü ile gösterilir. Bu iteratif işlemi ayrık dinamik sisteme bir örnek teşkil eder.

$$x(n) = f^n(x_0)$$

olsun. Bu halde,

$$x(n+1) = f^{n+1}(x_0) = f\left[f^n(x_0)\right] = f(x_n)$$

olur. Buradan (1.1.1) denklemi tekrar elde edilir. $x(0) = f^0(x_0) = x_0$ olduğu görülür. Örneğin $f(x) = x^2$ ve $x_0 = 6$ olsun. $\{f^n(x_0)\}$ ın iterasyonlar dizisini bulmak için, hesap makinesinden 0.6 girilir ve tekrarlanarak x^2 ye basılır. $0.6, 0.36, 0.1296, 0.01679616,...$ sayıları elde edilir. Bu işlem hesap makinesinde tekrar edilirse $f^n(0.6)$ iterasyonunun sıfıra yaklaştığını görmek kolay olur. Tüm $x_0 \in (0,1)$ ler için ve $n \to \infty$ için $f^n(x_0) \to 0$. Eğer $x_o \notin [-1,1]$ ise $n \to \infty$, $f^n(x_0) \to \infty$ ve tüm pozitif n sayıları için $f^n(0) = 0$ ve $f^n(1) = 1$ olduğu aşikârdır. $n = 1,2,3...$için $f^n(-1) = 1$.

Bu tartışma sonucunda fark denklemleri ve ayrık dinamik sistemler aynı paranın farklı iki yüzü gibi düşünülebilir. Örneğin matematikçiler fark denklemlerini tartışırken genellikle konunun analitik teorisini, fakat ayrık dinamik sistemlerde ise genellikle sistemin geometrik ve topolojik özelliklerini vurgularlar. (1.1.1) denklemindeki f fonksiyonu iki değişkenli bir $g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ile yazılırsa,

$$x(n+1) = g(n, x(n)). \tag{1.1.2}$$

elde edilir. Burada $\mathbb{Z}^+$ pozitif tamsayılar, $\mathbb{R}$ ise reel sayılar kümesidir.
(1.1.2) denklemine nanotonom (time-varyant), (1.1.1) denklemine ise otonom (time-invaryant) adı verilir. (1.1.2) dekleminin çalışması daha komplikedir. $x(n_0) = x_0$ ise, $n \geq n_0$ olacak şekilde $x(n) = x(n, n_0, x_0)$ şeklinde bir tek çözüme sahiptir. $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$ ise,

$$\begin{aligned}
x(n_0+1, n_0, x_0) &= g(n_0, x(n_0)) \\
&= g(n_0, x_0), \\
x(n_0+2, n_0, x_0) &= g(n_0+1, x(n_0+1)) \\
&= g(n_0+1, f(n_0, x_0)), \\
x(n_0+3, n_0, x_0) &= g(n_0+2, x(n_0+2)) \\
&= g\left[n_0+2, f(n_0+1, f(n_0, x_0))\right].
\end{aligned}$$

Buradan,

$$x(n, n_0, x_0) = g\left[n-1, x(n-1, n_0, x_0)\right].$$

1.2 Lineer Birinci Mertebeden Fark Denklemleri

Bu kısımda (1.1.1) ve (1.1.2) denklemlerinin en basit özel hallerini çalışacağız. Birinci mertebeden homojen lineer denklem verilsin.

$$x(n+1) = a(n)x(n),\ x(n_0) = x_0,\ n \geq n_0 \geq 0. \tag{1.2.1}$$

Bu denkleme karşılık gelen

$$y(n+1)=a(n)y(n)+g(n),\ y(n_0)=y_0,\ n\geq n_0\geq 0 \tag{1.2.2}$$

denklemi ise (1.2.1) denkleminin homojen olmayan halidir. Her iki denklemde, $n\geq n_0\geq 0$ için $a(n)\neq 0,\ a(n)$ ve $g(n)$ in reel değerli fonksiyonlar olduğu kabul edilir. (1.2.1) denkleminin çözümü basit bir iterasyonla elde edilir.

$$x(n_0+1)=a(n_0)x(n_0)=a(n_0)x_0,$$
$$x(n_0+2)=a(n_0+1)x(n_0+1)=a(n_0+1)a(n_0)x_0,$$
$$x(n_0+3)=a(n_0+2)x(n_0+2)=a(n_0+2)a(n_0+1)a(n_0)x_0.$$

Tümevarımla,

$$\begin{aligned} x(n)&=x(n_0+n-n_0)\\ &=a(n-1)a(n-2)...a(n_0)x_0\\ &=\left[\prod_{i=n_0}^{n-1}a(i)\right]x_0 \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

olduğu kolayca görülür.

Homojen olmayan (1.2.2) denkleminin tek çözümü aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\begin{aligned} y(n_0+1)&=a(n_0)y_0+g(n_0),\\ y(n_0+2)&=a(n_0+1)y(n_0+1)+g(n_0+1)\\ &=a(n_0+1)a(n_0)y_0+a(n_0+1)g(n_0)+g(n_0+1). \end{aligned}$$

Şimdi tüm $n\in\mathbb{Z}^+$ ler için

$$y(n)=\left[\prod_{i=n_0}^{n-1}a(i)\right]y_0+\sum_{r=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1}a(i)\right]g(r) \tag{1.2.4}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için tümevarımı kullanalım.

$n=k$ için doğru olduğunu varsayalım.(1.2.2) denkleminden (1.2.4) formülü ile,

$$y(k+1)=a(k)y(k)+g(k),$$

$$\begin{aligned} y(k+1)&=a(k)\left[\prod_{i=n_o}^{k-1}a(i)\right]y_0+\sum_{r=n_o}^{k-1}\left[a(k)\prod_{i=r+1}^{k-1}a(i)\right]g(r)+g(k)\\ &=\left[\prod_{i=n_o}^{k}a(i)\right]y_0+\sum_{r=n_0}^{k-1}\left(\prod_{i=r+1}^{k}a(i)\right)g(r)+\left(\prod_{i=k+1}^{k}a(i)\right)g(k)\\ &=\left[\prod_{i=n_0}^{k}a(i)\right]y_0+\sum_{r=n_0}^{k}\left(\prod_{i=r+1}^{k}a(i)\right)g(r), \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\prod_{i=k+1}^{k} a(i)=1$ ve $\sum_{i=k+1}^{k} a(i)=0$ kabul edilmiştir.

1.2.1 Önemli özel haller

Uygulamada öneme sahip olan (1.2.2) denkleminin iki özel durumu vardır. Birinci denklem,

$$y(n+1)=ay(n)+g(n),\ y(0)=y_0 \tag{1.2.5}$$

ile veriliyor.(1.2.4) formülünü kullanarak,

$$y(n)=a^n y_0+\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} g(k) \tag{1.2.6}$$

oluşturulur. İkinci denklem,

$$y(n+1)=ay(n)+b,\ y(0)=y_0 \tag{1.2.7}$$

(1.2.6) formülünü kullanarak,

$$y(n)=\begin{cases} a^n y_0+b\left[\dfrac{a^n-1}{a-1}\right] & \text{eğer } a\neq 1 \\ y_0+bn-1 & \text{eğer } a=1 \end{cases} \tag{1.2.8}$$

elde edilir.

Örnek 1.1:

$$y(n+1)=(n+1)y(n)+2^n(n+1)!$$

birinci mertebeden homojen olmayan lineer fark denklemini $y(0)=1,\ n>0$ ile çözelim.

Çözüm: $y(n+1)=(n+1)y(n)+2^n(n+1)!$

$$y(1)=1y_0+2^0=y_0+1$$

$$y(2)=2(y_0+1)+2^1 2!=2!(y_0+2^0+2^1)$$

$$y(3)=3!(y_0+1+2^1+2^2),...,$$

$$y(n)=n!(y_0+1+2+...+2^{n-1})=n!2^n.$$

Örnek 1.2:

$$x(n+1)=2x(n)+3^n,\ x(1)=0.5,$$

denkleminin çözümünü iterasyon metodu ile elde edelim.

Çözüm: $x(n+1)=2x(n)+3^n$

$$x(2) = 2.\frac{1}{2} + 3^1 = 2^0 + 3^1$$

$$x(3) = 2(2^0 + 3^1) + 3^2 = 2^1 + 2.3^1 + 3^2$$

$$x(n) = 2^{n-2} + 2^{n-1}(\frac{3}{2} + (\frac{3}{2})^2 + ... + (\frac{3}{2})^{n-1})$$

$$x(n) = -5.2^{n-2} + 3^n.$$

Örnek 1.3: Her dört saatte bir, bir ilaç alınsın. $D(n)$, n inci aralıktaki kandaki ilaç miktarı olsun. Her zaman aralığı boyunca vücut, p oranında ilacı elimine etsin. Eğer başlangıçta D_0 oranında ilaç vücuda tatbik edilirse $D(n)$ ve $\lim_{n\to\infty} D(n)$ oranlarını bulalım.

Çözüm: İlk olarak modellemeyi yapmamız gerekir. $(n+1)$ zamanda hasta sistemindeki mevcut kan oranı, $D(n)$ ilaç miktarı, vücuttan elimine ettiği ilaç miktarı ve başlangıçta tatbik edilen D_0 dozajına bağlıdır. Yani,

$D(n+1) = (1-p)D(n) + D_0$ şeklindedir. Bu denklemi iterasyonla çözelim.

$n = 0 \Rightarrow D(1) = (1-p)D_0 + D_0$

$\qquad = D_0 + (1-p)D_0,$

$n = 1 \Rightarrow D(2) = D_0 + (1-p)D_0 + (1-p)^2 D_0, ...,$

$n = n \Rightarrow D(n) = D_0 + (1-p)D_0 + (1-p)^2 D_0 + ... + (1-p)^n D_0$

$$D(n) = D_0\left(\frac{1-(1-p)^{n+1}}{p}\right).$$

Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} D(n) = \frac{D_0}{p} \quad (0 < p < 1). \tag{1.2.9}$$

Özel olarak $D_0 = 2$ cc ve $p = 0.25$ ise, $D(n+1) = 0.75D(n) + 2.$

Örnek 1.4: Amortizman, alınan faiz yüklü bir kredinin periyodik bir şekilde geri ödenme planıdır.

$g(n)$, n inci adımda ödenen miktar olsun. Bu halde, $p(n)$ de bu adımdan sonra kalan anapara olsun. Bu durumda $(n+1)$ inci adımdan sonra kalan para $p(n+1)$ ise, $rp(n)$ (r, faiz oranı) faizi göz önüne alınırsa ödemenin formülasyonu,

$$p(n+1) = p(n) + rp(n) - g(n)$$
$$= (1+p)\,p(n) - g(n),\ p(0) = p_0 \qquad (1.2.10)$$

olur.

$$n = 0 \Rightarrow p(1) = (1+r)\,p_0 - g(0),$$
$$n = 1 \Rightarrow p(2) = (1+r)\,p_1 - g(0)$$
$$=(1+r)^2\,p_0 - (1+r)g(0) - g(1),...,$$
$$n = n \Rightarrow p(n) = (1+r)^n\,p_0 - (1+r)^{n-1}g(0) - (1+r)^{n-2}g(1) - ... - (1+r)g(n-2) - g(n-1)$$
$$p(n) = (1+r)^n \left[\sum_{n=0}^{n-1}(1+r)^{n-k-1}g(k)\right] \qquad (1.2.11)$$

Pratikte $g(n)$ ödemesi sabittir. Eğer $g(n) = T$ ise,

$$p(n) = (1+r)^n \left[\sum_{n=0}^{n-1}(1+r)^{n-k-1}g(k)\right]$$

formülü geometrik seri yardımıyla,

$$p(n) = (1+r)^n\,p_0 - \left[(1+r)^n - 1\right]\left(\frac{T}{r}\right) \qquad (1.2.12)$$

formülüne indirgenir. Alınan kredi tam olarak n ödemede geri ödenirse sabit T ödemesi (aylık ödeme) ne olur sorusuna yanıt arayalım.

n inci adımda tüm ödeme yapıldığından $p(n) = 0$ olur. Bu taktirde son formülden

$T = p_0\left[\dfrac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right]$ elde edilir.

1.3 Denge Noktaları

Herhangi bir fiziksel sistemin dinamiğinin çalışmasında denge noktası kavramı önemli bir yere sahiptir. Biyolojide, ekonomide, fizikte, mühendislikte ve benzeri alaalarda önemli bir yere sahip olan denge noktası kavramı Stabilite Teorisi'nin bir konusudur.

Tanım 1.5: $f(x^*) = x^*$, x^* a fixed nokta (denge noktası) denir. Örneğin $f(x) = x^3$ fonksiyonunun fixed noktaları; $x^3 = x$ denkleminden $x = -1, 0$ ve 1 dir.

Aynı şekilde $f(x) = x^2 - x + 1$ fonksiyonunun fixed noktaları;

$$x^2 - x + 1 = x$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Diğer bir ifadeyle x^*, (1.1.1) denkleminin sabit bir çözümüdür. Eğer $x(0) = x^*$ başlangıç noktası ise,

$$x(1) = f(x^*) = x^*$$
$$x(2) = f(x(1)) = f(x^*) = x^*, ...$$

Grafiksel olarak denge noktası, noktanın x koordinatıdır. Burada $f(x)$, $y = x$ doğrusu ile kesişir.

Örneğin $x(n+1) = x^3(n)$ denkleminin üç denge noktası vardır. Burada, $f(x) = x^3$. Benzer şekilde $f(x) = x^2 - x + 1$ foksiyonuna karşılık gelen fark denklemi,

$$x(n+1) = x^2(n) - x(n) + 1 .$$

$x^2 - x + 1 = x$ ifadesinden $x = 1$ denge noktası bulunur.

Tanım 1.6: x, f in tanım kümesinde bir nokta olsun. $f^r(x) = x^*$, $f^{r-1}(x) \neq x^*$, r pozitif bir tamsayı ve x^*, (1.1.1) denkleminin bir denge noktası ise x nihayet denge noktasıdır.

Örnek 1.7: (Çadır Dönüşüm)

$x(n+1) = T(x(n))$ denklemini düşünelim. Burada,

$$T(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 2(1-x) & \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases} .$$

Bu denklemin denge noktaları 0 ve $\frac{2}{3}$ tür. Nihai denge noktasının araştırılması cebirsel olarak basit değildir. Eğer $x(0) = \frac{1}{4}$ ise $x(1) = \frac{1}{2}$, $x(2) = 1$ ve $x(3) = 0.$ Böylece $\frac{1}{4}$ nihayetinde (eventually) denge noktasıdır. Burada k ve n, $0 < \frac{k}{n} \le 1$ olacak şekilde iki pozitif tamsayı olsun. Bu halde $\frac{k}{2^n}$ ise x in nihayetinde (eventually) bir denge noktası olduğu gösterilebilir.

Dinamik sistemlerin temel amaçlarından biri çözümlerin davranışlarını denge noktası civarında irdelemektir. Bu çalışma Stabilite Teorisini teşkil eder. Şimdi de stabilitenin temel tanımlarını verelim.

Tanım 1.8:

(a) $\varepsilon > 0$ ve tüm $n > 0$ sayıları için $\left|x_0 - x^*\right| < \delta$ iken $\left|f^n(x_0) - x^*\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa x^* denge noktasına kararlıdır (stabildir) denir. Aksi halde kararlı değildir.

(b) $\forall\varepsilon > 0$ için $0 < \left|x_0 - x^*\right| < \varepsilon$ olduğunda $\left|f(x_0) - x^*\right| > \left|x_0 - x^*\right|$ oluyorsa veya buna denk olarak $0 < \left|x(0) - x^*\right| < \varepsilon$ olduğunda $\left|x(1) - x^*\right| > \left|x(0) - x^*\right|$ oluyorsa x^* a repelling (source) denge noktası denir.

(c) Eğer x^* kararlı ve $\left|x(0) - x^*\right| < \eta$ olduğunda $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = x^*$ olacak şekilde bir $\eta > 0$ sayısı varsa x^* a asimptotik olarak kararlı (attracting) denge noktası denir. Eğer $\eta = \infty$ ise x^* a global olarak asimptotik kararlıdır denir.

(Yukarıdaki tanımları kullanarak bir denge noktasının kararlılığını belirtmek oldukça zor olabilir.)

Örnek 1.9: (Diferansiyel denklemlerin nümerik (sayısal) çözümleri)

Bir diferansiyel denklemin nümerik analizinden kasıt, diferansiyel denkleme karşılık gelen fark denklemini analiz etmektir. Bu gelişimi, bir diferansiyel denklemin yaklaşık çözümleri için en basit yöntemlerden biri olan Euler Metodu'yla açıklayalım. Birinci mertebeden

$$x'(t) = g(x(t)),\ x(t_0) = x_0,\ t_0 \le t \le b \tag{1.3.1}$$

diferansiyel denklemini ele alalım. $\left[t_0, b\right]$ aralığını N eşit aralıklara bölelim. Her alt aralığa metodun basamak uzunluğu denir. $h = \dfrac{\left(b - t_0\right)}{N}$ şeklinde gösterilir. Basamak uzunlukları yardımıyla $t_j = t_0 + h$ olmak üzere $t_0, t_1, ... t_N$ oluşur. Euler Metodu'nda $x'(t)$ yerine $\dfrac{\left[x(t+h) - x(t)\right]}{h}$ alınır. Bu değeri (1.3.1) denkleminde yerine koyarak,

$$x(t+h) = x(t) + h.g(x(t)),$$

$t = t_0 + nh$ ve $n = 0,1,..., N-1$ için,

$$x\left[t_0+(n+1)h\right]=x(t_0+nh)+hg\left[x(t_0+nh)\right] \tag{1.3.2}$$

elde edilir. $x(t_0+nh)$ yerine $x(n)$ yazarak,

$$x(n+1)=x(n)+hg\left[x(n)\right] \tag{1.3.3}$$

fark denklemi elde edilir. (1.3.3) denklemi, (1.3.1) diferansiyel denkleminin çözümlerinin $t_0, t_1, ...t_N$ noktalarında yaklaşığını veren Euler Algoritması'dır.

x^* ın (1.3.3) denkleminin bir denge noktası olması için gerek ve yeter şart $g(x^*)=0$. Dolayısıyla (1.3.1) diferansiyel denklemi ile (1.3.3) fark denklemi aynı denge noktalarına sahip olurlar.

Şimdi bir diferansiyel denklemi Euler Metodu yardımıyla analiz edelim.

$$x'(t)=0.7x^2(t)+0.7,\ x(0)=1,\ t\in[0,1]. \tag{DE}$$

Bu denklemin tam çözümü $x(t)=\tan\left(0.7t+\dfrac{\pi}{4}\right)$ ile verilir.

$$x(n+1)=x(n)+0.7h\left(x^2(n)+1\right),\ x(0)=1 \tag{ΔE}$$

ise Euler Metodu'yla buna karşılık gelen fark denklemidir. Bu denklemde, $h=0.2$ ve 0.1 gerçek değerleri için Euler yaklaşımları kolaylıkla bulunur. h sayısı küçüldükçe daha iyi yaklaşıklar elde edilir. $h=0.1$ iken yaklaşık değeri 1.301, gerçek değeri 1.328 dir. $h=0.2$ iken yaklaşık değeri 1.28 dir.

1.3.1 Merdiven basamaklı diyagramlar (Cobweb)

Şimdi (1.1.1) denklemi için denge noktalarının stabilite analizinde önemli olan metodunu vereceğiz. $x(n+1)=f(x(n))$ için $\left(x(n),x(n+1)\right)$ düzleminde f in grafiğini çizelim. Verilen $x(0)=x_0$ dan düşey doğru çizilerek x_1 değeri bulunur. Dolayısıyla $\left(x_0,x(1)\right)$ de f in grafiği ile kesişir. Sonra, $\left(x(1),x(1)\right)$ noktasında $\left(x_0,x(1)\right)$'den $y=x$ köşegenine kadar yatay bir doğru çizilir. $\left(x(1),x(1)\right)$ noktasından çizilen düşey doğru $\left(x(1),x(2)\right)$ deki f in grafiği ile kesişir. Bu işleme devamla her $n>0$ için $x(n)$ bulunabilir.

Örnek 1.10: (Lojistik denklem) $y(n)$, n zamanındaki bir popülasyonun büyüklüğü olsun. Bir jenerasyonun diğer jenerasyona olan oranı μ, popülasyonun büyüme oranı ise matematiksel model,

$$y(n+1) = \mu y(n),\ \mu>0 \tag{1.3.4}$$

ile verilir. Eğer başlangıç popülasyon $y(0) = y_0$ ise basit iterasyonla,

$$y(n) = \mu^n y_0 \tag{1.3.5}$$

elde edilir. Bu (1.3.4) denkleminin çözümüdür. Eğer $\mu > 1$ ise $\lim_{n\to\infty} y(n) = \infty$. Eğer $\mu = 1$ ise $\forall n > 0$ için $y(n) = y_0$ popülasyonu değişmez. $\mu < 1$ ise $\lim_{n\to\infty} y(n) = 0$. Popülasyon nihayetinde biter. Buna rağmen birçok biyolojik tür için yukarıdaki durumlardan hiçbiri geçerli değildir. Belirli bir üst limite varana kadar popülasyon artar. Bu halde mevcut kaynakların sınırlılığından dolayı türler (varlıklar) birbirleriyle mücadele içinde olacaklardır. Bu halde daha mantıksal bir model için türlerin kendi aralarında rekabetleri $y^2(n)$ ile doğru orantılıdır. Orantı katsayısı $b > 0$ olmak şartıyla yeni model,

$$y(n+1) = \mu y(n) - by^2(n) \tag{1.3.6}$$

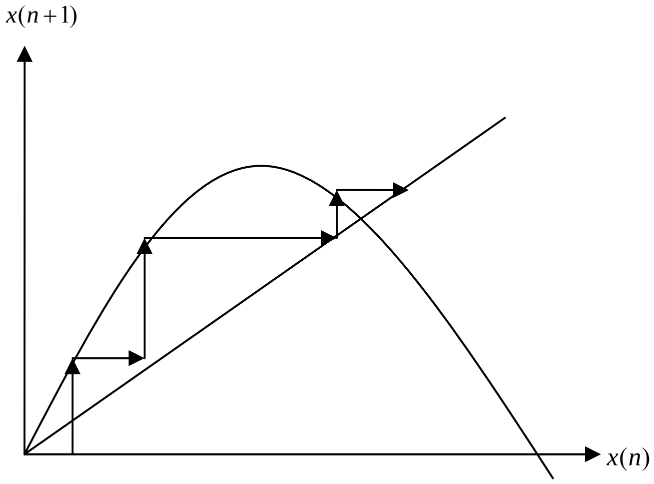
şeklindedir. Eğer (1.3.6) denkleminde

$$x(n) = \frac{b}{\mu} y(n)$$

yazılırsa,

$$x(n+1) = \mu x(n)\big(1 - x(n)\big) = f(x(n)) \tag{1.3.7}$$

elde edilir. Bu denklem en basit lineer olmayan birinci mertebeden fark denklemidir. Yaygın olarak bu denkleme “Lojistik (Ayrık) Denklem” denilir. Buna rağmen μ nün belirli değerleri hariç (1.3.7) nin kapalı formdaki çözümü mevcut değildir. Denklemin basitliğine rağmen oldukça zengin ve komplike bir dinamiği sergiler. (1.3.7) denkleminin denge noktalarını bulmak için $f(x^*) = \mu x^*(1 - x^*) = x^*$ diyelim. Dolayısıyla $x^* = 0$ ve $x^* = \dfrac{(\mu - 1)}{\mu}$ olmak üzere iki denge noktası bulunur. Şekil 1.1 $\mu = 2.5$ ve $\mu = 0.1$ için $\big(x(n), x(n+1)\big)$ merdiven diyagramını verir. Bu durumda iki denge noktası elde edilir. Biri $x^* = 0$ dır ve stabil değildir, diğeri $x^* = 0.6$’dır ve asimptotik stabildir.



Şekil 1.1.

Örnek 1.11: Örümcek ağı olayı (Ekonomik aplikasyon) n periyotta talep edilen birimlerin sayısı $S(n)$, arz edilen birimlerin sayısı $D(n)$ ve birimlerin fiyatı $P(n)$ olsun. Kolaylık olsun diye $D(n)$, $P(n)$ ye lineer bağımlı olsun. Bu bağıntı,

$$D(n) = -m_d p(n) + b_d,\ m_d > 0, b_d > 0 \tag{1.3.8}$$

ile ifade edilir. Bu denklem fiyat-arz eğrisidir. m_d sabiti tüketicilerin hassasiyetlerini temsil eder. Benzer olarak fiyat-talep eğrisi,

$$S(n+1) = m_s p(n) + b_s,\ m_s > 0, b_s > 0 \tag{1.3.9}$$

ile verilir. m_s sabiti talep edenlerin fiyata olan hassasiyetidir. Arz eğrisinin eğimi negatiftir. Çünkü fiyattaki bir birimin artışına bağlı olarak arzdaki artış düşer. Buna tekabül eden bir birimin fiyatındaki artış, talepteki m_s artışına sebebiyet olur. Bu eğri için pozitif eğim oluşur.

Üçüncü varsayım bir birimin market fiyatı, arz ve talep miktarlarının birbirine eşit olduğu kabulü üzerine yapılacaktır. $D(n+1) = S(n+1)$ olsun.

Dolayısıyla,

$$-m_d p(n+1) + b_d = m_s p(n) + b_s$$

veya

$$p(n+1) = Ap(n) + B = f(p(n)). \tag{1.3.10}$$

Burada,

$$A = -\frac{m_s}{m_d},\ B = \frac{b_d - b_s}{m_d}. \tag{1.3.11}$$

(1.3.10) denklemi birinci mertebeden lineer fark denklemidir. Burada denge fiyatı p^*, ekonomide $S(n+1)$ ve $D(n)$ eğrilerinin kesiştiği yerdir. p^*, (1.3.10) ifadesindeki $f(p)$ nin tek fixed noktasıdır. (1.3.11) deki A ifadesi arz ve talep eğrilerine ait eğimlerinin oranı olduğundan, bu oran fiyat dizisinin davranışını belirler. Aşağıda değerlendirilmesi gereken üç durum vardır.

(a) -1<A<0

(b) A=-1

(c) A<-1.

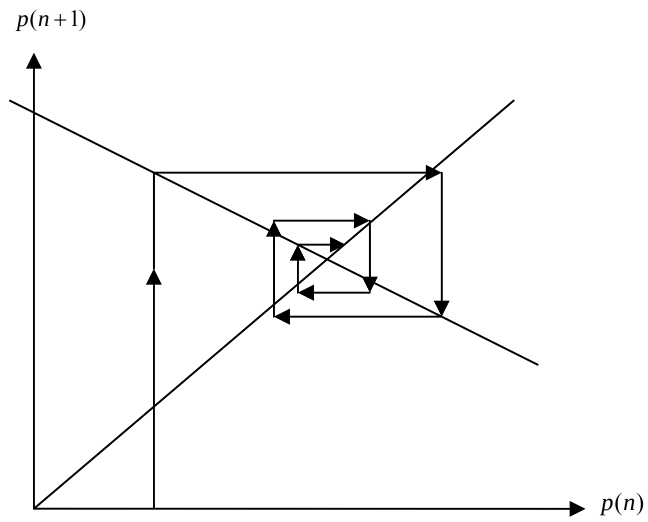
(i) (a) durumunda, fiyatlar aşağı yukarı değişir. p^* denge fiyatına yakınsar. Ekonomide p^* stabiliteye (kararlılığa), matematikte ise asimptotik olarak stabiliteye sahiptir. (Şekil 1.2a)

(ii) (b) durumunda fiyatlar sadece iki değer arasında salınım yapar. Eğer $p(0)=p_0$ ise $p(1)=-p_0+B$ ve $p_2=p_0$. Buradan p^* denge noktası stabildir. (Şekil 1.2b)

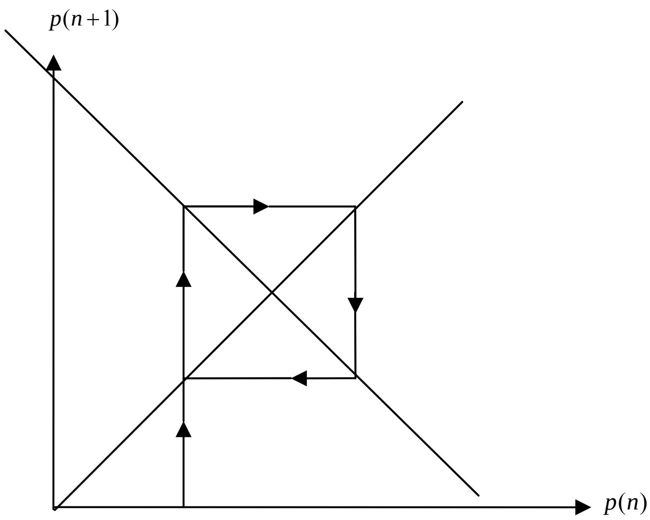
(iii) (c) durumunda, fiyatlar p^* denge noktası etrafında sonsuz bir şekilde salınım yapar. Fakat süreç içerisinde denge noktasından uzaklaşır. Denge noktası stabil değildir. (Şekil 1.2c)

$p(0)=p_0$ ise, (1.3.10) denkleminin tam çözümü,

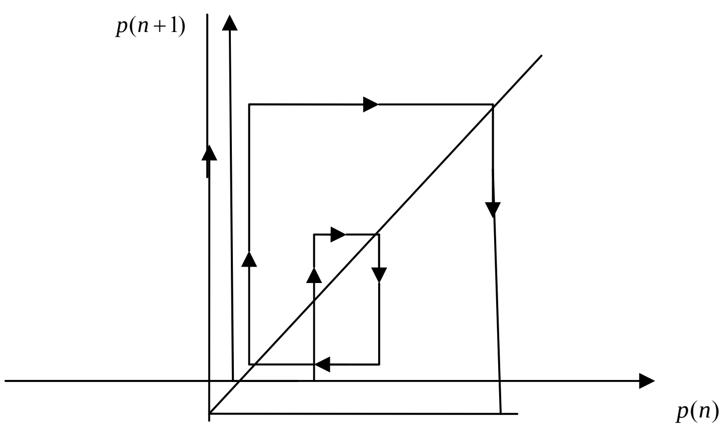
$$p(n)=\left(p_0-\frac{B}{1-A}\right)A^n+\frac{B}{1-A}$$



Şekil 1.2a.



Şekil 1.2b.



Şekil 1.2c.

1.4 Denge Noktalarının Asimptotik Stabilitesi İçin Kriter

Teorem 1.12:

$$x(n+1) = f(x(n)) \tag{1.4.1}$$

fark denkleminin bir denge noktası x^* olsun. f, x^* da sürekli türevlenebilir olsun. Aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(i) Eğer $\left|f'(x^*)\right| < 1$ ise x^* bir asimptotik stabil (çekici) noktasıdır.

(ii) Eğer $\left|f'(x^*)\right| > 1$ ise x^* stabil değildir. x^* repelling noktasıdır.

İspat:

(i) $\left|f'(x^*)\right| < M < 1$ olsun. Her $x \in J$ için $\left|f'(x)\right| \le M < 1$ olacak şekilde x^* ı içeren bir $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$ aralığı vardır. $x(0) \in J$ için,

$\left|x(1) - x^*\right| = \left|f(x(0)) - f(x^*)\right|$. Ortalama Değer Teoremi gereğince,

$\left|f(x(0)) - f(x^*)\right| = \left|f'(\xi)\right|\left|x(0) - x^*\right|$ olacak şekilde $x(0)$ ve x^* arasında bir ξ bulunur. Böylece, $\left|f(x(0)) - x^*\right| \le M\left|x(0) - x^*\right|$. Buradan,

$$\left|x(1) - x^*\right| \le M\left|x(0) - x^*\right|. \tag{1.4.2}$$

M<1 olduğundan (1.4.2) eşitsizliği $x(1)$ in x^* a, $x(0)$ dan daha yakın olduğunu gösterir. Bu nedenle $x(1) \in J$. Tümevarımla, $\left|x(n) - x^*\right| \le M^n\left|x(0) - x^*\right|$ elde edilir.

$\varepsilon > 0$ için $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2M}$ olsun. Böylece, $\left|x(0) - x^*\right| < \delta$ olduğunda $\forall n \ge 0$ için $\left|x(n) - x^*\right| < \varepsilon$ dir. Bu sonuç stabilitenin olduğunu gösterir. Ayrıca,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|x(n) - x^*\right| = 0$ ve böylece $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = x^*$.

(ii) İspatı kolaydır.

Not: Dinamik sistemlerin literatüründe eğer $\left|f'(x^*)\right| \ne 1 \Rightarrow x^*$ denge noktasına hiperbolik denir. Dolayısıyla (i) de x^* bir hiperbolik çekim noktası, (ii) de hiperbolik repelling noktasıdır.

Örnek 1.13: Newton-Raphson Metodu: Newton-Raphson Metodu, $g(x) = 0$ denkleminin köklerini bulmak için bilinen en iyi metotlardan biridir.

x^*, $g(x)$ in sıfırı (kökü) ise, bu kökü bulmak için Newton algoritması

$$x(n+1) = x(n) - \frac{g(x(n))}{g'(x(n))}, \tag{1.4.3}$$

fark denklemi ile verilir. Burada $x(0) = x_0$, x^* kökünün yaklaşık tahminidir.

Ayrıca $f(x) = x - \dfrac{g(x)}{g'(x)}$ tir. x^* aynı zamanda (1.4.3) denkleminin bir denge noktasıdır. Newton algoritmasıyla teşkil edilen $\{x(n)\}$ dizisi x^* a yakınsıyorsa, (1.12) teoremi gereği,

$\left|f'(x^*)\right| = \left|1 - \dfrac{\left[g'(x^*)\right]^2 - g(x^*)g''(x^*)}{\left[g'(x^*)\right]^2}\right| = 0$, çünkü $g(x^*) = 0$ dır. Dolayısıyla (1.12) teoremi gereğince eğer $x(0) = x_0$, x^* a yeterince yakınsa ve $g'(x^*) \neq 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = x^*$ dır.

Not: (1.12) teoremi $\left|f'(x^*)\right| = 1$ hakkında bilgi vermemektedir. Dolayısıyla x^* denge noktasının stabilitesini belirlemek için daha ileri bir analiz gerekir.

Teorem 1.14: x^*, (1.4.1) denkleminin bir denge noktası ve $\left|f'(x^*)\right| = 1$ olsun. Bu halde aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(i) Eğer $f''(x^*) \neq 0$ ise x^* stabil (kararlı) değildir.

(ii) Eğer $f''(x^*) = 0$ ve $f'''(x^*) > 0$ ise x^* stabil (kararlı) değildir.

(iii) Eğer $f''(x^*) = 0$ ve $f'''(x^*) < 0$ ise x^* asimptotik stabildir.

İspat:

(i) $f''(x^*) \neq 0$ olsun. Eğer $f''(x^*) > 0$ ise eğri yukarı doğru konkavdır. $f''(x^*) < 0$ ise eğri aşağı doğru konkavdır.

Eğer $f''(x^*) > 0$ ise bu halde $I = (x^*, x^* + \varepsilon)$ aralığındaki her x için $f'(x^*) > 1$. Teorem 1.12 nin ispatının aynısı kullanılarak x^* ın stabil olmadığı gösterilir. Diğer taraftan eğer $f''(x^*) < 0$ ise $I = (x^* - \varepsilon, x^*)$ aralığındaki her x için $f'(x^*) > 1$. Dolayısıyla x^* yine stabil değildir.

Teorem 1.15: x^*, (1.4.1) denkleminin bir denge noktası olsun. Ve $f'(x^*) = -1$ olsun. Bu halde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) Eğer $-2f'''(x^*) - 3\left[f''(x^*)\right]^2 < 0$ ise x^* asimptotik stabildir.

(ii) Eğer $-2f'''(x^*)-3\left[f''(x^*)\right]^2>0$ ise x^* stabil değildir.

İspat:

$$y(n+1)=g(y(n)),\ g(y)=f^2(y) \tag{1.4.4}$$

denklemini ele alalım. (1.4.4) denkleminin analizinde x^*, (1.4.1) denkleminin denge noktası ise aynı zamanda (1.4.4) denkleminin de denge noktasıdır. Eğer x^*, (1.4.4) denklemine göre asimptotik olarak stabil ise (veya stabil değilse) bu halde aynı durum (1.4.1) denklemi için de geçerlidir.

$$\frac{d}{dy}g(y)=\frac{d}{dy}f(f(y))=f'(f(y))f'(y).$$

$$\frac{d}{dy}g(x^*)=\left[f'(x^*)\right]^2=1.$$

Teorem 1.14'ün şartları gerçekleşmiştir. Dolayısıyla $\frac{d^2}{dy^2}g(x^*)$ ı inceleyelim.

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dy^2}g(y)&=\frac{d^2}{dy^2}f(f(y))\\&=\left[f'(f(y))f'(y)\right]'\\&=\left[f'(y)\right]^2f''(f(y))+f'(f(y))f''(y).\end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$\frac{d^2}{dy^2}g(x^*)=0.$$

Teorem 1.14'ün ikinci ve üçüncü kısımları x^* denge noktasının asimptotik stabilitesinin $(g(x^*))'''$ işartiyle belirlendiğini önerir. Bu öneriden,

$$\left[g(x^*)\right]'''=-2f'''(x^*)-3\left[f''(x^*)\right]^2 \tag{1.4.5}$$

olduğu gösterilebilir.

Örnek 1.16: $x(n+1)=x^2(n)+3x(n)$ diferansiyel denklemini ele alalım. Denge noktalarını bularak stabilitesini değerlendirelim.

Çözüm: Önce denge noktalarını hesaplayalım. $x=x^2+3x\Rightarrow x^2+2x=0$. Buradan, denge noktalarının 0 ve -2 olduğu görülür. Şimdi stabilitesini inceleyelim.

$f'(x)=2x+3.$ Buradan, $f'(0)=3.$ Dolayısıyla Teorem 1.12'den '0' denge noktası stabil değildir. $f'(-2)=-1.$ Dolayısıyla Teorem 1.15'ten, (1.4.5) kullanılarak,

$-2f'''(-2)-3\left[f''(-2)\right]^2=-12<0$. Teorem 1.15'ten '-2' denge noktası asimptotik stabildir.

Not: $Q(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$ kuadratik denklemi için;

(i) Eğer $f'(x^*)=-1$ ise Teorem 1.15'ten denge noktası çekicidir.

(ii) Eğer $f'(x^*)=1$ ise Teorem 1.14'ten x^* stabil değildir.

1.5 Periyodik Noktalar ve Devirliler

Dinamik sistemdeki ikinci en önemli kavram, periyodiklik kavramıdır. Örneğin sarkaç hareketi periyodiktir.

Tanım 1.17: b, f in tanım kümesinde olsun. Bu halde,

(i) Eğer bazı k pozitif tamsayısı için $f^k(b)=b$ ise b ye f nin veya (1.4.1) denkleminin bir periyodik noktası denir. Bu nedenle eğer bir nokta f^k nın fixed noktası ise nokta *k* periyodiktir. Yani bu nokta,

$$x(n+1)=g(x(n)) \qquad (1.5.1)$$

fark denkleminin denge noktasıdır. Burada $g=f^k$. Bu taktirde b nin periyodik noktası olan $O^+(b)=\{b, f(b), f^2(b),..., f^{k-1}(b)\}$ ifadesine *k* devirlidir denir.

(ii) Bazı m pozitif tamsayısı için $f^m(b)$, k periyodik nokta ise *b*, nihayetinde *k* periyotlu diye adlandırılır. Diğer bir deyişle eğer $f^{m+k}(b)=f^m(b)$ ise *b* nihayetinde *k* periyodiktir.

Grafiksel olarak, bir k periyodik noktası f^k nın grafiğinin $y=x$ açıortay doğrusu ile kesiştiği noktanın *x* koordinatıdır. Örneğin $f(x)=3.43x(1-x)$. Burada f lojistik dönüşümdür. f^2 nin dört fixed noktası olduğunu gösterir. Dolayısıyla f^2 nin diğer iki fixed noktası 2 devirlidir.

$x_0=0.3$ ün 2 devir yaptığı dikkate alınmalıdır. Bu nedenle 2 periyodik noktadır. Üstelik $x^*=0.445$ f^2 ye göre asimptotik stabil noktasıdır. Eğer, örneğin (1.3.10) denkleminde A=-1 ise $f^2(p_0)=-(-p_0+B)+B=p_0$. Bu nedenle her nokta 2 periyotludur. Örneğin belirli bir kalemin başlangıçtaki fiyatı p_0 ise, fiyat p_0 ve $B-p_0$ arasında salınım yapar.

Örnek 1.18:

Çadır fonksiyonu ile üretilen fark denklemini göz önüne alalım.

$$T(x)=\begin{cases} 2x & 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 2(1-x) & \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

$T(x)=1-2\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$ de kompakt formudur.

Öncelikle T^2 nin 2 periyotlu fixed noktalarını bulalım.

$$T^2(x)=\begin{cases} 4x & 0 \le x < \dfrac{1}{4} \\ 2(1-2x) & \dfrac{1}{4} \le x < \dfrac{1}{2} \\ 4(x-\dfrac{1}{2}) & \dfrac{1}{2} \le x < \dfrac{3}{4} \\ 4(1-x) & \dfrac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

Burada dört tane denge noktası vardır. Bunlar 0, 0.4, $\dfrac{2}{3}$ ve 0.8 dir. 0 ve $\dfrac{2}{3}$, T 'nin denge noktalarıdır. Dolayısıyla 0.4 ve 0.8 T 'nin 2 devirlileridir. $x^*=0.8$ T^2 için stabil değildir.

$\left\{\dfrac{2}{7},\dfrac{4}{7},\dfrac{6}{7}\right\}$, 3 devirlilerdir. $T(\dfrac{2}{7})=\dfrac{4}{7}$, $T(\dfrac{4}{7})=\dfrac{6}{7}$, $T(\dfrac{6}{7})=\dfrac{2}{7}$.

Tanım 1.19: b, f nin periyodu k olan bir noktası olsun. Bu halde b,

(i) Eğer f^k nın stabil fixed noktası ise stabildir.

(ii) Eğer f^k nın bir çekici fixed noktası ise asimptotik stabildir.

(iii) Eğer f^k repelling fixed noktası ise repellingdir.

Eğer b stabilite özelliğine sahipse k devirli her noktası $\{x(0)=b,\ x(1)=f(b),\ x(2)=f^2(b),\ldots,\ x(k-1)=f^{k-1}(b)\}$

şeklindedir. Bu nedenle sık sık k devirli stabilite veya periyodik orbit kavramları dile getirilecektir. Buna karşın lojistik dönüşümde 2 devirliler asimptotik stabil iken, $x^*=0.8$ noktası 2 devirli T^2 nin fixed noktası yani $T^2(0.8)=0.8$ olduğu halde stabil değildir. Dolayısıyla 2 devirli olduğu halde kararlı değildir.

Teorem 1.20: $O^+(b) = \{b = x(0), x(1), ..., x(k-1)\}$ sürekli diferansiyellenebilen f fonksiyonunun k devirlisi olsun. Bu halde aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) Eğer $|f'(x(0))f'(x(1))...f'(x(k-1))| < 1$ ise k devirli $O^+(b)$ çekicidir.

(ii) Eğer $|f'(x(0))f'(x(1))...f'(x(k-1))| > 1$ ise k devirli $O^+(b)$ repellingdir.

İspat: (1.5.1) denkleminde Teorem 1.12 uygulanır. Zincir kuralı kullanılarak,

$$\left[f^k(x(r))\right]' = f'(x(0))f'(x(1))...f'(x(k-1)).$$

Örnek 1.21: $[-2,2]$ aralığında tanımlı $Q(x) = x^2 - 0.85$ dönüşümünü göz önüne alalım. 2 devirlilerini bulup, stabilitesini inceleyelim.

Çözüm: $Q^2(x) = \left(x^2 - 0.85\right)^2 - 0.85.$

$$Q^2(x) = x \text{ veya } x^4 - 1.7x^2 - 0.1275 = 0. \tag{1.5.2}$$

Bu denklemde ikisi $Q(x)$ dönüşümünün olmak üzere dört tane fixed noktası vardır. Bu iki kök,

$$x^2 - x - 0.85 = 0 \tag{1.5.3}$$

denklemine aittir. (1.5.2) denkleminden,

$$x^2 + x + 0.15 = 0 \tag{1.5.4}$$

kuadratik denklemi elde edilir ve buradan da,

$$a = \frac{-1+\sqrt{0.4}}{2}, \quad b = \frac{-1-\sqrt{0.4}}{2}$$

noktaları elde edilir. Teorem 1.20 ile bu noktaların stabilitesini incelersek,

$$|Q'(a)Q'(b)| = \left|\left(-14\sqrt{0.4}\right)\left(-1-\sqrt{0.4}\right)\right| = 0.6 < 1.$$

Dolayısıyla Teorem 1.20 (i) den 2 devirliler asimptotik stabiliteye sahiptir.

1.6 Lojistik Denklem ve Bayfurkasyon

Bu bölümün en önemli örneği olan

$$x(n+1) = \mu x(n)\left(1 - x(n)\right) \tag{1.6.1}$$

lojistik denklemini ele alalım. Bu denklem

$$F_\mu(x) = \mu x(1-x),\ x \in [0,1],\ \mu > 0 \tag{1.6.2}$$

denkleminin iterasyonundan elde edilir.

1.6.1 Denge noktaları (F_μ nün fixed noktası)

(1.6.1) denkleminin denge noktalarını ($F_\mu$nün fixed noktasını) bulmak için $F_\mu(x^*) = x^*$ denklemini çözelim. Buradan fixed noktaları 0, $x^* = \dfrac{\mu - 1}{\mu}$ dır. Şimdi de her denge noktasının ayrı ayrı stabilitesini araştıralım.

(a) ‘ 0 ’ denge noktasını ele alalım. $F'_\mu(0) = \mu$ olduğundan Teorem 1.12 ve 1.14 ten aşağıdaki çıkarımlar yapılır.

(i) $0 < \mu < 1$ ise ‘0’ çekici fixed noktadır.

(ii) $\mu > 1$ ise ‘0’ repelling noktadır.

(iii) $\mu = 1$ ise ‘0’ stabil değildir.

(b) Denge noktası $x^* = \dfrac{\mu - 1}{\mu}$, $\mu \neq 1$ dır. $x^* \in (0,1]$ olması için $\mu > 1$ olması gerekir.

$F'_\mu(\dfrac{\mu - 1}{\mu}) = 2 - \mu$. Dolayısıyla Teorem 1.12 ve 1.15 kullanılarak,

(i) $1 < \mu \leq 3$ için x^* çekici fixed noktadır.

(ii) $\mu > 0$ için x^* repelling fixed noktadır.

1.6.2 İki devirli lojistik denklemin fixed noktaları

İki devirlileri bulmak için $F_\mu^{\,2}(x) = x$ denklemini çözelim.

$$\mu^2 x(1-x)\left[1 - \mu x(1-x)\right] - x = 0 \,. \qquad (1.6.3)$$

Denge noktaları 0 ve $x^* = \dfrac{\mu - 1}{\mu}$ dir. (1.6.3) denklemi $x(x - \dfrac{(\mu-1)}{\mu})$ ile bölünür. $\mu^2 x^2 - \mu(\mu + 1) + \mu + 1 = 0$ kuadratik denklemi elde edilir. Dolayısıyla 2 devirliler

$$x(0) = \frac{\left[(1+\mu) - \sqrt{(\mu-3)(\mu+1)}\,\right]}{2\mu},$$

$$x(1) = \frac{\left[(1+\mu) + \sqrt{(\mu-3)(\mu+1)}\,\right]}{2\mu} \qquad (1.6.4)$$

denklemiyle verilir. $0 < \mu \leq 3$ için 2 periyotlu periyodik nokta yoktur. $\mu < 3$ için bir tane 2 devirli vardır. $\mu_0 = 3$ olsun.

1.6.2.1 $\mu > 3$ için $\{x(0), x(1)\}$ iki devirlilerin stabilitesi

$\left|F'_\mu(x(0))F'_\mu(x(1))\right| < 1$ ise Teorem 1.12'den bu iki devirliler için çekicidir.

$$-1 < \mu^2(1-2x(0))(1-2x(1)). \qquad (1.6.5)$$

(1.6.4) denkleminden $x(0)$ ve $x(1)$ değerleri (1.6.5) denkleminde yerine yazılırsa,

$$3 < \mu < 1+\sqrt{6} \approx 3.44949 .$$

Sonuç: Eğer $3 < \mu < 3.44949$ ise 2 devirli $\{x(0), x(1)\}$ kümesi çekicidir.

Teorem 1.15 kullanılarak $\{x(0), x(1)\}$ kümesi çekicidir (attracting). $\mu > \mu_1 = 1+\sqrt{6}$ olması halinde $\{x(0), x(1)\}$ kümesi stabil değildir.

1.6.3 2^2 Devirliler

Dört devirliler $F_\mu^4(x) = x$ denkleminin çözülmesiyle elde edilir. Bunun hesaplanması için bilgisayara gerek duyulmaktadır. $1+\sqrt{6} < \mu < 3.544090$ için 4 devirliler çekicidir. Eğer $\mu > \mu_2 = 3.544090$ ise 4 devirliler stabil olmaz. Bu muhakemeye devamla 2^2 devirliler 2^3 devirlilere dallanır (bayfurke olur). Bu 2^3 devirliler, bazı μ_4 için $\mu_3 < \mu \leq \mu_4$ ise çekicidir. Bu işlem sonsuz şekilde devam eder. Bunun sonucunda $\{\mu\}_{n\to\infty}^{\infty}$ dizisi elde edilir. Burada $\mu_n, 2^{n-1}$ devirlileri 2^n devirlilere dallanır (bayfurke olur).

Fizikçi Mitchell Fiegenbaum tarafından aşağıdaki gözlemler yapılmıştır.

(i) $\{\mu_n\} \to \mu_\infty = 3.57$

(ii) $\dfrac{(\mu_n - \mu_{n-1})}{(\mu_{n+1} - \mu_n)} \to \delta = 4.6692016$

Bu sayı Fiegenbaum sayısı olarak bilinir. Bu δ sayısı evrenseldir. f_μ dönüşümler ailesinin biçiminden bağımsızdır. Fakat μ_∞ fonksiyonlar ailesine bağlıdır.

Teorem 1.22: (Fiegenbaum 1978) I bir aralık olsun. $F_\mu : I \to I$ düzgün bir fonksiyonlar ailesi olsun. Genellikle δ sayısı dönüşümler ailesine ait değildir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1 Yüksek Mertebeli Lineer Fark Denklemleri

Bu bölümde yüksek mertebeli lineer fark denklemlerini inceleyeceğiz. Yani tek bağımlı değişken içeren bu denklemlerin hemen hemen her bilimsel araştırma alanlarında karşımıza çıkar. Popülasyon dinamiklerinden, ekonomiye, fiziğe ve daha birçok alanda kullanılır. Bu bölümde bazı uygulamalarla tanışacağız ve fark hesaplamalarının birkaç ilkesini ortaya çıkararak başlayacağız.

Fark Hesabı (Kalkülüsü): Fark hesabı bilinen diferansiyel ve integral hesabın ayrık analoğudur (diskrit benzeridir). Bu kısımda fark denklemlerinin çalışmasında esas teşkil eden iki operatörün temel özellikleri sunulacaktır. Bunlar fark ve öteleme (kaydırma) operatörleridir.

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

$$Ex(n) = x(n+1)$$

$$E^k x(n) = x(n+k)$$

olduğunu görmek kolaydır. Buna rağmen,

$$\Delta^k x(n)$$

açık değildir. I özdeşlik operatörü olsun. Yani $Ix = x$ olsun. Bu halde, $\Delta = E - I$ ve $E = \Delta + I$ yazılabilir. Bu taktirde,

$$\Delta^k x(n) = (E-I)^k x(n)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} E^{k-i} x(n)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x(n+k-i) \qquad (2.1.1)$$

Benzer olarak,

$$\mathrm{E}^k x(n) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^{k-i} x(n) \qquad (2.1.2)$$

olduğu gösterilebilir.

Kalkülüste bilinen D türev operatörünün yerine burada fark operatörü olan Δ kullanılıyor. E ve Δ operatörlerinin ikisi de bilinen D operatörünün lineerlik özelliğine sahiptir. Lineerliğin basitçe,

$\Delta\left[ax(n)+by(n)\right]=a\Delta x(n)+b\Delta y(n)$ ve $E\left[ax(n)+by(n)\right]=aEx(n)+bEy(n),\ \forall a,b\in\mathbb{R}$ olduğu görülebilir. Diferansiyel kalkülüse paralel olarak bir diğer ilginç fark, kalkülüsün temel teoreminin ayrık analoğudur.

Lemma 2.1: Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) $$\sum_{k=n_0}^{n-1}\Delta x(k)=x(n)-x(n_0) \tag{2.1.3}$$

(ii) $$\Delta\left(\sum_{k=n_0}^{n-1}x(k)\right)=x(n) \tag{2.1.4}$$

İspat: Kolaydır.

D türev operatörü ile Δ fark operatörünün ortak bir özelliğini daha verelim.

$$p(n)=a_0n^k+a_1n^{k-1}+...+a_k$$

derecesi k olan bir polinom olsun. Bu halde,

$$\Delta p(n)=\left[a_0(n+1)^k+a_1(n+1)^{k-1}+...+a_k\right]-\left[a_0(n)^k+a_1(n)^{k-1}+...+a_k\right]$$

$$=a_0kn^{k-1}+\text{derecesi (k-1) den küçük olan terimler}$$

Benzer olarak,

$$\Delta^2p(n)=a_0k(k-1)n^{k-2}+\text{derecesi (k-2) den küçük olan terimler}$$

Bu muhakemeye k defa devam edilirse,

$$\Delta^kp(n)=a_0k! \tag{2.1.5}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\Delta^{k+i}p(n)=0,\ \forall i\geq 1 \tag{2.1.6}$$

elde edilir.

2.1.1 Kuvvet değişimi

p, k ıncı dereceden polinom ve b bir sabit olsun. E kayma (shift) operatörünün b^n terimi üzerindeki etkisini araştıralım.

$$p(E)=a_0E^k+a_1E^{k-1}+...+a_kI \tag{2.1.7}$$

$$p(E)b^n = a_0 b^{n+k} + a_1 b^{n+k-1} + ... + a_k b^n$$
$$= (a_0 b^k + a_1 b^{k-1} + ... + a_k) b^n$$
$$= p(b) b^n \qquad (2.1.8)$$

elde edilir. (2.1.8) formülü aşağıdaki gibi genelleştirilir.

Lemma 2.2: $p(E)$, (2.1.7) deki polinom, g(n) ayrık herhangi bir fonksiyon olsun. Bu halde,

$$p(E)(b^n g(n)) = b^n p(bE) g(n) . \qquad (2.1.9)$$

İspat:

$$p(E)(b^n g(n)) = b^n p(bE) g(n)$$
$$p(E) = a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + ... + a_k$$
$$p(E)(b^n g(n)) = a_0 b^{n+k} g(n+k) + a_1 b^{n+k-1} g(n+k-1) + ...$$
$$+ a_{k-1} b^{n+1} g(n+1) + a_k b^n g(n)$$
$$= b^n (a_0 b^k g(n+k) + a_1 b^{k-1} g(n+k-1) + ... + a_k g(n))$$
$$= b^n p(bE) g(n) .$$

2.1.2 Faktöriyel polinomlar

x^k faktöriyel polinomu fark hesabının en ilginç fonksiyonlarından bir tanesidir. $x \in \mathbb{R}$ olsun. x in k inci faktöriyeli,

$$x^{(k)} = x(x-1)...(x-k+1), \ \mathrm{k} \in \mathbb{Z}^+$$

ile verilsin. Böylece eğer $x = n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq k$ ise,

$$n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ ve } n^{(n)} = n!.$$

Şimdiye kadar Δ ve E operatörleri tanımlandı. Bu operatörler $f(t)$ sürekli fonksiyonuna genişletilebilir.

$t \in \mathbb{R}$ için $\Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$ ve $Ef(t) = f(t+1)$ olsun. Buradan $f(x) = x^{(k)}$ olmak şartıyla,

$$\Delta x^{(k)} = (x+1)^{(k)} - x^{(k)} \text{ ve } Ex^{(k)} = (x+1)^{(k)}$$

yazılabilir. Burada $f(x) = x^{(k)}$.

Lemma 2.3:

$k \in \mathbb{Z}$ ve $x \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) $\Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)}$ (2.1.10)

(ii) $\Delta^n x^{(k)} = k(k-1)...(k-n+1)x^{(k-n)}$ (2.1.11)

(iii) $\Delta^k x^{(k)} = k!$ (2.1.12)

İspat:

(i) $\Delta x^{(k)} = (x+1)x^{(k-1)} - x^{(k)}$

$= (x+1)x(x-1)...(x-k+2) - x(x-1)...(x-k+2)(x-k+1)$

$= x(x-1)...(x-k+2)k = kx^{(k-1)}$.

(ii) $\Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)}$

$\Delta^2 x^{(k)} = k\Delta x^{(k-1)} = k(k-1)x^{(k-2)}$

$\vdots$

$\Delta^n x^{(k)} = k(k-1)(k-2)...(k-n+1)x^{(k-n)}$

Tümevarımla doğruluğu görülür. Buradan,

$\Delta^k x^{(k)} = k!$

olduğunu görmek kolaydır. $k \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$x^{(-k)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)...(x+k)} \tag{2.1.13}$$

tanımlanırsa ve $x(0) = 1$ alınırsa $\forall k \in \mathbb{Z}$ için bir önceki lemma genelleştirilebilir. Diğer bir deyişle yukarıdaki lemma tüm $k \in \mathbb{Z}$ için sağlanır.

Klasik anlamda türev için bilinen çarpım ve bölüm kurallarının diskrit karşılığı vardır. Bunlar sırasıyla (2.1.14) ve (2.1.15) ile verilir.

Çarpım Kuralı:

$$\Delta\left[x(n)y(n)\right] = Ex(n)\Delta y(n) + y(n)\Delta x(n) \tag{2.1.14}$$

Bölüm Kuralı:

$$\Delta\left[\frac{x(n)}{y(n)}\right] = \frac{y(n)\Delta x(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)Ey(n)} \tag{2.1.15}$$

2.1.3. Ters (anti) fark operatörü

Bilinen belirsiz integralin diskrit analoğu belli şartlar altında aşağıdaki gibi tanımlanır. Eğer $\Delta F(n)=0$ ise, bu halde bazı keyfi c sabitleri için $\Delta^{-1}(0)=F(n)=c$. Hatta eğer $\Delta F(n)=f(n)$ ise bazı keyfi c sabitleri için, $\Delta^{-1}f(n)=F(n)+c$. Dolayısıyla,

$$\Delta\Delta^{-1}f(n)=f(n),$$

$$\Delta^{-1}\Delta F(n)=F(n)+c,$$

$$\Delta\Delta^{-1}=I \text{ fakat } \Delta^{-1}\Delta\neq I.$$

(2.1.4) formülü kullanılarak,

$$\Delta^{-1}f(n)=\sum_{i=0}^{n-1}f(i)+c \tag{2.1.16}$$

elde edilir.

İspat:

$$\Delta\sum f(k)=f(n)-f(0),$$

$$\Delta^{-1}\Delta\sum f(k)=\Delta^{-1}f(n)-\Delta^{-1}f(0),$$

$$\Delta^{-1}f(n)=\sum f(k)+c.$$

Bu formül ile Δ^{-1} operatörünün lineer olduğu gösterilebilir.

Teorem 2.4: Δ^{-1} operatörü lineerdir.

İspat: $a,b\in\mathbb{R}$ için

$$\Delta^{-1}\left[ax(n)+by(n)\right]=a\Delta^{-1}x(n)+b\Delta^{-1}y(n)$$

olduğunu göstermeliyiz. (2.1.16) formülünden $\Delta^{-1}f(0)=0$ olmak şartıyla,

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}\left[ax(n)+by(n)\right]&=\sum_{i=0}^{n-1}ax(i)+by(i)\\&=a\sum_{i=0}^{n-1}x(i)+b\sum_{i=0}^{n-1}y(i)\\&=a\Delta^{-1}x(n)+b\Delta^{-1}y(n).\end{aligned}$$

Şimdi de bazı temel fonksiyonların ters farklarını elde edeceğiz.

Lemma 2.5: Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) $\Delta^{-k}0=c_1n^{k-1}+c_2n^{k-2}+...+c_k$ (2.1.17)

(ii) $\Delta^{-k}1 = \dfrac{n^k}{k!} + c_1 n^{k-1} + c_2 n^{k-2} + ... + c_k$ (2.1.18)

(iii) $\Delta^{-1} n^{(k)} = \dfrac{n^{(k+1)}}{k+1} + c, \ k \neq -1$ (2.1.19)

İspat: (i) ve (ii) kısımlarının ispatlarında izlenen yol (2.1.17) ve (2.1.18) denklerinin sağ taraflarına Δ^k yı uygulamaktır. Daha sonra sırasıyla bu, (2.1.5) ve (2.1.6) formüllerine de uygulanır. (iii) nin ispatı (2.1.10) formülünden elde edilir. Son olarak kısmi integrasyonun diskrit karşılığı,

$$\sum_{k=1}^{n-1} y(k)\Delta x(k) = x(n)y(n) - \sum_{k=1}^{n-1} x(k+1)\Delta y(k) + c \quad (2.1.20)$$

ile verilir. (2.1.20) nin ispatı (2.1.14) formülü kullanılarak elde edilir. Her iki tarafa Δ^{-1} uygulayarak ve (2.1.16) formülü kullanılarak,

$$\sum_{k=0}^{n-1} y(k)\Delta x(k) = x(n)y(n) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k+1)\Delta y(k) + c\,.$$

2.2 Lineer Fark Denklemlerinin Genel Teorisi

k inci mertebeden nanhomojen lineer fark denkleminin normal biçimi

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + ... + p_k(n)y(n) = g(n) \quad (2.2.1)$$

denklemi ile verilir. Burada tüm $n \geq n_0$ ve $p_k(n) \neq 0$ için $p_i(n)$ ve $g(n)$ tanımlanan reel değerli fonksiyonlardır. Eğer $g(n) = 0$ ise (2.2.1) denklemine homojen denklem denilir. (2.2.1) denklemi,

$$y(n+k) = -p_1(n)y(n+k-1) - p_2(n)y(n+k-2) - ... - p_k(n)y(n) + g(n) \quad (2.2.2)$$

formunda da yazılabilir.

(2.2.2) denkleminde $n = 0$ denirse $y(k)$; $y(k-1), y(k-2), ..., y(0)$ terimlerinin cinsinden yazılabilir. Tam olarak,

$$y(k) = -p_1(0)y(k-1) - p_2(0)y(k-2) - ... - p_k(0)y(0) + g(0)$$

elde edilir. $y(k)$ hesaplandıktan sonra (2.2.2) denkleminde $n = 1$ yazılarak $y(k+1)$ hesaplanır.

$$y(k+1) = -p_1(1)y(k) - p_2(1)y(k-1) - ... - p_k(1)y(1) + g(1)\,.$$

Bu muhakemeye devam edilirse $n \geq k$ için tüm $y(n)$ değerleri elde edilebilir.

Örnek 2.6:

$$y(n+3)-\frac{n}{n+1}y(n+2)+ny(n+1)-3y(n)=n \qquad (2.2.3)$$

fark denklemini ele alalım. Burada $y(1)=0,\ y(2)=-1$ ve $y(3)=1$ olacak şekilde $y(4),\ y(5),\ y(6)$ ve $y(7)$ değerlerini bulalım.

Çözüm:

$$y(n+3)=\frac{n}{n+1}y(n+2)-ny(n+1)+3y(n)+n \qquad (2.2.3)'$$

$(2.2.3)'$ denkleminde $n=1$ denirse,

$$y(4)=\frac{1}{2}y(3)-y(2)+3y(1)+1=\frac{5}{2}.$$

$n=2$ için,

$$y(5)=\frac{2}{3}y(4)-2y(3)+3y(2)+2=-2.$$

$n=3$ için,

$$y(6)=\frac{3}{4}y(5)-3y(4)+3y(3)+3=-\frac{3}{2}.$$

$n=4$ için,

$$y(7)=\frac{4}{5}y(6)-4y(5)+3y(4)+4=20.9.$$

Şimdi (2.2.1) denklemine tekrar dönelim ve formal olarak çözümünü tanımlayalım. $\{y(n)\}_{n_0}^{\infty}$ dizisi veya $y(n)$, (2.2.1) denklemini sağlarsa $y(n)$ ye çözüm denir.

$$y(k+1)+p_1(n)y(n+k-1)+...+p_k(n)y(n)=g(n) \qquad (2.2.4)$$

ve

$$y(n_0)=a_0,\ y(n_0+1)=a_1,...,\ y(n_0+k-1)=a_{k-1} \qquad (2.2.5)$$

denklemleri başlangıç değer problemi olarak bilinir. a_i ler reel sayılardır. Yukarıdaki muhakemeden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 2.7: (2.2.4) ve (2.2.5) başlangıç değer problemlerini sağlayan bir tek $y(n)$ çözümü vardır.

İspat: İspat (2.2.2) denkleminde $n=n_0,\ n_0+1,\ n_0+2,...$ yazılarak elde edilir.

$n \geq n_0 + k$ olduğunda $n = n_0 + k + (n - n_0 - k)$ yazılır. $y(n)$ çözümünün tekliğinden şu kastedilmektedir. Eğer (2.2.4) ve (2.2.5) başlangıç değer problemlerinin bir başka $\tilde{y}(n)$ çözümü varsa, bu $\tilde{y}(n)$, $y(n)$ e özdeş olmak zorundadır. Bunu (2.2.2) denkleminden görmek kolaydır.

(2.2.1) ve (2.2.4)-(2.2.5) denklemlerinin kapalı bir çözüme sahip olup olmadığı sorusuna yanıt arayalım.

Tanım 2.8:

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + ... + a_r f_r(n) = 0, \; n \geq n_0 \qquad (2.2.6)$$

denkleminde $a_i \; (i = 1, 2, ..., r)$ sabitlerinden en az biri sıfırdan farklı ise, $f_i \; (i = 1, 2, ..., r)$ fonksiyonları lineer bağımlıdır. Eğer özel olarak $a_j \neq 0$ ise,

$$f_j(n) = -\frac{a_1}{a_j} f_1(n) - \frac{a_2}{a_j} f_2(n) - .... - \frac{a_r}{a_j} f_r(n) = -\sum_{i \neq j} \frac{a_i}{a_j} f_r(n) \qquad (2.2.7)$$

yazılabilir. Yani f_j diğer f_i lerin lineer terkibi şeklinde yazılabilir. Eğer (2.2.6) denkleminde a_i lerin hepsi sıfır ise f_i fonksiyonları lineer bağımsızdır.

Örnek 2.9: 3^n, $n3^n$, $n^2 3^n$ fonksiyonları $n > 1$ için lineer bağımsızdır.

Çözüm:

$$a_1 3^n + a_2 n 3^n + a_3 n^2 3^n = 0, \; n > 1 .$$

3^n ile bölünürse,

$$a_1 + a_2 n + a_3 n^2 = 0$$

elde edilir. Bu denklem n ye göre ikinci derecedendir. Dolayısıyla en fazla iki köke sahiptir. Tüm n ler için bu ifade ancak $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ olması ile mümkündür. Yani verilen fonksiyonlar lineer bağımsızdır.

Tanım 2.10:

$$x(n+k) + p_1(n) x(n+k-1) + ... + p_k(n) x(n) = 0 \qquad (2.2.6)'$$

denkleminin homojen hali k tane lineer bağımsız çözümlere sahiptir. Bu çözümlere fundamental (temel) çözüm kümesi denir.

Pratikte (2.8) tanımı kullanılarak lineer bağımsızlığı görmek kolay olmayabilir. Bunun için alternatif bir metot vardır. Bu metot diferansiyel denklemerde kullanılan Wronskian determinantının diskrit analoğu olan Casoratian $C(n)$ determinantıdır.

Tanım 2.11: $x_1(n),\ x_2(n),...,\ x_r(n)$ çözümlerinin Casoratian determinantı,

$$C(n)=\det\begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \cdots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \cdots & x_r(n+1) \\ \vdots & & & \\ x_1(n+r-1) & x_2(n+r-1) & \cdots & x_r(n+r-1) \end{pmatrix} \tag{2.2.8}$$

ile verilir.

Örnek 2.12:

$$x(n+3)-7x(n+1)+6x(n)=0$$

fark denlemini ele alalım.

(a) $1,\ (-3)^n,\ 2^n$ dizilerinin denklemin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

(b) Bu dizilerin Casoratian determinantını bulunuz.

Çözüm:

(a) $x(n)=1$ için çözüm olduğu açıktır. Çünkü $1-7+6=0$ dır.

$x(n)=(-3)^n$ ise,

$$(-3)^{n+3}-7(-3)^{n+1}+6(-3)^n=0.$$

$x(n)=2^n$ ise,

$$(2)^{n+3}-7(2)^{n+1}+6(2)^n=0$$

sağlanır.

(b) $C(n)=\begin{pmatrix} 1 & (-3)^n & 2^n \\ 1 & (-3)^{n+1} & 2^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} & 2^{n+2} \end{pmatrix}=1\begin{pmatrix} (-3)^{n+1} & 2^{n+1} \\ (-3)^{n+2} & 2^{n+2} \end{pmatrix}-(-3)^n\begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} \\ 1 & 2^{n+2} \end{pmatrix}+2^n\begin{pmatrix} 1 & (-3)^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} \end{pmatrix}$

$$=-20(2)^n(-3)^n.$$

Lemma 2.13: (Abel lemması) $x_1(n),x_2(n),...,x_k(n)$, (2.2.1) denkleminin temel (fundamental) çözümleri olsun. $C(n)$ de bu çözümlerin Casoratian'ı ise bu halde $n\ge n_0$ için,

$$C(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) C(n_0) . \tag{2.2.9}$$

İspat: İspatı $k=3$ için yapalım. Genel durum için ispat benzerdir. $x_1(n), x_2(n)$ ve $x_3(n)$ temel çözümler olsun. Bu halde,

$$C(n+1) = \det \begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ x_1(n+3) & x_2(n+3) & x_3(n+3) \end{pmatrix} \tag{2.2.10}$$

yazılır. $1 \le i \le 3$ için,

$$x_i(n+3) = -p_3(n)x_i(n) - \left[p_1(n)x_i(n+2) + p_2(n)x_i(n+1) \right]. \tag{2.2.11}$$

$x_1(n+1), x_2(n+1)$ ve $x_3(n+1)$ değerleri (2.2.10) denkleminde yerine yazılırsa,

$$C(n+1) = \det \begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ \begin{array}{l} -p_3x_1(n) \\ -(p_2x_1(n+1) \\ +p_1x_1(n+2)) \end{array} & \begin{array}{l} -p_3x_2(n) \\ -(p_2x_2(n+1) \\ +p_1x_2(n+2)) \end{array} & \begin{array}{l} -p_3x_3(n) \\ -(p_2x_3(n+1) \\ +p_1x_3(n+2)) \end{array} \end{pmatrix}. \tag{2.2.12}$$

Determinantın özellikleri kullanılarak

$$C(n+1) = \det \begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ -p_3(n)x_1(n) & -p_3(n)x_2(n) & -p_3(n)x_3(n) \end{pmatrix} \tag{2.2.13}$$

$$= -p_3(n) \det \begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ x_1(n) & x_2(n) & x_3(n) \end{pmatrix}$$

$$= -p_3(n)(-1)^2 \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & x_3(n) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^3 p_3(n) C(n) \tag{2.2.14}$$

elde edilir. (1.2.3) formülü kullanılırsa (2.2.14) denkleminin çözümü,

$$C(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} (-1)^3 p_3(i) \right] C(n_0)$$

$$= (-1)^{3(n-n_0)} \prod_{i=n_0}^{n-1} p_3(i) C(n_0)$$

ile verilir. Bu ise $k=3$ ün ispatıdır. Genel durum benzer yapılır. (2.2.1) denklemindeki p_i katsayıları sabit ise,

$$C(n) = (-1)^{kn} p_k^n C(0) . \tag{2.2.15}$$

Dolayısıyla (2.2.9) formülünün bir önemli sonucu aşağıdaki gibidir.

Sonuç 2.14:

Tüm $n \geq n_0$ için $p_k(n) \neq 0$ olsun. Bu halde tüm $n \geq n_0$ için $C(n) \neq 0$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $C(n_0) \neq 0$ dır.

İspat: İspat (2.2.9) formülünden açıktır.

Not: Eğer Casoratian $C(n) \neq 0$ ise fundamental küme lineer bağımsızdır. $x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)$ çözümlerini ele alalım. Bu halde $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ ve $a_1, a_2, ..., a_k$ sabitleri ve $n \geq n_0$ için,

$$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + ... + a_k x_k(n) = 0$$

yazılır. Bu halde $k-1$ tane denklem üretilebilir.

$$\begin{aligned} &a_1 x_1(n+1) + a_2 x_2(n+1) + ... + a_k x_k(n+1) = 0, \\ &\vdots \\ &a_1 x_1(n+k-1) + a_2 x_2(n+k-1) + ... + a_k x_k(n+k-1) = 0 \end{aligned}$$

yazılır.

$$X(n)\xi = 0, \ \xi = (a_1, a_2, ..., a_k)^T , \tag{2.2.16}$$

$$X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \cdots & x_k(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \cdots & x_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1(n+k-1) & x_2(n+k-1) & \cdots & x_k(n+k-1) \end{pmatrix}.$$

$$C(n) = \det X(n) .$$

(2.2.16) sisteminin trivial çözüme sahip olabilmesi için $\det X(n) \neq 0$ olması gerekir.

Teorem 2.15: Bazı $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ için $x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)$ ifadeleri

$$x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + ... + p_k(n)x_k(n) = 0 \tag{*}$$

denkleminin fundamental kümesi olabilmesi için gerek ve yeter şart bu temel kümenin Casoratian'ının sıfırdan farklı olmasıdır. Yani $C(n_0) \neq 0$.

Örnek 2.16:

$$x(n+2) - \frac{3n-2}{n-1}x(n+1) + \frac{2n}{n-1}x(n) = 0$$

denkleminin fundamental kümesi $\{n,\ 2^n\}$ dır.

Çözüm: n ve 2^n in çözüm olduğunu görmek oldukça kolaydır. Bu halde,

$$C(n) = \det\begin{pmatrix} n & 2^n \\ n+1 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

ise

$$C(0) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Dolayısıyla Teorem 2.15 'den n ve 2^n çözümleri lineer bağımsız olduğundan fundamental bir kümedir.

Örnek 2.17:

$$x(n+3) + 3x(n+2) - 4x(n+1) - 12x(n) = 0$$

fark denkleminde $\{2^n,\ (-2)^n,\ 3^n\}$ kümesi fundamental bir kümedir. Gösterelim.

Çözüm:

(i) $\{2^n,\ (-2)^n,\ 3^n\}$ kümesinin bir çözüm olduğunu görmek kolaydır.

(ii) Lineer bağımsızlığı,

$$C(n) = \det\begin{pmatrix} 2^n & (-2)^n & 3^n \\ 2^{n+1} & (-2)^{n+1} & 3^{n+1} \\ 2^{n+2} & (-2)^{n+2} & 3^{n+2} \end{pmatrix},$$

$$C(0) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix} = -20 \neq 0$$

Casoratian'dan görülür. Dolayısıyla bir fundamental kümedir.

Teorem 2.18: (Fundamental Teoremi) Tüm $n \geq n_0$ için $p_k(n) \neq 0$ ise $(*)$ denklemi $n \geq n_0$ için fundamental bir çözüm kümesine sahiptir.

İspat: Teorem 2.7'den,

$$x_i(n_0+i-1)=1,\ x_i(n_0)=x_i(n_0+1)=...=x_i(n_0+i-2)=x_i(n_0+i)=...=x_i(n_0+k-1)$$
$$=0.$$

$1\le i\le k$ şartını sağlayacak şekilde $x_1(n), x_2(n)$ ve $x_k(n)$ çözümleri vardır. Bu halde $x_1(n_0)=1,\ x_2(n_0+1)=1,\ x_3(n_0+2)=1$. Dolayısıyla $C(n_0)=\det I=1$. Teorem 2.13'ten dolayı $\{x_1(n), x_2(n),..., x_k(n)\}$ bir fundamental çözümdür.

Lemma 2.19: $x_1(n)$ ve $x_2(n)$, $(*)$ denkleminin iki çözümü olsun. Bu halde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) $x(n)=x_1(n)+x_2(n)$ $(*)$ denklemini sağlar.

(ii) a sabit olsun. Bu halde $\tilde{x}(n)=ax_1(n)$ $(*)$ denklemini sağlar.

Süperpozisyon (Üst üste Bindirme veya Lineer Terkip) Özelliği:

$x_1(n), x_2(n),..., x_k(n)$ $(*)$ denkleminin çözüm olsun. Bu halde,

$$x(n)=\sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n)$$

ifadesi de $(*)$ denkleminin bir çözümüdür. Şimdi $\{x_1(n), x_2(n),..., x_k(n)\}$ $(*)$ denkleminin bir fundamental kümesi olsun. $x(n)$ de $(*)$ denkleminin bir çözümü olsun. Bu halde $x(n)=\sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n)$ olacak şekilde a_i katsayıları vardır. (2.2.16) denklemindeki notasyonları kullanarak,

$$X(n)\xi=\hat{x}(n)$$

yazılabilir. Burada,

$$\hat{x}(n)=\begin{pmatrix} x(n) \\ x(n+1) \\ \vdots \\ x(n+k-1) \end{pmatrix}.$$

$x(n)$ katsayılar determinantı sıfırdan farklıdır. Çünkü fundamental küme lineer bağımsızdır. Buradan

$$\xi=X^{-1}(n)\hat{x}(n).$$

Özel olarak $n=n_0$ için $\xi=X^{-1}(n_0)\hat{x}(n_0)$. Bu tartışma bizi çözüme götürür.

Tanım 2.20: $\{x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)\}$ $(*)$ denkleminin fundamental çözümüdür. Dolayısıyla genel çözüm $x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n)$ ile verilir. Burada a_i ler sabittir.

S, $(*)$ denklemini sağlayan çözüm kümesi olsun.

(i) $x, y \in S,\ n \in \mathbb{Z}^+$ için $(x+y)(n) = x(n) + y(n)$.

(ii) $x \in S,\ a$ sabiti için $(ax)(n) = ax(n)$.

Toplama ve çarpma işlemine göre aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 2.21: $(S, +, \cdot)$ boyutu k olan bir lineer vektör uzayıdır.

2.3 Sabit Katsayılı Lineer Homojen Denklemler

$$x(n+k) + p_1 x(n+k-1) + p_2(n+k-2) + ... + p_k x(n) = 0 \qquad (2.3.1)$$

k ıncı mertebeden fark denklemini ele alalım. Burada p_i ler sabit ve $p_k \neq 0$ dır. $(i = 1, 2, ..., k)$. Amacımız fundamental bir küme bularak neticede $(2.3.1)$ denkleminin genel çözümünü elde etmektir. Prosedür oldukça kolaydır. $(2.3.1)$ denkleminin çözümlerinin $x(n) = \lambda^n$ formunda olduğunu varsayalım. Burada λ kompleks bir sayıdır. $x(n) = \lambda^n$ değeri $(2.3.1)$ denkleminde yazılırsa,

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + ... + p_k = 0 \qquad (2.3.2)$$

elde edilir. Bu denkleme $(2.3.1)$ denkleminin karakteristik denklemi adı verilir. λ köklerine de karakteristik kökler denir. Dikkat edilirse $p_k \neq 0$ olduğundan hiçbir karakteristik kök sıfıra eşit değildir. Analiz edilmesi gereken iki durum vardır.

Durum (a) $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ karakteristik köklerin birbirinden farklı olduğunu varsayalım. Şimdi $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k\}$ kümesinin bir fundamental küme olduğunu gösterelim. Teorem 2.25 kullanılacaktır. Amaca varmak için $C(0) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Burada $C(n)$ çözümlerin Casoratian'ıdır. Yani,

$$C(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Bu determinant Vandermonde determinantı olarak bilinir. $C(0)=\prod_{1\le i<j\le k}(\lambda_j-\lambda_k)$ şeklinde de gösterilebilir. Bu durumda $C(0)\neq 0$. Bu gerçek $\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k\}$ kümesinin $(2.3.1)$ denklemini sağlayan çözümlerin fundamental kümesi olduğunu gösterir.

Sonuç olarak $(2.3.1)$ denkleminin genel çözümü,

$$x(n)=\sum_{i=1}^{k}a_i\lambda_i^n$$

şeklindedir. Burada a_i bir kompleks sayıdır.

Durum (b) Birbirinden farklı $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_r$ karakteristik köklerinin sırasıyla katlılıkları $m_1,m_2,...,m_r$ olsun. Bu durumda $(2.3.1)$ denklemi,

$$(E-\lambda_1)^{m_1}(E-\lambda_2)^{m_2}...(E-\lambda_r)^{m_r}\,x(n)=0 \tag{2.3.3}$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer $\psi_1(n),\psi_2(n),...,\psi_{m_i}(n)$,

$$(E-\lambda_i)^{m_i}\,x(n)=0 \tag{2.3.4}$$

denkleminin çözümleri ise, $(2.3.3)$ denkleminin de çözümleridir. Her $(2.3.4)$ denklemi için de çözümlerin fundamental kümesinin bulunabileceğini kabul edelim. $1\le i\le r$. Dolayısıyla bu r fundamental kümelerin birleşiminin de $(2.3.3)$ denklemini sağladığını beklemek oldukça mantıklıdır. Bu durumu aşağıdaki lemmayla açıklamak mümkündür.

Lemma 2.22: $G_i=\left\{\lambda_i^n,n\lambda_i^n,n^2\lambda_i^n,...,n^{m_i-1}\lambda_i^n\right\}$ kümesi $(2.3.4)$ denkleminin çözümlerinin bir fundamental kümesidir.

İspat: Önce $n^s\lambda_i^n$, $1\le s\le m_i-1$, $(2.3.4)$ denkleminin bir çözümü olduğunu gösterelim. $(2.1.9)$ formülünden

$$\begin{aligned}(E-\lambda_i)^{m_i}(n^s\lambda_i^s)&=\lambda_i^n(\lambda_iE-\lambda_i)^{m_i}n^s\\&=\lambda_i^{n+m_i}\Delta^{m_i}(n^s)\\&=0\end{aligned}$$

elde edilir. $\lambda_i\neq 0$ olduğu için eğer $\left\{1,n,...,n^{m_i-1}\right\}$ kümesi lineer bağımsız ise G_i kümesi lineer bağımsızdır. Fakat bu son ifade $n\ge n_0>0$ için lineer bağımsızdır. İspat tamamlanır. Şimdi de bir fundamental küme bulmaya çalışalım.

Sonuç 2.23: $G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i$ kümesi (2.3.3) denkleminin bir fundamental kümesidir.

Sonuç 2.24: (2.3.3) denkleminin genel çözümü

$$x(n) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n (a_{i0} + a_{i1}n + a_{i2}n^2 + ... + a_{im_{i-1}} n^{m_i - 1}) \qquad (2.3.4)'$$

ile verilir.

İspat: Lemma 2.22 ve Sonuç 2.23 kullanılarak ispat yapılır.

Örnek 2.25:

$x(n+3) - 7x(n+2) + 16x(n+1) - 12x(n) = 0,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1,\ x(2) = 1$

denklemini çözelim.

Çözüm: $x(n) = r^n$ için denklemin karakteristik denklemi

$$r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = 0\,.$$

Karakteristik kökleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$. Genel çözüm

$$x(n) = a_0 2^n + a_1 n 2^n + b_1 3^n\,.$$

Başlangıç verileri kullanarak $a_0,\ a_1$ ve b_1 ler bulunur. Sonuç olarak yukarıdaki denklem sistemini çözdükten sonra $a_0 = 3,\ a_1 = 2$ ve $b_1 = -3$ elde edilir. Buradan denklemin genel çözümü

$$x(n) = 3(2^n) + 2n(2^n) + (3^{n+1})\,.$$

Örnek 2.26: (Kompleks karakteristik kökler)

$$x(n+2) + p_1 x(n+1) + p_2 x(n) = 0$$

denklemine karşılık gelen karakteristik denklemin $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ve $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ gibi iki kökü olsun. Dolayısıyla genel çözüm,

$$x(n) = c_1(\alpha + i\beta)^n + c_2(\alpha - i\beta)^n$$

şeklindedir.

Kompleks düzlemde (α, β) ikilisine karşılık gelen kompleks sayı $(\alpha + i\beta)$ biçimindedir. Kutupsal koordinatlardaki yazılışı,

$$\alpha = r\cos\theta,\ \beta = r\sin\theta,\ r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

şeklindedir. Dolayısıyla,

$$x(n) = a_1(r\cos\theta + ir\sin\theta)^n + a_2(r\cos\theta - ir\sin\theta)^n$$

$$= r^n\left[(a_1+a_2)\cos(n\theta)+i(a_1-a_2)\sin(n\theta)\right]$$

$$= r^n\left[c_1\cos(n\theta)+c_2\sin(n\theta)\right] \qquad (2.3.5)$$

yazılır. Burada $c_1 = a_1 + a_2$ ve $c_2 = i(a_1 - a_2)$. Bu halde,

$$\cos w = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}},\ \ \sin w = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} \text{ ve } w = \tan^{-1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right).$$

$$x(n) = r^n\sqrt{c_1^2+c_2^2}\left[\cos w\cos(n\theta)+\sin w\sin(n\theta)\right]$$

$$= r^n\sqrt{c_1^2+c_2^2}\cos(n\theta-w)$$

$$x(n) = Ar^n\cos(n\theta-w) \qquad (2.3.6)$$

Örnek 2.27: (Fibonacci Dizisi) Tavşanlar yavrulama dönemine ikinci ayın sonunda girerler. Başlangıçta elimizde bir tavşan çiftinin olduğunu varsayalım. Olgun çiftler her ay bir tavşan doğursun. Bu taktirde üremenin her ay sonunda oluşturduğu modellemeyi elde edelim. Bu düşünceye devamla $F(n)$, n inci ayın sonundaki tavşan çiftlerini göstersin. Bu taktirde,

$$F(n+2) = F(n+1)+F(n),\ F(0)=1,\ F(1)=2 \text{ ve } 0 \le n \le 10$$

ikinci mertebeden lineer fark denklemi elde edilir. Bu modelleme

$$F(n+2) = F(n+1)+F(n),\ F(0)=1,\ F(1)=1 \text{ ve } n \ge 0 \qquad (2.3.7)$$

denklemi olarak bilinen Fibonacci dizisinin özel bir durumudur. $(2.3.7)$ denkleminin karakteristik denklemi,

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Bu denklemin karakteristik kökleri ise,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Dolayısıyla $(2.3.7)$ denkleminin genel çözümü,

$$F(n) = a_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,\ n \ge 1. \qquad (2.3.8)$$

$F(1)=1$ ve $F(2)=1$ olduğu kullanılarak c_1 ve c_2 elde edilir. Sonuç olarak,

$$F(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n). \tag{2.3.9}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F(n+1)}{F(n)}=\alpha\approx 1.618$. Bu sayı altın oran olarak ta bilinmektedir.

2.4 Homojen Olmayan Lineer Denklemler (Belirsiz Katsayılar Metodu)

Bu kısımda,

$$y(n+k)+p_1(n)y(n+k-1)+...+p_k(n)y(n)=g(n) \tag{2.4.1}$$

homojen olmayan k ıncı mertebeden fark denklemi irdelenecektir. Burada tüm $n\geq n_0$ için $p_k(n)\neq 0$. $g(n)$, kuvvet (forcing) terimi, dış kuvvet, kontrol veya sistemin girdisi diye adlandırılır. $y(n)$ ise çıktıdır.

(2.4.1) denkleminin çözümlerinin bir vektör uzayı oluşturup oluşturmadığı sorusuna yanıt aramak gerekir. Diğer bir ifadeyle (2.4.1) denklemini sağlayan iki çözümün toplamının ve çözümün bir sabitle çarpımının da yine çözüm olup olmadığı sorusuyla eş anlamlıdır.

Örnek 2.28:

$$y(n+2)-y(n+1)-6y(n)=5(3^n) \tag{$*$}$$

denklemini göz önüne alalım.

(a) $y_1(n)=n(3^{n-1})$ ve $y_2(n)=(1+n)3^{n-1}$ in $(*)$ denklemini sağladığını gösterelim.

(b) $y(n)=\ y_2(n)-y_1(n)$ in $(*)$ denkleminin çözümü olmadığını gösterelim.

(c) $\varphi(n)=sn(3^{n-1})$ in $(*)$ denkleminin çözümü olmadığını gösterelim.

Çözüm:

(a) Çözümü görmek kolaydır. Okuyucuya bırakılmıştır.

(b) $y(n)=\ y_2(n)-y_1(n)=3^{n-1}$. Bu sonucu $(*)$ denkleminde yerine yazarsak,

$$3^{n+1}-3^n-6(3^{n-1})=3^n\left[3-1-2\right]=0\neq 5(3^n)$$

elde ederiz.

(c) $\varphi(n)=sn(3^{n-1})$ i, $(*)$ denkleminde yerine yazarak denklemi sağlamadığı görülür.

Sonuç: Bu örneğin sonucunda çözümlerin farkının ve bir sabitle çarpımının da yine bir çözüm olmadığı açıktır. Fakat homojen denklemlerde durum tersine idi.

Teorem 2.29: $y_1(n)$ ve $y_2(n)$, (2.4.1) denkleminin çözümleri ise farkları homojen denklemin çözümüdür. Yani değişken katsayılı,

$$x(n+k)+p_1(n)x(n+k-1)+...+p_k(n)x(n)=0 \qquad (2.4.2)$$

denklemini sağlar. (2.4.2) homojen denklemin çözümüne tamamlayıcı çözüm denir ve $y_c(n)$ ile gösterilir. Homojen olmayan (2.4.1) denkleminin çözümüne ise özel çözüm denir ve $y_p(n)$ ile gösterilir.

Teorem 2.30: (2.4.1) denkleminin genel çözümü,

$$y(n)=y_p(n)+\sum_{i=1}^{k}a_i x_i(n).$$

Burada $\{x_1(n),x_2(n),...,x_k(n)\}$ (2.4.2) homojen denklemi sağlayan çözümlerin fundamental kümesidir.

İspat: 2.29 teoremine göre $y(n)-y_p(n)$ (2.4.2) homojen denkleminin çözümüdür. Yani bazı a_i sabitleri için $y(n)-y_p(n)=\sum_{i=1}^{k}a_i x_i(n)$.

Sonuç: (2.4.1) denkleminin genel çözümü,

$$y(n)=y_c(n)+y_p(n) \qquad (2.4.3)$$

Şimdi,

$$y(n+k)+p_1 y(n+k-1)+...+p_k y(n)=g(n) \qquad (2.4.4)$$

sabit katsayılı denkleminin özel çözümünü bulalım. Özel çözümü için belirsiz katsayılar kullanılacaktır. Yani $g(n)$ ye göre özel çözümün yapısı tahmin edilir.

Tanım 2.31: E bir öteleme operatörü olmak üzere $N(E)$ bir polinom operatörü olsun. Eğer $g(n)$,

$$N(E)g(n)=0 \qquad (2.4.5)$$

ise $N(E)$ ye $g(n)$ nin annihilatörü (sıfırlayıcı) denir. Yani $g(n)$, (2.4.5) nin bir çözümüdür. Diğer bir deyişle eğer $g(n)$, (2.4.5) nin bir çözümü ise, $N(E)$ ye $g(n)$ nin annihilatörü denir. Örneğin $g(n)=3^n$ ise $N(E)=E-3$ tür. $g(n)=\cos\frac{n\pi}{2}$ nin annihilatörü, $N(E)=E^2+1$ dir. Yani $g(n)$, $(E^2+1)y(n)=0$ denklemini çözer. (2.4.4) denklemi E öteleme operatörü ile

$$p(E)y(n) = g(n) \qquad (2.4.6)$$

şeklinde yeniden yazılır. Burada $p(E) = E^{n+k} + p_1 E^{n+k-1} + p_2 E^{n+k-2} + ... + p_k I$. Şimdi $N(E)$, (2.4.6) denkleminde $g(n)$ nin bir annihilatörü olsun. (2.4.6) denkleminin her iki tarafına $N(E)$ uygulanırsa

$$N(E)p(E)y(n) = 0 \qquad (2.4.7)$$

elde edilir. $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$

$$p(E)y(n) = 0 \qquad (2.4.8)$$

homojen denkleminin karakteristik kökleri ve $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ da

$$N(E)y(n) = 0 \qquad (2.4.9)$$

denkleminin karakteristik kökleri olsun. Burada iki farklı durum söz konusudur.

Durum 1:

$\forall i$ için $\lambda_i \neq \mu_i$ olsun. Bu durumda $y_p(n)$ yi belirsiz katsayılar yöntemiyle (2.4.9) denkleminin genel çözümü olarak yazalım. Bu tahmin edilen $y_p(n)$ değeri (2.4.4) denkleminde yazılarak sabitler belirlenir.

Durum 2:

Bazı i, j için $\lambda_i = \mu_i$ olsun. Bu durumda (2.4.7) denkleminin karakteristik köklerinin kümesi $\{\lambda_i\}, \{\mu_i\}$ kümelerinin birleşimine eşittir. Sonuç olarak özel çözümü belirlemek için ilk olarak (2.4.7) denkleminin genel çözümü belirlenir. Birinci durum tekrar edilir.

$g(n)$	$y_p(n)$
a^n	$c_1 a^n$
n^k	$c_0 + c_1 n + ... + c_k n^k$
$n^k\ a^n$	$c_0 a^n + c_1 n a^n + ... + c_k n^k a^n$
$\sin bn,\ \cos bn$	$c_1 \sin bn + c_2 \cos bn$
$a^n \sin bn,\ a^n \cos bn$	$(c_1 \sin bn + c_2 \cos bn) a^n$
$a^n n^k \sin bn,\ a^n n^k \cos bn$	$(c_0 + c_1 n + ... + c_k n^k) a^n \sin(bn)$ $+ (d_0 + d_1 n + ... + d_k n^k) a^n \cos(bn)$

Örnek 2.32:

$$y(n+2)+y(n+1)-12y(n)=n2^n \qquad (*)$$

denklemini çözelim.

Çözüm: Homojen denkleminin karakteristik kökleri $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-4$ tür. Yani tamamlayıcı çözüm,

$$y_c(n)=c_1 3^n+c_2(-4)^n .$$

$g(n)=n2^n$ nin annihilatörü $N(E)=(E-2)^2$. Yani $\mu_1=\mu_2=2$ dir. Bu bizi Durum 1 e götürür. Çünkü $\lambda_i \neq \mu_j$ dir. Şimdi,

$$y_p(n)=a_1 2^n+a_2 n2^n$$

olsun. Bu değer $(*)$ ifadesinde yazılırsa,

$$a_1 2^{n+2}+a_2(n+2)2^{n+2}+a_1 2^{n+1}+a_2(n+1)2^{n+1}-12a_2 n2^n=n2^n$$

$$(10a_2-6a_1)2^n-6a_2 n2^n=n2^n .$$

Dolayısıyla,

$$10a_2-6a_1=0 \text{ ve } -6a_2=1 \text{ veya } a_1=\frac{-5}{18},\ a_2=\frac{-1}{6} .$$

Özel çözüm, $y_p(n)=\dfrac{-5}{18}2^n-\dfrac{1}{6}n2^n$,

genel çözüm,

$$y(n)=c_1 3^n+c_1(-4)^n-\frac{5}{18}2^n-\frac{1}{6}n2^n .$$

Örnek 2.33:

$$(E-3)(E+2)y(n)=5(3^n) \qquad (2.4.10)$$

fark denklemini çözelim.

Çözüm: $5(3^n)$ nin annihilatörü (sıfırlayıcısı) $N(E)=E-3$ tür. Yani $\mu_1=3$. Homojen denklemin karakteristik kökleri $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-2$ dir. $\lambda_1=\mu_1$ olduğundan Durum 2 deyiz. Yani sonuç olarak

$$(E-3)^2(E+2)y(n)=0 . \qquad (2.4.11)$$

Verilen fark denkleminin genel çözümü,

$$\tilde{y}(n)=(a_1+a_2 n)3^n+a_3(-2)^n$$

ile verilir. Özel çözüm,

$$y_p(n) = a_2 n 3^n$$

şeklindedir. Burada a_2,

$$a_2(n+2)3^{n+2} - a_2(n+1)3^{n-1}6a_2 n3^n = 5\cdot 3^n \text{ veya } a_2 = \frac{1}{3}$$

ile verilir. Nihayet genel çözüm,

$$y(n) = c_1 3^n + c_2(-2)^n + n3^{n-1}.$$

Örnek 2.34:

$$y(n+2) + 4y(n) = 8(2)^n \cos(\frac{n\pi}{2}) \tag{2.4.12}$$

fark denklemini çözelim.

Çözüm: Homojen denklemin karakteristik denklemi,

$$\lambda^2 + 4 = 0 .$$

Dolayısıyla karakteristik kökler, $\lambda_1 = 2i,\ \lambda_2 = -2i$. Yani, $r = 2,\ \theta = \pi/2$ dir. Buradan tamamlayıcı çözüm

$$y_c(n) = 2^n\left(c_1\cos(\frac{n\pi}{2}) + c_2\sin(\frac{n\pi}{2})\right).$$

$g(n) = 2^n\cos(\frac{n\pi}{2})$ tamamlayıcı çözüm denkleminde göründüğünden özel çözüm

$$y_p(n) = 2^n\left(an\cos(\frac{n\pi}{2}) + bn\sin(\frac{n\pi}{2})\right)$$

biçimindedir. Bu orijinal denklemde yerine yazılırsa, $a = -1,\ b = 0$ bulunur. Yani

$$y_p(n) = -2^{n+1} n\cos(\frac{n\pi}{2})$$

şeklindedir. Nihayet genel çözüm

$$y(n) = 2^n\left(c_1\cos(\frac{n\pi}{2}) + c_2\sin(\frac{n\pi}{2}) - n\cos(\frac{n\pi}{2})\right).$$

2.4.1 Parametrelerin (sabitlerin) değişim metodu

$$y(n+2) + p_1(n)y(n+1) + p_2(n)y(n) = g(n) \tag{2.4.13}$$

ikinci dereceden homojen olmayan fark denklemine karşılık gelen homojen fark denklemi

$$y(n+2)+p_1(n)y(n+1)+p_2(n)y(n)=0\,. \tag{2.4.14}$$

Homojen olmayan denklemin özel çözümünü bulmak için parametrelerin değişim metodu yaygın olarak kullanılır. Bu metodla, (2.4.13) denkleminin özel çözümü,

$$y(n)=u_1(n)y_1(n)+u_2(n)y_2(n) \tag{2.4.15}$$

formatında yazılabilir. Burada $y_1(n)$ ve $y_2(n)$ homojen denklemin iki lineer bağımsız çözümüdür. $u_1(n)$ ve $u_2(n)$ belirlenmesi gereken dizilerdir. Buradan,

$$\begin{aligned} y(n+1)&=u_1(n)y_1(n+1)+u_2(n)y_2(n+1)\\ &\quad+\Delta u_1(n)y_1(n+1)+\Delta u_2(n)y_2(n+1) \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Bu metodla

$$\Delta u_1(n)y_1(n+1)+\Delta u_2(n)y_2(n+1)=0 \tag{2.4.17}$$

denklemi elde edilir. (2.4.16) ve (2.4.17) yardımıyla

$$\begin{aligned} y(n+2)&=u_1(n)y_1(n+2)+u_2(n)y_2(n+2)\\ &\quad+\Delta u_1(n)y_1(n+2)+\Delta u_2(n)y_2(n+2) \end{aligned}$$

bulunur. Bu $y(n)$, $y(n+1)$ ve $y(n+2)$ değerleri denkleminde yerine yazılırsa,

$$\Delta u_1(n)y_1(n+2)+\Delta u_2(n)y_2(n+2)=g(n) \tag{2.4.18}$$

elde edilebilir. (2.4.17) ve (2.4.18) denkleminden faydalanarak

$$\Delta u_1(n)=\frac{-g(n)y_2(n+1)}{C(n+1)} \text{ ve } u_1(n)=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{-g(r)y_2(r+1)}{C(r+1)}y_1(n) \tag{2.4.19}$$

$$\Delta u_2(n)=\frac{-g(n)y_1(n+1)}{C(n+1)} \text{ ve } u_2(n)=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{-g(r)y_1(r+1)}{C(r+1)}y_2(n) \tag{2.4.20}$$

elde edilir. Burada $C(n)$, $y_1(n)$ ve $y_2(n)$ in Casoratian'ıdır.

2.5 Çözümlerin Limitsel Davranışı (Çözümlerin Limit Analizi)

$$y(n+2)+p_1y(n+1)+p_2y(n)=0 \tag{2.5.1}$$

homojen denklemin karakteristik kökleri λ_1 ve λ_2 olsun. Bu halde üç durumla karşılaşılabilir.

(i) λ_1 ve λ_2 farklı iki reel sayı olsun. Bu halde $y_1(n)=\lambda_1^n$ ve $y_2(n)=\lambda_2^n$, (2.5.1) denkleminin iki lineer bağımsız çözümü olur. Eğer $|\lambda_1|>|\lambda_2|$ ise bu halde $y_1(n)$ ye dominant (baskın) çözüm, λ_1 e ise dominant (baskın) karakteristik kök denir. Aksi halde $y_2(n)$ ye dominant çözüm, λ_2 ye ise dominant karakteristik kök denir. Dominant çözüm, genel çözümün limitini belirler. Genelliği bozmaksızın $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ olsun.

$$\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1, \ \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \to 0$$

den dolayı $n \to \infty$ için

$$y(n) = \lambda_1^n \left[a_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n \right]$$

elde edilir. Nihayet $n \to \infty$ için

$$y(n) = \lim_{n\to\infty} a_1 \lambda_1^n \ .$$

Şimdi, λ nın değerine bağlı olarak aşağıdaki durumlar söz konusu olabilir.

(1) $\lambda_1 > 1$ ise $\{a_1\lambda_1^n\}$ dizisi sonsuza gider. Dolayısıyla sistem kararsızdır.

(2) $\lambda_1 = 1$ ise $\{a_1\lambda_1^n\}$ dizisi sabit bir dizidir.

(3) $0 \le \lambda_1 < 1$ ise $\{a_1\lambda_1^n\}$ dizisi monotonik olarak sıfıra yakınsar. Bu durumda sistem stabildir.

(4) $-1 < \lambda_1 \le 0$ ise $\{a_1\lambda_1^n\}$ dizisi sıfırın etrafında salınım yapar ve sıfıra yakınsar. Bu durumda sistem stabildir.

(5) $\lambda_1 = -1$ ise $\{a_1\lambda_1^n\}$ dizisi değerleri a_1 ve -a_1 arasında salınım yapar.

(6) $\lambda_1 < -1$ ise $\{a_1\lambda_1^n\}$ dizisi salınır fakat mutlak değerce artan olup sistem stabil değildir.

(ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ise bu taktirde genel çözüm, $y(n) = (a_1 + a_2 n)\lambda^n$ olur. Eğer $|\lambda_1| > 1$ ise $y(n)$ çözümü $\lambda \ge 1$ ise ya monotonik olarak ıraksak ya da $\lambda \le -1$ ise salınımlı olarak ıraksaktır. Eğer $|\lambda| < 1$ ise çözüm, $\lim_{n\to\infty} n\lambda^n = 0$ olduğundan sıfıra yakınsar.

(iii) Kökler kompleks olsun. $\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta$ olsun. Burada $\beta \ne 0$ dır. (2.5.1) denkleminin çözümünün $y(n) = ar^n \cos(n\theta - w)$ olduğu önceden bilinmektedir. Burada $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. sin ve cos salınımlı olduğundan çözüm salınım yapar. Bu salınım eşlenik köklerin lokasyonuna bağlı olarak üç farklı şekilde karşılaşılabilir.

(1) $r > 1$ ve $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ ise, yani kökler birim çemberin dışında olup çözüm salınımlıdır. Fakat büyüklüğüne göre artan olup sistem stabil değildir.

(2) $r = 1$ ve $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ olsun. Bu durumda kökler birim çember üzerindedir. Bu durumda $y(n)$ salınımlıdır fakat büyüklük olarak (mutlak değerce) sabittir.

(3) $r < 1$ ve $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ ise bu durumda kökler birim çemberin içindedir. $y(n)$ çözümü salınımlıdır. Fakat $n \to \infty$ için sıfıra yakınsar. Dolayısıyla sistem stabildir.

Teorem 2.35:

(i) (2.5.1) denkleminin tüm çözümlerinin sıfırın etrafında salınım yapabilmesi için gerek ve yeter şart denklemin pozitif reel karakteristik köke sahip olmamasıdır.

(ii) (2.5.1) denkleminin tüm çözümlerinin sıfıra yakınsaması için gerek ve yeter şart $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ olmasıdır. (Sıfır çözüm asimptotik olarak stabildir.)

Şimdi de

$$y(n+2) + p_1 y(n+1) + p_2 y(n) = M \tag{2.5.2}$$

denklemini ele alalım. Burada M girdisi sıfırdan farklı sabittir veya kuvvet terimidir. (2.5.1) denkleminden farklı olarak tüm $n \in \mathbb{Z}^+$ için $y(n) = 0$ dizisi (2.5.2) denkleminin çözümü değildir. $y(n) = y^*$ çözümü veya denge noktası söz konusudur. (2.5.2) denkleminden

$$y^* + p_1 y^* + p_2 y^* = M$$

veya

$$y^* = \frac{M}{1 + p_1 + p_2} \tag{2.5.3}$$

elde edilir. Sonuç olarak $y_p(n) = y^*$, (2.5.2) denkleminin bir özel çözümüdür. Bu halde genel çözüm

$$y(n) = y^* + y_c(n) \tag{2.5.4}$$

$y(n) = y^*$ olması için gerek ve yeter şart $n \to \infty$ için $y_c(n) \to 0$. $y(n)$ nin y^* civarında salınım yapabilmesi için gerek ve yeter şart $y_c(n)$ nin de sıfırın etrafında salınım yapmasıdır. Bu sonucu da aşağıdaki teorem ile ifade edelim.

Teorem 2.36: (2.5.2) homojen olmayan denklemin tüm çözümlerinin y^* civarında salınım yapabilmesi için gerek ve yeter şart homojen denklemi sağlayan karakteristik köklerin tümünün pozitif reel sayıya sahip olmamasıdır. (2.5.2) denkleminin tüm çözümleri $n \to \infty$ için y^* a yakınsamaması için gerek ve yeter şart $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ olmasıdır. Burada λ_1 ve λ_2, (2.5.1) homojen denkleminin karakteristik kökleridir.

2.35. ve 2.36. teoremleri ikinci mertebeden bir fark denkleminin asimptotik stabiliteye sahip olabilmesi için gerekli ve yeterli şartları verir. p_1 ve p_2 katsayılarına bağlı olarak stabilite ile ilgili tam bir kriteri aşağıdaki teoremle verelim.

Teorem 2.37:

$$1 + p_1 + p_2 > 0,\; 1 - p_1 + p_2 > 0,\; 1 - p_2 > 0 \qquad (2.5.5)$$

şartları (2.5.1) ve (2.5.2) denklemlerinin denge noktasının asimptotik olarak stabil olması için gerek ve yeter şarttır. (Tüm çözümler y^* a yakınsar.)

İspat: (2.5.1) veya (2.5.2) denkleminin denge noktası asimptotik olarak stabil olsun. 2.35. ve 2.36. teoremlerinden λ_1 ve λ_2, $\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0$ denkleminin kökleridir ve bu kökler birim çember içerisindedir. Yani $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ dir. Bu karakteristik denklemin kuadratikliğinden

$$\lambda_1 = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} \text{ ve } \lambda_2 = \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} \qquad (2.5.6)$$

elde edilir.

Durum 1:

λ_1 ve λ_2 reel kökler olsun. Yani $p_1^2 - 4p_2 \geq 0$ olsun. Bu halde (2.5.6) formülünden

$$-2 < -p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2$$

veya

$$-2 + p_1 < \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1 \qquad (2.5.7)$$

elde edilir. Buna benzer olarak

$$-2 + p_1 < -\sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1 \qquad (2.5.8)$$

elde edilir. $(2.5.7)$ ifadesi karelenirse $1+p_1+p_2>0$ elde edilir. Benzer olarak $(2.5.8)$ ifadesi karelenirse $1-p_1+p_2>0$ elde edilir.

Durum 2:

λ_1 ve λ_2 kompleks eşlenikler olsun. Yani $p_1^2-4p_2<0$ olsun.

$$\lambda_1=\frac{-p_1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{4p_2-p_1^2} \text{ ve } \lambda_2=\frac{-p_1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{4p_2-p_1^2}$$

$-1<\lambda_1<1$ ve $-1<\lambda_2<1$ olduğundan $\lambda_1.\lambda_2=p_2<1$ veya $1-p_2>0$.

Tersi için benzer ispat yapılır.

Örnek 2.38: Hangi şartlar altında,

$$y(n+2)+\alpha(1+\beta)y(n+1)+\alpha\beta y(n)=1\,,\ \alpha,\ \beta>0$$

denkleminin çözümleri,

(i) y^* denge noktasına yakınsar?

(ii) y^* etrafında salınım yapar?

Çözüm: Denge noktası $(2.5.3)$ yardımıyla

$$y^*=\frac{1}{1-\alpha},\ \alpha\neq 1.$$

(i) $(2.5.5)$ şartından

$$\alpha<1,\ 1+\alpha+2\alpha\beta>0,\ \alpha\beta<1.$$

α ve β nın her ikisi de pozitif olduğundan ikinci şartın hepsi pozitif olur.

(ii) Çözümlerin y^* civarında salınım yapabilmesi için ya λ_1 ve λ_2 köklerinin herikisi negatif ya da kompleks eşlenik olmasıdır. İlk durumda

$$\alpha^2(1+\beta)^2>4\alpha\beta \text{ veya } \alpha>\frac{4\beta}{(1+\beta)^2} \text{ ve}$$

$$\alpha(1+\beta)<0.$$

Bu ise imkânsızdır. Çünkü $\alpha>0, \beta>0$ dır. Yani eğer $\alpha>4\beta/(1+\beta)^2$ ise salınımlı çözümler yoktur. Eğer λ_1 ve λ_2 kompleks eşleniklerse,

$$\alpha^2(1+\beta)^2<4\alpha\beta \text{ veya } \alpha<\frac{4\beta}{(1+\beta)^2}.$$

Dolayısıyla, $\alpha>\dfrac{4\beta}{(1+\beta)^2}$ ise tüm çözümler salınımlıdır.

2.6 Nanlineer Denklemlerin Lineer Denklemlere Transformu

Genellikle nanlineer fark denklemlerinin çoğu, tam olarak çözülemez. Fakat nanlineer fark denklemlerinin birkaç tipi lineer denklemlere dönüştürülerek çözülebilir.

1. Tip

$$x(n+1)x(n)+p(n)x(n+1)+q(n)x(n)=0 \tag{2.6.1}$$

Ricati denklemine $z(n)=1/x(n)$ dönüşümü uygulanarak

$$q(n)z(n+1)+p(n)z(n)+1=0 \tag{2.6.2}$$

elde edilir.

$$y(n+1)y(n)+p(n)y(n+1)+q(n)y(n)=g(n) \tag{2.6.3}$$

homojen olmayan denkleminde $y(n)=\dfrac{z(n+1)}{z(n)}-p(n)$ dönüşümü ile

$$z(n+2)+(q(n)-p(n+1))z(n+1)-(g(n)+p(n)q(n))z(n)=0$$

bulunur.

Örnek 2.39: (Pielou Lojistik Denklemi) Bir nüfusun gelişimini modelize eden en popüler t değişkenine göre sürekli olan model Verhulst-Pearl denklemi olarak bilinen

$$x'(t)=x(t)\left[a-bx(t)\right],\ a,\ b>0\,. \tag{2.6.4}$$

Burada $x(t)$, t zamanında popülasyonun büyüklüğü, eğer kaynaklar sınırsız ve bireyler birbirine etki etmiyorsa a bir popülasyonun gelişiminin oranıdır.
$-bx^2(t)$ ise kaynakların sınırlılığından ve popülasyonun çokluğundan dolayı gelişim üzerindeki negatif etkiyi temsil eder. $(2.6.4)$ denkleminin çözümü

$$x(t)=\frac{a/b}{1+(e^{-at}/cb)}.$$

Buradan, $x(t+1)=\dfrac{a/b}{1+(e^{-a(t+1)}/cb)}=\dfrac{e^{a}(a/b)}{1+(e^{-at}/cb)+(e^{a}-1)}$.

Şimdi de $1+(e^{-at}/cb)$ ye bölünürse,

$$x(t+1)=e^{a}x(t)/\left[1+\frac{b}{a}(e^{a}-1)x(t)\right]$$

veya

$$x(n+1)=\alpha x(n)/\left[1+\beta x(n)\right] \tag{2.6.5}$$

elde edilir. Burada $\alpha = e^a$, $\beta = \frac{b}{a}(e^a - 1)$. Bu denklem Pielou Lojistik Denklemi olarak bilinir. Son denklem Ricati denklemidir. $x(n) = 1/z(n)$ dönüşümü yapılarak çözülebilir. Bu dönüşümlerden

$$z(n+1) = \frac{1}{\alpha} z(n) + \frac{\beta}{\alpha}$$

elde edilir. Çözümü

$$z(n) = \begin{cases} \left[c - \dfrac{\beta}{\alpha - 1} \right] \alpha^n + (\beta / \alpha - 1) & \text{eğer } \alpha \neq 1 \\ c - \beta n & \text{eğer } \alpha = 1 \end{cases}.$$

Sonuç olarak istenen $x(n)$ çözümü,

$$x(n) = \begin{cases} \alpha^n (\alpha - 1) / \left[\beta \alpha^n + c(\alpha - 1) - \beta \right] & \text{eğer } \alpha \neq 1 \\ \dfrac{1}{c - \beta n} & \text{eğer } \alpha = 1 \end{cases}$$

ile verilir ve bu çözüm de $n \to \infty$ için

$$\lim_{n \to \infty} x(n) = \begin{cases} (\alpha - 1) / \beta & \text{eğer } \alpha \neq 1 \\ 0 & \text{eğer } \alpha = 1 \end{cases}.$$

Bu sonuç itibariyle $(\alpha - 1)/\beta$ denge noktası $\alpha \neq 1$ için global olarak olarak asimptotik stabildir.

2. Tip

$$x(n+1) = \frac{a(n)x(n) + b(n)}{c(n)x(n) + d(n)} \tag{2.6.6}$$

denklemine genel Ricati denklemi denir. Burada tüm $n \geq 0$ için $c(n) \neq 0$ ve $a(n)d(n) - b(n)c(n) \neq 0$.

$$c(n)x(n) + d(n) = \frac{y(n+1)}{y(n)} \tag{2.6.7}$$

yardımıyla (2.6.6) denkleminde

$$x(n) = \frac{y(n+1)}{c(n)y(n)} - \frac{d(n)}{c(n)}$$

yazılarak,

$$\frac{y(n+2)}{c(n+1)y(n+1)}-\frac{d(n+1)}{c(n+1)}=\frac{a(n)\left[\dfrac{y(n+1)}{c(n)y(n)}-\dfrac{d(n)}{c(n)}\right]+b(n)}{\dfrac{y(n+1)}{y(n)}}$$

bulunur. Cebirsel işlemlerden sonra bu denklem

$$y(n+2)+p_1(n)y(n+1)+p_2(n)y(n)=0,\ y(0)=1,\ y(1)=c(0)x(0)+d(0) \tag{2.6.8}$$

denklemine indirgenir. Burada,

$$p_1(n)=-\frac{c(n)d(n+1)+a(n)c(n+1)}{c(n)},$$

$$p_2(n)=(a(n)d(n)-b(n)c(n))\frac{c(n+1)}{c(n)}.$$

Örnek 2.40:

$$x(n+1)=\frac{2x(n)+3}{3x(n)+2}$$

denklemini çözelim.

Çözüm: Burada $ad-bc\neq 0$ dır.

$$3x(n)+2=\frac{y(n+1)}{y(n)} \tag{2.6.9}$$

transformu yardımıyla (2.6.8) denklemindeki gibi

$$y(n+2)-4y(n+1)-5y(n)=0,\ y(0)=1,\ y(1)=3x(0)+2$$

homojen fark denklemi elde edilir. Karakteristik kökler λ_1=5 ve $\lambda_2=-1$. Bu sebeple çözüm,

$$y(n)=c_1 5^n+c_2(-1)^n. \tag{2.6.10}$$

(2.6.9) formülünden,

$$x(n)=\frac{1}{3}\frac{y(n+1)}{y(n)}-\frac{2}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{c_1 5^{n+1}+c_2(-1)^{n+1}}{c_1 5^n+c_2(-1)^n}-\frac{2}{3}$$

$$=\frac{5^n-c(-1)^n}{5^n+c(-1)^n}.$$

Burada, $c=\dfrac{c_1}{c_2}$.

3. Tip

$$f\left(\frac{x(n+1)}{x(n)},n\right)=0 \quad \text{tipinin analizi.}$$

Bu denklem $z(n)=\dfrac{x(n+1)}{x(n)}$ denilerek lineerleştirilir.

Örnek 2.41:

$$x^2(n+1)-3x(n+1)x(n)+2x^2(n)=0 \tag{2.6.11}$$

denklemini çözelim.

Çözüm: Denklemin her iki yanı $x^2(n)$ ile bölünürse,

$$\left[\frac{x(n+1)}{x(n)}\right]^2-3\left[\frac{x(n+1)}{x(n)}\right]+2=0 \tag{2.6.12}$$

elde edilir. Bu 2. Tip'tir. $z(n)=\dfrac{x(n+1)}{x(n)}$ ile

$$z^2-3z+2=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem çarpanlarına ayrılarak,

$$(z-2)(z-1)=0\,.$$

Buradan $z(n)=2$ veya $z(n)=1$. Bu ise $x(n+1)=2x(n)$ veya $x(n+1)=x(n)$. Sonuç olarak $x(0)$ başlangıç değeri atanırsa $x(n)=2^n x(0)$ veya $x(n)=x(0)$ olarak elde edilir.

4. Tip

$$(y(n+k))^{r_1}(y(n+k-1))^{r_2}\ldots(y(n))^{r_{k+1}}=g(n) \tag{2.6.13}$$

formülünü düşünelim. $z(n)=\ln y(n)$ dönüşümüyle,

$$r_1 z(n+k)+r_2 z(n+k-1)+\ldots+r_{k+1}z(n)=\ln g(n) \tag{2.6.14}$$

elde edilir.

Örnek 2.42:

$$x(n+2)=\frac{x^2(n+1)}{x^2(n)} \tag{2.6.15}$$

fark denklemini çözelim.

Çözüm: (2.6.15) fark denkleminde $z(n)=\ln x(n)$ olsun. Bu taktirde (2.6.12) denkleminde olduğu gibi

$$z(n+2)-2z(n+1)+2z(n)=0$$

elde edilir. Karakteristik kökleri $\lambda_1 = 1+i$ ve $\lambda_2 = 1-i$. Sonuç olarak,

$$z(n)=(2)^{\frac{n}{2}}\left[c_1\cos(\frac{n\pi}{4})+c_2\sin(\frac{n\pi}{4})\right].$$

Dolayısıyla,

$$x(n)=\exp\left[(2)^{\frac{n}{2}}\left\{c_1\cos(\frac{n\pi}{4})+c_2\sin(\frac{n\pi}{4})\right\}\right].$$

2.7 Uygulamaları

2.7.1 Ulusal gelir

Bir n periyodunda $y(n)$ ulusal gelir olsun. Ulusal gelir,

$$Y(n)=C(n)+I(n)+G(n) \tag{2.7.1}$$

ile verilir. Burada,

$C(n)$ = Tüketim mallarını satın almak için tüketicinin yaptığı harcama,

$I(n)$ = Ana ekipmanları satın almak için yapılan özel yatırımlar,

$G(n)$ = Devlet harcamaları.

Burada n yılları göstermektedir.

Ekonomistler tarafından yaygın olarak kabul edilen bazı varsayımları yapalım.

(a) $C(n)=\alpha Y(n-1)$ (2.7.2)

Burada α , marjinal tüketim eğilimi pozitiftir.

(b) $I(n)$ özel yatırımı $\left[C(n)-C(n-1)\right]$ tüketici artışı ile doğru orantılıdır. Yani,

$$I(n)=\beta\left[C(n)-C(n-1)\right]. \tag{2.7.3}$$

Burada β ilişkisi pozitiftir.

(c) Devletin yıllara göre harcaması sabit olsun. Bu nedenle,

$$G(n)=1 \tag{2.7.4}$$

olsun. $(2.7.2)$, $(2.7.3)$ ve $(2.7.4)$ denklemleri $(2.7.1)$ denkleminde kullanılırsa

$$Y(n+2)-\alpha(1+\beta)Y(n+1)+\alpha\beta Y(n)=1,\ n\in\mathbb{Z}^+ \tag{2.7.5}$$

ikinci mertebeden fark denklemi elde edilir.

Bu denklemin denge noktası daha önceden bilindiği gibi $Y^* = 1/(1-\alpha)$ dır. Bu ulusal gelirin Y^* denge noktasının asimptotik olarak kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$\alpha < 1,\ 1+\alpha+2\alpha\beta > 0 \text{ ve } \alpha\beta < 1 \tag{2.7.6}$$

şartlarının sağlanmasıdır. Üstelik $Y(n)$ ulusal gelirin Y^* denge noktası etrafında salınım yapabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\alpha < \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}. \tag{2.7.7}$$

Özel olarak $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$ ise $Y^* = 2$ dir. Yani Y^*, devlet harcamalarının iki katıdır. Bu halde (2.7.6) açıkça sağlanır. Dolayısıyla ulusal gelir $Y(n)$, Y^* denge noktası etrafında , $Y(0)$ ve $Y(1)$ başlangıç ulusal gelir değerlerine bakmaksızın salınım yapar. Gerçek çözüm ise

$$Y(n) = A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cos(\frac{n\pi}{4} - w) + 2$$

ile verilir.

2.7.2 Bilgi aktarımı

İşaret sisteminde, s_1 bir telgrafta noktaları, s_2 de çizgileri gösteren işaretler olsun. Mesajlar iki işaretin dizisi olarak şifrelenerek aktarılır. s_1 ve s_2 nin gerçekleşmesi için n_1 ve n_2 birim zamanına gereksinim olsun. n periyodu boyunca $M(n)$ olası mesajlar dizisinin sayısını göstersin. n zamanı boyunca sinyal ya s_1 sinyali ile ya da s_2 sinyali ile sonuçlanır. Eğer mesaj s_1 ile sonuçlanırsa son sinyal $n-n_1$ de başlamalı. Çünkü s_1 için n_1 birim zaman gerekir. Bu halde en son s_1 sinyalinin eklenmesi için $M(n-n_1)$ tane olası mesaj mümkündür. s_1 sinyaliyle n zamanında $M(n-n_2)$ mesaj vardır. Benzer bir tartışmayla n zamanında s_2 ile sonuçlanan $M(n-n_1)$ mesaj olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak n zamanında toplam mesajların sayısı,

$$M(n) = M(n-n_1) + M(n-n_2)$$

ile verilir. Eğer $n_1 \geq n_2$ ise yukarıdaki denklem n_1 inci mertebeden

$$M(n+n_1) - M(n+n_1-n_2) - M(n) = 0 \tag{2.7.8}$$

formatında yazılır. Diğer taraftan eğer $n_1 \leq n_2$ ise n_2 inci mertebeden

$$M(n+n_2) - M(n+n_2-n_1) - M(n) = 0 \tag{2.7.9}$$

denklemi elde edilir. Özel olarak $n_1 = 1$ ve $n_2 = 2$ ise,

$$M(n+2) - M(n+1) - M(n) = 0$$

veya

$$M(n+2) = M(n+1) + M(n)$$

bulunur. Bu ise Fibonacci dizisinin ta kendisidir. Bu denklemin çözümünün

$$M(n) = a_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \; n = 0,1,2,... \tag{2.7.10}$$

olduğu önceden bilinmektedir. a_1 ve a_2 değerlerini bulmak için M_1 ve M_2 değerlerinin bilinmesi gerekir. $M(0) = 0$ ve $M(1) = 1$ altında (2.7.10) denklemiyle beraber,

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ ve } a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Böylece çözüm,

$$M(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{2.7.11}$$

olur. Bilgi teorisinde bir kanalın C kapasitesi,

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 M(n)}{n} \tag{2.7.12}$$

ile verilir. (2.7.11) denkleminden,

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 \frac{1}{\sqrt{5}}}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log_2\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{2.7.13}$$

bulunur. $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \approx 0.6 < 1$ olduğundan $n \to \infty$ için $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \to 0$, ilk terimin sıfıra gittiğini görmek kolaydır. Böylece

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{2.7.14}$$

elde edilir.

$$C = \log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 0.7 .$$

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Fark Denklemlerinde Sistemler

Bu kısımda iki veya daha fazla bağımlı değişkene sahip birinci mertebeden fark denklemleri çalışılacaktır. Bu denklemler doğal olarak bilimsel gayret gerektiren değişik alanlarda kullanılır. Bu kullanım alanlarından bir kaçı;
biyoloji (popülasyon dinamiğinde birbirleriyle kompetitif olan türlerin çalışması), fizik (birbirine etki eden iki kütlenin çalışması), kontrol sistemleri, nöroloji ve elektriktir. Yüksek mertebeli fark denklemleri birinci mertebeden bir sistem dönüştürülerek çalışılır. Bu transformasyon sınır-değer problemlerinde ve salınım gerçeğinde az bir pratik arz etse de stabilite teorisi çalışılırken oldukça faydalıdır.

Bu kısımda,

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \ldots + a_{1k}x_k(n) \\ x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \ldots + a_{2k}x_k(n) \\ &\vdots \\ x_k(n+1) &= a_{k1}x_1(n) + a_{k2}x_2(n) + \ldots + a_{kk}x_k(n) \end{aligned}$$

sistemi veya bu sistemin vektörel formu olan

$$x(n+1) = Ax(n) \tag{3.1.1}$$

denkleminin çözümleriyle ilgileneceğiz. Burada $x(n) = (x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n))^T \in \mathbb{R}^k$ ve $A = (a_{ij})$ satır sayısı k, sütun sayısı k olan, elemanları reel singüler olmayan bir matristir. A nın tüm değerleri sabit olduğundan $(3.1.1)$ sistemine otonom veya zaman değişmezdir denir. Nanotonom (zaman değişmeli) sistemler sonradan çalışılacaktır.

Eğer bazı $n_0 \geq 0$ için $x(n_0) = x_0$ belirlenirse $(3.1.1)$ sistemine başlangıç değer problemi denir. Üstelik basit bir iterasyonla (denklemde direkt yerine koymayla) çözümün

$$x(n, n_0, x_0) = A^{n-n_0}x_0 \tag{3.1.2}$$

şeklinde olduğu gösterilebilir. Burada $A^0 = I$. Yine $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$ dır. Eğer $n_0 = 0$ ise $(3.1.2)$ denklemindeki çözüm $x(n, n_0)$ veya basitçe $x(n)$ şeklinde yazılabilir. Genelliği bozmaksızın $n_0 = 0$ olsun. Ve $y(n - n_0) = x(n)$ olsun. Bu halde $(3.1.1)$ denklemi

$$y(n+1) = Ay(n). \tag{3.1.3}$$

Bu $y(0) = x(n_0)$ ile,

$$y(n) = A^n y(0). \tag{3.1.4}$$

3.1.1 Putzer algoritmasının diskrit şekli

Diferansiyel denklemlerde e^{At} nin hesaplanmasında Putzer Algoritması kullanıldı. Burada A^n yi hesaplamak için benzer bir algoritma verilecektir. İlk olarak bu algoritmanın gelişiminde öneme sahip olan matris teorisinin bazı özelliklerini gözden geçirelim. A, $k \times k$ tipinde reel matris olsun.

$Ax = \lambda x,\ x \neq 0 \in C^k$ ise λ ya eigen değer, x e ise eigen vektör denir. Burada C kompleks sayıların kümesini temsil eder. Bu tanıma denk olarak

$$(A - \lambda I)x = 0. \tag{3.1.5}$$

$(3.1.5)$ denkleminin sıfırdan farklı x çözümüne sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart $\det(A - \lambda I) = 0$ veya bunun eşiti

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \ldots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0. \tag{3.1.6}$$

$(3.1.6)$ denklemine A matrisinin karakteristik denklemi denir. Köklerine ise A nın eigen değerleri denir. Bu eigen değerlerin bazıları veya tümü birbirine eşit olabilir. Bu halde $(3.1.6)$ denklemi

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j) = 0 \tag{3.1.7}$$

olarak yazılır. Matris teorisinin temel sonuçlarından biri olan Cayley-Hamilton teoremini ifade edelim.

Teorem 3.1: Her matris kendi karakteristik denklemini sağlar. Yani

$$p(A) = \prod_{j=1}^{k} (A - \lambda_j I) = 0 \tag{3.1.8}$$

veya bunun eşiti olan

$$A^k + a_1 A^{k-1} + a_2 A^{k-2} + \ldots + a_k I = 0 \qquad (3.1.8)'$$

yazılır.

3.1.2 A^n için algoritmanın gelişimi

A yukarıdaki gibi olsun. A^n için bir reprizantasyon,

$$A^n = \sum_{j=1}^{s} u_j(n) M(j-1) \qquad (3.1.9)$$

biçiminde olsun. Burada $u_j(n)$ sonradan belirlenmesi gereken skaler fonksiyonlardır.

$$M(j) = (A - \lambda_j I) M(j-1),\ M(0) = I\,, \qquad (3.1.10)$$

$$M(j+1) = (A - \lambda_{j+1} I) M(j),\ M(0) = I\,.$$

İterasyonla,

$$M(n) = (A - \lambda_n I)(A - \lambda_{n-1} I) \ldots (A - \lambda_1 I)$$

veya kompakt formatı olan,

$$M(n) = \prod_{j=1}^{n} (A - \lambda_j I)\,. \qquad (3.1.11)$$

olduğu gösterilebilir. Cayley-Hamilton Teoremi'nden dolayı,

$$M(k) = \prod_{j=1}^{n} (A - \lambda_j I) = 0\,.$$

Sonuç olarak tüm $n \geq k$ için $M(n) = 0$ dır. Bu gözlem doğrultusunda (3.1.9) formülü

$$A^n = \sum_{j=1}^{k} u_j(n) M(j-1) \qquad (3.1.12)$$

formatında yeniden yazılabilir. Eğer (3.1.12) denkleminde $n = 0$ ise,

$$A^0 = I = u_1(0) I + u_2(0) M(1) + \ldots + u_k(0) M(k-1) \qquad (3.1.13)$$

elde edilir.

$$u_1(0) = 1 \text{ ve } u_2(0) = u_3(0) = \ldots = u_k(0) = 0 \qquad (3.1.14)$$

doğru ise (3.1.13) sağlanır. (3.1.12) denkleminden

$$\sum_{j=1}^{k} u_j(n+1) M(j-1) = A A^n$$

$$= A \left[\sum_{j=1}^{k} u_j(n) M(j-1) \right]$$

$$=\sum_{j=1}^{k} u_j(n) AM(j-1)$$

elde edilir. (3.1.10) denkleminde $AM(j-1)$ yerine yazılırsa,

$$\sum_{j=1}^{k} u_j(n+1) M(j-1) = \sum_{j=1}^{k} u_j(n) \left[M(j) + \lambda_j M(j-1) \right] \qquad (3.1.15)$$

elde edilir. (3.1.15) denkleminde $1 \le j \le k$ için, $M(j)$ nin katsayıları karşılaştırılır ve (3.1.14) şartı kullanılırsa,

$$u_1(n+1) = \lambda_1 u_1(n), \; u_1(0) = 1$$

$$u_j(n+1) = \lambda_j u_j(n) + u_{j-1}(n), \; u_j(0) = 0, \; j = 2,3,...,k \qquad (3.1.16)$$

bulunur. (3.1.16) denklemlerinin çözümleri

$$u_1(n) = \lambda_1^n, \; u_j(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_1^{n-1-i} u_{j-1}(i) \qquad (3.1.17)$$

de verilir. (3.1.11) ve (3.1.17) denklemleri beraber A^n nin hesaplanması için bir algoritma teşkil eder. Bu algoritmaya Putzer Algoritması denir.

Örnek 3.2:

$$x(n+1) = Ax(n)$$

fark sisteminin çözümünü bulalım. Burada,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

A nın eigen değerleri $\det(A-\lambda I) = 0$ dan bulunur.

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (4-\lambda)(\lambda-4)^2 = 0 .$$

Dolayısıyla eigen değerler $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4$. Böylece,

$$M(0) = I, M(1) = A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M(2) = (A-4I)M(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Şimdi,

$$u_1(n) = 4^n,$$

$$u_2(n) = \sum_{i=0}^{n-1} (4^{n-1-i})(4^i) = n(4^{n-1}),$$

$$u_3(n) = \sum_{i=0}^{n-1} (4^{n-1-i})(i4^{i-1}) = 4^{n-2}\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}4^{n-2}.$$

(3.1.12) denklemi kullanılırsa,

$$A^n = 4^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n4^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}4^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4^n & n4^{n-1} & 2n4^{n-1} \\ 0 & 4^n - 2n4^{n-1} & -n4^n \\ 0 & n4^{n-1} & 4^n + 2n4^{n-1} \end{pmatrix}$$

bulunur. Sonuç olarak fark denkleminin çözümü

$$x(n) = A^n x(0) = \begin{pmatrix} 4^n x_1(0) + n4^{n-1}x_2(0) + 2n4^{n-1}x_3(0) \\ (4^n - 2n4^{n-1})x_2(0) - n4^n x_3(0) \\ n4^{n-1}x_2(0) + (4^n + 2n4^{n-1})x_3(0) \end{pmatrix}$$

ile verilir. Burada $x(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0))^T$.

3.2 Temel Teori

$$x(n+1) = A(n)x(n) \tag{3.2.1}$$

sistemini ele alalım. Burada, $A(n) = (a_{ij}(n))$ bir önceki kısımda ifade edilen A matrisi ile aynıdır. Bu homojen sistem nanotonomdur (zaman değişmeli). Buna karşılık gelen nanhomojen sistem ise,

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n). \tag{3.2.2}$$

Burada $g(n) \in \mathbb{R}^k$ dır.

(3.2.1) denkleminin çözümlerinin varlık ve teklik şartlarını tesis edelim.

Teorem 3.3: $\forall x_0 \in \mathbb{R}^k$ ve $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ için (3.2.1) denkleminin $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$ ile $x(n, n_0, x_0)$ tek çözümü vardır.

İspat: (3.2.1) denkleminden,

$$x(n_0+1,n_0,x_0)=A(n_0)x(n_0)=A(n_0)x_0 .$$

$$x(n_0+2,n_0,x_0)=A(n_0+1)x(n_0+1)=A(n_0+1)A(n_0)x_0 .$$

Tümevarımla,

$$x(n,n_0,x_0)=\left[\prod_{i=n_0}^{n-1}A(i)\right]x_0 \tag{3.2.3}$$

gösterilebilir. Burada,

$$\prod_{i=n_0}^{n-1}A(i)=\begin{Bmatrix} A(n-1)A(n-2)...A(n_0) & n>n_0 \text{ ise} \\ I & n=n_0 \text{ ise}\end{Bmatrix}.$$

(3.2.3) formülü arzu edilen şartları sağlayan tek çözümdür.

Tanım 3.4: $x_1(n),x_2(n),...,x_k(0)$ $n\geq n_0\geq 0$ için lineer bağımsızdır. Eğer tüm $n\geq n_0$ için $c_1x_1(n)+c_2x_2(n)+...+c_kx_k(n)=0$ ise $1\leq i\leq k$ için c_i ler sıfırdır. $\Phi(n)$, $k\times k$ boyutunda sütunları (3.2.1) denkleminin çözümleri olsun.

$$\Phi(n)=\left[x_1(n),x_2(n),...,x_k(n),\right]$$

$$\Phi(n+1)=\left[A(n)x_1(n),A(n)x_2(n),...,A(n)x_k(n),\right]$$

$$=A(n)\left[x_1(n),x_2(n),...,x_k(n),\right]$$

$$=A(n)\Phi(n).$$

Bu nedenle,

$$\Phi(n+1)=A(n)\Phi(n) \tag{3.2.4}$$

matris yapısındaki fark denklemini sağlar. Üstelik $x_1(n),x_2(n),...,x_k(0)$ çözümlerinin tüm $n\geq n_0$ için lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart $\Phi(n)$ nin nansingüler olmasıdır. Yani, tüm $n\geq n_0$ için $\det\Phi(n)\neq 0$.

Tanım 3.5: Eğer $\Phi(n)$ tüm $n\geq n_0$ için singüler olmayan bir matris ve (3.2.4) denkleminin sağlıyorsa $\Phi(n)$ ye (3.2.1) denklem sistemi için fundamental matris denir. Eğer $\Phi(n)$ fundamental matris ve C singüler olmayan bir matris ise $\Phi(n)C$ de bir fundamental matristir. Netice itibariyle verilen sistem için sonsuz sayıda fundamental matrisler vardır. Buna rağmen şimdiye kadar bildiğimiz bir tek fundamental matris vardır ve

$$\Phi(n)=\prod_{i=n_0}^{n-1}A(i),\ \Phi(n_0)=I .$$

Otonom durumda A sabit matris ise $\phi(n) = A^{n-n_0}$ ve $n_0 = 0,\ \phi(n) = A^n$. Sonuç olarak otonom sistemlerde fundamental matrisi hesaplamak için Putzer Algoritması'nı kullanmak daha uygun olur.

Teorem 3.6:

$$\Psi(n+1) = A(n)\Psi(n),\ \Psi(n_0) = I$$

sistemi tek çözüme sahiptir.

İspat: (3.2.4) matrisel fark denklemini birinci mertebeden k^2 fark denklemlerinin bir sistemi olarak düşünülebilir. Bu noktayı tamamlamak için Teorem 3.3'e varlık ve tekliği uygulayarak k^2 vektör çözümü elde edilebilir. Öyle ki $v(n_0) = (1,0,...,1,0,...)^T$. Burada birinci, $(k+1)$ inci ve $(2k+2)$ inci terimlerde 1, diğer adımlarda sıfırdır.

Böylece v vektörü $k \times k$ boyutlu $\Psi(n)$ matrisine dönüştürülür. Burada açıkça $\Psi(n_0) = I$ dır. Herhangi bir $\Phi(n)$ fundamental matrisi ile başlanırsa $\Phi(n)\Phi^{-1}(n_0)$ yukarıda arzu edilen matris tipidir. Bu özel matris $\Phi(n)\Phi^{-1}(n_0)$ ile gösterilir. Bu matris "state transition" (konum değiştirme) matrisi olarak bilinir. $n \geq m$ iki pozitif tamsayı olsun. Bu halde $\Phi(n,m) = \Phi(n)\Phi^{-1}(m)$ yazılabilir. $\Phi(n,m)$ fundamental matrisi bazı önemli özelliklere sahiptir. Özellikle bu matris $\Phi(n+1,m) = A(n)\Phi(n,m)$ fark denkleminin bir çözümüdür.

(i) $\Phi^{-1}(n,m) = \Phi(m,n)$

(ii) $\Phi(n,m) = \Phi(n,r)\Phi(r,m)$

(iii) $\Phi(n,m) = \prod_{i=m}^{n-1} A(i)$ olduklarını görmek kolaydır.

Sonuç 3.7: $x(n,n_0,x_0) = x_0$ olmak şartıyla (3.2.1) denkleminin $x(n,n_0,x_0)$ çözümü

$$x(n,n_0,x_0) = \phi(n,n_0)x_0 \tag{3.2.5}$$

ile verilir.

Lemma 3.8: (Abel formülü) $n \geq n_0 \geq 0$ için,

$$\det\Phi(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1}\left[\det A(i)\right]\right)\det\Phi(n_0). \tag{3.2.6}$$

İspat: (3.2.4) denkleminin her iki tarafının determinantı alınırsa

$$\det \Phi(n+1) = \det A(n) \det \Phi(n)$$

skaler fark denklemi elde edilir. Bunun çözümü ise $(3.2.6)$ ile verilir.

Sonuç 3.9: Eğer $(3.2.1)$ denkleminde A sabit bir matris ise,

$$\det \Phi(n) = \left[\det A\right]^n \det \Phi(n_0) \tag{3.2.7}$$

İspat: İspat $(3.2.5)$ formülünün sonucudur.

Sonuç 3.10: Tüm $n \geq n_0$ için $\Phi(n)$ fundamental matrisin nansingüler olabilmesi için gerek ve yeter şart $\Phi\left(n_0\right)$ ın nansingüler olmasıdır.

İspat: (3.2.6) formülünden, $\det A(i) \neq 0$ olması ile elde edilir. Burada $i \geq n_0$ dır.

Sonuç 3.11: $x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)$, (3.2.1) denkleminin $n \geq n_0$ için lineer bağımsız çözümleri olması için gerek ve yeter şart $\Phi\left(n_0\right)$ ın nansingüler olmasıdır.

İspat: Sonuç 3.10'dan hemen elde edilir.

Teorem 3.12: $n \geq n_0$ için (3.2.1) sisteminin *k* tane lineer bağımsız çözümü vardır.

İspat: Her $i = 1, 2, ..., k$ için $e_i = \left(0, 0, ..., 0, 1, ..., 0\right)^T$ $\mathbb{R}^k$ nın standart birim vektörü olsun. Teorem 3.3'ten dolayı her e_i, $1 \leq i \leq k$, için (3.2.1) denkleminin $x(n_0, n_0, e_i) = e_i$ olacak şekilde $x(n, n_0, e_i)$ çözümü vardır. $\left\{x(n, n_0, e_i) \middle| 1 \leq i \leq k\right\}$ kümesinin lineer bağımsızlığı Sonuç 3.8 ile belirlenir. Dolayısıyla $\Phi\left(n_0\right)$ ın nansingüler olduğunu göstermek yeterlidir. Bu durum $\Phi\left(n_0\right) = I$ olduğundan ispat tamamlanır.

Sonuç 3.13: (3.2.1) denkleminin tüm çözümlerinin *S* kümesi, boyutu *k* olan lineer bir uzaydır.

Not: Sonuç 3.13'ün temel noktalarından bir tanesi eğer, $x_1(n), x_2(n), ..., x_r(n)$ (3.2.1) denkeminin çözümleri ise $x(n) = \sum_{i=1}^{r} c_i x_i(n)$ de aynı zamanda bir çözümdür. Bu gerçek, (3.2.1) denkleminin genel çözümüne götürür.

Tanım 3.14: $\left\{x_i(n) \middle| 1 \leq i \leq k\right\}$ kümesi (3.2.1) denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin kümesi olsun. Bu taktirde (3.2.1) denkleminin genel çözümü

$$x(n) = \sum_{i=1}^{r} c_i x_i(n). \tag{3.2.8}$$

Burada $c_i \in \mathbb{R}$ ve en az bir $c_i \neq 0$. (3.2.8) formülü,

$$x(n) = \Phi(n)c, \tag{3.2.9}$$

formatında yazılabilir. Burada $\Phi(n) = (x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n))$ fundamental matris ve $c = (c_1, c_2, ..., c_k)^T \in \mathbb{R}^k$.

Aşağıdaki teorem, 3.2.2 sisteminin genel çözümünü verir.

Teorem 3.15: (3.2.2) denkleminin herhangi bir $y(n)$ çözümü uygun bir c vektörü seçimiyle,

$$y(n) = \Phi(n)c + y_p(n) \tag{3.2.10}$$

Lemma 3.16: (3.2.2) denkleminin özel çözümü,

$$y_p(n) = \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1) g(r),$$

burada $y_p(n_0) = 0$.

İspat:

$$\begin{aligned} y_p(n+1) &= \sum_{r=n_0}^{n} \Phi(n+1, r+1) g(r) \\ &= \sum_{r=n_0}^{n-1} A(n)\Phi(n, r+1) g(r) + \Phi(n+1, n+1) g(n) \\ &= A(n) y(n) + g(n). \end{aligned}$$

Dolayısıyla $y_p(n)$, (3.2.2) denkleminin bir çözümüdür. Üstelik $y_p(n_0) = 0$.

Teorem 3.17: (Parametrelerin Değişim Metodu)

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n), \; y(n_0) = y_0 \tag{3.2.11}$$

başlangıç değer probleminin tek çözümü,

$$y(n, n_0, y_0) = \Phi(n, n_0) y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1) g(r) \tag{3.2.12}$$

veya daha açık bir ifadeyle,

$$y(n, n_0, y_0) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right) y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} A(i) \right) g(r) \tag{3.2.12$'$}$$

İspat: Teoremin ispatı, Teorem (3.15) ve Lemma (3.16)'dan elde edilir.

Sonuç 3.18: A sabit bir matris olsun. (3.2.11) denkleminin otonom sistemler için çözümü,

$$y(n,n_0,y_0) = A^{n-n_0}y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} A^{n-r-1}g(r). \tag{3.2.13}$$

Örnek 3.19: $y(n+1) = Ay(n) + g(n)$ sistemini çözelim. Burada,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ g(n) = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix},\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Çözüm: Putzer algoritması ile

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Dolayısıyla,

$$y(n) = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{r=0}^{n-1}\begin{pmatrix} 2^{n-r-1} & (n-r-1)2^{n-r-2} \\ 0 & 2^{n-r-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{r=0}^{n-1}\begin{pmatrix} 2^{n-r-1} & (n-r-1)2^{n-r-2} \\ 0 & 2^{n-r-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + 2^n\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sum_{r=1}^{n-1} r\left(\frac{1}{2}\right)^r + \frac{n-1}{4}\sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^r \\ \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^r \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + 2^n\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \\ +\frac{n-1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n + n2^{n-1} - \frac{3}{4}n \\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + ... + p_k(n)y(n) = g(n) \tag{3.2.14}$$

k inci mertebeden fark denkleminin birinci mertebeden bir sisteme nasıl dönüştürüldüğünü ele alalım.

$$z_1(n) = y(n)$$

$$z_2(n) = y(n+1) = z_1(n+1)$$

$$z_3(n) = y(n+2) = z_2(n+1)$$
$$\vdots$$
$$z_k(n) = y(n+k-1) = z_{k-1}(n+1)\,.$$

Burada $z(n) = (z_1(n), z_2(n), ..., z_k(n))$.

Dolayısıyla,

$$z_1(n+1) = z_2(n)$$
$$z_2(n+1) = z_3(n)$$
$$\vdots$$
$$z_{k-1}(n+1) = z_k(n)$$
$$z_k(n+1) = -p_k(n)z_1(n) - p_{k-1}(n)z_2(n) - ... - p_1(n)z_k(n) + g(n)\,.$$

Bu sistemin vektör notasyonu karşılığı,

$$z(n+1) = A(n)z(n) + h(n)\,. \tag{3.2.15}$$

Burada,

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -p_k(n) & -p_{k-1}(n) & -p_{k-2}(n) & \cdots & -p_1(n) \end{pmatrix}. \tag{3.2.16}$$

$$h(n) = (0, 0, 0, ..., g(n))^T\,.$$

Özel olarak $g(n) = 0$ ise,

$$z(n+1) = A(n)z(n) \tag{3.2.17}$$

homojen sistemi elde edilir. Burada $A(n)$ matrisine (3.2.14) denkleminin "Companion Matrisi" denir.

$$x(n+k) + p_1x(n+k-1) + p_2x(n+k-2) + ... + p_k(n)x(n) = 0$$

sabit katsayılı k mertebeli homojen denklemini ele alalım. Bu sistem (3.2.17) ye yukarıda anlatıldığı gibi çevrilebilir. Burada A matrisinin elemanları sabittir.

$$z(n+1) = Az(n) \tag{3.2.18}$$

(2.3.1) denkleminin Casoratian'ı $C(n) = \det \phi(n)$, $\phi(n)$ in, (3.2.18) denkleminin fundamental matrisi olduğu bilgilerimizin dahilindedir.

A nın karakteristik denklemi

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + ... + p_{k-1}\lambda + p_k = 0 .$$

Bu ise (2.3.2) denklemine karşılık gelir. Dolayısıyla A nın eigen değerleri (2.3.1) karakteristik denkleminin kökleridir.

3.3 Jordan Form: Otonom Sistemler

A ve B, $k \times k$ boyutunda iki matris olsun. $P^{-1}AP = B$ olacak şekilde bir P nansingüler matrisi varsa A ve B benzerdir denir.

İddia 3.20: Eğer A ve B matrisleri benzer ise A ve B matrisleri aynı eigen değerlere sahiptir.

İspat:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= B \\ |\lambda I - B| &= |\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(\lambda I - A)P| \\ &= |P^{-1}||\lambda I - A||P| \\ &= |\lambda I - A| . \end{aligned}$$

İlk ve son terimlerden A ve B aynı karaktersitik polinomlara sahiptir. A matrisi bir $D = diag\left[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k\right]$ köşegenel matrisine benzer olsun. Bu halde A ya köşegenleştirilebilirdir denir. Dikkat edilirse bu λ_i, $i = 1, 2, .., k$, değerleri bir önceki iddiadan A nın eigen değerleridir. Eğer A köşegenleştirilirse A^n yi hesaplamak oldukça kolaydır. Eğer,

$$P^{-1}AP = D = diag\left[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k\right]$$

ise,

$$A = PDP^{-1} .$$

İddia 3.21:

$$A^n = \left(PDP^{-1}\right)^n = PD^nP^{-1} .$$

İspat:

$$A^n = \left(PDP^{-1}\right)^n = \underbrace{PDP^{-1}PDP^{-1}...PDP^{-1}}_{n \text{ tane}} = PD^nP^{-1}$$

Bu ifade tam olarak,

$$A^n = P\begin{bmatrix} \lambda_1^n & & & 0 \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k^n \end{bmatrix}P^{-1} \tag{3.3.1}$$

formatındadır.

$$x(n+1) = Ax(n) \tag{3.3.2}$$

denkleminin fundamental matrisi söz konusu ise bu halde,

$$\Phi(n) = A^nP = P\begin{bmatrix} \lambda_1^n & & & 0 \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k^n \end{bmatrix} \tag{3.3.3}$$

$(3.3.3)$ formülünden $\Phi(0) = P$ ve sonuç olarak

$$A^n = \Phi(n)\Phi^{-1}(0). \tag{3.3.4}$$

Eğer P matrisi bilinirse $(3.3.3)$ formülü oldukça kullanışlıdır. Şimdi de P nin nasıl hesaplandığını izah etmeye çalışalım. $P = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$ olsun. Burada ξ_i, P nin i inci sütunudur. Bu taktirde $A\xi_i = \lambda_i\xi_i,\ i = 1, 2, ..., k$.

Yani ξ_i ler A nın λ_i eigen değerlerine karşılık gelen eigen vektörlerdir. Dolayısıyla P nin i inci sütunu, A nın i inci λ_i eigen değerine karşılık gelen eigen vektörüdür. P nansingüler olduğundan kolonları lineer bağımsızdır. Bu gerçeğin tersi de doğrudur. Eğer $k \times k$ boyutunda bir A matrisi k tane lineer bağımsız eigen vektöre sahipse A matrisi köşegeneldir.

Teorem 3.22: $k \times k$ boyutunda bir A matrisinin köşegenel olabilmesi için gerek ve yeter şart A nın k tane lineer bağımsız eigen vektöre sahip olmasıdır. $(3.3.3)$ formülü $\Phi(n)$ fundamental matrisinin nasıl hesaplandığını verir. $A\xi_i = \lambda_i\xi_i,\ i = 1, 2, ..., k$. Bu taktirde $(3.3.3)$ formülü kullanılırsa

$$\Phi(n) = \left[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\right] \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & 0 & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_k^n \end{bmatrix}$$

$$= \left[\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2, \ldots, \lambda_k^n \xi_k\right] \tag{3.3.5}$$

$\Phi(n)$ nin sütunları (3.3.2) denkleminin çözümleri olduğundan her i için $x(n) = \lambda_i^n \xi_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$, (3.3.2) denkleminin bir çözümüdür. Dolayısıyla (3.3.2) denkleminin genel çözümü

$$x(n) = c_1\lambda_1^n \xi_1 + c_2\lambda_2^n \xi_2 + \ldots + c_k\lambda_k^n \xi_k \tag{3.3.6}$$

ile verilir.

Örnek 3.23:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu taktirde $x(n+1) = Ax(n)$ sistemini çözelim.

Çözüm:

$$\det\left|A - \lambda I\right| = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0\,.$$

$(\lambda-1)^2(\lambda-5) = 0$. Buradan eigen değerler $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Şimdi bu eigen değerlere karşılık gelen eigen vektörleri bulmak için $(A - \lambda I)x = 0$ denklemini çözelim. λ_1 için,

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bu sistemin çözümü ise,

$$\xi_1 = (1 \quad 1 \quad 1)^T\,.$$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ise,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bu sistemdeki tüm denklemler aynı olduğundan $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ denklemini ele alalım. Üç bilinmeyenli bir denklem olduğundan iki bilinmeyeni keyfi seçilir. Eğer $x_1 = 1, x_2 = 0$ ise $x_3 = -1$ ve elde edilen eigen vektör,

$$\xi_2 = (1 \quad 0 \quad -1)^T.$$

Diğer taraftan $x_1 = 0, x_2 = 1$ ise $x_3 = -2$ ve dolayısıyla üçüncü eigen vektör

$$\xi_3 = (0 \quad 1 \quad -2)^T.$$

Yine buradan ξ_2 ve ξ_3 seçimlerinin sonsuz sayıda yapılabilirliği bilgilerimizin dahilindedir. (3.3.6) formülü kullanılarak genel çözüm,

$$x(n) = c_1 5^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

veya

$$x(n) = \begin{pmatrix} c_1 5^n + c_2 \\ c_1 5^n + c_3 \\ c_1 5^n - c_2 - 2c_3 \end{pmatrix}. \qquad (3.3.7)$$

Yukarıdaki sistemde,

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

başlangıç koşuluyla beraber,

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1 + c_3 = 1$$

$$c_1 - c_2 - 2c_3 = 0$$

sistemi çözülerek,

$$x(n)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}5^n+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}5^n+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}5^n-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

çözümü bulunur. Şimdi de çözümü veren diğer bir metodu sunmaya çalışalım.

$$x(n)=\Phi(n)\Phi^{-1}(0)x(0)$$

olsun. Burada,

$$\Phi(n)=(\lambda_1^n\xi_1,\ \lambda_2^n\xi_2,\ \lambda_3^n\xi_3)$$

$$=\begin{pmatrix}5^n & 1 & 0\\ 5^n & 0 & 1\\ 5^n & -1 & -2\end{pmatrix}.$$

$$\Phi(0)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}.$$

Sonuç olarak,

$$\Phi^{-1}(0)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

Burada da,

$$x(n)=\begin{pmatrix}5^n & 1 & 0\\ 5^n & 0 & 1\\ 5^n & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}5^n-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}5^n+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}5^n-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

ile verilir. A matrisinin eigen değerlerinin karmaşık olması halinde aşağıdaki yöntem takip edilir. A reel bir matris ve eğer $\lambda=\alpha+i\beta$ Anın bir eigen değeri ise $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$ da A nın bir eigen değeridir. Eğer ξ, λ ya karşılık gelen A nın bir eigen vektörü ise $\overline{\xi}$, $\overline{\lambda}$ ya karşılık gelen A nın bir eigen vektörüdür. Bu gözlemler neticesinde (3.3.2) sistemine karşılık gelen fundamental matrisinde söz konusu olan hesaplama oldukça kolaylaşır. $\xi_1 = \xi + i_1\xi_2$ olsun. Bu taktirde (3.3.2) sisteminin çözümü,

$$x(n) = (\alpha + i\beta)^n \xi_1 = \xi_1 + \xi_2 .$$

Eğer, $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ise,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Çözüm bu taktirde,

$$\begin{aligned} x(n) &= \left[r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\right]^n\left(\xi_1 + i\xi_2\right) \\ &= r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)\left(\xi_1 + i\xi_2\right) \\ &= r^n\left[\left(\cos n\theta\right)\xi_1 - \left(\sin n\theta\right)\xi_2\right] + ir^n\left[\left(\cos n\theta\right)\xi_2 + \left(\sin n\theta\right)\xi_1\right] \\ &= u(n) + iv(n). \end{aligned}$$

Burada, $u(n) = r^n\left[\left(\cos n\theta\right)\xi_1 - \left(\sin n\theta\right)\xi_2\right]$ ve $v(n) = \left[\left(\cos n\theta\right)\xi_2 + \left(\sin n\theta\right)\xi_1\right]$, (3.3.2) sisteminin lineer bağımsız çözümleridir.

Örnek 3.24:

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}$$

sistemini çözelim.

Çözüm: A matrisinin eigen değerleri $\lambda_1 = 2i$ ve $\lambda_2 = -2i$.

Karşılık gelen eigen vektörler sırasıyla

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ 1 \end{pmatrix}, \ \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dolayısıyla çözüm,

$$x(n) = (2i)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ 1 \end{pmatrix}, \ i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}, \ i^n = \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Bu çözüm, $x(n) = 2^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ 1 \end{pmatrix}$

ile verilir. Netice itibariyle,

$$u(n)=2^n\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{2}{5}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\end{pmatrix},\ v(n)=2^n\begin{pmatrix}\frac{-2}{5}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{1}{5}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\end{pmatrix}.$$

Burada $u(n)$ ve $v(n)$ lineer bağımsız çözümlerdir. Genel çözüm,

$$x(n)=c_1 2^n\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{2}{5}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\end{pmatrix}+c_2 2^n\begin{pmatrix}\frac{-2}{5}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{1}{5}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\end{pmatrix}$$

$$=2^n\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{5}c_1-\frac{2}{5}c_2\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\left(\frac{2}{5}c_1-\frac{1}{5}c_2\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\ c_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+c_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\end{bmatrix}.$$

Şimdi (3.3.2) sisteminin çözümü A matrisinin köşegenel olması halinde tartışıldı. $k\times k$ boyutunda bir A matrisinin köşegenel olması için yeterli şart A nın k tane farklı eigen değere sahip olmasıdır. Eğer A matrisi tekrarlı köklere sahipse bu halde, A normal ise köşegenleştirilebilirdir. A normald r, eğer $A^T A=AA^T$.
Normal matrislerin bazı örnekleri:

(a) Simetrik matris $(A^T=A)$,

(b) Skew simetrik matris $(A^T=-A)$,

(c) Üniter matris $(A^T A=AA^T=I)$.

Şimdi A matrisinin köşegen olmaması halinde ne yapabiliriz sorusuna yanıt arayalım. Bu durum A nın tekrarlı eigen değere sahip olması halinde gerçekleşir. Bu durumla k tane lineer bağımsız eigen vektör elde edilemez. Örneğin,

$$\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&4&1\\0&0&0&4\end{bmatrix}$$

matrisleri köşegenleştirilemez. $k\times k$ boyutunda A matrisi köşegenel değilse Jordan form olarak bilinen $P^{-1}AP=J$.

Burada,

$$J = diag(J_1, J_2, ..., J_r),\ 1 \le r \le k \tag{3.3.8}$$

ve

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & 1 \\ 0 & 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \tag{3.3.9}$$

matrisi Jordan Block olarak bulunur.

Teorem 3.25. (Jordan kanonik form)

$k \times k$ boyutunda bir A matrisi (3.3.8) formülünde verilen Jordan formuna benzerdir. Burada J_i, $s_i \times s_i$ boyutunda olup (3.3.9) biçimindedir ve $\sum_{i=1}^{r} s_i = k$. Bir λ eigen değerine tekabül eden Jordan Bloklarının sayısına λ nın geometrik katlılığı denir. Bu sayı sırasıyla λ ya karşılık gelen lineer bağımsız eigen vektörlerin sayısına eşittir. λ nın cebirsel katlılığı ise λ nın tekrar sayısına eşittir. Eğer λ nın cebirsel katlılığı 1 ise bu halde λ ya basittir denir. Eğer λ nın geometrik katlılığı cebirsel katlılığa eşitse (λ ya karşılık gelen Jordan blokları 1×1 dir), bu halde λ ya semi-simple (yarı basit) denir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinde 3 eigen değeri basit, 2 yarı basit, 5 ise ne basit ne de yarı basittir. Yukarıdaki teoremi izah etmek için λ=5 eigen değerine karşılık gelen 3×3 tipindeki bir matrisin olası Jordan formlarını verelim.

$$\begin{pmatrix} \boxed{6} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{6} & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{5} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{5} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

(a) (b) (c) (d)

s_i, i inci Jordan bloğunun mertebesi, r ise Jordan formdaki Jordan bloklarının sayısıdır.

(a) matrisi köşegeneldir ve mertebesi 1 olan üç tane Jordan block vardır. Sonuç olarak $s_1 = s_2 = s_3 = 1$, $r = 3$ ve λ nın geometrik katlılığı 3 tür. (b) de ise iki Jordan blok vardır. Mertebeleri $s_1 = 2,\ s_2 = 1,\ \lambda$ nın geometrik katlılığı 2 dir. (c) de ise $s_1 = 1,\ s_2 = 2$ mertebeli iki Jordan blok vardır. $r = 2$, geometrik katlılık ise 2 dir. (d) de ise mertebesi 3 olan tek Jordan blok vardır. $r = 1$, geometrik katlılık 1 dir. (a), (b), (c) ve (d) de $\lambda = 5$ e karşılık gelen sırasıyla eigen vektörler

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{(a)}}\ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{(b)}}\ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\text{(c)}}\ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\text{(d)}}.$$

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda\end{pmatrix}$$

matrisi bir tek eigen değere sahiptir ve $e_1 = (1,0,...,0)^T$. Bu ise bize (3.3.8) formülü ile verilen J Jordan formülünün lineer bağımsız eigen vektörlerini verir.

$$e_1, e_{s_1+1}, e_{s_1+s_2+1}, ..., e_{s_1+s_2+...+s_{r-1}+1}.$$

$P^{-1}AP = J$ olduğundan

$$AP = PJ \tag{3.3.10}$$

elde edilir. $P = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$ olsun. (3.3.10) formülünde s_1 kolonunun her iki tarafı eşitlenirse

$$A\xi_1 = \lambda_1\xi_1, ...,\ A\xi_i = \lambda_1\xi_i + \xi_{i-1},\ i = 2,3,...,s_1$$

(3.3.11)

$\xi_1,\ \xi_2, ...,\ \xi_{s_1}$ zincirinde ξ_1, A nın tek eigen vektörüdür. Diğer $\xi_2,\ \xi_3, ...,\ \xi_{s_1}$ vektörlerine A nın genelleştirilmiş eigen vektörleri denir. Bunlar

$$\left(A - \lambda_1 I\right)\xi_i = \xi_{i-1},\ i = 2,3,...,s_1 \tag{3.3.12}$$

formülünden elde edilir. J nin kalan blokları için aynı işleme devam edilirse m inci Jordan bloğuna karşılık gelen genelleştirilmiş eigen vektörler

$$\left(A-\lambda_m I\right)\xi_{m_i}=\xi_{m_i-1},\ i=2,3,...,s_m \tag{3.3.13}$$

ile elde edilir. $A^n=\left(PJP^{-1}\right)^n=PJ^nP^{-1}$.

Burada,

$$J^n=\begin{bmatrix} J_1^n & & & 0 \\ & J_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & J_k^n \end{bmatrix}.$$

$i=1,2,...,r$ için $J_i=\lambda_i I+N_i$. Burada

$$N_i=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ 0 & 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi $s_i\times s_i$ tipinden nilpotent matristir. Yani tüm $k\geq s_i$ için $N_i^k=0$ dır. Bu halde,

$$J_i^n=(\lambda_i I+N_i)^n=\lambda_i^n I+\binom{n}{1}\lambda_i^{n-1}N_i$$

$$+\binom{n}{2}\lambda_i^{n-2}N_i^2+...+\binom{n}{s_i-1}\lambda_i^{n-s_i+1}N_i^{s_i-1}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda_i^{n-2} & \dots & \binom{n}{s_i-1}\lambda_i^{n-s_i+1} \\ 0 & \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^n & \dots & \binom{n}{s_i-2}\lambda_i^{n-s_i+2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} \\ 0 & 0 & & \dots & \lambda_i^n \end{pmatrix} \tag{3.3.14}$$

sisteminin genel çözümü

$$x(n)=A^nc=PJ^nP^{-1}c$$

veya

$$x(n) = PJ^n \hat{c}\,. \tag{3.3.15}$$

(3.3.2) sisteminin fundamental matrisi $\Phi(n) = PJ^n$. Aynı zamanda state transition matrisi $\Phi(n, n_0) = PJ^{n-n_0}P^{-1}$. Bir sonraki sonuç (3.3.14) formülünün direk bir çıkarımıdır.

Sonuç 3.26: A, $k \times k$ boyutunda bir matris olsun. $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $|\lambda| < 1$. Burada λ, A nın tüm eigen değerleridir. Bu sonucun bir önemi eğer $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \lim\limits_{n\to\infty} A^n x(0) = 0$. Yani eğer A nın tüm eigen değerleri mutlak değerce 1 den küçükse (3.3.1) denkleminin tüm çözümleri $n \to \infty$ için sıfıra gider.

Örnek 3.27:

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{pmatrix}$$

sisteminin çözümünü bulalım. Burada $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Çözüm: $|A - \lambda I| = 0$ dan eigen değerler $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4$. Eigen vektörler $(A - \lambda I)\xi = 0$ veya

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ile bulunur. Yani,

$$d_2 + 2d_3 = 0\,,\ -2d_2 - 4d_3 = 0\,,\ d_2 + 2d_3 = 0\,.$$

Sistem çözülürse,

$\xi_1 = (0 \quad -2 \quad 1)^T$ ve $\xi_2 = (1 \quad -2 \quad 1)^T$ eigen değeri elde edilir. Bir genelleştirilmiş ξ_3 eigen vektörünü bulalım. (3.3.11) formülü kullanarak $(A - 4I)\xi_3 = \xi_1$ denklemini ele alalım.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bu sistemin çözümü yoktur. Dolayısıyla $(A-4I)\xi_3 = \xi_2$ veya

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kullanılırsa, $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Böylece,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$J^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & n4^{n-1} \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Dolayısıyla çözüm, $x(n) = PJ^n c = \begin{pmatrix} 0 & 4^n & n4^{n-1} \\ -2\ 4^n & -2\ 4^n & -2n4^{n-1} \\ -4^n & 4^n & n4^{n-1}+4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

Örnek 3.28:

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{pmatrix},\ x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sistemini çözelim. Burada $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Çözüm: $|A-\lambda I| = (\lambda-2)^3 = 0$. Buradan $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

$$\xi_1 = (1 \quad 0 \quad 1)^T.$$

(3.3.13) formülünden genelleştirilmiş eigen vektörler

$$(A-2I)\xi_2=\xi_1,\ \xi_2=(1\quad 1\quad 2)^T.$$

$$(A-2I)\xi_3=\xi_2,\ \xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Dolayısıyla,

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&2&1\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Çözüm,

$$x(n,x_0)=PJ^nP^{-1}x_0$$

$$=2^{n-4}\begin{pmatrix}n^2-5n+16 & n^2+3n & -n^2+5n\\ 4n & 4n+16 & -4n\\ n^2-n & n^2+7n & -n^2+n+16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=2^{n-4}\begin{pmatrix}n^2+3n\\4n+16\\n^2+7n+16\end{pmatrix}.$$

3.4 Lineer Periyodik Sistemler

$$x(n+1)=A(n)x(n), \tag{3.4.1}$$

tüm $n\in\mathbb{Z}$, bazı N tamsayısı için $A(n+N)=A(n)$ ise A ya periyodiktir denir. Buradaki çalışma sistemi diferansiyel denklemlerdeki Floquet teorisine benzerdir.

Lemma 3.28: B, $k\times k$ tipinde nansingüler bir matris ve m pozitif bir tamsayı olsun. Bu taktirde $C^m=B$ olacak şekilde $k\times k$ tipinde bir J matrisi vardır.

İspat:

$$P^{-1}BP=J=\begin{pmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r\end{pmatrix}$$

olsun. Bu halde,

$$J_i+\lambda_i\left(I_i+\frac{1}{\lambda_i}N_i\right).$$

Burada I_i, $s_i \times s_i$ boyutunda birim matris ve

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$N_i^s = 0. \tag{3.4.2}$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} H_i &= \exp\left[\frac{1}{m}\ln J_i\right] \\ &= \exp\left[\frac{1}{m}\left\{\ln \lambda_i I_i + \ln(I_i + \frac{1}{\lambda_i}N_i)\right\}\right] \\ &= \exp\left[\frac{1}{m}\left\{\ln \lambda_i I_i + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1}}{s}\right\}\right]\left(\frac{N_i}{\lambda_i}\right)^s. \end{aligned}$$

(3.4.2) formülü kullanılırsa

$$H_i = \exp\left[\frac{1}{m}\left\{\ln \lambda_i I_i + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1}}{s}\right\}\left(\frac{N_i}{\lambda_i}\right)^s\right] \tag{3.4.3}$$

elde edilir. H_i iyi tanımlanmış bir matristir. Üstelik $H_i^m = J_i$. Eğer

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & & & 0 \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H_r \end{pmatrix}$$

ise bu taktirde

$$\begin{aligned} H^m &= \begin{bmatrix} H_1^m & & & 0 \\ & H_2^m & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H_r^m \end{bmatrix} \\ &= J \end{aligned}$$

$C = PHP^{-1}$ tanımlansın. Bu halde $C^m = PH^mP^{-1} = PJP^{-1} = B$.

Lemma 3.29: (3.4.1) sistemi için aşağıdakiler doğrudur.

(i) $\Phi(n)$ bir fundamental matris ise $\Phi(n+N)$ de bir fundamental matristir.

(ii) C nansingüler matrisi için $\Phi(n+N)=\Phi(n)C$.

(iii) $\Phi(n+N,N)=\Phi(n,0)$.

Teorem 3.30: (3.4.1) sisteminin her fundamental $\Phi(n)$ matrisi için periyodu N olan bir nansingüler peryodik $P(n)$ matrisi vardır öyle ki

$$\Phi(n)=P(n)B^{n} \qquad (3.4.4)$$

İspat: Lemma 3.28'den bir B matrisi vardır öyle ki $B^{N}=C$ dir. $P(n)=\Phi(n)B^{-n}$ tanımlansın. Burada $(B^{-n})=(B^{n})^{-1}$. Bu halde,

$$P(n+N)=\Phi(n+N)B^{-N}B^{-n}=\Phi(n)CB^{-N}B^{-n}$$

$$=\Phi(n)B^{-n}=P(n).$$

Yani, $P(n)$ nin periyodu N dir. Yani singüler değildir. $P(n)$ nin tanımından $\Phi(n)=P(n)B^{n}$.

Not 3.31: Eğer $z(n)$,

$$z(n+1)=Bz(n) \qquad (3.4.5)$$

sisteminin bir çözümü ise,

$$x(n)=\Phi(n)c=P(n)B^{n}c \text{ veya}$$

$$x(n)=P(n)z(n). \qquad (3.4.6)$$

Netice itibariyle, (3.4.1) periyodik sisteminin çalışması (3.4.5) otonom sisteminin çalışmasına indirgenir. $C=B^{N}$ matrisine (Lemma 3.29 (ii) yardımıyla elde edilebilir), (3.4.1) denkleminin monodromi matrisi denir. B nin eigen değerlerine ise (3.4.1) denkleminin Floquet üsleri denir. B^{N} nin λ^{N} eigen değerine ise (3.4.1) denkleminin Floquet katlılıkları denir. Bunu söylememizin nedeni (3.4.1) denklemini sağlayan bir $x(n)$ çözümü $x(n+N)=\lambda x(n)$ Floquet üsler (katlılıklar) monodrom matrisine bağlı değildir.

Lemma 3.32: $\Phi(n)$ ve $\Psi(n)$, $\Phi(n+N)=\Phi(n)C$, $\Psi(n+N)=\Psi(n)E$ denklemlerini sağlayan (3.4.1) denkleminin iki fundamental matrisi olsun. Bu taktirde C ve E benzedir.

İspat: İspat kolaydır.

Lemma 3.33: λ kompleks sayısının $(3.4.1)$ denkleminin Floquet üssü olabilmesi için gerek ve yeter şart $(3.4.1)$ denkleminin trivial olmayan çözümü $\lambda^n q(n)$ olmasıdır. Burada $q(n)$ tüm n ler için $q(n+N)=q(n)$ bir vektör fonksiyondur.

İspat: λ, $(3.4.1)$ denkleminin Floquet üssü olsun. Bu halde $\left(B^n-\lambda^n\right)=0$ olduğunu biliyoruz. $x_0 \neq 0$ ve $x_0 \in \mathbb{R}^k$ seçelim. Öyle ki tüm n ler için $\left(B^n-\lambda^n I\right)x_0=0$. Bu taktirde $B^n x_0=\lambda^n x_0$. Sonuç olarak $P(n)B^n x_0=\lambda^n P(n)x_0$. Burada $P(n)$, $(3.4.4)$ formülü ile tanımlanan periyodik bir matristir. $(3.4.4)$ formülünden,

$$\begin{aligned} x(n,n_0,y_0) &= \Phi(n,n_0)x_0 \\ &= P(n)B^n x_0 \\ &= \lambda^n P(n)x_0 \\ &= \lambda^n q(n). \end{aligned}$$

Böylece $(3.4.1)$ denkleminin arzu edilen periyodik çözümü elde edilir. Burada $q(n)=P(n)$. Tersine eğer $\lambda^n q(n),\ q(n+N)=q(n)\neq 0$ $(3.4.1)$ denkleminin çözümü ise Teorem 3.30 gereğince $x_0 \neq 0$ vektörü için

$$\lambda^n q(n)=P(n)B^n x_0. \tag{3.4.7}$$

Buradan da,

$$\lambda^{n+N} q(n)=P(n)B^{n+N} x_0. \tag{3.4.8}$$

Fakat $(3.4.7)$ denkleminden,

$$\lambda^{n+N} q(n)=\lambda^N P(n)B^n x_0 \tag{3.4.9}$$

elde edilir. $(3.4.8)$ ve $(3.4.9)$ formüllerinin sağ tarafları eşitlenirse,

$$P(n)B^n\left[B^N-\lambda^N I\right]x_0=0.$$

Böylece,

$$\det\left[B^N-\lambda^N I\right]=0.$$

Bu ise bize λ nın $(3.4.1)$ denkleminin bir Floquet üssü olduğunu önerir.

Sonuç 3.34: Aşağıdakiler geçerlidir.

(i) Eğer $(3.4.1)$ sisteminde Floquet üs $\lambda=1$ ise sistem N periyotlu bir çözüme sahiptir.

(ii) Eğer Floquet üsler -1 e eşitse $(3.4.1)$ sistemi $2N$ periyotlu bir çözüme sahiptir.

İspat: Lemma 3.33'ten elde edilir.

Not: Lemma 3.29 (ii), $C = B^N$ monodromi matrisinin nasıl elde edildiğini verir. Bu matrisin eigen değerleri $(3.4.1)$ denkleminin Floquet üslerini verir. Yine Lemma 3.29'dan,

$$C = \Phi^{-1}(n)\Phi(n+N).$$

Eğer $n = 0$ ise,

$$C = \Phi^{-1}(0)\Phi(N) \tag{3.4.10}$$

elde edilir. Eğer $\Phi(N) = A(N-1)A(N-2)...A(0)$ ise $\Phi(0) = I$ dır. Böylece $(3.4.10)$ formülü,

$$C = \Phi(N)$$

veya

$$C = A(N-1)A(N-2)...A(0). \tag{3.4.11}$$

Örnek 3.35:

$$x(n+1) = A(n)x(n),$$

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n \\ (-1)^n & 0 \end{pmatrix}$$

sistemini ele alalım. Açıkça tüm $n \in \mathbb{Z}$ için $A(n+2) = A(n)$ dır. $(3.4.10)$ formülünden,

$$B^2 = C = A(1)A(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Böylece Floquet üsler $-1,-1$. Sonuç 3.34 (ii)'den sistem 4 periyotlu çözüme sahiptir. $A(n)$ matrisinin eigen değerleri $-1,1$ ve $\rho(A(n)) = 1$.

Sonuç: Şimdi yukarıdaki örnekte $A(n)$ nın eigen değerleriyle ve karşılık gelen Floquet katlılıkları arasında bir bağlantı olduğunu söyledik. Bu bağlantının olmadığını aşağıdaki örnekle verelim.

Örnek 3.36:

$$x(n+1) = A(n)x(n)$$

sistemini ele alalım.

$$A(n)=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{2+(-1)^n}{2} \\ \dfrac{2-(-1)^n}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Periyodu 2 dir. A nın eigen değerleri $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dır. $\rho(A)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1$. Şimdi,

$$B^2=C=A(1)A(0)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} & 0 \\ 0 & \dfrac{9}{4} \end{pmatrix}.$$

Böylece A nın Floquet katlılıkları $\dfrac{1}{4}$ ve $\dfrac{9}{4}$. Böylece $\rho(B)=\dfrac{3}{2}$.

3.5 Uygulamalar

3.5.1 Markov zinciri

$1\le i\le k,\ s_i$ konumunun p_{ij} olasılığının $(n+1)$ inci adımdaki tekrarı, s_j nin deneydeki n inci adımına bağlıdır. Diğer bir deyişle, sistem hafızaya sahip değildir. Gelecek durum şu anki duruma bağlıdır. Kısaca, herhangi bir denemenin sonucu en fazla bir önceki denemenin sonucuna bağlı olup, ondan evvelki hiçbir denemenin sonucuna bağlı olmaz. Her (s_i,s_j) durum çiftinin s_j nin hemen s_i den sonra olduğu bir p_{ij} olasılığı vardır.

Markov Zincirleri: Markov zinciri stokastik işlemin özel bir tipidir. Herhangi bir n zamanında X_n mevcut konumu ve bu işlemde önceki $X_1,X_2,...,X_{n-1}$ konumları bilinsin. $X_j\,(j>n)$ tüm gelecek konumlarının olasılıkları sadece mevcut X_n konumuna bağlıdır. Daha önce bilinen $X_1,X_2,...,X_{n-1}$ konumlarına bağlı değildir. $n=1,2,...,$ herhangi $x_1,x_2,...,x_{n+1}$ konumlarının olası dizisi için Markov zinciri stokastik bir işlemdir. Öyle ki,

$$p_r(X_{n+1}=x_{n+1}\,|\,X_1=x_1,X_2=x_2,...,X_n=x_n)=p_r(X_{n+1}=x_{n+1}\,|\,X_n=x_n) \qquad (3.5.1)$$

Markov zincirindeki olasılıklar,

$$p_r(X_1=x_1,X_2=x_2,...,X_n=x_n)$$

$$=p_r(X_1=x_1)\,p_r(X_2=x_2\,|\,X_1=x_1)\,p_r(X_3=x_3\,|\,X_2=x_2)...p_r(X_n=x_n\,|\,X_{n-1}=x_{n-1}).$$

$p_i(n)$, $1 \le i \le k$, deneydeki s_i konumunun n inci defadaki tekrarının olasılığıdır. Bu n inci tekrarda s_i durumlarından bir tanesi oluşacağından

$$p_1(n) + p_2(n) + ... + p_k(n) = 1 \tag{3.5.2}$$

Bu deneyin matematiksel modelini çıkarmak için aşağıdaki organizasyon izlenir. $p_i(n+1), 1 \le i \le k$, deneyindeki s_i konumunun $n+1$ inci defadaki tekrarının olasılığıdır. Bu durum k defa oluşur. İlk durum n inci tekrarda oluşan s_1, $n+1$ inci tekrarla s_i üretilir. n inci tekrarda s_1 in olasılığı $p_i(n)$ olduğundan, s_1 den sonra s_i nin olasılığı ise p_{i1} dir. Böylece ilk durumun oluşma olasılığı $p_{i1}p_1(n)$ dir. İkinci durum ise $n+1$ inci tekrarda s_i yi ve n inci tekrarda ise s_2 elde edilir. Yani ikici durumun gelme olasılığı $p_{i2}p_2(n)$. Bu işleme $3,4,...,k$ için devam edilir ve $i = 1,2,...,k$ için

$$p(n+1) = Sp(n),\ n = 1,2,3,..., \tag{3.5.3}$$

sistemi elde edilir. Burada $p(n) = (p_1(n), p_2(n),..., p_k(n))^T$ vektör olasılığıdır. $S = (p_{ij})$ ise geçiş matrisidir. Bu s özel matrisine Markov matrisi denir. Bu A matrisinin tüm elemanları pozitif ise A ya pozitif matris denir. Eğer tüm $j = 1,2,...k$ için $\sum_{i=1}^{k} a_{ij} = 1$ ise $k \times k$ boyutunda pozitif bir matris Markov (stokastik) matristir. Markov matrisinin tüm λ eigen değerleri birden küçük veya eşittir. Yani $|\lambda| \le 1$ dır. Üstelik $\lambda = 1$ Markov matrisinin bir eigen değeridir. $k \times k$ boyutunda bir A Markov matrisinin $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ eigen değerlerinin spektral yarıçapı $\rho(A) = \max_{1 \le i \le k} |\lambda_i|$ ise $\rho(A) = 1$.

3.5.2 Regüler markov zincirleri

Bazı m pozitif sayısı için S^m nin pozitif olması halinde regüler Markov zinciridir.

Teorem 3.37: (Perron Teoremi) A pozitif matrisi $k \times k$ boyutunda olsun. Bu halde $\rho(A)$, A nın basit reel eigen değeridir. Eğer λ, A nın herhangi bir diğer eigen değeri ise $|\lambda| \le \rho(A)$ dır. Üstelik bu eigen değere karşılık gelen eigen vektör pozitiftir.

Düzenli Markov zincirinin S geçiş matrisinin eigen değerleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ olsun. $\rho(S) = 1$ dir. Eğer S^m pozitifse $\rho(S^m) = 1$. Gerçekten S^m nin eigen değerleri $\lambda_1^m, \lambda_2^m, ..., \lambda_k^m$ dir. Perron Teoremi'nden 1, S^m nin basit bir eigen değeridir. Sonuç olarak S tam olarak bir basit eigen değere sahiptir. Bu eigen değer $\lambda_1 = 1$ olsun. Diğer bütün eigen değerler $|\lambda_i| < 1$, $i = 2,3,...,k$. Bu nedenle S nin Jordan formu $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J_* \end{pmatrix}$. Burada J_* nin eigen değerleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ dir.

Sonuç 3.26 dan $n \to \infty$ için $J_*^n \to 0$. Böylece $n \to \infty$ için $J^n \to diag(1,0,0,...,0)$. Bu sebeple eğer $S = QJQ^{-1}$ ise,

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \lim_{n\to\infty} S^n p(0) = \lim_{n\to\infty} QJ^nQ^{-1} p(0) = (\xi_1, 0, 0, ..., 0)\eta = a\xi_1. \qquad (3.5.4)$$

Burada, $\xi_1 = (\xi_{11}, \xi_{21}, ..., \xi_{k1})^T$, S nin $\lambda = 1$ eigen değerine karşılık gelen eigen vektördür. a ise $\eta = Q^{-1} p(0)$ nin ilk bileşenidir. Burada Q yu hesaplamak oldukça zor bir görevdir. a yı bulmak için aşağıdaki strateji izlenir.

$$p(n) = (p_1(n), p_2(n), ..., p_k(n))^T.$$

(3.5.2) formülünden $\sum_{i=1}^{k} p_i(n) = 1$. $\lim_{n\to\infty} p(n) = a\xi_1$ olduğundan

$a\xi_{11} + a\xi_{21} + ... + a\xi_{k1} = 1$. Buradan $a = \dfrac{1}{\xi_{11} + \xi_{21} + ... + \xi_{k1}}$.

Örnek 3.38: Hayvanlarda genetiksel mirasın özelliklerinin en basit tipi aşağıdaki şekilde oluşur. Belirli bir özellik spesifik genlerin çiftiyle belirlenir. Bu çiftlerin her biri G ve g tipindedir. Bir organizma GG kombinasyonuna, Gg (gG ile aynı) veya gg kombinasyonuna sahip olabilir. GG genlerine sahip organizmaya dominanat (baskın), gg genlerine sahip organizmaya resesif (çekinik), Gg (gG) genlerine sahip organizmaya ise hibrit (melez) denir. İki hayvanın çiftleşmesinde döllenme her aileden bir çift gen alarak oluşur. Genetiğin genel varsayımı genlerdeki bu seçimin gelişi güzel olduğudur. Şimdi de çiftleştirme işlemini düşünelim. Genetik karakteri GG olan ve hibrit olan iki türü çiftleştirelim. Bir döllenmenin olduğunu farz edelim. Bu işleme istenilen sayıda devam edilsin. Her jenerasyonda $s_1 = GG$, $s_2 = Gg$, $s_3 = gg$ gibi üç durum oluşabilir. $p_i(n)$, n inci jenerasyonda oluşan s_i durumlarının olasılığını ve p_{ij} ise $(n+1)$ inci jenerasyonda oluşan s_i nin, n inci jenerasyonda s_j nin oluşumuna göre, olasılığıdır. Markov zincirini modelleyen bu fark sistemi,

$$p_1(n+1) = p_{11}p_1(n) + p_{12}p_2(n) + p_{13}p_3(n),$$

$$p_2(n+1) = p_{21}p_1(n) + p_{22}p_2(n) + p_{23}p_3(n),$$

$$p_3(n+1) = p_{31}p_1(n) + p_{32}p_2(n) + p_{33}p_3(n).$$

p_{11}, GG ve Gg nin çiftleşmesiyle oluşan GG döllenmesinin olasılığı olsun. Açıkça bu döl G genini GG ailesinden 1 olasılığı ile alır. Ve diğer G genini Gg ailesinden $\frac{1}{2}$ olasılığı ile alır. Neticede $p_{11} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Gg ve Gg nin çiftleşmesinden GG dölünü yaratmanın olasılığı p_{12} olsun. Bir önceki muhakemeye benzer olarak $p_{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Yine gg ve Gg nin çiftleşmesiyle GG nin oluşma olasılığı p_{13} olsun. Açıkça $p_{13} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$. Bu prosedür yardımıyla,

$$p_{21} = \frac{1}{2},\ p_{22} = \frac{1}{2},\ p_{23} = \frac{1}{2},\ p_{31} = 0,\ p_{32} = \frac{1}{4},\ p_{33} = \frac{1}{2}.$$

Dolayısıyla,

$$p(n+1) = Sp(n)$$

$$S = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

S^2 nin tüm elemanları pozitiftir. Dolayısıyla bir regüler Markov zinciri oluşur. S nin eigen değerleri $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{1}{2}$ ve $\lambda_3 = 0$ dir.

(3.5.4) formülünden,

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = a\xi_1,\ \ \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ a = \frac{1}{4},\ \lim_{n\to\infty} p(n) = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}.$$

Dolayısıyla dominant veya tamamen resesif bir döllenmenin olasılığı 0.25 ve hibrit bir döllenmenin gelme olasılığı 0.5 tir.

3.5.3 Çekici markov zinciri

Bir Markov zincirinde n inci tekrarında s_i konumu tekrar oluşursa s_i ye Markov zincirinin çekicisi denir. Bu halde her ardışık tekrarda oluşur. Yani $p_{ii}=1$, $i \neq j$ için $p_{ij}=0$. Bir Markov zinciri en az bir çekici konuma sahipse, bu Markov zincirine çekicidir denir. Her durumdan çekici duruma geçmek mümkündür. Çekici Markov zincirinde çekici olmayan konuma geçicidir denir.

Örnek 3.39: (Bir sarhoşun yürüyüşü) Bir adam dört blok boyunca durmaksızın bir yol yürüyor. Bu yürüyüşe bir x köşesinden başlasın. $\frac{1}{2}$ olasılıkla sağ tarafa bir blok yürür. Aynı olasılıkla sola bir blok yürür. Bir sonraki köşeye geldiğinde yönlerini gelişigüzel seçer. Bu işleme beşinci köşede bulunan bir bara veya birinci köşede bulunan eve varıncaya kadar devam eder. Sarhoş eve varırsa evde, bara varırsa barda kalır. Birinci ve beşinci çekici konumları son konumlar olsun. s_4 ve s_5 ile gösterilsin. Geçici durumlar ise $2,3,4$ olsun. Bunlar s_1,s_2 ve s_3 ile isimlendirilsin. Buna göre n inci yürüyüşten sonra s_1,s_2,s_3,s_4 ve s_5 konumlarına varma olasılıkları sırasıyla $p_1(n), p_2(n), p_3(n), p_4(n)$ ve $p_5(n)$ olsun. Bu Markov zincirini temsil eden fark denklemi ise $p(n+1)=Sp(n)$. Burada geçiş matrisi,

$$S=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & | & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T & 0 \\ Q & I \end{pmatrix}.$$

$u(n)=(p_1(n), p_2(n), p_3(n))^T$ ve $v(n)=(p_4(n), p_5(n))^T$ olsun. Bu halde,

$$\begin{pmatrix} u(n+1) \\ v(n+1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T & 0 \\ Q & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(n) \\ v(n) \end{pmatrix} \text{ veya}$$

$$u(n+1)=Tu(n), \tag{3.5.5}$$

$$v(n+1) = v(n) + Qu(n). \tag{3.5.6}$$

Bu halde,

$$u(n) = T(n)u(0). \tag{3.5.7}$$

(3.5.7) formülü (3.5.6) formülünde yerine bırakılırsa,

$$v(n+1) = v(n) + QT^n u(0). \tag{3.5.8}$$

(3.5.8) denkleminin çözümü (3.2.13) yardımıyla,

$$v(n) = v(0) + \sum_{r=0}^{n-1} QT^r u(0) \tag{3.5.9}$$

ile verilir. T nin eigen değerleri $0, -\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}$. Dolayısıyla Sonuç 3.26 gereğince $\lim_{n\to\infty} T^n = 0$. Bu durumda da,

$$\sum_{r=0}^{\infty} T^r = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n-1} T^r = (I-T)^{-1}$$

olduğunu görmek kolaydır. (3.5.9) formülünü kullanarak,

$$\lim_{n\to\infty} v(n) = v(0) + Q(I-T)^{-1} u(0)$$

üretilir. Şimdi,

$$(I-T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Sarhoş ev ile bar arasında bir yerde yürümeye başlasın. Yürüdüğü ilk yer s_2 olsun. Bu taktirde,

$$u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ve } v(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bu durumda, $\lim_{n\to\infty} v(n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

Sonuç olarak eve gitme olasılığı $\frac{1}{2}$, bara gitme olasılığı da $\frac{1}{2}$ dir.

3.5.4 Ticaret modeli

Örnek 3.40: Aşağıdaki varsayımlara bağlı olarak iki ülke arasındaki ticaret modelini ele alalım.

(i) Ulusal gelir=Tüketici harcamaları+Net yatırım+İhracat-İthalat

(ii) Yerel tüketici harcamaları=Total tüketim-İthalat

(iii) Zaman eşit aralıklara bölünsün. $n = 0,1,2,...,\ j = 1,2$ için

$y_j(n) = n$ periyodundaki ulusal gelir,

$c_j(n) = n$ periyodundaki total tüketim,

$i_j(n) = n$ periyodundaki net yatırım,

$x_j(n) = n$ periyodundaki ihracat,

$m_j(n) = n$ periyodundaki ithalat,

$d_j(n) = n$ periyodundaki yerli malın tüketimi,

1 ülkesi için,

$$y_1(n) = c_1(n) + i_1(\mathrm{n}) + x_1(n) - m_1(n)$$

$$d_1(n) = c_1(n) - m_1(n)$$

Bu iki denklemin birleşmesiyle,

$$y_1(n) = d_1(n) + x_1(n) + i_1(\mathrm{n}) \tag{3.5.10}$$

elde edilir. Buna benzer olarak,

$$y_2(n) = d_2(n) + x_2(n) + i_2(\mathrm{n}) \tag{3.5.11}$$

denklemi elde edilir. $(n+1)$ inci periyodundaki her ülke için $m_j(n)$ ithalatı ve $d_j(n)$ yerli tüketimi ülkelerin bir önceki periyotta $y_i(n)$ ulusal geliriyle doğru orantılı olsun. Yani,

$$d_1(n+1) = a_{11}y_1(n),\ m_1(n+1) = a_{21}y_1(n) \tag{3.5.12}$$

$$d_2(n+1) = a_{22}y_2(n),\ m_2(n+1) = a_{12}y_2(n) \tag{3.5.13}$$

Burada a_{ij} lere marjinal tüketimler denir. Üstelik $i, j = 1,2$ için $a_{ij} > 0$. Yukarıda ifade edilen bu varsayımlar oldukça mantıklıdır. Yalnız iki ülkeyi ele aldığımızdan dolayı bu ülkenin ihracatı diğer ülkenin ithalatına eşittir. Yani

$$m_1(n) = x_2(n)\,,\ m_2(n) = x_1(n)\,. \tag{3.5.14}$$

$(3.5.12)$, $(3.5.13)$ ve $(3.5.14)$ denklemleri $(3.5.10)$ da yazılırsa,

$$\begin{pmatrix} y_1(n+1) \\ y_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_1(n) \\ i_2(n) \end{pmatrix}. \tag{3.5.15}$$

Net yatırımlar $i_1(n) = i_1$, $i_2(n) = i_2$ olsun. Bu taktirde $(3.5.15)$ denkleminden

$$\begin{pmatrix} y_1(n+1) \\ y_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \tag{3.5.16}$$

elde edilir. $(3.2.13)$ Parametrelerin Değişim Formülü ile,

$$\begin{aligned} y(n) &= A^n y(0) + \sum_{r=0}^{n-1} i A^{n-r-1} \\ &= A^n y(0) + \sum_{r=0}^{n-1} A^r i\,. \end{aligned} \tag{3.5.17}$$

Kararlı bir ekonominin oluşabilmesi için n inci periyottaki $y_j(n)$ ulusal gelirin $(n+1)$ inci periyotta oluşan $d_j(n+1)$ yerel tüketimi ve $i_j(n+1)$ ithalatın toplamına eşittir. Burada,

$$\begin{aligned} &d_j(n+1) + i_j(n+1) < y_j(n),\ j = 1,2, \\ &a_{11} + a_{21} < 1,\ a_{12} + a_{22} < 1\,. \end{aligned} \tag{3.5.18}$$

$(3.5.18)$ koşullarıyla A nın tüm eigen değerleri λ ise $|\lambda| < 1$.

Sonuç 3.26 gereğince $n \to \infty$ için $A^n \to 0$. Bu gerçek yardımıyla Neumann açılımı üretilir. Bu açılım,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{-1} A^r = \sum_{r=0}^{\infty} A^r = (I - A)^{-1} \tag{3.5.19}$$

ile verilir. $(3.5.17)$ formülünden,

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = (I - A)^{-1} i\ .$$

3.5.5 Isı denklemi

Örnek 3.41: Homojen bir materyalden oluşan ince bir çubuk boyunca ısı dağılımını ele alalım. $x_1, x_2, ..., x_k$ çubuk üzerinde eşit aralıktaki noktalar olsun. $1 \le i \le k$ için x_i inci $t(n) = (\Delta t)n$ zamanındaki sıcaklık $t_i(n)$ olsun. Çubuğun uç noktalarındaki sıcaklıklar $T_0(n)$ ve $T_{k+1}(n)$ olsun. Bu işlem boyunca çubukta ısı kaybı olmasın. Yalnız x_i noktasındaki sıcaklığa etki komşusu olan noktalardan gelmektedir. Bu komşu noktalar x_{i-1} ve x_{i+1}. Çubuğun solundaki sıcaklık $b^{o}\mathrm{C}$, sağındaki sıcaklık ise $d^{o}\mathrm{C}$ olsun. Bu koşullar yardımıyla $n \geq 0$ için $x_0(n) = b$ ve $x_{k+1}(n) = c$ dir. x_i noktasındaki sıcaklık x_{i-1} ve x_{i+1} noktalarındaki sıcaklığa bağlı olarak belirlenir. Bu halde Newton'un soğuma kuralına göre

$$\begin{aligned} T_i(n+1) - T_i(n) &= \alpha\left(\left[T_{i-1}(n+1) - T_i(n)\right] + \left[T_{i+1}(n+1) - T_i(n)\right]\right) \\ &= \alpha\left[T_{i+1}(n+1) - 2T_i(n) + T_{i-1}(n)\right] \end{aligned} \tag{3.5.20}$$

yazılır.

$$T_i(n+1) = \alpha T_{i-1}(n) + (1-2\alpha)T_i(n) + \alpha T_{i+1}(n),\ i = 2,3,...,k-1$$

yazılır. Benzer olarak,

$$T_1(n+1) = (1-2\alpha)T_1(n) + \alpha T_2(n) + \alpha b\ ,$$

$$T_k(n+1) = \alpha T_{k-1}(n) + (1-2\alpha)T_k(n) + \alpha c\ .$$

denklemleri elde edilir. Bu ifadeler kısaca,

$$T(n+1) = AT(n) + g$$

kompakt formunda yazılır. Burada,

$$A = \begin{pmatrix} (1-2\alpha) & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & (1-2\alpha) & \alpha & & \vdots \\ 0 & \alpha & (1-2\alpha) & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & (1-2\alpha) \end{pmatrix},\ g = \begin{pmatrix} \alpha b \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha c \end{pmatrix}.$$

Bu A matrisine Toeplitz matrisi denir. Bu matrisin eigen değerleri,

$$\lambda_n = (1-2\alpha) + \alpha\cos\left(\frac{n\pi}{k+1}\right),\ n = 1,2,...,k$$

ile formüle edilir. $\lambda,\ A$ nın tüm eigen değerleri ise $|\lambda| < 1$. Sonuç 3.26 gereğince

$$\lim_{n\to\infty} A^n = 0$$

yazılır. (3.2.12) Parametrelerin Değişim Formülü ile

$$T(n) = A^n T(0) + \sum_{r=1}^{n-1} A^r g\ .$$

Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} T(n) = (I-A)^{-1}g$ dir. Nihayet x_i başlangıç noktasındaki sıcaklığa bakmaksızın, $1 \le i \le k$ için x_i noktasındaki sıcaklık $(I-A)^{-1}g$ vektörünün i inci bileşenine yakınsar. Yukarıdaki problemi $k=3,\ \alpha=0.4,\ T_0(n)=10^0\text{C},\ T_4(n)=20^0\text{C}$ alalım. Bu taktirde,

$$A=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix},\ g=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 & 0 \\ -0.4 & 0.8 & -0.4 \\ 0 & -0.4 & 0.8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{15}{8} & \frac{5}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{4} & \frac{5}{2} & \frac{5}{4} \\ \frac{13}{8} & \frac{5}{4} & \frac{15}{8} \end{pmatrix}.$$

Bu taktirde,

$$\lim_{n\to\infty} T(n)=\begin{pmatrix} \frac{15}{8} & \frac{5}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{4} & \frac{5}{2} & \frac{5}{4} \\ \frac{13}{8} & \frac{5}{4} & \frac{15}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{25}{2} \\ 15 \\ \frac{43}{2} \end{pmatrix}.$$

Not: $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ olsun. Eğer orantılılık katsayısı α, Δx ve Δt ye bağlıysa,

$$\alpha=\left[\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right]^{\beta}, \tag{3.5.21}$$

yazılır. Burada β, çubuğun materyaline bağlı olup, bir sabittir. (3.5.21) formülü gereğince Δt değeri küçüldükçe bir noktadaki sıcaklıktaki değişim küçük olacaktır. (3.5.21) formülü (3.5.20) de kullanılırsa,

$$\frac{x_i(n+1)-x_i(n)}{\Delta t}=\beta\left[\frac{x_{i+1}(n)-2x_i(n)+x_{i-1}(n)}{(\Delta x)^2}\right] \tag{3.5.22}$$

elde edilir. Eğer $n\to\infty$ için $\Delta t\to 0$ ve $\Delta x \to 0$ ($i\to\infty$ için $x_i=(\Delta x)i = x$ ve $t_i=(\Delta t)i=t$ için) ise (3.5.22) denklemi,

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \tag{3.5.23}$$

kısmi diferansiyel denklemini verir. Bu kısmi diferansiyel denkleme Isı denklemi denir.

3.6 Stabilite (Kararlılık) Teorisi

Pratikte çalışılan problemlerin çoğu nanlineerdir ve kompakt çözümü bulmak oldukça zordur. Dolayısıyla bu problemlerin stabilitesini incelemek oldukça önemlidir.

3.6.1 Önbilgiler

Matris ve vektörlerdeki bazı norm kavramları:

(1) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ normu L_1 normu olarak bilinir.

(2) $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ normu $L\infty$ normu olarak bilinir.

(3) $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \right)^{\frac{1}{2}}$ normu Öklit Normu olarak bilinir.

Tanım 3.42: Vektör uzaydaki reel değerli fonksiyona norm denir ve $\| \ \|$ gösterimi ile ifade edilip aşağıdaki özellikleri sağlar.

(N_1) $\|x\| \geq 0$. Eğer $x = 0$ ise $\|x\| = 0$.

(N_2) $\forall x \in V$, α bir skaler olsun. Bu halde, $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

(N_3) $\forall x, y \in V$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Sonlu boyutlu uzaylarda normlar birbirine denktir. Eğer $\| \ \|$, $\| \ \|'$ iki farklı norm ise $\alpha \|x\| \leq \| \ \|' \leq \beta \|x\|$ olacak şekilde α ve β pozitif sayıları vardır. Böylece $\{x_n\}$, $\mathbb{R}^k$ da bir dizi olsun. Bu halde $n \to \infty$ için $\|x_n\| \to 0$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $\|x_n\|' \to 0$. $k \times k$ boyutunda bir A matrisinin normu,

$$\|A\| = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{3.6.1}$$

Buradan kolaylıkla,

$$\|A\| = \max_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \max_{\|x\| = 1} \|Ax\|.$$

Dolayısıyla yukarıda ifade edilen (1), (2), (3) normlarının matris normları

norm	$\lVert x_n \rVert$	$\lVert A \rVert$
L_1	$\sum_{i=1}^{k} \lvert x_i \rvert$	$\max_{1\le j\le k} \sum_{i=1}^{k} \lvert a_{ij} \rvert$
L_∞	$\max_{1\le i\le k} \lvert x_i \rvert$	$\max_{1\le i\le k} \sum_{j=1}^{k} \lvert a_{ij} \rvert$
L_2	$\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left[\rho(A^T A)\right]^{\frac{1}{2}}$

(3.6.1) denkleminden,

$$\rho(A) \le \lVert A \rVert, \qquad (3.6.2)$$

çıkarımı yapılır. Burada, $\rho(A) = \max\{\lvert\lambda\rvert : \lambda,\ A \text{ nın eigen değerleridir.}\}$ A nın spektral yarıçapıdır. $\sum_{j=1}^{k} a_{ij} = 1,\ 1 \le i \le k,\ a_{ij} \ge 0,$ A Markov matrisini ele alalım. Bu halde, $\lVert A \rVert_\infty = 1$. Dolayısıyla (3.6.2) eşitsizliğinden,

$$\rho(A) \le 1. \qquad (3.6.3)$$

$$x(n+1) = f(n, x(n)),\ x(n_0) = 0\,. \qquad (3.6.4)$$

fark denklemini ele alalım. Burada $x(n) \in \mathbb{R}^k$, $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. f, x e göre sürekli olsun. Eğer n değişkeni (3.6.4) denkleminin sağ tarafında bulunmuyorsa (3.6.4) sistemine otonom (zaman değişmez) denir. Bazı pozitif N sayıları ve tüm $n \in \mathbb{Z}$ için $f(n+N, x) = f(n, x)$ oluyorsa f ye periyodiktir denir. Tüm $n \ge n_0$ için $f(n, x^*) = x^*$ ise, x^* a (3.6.4) denkleminin denge noktası denir. Literatürde genelde denge noktası orijin olarak alınır. Sıfır çözüm olarak bilinir. Bu gerçeğin mantıksal açıklaması aşağıdaki gibidir.

$y(n) = x(n) - x^*$ olsun. Bu halde, (3.6.4) denklemi,

$$y(n+1) = f(n, y(n) + x^*) - x^* = g(n, y(n)). \qquad (3.6.5)$$

$y = 0$ ifadesi $x = x^*$ a tekabül eder. Şimdi de (3.6.4) sisteminin denge noktası ile ilgili çeşitli stabilite kavramlarını verelim.

Tanım 3.43: x^*, (3.6.4) denkleminin denge noktası olsun.

(1) $\varepsilon > 0$ ve $n_0 \ge 0$ olsun. Tüm $n \ge n_0$ için $\lVert x_0 - x^* \rVert < \delta$ olduğunda $\lVert x(n, n_0, x_0) - x^* \rVert < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, n_0)$ sayısı varsa x^* stabildir (S).

Eğer δ, n_0 değişkeninden bağımsızsa düzgün stabildir (US) denir. Eğer stabil değilse x^* a anstabildir denir.

(2) $\left\|x_0 - x^*\right\| < \mu$ olduğunda $\lim\limits_{n\to\infty} x(n, n_0, x_0) = x^*$ olacak şekilde $\mu = \mu(n_0)$ varsa x^* a çekici (A) nokta denir. Eğer μ, n_0 değişkeninden bağımsızsa çekici nokta düzgün (uniform) çekici olur. Diğer bir deyişle her ε ve n_0 için n_0 dan bağımsız bir $N = N(\varepsilon)$, $\left\|x - x^*\right\| < \mu$ olduğunda tüm $n \ge n_0 + N$ için $\left\|x(n, n_0, x_0) - x^*\right\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir μ sayısı vardır.

(3) x^* denge noktası kararlı ve çekici ise asimptotik kararlıdır (AS) denir. Eğer x^* düzgün kararlı ve düzgün çekici ise düzgün asimptotik kararlıdır denir.

(4) $\left\|x_0 - x^*\right\| < \delta$ olduğunda $\left\|x(n, n_0, x_0) - x^*\right\| \le M \left\|x_0 - x^*\right\| \eta^{n-n_0}$ olacak şekilde bir $\delta > 0$, $M > 0$ ve $\eta \in (0,1)$ varsa eksponansiyel karalıdır (ES) denir.

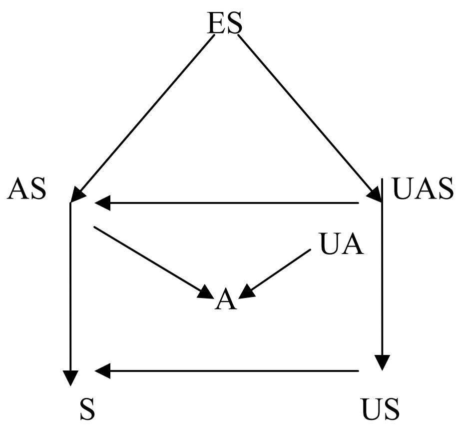
(5) M pozitif olsun. Tüm $n \ge n_0$ için $\left\|x(n, n_0, x_0)\right\| \le M$ oluyorsa çözüme sınırlıdır denir.

Not:

(i) Lineer sitemler için $UAS \Leftrightarrow ES$.

(ii) Otonom sistemler için $S \Leftrightarrow US$, $AS \Leftrightarrow UAS$, $A \Leftrightarrow UA$.

Bu durum aynı zamanda periyodik sistemler için de doğrudur. Bu durum aşağıdaki diyagramla özetlenebilir.



Örnekler

1. $x(n+1)=x(n)$ skaler denkleminin çözümü $x(n,n_0,x_0)=x_0$. Bu halde sıfır çözümü düzgün kararlıdır fakat asimptotik olarak kararlı değildir.

2. $x(n+1)=a(n)x(n)$ skaler denkleminin çözümleri ise

$$x(n,n_0,x_0)=\left[\prod_{i=n_0}^{n-1}a(i)\right]x_0 \tag{3.6.6}$$

ile verilir. Dolayısıyla aşağıdaki çıkarımlar yapılabilir.

(a) Sıfır çözümün kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\left|\prod_{i=n_0}^{n-1}a(i)\right|\leq M(n_0)\equiv M\ , \tag{3.6.7}$$

burada μ, n_0 a bağlı pozitif bir sabittir. Eğer $a(i)=(1+\eta^i), 0<\eta<1$ ise bu şart sağlanır. Bunu gösterebilmek için çözümü $x(n,n_0,x_0)=\phi(n)x_0$ şeklinde yazalım.

Burada $\phi(n)=\prod_{i=n_0}^{n-1}(1+\eta^i)$. $1+\eta^i<Exp(\eta^i)$ olduğundan,

$\phi(n)\leq Exp\left(\sum_{i=n_0}^{n-1}\eta^i\right)\leq Exp\left(\sum_{i=n_0}^{\infty}\eta^i\right)\leq Exp\left(\dfrac{\eta^{n_0}}{1-\eta}\right)=M(n_0)=M$ yazılır. $\varepsilon>0$ ve

$n_0\geq 0$ verilsin. Eğer $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2M}$ ise $|x_0|<\delta$ olduğunda $|x(n,n_0,x_0)|=\phi(n_0)x_0<\varepsilon$.

(b) Sıfır çözümün düzgün kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\left|\prod_{i=n_0}^{n-1}a(i)\right|\leq M\ . \tag{3.6.8}$$

Burada M, n_0 dan bağımsız pozitiftir. Bu şart $a(i)=\sin(i+1)$ ile gerçekleşir.

(c) Sıfır çözümün asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty}\left|\prod_{i=n_0}^{n-1}a(i)\right|=0. \tag{3.6.9}$$

Bu şart yine $a(i)=\dfrac{i+1}{i+2}$ ile gerçekleşir ve çözüm $x(n,n_0,x_0)=\dfrac{(n_0+1)}{(n+1)x_0}$ ile verilir.

Sonuç olarak bu durumda sıfır çözümü düzgün ve asimptotik olarak kararlıdır. Yani kısaca kararlılık globaldir. Fakat bu durum düzgün olarak asimptotik kararlı değildir.

(d) Sıfır çözümün düzgün olarak asimptotik kararlı (eksponansiyel kararlı) olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\left|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| \leq M\eta^{n-n_0}. \tag{3.6.10}$$

Burada $M > 0, 0 < \eta < 1$. Bu şart $a(i) = \dfrac{1}{i}$ seçilerek gerçekleşir.

Örnek 3.44:

$$x(n+1) = \left(\frac{n+1}{2}\right)\left[x(n)\right]^2$$

denkleminin çözümü,

$$x(n, n_0, x_0) = \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\left(\frac{n-2}{2}\right)^4 \ldots \left(\frac{n_0+1}{2}\right)^{2^{n-n_0-1}} (x_0)^{2^{n-n_0}}, \; x(n_0) = x_0$$

ile verilir. Eğer $|x_0|$ yeterince küçükse $\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$. Yani sıfır çekici çözümdür. Fakat düzgün olarak çekici değildir. $(n_0+1)\delta^2 \geq 2$ olacak şekilde $\delta > 0$ ve n_0 sayısını seçelim. Bu halde $(x_0) = \delta$ olur. Şimdi de sıfır çözümün karalılığını gözden geçirelim. $\varepsilon > 0$ ve $n_0 \geq 0$ olsun. $\delta = \dfrac{\varepsilon}{n_0+1}$ olsun. Eğer $|x_0| < \delta$ ise tüm $n \geq n_0$ için $|x(n, n_0, x_0)| < \varepsilon$. Burada δ, n_0 seçimine bağlıdır. Dolayısıyla sıfır çözüm kararlı fakat düzgün kararlı değildir.

Örnek 3.45: Kutupsal koordinatlardaki

$$r(n+1) = \sqrt{r(n)}, \; r > 0, \; \theta(n+1) = \sqrt{2\pi\theta(n)}, \; 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

fark denklemini ele alalım. $(1,0)$ denge noktası çekicidir fakat kararlı değildir.

$$r(n) = (r_0)^{\frac{1}{2}n}, r_0 = r(0),$$
$$\theta(n) = (2\pi)^{\left(1-(\frac{1}{2})^n\right)} \cdot \theta_0^{\frac{1}{2}^n}, \theta_0 = \theta(0).$$

Açıkça $\lim_{n\to\infty} r(n) = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} \theta(n) = 2\pi$. Eğer $r_0 \neq 0$ ve $\theta_0 = 0$ ise $\left(r(n), \theta(n)\right) = (r_0^{\frac{1}{2}n}, 0)$ dır ki bu da $(1,0)$ denge noktasına yakınsar. Buna rağmen eğer $\theta_0 = 2\pi - \delta$ ve $0 < \delta < 1$ ise (r_0, θ_0) orbiti saat ibresi yönünde spiral yaparak denge noktasına yakınsar. Dolayısıyla $(1,0)$ denge noktası çekicidir fakat kararlı değildir.

3.6.2 Lineer sistemlerin stabilitesi

$$x(n+1) = A(n)x(n),\ n \geq n_0 \geq 0. \tag{3.6.11}$$

lineer otonom sisteminin stabilitesi araştırılacaktır. Burada tüm $n \geq n_0$ için $A(n)$ nansingülerdir. (3.6.11) sistemi için elde edilen sonuçlar

$$x(n+1) = Ax(n) \tag{3.6.12}$$

otonom lineer sisteme uyarlanabilir. (3.6.11) ve (3.6.12) sisteminin fundamental matrisi $\Phi(n)$ ise $\Phi(n,m) = \Phi(n)\Phi^{-1}(m)$ konum geçiş matrisidir. Üstelik (3.6.12) sistemi için $\Phi(n,m) = \Phi(n-m) = e^{A(n-m)}$.

Teorem 3.46:

(3.6.11) sistemini ele alalım. Bu halde bu sistemin sıfır çözümünün,

(i) Kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\|\Phi(n)\| \leq M,\ n \geq n_0 \geq 0 \tag{3.6.13}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısının olmasıdır.

(ii) Düzgün kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\|\Phi(n,m)\| \leq M,\ n_0 \leq m \leq n < \infty \tag{3.6.14}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısının olmasıdır.

(iii) Asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} \|\Phi(n)\| = 0. \tag{3.6.15}$$

(iv) Düzgün olarak asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\|\Phi(n,m)\| \leq M\eta^{n-m},\ n_0 \leq m \leq n < \infty \tag{3.6.16}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ ve $\eta \in (0,1)$ olmasıdır.

İspat: (3.6.13)- (3.6.16) şartları boyunca bir fundamental matris için doğru ise her fundamental matris için doğru olacağından genelliği bozmaksızın $\Phi(n_0) = I$ olsun. Böylece $x(n,n_0,x_0) = \Phi(n)x_0$.

(i) (3.6.13) eşitsizliği doğru olsun. Bu halde, $\|x(n,n_0,x_0)\| \leq Mx_0$. Verilen $\varepsilon > 0$ için $\delta < \dfrac{M}{\varepsilon}$ olsun. Bu halde, $\|x_0\| < \delta$ olduğunda $\|x(n,n_0,x_0)\| < \varepsilon$. Sonuç olarak sıfır çözümü kararlıdır. Tersine $\|x_0\| < \delta$ olduğunda $\|x(n, n_0, x_0)\| = \|\Phi(n, x_0)\| < \varepsilon$ olsun. $\|x_0\| < \delta$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $\dfrac{\|x_0\|}{\delta} < 1$. Dolayısıyla

$$\|\Phi(n)\| = \sup_{\|\xi\| \le 1} \|\Phi(n)\xi\| = \frac{1}{\delta} \sup_{\|x_0\| \le \delta} \|\Phi(n)x_0\| \le \frac{\varepsilon}{\delta} = M \ .$$

(ii) ve (iii) nin ispatı kolaydır.

(iv) (3.6.16) eşitsizliği doğru olsun. (3.6.11) sisteminin sıfır çözümü (ii) den dolayı düzgün kararlıdır. Üstelik $\varepsilon > 0$ için $0 < \varepsilon < M$, $\mu = 1$ ve N öyle ki $\eta^N < \dfrac{\varepsilon}{M}$ olur. Dolayısıyla $\|x_0\| < 1$ ise $n > n_0 + N$ için $\|x(n, n_0, x_0)\| = \|\Phi(n, n_0)x_0\| < M\eta^{n-n_0} < \varepsilon$. Sıfır çözüm düzgün olarak asimptotik kararlı olur. Tersine sıfır çözüm düzgün olarak asimptotik kararlı olsun. Bu taktirde Teorem 3.46 (ii) den dolayı düzgün kararlı olur. Dolayısıyla $0 \le n_0 \le m < \infty$ için $\|\Phi(n, m)\| \le M$. Düzgün çekicilikten bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $0 < \varepsilon < 1$, $n \ge n_0 + N$ ve $\|x_0\| < \mu$ için $\|\Phi(n, n_0, x_0)\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı vardır. Bu halde $n \in \left[n_0 + mN, n_0 + (m+1)N\right], m > 0$ için

$$\|\Phi(n, n_0)\| \le \|\Phi(n, n_0 + mN)\| \ \|\Phi(n_0 + mN, n_0 + (m-1)N\| ... \|\Phi(n_0 + N, n_0)\| \le M\varepsilon^m$$

$$\le \frac{M}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{\frac{1}{n}}\right)^{(m+1)N} = \tilde{M}\,\eta^{(m+1)N} = \tilde{M}\,\eta^{(n-n_0)} .$$

Burada $\tilde{M} = \dfrac{M}{\varepsilon}, \eta = \varepsilon^{\frac{1}{N}}$, $mN \le n - n_0 \le (m+1)N.$

Sonuç 3.47: (3.6.11) sistemi için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) Sıfır çözümünün kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart tüm çözümlerin sınırlı olmasıdır.

(ii) Sıfır çözümünün eksponansiyel olarak kararlı olabilmesi için gerek ve yeter sıfırın düzgün asimptotik kararlı olmasıdır.

İspat: İspatlar (3.6.14) ve (3.6.16) şartlarından elde edilir.

Sonuç 3.48: (3.6.11) sistemi için sıfır çözümünün her lokal kararlılık özelliği global kararlılık özelliğini vurgular.

İspat: Bu sonucun ispatı Teorem 3.46'dan elde edilir.

Teorem 3.49:

(i) Eğer $\sum_{i=1}^{k}\left|a_{ij}(n)\right| \leq 1,\ 1 \leq j \leq k,\ n \geq n_0$ ise (3.6.11) sisteminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır.

(ii) Eğer bazı $\nu > 0,\ 1 \leq j \leq k$ ve $n \geq n_0$ için $\sum_{i=1}^{k}\left|a_{ij}(n)\right| \leq 1-\nu$ ise sıfır çözüm düzgün olarak asimptotik kararlıdır.

İspat:

(i) Teorem 3.46'nın (i) şartından tüm $n \geq n_0$ için $\left\|A(n)\right\|_1 \leq 1$.

Sonuç olarak $\left\|\Phi(n,m)\right\|_1 = \left\|\prod_{i=m}^{n-1} A(i)\right\|_1 \leq \left\|A(n-1)\right\|_1 \left\|A(n-2)\right\|_1 ... \left\|A(m)\right\|_1 \leq 1$. Bu ise Teorem 3.46 (ii) den düzgün kararlılığı vurgular.

(ii) İspatı (i) şıkkına benzerdir.

Teorem 3.50:

(i) (3.6.12) denkleminin sıfır çözümünün kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart $\rho(A) \leq 1$ ve eigen değerlerinin semi-simple olmasıdır.

(ii) (3.6.12) denkleminin sıfır çözümünün asimptotik olarak kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart $\rho(A) < 1$.

İspat:

(i) $A = PJP^{-1}$ olsun. Burada $J = diag(J_1, J_2, ..., J_r)$ A nın Jordan formudur ve

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Teorem 3.46'dan (3.6.12) denkleminin sıfır çözümünün kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart $\left\|A^n\right\| = \left\|PJ^nP^{-1}\right\| \leq M$ veya $\left\|J^n\right\| \leq \tilde{M}$.

Burada, $\tilde{M} = \dfrac{M}{(\|P\|\|P^{-1}\|)}$, $J^n = diag(J_1^n, J_2^n, ..., J_r^n)$,

$$J_i^n = \begin{pmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \cdots & \binom{n}{s_i-1} & \lambda_i^{n-s_i+1} \\ 0 & \lambda_i^n & \cdots & \vdots & \\ & & & \lambda_i^{n-1} & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^n & \end{pmatrix}.$$

Açıkça eğer $|\lambda_i| > 1$ veya $|\lambda_i| = 1$ ise ve J_i, 1×1 boyutunda değilse J_i^n sınırsız olur. Eğer $|\lambda_i| > 1$ ise $n \to \infty$ için $J_i^n \to 0$. Bu sonucu ispat edebilmek için $n \to \infty$ ve bazı pozitif ℓ için $|\lambda_i^n| n^{\ell} \to 0$ olduğunu göstermek kolaydır. $|\lambda_i^n| n^{\ell} = n^{\ell} e^{(\ln|\lambda_i|)n}$ olduğundan sonuç L'Hospital kuralından elde edilir.

(ii) İspatı yukarıda ifade edilen tartışma ile yapılır.

Şimdi de,

$$x(n+1) = A(n)x(n),\ A(n+N) = A(n) \qquad (3.6.17)$$

sisteminin stabilitesini inceleyelim. Eğer $\Phi(n,n_0)$, (3.6.12) denkleminin fundamental matrisi ise sabit bir B matrisi vardır. Bu B matrisinin eigen değerlerine Floquet üsleri denir. Periyodik $P(n,n_0)$ matrisi $\Phi(n,n_0) = P(n,n_0)\cdot B^{n-n_0}$ şartını sağlar. Burada $P(n+N,n_0) = P(n,n_0)$. Eğer B^n sınırlı ise $\phi(n,n_0)$ da sınırlıdır. Eğer $n \to \infty$ için $B^n \to 0$ ise $n \to \infty$ için $\Phi(n,n_0) \to 0$. Bu ise aşağıdaki teoremin ispatıdır.

Teorem 3.51: (3.6.17) denkleminin sıfır çözümü,

(i) Stabildir. Stabil olabilmesi için gerek ve yeter şart Fluquet üslerinin uzunluklarının birden küçük veya eşit olması gerekir. Uzunluğu bire eşit olanlara yarı basittir denir.

(ii) Asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart tüm Fluquet üslerinin birim yuvarın içinde olmasıdır.

Sonuç 3.52: (3.6.17) denkleminin sıfır çözümü,

(i) Eğer $C = A(N-1)A(N-2)...A(0)$ matrisinin her eigen değerinin uzunluğu 1 den küçük veya eşitse kararlıdır denir. Uzunluğu 1 e eşit olanlara yarı basit denir.

(ii) Eğer $C = A(N-1)A(N-2)...A(0)$ matrisinin her eigen değerinin uzunluğu 1 den küçükse asimptotik kararlıdır denir.

Not: $x(n+1) = A(n)x(n)$ lineer otonom sistemindeki kararlılık A nın eigen değerlerine göre belirlenir. Fakat $x(n+1) = A(n)x(n)$ periyodik sistemi için eigen değerleri sistemin stabilitesinde bir role sahip değildir. Bunun yerine $A(n)$ nin Fluquet çarpanları stabiliteyi belirler.

Örnek 3.53:

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2+(-1)^n}{2} \\ \frac{2+(-1)^n}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

matrisini ele alalım. Bu matrisin eigen değerleri $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ dir. Böylece $\rho\left[A(n)\right] < 1$.

3.52 sonucu kullanılarak sistemin stabilitesi hakkında bilgi edinilir.

$$C = A(1)A(0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla 3.52 sonucundan tüm çözümler sınırsızdır. Bu sistemin fundamental matrisi,

$$\Phi(n) = \begin{pmatrix} \frac{2^{1-n}-(-2)^{1-n}}{2} & \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(-\frac{3}{2}\right)^n}{2} \\ \frac{2^{-n}-(-2)^{-n}}{2} & \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(-\frac{3}{2}\right)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

Dolayısıyla tüm çözümler sınırsızdır. Netice olarak sıfır çözümü kararsızdır. Bu örnekle nanotonom fark denklemlerinin stabilitesinde eigen değerlerin bir role sahip olmadığı görülür.

Örnek 3.54:

$$Ax = b \tag{3.6.18}$$

lineer cebirsel sistemini ele alalım. Burada A, $k \times k$ boyutunda bir matristir. (3.6.18) denklemini nümeriksel olarak çözmek için iteratif metotlar yaygın olarak kullanılır.

$$x(n+1) = Bx(n) + d \tag{3.6.19}$$

fark denklemini kullanarak $x(n)$ dizisi elde edilir. Burada B ve d seçimi kullanılan iteratif metoda bağlıdır. Eğer (3.6.18) dekleminin çözümü, (3.6.19) denkleminin denge noktası ise, (3.6.19) iteratif denklemi (3.6.18) denklemi ile tutarlıdır. Yani,

$$Bx^* + d = x^* \tag{3.6.20}$$

Şimdi tutarlı olan bu Jacobi İteratif Metodu'nu ele alalım. Matrisinin köşegen elemanları sıfırdan farklı olsun. Bu takdtirde nansingülerdir. (3.6.19) denkleminde,

$$B = I - D^{-1}A, d = D^{-1}b \tag{3.6.21}$$

tanımlayalım. Bu metot tutarlıdır. Eğer A nansingüler ise x^* tektir. Bununla ilişkilendirilmiş hata denklemi $e(n) = x(n) - x^*$ ile elde edilir. Bu taktirde (3.6.19) ve (3.6.20) denkleminden,

$$e(n+1) = Be(n) \tag{3.6.22}$$

bulunur. Açıkça $n \to \infty$ için $x(n) \to x^*$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $n \to \infty$ için $e(n) \to 0$ olmasıdır. Diğer bir deyişle (3.6.19) denklemindeki interatif metodunun (3.6.18) denklemindeki x^* çözümüne yakınsaması için gerek ve yeter şart (3.6.22) denkleminin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olmasıdır. Teorem 3.50'den iteratif metodun yakınsaması için gerek ve yeter şart $\rho(B) < 1$.

3.6.3 Skaler denklemler

$$x(n+k) + p_1x(n+k-1) + p_2x(n+k-2) + ... + p_kx(n) = 0 \tag{3.6.23}$$

k mertebeli skaler denklemini ele alalım. Burada p_i ler reeldir. Sonuç 2.25 ve Lemma 2.24 'ten (3.6.23) denkleminin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart (3.6.23) denkleminin her karakteristik λ değerinin mutlak değerce 1 den küçük olmasıdır. Kısaca,

$$p(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + ... + p_k \tag{3.6.24}$$

karakteristik polinomunun her sıfırı mutlak değerce 1 den küçüktür. Üstelik (3.6.23) denkleminin sıfır çözümünün kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart $|\lambda| \leq 1$ olmasıdır. Diğer taraftan eğer $|\lambda| = 1$ olacak şekilde bir karakteristik kök varsa 2.24 lemmasına göre (3.6.23) denkleminin sıfır çözümü kararsızdır. Karakteristik köklerinin birim çemberin içerisinde olması için gerekli Schur-Cohn kriterini verelim. Bu kriter aynı zamanda asimptotik şekilde kararlılık için de geçerlidir. Schur-Cohn metodunun anlaşılabilir olması için bazı ön bilgileri verelim. $B=(b_{ij})$ matrisinin içindekilerini tanımlayalım. Bir matrisin içindekileri matrisin kendisi ve bu matrisin ilk-son satırları ve ilk-son sütunları ortadan kaldırılarak elde edilir. Örneğin,

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{pmatrix}$$

Bir B matrisinin innerleri pozitif ise bu B matrisine pozitif innerwise denir.

Teorem 3.55: (3.6.24) karakteristik polinomunun sıfırlarının birim çember içinde olması için gerek ve yeter şart,

(i) $p(1)>0$,

(ii) $(-1)^k p(-1)>0$,

(iii) $B_{k-1}^{\pm}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ p_{k-3} & & & \\ p_{k-2} & p_{k-3} & p_1 & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & p_k \\ 0 & 0 & \dots & p_k & p_{k-1} \\ \vdots & & & & \\ 0 & p_k & & & p_3 \\ p_k & p_{k-1} & \cdots & p_3 & p_2 \end{pmatrix}$

$(k-1)\times(k-1)$ boyutundaki matrisler pozitif innerwisedir.

Örnek 3.56:

$$x(n+2)+p_1x(n+1)+p_2x(n)=0 \qquad (3.6.25)$$

denklemini düşünelim. Karakteristik polinom $p(\lambda)=\lambda^2+p_1\lambda+p_2$. (3.6.25) denkleminin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olabilmesi için gerekli şartları elde edelim. $p(1)=1+p_1+p_2>0$ ve $(-1)^2p(-1)=1-p_1+p_2>0$.

Buradan $1+p_2>0$ olur. (iii) şartından $1-p_2>0$ veya $p_2<1$. Netice itibariyle (3.6.25) denkleminin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart,

(i) $1+p_1+p_2>0$,

(ii) $1-p_1+p_2>0$,

(iii) $p_2<1$.

Örnek 3.57:

$$x(n+k)+px(n+k-1)+qx(n)=0 \tag{3.6.26}$$

k ıncı mertebeden skaler denklemini ele alalım. (3.6.26) denkleminin sıfır çözümünün hangi şartlarda asimptotik kararlı (kararsız) olduğunu araştıralım.

Çözüm: (3.6.26) denkleminin karakteristik polinomu $p(\lambda)=\lambda^k+p\lambda^{k-1}+q$. $p(\lambda)$ nın tüm sıfırlarının birim çemberin içinde olduğunu göstermemiz lazım. Bu sonuca varabilmemiz için kompleks analizde çok önemli bir yere sahip olan Rouche's Teoremi'ni verelim.

Teorem 3.58: (Rouche's Teoremi) Eğer $f(z)$ ve $g(z)$ kompleks fonksiyonları basit kapalı bir γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik ve γ eğrisi üzerinde $|g(z)|<|f(z)|$ ise, $|f(z)|$ ve $|f(z)|+|g(z)|$ γ içinde aynı sayıda sıfırlara sahiptir. γ eğrisi $|z|=1$ olsun. $|g(z)|=pz^{k-1}+q$ ve $|f(z)|=z^k$ olsun. Bu taktirde $|g(z)|\le|p|+|q|$ ve $|f(z)|=1$. Dolayısıyla,

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|\le|p|+|q|<1 \tag{3.6.27}$$

ise γ üzerinde $|g(z)|<|f(z)|$. Rouche's Teoremi'nden γ içinde $f(z)$ ve $g(z)$ nin sıfırları aynıdır. Fakat $f(z)=z^k$ nın kökleri $z_1=z_2=...=z_k=0$. Dolayısıyla karakteristik denklemin tüm sıfırları birim çemberin içindedir. Sonuç olarak (3.6.26) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Şimdi de (3.6.26) denkleminin sıfır çözümünün hangi şartlarda kararsız olduğunu ispat edelim. $f(z)=pz^{k-1}$ ve $g(z)=z^k+q$ olsun. Bu takdirde $|z|=1$ çemberi üzerinde $|f(z)|=|p|$ ve $|g(z)|\le 1+|q|$.

$$|p|-|q|>1 \tag{3.6.28}$$

olsun. Bu takdirde birim çember üzerinde ve içinde Rouche's Teoremi'nden $|f(z)|$ ve $|f(z)|+|g(z)|$ sıfırları aynıdır. Yani birim çember içerisinde $f(z)$ nin sıfıra sahip olmadığı açıktır. (3.6.26) ile (3.6.28) denklemlerinin sıfır çözümü kararsızdır.

$$x(n+k)-x(n+k-1)+qx(n)=0 \tag{3.6.29}$$

denklemini düşünelim. (3.6.29) denkleminin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart,

$$0<q<2\cos\frac{(k-1)\pi}{2k-1} \quad . \tag{3.6.30}$$

Burada $k=1,2,3,....$

Örnek 3.59:

$$x(n+2)-x(n+1)+\frac{\alpha-1}{\alpha}x(n)=0 \tag{3.6.31}$$

ikinci mertebeden fark denklemini ele alalım. (3.6.30) şartı altında (3.6.31) denkleminin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$0<\frac{\alpha-1}{\alpha}<2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$$

olmasıdır. Yani $\alpha>1$ olmasıdır.

3.6.4 Faz uzay analizi

Bu kısımda,

$$x_1(n+1)=a_{11}x_1(n)+a_{12}x_2(n)\,,$$

$$x_2(n+1)=a_{21}x_1(n)+a_{22}x_2(n) \text{ veya}$$

$$x(n+1)=Ax(n) \tag{3.6.32}$$

otonom sistemin stabilitesi çalışılacaktır. Burada,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Şimdi (3.6.32) sisteminde $Ax^*=x^*$ veya $(A-I)x^*=0$ ise x^* a sisteminin denge noktası denir. Eğer $(A-I)$ nansingüler ise x^* a (3.6.32) sisteminin tek denge noktası denir. Diğer taraftan eğer $(A-I)$ singüler ise, bu takdirde singüler nokta birden fazladır. Bu son durumda $y(n)=x(n)-x^*$ olsun. Buradan (3.6.23) sistemine denk olan $y(n+1)=Ay(n)$ sistemi elde edilir. Denge noktası sıfırdan farklı ise bu denge noktası orjine kaydırılabilir. Kolaylık olsun diye (3.6.32) sisteminin tek denge noktası $x^*=0$ olsun. $J=P^{-1}AP$, A nın Jordan formu olsun. Bu takdirde J aşağıdaki kanonik formlardan birine sahiptir.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

(a) (b) (c)

(a): Birbirinden farklı eşlenik reel λ_1, λ_2 eigen değerleri,

(b): Tekrarlı reel λ eigen değeri,

(c): Kompleks $\lambda = \alpha \pm i\beta$.

$$y(n) = P^{-1}x(n)$$

veya

$$x(n) = Py(n) \tag{3.6.33}$$

olsun. Bu taktirde (3.6.23) sistemi

$$y(n+1) = Jy(n) \tag{3.6.34}$$

olur. Eğer (3.6.32) sistemi için başlangıç koşulu $x(0) = x_0$ ise $y(0) = y_0 = P^{-1}x_0$ ifadesi (3.6.33) sisteminin başlangıç koşuluna tekabül eder.

Durum (a)

$$y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1(n+1) &= \lambda_1 y_1(n) \\ y_2(n+1) &= \lambda_2 y_2(n). \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n y_{10} \\ \lambda_2^n y_{20} \end{pmatrix}.$$

Sonuç olarak

$$\frac{y_2(n)}{y_1(n)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \left(\frac{y_{20}}{y_{10}}\right).$$

Eğer $\lambda_1 > \lambda_2$ ise $\lim_{n\to\infty} \frac{y_2(n)}{y_1(n)} = 0$ ve eğer $\lambda_1 < \lambda_2$ ise $\lim_{n\to\infty} \frac{y_2(n)}{y_1(n)} = \infty$.

Durum (b)

$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = J^n \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$$

veya

$$y_1(n) = \lambda^n y_{10} + n\lambda^{n-1} y_{20}$$
$$y_2(n) = \lambda^n y_{20}.$$

Sonuç olarak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_2(n)}{y_1(n)} = 0.$$

Durum (c)

A matrisi iki kompleks eşlenik değere sahip olsun. Yani

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta$$

ve

$$\lambda_2 = \alpha - i\beta \,,\ \beta \neq 0.$$

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$ karşılık gelen eigen vektör $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\alpha + i\beta)^n = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} |\lambda_1|^n \, n(\cos nw + i \sin nw),$$

$$= |\lambda_1|^n \begin{pmatrix} \cos nw \\ -\sin nw \end{pmatrix} + i|\lambda_1|^n \begin{pmatrix} \sin nw \\ \cos nw \end{pmatrix}.$$

Burada $w = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. Dolayısıyla genel çözüm,

$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = |\lambda_i|^n \begin{pmatrix} c_1 \cos nw + c_2 \sin nw \\ -c_1 \sin nw + c_2 \cos nw \end{pmatrix}$$

ile verilir. Şimdi $y_1(0) = y_{10}$ ve $y_2(0) = y_{20}$ başlangıç şartları altında $c_1 = y_{10}$ ve $c_2 = y_{20}$ bulunur. Dolayısıyla çözüm,

$$y_1(n) = |\lambda_1|^n \left(y_{10} \cos nw + y_{20} \sin nw \right),$$

$$y_2(n) = |\lambda_2|^n \left(-y_{10} \sin nw + y_{20} \cos nw \right).$$

$\cos\gamma = \frac{y_{10}}{r_0}$ ve $\sin\gamma = \frac{y_{20}}{r_0}$ olsun. Burada $r_0 = \left(y_{10}^2 + y_{20}^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Bu taktirde $y_1(n) = |\lambda_1|^n r_0 \cos(nw - \gamma)$ ve $y_2(n) = |\lambda_1|^n r_0 \sin(nw - \gamma)$. Kutupsal koordinatlar yardımıyla çözüm,

$$r(n) = r_0 |\lambda_1|^n \,,\theta(n) = -(nw - \gamma)$$

ile verilir. Eğer $|\lambda_1| < 1$ ise asimptotik stabildir. (Şekil 3.1a) $|\lambda_1| > 1$ ise denge noktası kararsızdır. (Şekil 3.1b) $|\lambda_1| = 1$ ise yarıçapı $r_0 = \sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2}$ olan orbitler elde edilir.

Örnek 3.60:

$$x(n+1) = Ax(n)\,,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix}$$

sisteminin faz uzayını çizelim.

Çözüm: A nın eigen değerleri $\lambda_1 = 1.5$ ve $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$. Karşılık gelen eigen vektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nihayet

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}. \text{ Burada } P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Şekil 3.2a, $y_1(n+1) = Jy(n)$ sistemi için faz uzayının çizimidir. Probleme karşılık gelen faz uzayını bulabilmek için $x(n) = Py(n)$ olsun. $y_1 - y_2$ sistemi ile $x_1 - x_2$ sistemi arasındaki ilişkiyi tanımlayalım. $y_1 - y_2$ sisteminde $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_1 - x_2$ sisteminde $P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sistemine karşılık gelir. $y_1 - y_2$ sisteminde $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_1 - x_2$ sisteminde $P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sistemine karşılık gelir. y_1 ekseni $\theta_1 = \arctan(0.5)$ rotasyonu ile x_1 eksenine, y_2 ekseni $\theta_2 = \arctan(-0.5)$ rotasyonu ile x_2 eksenine dönüştürülür. Üstelik

$$\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

başlangıç noktasıyla kanonik sistem,

$$\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

başlangıç şartına tekabül eder. Sistemin faz uzayının çizimi Şekil 3.2b.

Örnek 3.61:

$$x(n+1) = Ax(n)\,,\; A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

sisteminin faz uzayını çizelim.

Çözüm: A nın eigen değerleri $\lambda_1 = 1+\sqrt{3i}$ ve $\lambda_2 = 1-\sqrt{3i}$. λ_1 e karşılık gelen eigen vektör

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eğer, $P = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ise, $P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Bu ise (c) durumundaki kanonik formdur. Dolayısıyla $y_1(n+1) = Jy(n)$ denkleminin çözümü,

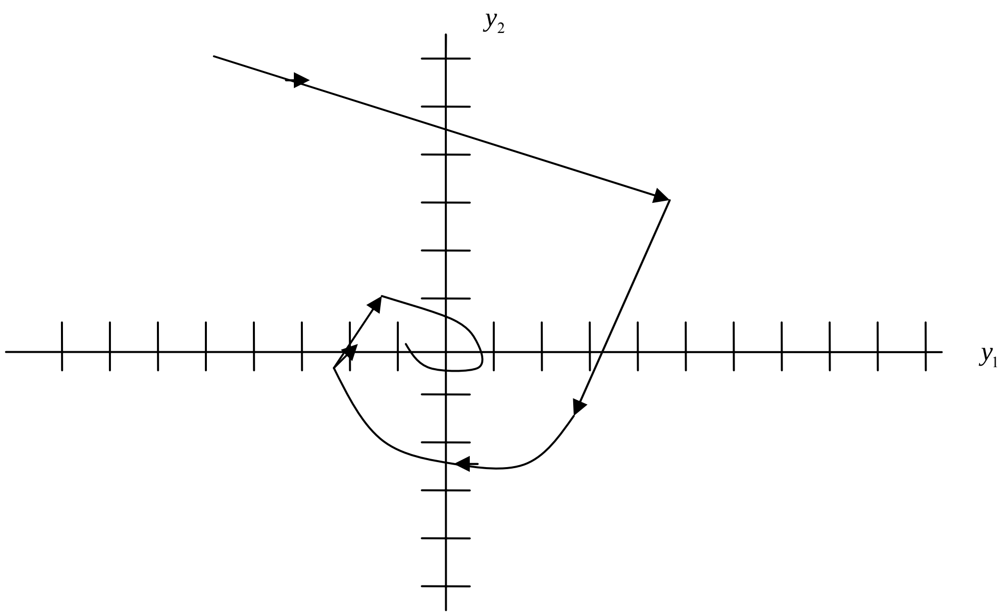
$$r(n) = r_0 |\lambda_1|^n = \sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2}(2)^n \text{ ve } \theta(n) = \alpha - nw\,.$$

Burada $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{y_{20}}{y_{10}}\right), w = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$.

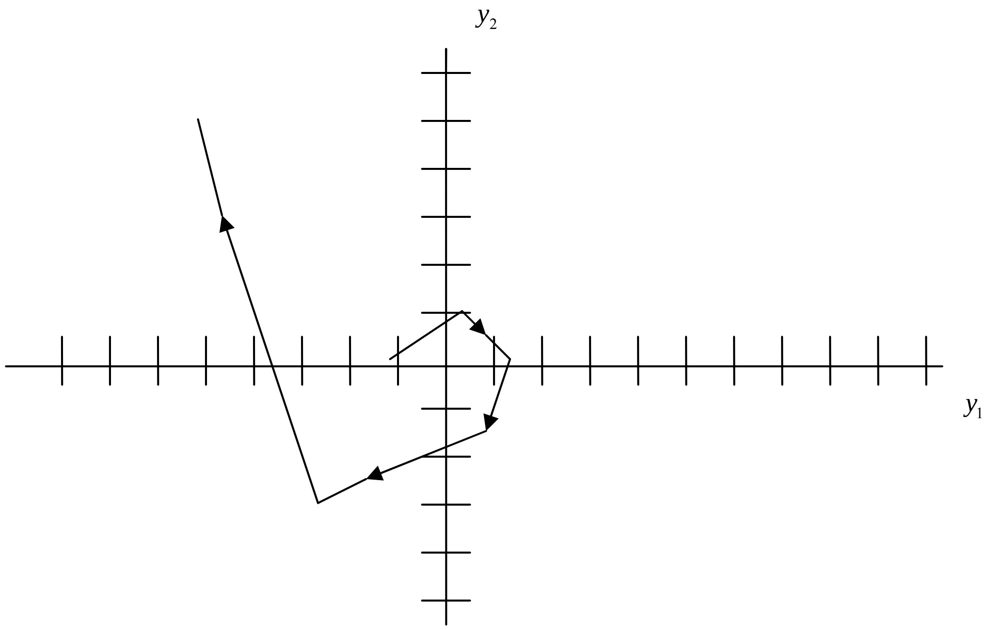
Şekil 3.3a, $(\frac{-1}{16},0)$ ın orbitini göstermektedir. Çözüm $r(n) = \frac{1}{16}(2)^n = 2^{n-4}$, $\theta(n) = \pi - \frac{(n\pi)}{3}$ ile verilir. Orijinal sistemde karşılık gelen orbit

$$x_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{16} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{16} \\ 0 \end{pmatrix}$$

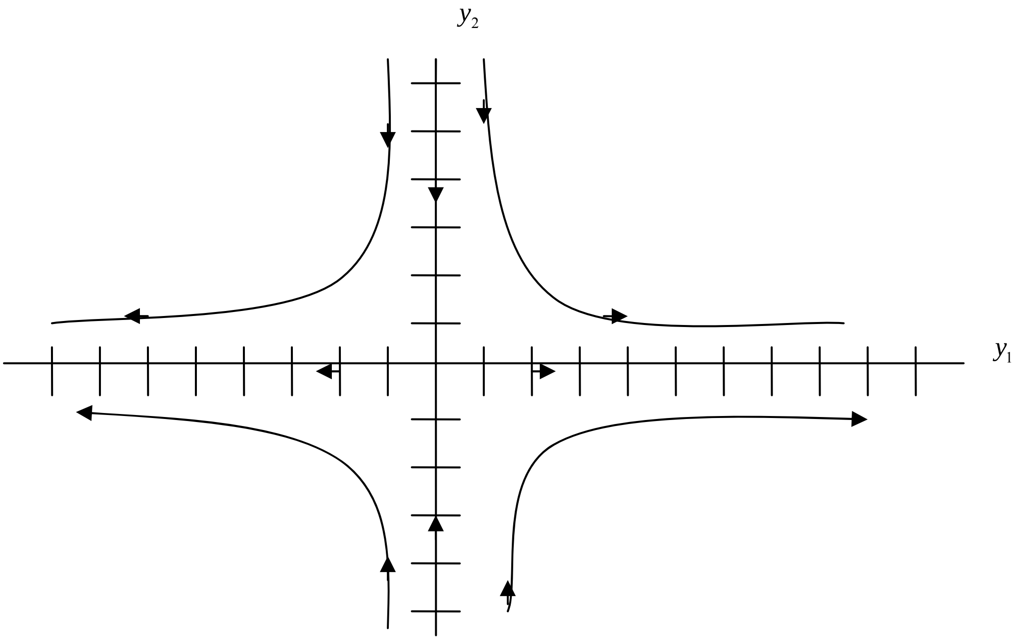
başlangıç noktasına sahiptir. (Şekil 3.3b) Burada eksen rotasyonu yapılmamıştır.



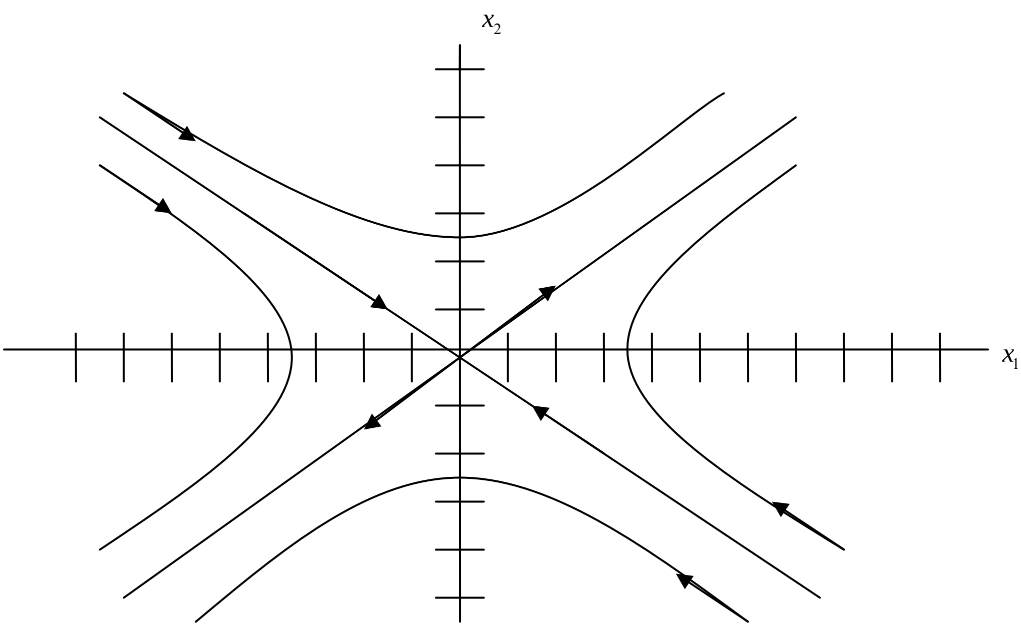
Şekil 3.1a



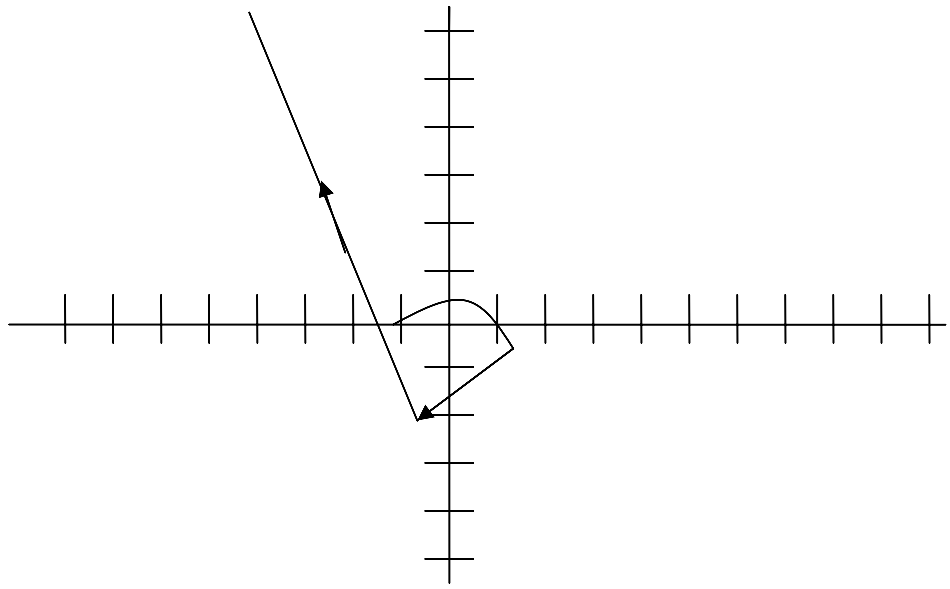
Şekil 3.1b



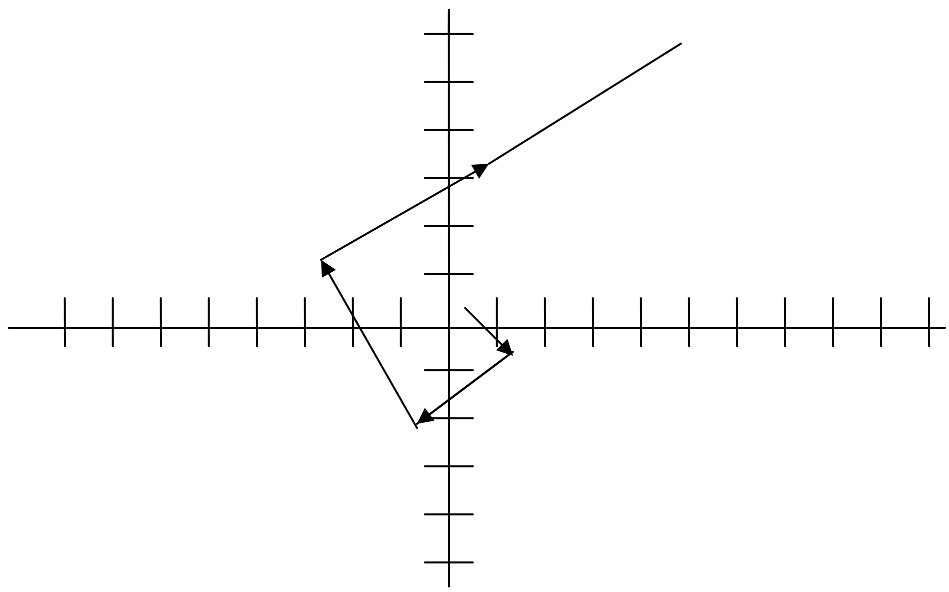
Şekil 3.2a



Şekil 3.2b



Şekil 3.3a



Şekil 3.3b

3.6.5 Lineer yaklaşım yardımıyla kararlılık

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n, y(n)) \tag{3.6.35}$$

nanlineer sistemi çalışılacaktır. Bu sistemin lineer kısmı

$$x(n+1) = A(n)x(n) \tag{3.6.36}$$

Burada $A(n)$ tüm $n \in \mathbb{Z}^+$ için nansingüler bir matristir. $g : \mathbb{Z}^+ \times G \to \mathbb{R}^k$, $G \subset \mathbb{R}^k$ sürekli bir fonksiyondur. (3.6.35) sistemi (3.6.36) sisteminin pertürbasyonu olarak algılanabilir. $g(n, y(n))$ fonksiyonu ölçümlerde doğru olmayan gürültü veya dışardan gelen pertürbasyonu (düzensizlikleri) temsil eder. (3.6.35) sistemi,

$$y(n+1) = f(n, y(n)) \tag{3.6.37}$$

formundaki nanlineer denklemlerin lineerizasyonundan elde edilebilir. Burada $f : \mathbb{Z}^+ \times G \to \mathbb{R}^k$, $G \subset \mathbb{R}^k$, y^* denge noktasında sürekli türevlenebilir bir fonksiyondur. (Yani $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y_i}\right|_{y^*}$ değeri mevcut ve $1 \le i \le k$ için y^* açık bir yuvarında süreklidir.) Aksi ifade edilmedikçe $y^* = 0$ olsun. Yine tüm $n \in \mathbb{Z}^+$ için $f(n,0) = 0$ olsun. Şimdi (3.6.37) sistemine tatbik edilen lineerizasyon metodunu tanımlayalım. $f = (f_1, f_2, ..., f_k)^T$. f nin Jacobian matrisi,

$$\left.\frac{\partial f(n,y)}{\partial y}\right|_{y^*} = \frac{\partial f(n,0)}{\partial y} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(n,0)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1(n,0)}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(n,0)}{\partial y_k} \\ \dfrac{\partial f_2(n,0)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2(n,0)}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(n,0)}{\partial y_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k(n,0)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_k(n,0)}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_k(n,0)}{\partial y_k} \end{pmatrix}$$

Kısaca $\dfrac{\partial f(n,0)}{\partial y} = f'(n,0)$ alalım. $\dfrac{\partial f(n,0)}{\partial y} = A(n)$ ve $g(n,y) = f(n,y) - A(n)y(n)$ olsun. Bu halde (3.6.37) sistemi (3.6.35) sistemi formatında yazılabilir. $g(n,y) = o(y)$ ifadesinin anlamını açıklayalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\|y\| < \delta$ olduğunda $\|g(n,y)\| \le \varepsilon \|y\|$. (Diğer bir deyişle $\|y\| \to 0$ için $\left\|\dfrac{g(n,y)}{y}\right\| \to 0$ olacaktır.

(3.6.37) sisteminin özel bir durumu olan

$$y(n+1) = f(y(n)) \tag{3.6.38}$$

otonom sistemi

$$y(n+1) = Ay(n) + g(y(n)) \qquad (3.6.39)$$

formatında yazılabilir. Burada $A = f'(0)$, f nin Jacobian matrisinin sıfırdaki değeridir ve $g(y) = f(y) - Ay$. f, sıfır noktasında türevlenebilir olduğundan $\|y\| \to 0$ iken $g(n,y) = o(y)$ veya buna denk olarak $\lim_{\|y\|\to 0} \frac{\|g(y)\|}{\|y\|} = 0$.

Lemma 3.62: (Gronwall eşitsizliğinin diskrit analoğu) $n \geq n_0 \geq 0$ ve $h(n) \geq 0$ olmak üzere $z(n)$ ve $h(n)$ reel sayıların iki dizisi olsun. Eğer bazı

$$M > 0 \text{ için } z(n) \leq M\left[z(n_0) + \sum_{j=n_0}^{n-1} h(j)z(j)\right]$$

ise

$$z(n) \leq z(n_0)\prod_{j=n_0}^{n-1}\left[1 + Mh(j)\right],\ n \geq 0 \qquad (3.6.40)$$

$$z(n) \leq z(n_0)\exp\left[\sum_{j=n_0}^{n-1} Mh(j)\right],\ n \geq n_0. \qquad (3.6.41)$$

İspat:

$$u(n) = M\left[u(n_0) + \sum_{j=n_0}^{n-1} h(j)u(j)\right],\ u(n_0) = z(n_0). \qquad (3.6.42)$$

Tüm $j \geq n_0$ için $h(j) \geq 0$ olduğundan tüm $n \geq n_0$ için $z(n) \leq u(n)$ dir. (3.6.42) denkleminden $u(n+1) - u(n) = Mh(n)u(n)$ veya $u(n+1) = \left[1 + Mh(n)\right]u(n)$. Buradan kolaylıkla,

$$u(n) = \prod_{j=n_0}^{n-1}\left[1 + Mh(j)\right]u(n_0)$$

elde edilir. Bu ise (3.6.40) tır. (3.6.40) formülüne logaritma uygulanırsa,

$$\log z(n) \leq \log z(n_0) + \log \sum_{j=n_0}^{n-1} 1 + Mh(j).$$

Bu son denklemin eksponansiyeli alınırsa,

$$e^{\log z(n)} \leq e^{\left(\log z(n_0) + \log \sum_{j=n_0}^{n-1} 1 + Mh(j)\right)}.$$

$$z(n) \le z(n_0)\exp\left[\sum_{j=n_0}^{n-1} Mh(j)\right].$$

Bu ise (3.6.41) denklemidir.

Teorem 3.63: $\|y\| \to 0$ iken $g(n,y) = o(\|y\|)$ olsun. (3.6.36) homojen sisteminin sıfır çözümü düzgün olarak asimptotik kararlı ise, (3.6.35) nanlineer sisteminin sıfır çözümü eksponansiyel olarak kararlıdır.

İspat: (3.6.16) denkleminden $\eta \in (0,1)$ ve bazı $M \ge 1$ için $n \ge m \ge n_0$ olduğunda $\|\Phi(n,m)\| \le M\eta^{(n-m)}$. (3.2.12) Parametrelerin Değişim Formülü'nden (3.6.39) denkleminin çözümü,

$$y(n,n_0,y_0) = \Phi(n,n_0)y_0 + \sum_{j=n_0}^{n-1} \Phi(n, j+1)g(n, y(j)).$$

Sonuç olarak,

$$\|y(n)\| \le M\eta^{(n-n_0)}\|y_0\| + M\eta^{-1}\sum_{j=n_0}^{n-1} \eta^{(n-j)}\|g(n,y(j))\|. \tag{3.6.43}$$

$\varepsilon > 0$ verilsin. $\|y\| < \delta$ olduğunda $\|g(n,y)\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. $\|y(j)\| < \delta$ oldukça,

$$\eta^{-n}\|y(n)\| \le M\left[\eta^{-n_0}\|y_0\| + \sum_{j=n_0}^{n-1} \varepsilon\eta^{-j-1}\|y(j)\|\right]. \tag{3.6.44}$$

$z(n) = \eta^{-n}\|y(n)\|$ olsun. Gronwall eşitsizliğinden,

$$\eta^{-n}\|y(n)\| \le \eta^{-n_0}\|y_0\|\sum_{j=n_0}^{n-1}\left[1+\varepsilon\eta^{-1}M\right].$$

Sonuç olarak $\varepsilon < (1-\eta)/M$ seçilirse,

$$\|y(n)\| \le \|y_0\|(\eta+\varepsilon M)^{(n-n_0)}. \tag{3.6.45}$$

Bu halde $\eta + \varepsilon M < 1$. Sonuç olarak $n \ge n_0 \ge 0$ olduğunda $\|y(n)\| \le \|y_0\| < \delta$ elde edilir. (3.6.44) sağlanır. (3.6.45) den eksponansiyel kararlılık elde edilir.

Sonuç 3.64: Eğer $\rho(A) < 1$ ise (3.6.39) denkleminin sıfır çözümü eksponansiyel olarak kararlıdır.

İspat: Teorem 3.49 ve Teorem 3.63 ile sonuç ispat edilir.

Sonuç 3.65: Eğer $\|f'(0)\| < 1$ ise (3.6.39) denkleminin sıfır çözümü eksponansiyel kararlıdır.

İspat: $\rho\left(\|f'(0)\|\right) \le \|f'(0)\|$ olduğundan ispat, Sonuç 3.64'ten elde edilir.

Sonuç 3.64 ve Sonuç 3.65 hakkında önemli bir nokta: $\|A\| \ge 1$ iken $\rho(A) < 1$ olabilir. Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix},\ \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 1,\ \|A\|_\infty = \frac{3}{2},\ \|A\|_1 = \frac{3}{2}.$$

Buna rağmen, $\rho(A) = \dfrac{1}{2}$. Bu matrisle $x(n+1) = Ax(n) + g(x(n))$ sisteminin sıfır çözümü $\|x\| \to 0$ iken $g(x) = o(x)$ olmasıyla eksponansiyel olarak kararlıdır. Açıkça, Sonuç 3.65 sistemin kararlılığını belirlemede yetersizdir. Bu yetersizliğe rağmen Sonuç 3.65 bilim adamları ve mühendisler arasında oldukça popülerdir.

Eğer $\rho(A) < 1$ ise $\|QAQ^{-1}\| < 1$ olacak şekilde bir singüler olmayan Q matrisi vardır. $A = \|QAQ^{-1}\|$ olacak şekilde alınırsa, Lemma 3.62 kullanılabilir.

Örnek: $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$ ve $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ olsun. Bu taktirde, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$ ve $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0.5 & \alpha \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$ olur. $\|QAQ^{-1}\|_1 = \alpha + 0.5$. Eğer $\alpha < 0.5$ ise, $\|QAQ^{-1}\|_1 < 1$. Bu durum $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & & \lambda \end{pmatrix}$ tipindeki bir Jordan Block'a genelleştirilebilir. $Q = diag(1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{k-1})$ olsun. Dolayısıyla $QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \alpha \\ 0 & 0 & & \lambda \end{pmatrix}$ ve $\|QAQ^{-1}\|_1 = |\lambda| + |\alpha|$. Netice olarak eğer $|\lambda| < 1$ ise $|\lambda| + |\alpha| < 1$ olacak şekilde bir α seçilebilir. Bu durumda, $\|A\| = \|QAQ^{-1}\|_1$, $\|A\| < 1$.

Örnek 3.66:

$$y_1(n+1) = ay_2(n)/\left[1+y_1^2(n)\right],$$

$$y_2(n+1) = by_1(n)/\left[1+y_2^2(n)\right] \qquad (3.6.46)$$

sisteminin sıfır çözümünün stabilitesini inceleyelim.

Çözüm: $f = (f_1, f_2)^T$ olsun. Bu takdirde Jacobian matrisi,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|(0,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(0,0)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1(0,0)}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial f_2(0,0)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2(0,0)}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$ Dolayısıyla,

$$\begin{pmatrix} y_1(n+1) \\ y_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ay_2(n)y_1^2(n)/\left[1+y_1^2(n)\right] \\ -by_2^2(n)y_1(n)/\left[1+y_2^2(n)\right] \end{pmatrix}$$

veya

$$y(n+1) = Ay(n) = g(y(n)).$$

A nın eigen değerleri, $\lambda_1 = \sqrt{ab}$, $\lambda_2 = -\sqrt{ab}$. Eğer $|ab| < 1$ ise, $x(n+1) = Ax(n)$ sisteminin lineer kısmının sıfır çözümü asimptotik olarak kararlıdır. $g(y)$, $(0,0)$ noktasında sürekli olarak türevlenebilir olduğundan $g(y) = o(y)$. Sonuç 3.65'ten dolayı (3.6.46) denkleminin sıfır çözümü eksponansiyel olarak kararlıdır.

Örnek 3.67: (Pielou Lojistik Denklemi)

$$x(n+1) = \frac{\alpha x(n)}{1+\beta x(n)}$$

Pielou lojistik denklemini ele alalım. Buradan hareketle 1 zamanlı gecikme fark denklemi,

$$y(n+1) = \frac{\alpha y(n)}{1+\beta y(n-1)}, \quad \alpha > 1, \ \beta > 0. \qquad (3.6.47)$$

Buradan denge noktasının asimptotik olarak kararlı olabilmesi için α ve β üzerine konulması gereken şartları bulalım.

Çözüm:

<u>1. Metot:</u> Denge noktasının $y^* = \dfrac{\alpha - 1}{\beta}$ olduğunu görmek kolaydır.

$\overline{y}(n) = y(n) - \dfrac{\alpha - 1}{\beta}$. Bu taktirde (3.6.47) denklemi,

$$\overline{y}(n+1) = \frac{\alpha \overline{y}(n) - (\alpha - 1)\overline{y}(n-1)}{\alpha + \beta \overline{y}(n-1)} \tag{3.6.48}$$

şeklini alır. Dolayısıyla yeni sistemin denge noktası sıfıra taşınmış oldu. (3.6.48) denklemi matrisel formda yazılabilir. $x_1(n) = \overline{y}(n-1)$ ve $x_2(n) = \overline{y}(n)$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(n) \\ \dfrac{\alpha x_2(n) - (\alpha - 1)x_1(n)}{\alpha + \beta x_1(n)} \end{pmatrix}. \tag{3.6.49}$$

Bu sistem (0,0) civarında lineerize edilirse, $x(n+1) = Ax(n) + g(x(n))$ elde edilir. Burada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1-\alpha}{\alpha} & 1 \end{pmatrix}$ ve $g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\beta(\alpha - 1)x_1^2 - \alpha\beta x_1 x_2}{\alpha(\alpha + \beta x_1)} \end{pmatrix}$. A nın eigen değerleri,

$\lambda_{1,2} = \dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{4 - 3\alpha}{\alpha}}$. Burada incelenmesi gereken iki durum söz konusudur.

Durum 1: $4 - 3\alpha \geq 0$ ise, $1 < \alpha \leq 4/3$.

$$\rho(A) = |\lambda| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4 - 3\alpha}{\alpha}}.$$

$h(\alpha) = (4 - 3\alpha)/\alpha$ olsun. $h_1 = 1$ ve h fonksiyonu azalan olduğundan ($h'(\alpha) < 0$) $1 < \alpha \leq 4/3$ için $0 \leq h(\alpha) < 1$. $\rho(A) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$.

Durum 2: $4 - 3\alpha < 0$ veya $\alpha > 4/3$ ise,

$$\rho(A) = |\lambda_1| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{\frac{3\alpha - 4}{\alpha}} \right| = \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha}} < 1.$$

Dolayısıyla tüm $\alpha > 1$ için $\rho(A) < 1$. $g(x)$, (0,0) noktasında sürekli diferansiyellenebilir olduğundan (3.6.49) denkleminin sıfır çözümü düzgün olarak asimptotik kararlıdır. Dolayısıyla (3.6.47) denkleminin $\dfrac{\alpha-1}{\beta}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

2. Metot: (3.6.47) denkleminde $y(n)=\dfrac{\alpha-1}{\beta}\exp(x(n))$ olsun. Bu taktirde,

$$\exp(x(n+1))=\exp(x(n))/\left[\{1+(\alpha-1)\exp(x(n-1))\}/\alpha\right].$$

Bu ifadenin logaritması alınırsa,

$$x(n+1)-x(n)+\frac{\alpha-1}{\alpha}f\left[x(n-1)\right]=0 \text{ veya}$$

$$x(n+2)-x(n+1)+\frac{\alpha-1}{\alpha}f\left[x(n)\right]=0. \tag{3.6.50}$$

Burada, $f(x)=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\ln\left[\dfrac{(\alpha-1)e^{x}+1}{\alpha}\right]$. f nin sıfır civarındaki Taylor açılımı $f(x)=x+g(x)$. Burada $g(x)$, x e göre derecesi 2 veya daha büyük terimleri içerir. Böylece $g(x)=o(x)$. Dolayısıyla (3.6.50) denkleminin lineer şekli,

$$x(n+2)-x(n+1)+\frac{\alpha-1}{\alpha}x(n)=0. \tag{3.6.51}$$

Örnek 3.54'ün neticesinde, (3.6.51) denklemini sağlayan sıfır çözümün asimptotik kararlı olduğu görüldü. Sonuç 3.64'ten (3.6.50) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Dolayısıyla başlangıçtaki $y^{*}=\dfrac{\alpha-1}{\beta}$ denge noktası da asimptotik kararlıdır. $\rho(A)=1$ ve $\rho(A)>1$ olması halindeki soruya yanıt arayalım.

Teorem 3.68: Aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(i) Eğer $\rho(A)=1$ ise, (3.6.39) denkleminin sıfır çözümü kararlıdır veya kararsızdır.

(ii) Eğer $\rho(A)>1$ ve $\|x\|\to 0$ için $g(x)=o(x)$ ise, (3.6.39) denkleminin sıfır çözümü kararsızdır.

3.6.6 Liapunov direkt metodu

$$x(n+1) = f(x(n)) \tag{3.6.52}$$

otonom fark denklemine Liapunov metodunu uygulayalım. Burada $f : G \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyondur. x^*, (3.6.52) denkleminin bir denge noktası olsun. Yani, $f(x^*) = x^*$.

$V : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun. (3.6.52) denklemine göre V nin varyasyonu $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x)$ ile tanımlanır.

$\Delta V(x(n)) = V(f(x(n))) - V(x(n)) = V(x(n+1)) - V(x(n))$. Eğer $\Delta V(x) \leq 0$ ise, (3.6.52) denkleminin çözümleri artan değildir.

(i) H üzerinde V sürekli ve,

(ii) x ve $f(x) \in H$ olduğunda, $\Delta V(x) \leq 0$ ise, Liapunov fonksiyonu denir.

$B(x,\gamma) = \left\{ y \in \mathbb{R}^k \middle| \left\| y - x \right\| < \gamma \right\}$, $\mathbb{R}^k$ da açık bir yuvar olsun.

(i) $V(x^*) = 0$ ve

(ii) $\gamma > 0$ ve tüm $x \in B(x^*, y)$ için $V(x) > 0$ ise, reel değerli V fonksiyonuna x^* da pozitif değerlidir denir. (3.6.52) denkleminin denge noktası x^*=0 olsun. $B(\eta)$ yuvarı üzerinde (3.6.52) denkleminin V Liapunov fonksiyonu pozitif tanımlı olsun. $0 < \delta \leq \varepsilon$ olacak şekilde $B(\delta)$ ve $B(\varepsilon)$ yuvarlarını oluşturalım. Eğer $B(\delta)$ yuvarı içinde x_0 ile başlayan çözüm, $x(n,0,x_0)$ ise, $V(x_0) \leq \tilde{c}_2$ olur. Çünkü $V(x) = c_2$, $B(\varepsilon)$ yuvarının içindedir. $\Delta V \leq 0$, V (3.6.52) denkleminin çözümleri boyunca monotonik olarak artmayan bir fonksiyon olsun. Bu taktirde tüm $n \geq 0$ için $V(x(n)) \leq V(x_0) \leq \tilde{c}_2$. Netice olarak $x(n,0,x_0)$ sonsuza dek $B(\varepsilon)$ yuvarı içerisinde kalacaktır. Yani sıfır çözüm kararlıdır.

Teorem 3.69: (Liapunov Stabilite Teoremi) x^*, (3.6.52) denkleminin bir denge noktası olsun. Bu denge noktasının H civarında (3.6.52) denklemi için V bir Liapunov fonksiyonu ve x^* a göre pozitif tanımlı ise x^* kararlıdır. Eğer ayrıca $x \neq x^*$ ve $x, f(x) \in H$ olduğunda $\Delta V(x) < 0$ ise, x^* a asimptotik olarak kararlıdır denir. Üstelik $G = H = \mathbb{R}^k$ ve $\|x\| \to \infty$ iken,

$$V(x) \to \infty \tag{3.6.53}$$

ise, x^* a global olarak asimptotik kararlıdır denir.

İspat: $B(x^*,\alpha_1) \subset G \cap H$ olacak şekilde bir $\alpha_1 > 0$ seçelim. f sürekli olduğundan bir $\alpha_2 > 0$ vardır öyle ki eğer $x \in B(x^*,\alpha_2)$ ise, $f(x) \in B(x^*,\alpha_1)$. $0 < \varepsilon < \alpha_2$ verilsin. $\Psi(\varepsilon) = \min\left\{V(x) \middle| \varepsilon \le \left\|x - x^*\right\| \le \alpha_1\right\}$ tanımlansın. Ara Değer Teoremi'ne göre $\left\|x - x^*\right\| < \delta$ olduğunda $V(x) < \Psi(\varepsilon)$ olacak şekilde $0 < \delta < \varepsilon$ vardır.

İddia: Eğer $x_0 \in B(x^*,\delta)$ ise, tüm $n \ge 0$ için $x_n \in B(x^*,\varepsilon)$.

İspat: İddia doğrudur. Bir an için iddiamızın doğru olmadığını varsayalım. Bu taktirde, $x_0 \in B(x^*,\delta)$ ve $1 \le r \le m$ için $x_r \in B(x^*,\varepsilon)$ ve $x(m+1) \notin B(x^*,\varepsilon)$ olacak şekilde bir $m > 0$ vardır. Çünkü $x_m \in B(x^*,\varepsilon) \subset B(x^*,\alpha_2)$ olduğundan $x(m+1) \in B(x^*,\alpha_1)$ olur. $V(x(m+1)) \ge \Psi(\varepsilon)$. Buna rağmen $V(x(m+1)) \le ... \le V(x_0) < \Psi(\varepsilon)$. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla kararlılık garantilenir.

Asimptotik kararlılığını ispat etmek için $x_0 \in B(x^*,\delta)$ olsun. Bu taktirde, tüm $n \ge 0$ için $x(n) \in B(x^*,\varepsilon)$. Eğer $\{x(n)\}$, x^* a yakınsamıyorsa, $(x_{n_i}) \to y \in \mathbb{R}$ olacak şekilde bir alt dizi vardır.

$E \subset B(x^*,\alpha_1)$ olacak şekilde y nin bir komşuluğu ve $x^* \notin E$ olsun. $h(x) = V(f(x))/V(x)$ fonksiyonu E üzerinde tanımlanırsa, tüm $x \in E$ için $h(x) < 1$, sürekli ve iyi tanımlı olduğunu düşünelim. Eğer $\eta \in (h(y),1)$ ise bu taktirde bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $x \in B(y,\delta)$ olduğunda $h(x) \le \eta$ olur. Yeterince büyük n_i ler için,

$$V(f(x(n_i))) \le \eta V(x(n_i - 1)) \le \eta^2 V(x(n_i - 2)) \le ... \le \eta^{n_i} V(x_0).$$

Böylece, $\lim_{n\to\infty} V(x(n_i)) = 0$. Fakat $\lim_{n_i\to\infty} V(x(n_i)) = V(y)$ olduğundan $V(y) = 0$ ve sonuç olarak $y = x^*$.

Global asimptotik kararlılığı ispat etmek için tüm çözümlerin sınırlı olduğunu gösterdikten sonra yukarıdaki argüman tekrar edilir. $x(n)$ sınırsız çözüm olsun. Bu halde, $n_i \to \infty$ için $\{x(n_i)\} \to \infty$ olacak şekilde bazı $\{x(n_i)\}$ alt dizisi vardır. (3.6.53) şartından bu kabul $n_i \to \infty$ iken $\{x(n_i)\} \to \infty$. Tüm i ler için $V(x_0) > V(x(n_i))$ olduğundan dolayı çelişki oluşur.

Teorem 3.70: V , $\left\{x \in \mathbb{R}^k \middle| \|x\| > \alpha, \text{ bazı } \alpha > 0 \text{ değerleri için}\right\}$ kümesi üzerinde bir Liapunov fonksiyonu ve (3.6.53) şartı sağlanırsa, (3.6.52) denkleminin tüm çözümleri sınırlıdır.

İspat: Bir önceki ile aynıdır.

Örnek 3.71:

$$x(n+1) = \frac{\alpha x(n-1)}{1+\beta x^2(n)}, \ \beta > 0$$

ikinci mertebeden fark denklemini ele alalım. Bu denkleme sıklıkla Gecikmeli Fark Denklemi denir.

Çözüm: Bu denklemin üç denge noktası vardır. $x^* = 0$ ve $x^* = \pm\sqrt{\frac{(\alpha-1)}{\beta}}$, $\alpha > 1$.

$y_1(n) = x(n-1)$ ve $y_2(n) = x(n)$ ile denklemi sisteme çevirelim. Yani,

$$y_1(n) = y_2(n),$$

$$y_2(n+1) = \frac{\alpha y_1(n)}{1+\beta y_2^2(n)}.$$

Bu sistemde (0,0) noktasının stabilitesini irdeleyelim. Liapunov fonksiyonu $V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$ olsun. Açıkça bu fonksiyon $\mathbb{R}^2$ de sürekli ve pozitif tanımlıdır. Fonksiyonun azalan olduğunu gösterirsek işlem biter. Bu halde,

$$\Delta V(y_1(n), y_2(n)) = y_1^2(n+1) + y_2^2(n+1) - y_1^2 - y_2^2.$$

Sonuç olarak,

$$\Delta V(y_1(n), y_2(n)) = \left(\frac{\alpha^2}{\left[1+\beta y_2^2(n)\right]^2} - 1\right) y_1^2(n) \le (\alpha^2 - 1) y_1^2(n) \qquad (3.6.54)$$

elde edilir. Eğer $\alpha^2 \le 1$ ise, $\Delta V \le 0$. Bu durumda $x^* = 0$ sadece denge noktası olup Teorem 3.68 gereğince bu orijin noktası kararlıdır. Ayrıca $\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = -\infty$ olduğundan Teorem 3.70 gereğince tüm çözümler sınırlıdır. y ekseni üzerindeki tüm noktalarda $\Delta V = 0$ olduğundan Teorem 3.69 gereğince bu denklem asimptotik kararlı değildir. Bilimin ve mühendisliğin uygulamalarında karşılaşılan problemlerin çoğu bu yapıya sahiptir. Bu sebeple daha iyi ve daha kesin analiz veren yöntemler gereklidir. Bu güçlüğün üstesinden değişmezlik prensibi gelir. Bu prensibi daha iyi anlayabilmek için aşağıdaki temel kavramları verelim.

(i) $G \subset \mathbb{R}^k$ olsun. G de $i \to \infty$ için, $x_i \to x$ olacak şekilde bir $\{x_i\}$ dizisi varsa, x e G nin limit noktası denir.

(ii) G yi ve G nin tüm limit noktalarını içeren kümeye G nin kapanışı denir.

(iii) (3.6.52) denklemi göz önüne alındığında $O^+(x_0)$ pozitif orbiti $O^+(x_0) = \{x(n,0,x_0) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ ile tanımlanır. Pozitif orbit $O^+(x_0)$ yerine $O(x_0)$ kullanılacatır.

(iv) $\Omega(x_0)$ limit kümesi (pozitif limit kümesi) x_0 ın tüm pozitif limit noktalarını içerir. Sonuç olarak $\Omega(x_0)$, $\mathbb{Z}^+$ nın bazı $\{n_i\}$ alt dizileri için $n \to \infty$ ve $y \in \mathbb{R}^k$ iken $x(n_i) \to y$. Her $x_0 \in A$ için $O(x_0) \subset A$ ise, A ya pozitif olarak değişmezdir denir.

Lemma 3.72: Eğer $O(x_0)$ sınırlı ise, $\Omega(x_0)$ boştan farklı, kapalı ve sınırlıdır. Yani bu küme kompakttır. V, $G \subset \mathbb{R}^k$ üzerinde bir Liapunov fonksiyonu olsun.

$$E = \{x \in \overline{G} \mid \Delta V(x) = 0\}$$

olsun. M, E nin maksimal değişmez (invaryant) alt kümesi olsun. Diğer bir deyişle M, E nin tüm invaryant alt kümelerinin birleşimidir.

Teorem 3.73: (La Salle Değişmezlik Prensibi) V, (3.6.52) denkleminin $G \subset \mathbb{R}^k$ üzerinde pozitif tanımlı bir Liapunov fonksiyonu olsun. Bu halde, tüm $n \geq 0$ için, (3.6.52) denkleminin G içinde kalan her çözümü ya sınırsızdır ya da M maksimal alt kümesine yaklaşır.

İspat: Öncelikle G sınırlı olsun. Tüm $n \geq 0$ için $x(n)$ çözümü G nin içinde kalsın. Bu şartlar $x(n)$ nin sınırlı olduğunu söyler. Bazı $\{n_i\}$ tamsayılarının alt dizisi için $\lim_{n_i \to \infty} x(n_i) = y \in \overline{G}$ olsun. $V(x(n))$, aşağıdan sınırlı ve artmayan olduğundan $\lim_{n_i \to \infty} V(x(n)) = c$. Yani,

$$\lim_{n_i \to \infty} \Delta V(x(n)) = \lim_{n_i \to \infty} \left[V(x(n+1)) - V(x(n))\right] = 0 .$$

ΔV nin sürekliliğinden,

$$\lim_{n_i \to \infty} \Delta V(x(n_i)) = \Delta V(y)$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\Delta V(y) = 0$ ve $y \in E$ olur. Bu gerçek bize $\Omega(x(n)) \subset E$ ve $\Omega(x(n)) \subset M$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan eğer G sınırsız ise, $\lim_{n \to \infty} x(n) = \infty$

olacak şekilde sınırsız bir çözüm mümkündür. Bu durum $\lim_{n_i \to \infty} V(x) \neq \infty$ olması ile mümkündür. Yani V yukarıdan sınırlı ise, bu durum oluşur. Bu teorem doğrultusunda Örnek 3.71'i tekrar ele alalım.

Durum 1: $\alpha^2 = 1$ ise E kümesi x ve y ekseni üzerindeki tüm noktalarını içerir. Bu halde iki alt durum mevcuttur.

(i) $\alpha = 1$ olsun. Eğer $y_1(0) = a$ ve $y_2(0) = 0$ ise, $y_1(1) = 0$, $y_2(1) = a$ ve $y_1(2) = a$, $y_2(2) = 0$ olur. Bu sebeple herhangi bir eksen üzerinde başlangıç noktasına sahip çözüm iki periyotludur ve $M = E$ dir.

(ii) $\alpha = -1$ olsun. $O^+(a,0) = \{(a,0),(0,-a),(-a,0),(0,a)\}$. Bu durumda başlangıç noktasına sahip herhangi bir eksen üzerindeki çözümün periyodu 4 ve $M = E$ dir. Dolayısıyla tüm çözümler ya $(a,0),(-a,0),(0,a)$ ya da $(0,-a)$ noktasına yakınsar. Açıkça sıfır çözümü asimptotik kararlı değildir.

Durum 2: $\alpha^2 < 1$ olsun. $E = y$ ekseni ve $M = \{(0,0)\}$ olur. Sonuç olarak tüm çözümler orijine yakınsar. Bu sebeple orijin global olarak asimptotik kararlıdır.

Durum 3: $\alpha^2 > 1$ ise La Salle değişmezlik prensibi çözümün kararlılığı hakkında bilgi vermez. Diğer bir ifadeyle stabilite belirlenemez.

Örnek 3.74:

$$x_1(n+1) = x_1^2(n) - x_2^2(n),$$

$$x_2(n+1) = 2x_1(n)x_2(n)$$

sistemini ele alalım. $x_1(n) = r(n)\cos\theta(n)$ ve $x_2(n) = r(n)\sin\theta(n)$. Bu halde,

$$\begin{aligned} r(n+1)\cos\theta(n+1) &= r^2(n)\cos^2\theta(n) - r^2(n)\sin^2\theta(n) \\ &= r^2(n)\cos 2\theta(n) \end{aligned} \tag{3.6.55}$$

ve

$$\begin{aligned} r(n+1)\sin\theta(n+1) &= 2r^2(n)\sin\theta(n)\cos\theta(n) \\ &= r^2(n)\sin 2\theta(n) \end{aligned} \tag{3.6.56}$$

elde edilir. (3.6.55) denklemi (3.6.56) ile bölünür. Buradan $\theta(n+1) = 2\theta(n)$ elde edilir. Bu denklem (3.6.55) te yazılırsa, $r(n+1) = r^2(n)$ elde edilir. Bu denklemin çözümü $r(n) = [r(0)]2^n$ ve $\theta(n) = 2^n\theta(0)$. Denge noktaları (0,0), (1,0). $r(0) < 1$ için ve $\lim_{n\to\infty} r(n)=0$ ve birim disk içerisinde başlayan çözümler orijine doğru spiraldir. Sonuç olarak orijin asimptotik kararlıdır (global kararlı değil). $r(0)>0$ için $\lim_{n\to\infty} r(n)=\infty$. Bu taktirde birim disk dışında başlayan tüm çözümler spiral olarak uzaklaşıp sonsuza gider. Bu oluşum (1,0) denge noktasını kararsız kılar. Tüm $n\geq 0$ için $r(0)=1$ ve $r(n)=1$ ise, bu taktirde çember çok komplike bir dinamiğe sahip olup invaryanttır. Örneğin, $(1,\pi/4)$ noktasında başlayan çözüm üç iterasyonla (1,0) denge noktasını bulur. Yani $(1,\pi/4)$, $(1,\pi/2)$, $(1,\pi)$ ve $(1,0)$. Buna rağmen $(1,2\pi/3)$ noktasında başlayan çözüm 2 devirlidir. Genel olarak $(1,\theta)$ nın m periyodik olabilmesi için gerek ve yeter şart bazı k tamsayısı için $2^m\theta=\theta+2k\pi$ olmasıdır.

$m=3$ için, $\theta=\dfrac{2\pi}{7},\dfrac{4\pi}{7},\dfrac{6\pi}{7},\dfrac{8\pi}{7},\dfrac{10\pi}{7},\dfrac{12\pi}{7}$.

$m=4$ için, $\theta=\dfrac{2\pi}{15},\dfrac{4\pi}{15},\dfrac{2\pi}{5},\dfrac{8\pi}{15},\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{5},\dfrac{14\pi}{15},\dfrac{16\pi}{15},\ldots$.

Örnek 3.75:

$$x_1(n+1)=2x_2(n)-2x_2(n)x_1^2(n),$$

$$x_2(n+1)=\frac{1}{2}x_1(n)+x_1(n)x_2^2(n)$$

planer sistemini ele alalım. Denge noktaları,

$$(0,0),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(0,0) noktasının stabilitesini inceleyelim. Eğer $V(x_1,x_2)=x_1^2+4x_2^2$ ise,

$$\begin{aligned}\Delta V(x_1(n),x_2(n)) &= 4x_2^2(n)-8x_2^2(n)x_1^2(n)+4x_2^2(n)x_1^4(n)+x_1^2(n)\\ &\quad +4x_1^2(n)x_2^2(n)+4x_1^2(n)x_2^4(n)-x_1^2(n)-4x_2^2(n)\\ &= 4x_1^2(n)x_2^2(n)\left[x_1^2(n)+x_2^2(n)-1\right].\end{aligned}$$

Eğer $x_1^2+x_2^2\leq 1$ ise $\Delta V(x_1,x_2)\leq 0$. Herhangi bir a reel sayısı için bir $x_0=\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$ başlangıç noktasına sahip çözüm periyodiktir. Periyodu 2 ve orbiti $\left\{\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\a/2\end{pmatrix}\right\}$.

Bir $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ başlangıç noktasına sahip bir çözüm de periyodiktir ve periyodu 2 dir. Dolayısıyla sıfır çözüm asimptotik stabil olamaz. Buna rağmen Teorem 3.69'a göre stabildir.

Teorem 3.76: ΔV, orijin komşuluğunda pozitif tanımlı olsun. $V(a_i) > 0$ ile $a_i \to 0$ olacak şekilde bir $\{a\}$ dizisi varsa, (3.6.52) denkleminin sıfır çözümü kararsızdır.

İspat: $x \in B(\eta)$, $x \neq 0$ ve $V(0) = 0$ için $\Delta V(x) > 0$ olsun. Çelişki yardımıyla teoremi ispat edelim.

İlk olarak çözümün kararlı olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $\varepsilon < \eta$ için bir $\delta < \varepsilon$ sayısı vardır öyle ki, $\|x_0\| < \delta$ olduğunda $\|x(n,0,x_0)\| < \varepsilon$, $n \in \mathbb{Z}^+$ dır. $a_i \to 0$ olduğundan bazı j ler için $V(x_0) > 0$ ve $\|x_0\| < \delta$ için $x_0 = a_j$ alalım. Bu halde, $O(x_0) \subset B(\varepsilon) \subset B(\eta)$ kapalı ve sınırlıdır (kompakt). Tanım kümesi kompakt olduğundan $V(x(n))$ de kompakttır. Bu sebeple yukardan sınırlıdır. $V(x(n))$ aynı zamanda artan olduğundan $V(x(n)) \to c$. La Salle değişmezlik prensibinin ispatı gereğince $\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$ olduğunu göstermek kolaydır. Bu ise $0 < V(x_0) < \lim_{n\to\infty} x(n) = 0$ eşitsizliğinin geçerliliğini doğrular. Bu durum ise mümkün değildir. Yani sıfır çözümü (3.6.52) denkleminin kararsız çözümüdür.

Örnek 3.77:

$$x_1(n+1) = 4x_2(n) - 2x_2(n)x_1^2(n),$$

$$x_2(n+1) = \frac{1}{2}x_1(n) + x_1(n)x_2^2(n)$$

sistemini ele alalım. $V(x_1, x_2) = x_1^2 + 16x_2^2$ olsun. Buradan $\Delta V(x_1(n), x_2(n)) = 3x_1^2(n) + 16x_1^2(n)x_2^4(n) > 0$ olur. Dolayısıyla Teorem 3.76 ile sıfır çözüm kararsızdır.

Örnek 3.78:

$$x_1(n+1) = x_1(n) + x_1^3(n)x_2^2(n),$$

$$x_2(n+1) = x_2(n) \tag{3.6.57}$$

sistemini düşünelim. Sistemin denge noktası (0,0) dır. Sistemin lineer kısmı $x_1(n+1) = Ax(n)$ ile gösterilir. Burada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $\rho(A) = 1$. $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ bir Liapunov fonksiyonu olsun. $x_1 \neq 0$ ve $x_2 \neq 0$ için $\Delta V\left[x(n)\right] = 2x_1^4(n)x_2^2(n) + x_1^6(n)x_2^4(n) > 0$. Teorem 3.76'dan (3.6.57) sisteminin sıfır çözümü kararsızdır.

$$x_1(n+1) = x_1(n) - x_1^3(n)x_2^2(n),$$
$$x_2(n+1) = x_2(n) \tag{3.6.58}$$

sistemini inceleyelim. Yine $V(x) = x_1^2 + x_2^2$, (3.6.58) sistemi için bir Liapunov fonksiyonu olsun.

$$\Delta V\left[x(n)\right] = x_1^4(n)x_2^2(n)\left[-2 + x_1^2(n)x_2^2(n)\right]$$

Eğer $x_1^2 x_2^2 < 2$ ise, $\Delta V(x) \leq 0$. Teorem 3.69'dan (3.6.58) sisteminin sıfır çözümü kararlıdır. Eğer $\rho(A) = 1$ ise, nanlineer denkleminin sıfır çözümü ya kararlıdır ya da kararsızdır. (3.6.12) fark denkleminin asimptotik kararlılığı için $\rho(A) < 1$. Bu sonuca varabilmek için A nın eigen değerlerini hesaplamak gerekir. Liapunov metodunda ise, eigen değerlerini hesaplamak gibi bir gereksinim söz konusu değildir. $V(x)$ in kuadratik formunu ele alalım. $B = (b_{ij})$, $k \times k$ tipinde simetrik bir matris ise,

$$V(x) = x^T Bx = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} b_{ij}x_i x_j .$$

Eğer $V(x)$ pozitif tanımlı ise, B matrisi pozitif tanımlıdır. Bu matrisin pozitif tanımlılığını test etmek için Sylvester Kriteri kullanılır. Reel simetrik B matrisinin pozitif tanımlı olabilmesi için gerek ve yeter şart determinantın başlıca prensipal minörlerinin pozitif olmasıdır.

$$\text{Yani pozitiftir} \Leftrightarrow b_{11} > 0,\ \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \det B > 0 .$$

Bir B matrisinin prensipal minörleri kendisi ve ardışık son satır ve son sütunların ortadan kaldırılmasıyla elde edilen minörlerdir. Örneğin, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

matrisinin başlıca prensipal minörleri B, $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, 3. Bu matrisler determinanta sahiptir ve B pozitif tanımlıdır. $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ için,

$$V(x) = x^T Bx = 3x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 > 0 \text{, tüm } x \neq 0 \text{ ve } V(0) = 0 .$$

Diğer taraftan,

$$V(x) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3 .$$

$V(x) = x^T Bx$. Burada, $B = \begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix}$.

V nin pozitif tanımlı olabilmesi için gerek ve yeter şart B nin pozitif tanımlı olmasıdır. Eğer B, pozitif tanımlı simetrik bir matris ise, B nin tüm eigen değerleri pozitiftir. Eğer $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, B nin eigen değerleri ise ve

$$\lambda_{\min} = \min\left\{|\lambda_i| \, 1 \leq i \leq k\right\}$$

$$\lambda_{\max} = \rho(A) = \max\left\{|\lambda_i| \, 1 \leq i \leq k\right\} \text{ ise,}$$

her $x \in \mathbb{R}^k$ için,

$$\lambda_{\min} \|x\|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max} \|x\|^2 . \qquad (3.6.59)$$

Burada $V(x) = x^T Bx$ ve $\| \, . \, \|$ Öklid normudur. Eğer B pozitif tanımlı bir matris ise, $V(x) = x^T Bx$, (3.6.12) denkleminin bir fonksiyonu olsun. Bu halde (3.6.12) denklemine göre

$$\Delta V(x(n)) = x^T(n) A^T BAx(n) = x^T(n) B(n)$$

$$= x^T (A^T BA - B)x . \qquad (3.6.60)$$

$$\Delta V < 0 \Leftrightarrow A^T BA - B = -C . \qquad (3.6.61)$$

Burada C pozitif tanımlı bir matristir. (3.6.61) denklemi (3.6.12) denklem sisteminin Liapunov denklemidir.

Teorem 3.79: (3.6.12) denkleminin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart her pozitif tanımlı C simetrik matrisi ile (3.6.61) denklemi bir tek simetrik ve pozitif tanımlı B çözümüne sahiptir.

İspat: (3.6.12) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlı olsun. C pozitif tanımlı simetrik bir matris olsun. (3.6.61) Liapunov denkleminin bir tek B çözümüne sahip olduğunu göstereceğiz. (3.6.61) denklemi önce soldan $(A^T)^r$ ve sağdan A^r ile çarpılırsa,

$$(A^T)^{r+1} BA^{r+1} (A^T)^r BA^r = -(A^T)^r CA^r$$

elde edilir. Bu sebeple

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n} \left[(A^T)^{r+1} BA^{r+1} - (A^T)^r BA^r \right] = -\lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n} (A^T)^r CA^r \text{ ve}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[B - (A^T)^{n+1} BA^{n+1} \right] = \sum_{r=0}^{\infty} (A^T)^r CA^r \tag{3.6.62}$$

bulunur. Teorem 3.49 (ii) kısmından $\rho(A) < 1$ olur. Sonuç olarak $\rho(A) < 1$ ise $\rho(A^T) < 1$. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} (A^T)^{n+1} BA^{n+1} = 0$. Böylece,

$$B = \sum_{r=0}^{n} (A^T)^r CA^r \tag{3.6.63}$$

elde edilir. (3.6.63) formülü (3.6.62) denklemini verir.

Not: C, birim matris olarak alınabilir. Bu durumda,

$$B = \sum_{r=0}^{n} (A^T)^r A^r .$$

3.7 Z Transformasyonu

3.7.1 Z transformasyonu metodu

Z transformasyonu metoduyla fark denklemleri analiz edebilir. $n = 0,1,...$ için bir $\{x(n)\}$ sayılar dizisi verilsin. Bu halde,

$$\tilde{x}(z) = Z(x(n)) = \sum_{j=0}^{\infty} x(j) z^{-j} . \qquad (3.7.1)$$

Burada z kompleks bir sayıdır.

Örnekler:

1. $Z\left[a^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} = \frac{1}{1-\frac{a}{z}}$.

2. $Z\left[\frac{1}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = e^{\frac{1}{z}}$.

Transformasyonunun Özellikleri

1. $n < 0$ için $x(n) = y(n) = 0$ olsun. Bu halde, $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$Z\left[x(n) + y(n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x(n) + y(n)\right) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} y(n) z^{-n}$$

$$= Z\left[x(n)\right] + Z\left[y(n)\right].$$

$$Z\left[\alpha x(n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha x(n)\right) z^{-n} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = \alpha Z\left[x(n)\right].$$

2. Öteleme Özelliği:

R, $\tilde{x}(z)$ in yakınsaklık yarıçapı olsun. $i = 1,2,...$ ve $|z| > R$ olsun.

(a) Sağ Öteleme: $x(-i) = 0$ ise,

$$Z\left[x(n-k)\right] = z^{-k} \tilde{x}(z) . \qquad (3.7.2)$$

(b) Sol Öteleme:

$$Z\left[x(n+k)\right] = z^k \tilde{x}(z) - \sum_{r=0}^{k-1} x(r) z^{k-r} . \qquad (3.7.3)$$

(3.7.3) formülünün en kullanışlı durumları, $|z| > R$ için,

$$Z\left[x(n+1)\right] = z\tilde{x}(z) - zx(0) ,$$

$$Z\left[x(n+2)\right] = z^2\tilde{x}(z) - z^2x(0) - zx(1)\,.$$

3. Başlangıç ve Son Değer Teoremi:

(a) Başlangıç Değer Teoremi

$$\lim_{|z|\to\infty} \tilde{x}(z) = x(0) \tag{3.7.4}$$

(b) Son Değer Teoremi

$$x(\infty) = \lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)\tilde{x}(z) \tag{3.7.5}$$

(a) özelliğinin ispatı Z transformasyonu tanımından kolaylıkla görülebilir. (3.7.5) in ispatı için

$$Z\left[x(n+1) - x(n)\right] = \sum_{j=0}^{\infty}\left[x(j+1) - x(j)\right]x^{-j}$$

gözlemlendikten sonra (3.7.3) formülü sol tarafa uygulanırsa,

$$(z-1)\tilde{x}(z) = zx(0) + \sum_{j=0}^{\infty}\left[x(j+1) - x(j)\right]z^{-j}$$ ve sonuç olarak,

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\tilde{x}(z) = x(0) + \sum_{j=0}^{\infty}\left[x(j+1) - x(j)\right] = \lim_{n\to\infty} x(n)\,.$$

4. Konvulasyon: $x(n)$ ve $y(n)$ dizilerinin konvulasyonu

$$x(n) * y(n) = \sum_{j=0}^{n} x(n-j)y(j) = \sum_{j=0}^{n} x(n)y(n-j)$$ ile tanımlanır.

$$Z\left[x(n) * y(n)\right] = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{m} x(m-j)y(j)\right]z^{-m}\,.$$

Toplamın işaretleri değiştirilirse,

$$Z\left[x(n) * y(n)\right] = \sum_{j=0}^{\infty} y(j)\sum_{m=j}^{\infty} x(m-j)z^{-m}\,.$$

$s = m - j$ alınırsa,

$$Z\left[x(n) * y(n)\right] = \tilde{x}(z)\tilde{y}(z) \tag{3.7.6}$$

elde edilir. Eğer konvulasyon

$$x(n) * y(n) = \sum_{j=0}^{\infty} x(n-j)y(j)$$

denklemindeki gibi tanımlanırsa (3.7.6) elde edilir.

5. a^n **ile çarpma:**

$$Z\left[a^n x(n)\right] = \tilde{x}\left(\frac{z}{a}\right), \ |z| > |a| R \tag{3.7.7}$$

Örnek 3.80:

$$g(n) = a^n \sin wn, \ n = 0,1,2,...,$$

fonksiyonunun Z transformasyonunu alalım.

(3.7.7) formülü kullanılırsa,

$$\tilde{g}(z) = Z(a^n \sin wn) = \frac{(z/a)\sin w}{(z/a)^2 - 2(z/a)\cos w + 1}$$

$$= \frac{az \sin w}{z^2 - 2az\cos w + a^2}, \ |z| > |a|. \tag{3.7.8}$$

6. n^k **ile çarpma:**

$Z(na^n) = \dfrac{az}{(z-a)^2}$ olduğu bilinmektedir. Bu aynı zamanda,

$$Z(na^n) = -z\frac{d}{dz}Z(a^n)$$

formatında yazılabilir. Benzer olarak,

$$Z(n^2 a^n) = -z\frac{d}{dz}\left[-z\frac{d}{dz}Z(a^n)\right]$$

biçiminde yazılabilir. Kompakt biçimi ise,

$$Z(n^2 a^n) = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^2 Z(a^n).$$

Genel olarak,

$$\left(-z\frac{d}{dz}\right)^k \tilde{x}(z) = \left(-z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\left(...\left(-z\frac{d}{dz}\tilde{x}(z)\right)...\right)\right)\right).$$

Netice olarak,

$$Z\left[n^k x(n)\right] = \left(z\frac{d}{dz}\right)^k Z(x(n)).$$

3.7.2 Z transformasyonunun tersi ve fark denklemlerinin çözümleri

Bilindiği gibi Z transformasyonu bilinmeyen bir $x(n)$ dizisinin bir fark denklemini $\tilde{x}(z)$ şeklindeki cebirsel denkleme dönüştürür. Burada $x(n)$ dizisine artık $\tilde{x}(z)$ nin ters Z transformasyonu denir.

$$Z^{-1}\left[\tilde{x}(z)\right] = x(n) \tag{3.7.9}$$

ile gösterilir. Z nin ters transformasyonu tektir.

İspat: $x(n)$ ve $y(n)$ aynı Z transformasyonuna sahip iki dizi olsun.

$$\sum_{i=0}^{\infty} x(i)z^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} y(i)z^{-i}, \ |z| > R,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left[x(i) - y(i)\right]z^{-i} = 0, \ |z| > R.$$

Laurents Teoremi'nden $x(n) \equiv y(n)$ sonucu çıkar. Z transformasyonunun tersi elde edilirken genel olarak aşağıdaki metotlar kullanılır.

1. Kuvvet Serileri Metodu
2. Kısmi Kesir Metodu
3. Ters İntegral Metodu

Ters Z transformasyonu bulunurken genellikle herhangi bir $x(k)$ dizisi için $x(k) = 0, \ k = \text{-}1, \text{-}2, ...$ varsayılır.

3.7.2.1 Kuvvet serileri metodu

$|z| > R$ yakınsaklık bölgesinde $\tilde{x}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{-i}$ olduğu bilinmektedir. Aynı yakınsaklık bölgesinde, $Z\left[x(n)\right] = \sum_{i=0}^{\infty} x(i)z^{-i}$ ifadesi ile karşılaştırılarak $x(n) = a_n, \ n = 0,1,2,...$ bulunur. Burada $g(z)$ ve $h(z)$, z nin birer polinomu olmak üzere, $\tilde{x}(z) = g(z)/h(z)$ ifadesi normal bölme işlemi yapılarak z^{-1} in kuvvetleri cinsinden yazılır. Bu metodun dezavantajı $x(n)$ için kapalı formda daima bir formül vermemesidir.

Örnek 3.81:

$$\tilde{x}(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$$

ise Z^{-1} i bulalım.

Çözüm: Payı paydaya bölerek,

$$\tilde{x}(z) = 1 - 3z^{-1} + 4z^{-2} - 4z^{-3} + 4z^{-4} - 4z^{-5} + ...$$

elde edilir. Böylece,

$$x(0) = 1,\ x(2) = -3,\ x(3) = 4,\ x(4) = -4, ...,$$

ve genel anlamda $n \geq 3$ ve n tek ise, $x(n) = 4$, $n \geq 3$ ve n çift ise, $x(n) = -4$.

3.7.2.2 Kısmi kesir metodu

$x(z)$, z nin rasyonel fonksiyonu ve sonsuzda analitik ise bu metot kullanılır. Örneğin,

$$\tilde{x}(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + ... + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + b_n},\ m \leq n \tag{3.7.10}$$

(3.7.10) ifadesi,

$$\tilde{x}(z) = \tilde{x}_1(z) + \tilde{x}_2(z) + \tilde{x}_3(z) + ...$$

şeklinde yazılarak ters Z transformasyonu elde edilir.

$$x(n) = Z^{-1}\left[\tilde{x}_1(z)\right] + Z^{-1}\left[\tilde{x}_2(z)\right] + Z^{-1}\left[\tilde{x}_3(z)\right] + ...$$

(3.7.10) ifadesinin payını sıfır yapan değerlere $\tilde{x}(z)$ nin sıfırı, paydasını sıfır yapan değerlere $\tilde{x}(z)$ nin kutup noktaları denir.

Not: $x(z)$ yi genellikle kesirlerin toplamı şeklinde yazmak zor olduğundan bunun yerine $\tilde{x}(z)/z$ yi ele almak tercih edilir.

Örnek 3.82:

$$x(n+2) + 3x(n+1) + 2x(n) = 0,\ x(0) = 1,\ x(1) = -4$$

fark denklemini çözelim.

Çözüm: Denklemin her iki yanına Z transformasyonu uygulanırsa,

$$\tilde{x}(z) = z(z-1)/(z+1)(z+2).$$

$\tilde{x}(z)/z$ yi parçalı kesirlere genişleterek,

$$\tilde{x}(z)/z = \frac{(z-1)}{(z+1)(z+2)} = \frac{a_1}{z+1} + \frac{a_2}{z+2}.$$

Düzenlersek,

$$(z-1) = a_1(z+2) + a_2(z+1) = (a_1 + a_2)z + (2a_1 + a_2).$$

Buradan karşılıklı eşitleyerek,

$$a_1 + a_2 = 1,\ 2a_1 + a_2 = -1.$$

Dolayısıyla $a_1 = -2$ ve $a_2 = 3$ bulunur. Sonuç olarak,

$$\tilde{x}(z) = \frac{-2z}{z+1} + \frac{3z}{z+2}.$$

Böylece $x(n) = -2(-1)^n + 3(-2)^n$.

Örnek 3.83:

$$x(n+4) + 9x(n+3) + 30x(n+2) + 20x(n+1) + 24x(n) = 0,\ x(0) = 0,$$

$x(1) = 0$, x(2)=1, $x(3) = 10$,

fark denklemini çözelim.

Çözüm: Z Transformasyonu uygulanırsa,

$$\tilde{x}(z) = \frac{z(z-1)}{(z+2)^3(z+3)}$$

elde edilir. Burada,

$$\frac{\tilde{x}(z)}{z} = \frac{z-1}{(z+2)^3(z+3)} = \frac{a_0}{z+3} + \frac{a_1}{(z+2)^3} + \frac{a_2}{(z+2)^2} + \frac{a_3}{z+2}. \tag{3.7.11}$$

Bu kez a_1, a_2, a_3 ve a_4 sabitlerini bulmak için daha farklı bir metot kullanacağız. (3.7.11) denklemini $(z+3)$ ile çarpıp, $z = -3$ yazarak a_0 bulunur.

$$a_0 = \left.\frac{z-1}{(z+2)^3}\right|_{z=-3} = 4.$$

(3.7.11) denklemini $(z+2)^3$ ile çarparak,

$$\frac{z-1}{z+3} = a_3(z+2)^2 + a_2(z+2) + a_1 + 4\frac{(z+2)^3}{(z+3)}. \tag{3.7.12}$$

$z = -2$ için,

$$a_1 = \left.\frac{z-1}{z-3}\right|_{z=-2} = -3.$$

(3.7.12) denkleminin z ye göre türevi alınarak a_2 bulunur.

$$\frac{4}{(z+3)^2} = 2a_3(z+2) + a_2 + \frac{z(2z+7)(z+2)^2}{(z+3)^2}. \tag{3.7.13}$$

$z = -2$ için,

$$a_2 = \left.\frac{d}{dz}\left(\frac{z-1}{z+3}\right)\right|_{z=-2} = 4.$$

(3.7.13) denklemi tekrar z ye göre türevlenerek,

$$\frac{-8}{(z+3)^3} = 2a_3 + 4\frac{d^2}{dz^2}\frac{(z+2)^3}{(z+3)}$$

elde edilir. $z=-2$ için,

$$a_3 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z-1}{z+3}\right)\Bigg|_{z=-2} = -4\,.$$

Buradan,

$$\tilde{x}(z) = \frac{-4z}{z+2} + \frac{4z}{(z+2)^2} - \frac{3z}{(z+2)^3} + \frac{4z}{z+3}\,.$$

$$x(n) = -4(-2)^n - 2n(-2)^n + \frac{3}{4}n(n-1)(-2)^n + 4(-3)^n$$

$$= \left(\frac{3}{4}n^2 - \frac{11}{4}n - 4\right)(-2)^n + 4(-3)^n\,.$$

Not: Eğer $\tilde{x}(z)/z$, $z = z_0$ da m inci dereceden bir kutup noktasına sahipse,

$$\ldots + \frac{a_1}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{a_m}{z-z_0} + \ldots\,.$$

$a_1, a_2, \ldots, a_m$ sabitleri,

$$a_t = \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left[(z-z_0)^m\,\frac{\tilde{x}(z)}{z}\right]\Bigg|_{z=z_0}$$

formülü kullanılarak bulunur.

Örnek 3.84:

$$x(n+3) - x(n+2) + 2x(n) = 0,\; x(0)=1,\; x(1)=1$$

fark denklemini çözelim.

Çözüm: Denkleme Z transformasyonu uygulanırsa,

$$\tilde{x}(z) = \frac{z^3}{(z^2-2z+2)(z+1)}$$

elde edilir. Daha sonra $\tilde{x}(z)/z$ kesirli fonksiyonun bir toplamı olarak genişletilirse,

$$\tilde{x}(z)/z = \frac{z^2}{(z^2-2z+2)(z+1)} = \frac{a_1}{\left[z-(1+i)\right]} + \frac{a_2}{\left[z-(1-i)\right]} + \frac{a_3}{(z+1)}\,.$$

Bir önceki örnekten,

$$a_3 = \frac{z^2}{z^2-2z+2}\Bigg|_{z=-1} = \frac{1}{5},$$

$$a_1 = \left.\frac{z^2}{\left[z-(1-i)\right](z+1)}\right|_{z=1+i} = \frac{1}{2+i} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\,,$$

$$a_2 = \bar{a}_1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

elde edilir. Buradan, $\tilde{x}(z) = \dfrac{\frac{1}{5}z}{z+1} + \dfrac{a_1 z}{z-\lambda} + \dfrac{\bar{a}_1 z}{z-\bar{\lambda}}$. Burada $\lambda = 1+i$. Böylece, $x(n) = \frac{1}{5}(-1)^n + a_1\lambda^n + \bar{a}_1\bar{\lambda}^n$.

Fakat, $a_1\lambda^n + \bar{a}_1\bar{\lambda}^n = 2\,\mathrm{Re}(a_1\lambda^n) = 2\left|\bar{a}_1\right|(\sqrt{2})^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{4} + \arg a_1\right)$

Burada, $\left|a_1\right| = \frac{1}{5}\sqrt{5}$ ve $\arg a_1 = \tan^{-1}(1/2) = 0.46$ radyan . Böylece,

$$x(n) = \frac{1}{5}(-1)^n + \frac{2}{5}\sqrt{5}(\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4} + 0.46\right).$$

3.7.2.3 Ters integral metodu

Z transformasyonu tanımı, $\tilde{x}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x(i) z^{-i}$. Denklemin her iki yanı z^{n-1} ile çarpılırsa,

$$\tilde{x}(z) z^{n-1} = \sum_{i=0}^{\infty} x(i) z^{n-i-1}$$

$$= x(0)z^{n-1} + x(1)z^{n+2} + \ldots + x(n)z^{-1} + x(n)z^{-2} + \ldots. \qquad (3.7.14)$$

Bu denklem $\tilde{x}(z)z^{n-1}$ in $z = 0$ civarındaki Laurent açılımıdır.

z düzleminde orjin merkezli $\tilde{x}(z)z^{n-1}$ in tüm kutuplarını içine alan bir C çemberi alalım. $x(n)$, z^{-1} in katsayısından bağımsız olduğu için Cauchy İntegral Formülü'nden,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \tilde{x}(z) z^{n-1} dz\,. \qquad (3.7.15)$$

Rezidü teoreminden,

$$x(n) = \sum \mathrm{Re}\,z\; \tilde{x}(z) z^{n-1} \qquad (3.7.16)$$

$$\tilde{x}(z) z^{n-1} = \frac{h(z)}{g(z)}$$

olsun. $\tilde{x}(z)z^{n-1}$ in rezidülerinin hesaplanmasında iki durum karşımıza çıkar.

(i) $\tilde{x}(z)z^{n-1}$ kutup noktaları basit olsun. Bu durumda, z_i kutup noktasının K_i rezidüsü,

$$K_i = \lim_{z \to z_i} \left[(z - z_i) \frac{h(z)}{g(z)} \right]$$

ile verilir.

(ii) z_i, katlılığı r olan $g(z)$ nin bir kutup noktası olsun. Bu durumda, z_i nin rezidüsü,

$$K_i = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \to z_i} \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} \left[(z - z_i)^r \frac{h(z)}{g(z)} \right]$$

ile verilir.

Örnek 3.85:

$$\tilde{x}(z) = \frac{z(z-1)}{(z-2)^2 (z+3)}$$

denkleminin ters Z transformasyonunu bulalım.

Çözüm:

$$\tilde{x}(z)z^{n-1} = \frac{(z-1)z^n}{(z-2)^2 (z+3)}.$$

Böylece $\tilde{x}(z)z^{n-1}$, $z_1 = 3$ noktasında basit kutup noktasına, $z_2 = 2$ de çift katlı kutup noktasına sahiptir. Böylece (3.7.16) formülünden $z(n) = K_1 + K_2$. Burada, K_1 ve K_2 sırasıyla $\tilde{x}(z)z^{n-1}$ nin z_1 ve z_2 noktalarındaki rezidüleridir.

$$K_1 = \lim_{z \to -3} \left[\frac{(z+3)(z-1)z^n}{(z-2)^2 (z+3)} \right] = \frac{-4}{25}(-3)^n,$$

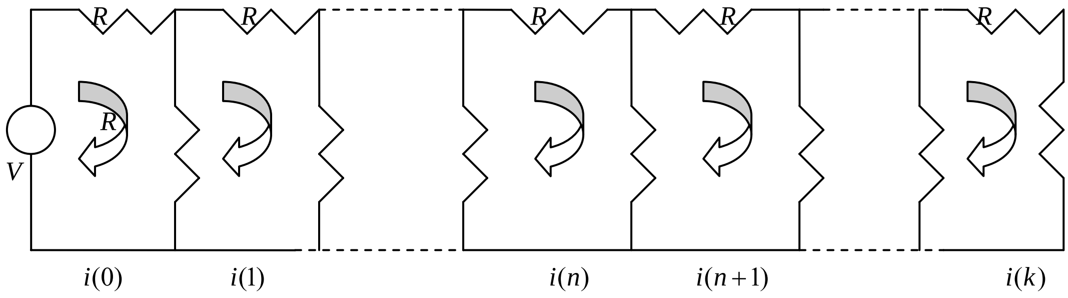
$$K_2 = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-2)^2 (z-1)z^n}{(z-2)^2 (z+3)} \right]$$

$$= \lim_{z \to 2} \frac{z^{n-1} \left[(z+3)(z+nz-n) - z(z-1) \right]}{(z+3)^2} = \frac{(8+5n)}{25}(2)^{n-1}.$$

Böylece,

$$x(n) = \frac{-4}{25}(-3)^n + \frac{(8+5n)}{25}(2)^{n-1},\ n = 0,1,2,\ldots.$$

Örnek 3.86: (Elektrik devresi veya merdiven ağı)



Şekildeki elektrik ağını ele alalım. Burada $i(n)$, n inci döngüdeki akım olsun. R her döngüdeki sabit direnç, V voltaj olsun. Ohm kanununa göre direnç ve voltaj arasındaki bağıntı $V = iR$ şeklindedir. Kirchhoff'un ikinci kanununa göre kapalı bir devredeki etkin voltaj toplam voltaja eşittir. Bu halde sistemin formülasyonu,

$$R\left[i(n+1)-i(n+2)\right]+R\left[i(n+1)-i(n)\right]+Ri(n+2)=0$$

veya

$$i(n+2)-3i(n+1)+i(n)=0\,. \tag{3.7.17}$$

Soldaki ilk bölmeden,

$$V = Ri(0)+R(i(0)-i(1))$$

veya

$$i(1)=2i(0)-\frac{V}{R} \tag{3.7.18}$$

elde edilir. (3.7.17) denkleminin Z transformasyonu alınarak (3.7.18) den

$$\tilde{i}(z)=\frac{z\left[zi(0)-3i(0)+i(1)\right]}{z^2-3z+1}=\left[\frac{z^2-(1+\frac{V}{Ri(0)})z}{z^2-3z+1}\right]i(0)\,. \tag{3.7.19}$$

$\cosh w=\frac{3}{2}$, $\sinh w=\frac{\sqrt{5}}{2}$ olacak şekilde $w>0$ olsun. Bu durumda,

$$\tilde{i}(z)=i(0)\left[\frac{z^2-z\cosh w}{z^2-2z\cosh w+1}\right]+\left(\frac{i(0)}{2}+\frac{V}{R}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left[\frac{z\sinh w}{z^2-2z\cosh w+1}\right].$$

Ters Z transformasyonu alınarak,

$$i(n)=i(0)\cosh(wn)+\left(\frac{i(0)}{2}+\frac{V}{R}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\sinh(wn)\,.$$

3.7.3 Fark denklemlerinde konvulasyon tipi (skaler durum)

$$x(n+1) = Ax(n) + \sum_{j=0}^{n} B(n-j)x(j) \qquad (3.7.20)$$

denklemi Volterra fark denklemidir. Burada $A \in \mathbb{R}$ ve $B:\mathbb{Z}^{+} \to \mathbb{R}$ ayrık bir fonksiyondur. Bu denklem meşhur Volterra integral denkleminin ayrık bir analoğu olarak ele alınabilir.

$$x'(t) = Ax(t) + \int_{0}^{t} B(t-s)x(s)ds \qquad (3.7.21)$$

(3.7.21) denklemi popülasyon dinamiğinde geniş kullanım alanına sahiptir. (3.7.20) ve (3.7.21) denklemlerinin her ikisi de sadece şimdiki $x(n+1)$ veya $x(n)$ durumlarını değil bütün geçmiş $x(n-1),\ x(n-2),...,\ x(0)$ durumlarını belirleyen sistemi temsil eder. Verilen $x(0) = x_0$ başlangıç koşulu ile birlikte (3.7.20) denkleminin $x(n, x_0)$ çözümü kolaylıkla üretilebilir. Eğer $y(n)$, $y(0) = x_0$ olmak üzere (3.7.20) denkleminin diğer bir çözümü ise, tüm $n \in \mathbb{Z}^{+}$ için $y(n) = x(n)$ olduğu kolaylıkla görülebilir. (3.7.20) denklemini çözmenin en etkili metotlarından biri Z transformasyon metodudur.

$$x(n+1) = Ax(n) + B * x \qquad (3.7.20)'$$

$(3.7.20)'$ denkleminin her iki yanının Z transformasyonu alınarak,

$$z\tilde{x}(z) - zx(0) = A\tilde{x}(z) + \tilde{B}(z)\tilde{x}(z)$$

$$\left[z - A - \tilde{B}(z)\right]\tilde{x}(z) = zx(0) \text{ veya}$$

$$\tilde{x}(z) = zx(0) / \left[z - A - \tilde{B}(z)\right] \qquad (3.7.22)$$

$$g(z) = z - A - \tilde{B}(z) \qquad (3.7.23)$$

$g(z)$ kompleks fonksiyonu (3.7.20) denkleminin stabilite analizinde önemli bir rol oynar.

Tanım 3.87: E, kompleks (veya reel) sayıların bir dizi uzayı olsun ve $x = (x(0),\ x(1),\ x(2),...)$. Bu uzayda sık kullanılan normlardan bazıları:

(i) l_1 **normu:** $\|x\|_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |x(i)|$,

(ii) l_2 **veya Öklid normu:** $\|x\|_2 = \left[\sum_{i=0}^{\infty} |x(i)|^2\right]^{1/2}$

(iii) l_∞ **normu:** $\|x\|_\infty = \sup_{i\geq 0} |x(i)|$.

Tanım 3.88: $g(z)$ kompleks düzlemde bir fonksiyonu olsun. Eğer $g(z)$ diferansiyellenebilirse analiktir denir.

Teorem 3.89: Eğer $x(n) \in l_1$ ve $|z| \geq 1$ ise,

(i) $\tilde{x}(z)$ analitik bir fonksiyondur.

(ii) $|\tilde{x}(z)| \geq \|x\|$.

İspat:

(i) $x(n) \in l_1$ olduğundan, $\tilde{x}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$ serisinin yarıçapı $R = 1$. Buradan $\tilde{x}(z)$, $|z| > 1$ bölgesinde terim terim diferansiyellenebilir. Böylece $|z| > 1$ bölgesinde $\tilde{x}(z)$ analitiktir. Üstelik $x(n) \in l_1$ olduğu için $\tilde{x}(z)$, $|z| = 1$ de analitiktir.

(ii) İspatı kolaydır.

Lemma 3.90:

$$g(z) = z - A - \tilde{B}(z)$$

denkleminin reel pozitif c sabitleri için tüm sıfırları $|z| < c$ bölgesindedir. Üstelik $|z| \geq 1$ de $g(z)$ sonlu sayıda sıfıra sahiptir.

İspat: $g(z)$ nin sıfırlarının $|z| < c$ bölgesinde olmadığını varsayalım. Bu halde, $g(z)$ nin sıfırları olan bir $\{z_i\}$ dizisi vardır öyle ki $i \to \infty$ iken $|z_i| \to \infty$. Şimdi $i \to \infty$ için,

$$|z_i - A| = \left|\tilde{B}(z_i)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |B(n)| |z_i|^{-n} \tag{3.7.24}$$

(3.7.24) eşitsizliğinin sol tarafı sonsuza giderken, sağ tarafı $B(0)$ a gidiyor. Bu da bir çelişkidir. Bu ispatımızın ilk bölümüdür. İkinci kısmının ispatı için, lemmanın ilk kısmından $g(z)$ nin tüm sıfırları $|z| \geq 1$ ile $1 \leq |z| \leq c$ bölgesindedir. Burada c reel sayıdır. Teorem 3.89'dan $1 \leq |z| \leq c$ halkasında $g(z)$ analitiktir. Bu nedenle $|z| \geq 1$ bölgesinde $g(z)$ sonlu sıfırlara sahiptir. (3.7.22) denklemi,

$$\tilde{x}(z) = x(0)zg^{-1}(z) \tag{3.7.25}$$

şeklinde yazılabilir. γ, $g(z)$ nin tüm sıfırlarını içeren bir çember olsun. (3.7.15) formülünden,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} x(0)zg^{-1}(z)dz \tag{3.7.26}$$

(3.7.16) formülünden de,

$$x(n) = \sum \text{Rez}\left[x(0)z^n g^{-1}(z)\right] \tag{3.7.27}$$

$$x(n) = \sum p_r(n)z_r^n \tag{3.7.28}$$

$p_r(n)$, eğer z_r k ıncı mertebeden katlı kök ise $n < k-1$ olacak şekilde n inci dereceden bir polinomdur. (3.7.28) formülünün geçerliliğini göstermek için z_r, $g(z)$ nin k ıncı mertebeden bir sıfırı olsun. Bazı g_n sabitleri için,

$$g^{-1}(z) = n = \sum_{n=-k}^{\infty} g(n)(z-z_r)^n .$$

$$z^n = \left[z_r - (z_r - z)\right]^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} z_r^{n-i}(z-z_r)^i .$$

$x(0)z^n g^{-1}$ in z_r deki rezidüsü, $g^{-1}(z)z^n$ deki $(z-z_r)^{-1}$ in katsayısının $x(0)$ ile çarpımıdır. Bu katsayı,

$$g_{-k}\binom{n}{k-1}z_r^{n-k+1} + g_{-k+1}\binom{n}{k-2}z_r^{n-k+2} + \ldots + g_{-1}\binom{n}{0}z_r^n \tag{3.7.29}$$

formülü ile verilir.

Teorem 3.91: (3.7.20) denkleminin sıfır çözümlerinin düzgün olarak kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart,

(a) Tüm $|z| > 1$ için $z - A - \tilde{B}(z) \neq 0$,

(b) Eğer $|z_r| = 1$ için $g(z)$ nin sıfırı (kökü) z_r ise, $n \to \infty$ için $z^n g^{-1}(z)$ nin z_r deki rezidüsü sınırlıdır.

İspat: (a) ve (b) doğru olsun. Eğer z_r, $|z| < 1$ için $g(z)$ nin bir sıfırı ise, (3.7.28) formülünden $x(n)$ çözümüne katkısı sınırlıdır. Diğer yandan eğer z_r, $|z_r| = 1$ için $g(z)$ nin sıfırı ise $n \to \infty$ için $x(0)z^n g^{-1}(z)$ in rezidüleri sınırlıdır. (3.7.27) formülünden çözüme olan katkı sınırlıdır. Bazı $L > 0$ için $|x(n)| \leq L|x(0)|$ olduğunu gösterir. Böylece düzgün kararlılığı gerektirir. Tersi de kolaylıkla gösterilebilir. Burada (b) durumu için $g(z)$ nin $|z|=1$ deki her z sıfırı basit olmalıdır kanısına varılır.

Teorem 3.92: (3.7.20) denkleminin sıfır çözümlerinin düzgün olarak asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$z - A - \tilde{B}(z) \neq 0, \ |z| \geq 1 \tag{3.7.30}$$

İspat: İspat (3.7.28) formülünden kolaylıkla elde edilir.

3.7.4 Volterra denklemlerinin stabilitesi için net kriter

Bu kısımda (3.7.20) denkleminin stabilitesi için daha net şartlar verilecektir. Bu çalışmada temel olarak Teorem 3.92 ve Rouche Teoremi kullanılacaktır.

Teorem 3.93: Eğer,

$$|A| + \left|\sum_{n=0}^{\infty} B(n)\right| < 1 \tag{3.7.31}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, (3.7.20) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

İspat: $\beta = \sum_{n=0}^{\infty} B(n)$ ve $D(n) = \beta^{-1} B(n)$ olsun. Bu halde, $\sum_{n=0}^{\infty} D(n) = 1$ olur. Ayrıca her $|z| \geq 1$ için $\tilde{D}(1) = 1$ ve $|\tilde{D}(z)| \leq 1$. $g(z)$ yi

$$g(z) = z - A - \beta \tilde{D}(z) \tag{3.7.32}$$

formunda yazalım. (3.7.20) denkleminin sıfır çözümünün düzgün olarak asimptotik kararlılığını ispatlamak için $|z| \geq 1$ için $g(z)$ nin z sıfırına sahip olmadığını göstermek yeterlidir. $g(z)$ nin $|z| \geq 1$ de bir z_r sıfırına sahip olduğunu varsayalım. (3.7.32) denkleminden $|z_r - A| = |\beta \tilde{D}(z)| \leq |\beta|$ elde edilir. (3.7.31) şartını kullanarak $|z_r| \leq |A| + |\beta| < 1$. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.94: $n \in \mathbb{Z}^+$ için $B(n)$ nin işaretinin değişmediğini varsayalım. Eğer aşağıdaki durumlardan herhangi birisi geçerli ise, (3.7.20) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlı değildir.

(i) $A + \sum_{n=0}^{\infty} B(n) \geq 1$,

(ii) Bazı $n \in \mathbb{Z}^+$ için, $A + \sum_{n=0}^{\infty} B(n) \le -1$ ve $B(n) > 0$,

(iii) Bazı $n \in \mathbb{Z}^+$ için, ve $\sum_{n=0}^{\infty} B(n)$ yeteri kadar küçükse, $A + \sum_{n=0}^{\infty} B(n) \le -1$ ve $B(n) > 0$.

İspat: β ve $D(n)$, Teorem 3.93'teki gibi tanımlansın.

(i) (i) durumunu varsayalım. Eğer $A+\beta = 1$ ise, $z=1$ (3.7.32) denkleminde tanımlanan $g(z)$ nin bir köküdür. Buradan Teorem 3.91'den (3.7.31) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlı değildir. Eğer $A+\beta > 1$ ise $A+\beta = 1+\delta$ dersek burada iki durum dikkate alınmalıdır.

(a) Eğer $\beta < 0$ ise, kompleks düzlemde A merkezli $|\beta| + \frac{1}{2}\delta$ yarıçaplı bir γ çemberi alalım. γ üzerinde $|z| > 1$ elde edilir ve dolayısıyla

$$\left|\beta \tilde{D}(z)\right| \le |\beta| < |z - A| \tag{3.7.33}$$

$h(z) = -\beta \tilde{D}(z)$, $f(z) = z - A$ olsun. Daha sonra (3.7.33) eşitsizliğinden γ üzerinde $|h(z)| < |f(z)|$. Buradan Rouche Teoremi'nden $g(z) = f(z) + h(z)$ ve $f(z)$ nin, γ içindeki sıfırlarının sayısı aynıdır. A, γ içinde $f(z)$ nin tek sıfırı olduğu için $g(z)$, $|z_0| > 1$ için tam olarak bir z_0 sıfırına sahiptir. Tekrar Teorem 3.91'den (3.7.20) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlı değildir.

(b) $\beta > 0$ olsun. $A+\beta > 1$ den dolayı $g(z) = 1 - A - \beta < 0$. Üstelik $\left|\tilde{D}(A+\beta)\right| \le 1$. Dolayısıyla $g(A+\beta) = \beta\left[1 - \tilde{D}(A+\beta)\right] \ge 0$. Buradan $g(z)$, 1 ve $A+\beta$ arasında bir sıfıra sahiptir. Teorem 3.92'den (3.7.20) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlı değildir. Bu da (i) durumunu ispatlar. Düzgün kararlılık problemlerini ele almak için yeni tekniklere gerek vardır. Bu yeni teknikler daha önce ele aldığımız Liapunov fonksiyonlarını gerektirir.

E, kompleks sayıların sonsuz bir dizi uzayı olsun. $x = \{x(n)\} \in E$ için $V : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer,

(i) $V(x)$ pozitif tanımlı,

(ii) $\Delta V(x) \le 0$,

ise, V fonksiyonuna Liapunov fonksiyonu denir. Burada $\Delta V(x) = V(\hat{x}) - V(x)$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\hat{x}(n) = x(n+1)$.

Bir sonraki sonuç Stabilite Teorisi'nde Liapunov fonksiyonlarının kullanımına bir ışık teşkil eder.

$$|A| + \sum_{j=0}^{n} |B(j)| \le 1 \tag{3.7.34}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa (3.7.20) denkleminin sıfır çözümü düzgün olarak kararlıdır.

İspat: $x \in E$ için,

$$V(x) = |x(n)| + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |B(s-r)||x(r)| \tag{3.7.35}$$

$$\Delta V(x) = \left| Ax(n) + \sum_{j=0}^{n} B(n-j)x(j) \right| + \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=n+1}^{\infty} |B(s-r)||x(r)|$$

$$-|x(n)| - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |B(s-r)||x(r)| \tag{3.7.36}$$

$$\le \left(|A| + \sum_{j=0}^{\infty} |B(j)| - 1 \right) |x(n)| \tag{3.7.37}$$

(3.7.34) varsayımından,

$$\Delta V(x) \le 0 \tag{3.7.38}$$

elde edilir. (3.7.35) denkleminden $|x(n)| \le V(x)$ elde edilir. (3.7.38) eşitsizliğini ve (3.7.35) denklemini kullanarak,

$$|x(n)| \le V(x) \le |x(0)|$$

elde edilir. Sonuç olarak sıfır çözüm düzgün olarak kararlıdır.

3.7.5 Volterra sistemleri

Bu kısımda,

$$x(n+1) = Ax(n) + \sum_{j=0}^{n} B(n-j)x(j) \tag{3.7.39}$$

şeklinde konvulasyon tipindeki Volterra sistemi çalışılacaktır. Burada $A = (a_{ij})$ ve $B(n)$, $\mathbb{Z}^+$ üzerinde tanımlanmış $k \times k$ tipinde gerçel matrislerdir. Genellikle

$B(n) \in l_1$ olduğu varsayılır. Örneğin $\sum_{j=0}^{\infty} |B(j)| < \infty$. R^k daki diziler ve $R^{k\times k}$ daki matrisler için Z trasformasyonu,

$$Z\left[x(n)\right] = \left(Z(x_1(n)), Z(x_2(n)), ..., Z(x_k(n))\right)^T,$$

$$Z\left[B(n)\right] = \left(Z(b_{ij}(n))\right)$$

ile tanımlanır.

(3.7.39) denkleminin her iki yanına Z transformasyonunu uygulanırsa,

$$z\tilde{x}(z) - zx(0) = A\tilde{x}(z) + \tilde{B}(z)\tilde{x}(z), \ |z| > R,$$

$$\tilde{x}(z) = \left[zI - A - \tilde{B}(z)\right]^{-1} zx(0), \ |z| > R \tag{3.7.40}$$

elde edilir.

Teorem 3.95: Her $|z| \geq 1$ için, düzgün olarak asimptotik kararlılık için gerekli ve yeterli şart,

$$\det(zI - A - \tilde{B}(z)) \neq 0. \tag{3.7.41}$$

Lemma 3.96: $G = (g_{ij})$, $k \times k$ tipinde bir matris olsun. z_0, G nin bir eigen değeri ise,

(i) Bazı i, j $(i \neq j)$ ler için, $|z_0 - g_{ii}||z_0 - g_{jj}| \leq \sum |g_{ir}| \sum |g_{jr}|$,

(ii) Bazı t, s $(t \neq s)$ ler için, $|z_0 - g_{tt}||z_0 - g_{ss}| \leq \sum |g_{rt}| \sum |g_{rs}|$.

Burada. $\sum_r{}' g_{ir} = \left(\sum_{r=1}^{k} g_{ir}\right) - g_{ii}$. Yukarıdaki lemmadan faydalanarak,

$$\beta_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} |b_{ij}(n)|, \ 1 \leq i, j \leq k$$

kabul ederek bir sonraki sonucu ispatlayabiliriz.

Teorem 3.97: Aşağıdaki durumlardan herhangi biri sağlandığı taktirde (3.7.39) denkleminin sıfır çözümü düzgün olarak asimptotik kararlıdır.

(i) Her i için, $1 \leq i \leq k$, $\sum_{j=1}^{k} \left(|a_{ij}| + \beta_{ij}\right) < 1$ veya

(ii) Her j için, $1 \leq j \leq k$ $\sum_{i=1}^{k} \left(|a_{ij}| + \beta_{ij}\right) < 1$.

İspat:

(i) Birinci şartla düzgün olarak asimptotik kararlılığı göstermek için (3.7.41) şartının sağlandığını göstermemiz gerekir. Tersini kabul edelim. Bazı $|z_0| \geq 1$ için,

$$\det(z_0 I - A - \tilde{B}(z)) = 0 .$$

Bu halde, z_0, $A + \tilde{B}(z_0)$ matrisinin bir eigen değeridir. Buradan Lemma 3.96'daki Durum (i) den

$$\left|z_0 - a_{ii} - \tilde{b}_{ii}(z_0)\right|\left|z_0 - a_{jj} - \tilde{b}_{jj}(z_0)\right| \leq \sum\nolimits_r' \left|a_{ir} + \tilde{b}_{ir}(z_0)\right| \sum\nolimits_r' \left|a_{jr} + b_{jr}(z_0)\right| \tag{3.7.42}$$

Fakat

$$\left|z_0 - a_{ii} - \tilde{b}_{ii}(z_0)\right| \geq |z_0| - |a_{ii}| - \left|\tilde{b}_{ii}(z_0)\right|$$

$$\geq 1 - |a_{ii}| - \left|\tilde{b}_{ii}(z_0)\right| > \sum\nolimits_r' |a_{ir}| + |\beta_{ir}| .$$

Benzer olarak,

$$\left|z_0 - a_{jj} - \tilde{b}_{jj}(z_0)\right| > \sum\nolimits_r' |a_{jr}| + |\beta_{jr}| .$$

İki eşitsizlikten,

$$\left|z_0 - a_{ii} - \tilde{b}_{ii}(z_0)\right| \left|z_0 - a_{jj} - \tilde{b}_{jj}(z_0)\right| > \sum\nolimits_r' (|a_{ir}| + |\beta_{ir}|) \sum\nolimits_r' (|a_{jr}| + |\beta_{jr}|) .$$

Bunun da $1 \leq s,\ m \leq k$ için (3.7.42) eşitsizliği ile çeliştiği açıktır.

$$|a_{st}| + \beta_{st} \geq |a_{st}| + \left|\tilde{b}_{st}(z_0)\right| \geq \left|a_{st} + \tilde{b}_{st}(z_0)\right| .$$

Teorem 3.98: Eğer,

$$\sum_{i=1}^{k} |a_{ij}| + \beta_{ij} \leq 1 \tag{3.7.43}$$

eşitsizliği tüm $j = 1, 2, ..., k$ için sağlanıyor ise, (3.7.39) denkleminin sıfır çözümü düzgün olarak asimptotik kararlıdır.

İspat:

$$V(x) = \sum_{i=1}^{k} \left[|x_i(n)| + \sum_{j=1}^{k} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |b_{ij}(s-r)| |x_j(r)| \right] .$$

$$\Delta V(x) \leq \sum_{i=1}^{k} \left[\sum_{j=1}^{k} |a_{ij}| |x_{ji}(n)| - |x_i(n)| + \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=n}^{\infty} |b_{ij}(s-n)| |x_j(n)| \right] \tag{3.7.44}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} |a_{ij}| |x_j(n)| = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} |a_{ij}| |x_i(n)| ,$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=n}^{\infty}\left|b_{ij}(s-n)\right|\left|x_j(n)\right|=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=n}^{\infty}\left|b_{ij}(s-n)\right|\left|x_i(n)\right|$$

Buradan (3.7.44) eşitsizliği,

$$\Delta V(x)\leq\sum_{i=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{k}\left|a_{ij}\right|+b_{ji}-1\right]\left|x_i(n)\right|\leq 0$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$\left|x(n)\right|\leq V(x)\leq\sum_{i=1}^{k}\left|x_i(0)\right|=\left\|x(0)\right\|$$

yazılır ki bu da düzgün kararlılığı ispatlar.

3.7.6 Fark denklemleri için sabitlerin varyasyon (değişim) formülü

$$y(n+1)=Ay(n)+\sum_{j=0}^{n}B(n-j)y(j)+g(n) \qquad (3.7.45)$$

nanhomojen sistemiyle (3.7.39) homojen sistemini birlikte düşünelim. Burada $g(n)\in\mathbb{R}^k$. (3.7.39) sisteminin çözümlerinin varlık ve tekliği daha kolay bir argümanla kurulabilir. $e_i=(0,...,1,...,0)^T$, $\mathbb{R}^k$ da $1\leq i\leq k$ için i inci standart birim vektör olsun. $x_i(n)=e_i$, (3.7.39) sisteminin $x_1(n),x_2(n),x_3(n),...,x_k(n)$ şeklinde k tane vektör çözümü vardır. Küme çözümleri $\mathbb{Z}^+$ de lineer bağımsızdır.

Eğer $\mathbb{Z}^+$ de $c_1x_1(n)+c_2x_2(n)+c_3x_3(n)+...+c_kx_k(n)=0$ şeklinde lineer tirivial olmayan bir ilişki varsa $n=0$ da $c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3+...+c_ke_k=0$ elde edilir. Buradan $c_1=c_2=c_3=...=c_k=0$ elde edilir. Bu da bir çelişkidir. i inci kolonu $x_i(n)$ olan $k\times k$ tipinde $X(n)$ matrisi (3.7.39) sisteminin fundamental matrisi diye adlandırılır. $X(n)$ bir nansingüler matristir. $X(0)=I$. Üstelik $x(n)=X(n)x_0$, (3.7.39) denklem sisteminin bir çözümüdür ve $x(0)=x_0$. Ayrıca $X(n)$ fundamental matrisi

$$X(n+1)=AX(n)+\sum_{j=0}^{n}B(n-j)X(j) \qquad (3.7.46)$$

matris denklemini sağlar.

Teorem 3.99: $B(m)$ ve $g(n)$ in Z transformasyonunun olsun. (3.7.45) sisteminin $y(n)$ çözümü, $y(n_0)=y_0$ olmak şartıyla,

$$y(n,0,y_0) = X(n)y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} X(n-r-1)g(r) \tag{3.7.47}$$

ile verilmiştir.

İspat:

$$X(n+1) = AX(n) + \sum_{r=0}^{n} B(n-r)X(r) \tag{3.7.48}$$

denkleminin her iki tarafına Z transformasyonu uygulayarak

$$z\tilde{X}(z) - zX(0) = A\tilde{X}(z) + \tilde{B}(z)\tilde{X}(z), \quad |z| > R$$

elde edilir.

$$\left[zI - A - \tilde{B}(z)\right]\tilde{X}(z) = zI, \quad |z| > R\,. \tag{3.7.49}$$

(3.7.49) denkleminin sağ tarafı nansingüler olduğundan $zI - A - \tilde{B}(z)$ matrisi nansingülerdir.

$$\tilde{X}(z) = z\left[zI - A - \tilde{B}(z)\right]^{-1}, \quad |z| > R\,. \tag{3.7.50}$$

İspatta bir sonraki adımda (3.7.45) sistemine Z transformasyonunu uygulayalım.

$$\tilde{y}(z) = \left[zI - A - \tilde{B}(z)\right]^{-1}\left[zy_0 + \tilde{g}(z)\right], \quad |z| > R_1,\ R_1 \geq R\,.$$

(3.7.50) formülü kullanılarak,

$$\tilde{y}(z) = \tilde{X}(z)y_0 + \frac{1}{2}\tilde{X}(z)\tilde{g}(z), \quad |z| > R_1\,.$$

Buradan,

$$y(n) = Z^{-1}\left[\tilde{X}(z)y_0\right] + Z^{-1}\left[\frac{1}{2}\tilde{X}(z)\tilde{g}(z)\right]$$

$$= X(n)y + \sum_{r=0}^{n-1} X(n-r-1)g(r)\,.$$

3.7.7 Laplace transformasyonunun *Z* transformasyon versiyonu

Fark denklemlerindeki Z transformasyonunun oynadığı rolün aynısını, diferansiyel denklemlerde Laplace transformasyonu oynar. Sürekli bir $f(t)$ fonksiyonu için Laplace transformu,

$$\hat{f}(s) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

şeklinde tanımlanır. Bu integralin diskritize edilmiş şekli

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} f(n).$$

$z = e^s$ denilirse, $f(n)$ nin Z transformasyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} .$$

Buradan s düzleminde $s = \alpha + i\beta$ denirse, $z = e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha} e^{i\beta} = e^{\alpha} e^{i(\beta + 2n\pi)}$, $n \in \mathbb{Z}$.

s düzleminin sol yarısı, z düzleminde $|z| < 1$ birim çemberinin içine dönüşür. Böylece eğer karakteristik denklemlerin reel kısımları negatifse, bu diferansiyel denklemin asimptotik karalılığı elde edilir. Fark denklemlerinde ise bu durumun karşılığı, karakteristik denklemlerin tüm köklerinin birim çemberin içine yatmasıyla gerçekleşir. Kararlılık analizini s düzleminden z düzlemine taşımamızı sağlayan ve işimizi kolaylaştıran başka bir metot daha vardır. Bir diferansiyel denkleminin karakteristik denklemi,

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n = 0$$

ile verilsin. Möbius dönüşümü,

$$z = \frac{s+1}{s-1}$$

ile tanımlanır. Birim çemberin içini, kompleks düzlemde sol yarım düzleme dönüştürür. Bunu görmek için $s = \alpha + i\beta$ diyelim. Sonra

$$|z| = \left| \frac{\alpha + i\beta + 1}{\alpha + i\beta - 1} \right| < 1 \text{ veya } \frac{(\alpha+1)^2 + \beta^2}{(\alpha-1)^2 + \beta^2} < 1, \ \alpha < 0.$$

$z = \dfrac{s+1}{s-1}$ yi $P(z)$ de yazarsak,

$$a_0 \left(\frac{s+1}{s-1} \right)^n + a_1 \left(\frac{s+1}{s-1} \right)^{n-1} + ... + a_n = 0$$

elde edilir veya

$$Q(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + ... + b_n = 0 .$$

Şimdi $Q(s)$ üzerinde eğer $Q(s)$ nin tüm sıfırları sol yarım düzlemde ise Routh Kararlılık Kriteri uygulanabilir. Eğer bu durum sağlarsa, $P(z)$ nin tüm sıfırlarının birim çemberin içinde olduğunu garanti eder.

3.8 Kontrol Teorisi

3.8.1 Kontrol teorisine giriş

Son 30 yılda, kontrol teorisi, mühendisler, matematikçiler, bilim adamları ve araştırmacılar için önemli bir yere sahiptir. Kontrol problemleri, Ay'a araç gönderme, ülke ekonomisi, robot yapımı, salgın hastalık yayılımı ve buna benzer birçok örnekleri kapsar.

$$x(n+1) = Ax(n) \qquad (3.8.1)$$

homojen fark denkleminin kontrolü ile bir fiziksel sistem temsil edilebilir. Burada A $k \times k$ tipinden bir matristir. Üçüncü ve dördüncü bölümde bu denklemler, geniş bir şekilde ele alındı. Bu bölümde kontrol edilemeyen sistem olarak ele alınacaktır. Bu sistemleri kontrol etmek için bir $u(n)$ kuvvet terimini sunalım. Yani,

$$x(n+1) = Ax(n) + u(n) \qquad (3.8.2)$$

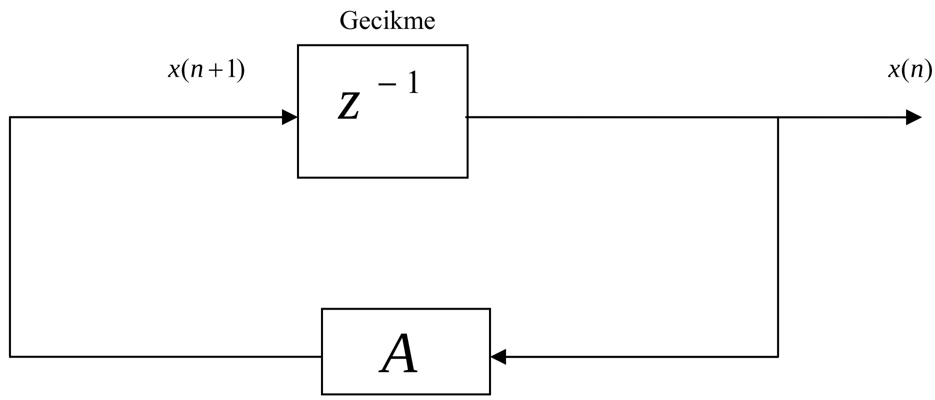
şeklinde homojen olmayan kontrol sistemini ele alalım. (3.8.2) sistemi lineerize edilirse, sistemin $x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)$ değişkenlerinin her birine direkt etki etmek şartıyla kontrolün uygulanabilir olduğu varsayılsın. Buna rağmen bu varsayım uygulamaların çoğunda gerçekçi değildir. Örneğin hastalık kontrolünde, sistemin durum değişkeninin hepsinin direkt olarak etkileneceği beklenemez.

Ekonomi alanında örnek olarak, ekonomistler ve politikacılar, enflasyonun nasıl kontrol edilebileceğini, özellikle vergi, para arzı, kredi gibi değişkenlerin hepsini ya da birkaçını değiştirerek anlamaya çalışırlar. (3.8.2) denklemi enflasyon oranını açıklayacak en iyi denklemlerden birisidir. Fakat sistem kontrolü için birçok akla uygun model geliştirilebilir.

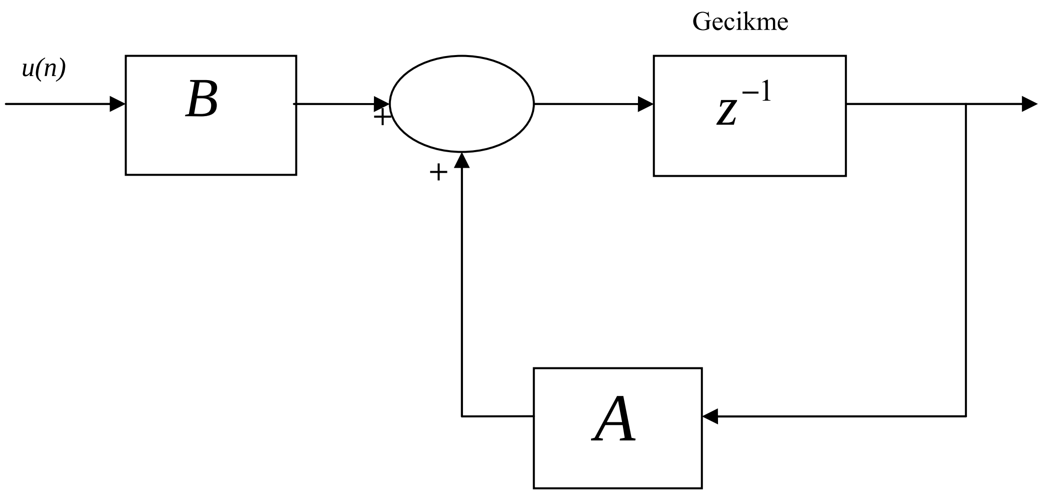
$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n). \qquad (3.8.3)$$

Burada girdi matrisi de denilen B matrisi, $k \times m$ tipinde bir matris, $u(n)$ ise $m \times 1$ tipinde bir vektördür. Bu sistemde m kontrol değişkenleri veya $u_1(n), u_2(n), ..., u_m(n)$ bileşenleri vardır. Burada $m \leq k$.

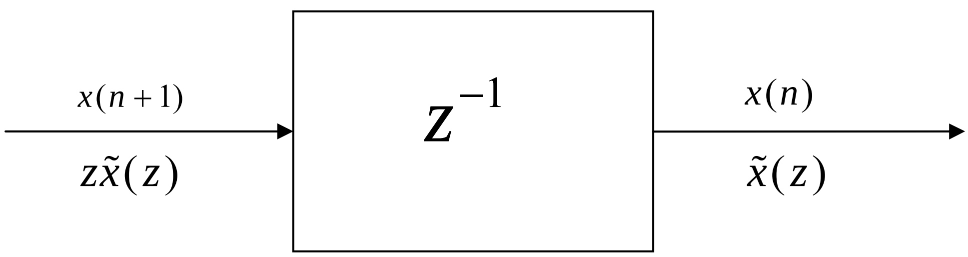
Mühendislik tasarım ve tamamlanmasında sistem blok diyagramı ile gösterilir. (Şekil 3.4a-b) $\frac{1}{z} Z\left[x(n+1)\right] = Z\left[x(n)\right]$ olduğu için gecikme, z^{-1} ile gösterilir. (Şekil 3.5)



Şekil 3.4a Kontrol edilemeyen sistem



Şekil 3.4b Kontrollü sistem



Şekil 3.5.

3.8.1.1 Sürekli sistemler için ayrık denklikler

Bu kısımda, problemler fark denklemleri ile değil, diferansiyel denklemler ile temsil edilir. Bunun sebebi birçok fiziksel sistemin diferansiyel denklemler tarafından modellenmesine rağmen, kontrol yasaları, girdi ve çıktıları diziler olan dijital bilgisayarlar yardımıyla tamamlanır. Tasarımı kontrol edebilmek için yaygın yaklaşımlardan biri, verilen sürekli sistemin dengi olan fark denklemini bulmaktır. Şekil 3.6, sürekli bir kontrolün bilgisayara aktarımının genel metodunu verir.

$\sum_c$ sistemi $x(t)$ durum vektörüne ve $u(t)$ girdisine sahiptir ve

$$\dot{x}(t) = \hat{A}(t) + \hat{B}u(t) \tag{3.8.4}$$

diferansiyel denklemi ile modellenir. Verilen sürekli bir $x(t)$ sinyali ile,

$$x(k) = x(kT) \tag{3.8.5}$$

şeklinde tanımlanan bir $x(k)$ dizisini üreten S_T sistemine ideal örnekleyici denir. Verilen bir $u(k)$ dizisi ile

$$u(t) = u(k)\,,\; t \in \left[kT,\; (k+1)T\right] \tag{3.8.6}$$

şeklinde tanımlanan kısmi sürekli $u_c(t)$ sinyalini üreten H_T sistemine sıfır mertebeli etki denir. $t \in \left[kT,\; (k+1)T\right]$ için (3.8.4) denkleminin

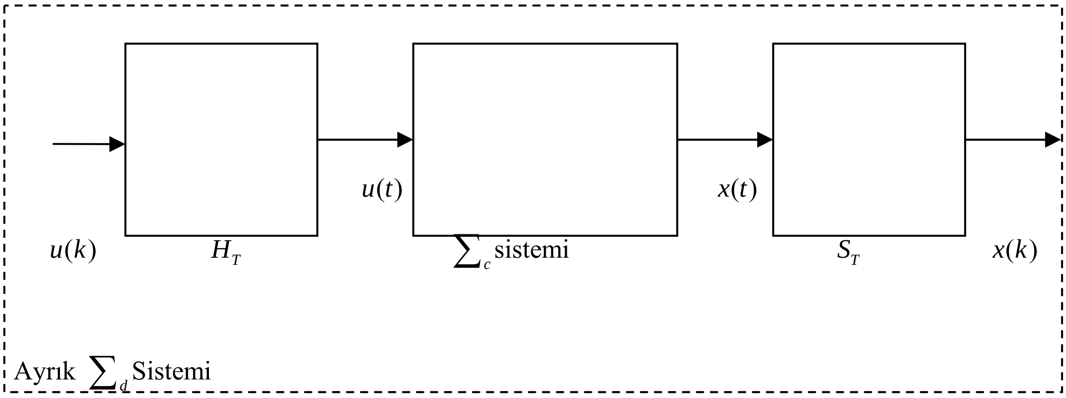
$$x(t) = e^{\hat{A}t}x(kt) + \int_{kT}^{t} e^{\hat{A}(t-\tau)}\hat{B}u(\tau)d\tau \tag{3.8.7}$$

ile verilen çözümünü incelemek zor değildir. Böylece $t = (k+1)T$ de (3.8.7) formülü kullanılırsa, (3.8.5) ve (3.8.6) denklemlerini kullanarak $\sum_d$ sistemi için (kesikli çizgilerin tümü)

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{3.8.8}$$

şeklinde bir fark denklemi modeli elde edilebilir. Burada,

$$A = e^{\hat{A}t} \text{ ve } B = Te^{\hat{A}T}\hat{B} \tag{3.8.9}$$



Şekil 3.6.

Örnek 3.100: Bir akım kontrol motoru DC,

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\tau}x(t) + \frac{K}{\tau}u(t)$$

diferansiyel denklemi ile modellenebilir. Burada x motorun açısal hızı, u uygulanan bobin akımı, K ve τ sabitlerdir. (3.8.8) ve (3.8.9) denklemleri kullanılarak bu motor için uygun olan ayrık kontrol sistemi,

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

şeklindedir. Burada $A = e^{\hat{A}t} = e^{-T/\tau}$ ve $B = Te^{\hat{A}T}\hat{B} = \dfrac{KT}{\tau}e^{-T/\tau}$.

3.8.2 Kontrol edilebilirlik

Tanım 3.101: Herhangi bir $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, başlangıç koşulu $x(n_0) = x_0$ ve sonuç koşulu x_f verilsin.bu halde, bir $N > n_0$ ve $u(n)$ kontrolü vardır öyle $x(N) = x_f$. Burada $n_0 < n \leq N$ varsa (3.8.3) sistemine tamamen kontrol edilebilir sistemler denir.

Not: A ve B matrisleri tanımlandığından, $\{A, B\}$ çiftinin kontrol edilebilirliğinden bahsedebiliriz. Diğer bir deyişle, (3.8.3) sistemine uygulandığında $x(N) = x_f$ çıktısını veren $u(0), u(1), ..., u(N-1)$ dizileri vardır.

Örnek 3.102:

$$x_1(n+1) = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + bu(n),$$

$$x_2(n+1) = a_{22}x_2(n)$$

denklemleri ile oluşturulan sistemi ele alalım. Burada,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$u(n)$ in $x_2(n)$ üzerinde hiç etkisi olmadığından bu sistemin tamamen kontrol edilemez olduğunu anlamak oldukça kolaydır. Üstelik $x_2(n)$ tamamen ikinci denklem ile belirlenir ve $x_2(n) = a_{22}^n x_2(0)$ ile verilir.

Yukarıdaki örneğin kontrol edilebilirliği oldukça kolaydır. Daha komplike sistemlerde kontrol edilebilirlik için basit birkaç kriter geliştireceğiz. (3.8.3) sisteminin kontrol edilebilirlik matrisi W, $k \times km$ tipinden matris olarak,

$$W = \left[B, AB, A^2B, ..., A^{k-1}B \right] \tag{3.8.10}$$

şeklinde verilir.

Teorem 3.103: (3.8.3) sisteminin tamamen kontrol edilebilir olması için gerek ve yeter şart $\operatorname{rank} W = k$ olmasıdır.

Teoremi ispatlamadan önce teorem hakkında birkaç gözlemde bulunalım.
İlk olarak sistemin bir tek girdiye sahip olduğu basit durumu dikkate alalım. Böylece girdi matrisi B, $m \times 1$ tipinden bir tek b vektörüne indirgenir. Buradan kontrol edilebilirlik matrisi $k \times k$ tipinden

$$W = \left[b, Ab, A^2b, ..., A^{k-1}b \right]$$

matrisi olur.

Kontrol edilebilirlik şartı olan W nin rankının k olması demek, W matrisi nansingülerdir veya sütunları lineer bağımsızdır demektir. Genel durum için kontrol edilebilirlik şartı km sütunları boyunca, k tane lineer bağımsız sütun vardır. Şimdi bunu bir örnekle açıklayalım.

Örnek 3.104:

$$y_1(n+1) = ay_1(n) + by_2(n),$$

$$y_2(n+1) = cy_1(n) + dy_2(n) + u(n),$$

sistemini düşünelim. Burada $ad - bc \neq 0$. Burada,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$u(n)$ skaler kontroldür. Şimdi eğer $b \neq 0$ ise,

$$W(2) = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}$$

rankı 2 dir. Böylece Teorem 3.103'ten sistem tamamen kontrol edilebilirdir ancak ve ancak $b \neq 0$ olmasıdır.

Lemma 3.105: Herhangi $N \geq k$ için,

$$\left[B, AB, A^2B, ..., A^{N-1}B \right]$$

matrisinin rankı kontrol edilebilir W matrisinin rankına eşittir.

İspat (1): $W(n) = \left[B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B \right]$, $n = 1, 2, 3, ...$ matrisini ele alalım. n, bir artarken, $W(n)$ nin rankı ya sabit kalır ya da en az bir artar. Bazı $r > 1$ için, $\text{rank}\ W(r+1) = \text{rank}\ W(r)$ olduğunu varsayalım. Bu halde, A^rB matrisinde her sütun $W(r) = \left[B, AB, A^2B, ..., A^{r-1}B \right]$ nin sütunlarına lineer bağımlıdır. Burada,

$$A^rB = BM_0 + ABM_1 + ... + A^{r-1}BM_{r-1} \tag{3.8.11}$$

Burada, her M_i, $m \times m$ tipinden bir matristir. (3.8.11) denkleminin her iki yanı önden A ile çarpılarak,

$$A^{r+1}B = ABM_0 + A^2BM_1 + ... + A^rBM_{r-1}$$

elde edilir. $A^{r+1}B$ nin sütunları $W(r+1)$ in sütunlarına lineer bağımlıdır. Bu da

$$\text{rank}\ W(r+2) = \text{rank}\ W(r+1) = \text{rank}\ W(r)$$

olduğunu ifade eder. Bu muhakemeye devam edilirse, tüm $n > r$ için,

$$\text{rank}\ W(n) = \text{rank}\ W(r).$$

Yukarıdaki tartışmadan, $W(n)$ nin rankı, 1 den başlayarak maksimum n ye kadar artar. Buradan, en çok k adımda $W(n)$ maksimum rankına ulaşır. Bu nedenle $n \leq k$ da maksimum ranka ulaşılır ve sonuç olarak tüm $N \geq k$ için $\text{rank}\ W(\equiv \text{rank}\ W(k)) = \text{rank}\ W(N)$.

İspat (2): Cayley-Hamilton Teoremi'nden eğer,

$$p(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + ... + p_k$$

A nın karakteristik polinomu ise, $p(A) = 0$. Yani,

$$A^k + p_1A^{k-1} + ... + p_kI = 0 \text{ veya}$$

$$A^k = \sum_{i=1}^{k} q_iA^{k-1}. \tag{3.8.12}$$

Burada $q_i = -p_i$. Her iki tarafı B ile çarpılırsa,

$$A^k B = \sum_{i=1}^{k} q_i A^{k-i} B \tag{3.8.13}$$

elde edilir. Böylece $A^k B$ nin sütunları $W(k) \equiv W$ nın sütunlarına lineer bağımlıdır. Bu nedenle rank $W(k+1) =$ rank W. (3.8.13) denklemi A ile çarpılırsa,

$$A^{k+1} B = q_1 A^k B + q_2 A^{k-1} B + ... + q_k AB .$$

Sonuç olarak, rank $W(k+2) =$ rank $W(k+1) =$ rank W. Bu muhakemeye devam edilirse, tüm $N \geq k$ için, rank $W(N) =$ rank W.

Teorem 3.103'ün ispatı:

Yeter şart:

rank $W = k$ olsun. x_0 ve x_f, $\mathbb{R}^k$ da herhangi keyfi iki vektör olsun. (3.2.13) sabitlerin değişim formülünden,

$$x(k) - A^k x(0) = \sum_{r=0}^{k-1} A^{k-r-1} B u(r) ,$$

veya

$$x(k) - A^k x(0) = W \overline{u}(k) . \tag{3.8.14}$$

Burada,

$$\overline{u}(k) = \begin{pmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{pmatrix} .$$

rank $W = k$ olduğundan Range $W = \mathbb{R}^k$. Buradan eğer $x(0) = x_0$ ve $x(k) = x_f$ dersek, $x_f - A^k x_0 \in$ Range W. Böylece bazı $\overline{u} \in \mathbb{R}^k$ vektörleri için $x_f - A^k x_0 = W\overline{u}$.

Sonuç olarak, (3.8.3) denklem sistemi tamamen kontrol edilebilirdir.

Gerek şart:

(3.8.3) sisteminin tamamen kontrol edilebilir ve rank $W < k$ olduğunu varsayalım. Lemma 3.105'in ispatından (İspat 1)

$$\text{rank } W(1) < \text{rank } W(2) < ... < \text{rank } W(r) = \text{rank } W(r+1) = ... = \text{rank } W$$

olacak şekilde $r \in \mathbb{Z}^+$ in var olduğu sonucuna varılabilir. Üstelik her $n > k$ için rank $W(n) =$ rank W. Ayrıca, $W(j+1) = (W(j), A^j B)$ olduğundan dolayı herhangi $n > k$ için,

$$\text{Range } W(1) \subset \text{Range } W(2) \subset \ldots \subset \text{Range } W(r) = \text{Range } W(r+1)$$
$$= \ldots = \text{Range } W = \ldots = \text{Range } W(n).$$

rank $W < k$ olduğundan dolayı Range $W \neq \mathbb{R}^k$. Böylece $\xi \notin$ Range W. Tüm $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\xi \notin$ Range $W(n)$. Eğer (3.8.14) formülünde $x(0) = 0$ ve k yerine n dersek $x(n) = W(n)\bar{u}(n)$. Bu nedenle bazı n ler için ξ nin $x(n)$ e eşit olması için ξ nin Range $W(n)$ de olması gerekir. Fakat her $n \in \mathbb{Z}^+$ için ξ, hiçbir zaman orjine yaklaşmaz. Bu da bir çelişkidir. Böylece rank $W = k$.

Not 3.106: Literatürde orjinden kontrol edilebilirlik adı altında tamamen kontrol edilebilirliğin bir başka tanımı daha vardır.

Eğer herhangi $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, $x_0 \in R^k$ ve $n_0 < n \leq N$ için $x(N) = 0$ olacak şekilde sonlu zamanda $N > n_0$ ve $u(n)$ kontrolü varsa, sistem orjine göre kontrol edilebilirdir.

Açıkça tamamen kontrol edilebilirlik, orjinde kontrol edilebilirlikten daha güçlü bir özelliktir. Zamana bağlı sistemlerde iki yakın fikir çakışmaktadır. Buna rağmen (3.8.3) ayrık-zaman sistemlerinde, A singüler olmadıkça, orjinde kontrol edilebilirlik tamamen kontrol edilebilirliği vurgulamaz. Bunu aşağıdaki örnekle açıklayalım.

Örnek 3.107:

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$

kontrol sistemini ele alalım.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.8.15}$$

$$x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$$

için (3.8.15) denkleminden,

$$x(1) = Ax_0 + Bu(0)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(0)$$

$$= \begin{pmatrix} x_{02} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Eğer $u(0) = -x_{02}$ dersek $x(1) = 0$. Buradan (3.8.15) denklem sistemi sıfırda kontrol edilebilirdir. Buna rağmen

$$\text{rank}(B, AB) = \text{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 < 2$$

olduğuna dikkat edelim. Böylece Teorem 3.103 ile (3.8.15) denklem sistemi tamamen kontrol edilebilir değildir.

Örnek 3.108:

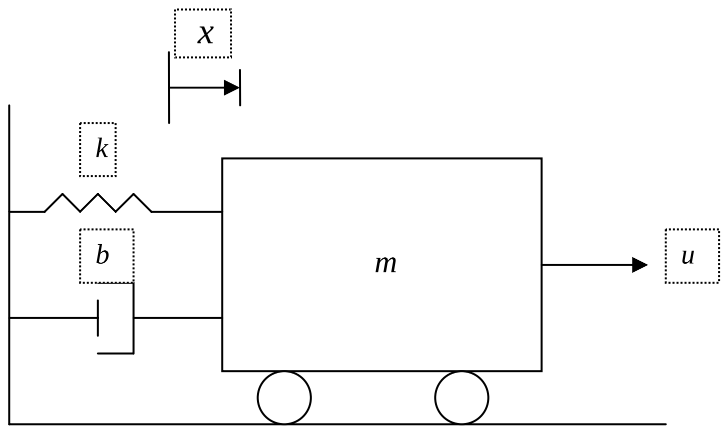
$$y(n+1) = Ay(n) + Bu(n)$$

sistemini ele alalım. Burada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$W(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ matrisinin rankı 1 dir. $W(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin rankı da, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisine denk olduğundan birdir. Teorem 3.103'ten sistem kontrol edilebilir değildir. Buna rağmen $n = 2$ zamanında $u(n) = -2$ kontrolü altında $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ noktasından $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ noktasına ulaşılabilir.

Örnek 3.109:



Şekil 3.7.

Şekil 3.7 bir duvara yay ile bağlı olan kütlesi m olan bir yük arabasını göstermektedir.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = u \tag{3.8.16}$$

bu sistemin hareketinin denklemidir. Burada k ve b sırasıyla sertlik ve damping katlılıklarını göstermektedir. u ise, uygulanan kuvvettir. (3.8.16) denklemi,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u \tag{3.8.17}$$

formunda yazılır. Böylece,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix}, \; \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}.$$

T periyodunda A ve B matrisleri

$$A = e^{\hat{A}T}, \; B = Te^{\hat{A}T}\hat{B}$$

şeklinde verilen ayrık sistemlere denktir. Burada $\hat{A}$ matrisinin eksponansiyelini bulmak gerekir. $\hat{A}$ matrisi köşegenleştirilirse,

$$\hat{A} = P\Lambda P \tag{3.8.18}$$

şeklinde P matrisi elde edilir. Buradan,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix} \tag{3.8.19}$$

diyagonal bir matristir. Tanımdan

$$e^{\hat{A}T} = 1 + \hat{A}T + \frac{1}{2!}\hat{A}^2T^2 + \frac{1}{3!}\hat{A}^3T^3 + ...$$

(3.8.18) denkleminden,

$$e^{\hat{A}T} = Pe^{\Lambda T}P^{-1}.$$

Λ nın (3.8.19) diyagonal formu,

$$e^{\hat{A}T} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{\lambda_k T} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Alıştırmamıza dönersek, $m = 1,\; k = 2$ ve $b = 3$ için,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \; \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\hat{A}$, (3.8.18) denkleminin formunda yazılabilir. Burada,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \; P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Buradan,

$$A = e^{\hat{A}T} = P \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-T} - e^{-2T} & e^{-T} - e^{-2T} \\ -2e^{-T} + 2e^{-2T} & -e^{-T} + 2e^{-2T} \end{bmatrix},$$

$$B = Te^{\hat{A}T}\hat{B} = T \begin{bmatrix} e^{-T} - e^{-2T} \\ -e^{-T} + 2e^{-2T} \end{bmatrix}.$$

Ayrık denklem sistemlerin kontrol edilebilirliği hesaplama ile kontrol edilebilir.

$$W = \left[BAB \right] = T \begin{bmatrix} e^{-T} - e^{-2T} & e^{-2T} - e^{-4T} \\ -e^{-T} + 2e^{-2T} & -e^{-2T} + 2e^{-4T} \end{bmatrix}.$$

$T = 0$ ise,

$$\det W = -T^2 e^{-4T}(1 - e^{-T} + e^{-2T})$$

determinantı sıfırdır. Bu nedenle araba sistemi, sıfırdan farklı herhangi bir T için kontrol edilebilirdir.

3.8.2.1 Kanonik formların kontrol edilebilirliği

$$z(n+2) + p_1 z(n+1) + p_2 z(n) = u(n)$$

ikinci mertebeden fark denklemini ele alalım. Bu denklem

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$

sistemine denktir. Burada,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p_2 & -p_1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} z(n) \\ z(n+1) \end{pmatrix}.$$

Açıkça,

$$W(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -p_1 \end{pmatrix}$$

sisteminin tüm p_1 ve p_2 değerleri için rankı 2 dir. Sonuç olarak bu denklem tamamen kontrol edilebilirdir. Bir önceki örnek k inci mertebeden,

$$z(n+k) + p_1 z(n+k+1) + ... + p_k z(n) = u(n) \qquad (3.8.20)$$

denklemine genelleştirilebilir.

$$x(n+1) = Ax(n) + bu(n)$$

sistemine denktir. Burada,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ & & & & 1 \\ -p_k & -p_{k-1} & \cdots & & -p_1 \end{pmatrix}, \; B = e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \; x(n) = \begin{pmatrix} z(n) \\ z(n+1) \\ \vdots \\ z(n+k-1) \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -p_1 \end{pmatrix}, \; A^2B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ * \\ * \end{pmatrix}, \ldots, \; A^{k-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix},$$

Burada $*$, p_i nin bileşenlerinin kombinasyonudur.

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ 1 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Rankı k dır. Böylece tamamen kontrol edilebilirdir.

Yukarıda geçen ifadenin tersi de geçerlidir. Bir başka deyişle, eğer (3.8.3) sistemi, $k \times 1$ tipinde $B \equiv b$, tamamen kontrol edilebilir. Ardından benzer bir dönüşüm ile a inci mertebeden skaler (3.8.20) denklemi formuna getirilebilir. Bu işlemi başarıyla sonuçlandırmak için $k \times k$ tipinde kontrol edilebilir $W = (b, Ab, \ldots, A^{k-1}B)$ matrisi ile başlamalıyız. (3.8.3) sistemi tamamen kontrol edilebilir olduğu için Teorem 3.103'ten W nin nansingüler olduğu sonucu çıkar.

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_k \end{pmatrix}.$$

İddia ediyoruz ki, W^{-1} in son satırından üretilen $\left\{ w_k, w_k A, \ldots, w_k A^{k-1} \right\}$ kümesi lineer bağımsızdır. Bunu göstermek için, bazı $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sabitleri için

$$a_1 w_k + a_2 w_k A + \ldots + a_k w_k A^{k-1} = 0 \qquad (3.8.21)$$

olduğunu varsayalım.

(3.8.21) denklemini sağdan b ile çarparak,

$$a_1 w_k b + a_2 w_k Ab + ... + a_k w_k A^{k-1} b = 0 \quad (3.8.22)$$

elde edilir. $W^{-1}W = I$, $w_k b = w_k Ab = ... = w_k A^{k-2} b = 0$ ve $W_k A^{k-1} b = 1$ olduğundan (3.8.22) denkleminden $a_k = 0$. Aynı işleme devamla $a_k = 0$ kabul edip (3.8.21) denklemini Ab ile çarparak $a_{k-1} = 0$ sonucuna varılır. Aynı işlemle $1 \le i \le k$ için $a_i = 0$ olduğu gösterilebilir. Bu da $w_k, w_k A, ..., w_k A^{k-1}$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu ispatlar. Buradan $k \times k$ tipinden

$$P = \begin{pmatrix} w_k \\ w_k A \\ \vdots \\ w_k A^{k-1} \end{pmatrix}$$

matrisi nansingülerdir. (3.8.3) sistemi için,

$$z(n) = Px(n) \quad (3.8.23)$$

dönüşümü yapılırsa,

$$z(n+1) = PAP^{-1} z(n) + Pbu(n)$$

veya

$$z(n+1) = \hat{A} z(n) + \hat{b} u(n). \quad (3.8.24)$$

Burada,

$$\hat{A} = PAP^{-1}, \; \hat{b} = Pb. \quad (3.8.25)$$

Açıkça,

$$\hat{b} = Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{A} = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} w_k A \\ w_k A^2 \\ \vdots \\ w_k A^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$w_k A$, P de ikinci satır olduğu için,

$$w_k A P^{-1} = (0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)\,.$$

Benzer olarak,

$$w_k A^2 P^{-1} = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

$$\vdots$$

$$w_k A^{k-1} P^{-1} = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)\,.$$

Bununla birlikte, $w_k A^k P^{-1} = (-p_k \quad -p_{k-1} \quad \dots \quad -p_1)$.

Burada p_i, ($i = 1, 2, ..., k$), sabittir. Böylece,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_k & -p_{k-1} & -p_{k-2} & \dots & -p_1 \end{pmatrix}$$

ve karakteristik denklemi,

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + p_2 \lambda^{k-2} + ... + p_k = 0\,.$$

A ve $\hat{A}$ ın aynı karakteristik denkleme sahip olduğuna dikkat edelim. Yukarıdaki tartışma aşağıdaki teoremin ispatıdır.

Teorem 3.110: $x(n+1) = Ax(n) + bu(n)$ sisteminin tamamen kontrol edilebilir olması için gerek ve yeter şart k inci mertebeden (3.8.20) fark denklemine denk olmasıdır.

(3.8.24) sistemine, kontrol edilebilir kanonik form denir. Bir başka kontrol edilebilir kanonik form da $x(n) = Wz(n)$ değişkenlerinin değişimi ile elde edilebilir. Burada W sistemin kontrol edilebilirlik matrisidir. Türevinden dolayı mühendisler arasında çok popülerdir.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -p_k \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -p_{k-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -p_{k-2} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & \dots & -p_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.8.26}$$

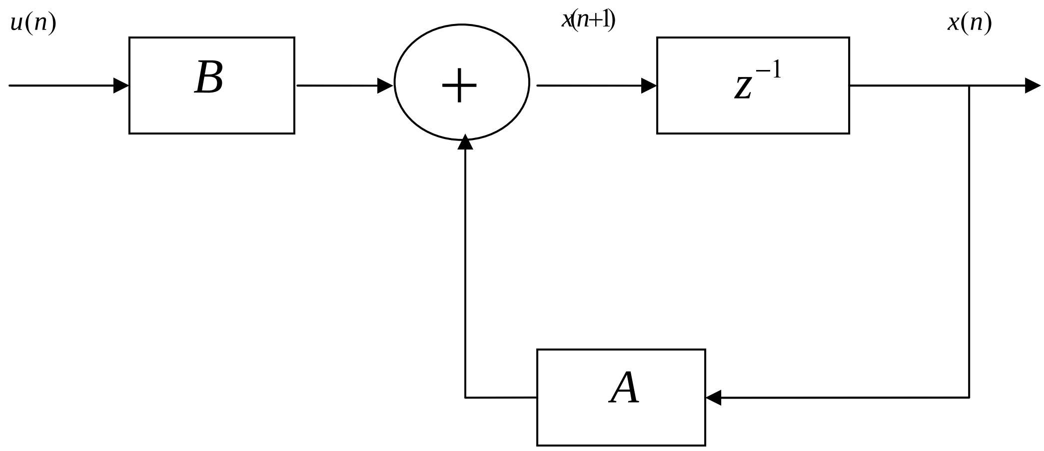
kontrol edilebilir kanonik $\{\tilde{A}, \tilde{b}\}$ çiftidir.

3.8.3 Gözlenebilirlik

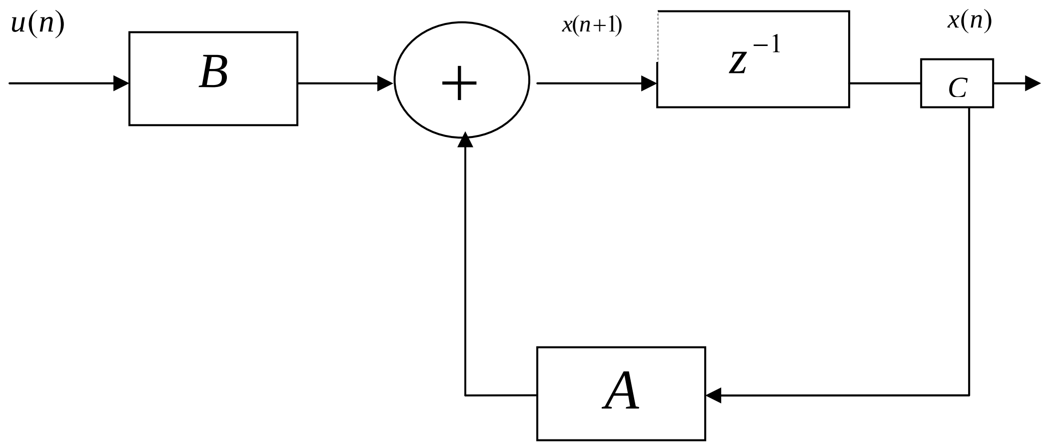
Bir önceki kısımda, kontrol sisteminin çıktısı ile $x(n)$ sisteminin konumunun aynı olduğu kabul edildi. Ancak pratikte, $x(n)$ in spesifik olması halinde $y(n)$ çıktısını bulmamıza rağmen, $x(n)$ sisteminin konumu gözlemlenmeyebilir. Bu tip bir sistemin matematiksel modeli,

$$\left.\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + bu(n) \\ y(n) &= Cx(n) \end{aligned}\right\} \tag{3.8.27}$$

şeklindedir. Burada $A(n)$, $k \times k$ tipinde, B, $k \times 1$ tipinde bir matris, $u(n)$, $m \times 1$ tipinde vektör ve C, $r \times k$ tipinde matristir. $u(n)$, sistemin girişi, $y(n)$ sitemin çıktısıdır. (Şekil 3.8a-b.) Kabaca, gözlenebilirlikten sadece $y(n)$ çıktısını ölçerek bir $x(n)$ sisteminin konumunun belirlenebilir olmasını kastediyoruz. Bu nedenle gözlenebilirlik, ölçülebilir konum değişkenlerinden, ölçülemez konum değişkenlerin yeniden yapılandırma problemleri çözümünde kullanışlıdır. (3.8.27) sistemi herhangi $n_0 \geq 0$ için tamamen gözlenebilirdir. $n_0 \geq 0$ için bir $N > n_0$ vardır öyle ki, $u(n)$ ve $y(n)$, $n_0 \leq n \leq N$, değerleri $x(n_0) = x_0$ ı belirlemek için yeterlidir.

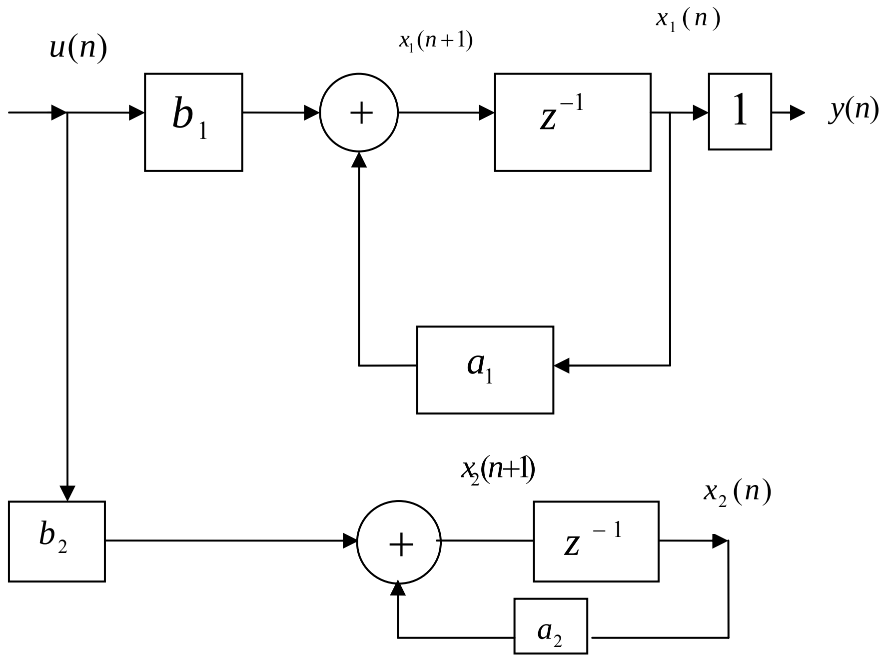


Şekil 3.8a



Şekil 3.8b

Örnek 3.111:



Şekil 3.9.

$$x_1(n+1) = a_1 x_1(n) + b_1 u(n),$$
$$x_2(n+1) = a_2 x_2(n) + b_2 u(n),$$
$$y(n) = x_1(n).$$

sistemini ele alalım. Bu sistem gözlemlenebilir değildir. Çünkü $u(n)$ ve $x_1(0)$ ile $x_1(n) = y(n)$ belirlenir. Burada, $y(n)$ çıktısından $x_2(0)$ belirlenemez.

Gözlenebilirlikte, $u(n)$ in sıfır olduğu varsayılabilir. Bu varsayım anlatımımızı açıkça kolaylaştırır. Genelliği bozmaksızın $y(n)$ ve $x(n)$, sabitlerin değişim formülünden,

$$y(n) = Cx(n) \text{ veya}$$

$$y(n) = CA^{n-n_0} + \sum_{j=n_0}^{n-1} CA^{n-j-1}Bu(j)$$

şeklinde yazılır. C, A, B ve u bilindiğinden son denklemin sağ tarafının ikinci terimi bulunabilir. $u(n) \equiv 0$ almakla tamamen gözlenebilirlik için bir gereklilik yeterlilik şartı çıkarımı yapılabilir.

Teorem 3.112: (3.8.27) sisteminin tamamen gözlenebilir olması için gerek ve yeter şart, $rk \times k$ tipinden gözlenebilir V matrisinin rankının k olmasıdır.

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} \tag{3.8.28}$$

İspat: Sabitlerin değişim formülünü, (3.8.27) denklemine uygulayarak,

$$y(n) = Cx(n)$$

$$y(n) = C\left[A^n x_0 + \sum_{r=0}^{n-1} A^{n-r-1}Bu(r)\right] \tag{3.8.29}$$

elde edilir.

$$\hat{y}(n) = y(n) - \sum_{r=0}^{n-1} CA^{n-j-1}Bu(r) \tag{3.8.30}$$

olsun. (3.8.29) denklemini kullanarak, (3.8.30) denklemi

$$\hat{y}(n) = CA^n x_0 \tag{3.8.31}$$

şeklinde yazılır. (3.8.31) denkleminde $n = 0,1,2,...,k-1$ için,

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(0) \\ \hat{y}(1) \\ \vdots \\ \hat{y}(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} x_0 \qquad (3.8.32)$$

elde edilir. $\operatorname{rank} V = k$ olsun. Bu halde, $\operatorname{Range} V = R^k$ dır. Eğer $y(n)$ ve $u(n)$, $0 \le n \le k-1$ aralığı için verilmişse, (3.8.30) denkleminden, $0 \le n \le k-1$ için $\hat{y}(n)$ bilinir. Bu nedenle (3.8.32) denklemini sağlayacak şekilde $x_0 \in \mathbb{R}^k$ vardır. Dolayısıyla (3.8.27) sistemi tamamen gözlenebilirdir. Tersine (3.8.27) sisteminin tamamen gözlenebilir olduğunu varsayalım.

$$V(N) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} = (C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, ..., (A^T)^{N-1} C^T)^T . \qquad (3.8.33)$$

Teorem 3.112'den $V(N)$ nin rankının k olması için gerek ve yeter şart gözlenebilirlik matrisi $V \equiv V(k)$ nın rankının k olmasıdır. Bu nedenle, $y(0), y(1), ..., y(N-1)$ den, eğer x_0, bir tek şekilde belirlenebilirse, $y(0), y(1), ..., y(k-1)$ den de belirlenebilir. Böylece $\operatorname{rank} V = k$. Dikkat edilirse, gözlenebilirliği belirlemede B matrisinin hiçbir rolü yoktur. Bu da $u(n) \equiv 0$ varsayımını doğrular.

Örnek 3.102'deki sistemi tekrar ele alalım.

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u(n),$$

$$y(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde ele alalım. Böylece,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \text{ ve } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gözlenebilirlik matrisi, $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}$ şeklindedir.

$\operatorname{rank} V = 1 < 2$ olduğundan, Teorem 3.112'den sistem tamamen gözlenebilir değildir.

Yukarıdaki sonuca bir örnek verelim.

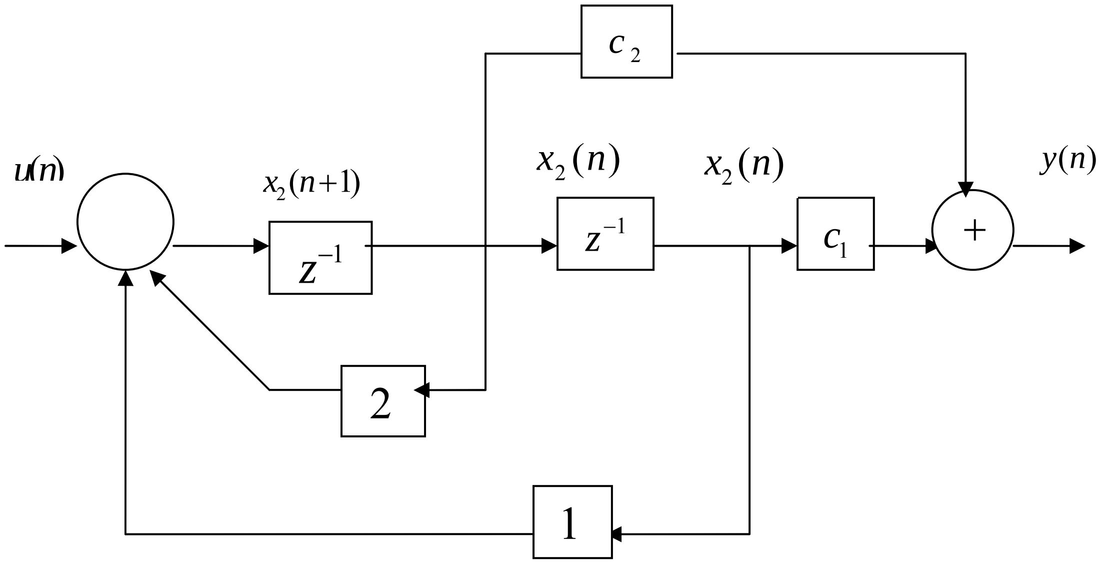
Örnek 3.113:

$$x_1(n+1) = x_2(n),$$

$$x_2(n+1) = -x_1(n) + 2x_2(n) + u(n),$$

$$y(n) = c_1x_1(n) + c_2x_2(n)$$

giriş-çıkış sistemini ele alalım. (Şekil 3.10.)



Şekil 3.10.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $C = (c_1, c_2)$.

Gözlenebilirlik matrisi, $V = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 + 2c_2 \end{pmatrix}$. İlk kolonu ikinci kolona ekleyerek, $\hat{V} = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 + c_2 \\ -c_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix}$ matrisi elde edilir. $\operatorname{rank}\hat{V} = 2$ olması için gerek ve yeter şart $c_1 \neq c_2$ olmasıdır. $\operatorname{rank}V = \operatorname{rank}\hat{V}$ olduğundan, sistemin tamamen gözlenebilir olması için gerek ve yeter şart $c_1 + c_2 \neq 0$ (veya $c_1 \neq -c_2$) olmasıdır.

Ayrıca sistemin tamamen kontrol edilebilir olduğuna dikkat edelim.

Örnek 3.114: Örnek 3.109'da esnek bir iple duvara bağlı olan ve u kuvveti uygulanan bir yük arabasının kontrol edilebilirliğini incelemiştik. Burada bir soru akla gelir: Eğer araba üzerindeki kuvvet sabit ise, arabanın konumunu ayarlayarak kuvvetin büyüklüğü gözlemlenebilir mi? Cevap olarak, (3.8.17) durum denklemi ek bir denklemle arttırılmalı, uygulanan kuvvetin sabit olduğu varsayımı ile,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k/m & -b/m & 1/m \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ u \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ u \end{bmatrix}.$$

Örnek 3.109'daki gibi $m = 1,\ k = 2$ ve $b = 3$ değerlerini kullanarak,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{A} = P\Lambda P^{-1}.$$

Burada,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Böylece,

$$A = e^{\hat{A}T} = Pe^{\Lambda T P^{-1}} = \begin{bmatrix} 2e^{-T} - e^{-2T} & e^{-T} - e^{-2T} & \frac{1}{2} + e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T} \\ -2e^{-T} + 2e^{-2T} & -e^{-T} + 2e^{-2T} & -e^{-T} - e^{-2T} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gözlenebilirliği değerlendirmede,

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = A = e^{\hat{A}T} = Pe^{\Lambda T P^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2e^{-T} - e^{-2T} & e^{-T} - e^{-2T} & \frac{1}{2} + e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T} \\ 2e^{-2T} - e^{-4T} & e^{-2T} - e^{-4T} & \frac{1}{2} + 2e^{-T} + e^{-2T} + \frac{1}{2}e^{-4T} \end{bmatrix}$$

hesaplanmalı. Determinantı,

$$\det V = e^{-T} + 2e^{-2T} - 4e^{-3T} - 2e^{-4T} + 3e^{-5T} = e^{-T}(1 + e^{-T})(1 - e^{-T})^2(1 + 3e^{-T})$$

şeklindedir. T reel olduğundan, $T = 0$ ise, $\det V = 0$. Dolayısıyla, sistem tüm $T \neq 0$ için gözlenebilirdir.

Tanım 3.115: (3.8.27) denkleminin dual sistemi,

$$x(n+1) = A^T x(n) + C^T u(n),$$

$$y(n) = B^T x(n), \tag{3.8.34}$$

ile verilir. (3.8.34) sisteminin kontrol edilebilir matrisi,

$$\overline{W} = \left[C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, ..., (A^T)^{k-1} C^T \right].$$

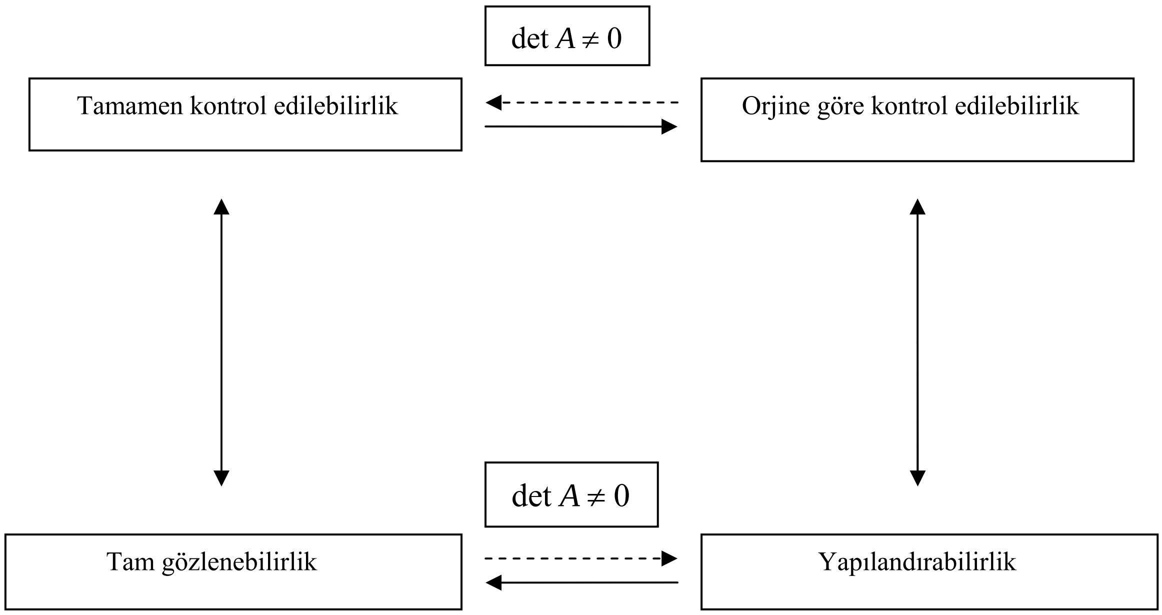
(3.8.27) sisteminin gözlenebilirlik matrisi V , $\overline{W}$ nin transpozudur.

$$V = \overline{W}^T$$

$\text{rank}\overline{W} = \text{rank}\overline{W}^T = \text{rank}V$ eşitliğinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.116: (Dualite Prensibi) (3.8.27) sisteminin tamamen kontrol edilebilir olması için gerek ve yeter şart (3.8.34) dual sisteminin tamamen gözlenebilir olmasıdır.

Not 3.117: Not 3.106'da kontrol edilebilirlik kavramı daha zayıf bir şekilde kullanıldı. Çünkü orijin baz alınmıştır. Bu kısımda, tamamen kontrol edilebilirlik ile tamamen gözlenebilirlik arasındaki dualiteyi vereceğiz. Orijine göre kontrol edilebilirlik için dual kavramı bilmemiz gerekir. Neyse ki yapılandırılabilirlik adı altında böyle bir kavram vardır. Eğer sistemin, $u(0), u(1), ..., u(N-1)$ ve $y(0), y(1), ..., y(N-1)$ e karşılık N pozitif tamsayısı varsa, $x(N)$ konum vektörünü bulmak mümkündür. Bu durumda, (3.8.27) ye yapılandırılabilirdir deriz. Sabitlerin değişim formülünden ve $x(0)$ bilindiğinden $x(N)$ elde edilebilir olduğu için tamamen gözlenebilirlik yapılandırılabilirliği gerektirir. Eğer A nansingülerse bu iki kavram denktir. Aşağıdaki diyagram iki kavram arasındaki ilişkiyi göstermektedir.



Örnek 3.118: Örnek 3.107'deki sistemin bir dualini ele alalım.

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(n),$$

$$y(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}.$$

Gözlenebilirlik matrisi,

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde verilir ve rankı birdir. Teorem 3.112'den, bu sistem tamamen kontrol edilebilir değildir. Buna rağmen eğer $u(0),\ u(1)$ ve $y(0),\ y(1)$ biliniyorsa, ikinci denklemden $x_1(1) = y(1)$ elde edilir. İlk denklemden, $x_1(1) = u(1)$ ve $x_2(2) = x_1(1)$. Böylece,

$$x(2) = \begin{pmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{pmatrix}$$

elde edilir ve sonuç olarak sistem yapılandırılabilirdir.

3.8.3.1 Kanonik formların gözlenebilirliği

$$x(n+1) = Ax(n) + bu(n)$$

$$y(n) = Cx(n) \tag{3.8.35}$$

tamamen gözlenebilir sistemini tekrar ele alalım. Burada $b,\, k\times 1$ tipinde, $C,\, 1\times k$ tipinde bir vektördür. Kısım 3.8.2'de (3.8.27) sisteminin iki kontrol edilebilir kanonik formu verildi. Buna paralel düşünceyle (3.8.35) sistemine karşılık gelen iki gözlenebilir kanonik form elde edebiliriz. Buradaki prosedürler

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}$$

matrisinin nansingülerliğini esas alır. Eğer (3.8.35) denkleminde $z(n) = Vx(n)$ dersek birinci gözlenebilirlik kanonik formunu elde etmiş oluruz.

$$\begin{aligned} z(n+1) &= \overline{A}z(n) + \overline{b}u(n) \\ y(n) &= \overline{c}z(n) \end{aligned} \tag{3.8.36}$$

Burada,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_k & -p_{k-1} & -p_{k-2} & \dots & -p_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \overline{c} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \\ \overline{b} &= Vb. \end{aligned} \tag{3.8.37}$$

Değişken değişimi ile diğer gözlenebilir kanonik $\left\{\tilde{A},\, \tilde{c}\right\}$ çifti elde edilir.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -p_k \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -p_{k-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -p_{k-2} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & \dots & -p_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.8.38}$$

3.8.4 Geri dönüşüm ile stabilite

Geri dönüşüm kontrol sistemi hayatımızın birçok alanında kullanılmaktadır. Araba fren sistemi, merkezi havalandırma gibi… Bu metot çıktığından beri mühendisler tarafından kullanılmaktadır. Buna rağmen geri dönüşüm ile stabilitenin sistematik çalışması 1960 larda başlar. Geri dönüşüm sisteminde, $x(n)$ konum vektörü direkt olarak ölçülebilir ve $u(n)$ kontrolü bu bilgilere dayandırılarak ayarlanabilir.

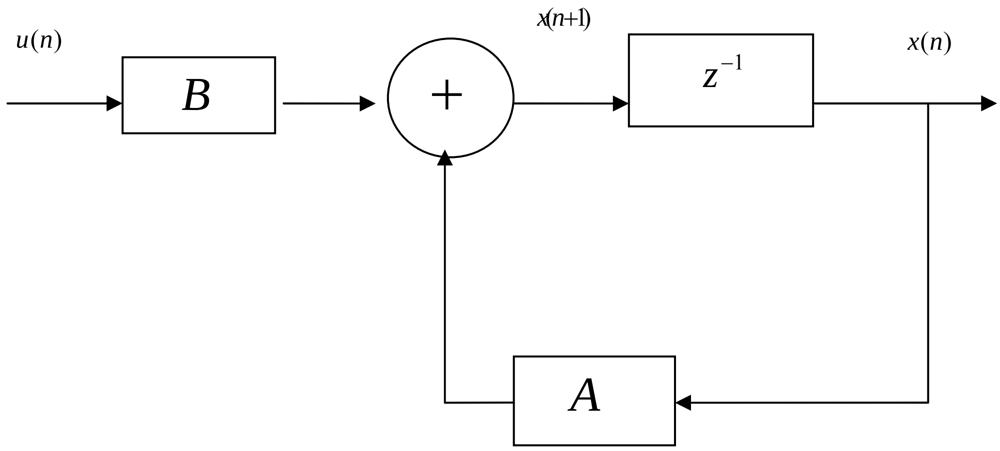
$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n) \tag{3.8.39}$$

zaman değişmez (açık-devre) kontrol sistemini ele alalım. (Şekil 3.11a) Burada A, $k \times k$ tipinde, B, $m \times k$ tipinde bir matristir. $u(n) = -Kx(n)$ lineer geri dönüşüm sistemini ele alalım. Burada K, $m \times k$ tipinde reel bir matristir. Geri dönüşüm konum matrisi ya da artış konum matrisi adı verilir. (3.8.39) denkleminde $u = -Kx$ için

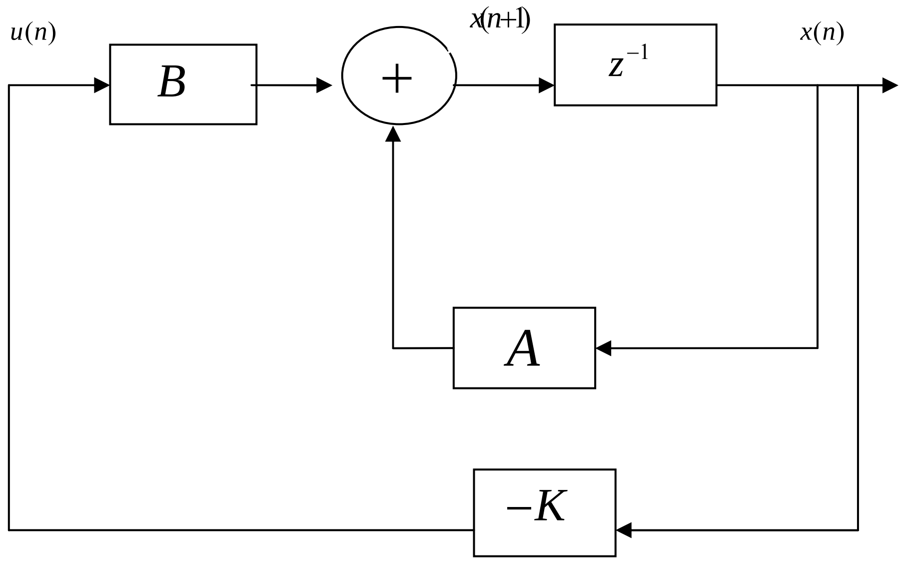
$$x(n+1) = Ax(n) - BKx(n) \text{ veya}$$

$$x(n+1) = (A - BK)x(n) \tag{3.8.40}$$

sonuç (kapalı-devre) sistemi elde edilir. (Şekil 3.11b)



Şekil 3.11a Açık-devre sistemi



Şekil 3.11b Kapalı-devre sistemi

Geri dönüşüm kontrolünün amacı, bir bakıma (3.8.40) sonuç sisteminin tanımlanması gerektiği şekilde K yı seçmektir. Örneğin, birileri sıfır çözümleri asimptotik olarak kararlı seçerek (3.8.39) sistemini stabilize edebilir. $A-BK$ nın eigen değerleri birim diskin içinde olacak şekilde K seçilmelidir.

Teorem 3.119: $\Lambda=\{\mu_1,\mu_2,...,\mu_k\}$ kompleks sayılarının keyfi bir kümesi olsun. $\overline{\Lambda}=\{\overline{\mu}_1,\overline{\mu}_2,...,\overline{\mu}_k\}=\Lambda$ olsun. $\{A,B\}$ çiftinin tamamen kontrol edilebilmesi için gerek ve yeter şart $A-BK$ nın eigen değerleri Λ kümesi olacak şekilde bir K matrisinin olmasıdır.

Teoremin ispatı oldukça uzun olduğu için teoremi $m=1$ için ispatlayalım. B, $k\times 1$ tipinden bir vektör, $u(n)$ bir skalerdir. İspata A nın karakteristik polinomunu yazarak başlayalım. $\left|A-\lambda I\right|=\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+a_2\lambda^{k-2}+...+a_k$.

$$\prod_{i=1}^{k}(\lambda-\mu_i)=\lambda^k+b_1\lambda^{k-1}+b_2\lambda^{k-2}+...+b_k$$

olduğunu varsayalım. $T=WM$ yi tanımlayalım. Burada W, (3.8.10) denkleminde,

$$W=(B,AB,...,A^{k-1}B)$$

şeklinde tanımlanan rankı k olan kontrol edilebilir matristir ve

$$M=\begin{pmatrix} a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{A}=T^{-1}AT=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, \tag{3.8.41}$$

$$\bar{B}=T^{-1}B=(0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)^T .$$

(3.8.40) denkleminde $x(n)=T\bar{x}(n)$ yazarak buna denk olan

$$\bar{x}(n+1)=(\bar{A}-\bar{B}\bar{K})\bar{x}(n) \tag{3.8.42}$$

sistem elde edilir. Burada,

$$\bar{K}=KT \tag{3.8.43}$$

$$\bar{K}=(b_k-a_k, b_{k-1}-a_{k-1},...,b_1-a_1) \tag{3.8.44}$$

seçelim.

$$\bar{B}\bar{K}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_k-a_k & b_{k-1}-a_{k-1} & & b_1-a_1 \end{pmatrix}.$$

$\bar{A}-\bar{B}\bar{K}=T^{-1}AT-T^{-1}BKT=T^{-1}(A-BK)T$ olduğu için $A-BK$, $\bar{A}-\bar{B}\bar{K}$ ile benzerdir. Böylece,

$$|A-BK-\lambda I|=|\bar{A}-\bar{B}\bar{K}-\lambda I|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -b_k & -b_{k-1} & \dots & -b_1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+...+b_k$$

Bu ise Λ eigen değerlerinin kümesidir. Buradan istenen geri dönüşüm matrisi

$$K=\bar{K}T^{-1}$$

$$=(b_k - a_k, b_{k-1} - a_{k-1}, ..., b_1 - a_1)T^{-1}$$

ile verilir.

Örnek 3.120:

$$x(n+1) = Ax(n) + Bx(n)$$

kontrol sistemini ele alalım. Burada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Burada kapalı-devre sisteminin eigen değerleri $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{4}$ olacak şekilde bir K geri besleme artış durum matrisi bulalım.

Çözüm:

1. Metot:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 14 .$$

Buradan,

$$a_1 = -3,\ a_2 = 14 .$$

Dolayısıyla,

$$\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{4}\right) = \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8} . \qquad (3.8.44)'$$

Buradan, $b_1 = -\frac{3}{4},\ b_2 = \frac{1}{8}$. Şimdi, $W = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Böylece,

$$T = WM = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Bu nedenle,

$$K = (b_2 - a_2, b_1 - a_1)T^{-1}$$

veya

$$K = \begin{pmatrix} -13\frac{7}{8} & 2\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{165}{64} & \frac{-21}{64} \end{pmatrix}.$$

2. Metot:

Bu metotta $K=(k_1k_2)$ yı $|A-BK-\lambda I|$ karakteristik polinomunda yerine yazarsak ve λ nın kuvvetine göre katsayıları karşılıklı eşitlenirse,

$$\begin{vmatrix} 1-k_1-\lambda & -3-k_2 \\ 4-k_1 & 2-k_2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-\lambda(3-k_1-k_2)+14-5k_1+3k_2. \quad (3.8.44)''$$

λ nın kuvvetlerinin katsayılarını $(3.8.44)'$ ve $(3.8.44)''$ de eşitlersek,

$$3-k_1-k_2=\frac{3}{4},\ 14-5k_1+3k_2=\frac{1}{8}.$$

Bu da bize $k_1=\dfrac{165}{64}$ ve $k_2=\dfrac{-21}{64}$ olduğunu verir. Buradan

$$K=\begin{pmatrix} \frac{165}{64} & \frac{-21}{64} \end{pmatrix}.$$

Teorem 3.119'un genel ispatı için aşağıdaki sonucu verelim.

Lemma 3.121: Eğer $\{A,B\}$ çifti tamamen kontrol edilebilir ve B nin sütunlarını sıfırdan farklı ise, yani $b_1,b_2,...,b_m$ sıfırdan farklı ise, $\{A-BK_i,b_i\}$ tamamen kontrol edilebilir olacak şekilde K_i, $1\le i\le m$, matrisleri vardır.

İspat: $i=1$ durumunu ele alalım. Kontrol edilebilirlik matrisi W nin rankı k olduğu için W nin k tane sütunlarından oluşan $\mathbb{R}^k$ nın bir tabanı seçilebilir. Bunlardan biri $k\times k$ tipinde

$$M=(b_1,Ab_1,...,A^{r_1-1}b_1,b_2,Ab_2,...,A^{r_2-1}b_2,...)$$

matrisi olabilir. Burada r_i, $A^{r_i}b_i$ önceki vektörler ile lineer bağımlı olacak şekilde en küçük tamsayıdır. r_1 inci sütunu $e_2=(0,1,...,0)^T$, (r_1+r_2) inci sütunu $e_3=(0,0,1,...,0)^T$ ve diğer sütunları sıfır olacak şekilde $m\times k$ tipinde L matrisi tanımlayalım. İddia edilen K_1 matrisi $K_1=LM^{-1}$ ile elde edilir. İddiamızı doğrulamak için $K_1M=L$ eşitliğinin iki yanının benzer sütunlarını karşılaştıralım.

$$K_1b_1=0,\ K_1Ab_1=0,...,\ K_1A^{r_1-1}b_1=0,\ K_1b_2=e_2,$$

$$K_1Ab_2=0,...,\ K_1A^{r_2-1}b_1=0,\ K_1b_3=e_2,\ldots$$

Dolayısıyla,

$$(b_1,(A-BK_2)b_1,(A-BK_2)^2 b_1,...,(A-BK_2)^{k-1}b_1) = W(k)$$

elde edilir. Rankının k olduğunu varsayalım. Bu da iddiamızı doğrular. Şimdi $m>1$ genel durum için ispatı verebiliriz.

İspat: K_1, Lemma 3.122'deki matris olsun. Dolayısıyla $\{A-BK_1,b_1\}$ çifti tamamen kontrol edilebilirdir. $m=1$ için yapılan ispatta $A+BK_1+b_1\xi$ nın eigen değerleri Λ kümesi olacak şekilde bir ξ vektörü vardır. $\bar{K}$, ilk satırı ξ, sonrası sıfır olan bir $m\times k$ tipinde matris olsun. İstenilen geri besleme (artış) matrisi $K=K_1+\bar{K}$ ile verilir. $u=-Kx$ olduğundan,

$$x(n+1)=\left(A-BK\right)x(n)=(A-BK_1-b_1\xi)x(n).$$

Tersini ispatlamak için,

$n\to\infty$ iken, $(A-BK_0)^n\to 0$ olacak şekilde K_0 seçelim. Yani, $\rho(A-BK_0)<1$ ve $\rho(A-BK_1)=\left\{\exp\left(\dfrac{2\pi n}{k}\right): n=0,1,...,k-1\right\}$ olacak şekilde K_1 seçelim. Buradan açıkça, $(A-BK_1)^k=1$. Bu halde, bazı $\xi^T\in\mathbb{R}^k$ vektörleri ve tüm için $n\in\mathbb{Z}^+$ için $\xi^T A^n B=0$ kabul edelim. Bazı K matrisi için,

$$\begin{aligned}\xi^T(A-BK)^n &= \xi^T(A-BK)(A-BK)^{n-1}\\ &=(\xi^T A-\xi^T BK)(A-BK)^{n-1}\\ &=\xi^T A(A-BK)^{n-1},\ \xi^T B=0\\ &=\xi^T A(A-BK)(A-BK)^{n-2}\\ &=\xi^T A^2(A-BK)^{n-2},\ \xi^T AB=0.\end{aligned}$$

Bu prosedüre devamla, tüm $n\in\mathbb{Z}^+$ için,

$$\xi^T(A-BK)^n=\xi^T A^n$$

elde edilir.

$$\xi^T\left[(A-BK_0)^n-(A-BK_1)^n\right]=0$$

veya

$$\xi^T\left[(A-BK_0)^{kr}-1\right]=0,\ r\in\mathbb{Z}^+.$$

$r \to \infty$ denirse, $(A - BK_0)^{kr} \to 0$. Bu nedenle $\xi^T = 0$. Bu da $\{A, B\}$ çiftinin tamamen kontrol edilebilir olduğunu gösterir.

Teorem 3.119 stabilite için basit ve yeterli bir şarttır. $x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$ sistemi eğer, $x(n+1) = (A - BK)x(n)$ kapalı devre sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlı olacak şekilde bir $u(n) = -Kx(n)$ geri dönüşüm kontrolü bulunabiliyorsa, stabilize edilebilirdir. Diğer bir deyişle $\{A, B\}$ çifti bazı K matrisi için stabilize edilebilir ise, $A - BK$ kararlı bir matristir.

Sonuç 3.122: (3.8.39) sistemi tamamen kontrol edilebilirse stabilize edilebilirdir.

Örnek 3.123:

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$

kontrol sistemini ele alalım. Burada,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1 & d & e \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olsun. Burada,

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & d \end{pmatrix}, \; A_{12} = \begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix}, \; A_{22} = (h), \; B_1 = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

Eğer $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ ise sistem,

$$y(n+1) = A_{11}y(n) + A_{12}z(n) + B_1u(n),$$

$$z(n+1) = A_{22}z(n)$$

şeklinde yazılabilir. $\{A_{11}, B_1\}$ çiftinin tamamen kontrol edilebilir olduğunu göstermek kolaydır. Teorem 3.119'dan $A_{11} + B_1\bar{K}$ kararlı matris olacak şekilde 2×2 tipinden $\bar{K}$ artış matrisi vardır. $K = (\bar{K})(0)$ olsun. Buradan,

$$A - BK = \begin{pmatrix} A_{11} - B_1\bar{K} & * \\ 0 & h \end{pmatrix}.$$

Bu sebeple $A - BK$ nın kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart $|h| < 1$ olmasıdır.

Genel anlamda, bir sistemin stabilize edilebilmesi için gerek ve yeter şart sistemin kontrol edilemez kısmı asimptotik olarak kararlı olmasıdır. Bu durumda, kontrol edilebilir W matrisinin sütunlarından, sistemin kontrol edilebilir kısmı için bir taban seçebiliriz ve $\mathbb{R}^k$ için bir S tabanına genişletebiliriz. $x = Py$ değişkenlerinin değişimi ile sistem,

$$y(n+1) = \bar{A}y(n) + \bar{B}u$$

şekline dönüşür. Burada,

$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, $\bar{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\{A_{11}, B_1\}$ çifti kontrol edilebilirdir. Bu nedenle sistemin stabilize edilebilmesi için gerek ve yeter şart A_{22} matrisinin kararlı olmasıdır.

Geri besleme ile nanlineer sistemlerin stabilitesi

$$y(n+1) = f(x(n), u(n)) \tag{3.8.45}$$

nanlineer sistemin stabilize problemini ele alalım. Burada $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$.

Amacımız kısaca,

$$u(n) = h(x(n)) \tag{3.8.46}$$

geri dönüşümlü kontrol sisteminin asimptotik kararlılığını incelemektir. Burada $x^* = 0$,

$$x(n+1) = f(x(n)), h(x(n)) \tag{3.8.47}$$

kapalı-devre sisteminin asimptotik kararlı bir denge noktası olacak şekilde ele alınacaktır.

(i) $f(0,0) = 0$

(ii) f sürekli diferansiyellenebilir, $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $k \times k$ tipinde matris, $B = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$, $k \times m$ tipinde matris olsun..

Teorem 3.124: Eğer $\{A, B\}$ çifti kontrol edilebilirse, lineer olmayan (3.8.45) sistemi stabilize edilebilirdir. Üstelik eğer $\{A, B\}$ çifti için, K artış matrisi ise, $u(n) = -Kx(n)$ kontrolü (3.8.45) sisteminin stabilizesi için kullanılabilir.

İspat: Eğer $\{A, B\}$ çifti kontrol edilebilirse, sistemin lineer kısmını stabilize eden bir $u(n) = -Kx(n)$ kontrolü vardır.

$$y(n+1) = Ay(n) + Bv(n)\,.$$

Aynı kontrolü nanlineer kısım için de yapalım.

$g:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $g(x) = f(x,-Kx)$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. (3.8.45) denklem sistemi,

$$x(n+1) = gx(n) \tag{3.8.48}$$

şeklinde yazılır.

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=0} = A - BK\,,$$

$$y(n+1) = (A-BK)y(n) \tag{3.8.49}$$

nanlineer sistemin sıfır çözümü asimptotik kararlı olduğundan, Teorem 3.63'ten (3.8.48) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.125:

$$x_1(n+1) = 2\sin(x_1(n)) + x_2 + u_1(n)\,,$$

$$x_2(n+1) = x_1^2(n) - x_2 - u_2(n)$$

nanlineer fark sistemini ele alalım. Sistemi stabilize eden bir kontrol bulalım.

Çözüm: $\{A, B\}$ lineerize sistemin kontrol edilebilirliğini denetlemek kolaydır. Burada,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bazı işlemlerden sonra lineerize edilmiş sistem için bir artış matrisi, $K = (2.015, 0.975)$. Burada $A - BK$ nin eigen değerleri $\frac{1}{2}$ ve 0.1. Sonuç 3.122'den $u(n) = -Kx(n)$ kontrolü, nanlineer sistemi stabilize edebilir. Burada, $K = (2.015, 0.975)$.

3.8.5 Gözlemci

Teorem 3.119, verilen bir sistemi stabilize eden $u(n) = -Kx(n)$ kontrolünü bulma metodunu verir. Bu metot tüm $x(n)$ konum değişkenleri bilgisini gerektirir. Fakat pratik öneme sahip sistemlerin çoğunda ölçüm için tüm konum vektörleri mevcut olmayabilir. Bu güçlüğün üstesinden gelmek için mevcut ölçümlere dayanarak tüm konum vektörlerinin tahmini hakkında yapılandırmaya gidilir.

$$\left.\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + Bu(n), \\ y(n) &= Cx(n) \end{aligned}\right\} \tag{3.8.50}$$

sistemini tekrar ele alalım. $x(n)$ konum vektörünü tahmin etmek için k boyutlu bir gözlemcisini oluşturalım. (Şekil 3.12.)

$$z(n+1) = Az(n) + E\left[y(n) - Cz(n)\right] + Bu(n) \tag{3.8.51}$$

Burada E, bulunması gereken, $k \times r$ tipinde bir matristir. $x(n)$ den farklı olarak mevcut bilgiden, $z(n)$ elde edilebilir. (3.8.51) denklemini

$$z(n+1) = (A - EC)z(n) + Ey(n) + Bu(n) \tag{3.8.52}$$

formunda yazalım. Burada $y(n)$ ve $u(n)$ bilinir.

$z(n)$ konum gözlemcisinin $x(n)$ için iyi bir tahmin olup olmadığını görmek için, $n \to \infty$ iken $e(n) = z(n) - x(n) \to 0$ olduğunu görmektir. (3.8.50), (3.8.51) denklemlerinden ve $y(n) = Cx(n)$ den $e(n)$ hata denklemi yazılır.

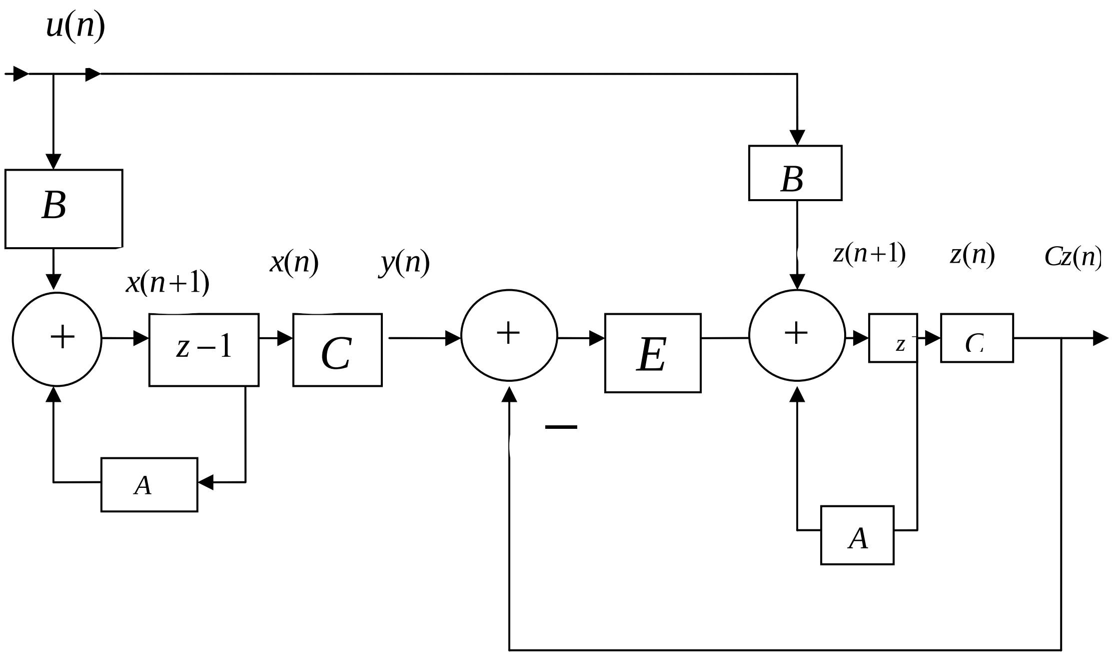
$$z(n+1) - x(n+1) = \left[A - EC\right]z(n) + \left[z(n) - x(n)\right] \text{ veya}$$

$$e(n+1) = E\left[A - EC\right]e(n). \tag{3.8.53}$$

Açıkça (3.8.53) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Yani, $A - EC$ matrisi kararlıdır. Bu halde, $e(n)$ hata vektörü sıfıra gider. Bu nedenle problem, $A - EC$ matrisinin tüm eigen değerlerini birim diskin içinde olacak şekilde bir E matrisi buldurur.

Teorem 3.126: Eğer (3.8.50) sistemi tamamen gözlenebilirse, $A - EC$ nin eigen değerleri keyfi olacak şekilde (3.8.51) inşa edilebilir. Özellikle $n \to \infty$ için $e(n) = z(n) - x(n) \to 0$.

İspat: $\{A, C\}$ çifti tamamen gözlenebilir olduğundan, $\{A^T, C^T\}$ çifti tamamen kontrol edilebilirdir. Bu nedenle Teorem 3.119'dan, $A^T - C^T E^T$, eigen değerlerin keyfi bir kümesine sahip olacak şekilde bir E matrisi seçilebilir. $A - EC$ matrisinin eigen değerlerinin kümesi $A^T - C^T E^T$ matrisinin eigen değerlerinin kümesine benzerdir. Üstelik eğer $A - EC$ matrisinin tüm eigen değerleri birim diskin içinde olacak şekilde E matrisi seçersek, $e(n) \to 0$.



Şekil 3.12.

3.8.5.1 Eigen Değer Ayrılık Teoremi

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n),$$
$$y(n) = Cx(n)$$

sistemlerinin tamamen gözlenebilir ve tamamen kontrol edilebilir olduğunu varsayalım. $x(n)$ konum vektörü verilsin. $u(n) = -Kx(n)$ geri besleme kontrolünü bulmak için Teorem 3.124'ü kullanarak,

$$x(n+1) = (A - BK)x(n)$$

kapalı devre sistemi $A - BK$ nin eigen değerleri keyfi seçilebilir.

Ayrıca Teorem 3.126 kullanılarak, $x(n)$ konum vektörünü tahmin etmek amacıyla bir $z(n)$ gözlemicisini seçmek için,

$$z(n+1) = (A - EC)z(n) + Ey(n) + Bu(n)$$

gözlemcisindeki $A - EC$ nin eigen değerleri keyfi seçilebilir.

Pratikte geri besleme kontrolü, $x(n)$ orijinal konum vektörü yerine $z(n)$ konum gözlemcisi kullanılarak elde edilebilir. Diğer bir ifadeyle,

$$u(n) = -Kz(n) \qquad (3.8.54)$$

kullanılır. Son birleşik sistem,

$$x(n+1) = Ax(n) - BKz(n)\,,$$
$$z(n+1) = (A-EC)z(n) + ECx(n) - BKz(n)$$

ile verilir.

$$e(n+1) = z(n+1) - x(n+1) = (A-EC)e(n)\,.$$
$$x(n+1) = (A-BK)x(n) + BKe(n)\,,$$
$$e(n+1) = (A-EC)e(n)\,.$$

Karşılık gelen matris formu,

$$A = \begin{pmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-EC \end{pmatrix}$$

ile verilir. Bu sistemin karakteristik polinomları $(A-BK)$ ve $(A-EC)$ nin karakteristik polinomlarından elde edilir. Bu nedenle A nın eigen değerleri keyfi olarak ya $A-BK$ nin ya da $A-EC$ nin eigen değerleridir. Bu da aşağıdaki sonucun ispatıdır.

Teorem 3.127:

$$z(n+1) = (A-EC)z(n) + Ey(n) - Bu(n)$$

gözlemi ve

$$u(n) = -Kz(n)$$

kontrolü ile

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n),$$
$$y(n) = Cx(n)$$

sistemini ele alalım. Bu bileşik sistemin karakteristik polinomu, $A-BK$ ve $A-EC$ nin karakteristik polinomlarından oluşur. Eigen değerleri keyfi seçilebilir.

Örnek 3.128:

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n),$$
$$y(n) = Cx(n)$$

sistemini ele alalım. Burada,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A-EC$ gözlemci matrisinin eigen değerleri $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ ve $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ olacak şekilde konum gözlemcisini bulalım.

Çözüm: Gözlenebilirlik matrisi,

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Burada rank 2 dir. Bu nedenle sistem tamamen gözlenebilirdir ve gözlemci geri beslemeli E artış matrisi belirlenebilirdir. Gözlemcinin karakteristik denklemi $\det(A - EC - \lambda I) = 0$ ile verilir. Eğer,

$$E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \text{ ise,}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0,$$

$$\lambda^2 + (1 + E_2)\lambda + E_1 + \frac{1}{4} = 0. \tag{3.8.55}$$

$$\left(\lambda - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \right)\left(\lambda - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \right) = 0 \text{ veya}$$

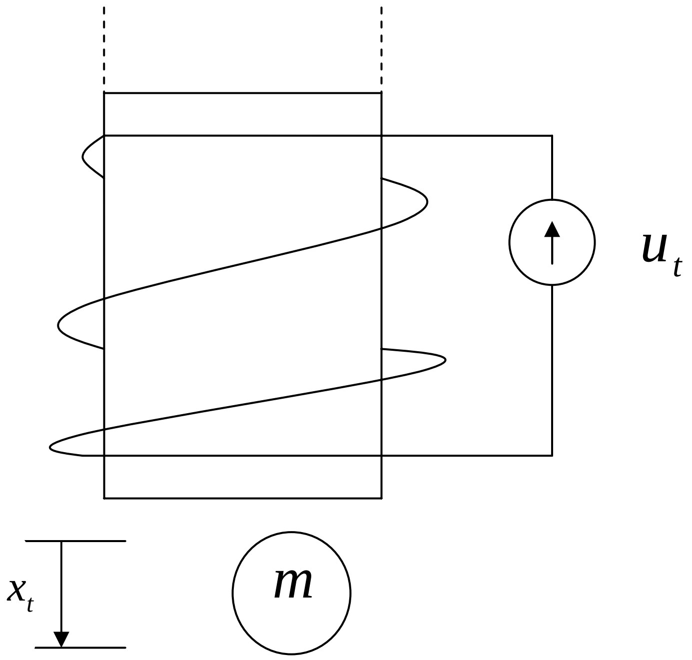
$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0. \tag{3.8.56}$$

(3.8.55) ve (3.8.56) denklemlerinin mukayesesiyle, $E_1 = \frac{1}{4}$, $E_2 = -2$ elde edilir.

Böylece, $E = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -2 \end{pmatrix}$.

Örnek 3.129: Bir elektromıknatıs ile üretilen bir manyetik alanda asılı m kütleli metal bir küreyi ele alalım. Bu sistemin hareketinin denklemi,

$$m\ddot{x}_t = mg - k\frac{u_t^2}{x_t}. \tag{3.8.57}$$



Şekil 3.13.

Burada x_t, mıknatıs ile küre arasındaki mesafe, u_t akım, g yerçekimi ivmesi, k sabit mıknatısın özellikleri ile belirlenen bir sabit.

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + Bu(n), \\ y(n) &= Cx(n) \end{aligned} \tag{3.8.58}$$

sisteminin

$$x_t = x_0 = 1,$$

$$u_t = u_0 = \sqrt{mg/k}\ ,$$

denge noktasını bulmak kolaydır. (3.8.58) denklemi bu denge noktasında lineerize edilirse ve $x = x_t - x_0$ ve $u = u_t - u_0$ ile,

$$\ddot{x} - \frac{g}{k}x = -2\sqrt{kg/m}u$$

veya matris formu,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{kg/m} \end{bmatrix} u\ .$$

Böylece,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{k} & 0 \end{bmatrix}, \ \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{kg/m} \end{bmatrix}.$$

$\hat{A}$, $\hat{A} = P\Lambda P^{-1}$ şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \sqrt{\dfrac{g}{k}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\dfrac{g}{k}} \end{bmatrix}, \ P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\dfrac{g}{k}} & -\sqrt{\dfrac{g}{k}} \end{bmatrix},$$

Dolayısıyla,

$$A = e^{\hat{A}T} = \begin{bmatrix} \cos\sqrt{\dfrac{g}{k}}T & \sqrt{\dfrac{k}{g}}\sinh\sqrt{\dfrac{g}{k}}T \\ \sqrt{\dfrac{g}{k}}\sinh\sqrt{\dfrac{g}{k}}T & \cosh\sqrt{\dfrac{g}{k}}T \end{bmatrix},$$

$$B = Te^{\hat{A}T}\hat{B} = -2T \begin{bmatrix} \sqrt{\dfrac{k}{m}}\sinh & \sqrt{\dfrac{g}{k}}T \\ \sqrt{\dfrac{g}{m}}\cosh & \sqrt{\dfrac{g}{k}}T \end{bmatrix}.$$

Bu ayrık denk sistem,

$$\det W = \left\| \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \left| -2T\sqrt{k/m} \begin{bmatrix} \sinh\sqrt{\dfrac{g}{k}}T & 2\sinh\sqrt{\dfrac{g}{k}}T\cosh\sqrt{\dfrac{g}{k}}T \\ \sqrt{\dfrac{g}{k}}\sinh\sqrt{\dfrac{g}{k}}T & 2\sqrt{\dfrac{g}{k}}T\sinh\sqrt{\dfrac{g}{k}}T\cosh\sqrt{\dfrac{g}{k}}T \end{bmatrix} \right| = ce\sqrt{\frac{g}{k}}T\sinh\sqrt{\frac{g}{k}}T$$

olduğundan dolayı kontrol edilebilirdir. Burada $T = 0$ ise $c = 0$. Eğer x konum sapması ölçülebilir ise sistem gözlemlenebilir. Ölçüm denklemi,

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gözlenebilirlik,

$$\det V = \left\| \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cosh\sqrt{\dfrac{g}{k}}T & \sqrt{\dfrac{k}{g}}\sinh\sqrt{\dfrac{g}{k}}T \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{\frac{k}{g}} \sinh \sqrt{\frac{g}{k}} T \ ,$$

hesaplamasıyla kolaylıkla görülebilir. $T = 0$ için sıfırdır.

$m = k = 0.1,\ g = 10$ ve $T = 0.01$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0050 & 0.0100 \\ 1.0017 & 1.0050 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -0.0020 \\ -0.2010 \end{bmatrix}$$

A stabil değildir. Eigen değerler, $\lambda_1 = 1.1052$ ve $\lambda_2 = 0.9048$.

$\{A, B\}$ çiftinin kontrol edilebilirliği, $K = [k_1, k_2]$ geri besleme konum stabilizesini bulabileceğimizi gösterir. $A - BK$ sistem matrisinin eigen değerleri keyfi belirlenebilir. Örneğimizde,

$$A - BK = \begin{bmatrix} 1.0050 + 0.0020k_1 & 0.0100 + 0.0020k_2 \\ 1.0017 + 0.2010k_1 & 1.0050 + 0.2010k_2 \end{bmatrix}.$$

Dolayısıyla,

$$|\lambda I - A + BK| = \lambda^2 - (2.0100 + 0.002k_1 + 0.201k_2)\lambda + 0.2000k_2 + 1$$

$\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ ve $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$ eigen değerleri,

$$K = [k_1, k_2] = [-376.2492 - 6.2500]$$

seçimi ile belirlenebilir.

$L = \{l_1, l_2\}^T$ seçimi yakınsaklığı garanti edecek şekilde değil, eigen değerlerin de keyfi seçilebileceğini vurgular. Örneğimizde,

$$A - LC = \begin{bmatrix} 1.0050 - l_1 & 0.0100 \\ 1.0017 - l_2 & 1.0050 \end{bmatrix}.$$

$$|\lambda I - A + LC| = \lambda^2 + (l_1 - 2.0100)\lambda - 1.0050 l_1 + 0.0100 l_2 + 1$$

$\lambda_1 = \dfrac{1}{4}$ ve $\lambda_2 = -\dfrac{1}{4}$ eigen değerleri

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.0100 \\ 95.5973 \end{bmatrix}$$

seçimi ile belirlenir.

3.9 Fark Denklemlerinin Asimptotik Davranışı

3.6 ıncı ve 3.7 inci kısımlarında stabilite ile ilgilenildi. Diğer bir ifadeyle bir fark denkleminin çözümünün sıfıra veya bir denge noktasına yakınsayıp yakınsamadığını bilmek istedik. Asimptotik teoride, daha çok sıfır ya da bir sabit eğiliminde olan çözümlerin yerine asimptotik formül elde etmeye çalışacağız.

3.9.1 Yaklaşım ile ilgili önbilgi

$\sim$, o ve O sembolleri yaklaşık fonksiyonların temel araçlarındandır ve bilimin tüm dallarında geniş ölçüde kullanılır.

"O" sembolü ile başlayalım.

Tanım 3.130: O, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ de tanımlı iki fonksiyon olsun. Eğer tüm $t \geq t_0$ için,

$$|f(t)| \leq M\,|g(t)|.$$

olacak şekilde bir pozitif $M > 0$ sabiti varsa, $(t \to \infty)$ için,

$$f(t) = O\big(g(t)\big).$$

Buna denk olarak eğer, $t \geq t_0$ için $\left|\dfrac{f(t)}{g(t)}\right|$ sınırlı ise, $f(t) = O\big(g(t)\big)$. Diğer bir ifadeyle eğer f nin mertebesi g nin mertebesini aşmıyorsa $f = O(g)$.

Örnek 3.131:

(a) $$\left(\frac{n}{t^2+n^2}\right)^n = O\left(\frac{1}{t^n}\right),\ n \to \infty,\ n \in \mathbb{Z}^+$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm: Genelliği bozmaksızın $t > 1$ kabul edelim. $t^2 + n^2 = (t-n)^2 + 2nt \geq 2nt$.

Böylece,

$$\left(\frac{n}{t^2+n^2}\right)^n = \frac{1}{(2t)^n} = \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{t^n}\right) \leq \frac{1}{t^n},\ n \in \mathbb{Z}^+,\ t > 1.$$

Buradan,

$$\left(\frac{n}{t^2+n^2}\right)^n = O\left(\frac{1}{t^n}\right),\ M = 1\ (M,\ n \text{ den bağımsızdır.})$$

(b) $$n \to \infty \text{ için, } \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm: $\sin\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)=(-1)^n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\left|\frac{\sin\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)}{1/n}\right|=\left|\frac{\sin\frac{1}{n}}{1/n}\right|.$$

$u=\frac{1}{n}$ dersek $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\frac{1}{n}}{1/n}\right|=\lim_{u\to 0}\left|\frac{\sin u}{u}\right|=1$. Böylece, $\left|\frac{\sin\frac{1}{n}}{1/n}\right|$ in sınırlı olduğu sonucuna varırız. ($M=1$)

(c) $(t\to\infty)$ için,

$$t^2\log t+t^3=O(t^3)$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$\left|\frac{t^2\log t+t^3}{t^3}\right|=1+\left|\frac{\log t}{t}\right|$$

$y=\frac{\log t}{t}$ fonksiyonunu $t=e$ de, $\frac{1}{e}$ maksimum değeri alır. Böylece, $\left|\frac{\log t}{t}\right|\leq\frac{1}{e}<1$.

Buradan $\left|(t^2\log t+t^3)/t^3\right|\leq 2$.

Not: O ile tanımlanan bağıntı simetrik değildir. Örneğin, $f=O(g)$ ise $g=O(f)$ olmak zorunda değildir. Bunun için birkaç basit örnek verelim. $(x\to\infty)$ için $x=O(x^2)$, fakat $x^2\neq O(x)$ veya $(x\to\infty)$ için, $e^{-x}=O(1)$ fakat $\frac{1}{e^{-x}}\to\infty$ olduğundan $1\neq O(e^{-x})$. Buna rağmen O bağıntısı geçişme özelliğine sahiptir. Yani $f=O(g)$ ve $g=O(h)$ ise $f=O(h)$ dir. Bu durumda $f=O(h)$, f nin $f=O(g)$ den daha iyi bir yaklaşımıdır.

Şimdi "o" sembolünün tanımını verelim.

Tanım 3.132: Eğer $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=0$ ise $(t\to\infty)$ için $f(t)=o\big(g(t)\big)$.

Örnek 3.133:

(a) $(t \to \infty)$ için

$$t^2 \log t + t^3 = o(t^4)$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$\lim_{t\to\infty} \dfrac{t^2 \log t + t^3}{t^4} = \lim_{t\to\infty} \dfrac{\log t}{t^2} + \lim_{t\to\infty} \dfrac{1}{t}$. L'Hopital Kuralı'ndan

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t^2} = 0 .$$

Buradan,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^2 \log t + t^3}{t^4} = 0 .$$

(b) $(t \to \infty)$ için $o(g(t)) = g(t)o(1)$ olduğunu gösterelim.

Çözüm: $(t \to \infty)$ için $f(t) = o(g(t))$ olsun.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0 ,$$

Bu da $(t \to \infty)$ için $\dfrac{f(t)}{g(t)} = o(1)$ demektir. Bu nedenle $(t \to \infty)$ için $f(t) = g(t)o(1)$.

Burada o sembolünün, O sembolüne oranla daha az bir role sahip olduğu görülür.

Son olarak "$\sim$" asimptotik denklik bağıntısını tanıtalım.

Tanım 3.134: Eğer $\lim_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{g(t)} = 1$ ise $(t \to \infty)$ için f, g ye asimptotiktir denir. Ve $f \sim g$, şeklinde yazılır. Eğer $(t \to \infty)$ iken $f \sim g$ ise,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t) - g(t)}{g(t)} = 0$$

olduğuna dikkat çekelim. Tanım 3.132'den $f(t) - g(t) = o(g(t)) = g(t)o(1)$. Buradan,

$$f(t) = g(t)\left[1 + o(1)\right].$$

Örnek 3.135:

(a) $(t \to \infty)$ için $\sinh t \sim \dfrac{1}{2}e^t$ olduğunu gösterelim.

Çözüm: $\lim_{t\to\infty}\frac{\sinh t}{\frac{1}{2}e^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})}{\frac{1}{2}e^t}=1$.

(b) $(t\to\infty)$ için $t^2\log t+t^3\sim t^3$

olduğunu gösterelim.

Çözüm: $\lim_{t\to\infty}\frac{t^2\log t+t^3}{t^3}=1+\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=1+0$ (L'Hopital)

$=1.$

Örnek 3.131(c) ve 3.135(b) den $t^3\sim t^2\log t+t^3$ ve $t^2\log t+t^3=O(t^3)$ elde edildi. Ayrıca $t^2\log t+2t^3=O(t^3)$ fakat

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^2\log t+2t^3}{t^3}=2$$

olduğundan $t^2\log t+t^3$, t^3 e asimptotik değildir. Bu da bize aşağıdaki tanımları yapmamızı sağlar.

$$O(g):=\{f : f=O(g)\},$$

$$o(g):=\{f : f=o(g)\}.$$

Örnek 3.136: $o(f)=O(f)$ fakat $O(f)\neq o(f)$ olduğunu gösterelim.

Çözüm: $g=o(f)$ olsun. $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=0$. Buradan $\left|\frac{f(t)}{g(t)}\right|$ sınırlıdır. Böylece $o(f)=g=O(f)$.

$O(f)\neq o(f)$ ispatı için $f(t)=t^2+1,\ g(t)=2t^2$. Açıkça $g=O(f)$. $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=2\neq 0,\ g\neq o(f)$.

3.9.2 Poincaré Teoremi

Bu bölümde Poincaré ve Perron teoremlerini vereceğiz. Bu iki teorem sabit olmayan katsayılı lineer fark denklemlerinin davranışı ile ilgilidir.

Sabit katsayılı lineer denklemleri ele alalım.

$$x(n+k)+p_1x(n+k-1)+...+p_kx(n)=0. \tag{3.9.1}$$

p_i ler reel ve kompleks sayılardır. (3.9.1) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + ... + p_k = 0 \qquad (3.9.2)$$

(3.9.2) denkleminin karakteristik kökleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ olsun. Düşünülmesi gereken iki durum vardır.

Durum1: Farklı karakteristik kökler farklı modüle sahiptir. Örneğin, yani eğer her $1 \le i,\ \mathrm{j} \le \mathrm{k}$ için $\lambda_i \neq \lambda_j$ ise $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$.

(a) Tüm karakteristik kökler farklı olsun. Bu karakteristik kökler

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_k|$$

şeklinde olsun. (3.9.1) denkleminin çözümü,

$$x(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + ... + c_k\lambda_k^n \qquad (3.9.3)$$

şeklindedir. Dolayısıyla eğer $c_1 \neq 0$ ise,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(n+1)}{x(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_1\lambda_1^{n+1} + c_2\lambda_2^{n+1} + ... + c_k\lambda_k^{n+1}}{c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + ... + c_k\lambda_k^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lambda_1 \left[\frac{c_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n+1} + ... + c_k\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{n+1}}{c_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n} + ... + c_k\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{n}} \right]$$

$$= \lambda_1, \quad \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1,\ i = 2, ..., k.$$

Benzer olarak eğer $c_1 = 0,\ c_2 \neq 0$ ise,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(n+1)}{x(n)} = \lambda_2 .$$

Genel olarak $c_1 = c_2 = ... = c_{i-1} = 0,\ c_i \neq 0$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(n+1)}{x(n)} = \lambda_i .$$

(b) Şimdi bazı tekrarlı karakteristik köklerin olduğunu varsayalım. Kolaylık için λ_1 in katlılığı r olsun. Dolayısıyla,

$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_r$, $|\lambda_1| = |\lambda_2| = ... = |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| > ... > |\lambda_k|$. Böylece (3.9.1) denkleminin genel çözümü, $x(n) = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n + ... + c_r n^{r-1}\lambda_1^n + c_{r+1}\lambda_{r+1}^n + ... + c_k\lambda_k^n$ şeklindedir.

Durum 2: Burada $|\lambda_r| = |\lambda_j|$ olacak şekilde λ_r, λ_j iki farklı karakteristik kök olsun. Eğer λ_r ve λ_j eşleniklerse bu durum oluşur. Yani α ve β reel sayıları için $\lambda_r = \alpha + i\beta$, $\lambda_j = \alpha - i\beta$. Kolaylık olsun diye $r = 1, j = 2$ olsun. Dolayısıyla $\lambda_r \equiv \lambda_1$ ve $\lambda_j \equiv \lambda_2$. Buradan,

$\lambda_1 = \alpha + i\beta = re^{i\theta}$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta = re^{-i\theta}$. Burada $r = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$, $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$

(3.9.1) denkleminin genel çözümü,

$$x(n) = c_1 r^n e^{in\theta} + c_2 r^n e^{-in\theta} + c_3 \lambda_3^n + \ldots + c_k \lambda_k^n .$$

Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(n+1)}{x(n)} = \frac{r(c_1 e^{i(n+1)\theta} + c_2 e^{-i(n+1)\theta}) + c_3 \lambda_3^{n+1} + \ldots + c_k \lambda_k^{n+1}}{c_1 e^{in\theta} + c_2 e^{-in\theta} + c_3 \lambda_3^n + \ldots + c_k \lambda_k^n} . \tag{3.9.4}$$

$n \to \infty$ iken $e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$, $e^{-in\theta} = \cos n\theta - i \sin n\theta$ in limiti belirli olmadığından, limit (3.9.4) yoktur. Özel çözümler için bu limit olabilir. Örneğin eğer $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| > \ldots > |\lambda_k|$ ve

(a) $c_1 \neq 0,\ c_2 = 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x(n+1)}{x(n)} = re^{i\theta} = \lambda_1$,

(b) $c_1 = 0,\ c_2 \neq 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x(n+1)}{x(n)} = re^{-i\theta} = \lambda_2$.

Durum 2, $\lambda_i = -\lambda_j$ için de gerçeklenir.

Teorem 3.137: $x(n)$, (3.9.1) denkleminin sıfırdan farklı herhangi bir çözümü olsun. Bu halde, farklı karakteristik kökler farklı modüllere sahip olacak şekilde bazı λ_m karakteristik kökleri için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(n+1)}{x(n)} = \lambda_m . \tag{3.9.5}$$

Ayrıca eğer modülü $\left(|\lambda_r| = |\lambda_j|\right)$ olan iki veya daha fazla λ_r, λ_j farklı kökler varsa genel olarak (3.9.5) limiti yoktur. Fakat eğer (3.9.5) limiti var ve verilen λ_m karakteristik köküne eşit ise özel çözümler daima bulunabilir.

Örnek 3.138:

$$x(n+2)+\mu x(n)=0$$

fark denklemini ele alalım.

(a) Eğer $\mu=\beta^2$ ise karakteristik denklem,

$$\lambda^2+\beta^2=0.$$

Buradan karakteristik kökler $\lambda_1=\beta i=\beta e^{-i}\pi/2$ ve $\lambda_2=-\beta i=\beta e^{i}\pi/2$. Genel çözüm,

$$x(n)=c_1\beta^n e^{i\frac{n\pi}{2}}.$$

Dolayısıyla,

$$\lambda_1=\beta i=\beta e^{-i}\pi/2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(n+1)}{x(n)}=\beta\left(\frac{c_1e^{i(n+1)\pi/2}+c_2e^{-i(n+1)\pi/2}}{c_1e^{in\pi/2}+c_2e^{-in\pi/2}}\right)$$

limiti yoktur. Buna rağmen eğer, $\overline{x}(n)=c_1\beta^n e^{i\frac{n\pi}{2}}$ özel çözümünü alırsak,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{x}(n+1)}{\overline{x}(n)}=\beta e^{i\frac{\pi}{2}}=\beta i.$$

Benzer olarak çözüm için,

$$\hat{x}(n)=c_2\beta^n e^{-i\frac{n\pi}{2}},\ \lim_{n\to\infty}\frac{\hat{x}(n+1)}{\hat{x}(n)}=-\beta i.$$

(b) Eğer $\mu=-\beta^2$ ise karakteristik kökler $\lambda_1=\beta,\ \lambda_2=-\beta$. Genel çözüm

$$x(n)=c_1\beta^n+c_2(-\beta)^n.$$

Buradan,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(n+1)}{x(n)}=\beta\left(\frac{c_1\beta^{n+1}+c_2(-\beta)^{n+1}}{c_1\beta^n+c_2(-\beta)^n}\right)$$

$$=\beta\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_1+c_2(-1)^{n+1}}{c_1+c_2(-1)^n}\right). \qquad (3.9.6)$$

Limit (3.9.6) yoktur. Çünkü $\beta(c_1+c_2)/(c_1-c_2)$ ile $\beta(c_1-c_2)/(c_1+c_2)$ arasında salınım yapar.

$$\overline{x}(n)=c_1\beta^n,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{x}(n+1)}{\overline{x}(n)}=\beta \text{ ve}$$

$$\tilde{x}(n) = c_2(-\beta)^n,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{x}(n+1)}{\tilde{x}(n)} = -\beta\ .$$

Sabit katsayılı fark denklemleri ile ilgili bu sonuçlar Fransız matemetikçi Henri Poincaré tarafından sabit katsayılı olmayan

$$x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + ... + p_k(n)x(n) = 0 \tag{3.9.7}$$

fark denklemlerine genişletmiştir.

Burada,

$$\lim_{n\to\infty} p_i(n) = p_i\ ,\quad 1 \le i \le k\ . \tag{3.9.8}$$

olacak şekilde p_i, $1 \le i \le k$ reel sayıları vardır. Bu tip fark denklemi Poincaré tipinde bir fark denklemi diye adlandırılır. (3.9.7) denklemi ile ilişkili karakteristik denklem

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + ... + p_k = 0\ . \tag{3.9.9}$$

Kısaca Poincaré tipi fark denklemlerinin esas amacı değişken katsayılı bir fark denkleminin n ler için yaklaşık olarak sabit katsayılı bir fark denklemi olarak düşünülebileceğidir.

Teorem 3.139: (Poincaré Teoremi) (3.9.9) denkleminin $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ kökleri farklı modüllere sahip olsun. (3.9.7) denkleminin trivial olmayan herhangi bir $x(n)$ çözümü ve bazı i için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(n+1)}{x(n)} = \lambda_i\ . \tag{3.9.10}$$

Teorem 3.140: (Perron Teoremi) Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $P_k(n) \neq 0$ olduğunu varsayalım. Teorem 3.139 varsayımları altında (3.9.7) denklemi $1 \le i \le k$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(n+1)}{x(n)} = \lambda_i \tag{3.9.11}$$

özelliği altında $\{x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)\}$ çözümlerin bir fundamental kümesine sahiptir.

Örnek 3.141:

$$x(n+2) - \left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)x(n) = 0 \tag{3.9.12}$$

$$x(n+2) + \frac{1}{n+4}x(n+1) - \frac{n+1}{n+4}x(n) = 0 \tag{3.9.13}$$

fark denklemlerini ele alalım.

Her iki denklem ile ilişkili karakteristik denklem $\lambda^2 - 1 = 0$ ile verilir. Dolayısıyla karakteristik kökler $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$ şeklindedir. $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. (3.9.12) denkleminin bir çözümü

$$x(2n+1) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2j}\right),\ x(2n) = 0,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x(n+1)}{x(n)}$ yoktur. Bu durumda Poincaré Teoremi uygulanamaz. Buna rağmen (3.9.13) fark denklemi için çözümlerin bir fundamental kümesi

$$x_1(n) = \frac{1}{(n+1)(n+2)},\ x_2(n) = \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1(n+1)}{x_1(n)} = 1 = \lambda_1,\ \lim_{n\to\infty} \frac{x_2(n+1)}{x_2(n)} = -1 = \lambda_2.$$

Örnek 3.142:

$$x(n+2) - \frac{n}{n+1}x(n+1) + \frac{1}{n}x(n) = 0$$

fark denklemini ele alalım.

Bu denkleme karşılık gelen karakteristik denklem,

$$\lambda^2 - \lambda = 0.$$

Karakteristik kökler $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0$. Perron Teoremi'nden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1(n+1)}{x_1(n)} = 1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{x_2(n+1)}{x_2(n)} = 0$$

olacak şekilde $x_1(n)$ ve $x_2(n)$ çözümleri vardır. Kısaca bu örneklerde Poincaré veya Perron teoremlerinden lineer fark denklemlerinin asimptotik davranışları hakkında kısmi sonuçlar elde edilebilir yorumu yapılabilir. Burada Perron Teoremi'ni kullanarak Poincaré tipinde bir denklemin çözümünün asimptotik bir ifadesini yazıp yazamayacağımız sorusu ortaya çıkar. Sıfır dizilerini kullanarak bu soru için basit ve güzel bir metot elde edilir. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} v(n) = 0$ ise $v(n)$ dizisine sıfır dizisi denir.

Lemma 3.143:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(n+1)}{x(n)}=\lambda\neq 0$$

olduğunu varsayalım. Buradan bazı $v(n)$ sıfır dizileri için,

$$x(n)=\pm\lambda^{n}e^{nv(n)}\,. \tag{3.9.14}$$

İspat:

$$y(n)=\left|\frac{x(n)}{\lambda^{n}}\right|$$

olsun.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y(n+1)}{y(n)}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\lambda}\frac{x(n+1)}{x(n)}\right|=1\,.$$

Eğer $z(n)=\log y(n)$ ise,

$$\lim_{n\to\infty} z(n+1)-z(n)=\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{y(n+1)}{y(n)}\right)$$

$$=\log\lim_{n\to\infty}\frac{y(n+1)}{y(n)}=0\,.$$

Bu nedenle verilen bir $\varepsilon>0$ ve tüm $n\geq N$ için,

$$\left|z(n+1)-z(n)\right|<\varepsilon/2$$

olacak şekilde bir N pozitif tamsayısı vardır. Ayrıca, $n\geq N$ için,

$$\left|z(n)-z(N)\right|\leq\sum_{r=N+1}^{n}\left|z(r)-z(r-1)\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}(n-N)\,.$$

Buradan yeterince büyük n ler için,

$$\left|\frac{z(n)}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{N}{n}\right)+\left|\frac{z(N)}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.$$

Bazı $v(n)$ sıfır dizileri için, $\lim_{n\to\infty}\frac{z(n)}{n}=0$ veya $z(n)=nv(n)$. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.144: Lemma 3.143'ü ve Perron Teoremi'ni kullanarak

$$y(n+2)+\frac{n+1}{n+2}y(n+1)-\frac{2n}{n+2}y(n)=0$$

fark denkleminin çözümlerinin bir fundamental kümesinin asimptotik davranışını bulalım.

Çözüm: Bu denkleme karşılık gelen karakteristik denklem,

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Karakteristik kökler $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$. Perron Teoremi'nden $y_1(n)$ ve $y_2(n)$ in

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_1(n+1)}{y_1(n)} = 1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{y_2(n+1)}{y_2(n)} = -2.$$

Böylece Lemma 3.143'ten bazı $v(n)$ ve $\mu(n)$ sıfır dizileri için,

$$y_1(n) = e^{nv(n)},\ y_2(n) = (-2)^n e^{n\mu(n)}.$$

$$y_1(n) = \frac{1}{n},\ y_2(n) = (-2)^n / 2$$

çözümlerin tam bir fundamental kümesidir.

3.9.3 İkinci mertebeden fark denklemleri

Bu kısımda ikinci mertebeden fark denklemlerinin belirli tiplerinin asimptotik davranışları ile ilgilenilecektir. Genel fark denklemleri için Kısım 3.9.5'e bakılabilir. Bu kısımda ele aldığımız birinci denklem,

$$\Delta^2 y(n) + p(n)y(n) = 0 \tag{3.9.15}$$

Bu denklem,

$$y(n+2) - 2y(n+1) + (1 + p(n))y(n) = 0 \tag*{(3.9.15)$'$}$$

formuna denktir. Eğer $n \to \infty$ iken $p(n) \to 0$ ise $(3.9.15)'$ denklemi Poincaré tipindedir. Ancak ilgili denklemin karakteristik kökleri $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ olduğundan Perron Teoremi uygulanmaz. Bu nedenle (3.9.15) denklemi ile ilgili etkili yeni teknikler geliştirmeliyiz. (3.9.15) denklemini $x_1(n) = c_1,\ x_2(n) = c_2 n$ şeklinde lineer bağımsız çözümlere sahip,

$$\Delta^2 x(n) = 0 \tag{3.9.16}$$

denkleminin bir pertürbasyonu gibi ele alalım. Burada amacımız (3.9.15) denkleminin $x_1(n) \sim c_1,\ x_2(n) \sim c_2$ olacak şekilde iki lineer bağımsız $x_1(n)$ ve $x_2(n)$ çözümlerine sahip olduğunu ispatlamaktır.

Lemma 3.145: (Çok katlı toplamı tek toplama indirgemek) $n \geq n_0$ üzerinde tanımlı herhangi bir $f(n)$ fonksiyonu için

$$\sum_{r=n_0}^{n-1} \sum_{j=n_0}^{r-1} f(j) = \sum_{j=n_0}^{r-1} (n-j-1) f(j) \tag{3.9.17}$$

İspat:

$\sum_{r=n_0}^{n-1} \sum_{j=n_0}^{r} f(j)$ toplamının sırasını değiştirirsek,

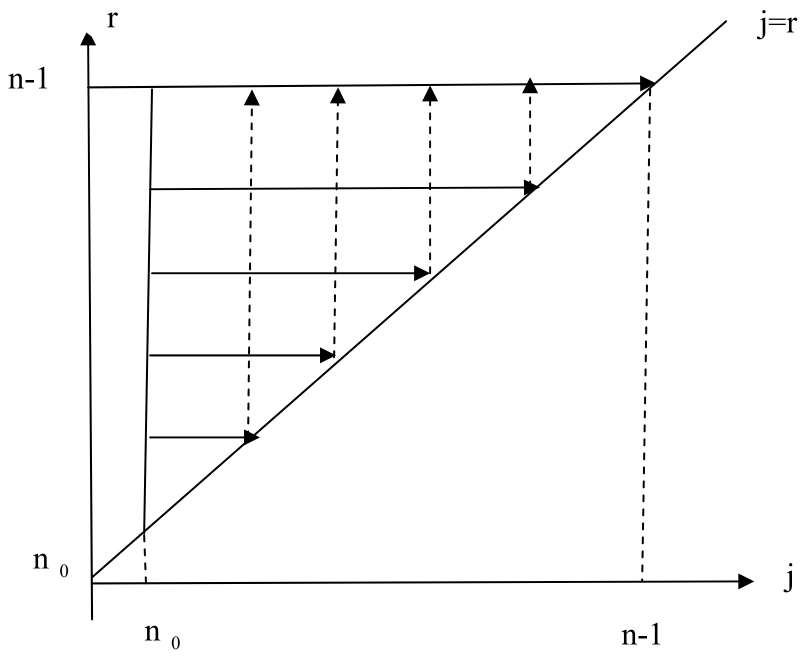
$$\sum_{r=n_0}^{n-1} \sum_{j=n_0}^{r} f(j) = \sum_{j=n_0}^{n-1} f(j) \sum_{r=j}^{n-1} 1 = \sum_{j=n_0}^{n-1} (n-j) f(j) \tag{3.9.18}$$

elde edilir. (Şekil 3.14.)

$$\sum_{r=n_0}^{n-1} \sum_{j=n_0}^{r-1} f(j) = \sum_{r=n_0}^{n-1} \sum_{j=n_0}^{r} f(j) - \sum_{r=n_0}^{n-1} f(r)$$

$$= \sum_{r=n_0}^{n-1} (n-j-1) f(j).$$

Şimdi (3.9.15) denklemi için birinci asimptotiklik sonucunu verelim.



Şekil 3.14.

Teorem 3.146:

$$\sum_{j=1}^{\infty} j\left|p(j)\right| < \infty \tag{3.9.19}$$

olduğunu varsayalım. (3.9.15) denklemi $n \to \infty$ için, $y_1(n) \sim 1$ ve $y_2(n) \sim n$ olacak şekilde $y_1(n)$ ve $y_2(n)$ çözümlerine sahiptir.

İspat: (3.9.15) denklemini

$$\Delta^2 y(n) = -p(n)y(n) \tag{3.9.20}$$

formunda yazalım. Bu denklemin her iki tarafının iki defa ters farkını alırsak ((2.1.16) formülünü kullanarak)

$$y(n) = c_1 + c_2 n - \sum_{r=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{r-1} p(j)y(j)\,. \tag{3.9.21}$$

(3.9.17) denklemini (3.9.21) denkleminde kullanarak,

$$y(n) = c_1 + c_2 n - \sum_{j=1}^{n-1}(n-j-1)\,p(j)y(j)\,.$$

Böylece $n \geq 1$ için,

$$\left|y(n)\right| \leq \left(\left|c_1\right| + \left|c_2\right|\right)n + n\sum_{j=1}^{n-1}\left|p(j)\right|\left|y(j)\right|$$

veya

$$\frac{\left|y(n)\right|}{n} \leq \left(\left|c_1\right| + \left|c_2\right|\right) + \sum_{j=1}^{n-1} j\left|p(j)\right|\frac{\left|y(j)\right|}{j}\,.$$

Fark denklemleri için Gronwall Eşitsizliği'nden,

$$\frac{\left|y(n)\right|}{n} \leq \left(\left|c_1\right| + \left|c_2\right|\right)\exp\left(\sum_{j=1}^{n-1} j\left|p(j)\right|\right)$$

$\leq c_3$ ((3.9.18) varsayımından) veya

$$y(n) \leq c_3 n \tag{3.9.22}$$

(3.9.21) denkleminin her iki yanına Δ fark operatörünü uygularsak,

$$\Delta y(n) = c_2 - \sum_{j=1}^{n-1} p(j)y(j) \tag{3.9.23}$$

elde ederiz. Şimdi (3.9.22) eşitsizliğinden,

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left|p(j)\right|\left|y(j)\right| \leq c_3\sum_{j=1}^{n-1} j\left|p(j)\right| < \infty\,.$$

Bu da $\sum_{j=1}^{\infty} p(j)y(j)$ toplamının M limitine yakınsadığını gösterir. Bu bilgiyi (3.9.22) denkleminde kullanırsak,

$$\lim_{n\to\infty} \Delta y(n) = c_2 - \sum_{j=1}^{\infty} p(j)y(j) = c_2 - M .$$

$c_2 = M$ olsun. Buradan $n \to \infty$ için birinci çözüm $\Delta y_1(n) \to 0$ veya $y_1(n) \sim 1$. Ayrıca eğer $c_2 \neq M$ seçersek ikinci çözüm $\Delta y_2(n) \to c_2 - M \neq 0$ veya $y_2(n) \sim n$. Bu da ispatı tamamlar. Bir önceki sonuç,

$$\Delta^2 y(n) + p(n)\left|y(n)\right|^{\gamma} \operatorname{sgn} y(n) = 0 \tag{3.9.24}$$

şeklinde Emden-Fowler denklemi adı verilen genel fark denklemlerine genişletilir.

Burada $\gamma \neq 1$ pozitif reel sayı ve $\operatorname{sgn} y(n)\begin{cases} 1 & \text{eğer } y(n) > 0 \\ -1 & \text{eğer } y(n) < 0 \end{cases}$.

Örneğin eğer $m \in \mathbb{Z}^{+}$ için $\gamma = 2m+1$ ise (3.9.24) denklemi

$$\Delta^2 y(n) + p(n) y^{2m+1}(n) = 0$$

denklemine dönüşür. $y(n)$ ya pozitif ya da negatiftir. (3.9.24) denklemi için yeni bir Gronwall tipi eşitsizlik geliştirmeliyiz.

Lemma 3.147:

$$u(n) \leq a + b\sum_{j=n_0}^{n-1} c(j)u^{\gamma}(j)$$

olduğunu varsayalım. Burada $1 \neq \gamma > 0,\ a \geq 0,\ b > 0,\ c(j) > 0$ ve $j \geq n_0$ için $u(j) > 0$ olsun.

$$u(n) \leq \left[a^{1-\gamma} + b(1-\gamma)\sum_{j=n_0}^{n-1} c(j) \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \tag{3.9.25}$$

$\gamma > 1$ olmak kaydıyla tüm $n \geq n_0$ için $a^{1-\gamma} + b(1-\gamma)\sum_{j=n_0}^{n-1} c(j) > 0$.

İspat:

$$u(n) = a + b\sum_{j=n_0}^{n-1} c(j)u^{\gamma}(j) \tag{3.9.26}$$

olsun. Tüm $n \geq n_0$ için $u(n) \leq v(n)$.

Ayrıca,

$$\Delta v(n) = bc(n)u^{\gamma}(n) \tag{3.9.27}$$

Buradan,

$$\frac{\Delta v(n)^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \int_{n}^{n+1} \frac{dv(t)}{v^{\gamma}(t)} \leq \frac{\Delta v(n)}{v^{\gamma}(n)} \leq \frac{\Delta v(n)}{u^{\gamma}(n)} \tag{3.9.28}$$

(3.9.26) denklemini (3.9.28) denkleminde kullanarak,

$$\frac{\Delta v^{1-\gamma}(n)}{1-\gamma} \leq bc(n) \text{ veya } \Delta v^{1-\gamma}(n) \leq 1-\gamma bc(n)\,.$$

Buradan,

$$v^{1-\gamma}(n) \leq v^{1-\gamma}(n_0) + \sum_{j=n_0}^{n-1} (1-\gamma)bc(j)\,.$$

Böylece,

$$u(n) \leq \left[a^{1-\gamma} + \sum_{j=n_0}^{n-1} (1-\gamma)bc(j) \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}.$$

Teorem 3.148:

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} j^{\gamma} \left| p(j) \right| = M < \infty \tag{3.9.29}$$

olsun. $y(n_0)$ başlangıç koşulu ile, (3.9.24) denkleminin her $y(n)$ çözümü, $y(n) \sim n$ olacak şekilde

$$\left[\left| \Delta y(n_0) \right| + \left| \frac{y(n_0)}{n_0} - \Delta y(n_0) \right| \right]^{1-\gamma} + 2(1-\gamma)M > 0 \tag{3.9.30}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat:

$$A(n) = \Delta y(n),\; B(n) = y(n) - n\Delta y(n)$$

olsun. Bu halde,

$$y(n) = n\Delta y(n) + B(n)$$

veya

$$y(n) = nA(n) + B(n)\,. \tag{3.9.31}$$

Üstelik

$$\Delta A(n) = \Delta^2 y(n)$$

$$=-p(n)\left|y(n)\right|^{\gamma}\operatorname{sgn} y \text{ veya}$$

$$\Delta A(n)=p(n)\left[\left|nA(n)+B(n)\right|\right]^{\gamma}\operatorname{sgn} y\,. \tag{3.9.32}$$

$B(n)=y(n)-n\Delta y(n)$ olduğu için

$$\Delta B(n)=\Delta y-(n+1)\Delta^{2}y(n)-\Delta y(n)$$
$$=-(n+1)\Delta A(n)\,. \tag{3.9.33}$$

(3.9.32) denklemini (3.9.33) denkleminde kullanarak,

$$\Delta B(n)=(n+1)\,p(n)\left[\left|nA(n)+B(n)\right|\right]^{\gamma}\operatorname{sgn} y \tag{3.9.34}$$

(3.9.32) ve (3.9.33) denklemlerinin ters farkını alarak

$$A(n)=A(n_0)-\sum_{j=n_0}^{n-1}p(j)\left[\,jA(j)+B(j)\right]^{\gamma}\operatorname{sgn} y(j)\,,$$

$$B(n)=B(n_0)+\sum_{j=n_0}^{n-1}p(j)\left[\,jA(j)+B(j)\right]^{\gamma}\operatorname{sgn} y(j)$$

veya

$$\frac{B(n)}{n}=\frac{B(n_0)}{n}+\frac{1}{n}\sum_{j=n_0}^{n-1}p(j)\left[\,jA(j)+B(j)\right]^{\gamma}\operatorname{sgn} y(j) \tag{3.9.35}$$

(3.9.34) denkleminden,

$$\left|A(n)\right|\le\left|A(n_0)\right|+\sum_{j=n_0}^{n-1}\left|p(j)\right|j^{\gamma}\left|A(j)+\frac{B(j)}{j}\right|^{\gamma}. \tag{3.9.36}$$

(3.9.35) denkleminde $n\ge n_0$ ve $n\ge j+1$ gerçeği kullanılırsa,

$$\frac{\left|B(n)\right|}{n}\le\frac{\left|B(n_0)\right|}{n}+\sum_{j=n_0}^{n-1}\left|p(j)\right|j^{\gamma}\left|A(j)+\frac{B(j)}{j}\right|^{\gamma}. \tag{3.9.37}$$

(3.9.36) denklemini (3.9.37) denklemine ekleyerek,

$$\left|A(n)\right|+\frac{\left|B(n)\right|}{n}\le\left(\left|A(n_0)\right|+\frac{\left|B(n_0)\right|}{n_0}\right)+2\sum_{j=n_0}^{n-1}\left|p(j)\right|j^{\gamma}\left|A(j)+\frac{B(j)}{j}\right|^{\gamma}$$

veya

$$u(n)\le u(n_0)+2\sum_{j=n_0}^{n-1}c(j)u^{\gamma}(j)\,. \tag{3.9.38}$$

Burada $u(n)=\left|A(n)\right|+\dfrac{\left|B(n)\right|}{n},\ c(j)=\left|p(j)\right|j^{\gamma}\,.$

(3.9.25) eşitsizliğinden,

$$u(n) \le \left[u(n_0)^{1-\gamma} + 2(1-\gamma)\sum_{j=n_0}^{n-1} c(j) \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \le c_1 .$$

Fakat

$$\left| A(n) + \frac{B(n)}{n} \right| = \frac{|x(n)|}{n} \le |A(n)| + \left| \frac{B(n)}{n} \right| = u(n) \le c_1 .$$

Bu da $x(n) \sim n$ demektir.

3.9.4 Asimptotiksel olarak diyagonal sistemler

Bu kısımda bir perturbe diyagonal sistemin çözümlerinin bir perturbe olmamış diyagonal sistemin çözümlerine asimptotik olduğu durumları ele alacağız. Ek olarak k inci mertebeden nanotonom skaler fark denklemleri için asimptotik sonuçlar elde edeceğiz. Çalışmamıza,

$$y(n+1) = (D(n) + B(n))y(n) \tag{3.9.39}$$

perturbe diyagonal sistemini ve

$$x(n+1) = D(n)x(n), \tag{3.9.40}$$

perturbe olmamış diyagonal sistemini göz önünde bulundurarak başlayalım. Burada tüm $n \ge n_0$, $1 \le j \le k$ için $D(n) = diag(\lambda_1(n), \lambda_2(n), ..., \lambda_k(n))$, $\lambda_i(n) \ne 0$. Ve $B(n)$, $n \ge n_0 \ge 0$ için tanımlı $k \times k$ tipinde bir matristir. (3.9.40) sisteminin fundamental matrisi,

$$\Phi(n) = diag\left(\prod_{r=n_0}^{n-1} \lambda_1(r), \prod_{r=n_0}^{n-1} \lambda_2(r), ..., \prod_{r=n_0}^{n-1} \lambda_k(r) \right). \tag{3.9.41}$$

$$\mu_i(n) = \begin{cases} \prod_{r=n_0}^{n-1} \lambda_i(r), \text{ eğer tüm } n \ge m \ge n_0 \text{ için } \prod_{r=n_0}^{n-1} |\lambda_i(r)| \le M \\ 0, \qquad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

için

$$\Phi_1(n) = diag(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k(n))$$

tanımlayalım. $\Phi_2(n) = \Phi(n) - \Phi_1(n)$ tanımlayalım. Bu halde, $\Phi_1(n)$ ve $\Phi_2(n)$, (3.9.40) sisteminin fundamental matrisleridir.

Şimdi dikotominin (bölünmüşlüğün) önemli bir tanımını verebiliriz.

Tanım 3.149: (3.9.40) sistemine eğer,

(i) $\left\|\Phi_1(n)\Phi^{-1}(m)\right\| \leq M$, $n \geq m \geq n_0$,

(ii) $\left\|\Phi_2(n)\Phi^{-1}(m)\right\| \leq M$, $m \geq n \geq n_0$

olacak şekilde bir M sabiti varsa, bayağı dikotomi denir. Eğer $D(n)$ sabitse (3.9.40) sistemi genellikle bir bayağı dikotomiye sahiptir.

Örnek 3.150:

$$x(n+1) = D(n)x(n)$$

fark denklemini ele alalım.

$$D(n) = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{1}{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{n+2} \end{pmatrix}.$$

Sistemin bir fundamental matrisi

$$\Phi(n) = diag\left(\prod_{r=0}^{n-1}\left(1+\frac{1}{j+1}\right),(0.5)^n,\prod_{r=0}^{n-1}(j+1),\prod_{r=0}^{n-1}\left(\frac{1}{j+2}\right)\right)$$

$$= diag\left((n+1),(0.5)^n,n!,\frac{1}{(n+1)!}\right).$$

Buradan,

$$\Phi_1(n) = diag(0,(0.5)^n,0,\frac{1}{(n+1)!})$$

ve

$$\Phi_2(n) = diag(n+1,0,n!,0).$$

Ayrıca $\Phi_1(n)$ ve $\Phi_2(n)$ in sistemin fundamental matrisi olduğu kanıtlanabilir.

$$\Phi_1(n+1) = D(n)\Phi_1(n) \text{ ve}$$

$$\Phi_2(n+1) = D(n)\Phi_2(n).$$

Son olarak,

$$\Phi_1(n)\Phi^{-1}(m) = diag\left(0,(0.5)^{n-m},0,\frac{1}{(n+1)(n),\ldots,(m+2)}\right).$$

Buradan, $n \geq m \geq 0$ için,

$$\left\|\Phi_1(n)\Phi^{-1}(m)\right\| \leq 1.$$

Benzer olarak, $n \geq m \geq 0$ için,

$$\Phi_2(n)\Phi^{-1}(m) = diag\left(\frac{n+1}{m+1}, 0, \frac{n!}{m!}, 0\right).$$

Buradan,

$$\left\|\Phi_2(n)\Phi^{-1}(m)\right\| \leq 1, \; m \geq n \geq 0.$$

Şimdi asimptotik teoride yararlı olan parametrelerin değişim formülünün yeni bir varyasyonunu verebiliriz.

Teorem 3.151: (Parametrelerin Değişim Formülü)

(3.9.40) sistemi bayağı dikotomiye sahip ve

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left\|B(n)\right\| < \infty \tag{3.9.42}$$

şartını sağlasın. Bu halde, (3.9.40) ın her sınırlı $x(n)$ çözümü için (3.9.39) denkleminin sınırlı bir $y(n)$ çözümü vardır ve bu çözüm,

$$y(n) = x(n) + \sum_{j=n_0}^{n-1} \Phi_1(n)\Phi^{-1}(j+1)B(j)y(j) - \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_2(n)\Phi^{-1}(j+1)B(j)y(j) \tag{3.9.43}$$

ile verilir. Tersi de aynı zamanda doğrudur.

İspat: $x(n)$, (3.9.40) denkleminin sınırlı bir çözümü olsun. Ardışık yaklaşıklar metodu kullanılırsa buna karşılık gelen (3.9.39) denkleminin sınırlı bir $y(n)$ çözümü bulunabilir. $y_1(n) = x(n)$ için $\{y_i(n)\}$ $(i = 1, 2, ...)$ olsun ve

$$y_{i+1}(n) = x(n) + \sum_{j=n_0}^{n-1} \Phi_1(n)\Phi^{-1}(j+1)B(j)y(j) - \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_2(n)\Phi^{-1}(j+1)B(j)y(j). \tag{3.9.44}$$

$y_i(n)$ nin $[n_0, \infty)$ diskrit aralığında sınırlı olduğunu göstermeliyiz. Bunun için tümevarım kullanılacaktır. $\left|y_1(n)\right| = \left|x(n)\right| \leq c_1$ ve $\left|y_i(n)\right| \leq c_i$ olsun. Bu halde Tanım 3.149'dan,

$$\left|y_{i+1}(n)\right| \leq c_1 + Mc_i \sum_{j=n_0}^{\infty} \left|B(j)\right| = c_{i+1}.$$

Burada $M = \max\{M_1, M_2\}$. Bu sebeple, $y_i(n)$ sınırlıdır. $[n_0, \infty)$ aralığında $\{y_i(n)\}$ dizisinin düzgün yakınsadığını görelim. $i = 1, 2, ...$ için Tanım 3.149 kullanılırsa,

$$\left|y_{i+2}(n)-y_{i+1}(n)\right| \le M\sum_{j=n_0}^{\infty}\|B(j)\|\left|y_{i+1}(j)-y_i(j)\right| .$$

Tümevarımdan,

$$\left|y_{i+1}(n)-y_i(n)\right| \le \left[M\sum_{j=n_0}^{\infty}\|B(j)\|\right]^i c_1 . \tag{3.9.45}$$

Eğer n_0 yeterince büyük seçilirse,

$$M\sum_{j=n_0}^{\infty}\|B(j)\| = \eta < 1 . \tag{3.9.46}$$

Böylece,

$$\left|y_{i+1}(n)-y_i(n)\right| \le c_1\eta^i .$$

Sonuç olarak $n \ge n_0$ için,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left\{y_{i+1}(n)-y_i(n)\right\}$$

Weierstrass M-testine göre düzgün yakınsaktır.

$$y(n) = y_1(n)+\sum_{i=1}^{\infty}\left\{y_{i+1}(n)-y_i(n)\right\} = \lim_{i\to\infty} y_i(n)$$

olsun. Bazı L sabiti için $|y(n)| \le L$ olduğundan $i \to \infty$ için (3.9.44) denkleminden (3.9.43) denklemi elde edilir. Teoremin ikinci kısmı ise yukarıdakine benzer olarak yapılır.

Teorem 3.152:

$$(H)\begin{cases}\text{(i) (3.9.40) sistemi adi bir dikotomiye sahip}\\ \text{(ii) } \lim\limits_{n\to\infty}\Phi_1(n)=0,\ n\to\infty\end{cases}$$

olsun. Buna ek olarak (3.9.41) sağlansın. Bu halde, (3.9.40) denkleminin her sınırlı $x(n)$ çözümüne karşılık (3.9.39) denkleminin bir sınırlı $y(n)$ çözümü vardır. Öyle ki

$$y(n) = x(n)+o(1) . \tag{3.9.47}$$

İspat: $x(n)$, (3.9.40) denkleminin sınırlı bir çözümü olsun. Bu halde, (3.9.47) formülünden M nin uygun bir seçimi için (sonradan belirlenecek),

$$y_1(n) = x(n)+\Phi_1(n)\sum_{j=n_0}^{n-1}\Phi^{-1}(j+1)B(j)y(j)+\Psi(n) . \tag{3.9.48}$$

Burada,

$$\Psi(n)=\Phi_1(n)\sum_{j=n_0}^{n-1}\Phi^{-1}(j+1)B(j)y(j)-\sum_{j=n}^{\infty}\Phi_2(n)\Phi^{-1}(j+1)B(j)y(j) \qquad (3.9.49)$$

Teorem 3.151'den, bazı $L>0$ için, $\|y\|\le L$ gerçeği ile beraber (3.9.49) kullanılırsa,

$$|\Psi(n)|\le ML\sum_{j=m}^{\infty}\|B(j)\|.$$

$\varepsilon>0$ için yeterince büyük m vardır öyle ki $\Psi(n)<\frac{\varepsilon}{2}$. $n\to\infty$ için $\Phi_1(n)\to 0$ ve (3.9.48) formülünden yeterince büyük n için, $|y(n)-x(n)|<\varepsilon$. Bu sebeple $y(n)=x(n)+o(1)$ veya $y(n)\sim x(n)$.

$$y(n)=\prod_{r=n_0}^{n-1}\lambda_i(r)z(n),\ 1\le i\le k \qquad (3.9.50)$$

değişimi ile (3.9.39),

$$z(n+1)=(D_i(n)+B_i(n))z(n) \qquad (3.9.51)$$

olur. Burada,

$$D_i(n)=\operatorname{diag}\left(\frac{\lambda_1(n)}{\lambda_i(n)},\ldots,1,\ldots,\frac{\lambda_k(n)}{\lambda_i(n)}\right),$$

$$B_i(n)=\frac{1}{\lambda_i(n)}B(n).$$

(3.9.51) denklemi ile ilişkili perturbe olmayan diyagonal sistemi,

$$x(n+1)=D_i(n)x(n). \qquad (3.9.52)$$

Lemma 3.153: (3.9.52) sistemi için Durum L ve Durum E şartlarından herhangi biri sağlanırsa, (H) varsayımı sağlanır.

Durum L:

$i\ne j$ ve tüm $n\ge n_0$ için, $\lambda_i(n),\lambda_j(n)$ çifti için ya $|\lambda_i(n)|<|\lambda_j(n)|$ veya $|\lambda_i(n)|\ge|\lambda_j(n)|$. $n\ge n_0$

Durum E:

$\gamma_{ij}(n)=\prod_{r=n_0}^{n}\left(|\lambda_i(r)|\right)/\ |\lambda_j(r)|$ olsun. Bu halde $n\to\infty$ için (n_0 dan bağımsız), ya $\gamma_{ij}(n)\to 0$ ya da $\{\gamma_{ij}(n)\}$ dizisinin sıfıra yakınsayacak bir alt dizisi yoktur.

İspat: Basittir.

Örnek 3.154:

$$D(n) = \text{diag}\left(2+\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi, 2-\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi, 2\right).$$

Bu halde,

$$D_1(n) = \text{diag}\left(\mu_1(n), \mu_2(n), \mu_3(n)\right).$$

Burada $\mu_1(n) = 1,\ \mu_2(n) = \dfrac{2-\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi}{2+\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi},\ \mu_3(n) = \dfrac{2}{2+\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi}.$

Açıkça $\mu_2(n)$ ve $\mu_3(n)$, L şartını sağlamıyor fakat E şartını sağlar. Çünkü

$$\gamma_2(n) = \prod_{j=0}^{n} \mu_2(j) = \begin{cases} 1/3, & n \text{ çift ise} \\ 1, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

$$\gamma_3(n) = \prod_{j=0}^{n} \mu_3(j) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \ldots \times \begin{cases} 1/3, & n \text{ çift ise} \\ 1, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

Buradan, $n \to \infty$ için $\gamma_3(n) \to \infty$ olduğundan sıfıra yakınsayacak bir alt dizisi yoktur.

Teorem 3.155: $1 \le i \le k$ için, L ve E koşullarından herhangi biri sağlansın.

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_i(n)|} \|B(n)\| < \infty \tag{3.9.53}$$

olsun. Bu halde, (3.9.39) sisteminin fundamental kümesi $y_i(n)\ (i = 1,2,\ldots,k)$ tane çözüm içerir. Öyle ki,

$$y_i(n) = (e_i + o(1)) \prod_{n=n_0}^{n-1} \lambda_i(r). \tag{3.9.54}$$

Burada e_i, $\mathbb{R}^k$ da standart birim vektördür.

İspat: L veya E koşulundan ve Lemma 3.153'ten, (3.9.52) denklemi (H) varsayımını sağlar. Üstelik (3.9.49) varsayımından $B_i(n)$, (3.9.41) şartını sağlar. Böylece (3.9.51) ve (3.9.52) denklemlerine Teorem 3.152'yi uygulayabiliriz. $D_i(n)$ nin i inci köşegeninden $x(n) = e_i$ nin, (3.9.52) sınırlı bir çözümü olduğu görülür. Teorem 3.152'den, (3.9.51) denklemine, $z(n) = e_i + o(1)$ olacak şekilde bir $z(n)$ çözümü karşılık gelir. Bu çözüm (3.9.50) de yerine yazılırsa, (3.9.54) elde edilir.

Örnek 3.156:

$$y(n+1) = A(n)y(n)$$

sistemini ele alalım. Burada, $A(n) = \begin{pmatrix} \dfrac{n^2+2}{2n^2} & 0 & \dfrac{1}{n^3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{2^n} & 0 & n \end{pmatrix}$.

Teorem 3.155'i uygulayabilmek için, $A(n)$ yi, diyagonal matris olacak şekilde bir $D(n)$, (3.9.53) şartını sağlayacak şekilde de bir $B(n)$ seçerek, $D(n)+B(n)$ şeklinde yazmamız gerekir. Bu halde,

$$D(n) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}, \; B(n) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n^2} & 0 & \dfrac{1}{n^3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2^n} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olsun. Buradan, $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$, $\lambda_2 = 1$ ve $\lambda_3 = n$. Dolayısıyla $n_0 = 2$ için, sistemimiz Teorem 3.155'in hipotezlerini sağlar. Sonuç olarak,

$$y_1(n) \sim \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; y_2(n) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; y_3(n) \sim \left(\prod_{j=1}^{n-1} j\right)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (n-1)! \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde üç çözüm vardır.

Not: $n \to \infty$ ve bazı $\alpha > 1$ için, $B(n) = O(n^{-\alpha})$ olduğunda, (3.9.53) koşulu sağlanır. Diğer taraftan, $B(n) = 0(n^{-1})$ şartı, (3.9.54) formülünün sağlanması için yeterli değildir. Örneğin, $k = 1$, $D(n) = 1$ ve $B(n) = \dfrac{1}{n}$ alalım. Buradan, (3.9.39) denklemi, bazı c sabitleri için genel çözümü $y(n) = cn$ olan,

$$y(n+1) = \left(\frac{n+1}{n}\right) y(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) y(n)$$

denklemi şeklinde yazılır. Dolayısıyla hiçbir çözüm (3.9.54) formülünü sağlamaz.

3.9.5 Yüksek mertebeli fark denklemleri

Bu kısımda,

$$y(n+k)+(a_1+p_1(n))y(n+k-1)+...+(a_k+p_k(n))y(n)=0 \qquad (3.9.55)$$

formunda k inci mertebeden skaler denklemler ele alınacaktır. Burada $a_i \in \mathbb{R}$ ve $1 \le i \le k$ için $p_i(n)$ reel dizilerdir. Kısım 3.1'deki gibi, (3.9.55) denklemi, asimptotiksel olarak sabit, k-boyutlu birinci mertebeden bir fark denklemi formunda yazılabilir. Sonuç olarak, (3.9.39) denkleminin özel bir durumu olan asimptotik olarak sabit,

$$y(n+1)=\left[A+B(n)\right]y(n) \qquad (3.9.56)$$

sistemi çalışılacaktır. Burada A, $k \times k$ tipinde ille de diyagonal olmak zorunda olmayan sabit bir matristir. Bu sistem, aşikar olarak (3.9.55) denklemi ile verilen sistemden daha geneldir.

Teorem 3.157: A matrisinin $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ eigen değerlerine karşılık gelen $\xi_1,\ \xi_2,...,\ \xi_k$ lineer bağımsız eigen vektörleri olsun. Eğer $B(n)$ için (3.9.41) durumu sağlanırsa, (3.9.56) sistemi $1 \le i \le k$ için,

$$y_i(n)=\left[\xi_i+o(1)\right]\lambda_i^n \qquad (3.9.57)$$

olacak şekilde $y_i(n)$ çözümlerine sahiptir.

İspat: Teorem 3.155'i uygulayabilmek için, A matrisinin diyagonalize edilmesi (köşegenelleştirilmesi) gerekir. (3.9.56) denkleminde,

$$y=Tz \qquad (3.9.58)$$

ile

$$T=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_k)\,. \qquad (3.9.59)$$

T nin i inci kolonu ξ_i dir. Buradan,

$$Tz(n+1)=\left[A+B(n)\right]Tz(n)$$

veya

$$z(n+1)=\left[D+\tilde{B}(n)\right]z(n)\,. \qquad (3.9.60)$$

Burada $D=T^{-1}AT=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k)$ ve $\tilde{B}(n)=T^{-1}B(n)T$. $\tilde{B}(n)$ nin (3.9.48) durumunu sağladığını görmek kolaydır.

Örnek 3.158:

$$y(n+1) = \left[A + B(n)\right] y(n) \qquad (*)$$

denkleminin çözümlerinin bir fundamental kümesinin asimptotik tahminini bulalım. Burada,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B(n) = \begin{pmatrix} 1/n^2+1 & 0 & (.5)^n \\ 0 & (.2)^n & 0 \\ e^{-n} & 0 & \log n/n^2 \end{pmatrix}$$

Çözüm: A nın eigen değerleri $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 1$ ve $\lambda_3 = 1$ ve karşılık gelen eigen vektörler $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Üstelik $B(n)$, (3.9.41) şartını sağlar.

Böylece Teorem 3.152'den $(*)$ denklemi,

$$y_1(n) = (1+o(1))(5^n)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(5^n)$$

$$y_2(n) = (1+o(1))\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$y_3(n) = (1+o(1))\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

çözümlerine sahip olur.

Sonuç 3.159:

$$p(A) = \lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k$$

polinomunun $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ şeklinde farklı köklere sahip olduğunu ve $1 \le i \le k$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| p_i(n) \right| < \infty$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda, (3.9.55) denklemi

$$y_i(n) = (1+o(1))\lambda_i^n \qquad (3.9.61)$$

şeklinde k tane $y_1(n),\ y_2(n),...,\ y_k(n)$ çözümüne sahiptir.

İspat: Öncelikle (3.9.55) denklemini k boyutlu,

$$z(n+1) = \left[A + B(n)\right] z(n) \qquad (3.9.62)$$

sistemi formunda yazalım. Burada,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_k & -a_{k-1} & \dots & -a_1 \end{pmatrix},$$

$$B(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -p_k(n) & -p_{k-1}(n) & \dots & -p_1(n) \end{pmatrix},$$

$$z(n) = (y(n), y(n+1),..., y(n+k-1))^T .$$

(3.9.61) polinomunun, A matrisinin karakteristik polinomu olduğuna dikkat edelim. Ayrıca, her λ_i eigen değeri için, $\xi_i = (1, \lambda_i, \lambda_i^2, ..., \lambda_i^{k-1})^T$ eigen vektörleri karşılık gelir. Ek olarak $B(n)$ matrisi, (3.9.41) şartını sağlar. Böylece, $1 \le i \le k$ için,

$$z_i(n) = \begin{pmatrix} y_i(n) \\ y_i(n+1) \\ y_i(n+2) \\ \vdots \\ y_i(n+k-1) \end{pmatrix} = (1+o(1))\lambda_i^n \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{k-1} \end{pmatrix}$$

olacak şekilde (3.9.62) denkleminin $z_1(n),\ z_2(n),...,\ z_k(n)$ şeklinde k tane çözümünün olduğu sonucuna varmak için Sonuç 3.159 uygulanabilir. Böylece, $y_i(n) = (1+o(1))\lambda_i^n$.

Örnek 3.160:

$$y(n+3) - (2+e^{-n-2})y(n+2) - \left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right) y(n+1) + 2y(n) = 0$$

fark denkleminin fundamental çözümlerinin asimptotik tahminini bulalım.

Çözüm: Karakteristik denklem $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ ve karakteristik kökler $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1$ ve $\lambda_3 = -1$ şeklindedir.

$p_1(n) = -e^{-n-2}$, $p_2(n) = -\dfrac{1}{n^2+1}$ ve $p_3(n) = 0$ denklemlerinin tümü (3.9.62) şartını sağlar. Böylece Sonuç 3.159'dan,

$$y_1(n) = (1+o(1))2^n,\ y_2(n) = 1+o(1),\ y_3(n) = (1+o(1))(-1)^n$$

çözümleri bulunur.

Sonuç 3.159 Evgrafov'a dayanır. Böylece, (3.9.61) polinomunun her karakteristik değeri için, bu durum katsayıların yakınsaklık oranlarının çok yavaş olmaması şartlıyla en az bir çözüm (3.9.61) formülündeki gibidir.

Teorem 3.161: (3.9.61) polinom denkleminin 1'in katlılığı k ve $1 \le i \le k$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left| p_i(n) \right| < \infty \tag{3.9.63}$$

olduğunu farz edelim. Bu durumda, (3.9.55) denklemi, $n \to \infty$ için,

$$y_i(n) = n^{i-1}(1+o(1)) \tag{3.9.64}$$

olacak şekilde k tane $y_1(n), y_2(n), ..., y_k(n)$ çözümlerine sahiptir. Coffman'ın asıl sonucu Teorem 3.161'den daha kuvvetlidir. Aslında Coffman,

$$\Delta^m y_i(n) = \begin{cases} 1 \le m \le i \text{ için} & \begin{pmatrix} n \\ i-m \end{pmatrix} + o\begin{pmatrix} i-m \\ n \end{pmatrix} \\ i \le m \le k-1 \text{ için} & o\begin{pmatrix} i-m \\ n \end{pmatrix} \end{cases}$$

denklemini ispatladı.

(3.9.61) denklem polinomu 1'e eşit olmayan k katlı bir köke sahipse, Coffman Teoremi'nin uygulanıp uygulanamayacağı merak edilebilir. Basit bir dönüşümle bu yapılabilir. Bu halde (3.9.61) polinomu,

$$(\lambda - \mu)^k = 0 \tag{3.9.65}$$

şeklinde yazılabilir. (3.9.55) denkleminde $y(n) = \mu^n x(n)$ denilirse,

$$\mu^{n+k} x(n+k) + \mu^{n+k-1}(a_1 + p_1(n))x(n+k-1) + ... + \mu^n (a_k + p_k(n))x(n) = 0$$

veya

$$x(n+k) - \frac{1}{\mu}(a_1 + p_1(n))x(n+k-1) + ... + \frac{1}{\mu^k}(a_k + p_k(n))x(n) = 0\,. \tag{3.9.66}$$

(3.9.66) karakteristik denklemi, bir k katlı $\lambda = 1$ köküne sahip,

$$\lambda^k + \frac{a_1}{\mu_1}\lambda^{k-1} + \frac{a_2}{\mu_2}\lambda^{k-2} + ... + \frac{a_k}{\mu_k} = 0$$

denklemi ile verilir. Üstelik $1 \le i \le k$ için, eğer $p_i(n)$, (3.9.55) şartını sağlarsa, $(1/\mu^i)p_i(n)$. Dolayısıyla, $n \to \infty$ için, $x_i(n) = n^{i-1}(1+o(1))$ olacak şekilde k tane $x_1(n),\ x_2(n),...,x_k(n)$ çözümlerini meydana getirmek için teorem, (3.9.66) denklemine uygulanır. Sonuç olarak,

$$y_i(n) = n^{i-1}(1+o(1))\mu^n$$

olacak şekilde (3.9.55) denkleminin $y_1(n),\ y_2(n),...,\ y_k(n)$ çözümleri vardır.

Sonuç 3.162: (3.9.61) polinomunun k katlı bir μ köküne sahip olduğunu ve (3.9.63) şartının sağlandığını farz edelim. Bu durumda, (3.9.55) denklemi,

$$y_i(n) = n^{i-1}(1+o(1))\mu^n \tag{3.9.67}$$

olacak şekilde k tane $y_1(n),\ y_2(n),...,y_k(n)$ köklerine sahiptir.

Örnek 3.163:

$$y(n+3) - (6+e^{-n-2})y(n+2) + \left(12 - \frac{1}{(n+1)^4}\right)y(n+1) - 8y(n) = 0$$

fark denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışını inceleyelim.

Çözüm: Karakteristik denklem $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$ ve karakteristik kökler $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ şeklindedir. Ayrıca $p_1(n) = e^{-n-2}$, $p_2(n) = -1/((n+1)^4)$ ve $p_3(n) = 0$. Hepsi (3.9.63) şartını sağlar. Buradan, 3.162 sonucundan, $y_1(n) = (1+o(1))2^n$, $y_2(n) = n(1+o(1))2^n$ ve $y_3(n) = n^2(1+o(1))2^n$ şeklinde üç çözüm vardır.

Örnek 3.164:

$$x(n+2) + p_1(n)x(n+1) + p_2(n)x(n) = 0 \tag{3.9.68}$$

fark denklemini ele alalım. Burada $n \ge n_0 \ge 0$ için $p_1(n) \ne 0$ ve

$$\lim_{n\to\infty} 4p_2(n)/p_1(n)p_1(n-1) = p. \tag{3.9.69}$$

$$\alpha(n) = (4p_2(n)/p_1(n)p_1(n-1)) - p \tag{3.9.70}$$

ile tanımlansın. $p \ne 0,\ p \le 1$ ve

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} |a(j)| < \infty \tag{3.9.71}$$

olduğunu varsayalım. (3.9.68) denkleminin,

$$x_{\pm}(n) \sim \left(-\frac{1}{2}\right)^n \prod_{j=n_0}^{n-1} (p_1(j)(1 \pm v \pm \alpha(j))/2v) \tag{3.9.72}$$

şeklinde iki çözümü olduğunu gösterelim. Burada $v = \sqrt{1-p}$.

Çözüm:

$$x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(\prod_{j=n_0}^{n-1} (p_1(j)\right) y(n) \tag{3.9.73}$$

olsun. Bu durumda (3.9.68) denklemi,

$$y(n+2) - 2y(n+1) + (p + \alpha(n))y(n) = 0 \tag{3.9.74}$$

denklemine dönüştürülür.

$z(n) = (z_1(n), z_2(n))^T = (y(n), y(n+1))^T$ olsun. Buradan (3.9.74) denklemi,

$$\begin{pmatrix} z_1(n+1) \\ z_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 - 1 - \alpha(n) & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \end{pmatrix} \tag{3.9.75}$$

formunda bir sisteme çevrilebilir. Aynı şekilde,

$$\begin{pmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -(v-1) & v+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \end{pmatrix}.$$

Buradan (3.9.75) denklemi,

$$\begin{pmatrix} u_1(n+1) \\ u_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - v + \alpha(n))/2v & \alpha(n)/2v \\ -\alpha(n)/2v & (1 + v - \alpha(n))/2v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \end{pmatrix} \tag{3.9.76}$$

şekline dönüşür. Eğer $u(n) = (u_1(n), u_2(n))^T$ dersek (3.9.76) denklemi,

$$u(n+1) = (D(n) + B(n))u(n) \tag{3.9.77}$$

formunda yazılabilir. Burada,

$$D(n) = \begin{pmatrix} (1 - v + \alpha(n))/2v & 0 \\ 0 & (1 + v - \alpha(n))/2v \end{pmatrix},$$

$$B(n) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(n)/2v \\ -\alpha(n)/2v & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorem 3.155’ten (3.9.77) denkleminin

$$u_+(n) \sim \left[\prod_{j=n_0}^{n-1} (1 - v + \alpha(j))/2v\right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_-(n) \sim \left[\prod_{j=n_0}^{n-1}(1+v-\alpha(j))/2v\right]\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

şeklinde iki çözümü vardır. Bu iki çözüm (3.9.75) denkleminin iki çözümünü üretir.

$$z_+(n) = \begin{pmatrix} y_+(n) \\ y_+(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -(v-1) & v+1 \end{pmatrix}\left(\prod_{j=n_0}^{n-1}(1-v+\alpha(j))/2v\right).$$

Buradan,

$$y_+(n) \sim \prod_{j=n_0}^{n-1}(1-v+\alpha(j))/2v\,.$$

(3.9.73) denklemi kullanılarak,

$$x_+(n) \sim \left(-\frac{1}{2}\right)^n \prod_{j=n_0}^{n-1} p_1(j)(1-v+\alpha(j))/2v$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$x_-(n) \sim \left(-\frac{1}{2}\right)^n \prod_{j=n_0}^{n-1} p_1(j)(1+v-\alpha(j))/2v \tag{3.9.78}$$

olduğu gösterilebilir.

3.9.6 Lineer olmayan fark denklemleri

Bu kısımda nanlineer olarak perturbe edilmiş,

$$y(n+1) = A(n)y(n) + f(n, y(n)) \tag{3.9.79}$$

sistemi ile

$$x(n+1) = A(n)x(n) \tag{3.9.80}$$

perturbe edilmemiş sistemini ele alalım. Burada $A(n)$, $\mathbb{Z}^+$ de $k \times k$ tipinde terslenebilir matris fonksiyon, $f(n,y): \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, y ye göre sürekli bir fonksiyondur. $\Phi(n)$, (3.9.80) sisteminin fundamental matrisi olsun. (3.9.79) sistemine parametrelerin değişim formülünü genişleterek uyarlayalım. Burada $A(n)$ diyagonal matris varsayılmadığından, Tanım 3.149'un yerine dikotominin daha genel bir tanımını verelim.

Tanım 3.165: Eğer,

$$\begin{aligned} &\left|\Phi(n)P\Phi^{-1}(m)\right| \le M,\ n_0 \le m \le n \\ &\left|\Phi(n)(I-P)\Phi^{-1}(m)\right| \le M,\ n_0 \le n \le m \end{aligned} \tag{3.9.81}$$

olacak şekilde bir P projeksiyon matrisi ve pozitif bir M sabiti varsa (3.9.80) sistemine sıradan (bayağı) dikotomiye sahiptir denir. Eğer $A(n) = \text{diag}(\lambda_1(n),...,\lambda_k(n))$ ve $\Phi_1(n) = \Phi(n)P$ ve $\Phi_2(n) = \Phi(n)(I-P)$ denirse bu tanım, Tanım 3.149'a indirgenir.

Teorem 3.166: (3.9.80) sistemi bayağı dikotomiye sahip olsun. Ayrıca,

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} |f(j,0)| < \infty \tag{3.9.82}$$

ve

$$|f(n,x) - f(n,y)| \le \gamma(n)|x-y|. \tag{3.9.83}$$

Burada $\gamma(n) \in l^1([n_0,\infty))$, yani $\sum_{j=n_0}^{\infty} \gamma(j) < \infty$, bu durumda (3.9.80) denkleminin her $x(n)$ sınırlı çözümü için , (3.9.79) denkleminin sınırlı bir $y(n)$ çözümü karşılık gelir ve tersi de doğrudur. Ayrıca

$$\begin{aligned} y(n) = x(n) &+ \sum_{j=n_0}^{n-1} \Phi(n)P\Phi^{-1}(j+1)f(j,y(j)) \\ &- \sum_{j=n}^{\infty} \Phi(n)(I-P)\Phi^{-1}(j+1)f(j,y(j)). \end{aligned} \tag{3.9.84}$$

İspat: Bu teoremin ispatı birkaç değişiklikle Teorem 3.151'in ispatına benzerdir. $x(n)$, (3.9.80) denkleminin sınırlı bir çözümü olsun. $\{y_i(n)\}$, $(i = 1,2,...)$, dizisini tanımlayalım. $y_1(n) = x(n)$ ve

$$\begin{aligned} y_{i+1}(n) = x(n) &+ \sum_{j=n_0}^{n-1} \Phi(n)P\Phi^{-1}(j+1)f(j,y(j)) \\ &- \sum_{j=n}^{\infty} \Phi(n)(I-P)\Phi^{-1}(j+1)f(j,y(j)) \end{aligned} \tag{3.9.85}$$

olsun. Her i için $y_i(n)$ in $[n_0,\infty)$ üzerinde sınırlı olduğunu göstermek için matematiksel tümevarımı kullanacağız. Öncelikle $|y_1(n)| \le c_1$ olduğuna dikkat edelim. $|y_i(n)| \le c_i$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (3.9.82), (3.9.83) ve (3.9.84) denklemlerinden

$$|y_{i+1}(n)| \leq c_1 + M\sum_{j=n_0}^{\infty}\left[\gamma(j)|y_i(j)| + |f(j,0)|\right]$$

$$\leq c_1 + M\left[\sum_{j=n_0}^{\infty} c_i\gamma(j) + \tilde{M}\right] = c_{i+1}\,.$$

Burada, $\sum_{j=n_0}^{\infty}|f(j,0)| = \tilde{M}$. Dolayısıyla her i için $y_i(n)$ sınırlıdır. Teorem 3.151'in ispatında olduğu gibi, $\{y_i(n)\}$ dizisinin $[n_0,\infty)$ da (3.9.79) denkleminin bir $y(n)$ çözümüne düzgün olarak yakınsadığı gösterilebilir. Tersine $y(n)$, (3.9.79) denkleminin sınırlı bir çözümü olsun. Bu durumda

$$\tilde{y}(n) = \sum_{j=n_0}^{n-1}\Phi(n)P\Phi^{-1}(j+1)\,f(j,\tilde{y}(j)) - \sum_{j=n}^{\infty}\Phi(n)(I-P)\Phi^{-1}(j+1)\,f(j,\tilde{y}(j))$$

sonucunun (3.9.79) denkleminin bir diğer sınırlı çözümü olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Buradan $x(n) = y(n) - \tilde{y}(n)$ in (3.9.80) denkleminin sınırlı bir çözümüdür. Önceki sonuç (3.9.79) denklem sisteminin çözümlerinin asimptotik davranışı hakkında yeterli bilgiyi sağlamaz. Bunun gibi sonuçlar elde etmek için (3.9.80) denkleminde bir varsayıma daha ihtiyacımız vardır.

Teorem 3.167: Teorem 3.166'nın tüm varsayımları sağlansın. Eğer $n \to \infty$ iken $\Phi(n)P \to 0$ ise, (3.9.80) denkleminin her $x(n)$ sınırlı çözümüne,

$$y(n) = (x(n) + o(1)) \tag{3.9.86}$$

veya

$$y(n) \sim x(n)$$

olacak şekilde (3.9.79) denkleminin sınırlı bir $y(n)$ çözümü karşılık gelir.

İspat: İspatı Teorem 3.152'nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Örnek 3.168:

$$\begin{pmatrix} y_1(n+1) \\ y_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin y_1(n)/n^2 \\ \left[1-\cos y_2(n)\right]/n^2 \end{pmatrix} \tag{3.9.87}$$

denklemini ele alalım.

Burada, $A(n) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $f(n,y) = \begin{pmatrix} \sin y_1/n^2 \\ (1-\cos y_2)/n^2 \end{pmatrix}$.

Öklid Normu kullanılarak $\sum_{j=1}^{\infty} \left| f(j,0) \right| = 0$ elde edilir. Ayrıca, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ için

$$\left| f(n,x) - f(n,y) \right| = \frac{1}{n^2} \left| \begin{matrix} \sin x_1 - \sin y_1 \\ \cos x_2 - \cos y_2 \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{1}{n^2} \sqrt{(\sin x_1 - \sin y_1)^2 + (\cos x_2 - \cos y_2)^2} \qquad (3.9.88)$$

Ortalama Değer Teoremi'nden bazı $c \in (x_1, y_1)$ için,

$$\frac{\left| \sin x_1 - \sin y_1 \right|}{\left| x_1 - y_1 \right|} \leq 1 \text{ ve}$$

$$\frac{\left| \cos x_2 - \cos y_2 \right|}{\left| x_2 - y_2 \right|} \leq 1 .$$

(3.9.88) denkleminde yerine yazılarak, $\left| f(n,x) - f(n,y) \right| = \frac{2}{n^2} \left| x - y \right|$ elde edilir.

Birleşik homojen $x(n+1) = A(n)x(n)$ denklemi bir $\phi(n) = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (1/2)^n \end{pmatrix}$ fundamental matrisine ve sınırlı $x_1(n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1/2)^n$ çözümü ile sınırsız $x_2(n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 3^n$ çözümüne sahiptir. Eğer projeksiyon matrisi,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dersek $n \to \infty$ için,

$$\phi(n)P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n \end{pmatrix} \to 0 .$$

Böylece Teorem 3.167'nin tüm şartları sağlanmış olur. Sınırlı $x_1(n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1/2)^n$ çözümüne $y(n) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1/2)^n$ olacak şekilde (3.9.87) denkleminin bir $y(n)$ çözümü karşılık gelir. Şimdi Teorem 3.167'yi,

$$y(n+k) + (a_1 + p_1(n))y(n+k-1) + ... + (a_k + p_k(n))y(n) = f(n, y(n)) \qquad (3.9.89)$$

şeklinde Poincaré tipinin k inci mertebeden nanlineer denklemine uyarlayacağız.

Sonuç 3.169: $\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + ... + a_k = 0$ karakteristik denkleminin, $1 \le i \le k$ için farklı λ_i köklerine sahip olduğunu ve $\sum_{n=1}^{\infty}\left|p_j(n)\right| < \infty$ olduğunu varsayalım. (3.9.82) şartı ile (3.9.83) sağlansın. $\left|\lambda_i\right| \le 1$ olacak şekilde her λ_i için (3.9.89) denkleminin $y_j(n) \sim \lambda_j^n$ şeklinde bir y_j çözümü vardır.

İspat: Sonuç 3.159'dan (3.9.89) denkleminin homojen kısmı olan

$$x(n+k) + (a_1 + p_1(n))x(n+k-1) + ... + (a_k + p_k(n))x(n) = 0$$

$x_j(n) \sim \lambda_j^n$ olacak şekilde $x_1(n),\ x_2(n), ...,\ x_k(n)$ çözümlerine sahiptir. Eğer $\left|\lambda_i\right| \le 1$ ise, $x_j(n)$ sınırlıdır. Bu sınırlı $x_j(n)$ çözümü ile ilgili (3.9.89) denkleminin bir $y_j(n)$ çözümü vardır ve $y_j(n) \sim y_j(n)$. Böylece $y_j(n) \sim \lambda_j^n$.

Örnek 3.170:

$$y(n+2) - \frac{3}{2}y(n+1) + \frac{1}{2}y(n) = e^{-n}/(1 + y^2(n)) \qquad (3.9.90)$$

denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışını inceleyelim.

Çözüm: Karakteristik denklemi,

$\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0$ ve karakteristik kökleri $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{1}{2}$ şeklindedir.

Buradan $\sum_{n=0}^{\infty} f(n,0) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} < \infty$. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\left|f(n,x) - f(n,y)\right| &= e^{-n}\left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}\right| \\ &= e^{-n}\frac{\left|x+y\right|}{(1+x^2+y^2+x^2y^2)}\cdot\left|x-y\right| \\ &\le \left|x-y\right|.\end{aligned}$$

Böylece Sonuç 3.169'un tüm varsayımları sağlanmış olur. Sonuç olarak (3.9.90) denklemi $y_1(n) \sim 1$ ve $y_2(n) \sim (1/2)^n$ şeklinde iki çözüme sahiptir.

3.10 Salınım Teorisi

Daha önceki bölümlerde fark denklemlerinin çözümlerinin asimptotik davranışları ele alındı. (Skaler ve skaler olmayan) Bu bölümde stabilite ve asimptotiklik sorularının ötesine gidilecek. Bir $x(n)$ çözümünün asimptotik davranışına bakmaksızın, bir x^* denge noktası etrafında salınım yapıp yapmadığı konusu üzerinde durulacak. Genelliği bozmaksızın $x^* = 0$ varsaydığımızdan, çözümlerin sıfır etrafında salınım yapıp yapmadığı veya çözümlerin sonuçta ya pozitif ya da negatif olduğu sorusu ele alınacaktır.

3.10.1 Üç terimli fark denklemleri

Bu bölümde $(k+1)$ inci mertebeden

$$x(n+1) - x(n) + p(n)x(n-k) = 0,\ n \in \mathbb{Z}^+, \qquad (3.10.1)$$

üç terimli fark denklemini ele alacığız. Burada k pozitif tamsayı ve $p(n)$, $n \in \mathbb{Z}^+$ için tanımlanan bir dizidir. Eğer her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $x(n)x(n+1) \le 0$ olacak şekilde $n \ge N$ varsa, trivial olmayan bir $x(n)$ çözümüne sıfır etrafında salınımlıdır denir. Aksi taktirde salınımlı değildir denir. Diğer bir deyişle bir $x(n)$ çözümü ne pozitif ne de negatifse salınımlıdır. Eğer $x(n) - x^*$ sıfırın etrafında salınımlı ise, $x(n)$ çözümü bir x^* denge noktası etrafında salınımlıdır. Özel bir durum olarak $k = 1$ ve $p(n) = p$ nin sabit bir reel sayı olması durumu daha önce 2.5 inci kısımda incelenmişti. Bu durumda (3.10.1) denklemi

$$x(n+2) - x(n+1) + p(n)x(n) = 0 \qquad (3.10.2)$$

formunda yazılabilir. (3.10.2) denkleminin karakteristik kökleri,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4p}\ .$$

Kısım 2.5'ten hatırlayacak olursak (3.10.2) denkleminin tüm çözümlerinin salınım yapması için gerek ve yeter şart λ_1 ve λ_2 nin pozitif reel sayılar olmamasıdır. Böylece (3.10.2) denkleminin her çözümünün salımlı olması için gerek ve yeter şart $p > \frac{1}{4}$. Tekrar denklem (3.10.1) e geri dönelim. Bu denklem,

$$x'(t) + p(t)x(t-k) = 0 \qquad (3.10.3)$$

gecikme diferansiyel denkleminin ayrık analoğudur.

k nın sıfır olması durumu hariç, (3.10.3) denkleminin salınımlı davranışı ve ayrık analoğu (3.10.1), oldukça birbirine benzerdir. Yani,

$$x'(t) + p(t)x(t) = 0$$

denklemi asla salınım yapmayan

$$x(t) = x(t_0)\mathrm{Exp}\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right)$$

çözümüne sahiptir. Buna rağmen,

$$x(n+1) = (1 - p(n))x(n)$$

ayrık analoğu tüm $j \geq n_0$ için $1 - p(j) < 0$ ise salınım yapan

$$x(n) = \left[\prod_{j=n_0}^{n-1} (1 - p(j))\right] x(n_0)$$

çözümüne sahiptir.

(3.10.1) denkleminin salınımlı davranışını çalışmak için öncelikle aşağıda verilen fark eşitsizliklerinin çözümlerini incelemeliyiz.

$$x(n+1) - x(n) + p(n)x(n-k) \leq 0\,, \tag{3.10.4}$$

$$x(n+1) - x(n) + p(n)x(n-k) \geq 0\,. \tag{3.10.5}$$

Devamında bir $x(n)$ dizisinin $\lim_{n\to\infty} \sup a(n)$ ve $\lim_{n\to\infty} \inf a(n)$ şeklinde ifade edilen üst ve alt limitlerini kullanacağız. $\beta(n)$, $\{a(n),\ a(n+1),\ a(n+2),...\}$ kümesinin en küçük üst sınırı olsun. Buradan her n için ya $\beta(n) = \pm\infty$ veya $\{\beta(n)\}$, reel sayıların monoton azalan bir dizisidir. Böylece $\lim_{n\to\infty} \beta(n)$ vardır. Benzer şekilde $\alpha(n)$, $\{a(n),\ a(n+1),\ a(n+2),...\}$ kümesinin en büyük alt sınırı olsun.

Tanım 3.171: $\{a(n)\}$ reel sayıların bir dizisi olsun. Buradan,

(i) $\lim_{n\to\infty} \sup a(n) = \lim_{n\to\infty} \beta(n)$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \inf a(n) = \lim_{n\to\infty} \alpha(n)$.

$\lim_{n\to\infty} a(n)$ limitinin olması için gerek ve yeter şart

$\lim_{n\to\infty} \sup a(n) = \lim_{n\to\infty} \inf a(n) = \lim_{n\to\infty} a(n)$ olmasıdır.

Örnek 3.172: Aşağıdaki dizilerin üst ve alt limitlerini bulalım.

$S_1:\ 0,1,0,1,....$

$S_2:\ 1,-2,3,-4,...,(-1)^{n+1}n,....$

$$S_3 : \ 3/2, -1/2, 4/3, -1/3, 5/4, -1/4, 6/5, -1/5, \ldots .$$

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty} \sup S_1 = 1, \ \lim_{n\to\infty} \inf S_1 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup S_2 = \infty, \ \lim_{n\to\infty} \inf S_2 = -\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup S_3 = 1, \ \lim_{n\to\infty} \inf S_3 = 0.$$

Teorem 3.173:

$$\lim_{n\to\infty} \inf \ p(n) = p > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{3.10.6}$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdaki durumlar sağlanır.

(i) (3.10.4) eşitsizliği hiç pozitif çözüme sahip değildir.

(ii) (3.10.5) eşitsizliği hiç negatif çözüme sahip değildir

İspat:

(i) İspat için aksini kabul edelim. (3.10.4) eşitsizliğinin pozitif bir $x(n)$ çözümü vardır. Böylece tüm $n \geq N_1$ için $x(n) > 0$ olacak şekilde pozitif bir N_1 tamsayısı vardır. (3.10.4) eşitsizliği $x(n)$ ile bölünerek $n \geq N_1$ için,

$$\frac{x(n+1)}{x(n)} \leq 1 - p(n)\frac{x(n-k)}{x(n)}. \tag{3.10.7}$$

$z(n) = \dfrac{x(n+1)}{x(n)}$ denirse,

$$\frac{x(n-k)}{x(n)} = \frac{x(n-k)}{x(n-k+1)} \frac{x(n-k+1)}{x(n-k+2)} \cdots \frac{x(n-1)}{x(n)}$$

$$= z(n-k)z(n-k+1)\ldots z(n-1).$$

(3.10.7) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{z(n)} \leq 1 - p(n)z(n-k)z(n-k+1)\ldots z(n-1), \ n \geq N_1 + k. \tag{3.10.8}$$

(3.10.6) dan tüm $n \geq N_2$ için $p(n) > 0$ olacak şekilde bir N_2 pozitif tamsayısı vardır. $N = \max\{N_2, N_1 + k\}$. Buradan $n \geq N$ için $x(n+1) - x(n) \leq -p(n)x(n-k) \leq 0$. Bu yüzden $x(n)$ artmayandır ve dolayısıyla $z(n) \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} \inf z(n) = q$. Buradan (3.10.8) eşitsizliğinden,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{z(n)}=\frac{1}{\liminf\limits_{n\to\infty} z(n)}=\frac{1}{q}$$

$$\leq 1-\liminf_{n\to\infty}\left[p(n)z(n-k)z(n-k-1),...,z(n-1)\right]$$

veya

$$1/q \leq 1-pq^{k}.$$

Buradan,

$$p \leq \frac{q-1}{q^{k+1}}. \tag{3.10.9}$$

$h(q)=(q-1)/q^{k+1}$ olsun. $h(q)$, q da maksimuma ulaşır. Bu nedenle, $\max_{q\geq 1} h(q)=(k^{k})/(k+1)^{k+1}$. Dolayısıyla, (3.10.9) eşitsizliğinden $p \leq (k^{k})/(k+1)^{k+1}$. Bu da bir çelişkidir. Bu da teoremin (i) kısmını ispatlar. (ii) nin ispatı benzerdir.

Sonuç 3.174: Eğer (3.10.6) sağlanırsa, (3.10.1) denkleminin her çözümü salınımlı olur.

İspat: Tersini düşünelim ve $x(n)$, (3.10.1) denkleminin pozitif çözümü olsun. Buradan (3.10.4) eşitsizliği Teorem 3.173 ile çelişen pozitif bir çözüme sahiptir. Diğer taraftan, eğer (3.10.1) denklemi negatif bir çözüme sahipse, (3.10.5) eşitsizliği de Teorem 3.173'e aykırılık teşkil eder. Bu sonucun, $p(n)=\dfrac{k^{k}}{(k+1)^{k+1}}$ örneği ile daha keskin ve güçlü olduğu görülebilir.

Örnek 3.175:

$$x(n+1)-x(n)+(k^{k}/(k+1)^{k+1})x(n-k)=0$$

denklemini ele alalım. Bu durumda $x(n)=\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^{n-1}$, $n>1$ denklemin salınım yapmayan bir çözümüdür. Şimdi Sonuç 3.174'ün kısmen tersini verelim.

Teorem 3.176: $p(n)\geq 0$ ve

$$\sup p(n) < \frac{k^{k}}{(k+1)^{k+1}} \tag{3.10.10}$$

olsun. (3.10.1) denkleminin salınımlı bir çözümü yoktur.

İspat: Teorem 3.173'ün ispatında olduğu gibi (3.10.1) denkleminde $z(n)=x(n)/x(n+1)$ yazarsak

$$1/z(n) = 1 - p(n)z(n-k)z(n-k+1)...z(n-1) \qquad (3.10.11)$$

elde ederiz. İspatı tamamlamak için (3.10.11) denkleminin pozitif bir çözüme sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Çözüm için,

$$z(1-k) = z(2-k) = ... = z(0) = \alpha = \frac{k+1}{k} > 1, \qquad (3.10.12)$$

$$z(1) = \left[1 - p(1)z(1-k)z(2-k)...z(0)\right]^{-1} \qquad (3.10.13)$$

tanımlayalım. $z(1) > 1$ dir. $z(1) < \alpha$ olduğunu iddia edelim.

$$\frac{z(1)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha\left[1 - p(1)z(1-k)...z(0)\right]} \le \frac{k}{(k+1)\left[1 - \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^k\right]} < 1.$$

Buradan tümevarımdan $1 < z(n) < \alpha$, $n = 1,2,3,...$. Ayrıca $z(n)$, (3.10.11) denkleminin bir çözümüdür. Şimdi $x(1) = 1,\ x(2) = x(1)/z(1),\ x(3) = x(2)/z(2) \ldots$ olsun. Bu durumda $x(n)$, (3.10.1) denkleminin salınım yapmayan bir çözümüdür.

$p(n) = p$ sabit bir reel sayı olması özel durumu için aşağıdaki kuvvetli sonucu verelim.

Teorem 3.177:

$$x(n+1) - x(n) + px(n-k) = 0 \qquad (3.10.14)$$

denklemini ele alalım. Burada k pozitif bir tamsayı, p negatif olmayan bir reel sayıdır. Bu durumda (3.10.14) denkleminin salınım yapması için gerek ve yeter şart $p > k^k/(k+1)^{k+1}$ olmasıdır.

İspat: Örnek 3.175 ve Sonuç 3.174 birlikte ele alınırsa, Teorem 3.176 ispatı tamamlar.

Not 3.178: Gyori ve Ladas, k inci mertebeden

$$x(n+k) + p_1 x(n+k-1) + ... + p_k x(n) = 0 \qquad (3.10.15)$$

denkleminin her çözümünün salınım yapması için gerek ve yeter şartın karakteristik denkleminin hiç pozitif kökünün olmadığını gösterdi. Bu teoreme dayanarak (3.10.14) denkleminin her çözümünün salınım yapabilmesi için gerek ve yeter şartın $p > k^k/(k+1)^{k+1}$ olduğu gösterilebilir. Burada $k \in \mathbb{Z} - \{-1, 0\}$.

3.10.2 Lineer olmayan fark denklemleri

Bu kısımda,

$$x(n+1)-x(n)+p(n)f(x(n-k))=0 \tag{3.10.16}$$

lineer olmayan fark denkleminin salınım hareketini inceleyeceğiz. Burada $k\in\mathbb{Z}^{+}$ ve $N\in\mathbb{Z}^{+}$.

Teorem 3.179: f, $\mathbb{R}$ de sürekli bir fonksiyon olsun ve aşağıdaki varsayımları sağlasın.

(i) $x\neq 0$ için $xf(x)>0$,

(ii) $0<L<\infty$ için $\lim_{x\to 0}\inf\dfrac{f(x)}{x}=L$,

(iii) Eğer $k\geq 1$ ise $pL>\dfrac{k^{k}}{(k+1)^{k+1}}$ ve eğer $k=0$ ise $pL>1$. Burada $p=\lim_{n\to\infty}\inf p(n)>0$. Bu durumda (3.10.16) denkleminin her çözümü salınım yapar.

İspat: Aksini farz edelim ve $x(n)$, (3.10.16) denkleminin salınım yapmayan bir çözümü olsun. $n\geq N$ için $x(n)>0$ olduğunu varsayalım. Varsayım (i) den $f(x(n))>0$. Dolayısıyla $x(n+1)-x(n)=-p(n)f(x(n-k))<0$ ve böylece $x(n)$ azalır. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty}x(n)=c\geq 0$.

(3.10.16) denkleminin her iki yanının limiti alınarak $f(c)=0$. Varsayım (i) den $c=0$. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty}x(n)=0$. (3.10.16) denklemini $x(n)$ ile bölersek ve $z(n)=x(n)/x(n+1)\geq 1$ dersek,

$$\frac{1}{z(n)}=1-p(n)z(n-1)...z(n-k)\frac{f(x(n-k))}{x(n-k)}. \tag{3.10.17}$$

$\lim_{n\to\infty}\inf z(n)=r$ olsun. (3.10.17) denkleminin limit supremumu alınarak,

$$\frac{1}{r}\leq 1-pLr^{k} \text{ veya}$$

$$pL\leq\frac{r-1}{r^{k+1}}. \tag{3.10.18}$$

$h(r)=\dfrac{(r-1)}{r^{k+1}}$ fonksiyonunun maksimumunun $r=\dfrac{(k+1)}{k}$ noktasında ve böylece fonksiyonun maksimum değerinin $\dfrac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ olduğunu görmek kolaydır. (3.10.18) den $pL\le\dfrac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ olur. Bu ise (3.10.18) in (iii) varsayımıyla çelişir.

Not: Eğer $\lim_{n\to\infty}\inf f(x)/x=1$ dersek, (3.10.16) denklemi ile ilişkili lineerize edilmiş denklem,

$$y(n+1)-y(n)+py(n-k)=0\,. \tag{3.10.19}$$

(Kısım 3.10.1'de çalışıldı.) Burada $p(n)$, sabit bir p reel sayısına eşittir. Şimdi Teorem 3.179'u başka bir şekilde ifade edebiliriz. $L=1$ ve $p(n)$ sabiti için (i) ve (ii) varsayımlarının geçerli olduğunu kabul edelim. Eğer (3.10.19) denkleminin her çözümü salınım yaparsa, bu durumda (3.10.16) denkleminin de her çözümü salınır.

Gyori ve Ladas çeşitli gecikmeler ile

$$x(n+1)-x(n)+\sum_{i=1}^{m}p_i f_i(x(n-k_i))=0 \tag{3.10.20}$$

şeklinde daha çok genel denklem ele aldılar. Burada $1\le i\le m$ için $p_i>0$, k_i pozitif bir tamsayı ve f, $\mathbb{R}$ de sürekli bir fonksiyondur.

Teorem 3.180: Aşağıdaki ifadelerin gerçekleşsin.

(i) $1\le i\le m$ ve $x\ne 0$ için $xf_i(x)>0$,

(ii) $1\le i\le m$ için $\lim_{x\to 0}\inf f_i(x)/x\ge 1$,

(iii) $\sum_{i=1}^{m}p_i\dfrac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}}>1$.

Bu durumda (3.10.20) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Örnek 3.181: $\alpha>1$, $\beta>0$ ve k pozitif tamsayısı için,

$$y(n+1)=\frac{\alpha y(n)}{1+\beta y(n-k)} \tag{3.10.21}$$

Pielou lojistik gecikmeli (delay) denklemini ele alalım. Eğer,

$$\frac{\alpha-1}{\alpha}>\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{3.10.22}$$

ise (3.10.21) denkleminin her pozitif çözümünün pozitif $y^* = \dfrac{(\alpha-1)}{\beta}$ denge noktası etrafında salınım yaptığını gösteriniz.

Çözüm: Örnek 3.67'deki metodu uygulayarak, (3.10.21) denkleminde $y(n) = \left(\dfrac{(\alpha-1)}{\beta}\right)e^{x(n)}$ olsun. Bu durumda,

$$x(n+1) - x(n) + \frac{\alpha-1}{\alpha} f(x(n-k)) = 0 \tag{3.10.23}$$

elde edilir. Burada $f(x) = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\ln\left(\dfrac{(\alpha-1)e^x+1}{\alpha}\right)$. f fonksiyonunun $L=1$ için, Teorem 3.179'un (i) ve (ii) durumlarını sağladığı gösterilebilir. Dolayısıyla Teorem 3.179 ile (3.10.23) denkleminin her çözümü sıfırın civarında salınım yapar. Bu da (3.10.21) denkleminin her çözümünün $y^* = \dfrac{(\alpha-1)}{\beta}$ denge noktası civarında salınım yaptığını gösterir.

3.10.3 İkinci mertebeden self-adjoint (kendisine eşlenik) denklemler

Bu kısımda,

$$\Delta\left[p(n-1)\Delta x(n-1)\right] + q(n)x(n) = 0 \tag{3.10.24}$$

formunda ikinci mertebeden fark denklemleri ele alınacaktır. Burada $p(n) > 0,\ n \in \mathbb{Z}^+$. (3.10.24) denklemine self adjoint (kendisine eşlenik) adı verilir. İsmini,

$$\left[p(t)x'(t)\right]' + q(t)x(t) = 0$$

sürekli analoğundan alır. (3.10.24) denklemi daha bilindik bir formda yazılabilir.

$$p(n)x(n+1) + p(n-1)x(n-1) = b(n)x(n)\,. \tag{3.10.25}$$

Burada,

$$b(n) = p(n-1) + p(n) - q(n)\,. \tag{3.10.26}$$

$p_0(n) > 0$ ve $p_2(n) > 0$ için,

$$p_0(n)x(n+1) + p_1(n)x(n) + p_2(n)x(n-1) = 0 \tag{3.10.27}$$

formunda herhangi bir denklem (3.10.24) veya (3.10.25) self-adjoint formunda yazılabilir. $p_0(n)$, $p_1(n)$ ve $p_2(n)$ den $p(n)$ ve $q(n)$ i bulmak için, (3.10.27) denkleminin her iki yanı pozitif bir $h(n)$ dizisi ile çarpılır. Buradan,

$$p_0(n)h(n)x(n+1)+p_1(n)h(n)x(n)+p_2(n)h(n)x(n-1)=0 . \quad (3.10.28)$$

(3.10.28) ve (3.10.25) denklemleri karşılaştırılarak,

$$p(n)=p_0(n)h(n), \; p(n-1)=p_2(n)h(n) .$$

Böylece,

$$p_2(n+1)h(n+1)=p_0(n)h(n) \text{ veya}$$

$$h(n+1)=\frac{p_0(n)}{p_2(n+1)}h(n) . \quad (3.10.29)$$

Dolayısıyla,

$$h(n)=\prod_{j=n_0}^{n-1}\frac{p_0(j)}{p_2(j+1)}$$

(3.10.29) denkleminin bir çözümüdür. Buradan,

$$p(n)=p_0(n)\prod_{j=n_0}^{n-1}\frac{p_0(j)}{p_2(j+1)} .$$

Ayrıca, (3.10.26) denkleminden,

$$q(n)=p_1(n)h(n)+p(n)+p(n-1)$$

elde edilir.

Tanım 3.182: $n \geq n_0 \geq 0$ için, eğer ya $x(r)=0$ ya da $x(r-1)x(r)<0$ ise, (3.10.24) denkleminin bir $x(n)$ çözümü $r>n_0$ da genelleştirilmiş bir sıfıra sahiptir.

Diğer bir ifadeyle, bir çözümün genelleştirilmiş bir sıfırı ya gerçek sıfırdır ya da çözüm işaretini değiştirir.

Teorem 3.183: (Sturm Teoremi)

$x_1(n)$ ve $x_2(n)$, (3.10.24) denkleminin iki lineer bağımsız çözümleri olsunlar. Buradan aşağıdaki durumlar sağlanır.

(i) $x_1(n)$ ve $x_2(n)$ ortak sıfıra sahip olamazlar. Yani $x_1(r)=0$ ise $x_2(r)\neq 0$ dır.

(ii) Eğer $x_1(n)$, n_1 noktasında bir sıfıra ve $n_2>n_1$ noktasında genelleştirilmiş bir sıfıra sahipse, bu durumda $x_2(n)$, $(n_1,n_2]$ de genelleştirilmiş bir sıfıra sahip olmalıdır.

(iii) Eğer $x_1(n)$ in, n_1 ve $n_2 > n_1$ noktalarında genelleştirilmiş sıfırları varsa, bu durumda $x_2(n)$ in, $[n_1, n_2]$ de basit sıfırı olmalıdır.

İspat:

(i) $x_1(r) = x_2(r) = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Casoratian,

$$C(r) = \begin{vmatrix} x_1(r) & x_2(r) \\ x_1(r+1) & x_2(r+1) \end{vmatrix} = 0 .$$

Teorem 2.13'ten $x_1(n)$ ve $x_2(n)$ lineer bağımlıdır. Bu bir çelişkidir.

(ii) $x_1(n_1) = 0,\ x_1(n_2 - 1)x_1(n_2) < 0$ (veya $x_1(n_2) = 0$) olduğunu varsayalım. n_2 nin n_1 den daha büyük ilk genelleştirilmiş sıfır olduğunu varsayalım. Farz edelim ki $n_1 < n < n_2$ ve $x_1(n_2) \le 0$ için $x_1(n) > 0$ olsun.

Şimdi eğer $(n_1, n_2]$ de $x_1(n)$ in genelleştirilmiş sıfırları yoksa bu durumda $[n_1, n_2]$ de $x_2(n)$ ya pozitif ya da negatiftir. Genelliği bozmaksızın, $[n_1, n_2]$ de $x_2(n) > 0$ olsun. Şimdi $[n_1, n_2]$ de $r \in (n_1, n_2)$, $x_2(r) = Mx_1(r)$ ve $x_2(n) \ge Mx_1(n)$ olacak şekilde pozitif bir M reel sayısı alalım. Süper pozisyon prensibi (üst üste bindirme kuralı) ile, $x(r) = 0$, $x(r-1)x(r+1) \ge 0$ ve $r > n_1$ için $x(n) = x_2(n) - Mx_1(n)$ dizisi (3.10.24) denkleminin bir çözümüdür. (3.10.24) denkleminde $n = r$ dersek,

$$\Delta\left[p(r-1)\Delta x(r-1)\right] + q(r)x(r) = 0 .$$

$x(r) = 0$ olduğundan

$$p(r-1)\Delta^2 x(r-1) + \Delta x(r)\Delta p(r-1) = 0 \text{ veya}$$

$$p(r)x(r+1) = -p(r-1)x(r-1) . \tag{3.10.30}$$

$x(r+1) \ne 0,\ x(r-1) \ne 0$ ve $p(n) > 0$ olduğundan, (3.10.30) denkleminden $x(r-1)x(r+1) < 0$ olur. Bu da bir çelişkidir.

Not 3.184: Genelleştirilmiş sıfırlar ile ilgili kavramı kullanarak, salınımın farklı bir tanımını verebiliriz. Bir fark denkleminin bir çözümü, eğer $[n_0, \infty)$ da sonsuz sayıda genelleştirilmiş sıfırlara sahipse, $[n_2, \infty)$ da salınımlıdır. Eğer (3.10.24) denkleminin salınımlı bir çözümü varsa tüm çözümleri salınımlıdır. Bu da Teorem 3.183'ün bir sonucudur. Genel olarak, ikinci mertebeden self-adjoint olmayan fark denklemleri için yukarıdaki gerçek geçerli değildir. Örneğin, $x(n+1)-x(n-1)=0$ fark denklemi salınımlı olmayan bir $x_1(n)=1$ çözümüne ve salınımlı bir $x_2(n)=(-1)^n$ çözümüne sahiptir. Bu denklemin self-adjoint olmadığı gözlemlenebilir.

Lemma 3.185: $n_k \to \infty$ ve $k \to \infty$ iken eğer $b(n_k) \le 0$ alt dizisi varsa, (3.10.25) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat: Aksini yani (3.10.25) denkleminin salınımlı olmayan bir $x(n)$ çözümünün olduğunu varsayalım. Genelliği bozmaksızın, $n \ge N$ için $x(n)>0$ olduğunu farz edelim. Buradan $n_k > N$ için

$$p(n_k)x(n_k+1)+p(n_k-1)-b(n_k)x(n_k)>0,$$

olur. Bu da bir çelişkidir.

Salınım teorisinde kullanışlı tekniklerden biri de Ricatti transfomasyonlarının kullanımıdır. Sonuçlarımızın gelişimine katkıda bulunan tek transformasyonu verelim. (3.10.25) denkleminde,

$$z(n)=b(n+1)x(n+1)/(p(n)x(n)) \qquad (3.10.31)$$

olsun. Buradan $z(n)$,

$$c(n)z(n)+\frac{1}{z(n-1)}=1 \qquad (3.10.32)$$

denklemini sağlar. Burada,

$$c(n)=\frac{p^2(n)}{b(n)b(n+1)}. \qquad (3.10.33)$$

Lemma 3.186: $n \in \mathbb{Z}^+$ için $b(n)>0$ olsun. Bu durumda $n \ge N$ ve bazı $N>0$ için, (3.10.32) denkleminin her $x(n)$ çözümünün pozitif olması için gerek ve yeter şart (3.10.25) denkleminin her çözümünün salınımsız olmasıdır.

İspat: $x(n)$, (3.10.25) denkleminin salınım yapmayan bir çözümü olsun. Bu halde, $n \ge N$ için $x(n)x(n+1)>0$. (3.10.31) denklemi $z(n)>0$ olduğunu gerektirir. Tersine, $z(n)$ in (3.10.32) denkleminin pozitif bir çözümü olduğunu varsayalım. Bu çözümü kullanarak, $n > N$ için,

$$x(N)=1,\ x(n+1)=(p(n))/b(n+1)z(n)x(n)$$

şeklinde (3.10.25) denkleminin salınımsız bir $x(n)$ çözümü elde edilir. Buradan $n \ge N$ için, $x(n)$ in (3.10.25) denkleminin gerçekten salınımsız bir çözümü olduğu kanıtlanabilir. Sturm Teoremi'nden (3.10.25) denkleminin hiçbir çözümü salınım yapmaz.

Lemma 3.187: Tüm $n > 0$ ve $z(n) > 0$ için, eğer $c(n) \geq a(n) > 0$,

$$c(n)z(n) + \frac{1}{z(n-1)} = 1 \tag{3.10.34}$$

denkleminin bir çözümü ise buradan,

$$a(n)y(n) + \frac{1}{y(n-1)} = 1 \tag{3.10.35}$$

denklemi tüm $n \in \mathbb{Z}^+$ için bir $y(n) \geq z(n) > 1$ çözümüne sahiptir.

İspat: $c(n) > 0$ ve $z(n) > 0$ olduğundan, (3.10.24) denkleminden $1/(z(n-1)) < 1$. Bu da tüm $n \geq 1$ için $z(n-1) > 1$ olduğunu gösterir. Şimdi (3.10.35) denkleminin bir $y(n)$ çözümünü tanımlayalım. $y(0) \geq z(0)$ ve $y(n)$, (3.10.34) denklemini sağlasın. Şimdi (3.10.34) ve (3.10.35) denklemlerinden,

$$a(n)y(n) + \frac{1}{y(n-1)} = c(n)z(n) + \frac{1}{z(n-1)}.$$

Böylece,

$$a(1)y(1) + \frac{1}{y(0)} = c(1)z(1) + \frac{1}{z(0)}.$$

$y(0) \geq z(0)$, $\dfrac{1}{y(0)} \leq \dfrac{1}{z(0)}$ olduğundan $a(1)y(1) \geq c(1)z(1)$ veya

$y(1) \geq \dfrac{c(1)}{a(1)} z(1) \geq z(1) > 1$. Tümevarımla, $y(n) \geq z(n) > 1$ olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.188: Eğer bazı $\varepsilon > 0$ ve tüm $n \geq N$ için, $b(n)b(n+1) \leq (4-\varepsilon)p^2(n)$ ise (3.10.25) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat: Eğer bazı $\varepsilon \geq 4$ için $b(n)b(n-1) \leq (4-\varepsilon)p^2(n)$ ise, $b(n)b(n-1) \leq 0$. Teoremin sonucu Lemma 3.185 kullanılarak tamamlanır. $0 < \varepsilon < 4$ olsun. Şimdi (3.10.25) denkleminin salınımsız bir çözümünün olduğunu varsayalım. Buradan Lemma 3.186'dan, (3.10.32) denklemi, $n \geq N$ için pozitif bir $z(n)$ çözümüne sahiptir. (3.10.33) formülündeki teoremin varsayımı kullanılarak,

$$c(n) = \frac{p^2(n)}{b(n)b(n+1)} \geq \frac{p^2(n)}{(4-\varepsilon)p^2(n)} = \frac{1}{4-\varepsilon}$$

elde edilir. Buradan Lemma 3.187'den,

$$\frac{1}{4-\varepsilon}y(n)+\frac{1}{y(n-1)}=1 \tag{3.10.36}$$

denklemi $n \geq N$ için, $y(n) \geq z(n) > 1$ olacak şekilde bir $y(n)$ çözümüne sahiptir. $n \geq N$ için, $x(n)=1$, $x(n+1)=1/\sqrt{4-\varepsilon}\,y(n)x(n)$ şeklinde tümevarımsal pozitif bir $x(n)$ dizisi tanımlayalım. Buradan,

$$y(n)=\sqrt{4-\varepsilon}\left(\frac{x(n+1)}{x(n)}\right). \tag{3.10.37}$$

$n \geq N$ için bu ifade (3.10.36) denkleminde yerine yazılırsa karakteristik kökleri, $\lambda_{1,2}=\frac{\sqrt{4-\varepsilon}}{2}\pm i\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$ olan $x(n+1)-\sqrt{4-\varepsilon}\,x(n)=x(n-1)=0$ denklemi elde edilir. Dolayısıyla çözümleri salınımlıdır. Bu da bir çelişkidir.

Örnek 3.189:

$$y(n+1)-y(n-1)=\left(2+\frac{1}{2}(-1)^n\right)y(n)$$

fark denklemini ele alalım. Burada $p(n)=1$ ve $b(n)=\left(2+\frac{1}{2}(-1)^n\right)$. Şimdi,

$$b(n)b(n+1)=\left(2+\frac{1}{2}(-1)^n\right)\left(2+\frac{1}{2}(-1)^{n+1}\right)=3\frac{3}{4}.$$

Böylece $b(n)b(n+1)\leq\left(4-\frac{1}{5}\right)p^2(n)$. Teorem 3.188'den her çözüm salınımlıdır.

Örnek 3.190: $n=1,2,3,...$ için,

$$x(n+1)+x(n)=b(n)x(n)$$

denklemini ele alalım. Burada, $b(n)=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$. Şimdi,

$$b(n)b(n+1)=\frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}+\sqrt{(n-1)(n+2)}+\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{n(n+1)}}<4.$$

Fakat $\lim_{n\to\infty} b(n)b(n+1)=4$. Bu nedenle eğer $\varepsilon_n=4-b(n)b(n+1)$ alınrsa, $n\to\infty$ için $\varepsilon_n\to 0$. Buna rağmen $n\geq 1$ için $x(n)=\sqrt{n}$, denklemin salınımsız bir çözümü olduğundan Teorem 3.188 çalışmaz.

Teorem 3.191: $n \geq N$ için eğer $b(n)b(n+1) \geq 4p^2(n)$ ise, (3.10.25) denkleminin hiçbir çözümü salınımlı değildir.

İspat: (3.10.33) formülünden ve $c(n) \leq \frac{1}{4}$ ifadelerinden $z(N) = 2$ ve $n > N$ için, $z(n) = \frac{1}{c(n)}\left(1 - \frac{1}{z(n-1)}\right)$ olacak şekilde (3.10.32) denkleminin bir $z(n)$ çözümü kurulabilir.

$$z(N+1) = \frac{1}{c(N+1)}\left(1 - \frac{1}{z(N)}\right) \geq 4\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2\,.$$

Benzer olarak $n \geq N$ için $z(n) \geq 2$ olduğu gösterilebilir. Böylece Lemma 3.186'dan (3.10.25) denkleminin hiçbir çözümü salınımlı değildir.

Örnek 3.192:

$$\Delta(n\Delta x(n-1)) + \frac{1}{n}x(n) = 0$$

fark denklemini ele alalım. Burada $p(n) = n+1$ ve $q(n) = \frac{1}{n}$. (3.10.26) formülünü kullanarak $b(n) = 2n+1-\frac{1}{n}$ elde ederiz. Şimdi tüm $n \geq 1$ için,

$$b(n)b(n+1) = \left(2n+1-\frac{1}{n}\right)\left(2n+3-\frac{1}{(n+1)}\right)$$

$$= 4n^2 + 8n + 3 - \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n+3}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \geq 4n^2\,.$$

Böylece Teorem 3.191'den hiçbir çözüm salınım yapmaz.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Fark denklemleri ile ayrık dinamik sistemler çok yakın ilişki içerisindedirler. Örneğin matematikçiler fark denklemlerini tartışırken genellikle konunun analitik teorisini, fakat ayrık dinamik sistemlerde genellikle sistemin geometrik ve topolojik özelliklerini vurgularlar. Bu sebeple de fark denklemlerini çalışmak önemlidir.

$$F(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k)) = 0$$

şeklinde k. mertebeden genel bir fark denkleminin bazı halleri analitik analiziyle beraber örneklerle irdelendi.

Ayrıca fark denklemlerinde önemli bir yere sahip olan Stabilite kavramı tüm ayrıntılarıyla irdelenerek gerekli verileriyle sunuldu.

Fark denklemleri birçok uygulama alanına sahiptir. Fizikte (robot yapımı), matematikte, ekonomide (ülke ekonomisi), mühendislikte (Ay'a araç gönderme), biyolojide (veya popülasyon dinamiğinde), kontrol sistemlerinde, sağlıkta (salgın hastalık yayılımı) ve buna benzer birçok alanda fark denklemlerinden yararlanılır.

Kısaca hayatımızın her alanında fark denklemleri ile karşılaşmak mümkündür. Bunun için Literatürde önemli bir yere sahip olan bir kaynak Türkçe ye çevrildi.

Fark denklemlerinin lineer ve lineer olmayan, otonom, nanotonom (otonom olmayan) durumları çalışıldı. Çözüm yöntemleri ve stabilitesi için gerekli analiz yapıldı.

Bunun yanında, Yüksek mertebeli fark denklemleri, dinamik sistemler, Kontrol teorisi ve bu teori için gerekli olan Z Transformasyonu ile fark denklemlerinin Asimptotik davranışı ve Osilasyon teorisi çalışıldı.

Son olarak, Literatürde yayınlanmış birkaç önemli örnekle çalışmamız değerlendirildi.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Konu oldukça geniştir. Yani birçok disiplinde uygulama alanına sahiptir. Bu çalışmanın nümerik analizi yapılmamıştır. Fark denklemleri ile ilgilenen okuyucular için Literatürümüze önemli bir kaynak sağlanmıştır. Bunun yanında elde edilen bilgilerle yayınlanmış önemli çalışmalar ele alındı.

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n} \tag{1}$$

tekrarlı (yenilemeli) dizisinin global stabilitesini çalışmak için bazı temel kavramlar verelim. Burada $\alpha \in [0,\infty)$ ve x_{-1} ve x_0 başlangıç koşulları keyfi pozitif reel sayılardır. Açıkça (1) denkleminin tek denge noktası $\overline{x} = \alpha + 1$. Gerekli ve yeterli bir durum olan (1) denkleminin her pozitif çözümünün $\alpha \geq 1$ ile sınırlandığını göstereceğiz. Ayrıca eğer $\alpha = 1$ ise (1) denkleminin her pozitif çözümü iki devirliye yakınsar. Eğer $\alpha > 1$ ise $\overline{x} = \alpha + 1$ (1) denkleminin global asimptotik denge noktasıdır. (1) denkleminin $\overline{x} = \alpha + 1$ denge noktası etrafındaki lineerize edilmiş denklem,

$$y_{n+1} + \frac{1}{\alpha+1} y_n - \frac{1}{\alpha+1} y_{n-1} = 0,\ n = 0,1,\dots. \tag{2}$$

Lemma 1: Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1. Eğer $\alpha > 1$ ise (1) denkleminin denge noktası $\overline{x} = \alpha + 1$, lokal olarak asimptotik stabildir.

2. Eğer $0 \leq \alpha < 1$ ise (1) denkleminin denge noktası $\overline{x} = \alpha + 1$, stabil değildir. (Eyer noktasıdır.)

İspat: İspat Lineer Stabilite Teoremi'nin basit bir sonucudur.

Lemma 2: Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1. $\alpha = 1$ olması için gerek ve yeter şart (1) denkleminin çözümlerinin asal periyodunun 2 olmasıdır.

2. $\alpha = 1$ varsayalım. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ (1) denkleminin bir çözümü olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ in iki peryotlu periyodik olması için gerek ve yeter şart $x_{-1} \neq 1$ ve $x_0 = x_{-1}/(x_{-1} - 1)$ olmasıdır.

Lemma 3: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (1) denkleminin nihayetinde sabit bir çözümü olsun. Bu halde, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, $x_n = \alpha + 1$ trivial çözümüne sahiptir. $n = -1, 0, ...$

Lemma 4: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (1) denkleminin bir çözümü ve $L > \alpha$ olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1. $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = L$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = L/(L-\alpha)$.

2. $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = L$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = L/(L-\alpha)$.

(1) Denkleminin Yarı Devirlilerinin Analizi

Bu kısımda (1) denkleminin yarı devirlilerinin analizi hakkında kullanışlı bazı sonuçlar verilecektir. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ in bir pozitif yarı devri $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ terimlerinin bir dizisinden oluşmaktadır. $\bar{x}$ ten büyük veya eşittir. $l \geq -1$ ve $m \leq \infty$. Burada ya $l = -1$ ya da $l > -1$ ve $x_{l-1} < \bar{x}$ ve ya $m = \infty$ ya da $m < \infty$ ve $x_{m+1} < \bar{x}$. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ in bir negatif yarı devri $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ terimlerinin bir dizisinden oluşmaktadır. $l \geq -1$ ve $m \leq \infty$ olmak üzere tüm elemanları $\bar{x}$ ten küçüktür. Burada ya $l = -1$ ya da $l > -1$ ve $x_{l-1} \geq \bar{x}$ ve ya $m = \infty$ ya da $m < \infty$ ve $x_{m+1} \geq \bar{x}$. (1) denkleminin bir $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne, eğer $\forall n \geq N$ için $x_n > \bar{x}$ veya $x_n < \bar{x}$ olacak şekilde $N \geq -1$ varsa, salınımlı değildir denir. Aksi halde, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne salınımlıdır denir.

Lemma 5: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ (1) denkleminin tek yarı devirlilerden oluşan pozitif bir çözümü olsun. Bu durumda $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ $x_n = \alpha + 1$ e monotonik olarak yakınsar.

İspat: $\forall n \geq 0$ için $0 < x_{n-1} < \alpha + 1$ olduğunu varsayalım. $\forall n \geq 0$ için $x_{n-1} \geq \alpha + 1$ olma durumu benzer olup ispat edilmeyecektir. $\forall n \geq 0$ için

$$0 < \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n} = x_{n+1} < \alpha + 1,$$

$$0 < x_{n-1} < x_n < \alpha + 1.$$

Lemma 6: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ (1) denkleminin en az iki yarı devirliden oluşan pozitif bir çözümü olsun. Dolayısıyla $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ salınımlıdır. Ayrıca ilk yarı devirlinin haricinde, her yarı devirlinin uzunluğu 1 ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ nin her terimi kesinlikle α dan büyüktür. İlk iki yarı devirlilerin haricinde $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ nin hiçbir terimi $\alpha + 1$ e eşit değildir.

İspat: Aşağıdaki iki durumu ele almak yeterlidir.

Durum 1:

$x_{-1} < \alpha + 1 \le x_0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$x_1 = \alpha + \frac{x_{-1}}{x_0} < \alpha + 1 \text{ ve } x_2 = \alpha + \frac{x_0}{x_1} > \alpha + 1.$$

Durum 2:

$x_0 < \alpha + 1 \le x_{-1}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$x_1 = \alpha + \frac{x_{-1}}{x_0} > \alpha + 1 \text{ ve } x_2 = \alpha + \frac{x_0}{x_1} < \alpha + 1.$$

Şimdi vereceğimiz lemma, (1) denkleminin pozitif çözümlerinin limit davranışlarının incelenmesinde kullanışlıdır.

Lemma 7: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ (1) denkleminin pozitif bir çözümü ve $N \ge 0$ negatif olmayan tamsayı olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1. $x_{N+1} > x_{N-1}$ olması için gerek ve yeter şart $x_{N-1} + \alpha x_N - x_{N-1}x_N > 0$.

2. $x_{N+1} = x_{N-1}$ olması için gerek ve yeter şart $x_{N-1} + \alpha x_N - x_{N-1}x_N = 0$.

3. $x_{N+1} < x_{N-1}$ olması için gerek ve yeter şart $x_{N-1} + \alpha x_N - x_{N-1}x_N < 0$.

İspat: Aşağıdaki hesaplamayla ispat tamamlanır.

$$x_{N+1} - x_{N-1} = \left(\alpha + \frac{x_{N-1}}{x_N}\right) - x_{N-1} = \frac{\alpha x_N + x_{N-1} - x_{N-1}x_N}{x_{N-1}}.$$

$0 \le \alpha < 1$ **Olması Durumu**

Bu kısımda $0 \le \alpha < 1$ olması durumunu ele alınacaktır ve (1) denkleminin sınırsız pozitif çözümlerinin olduğu gösterilecektir.

Teorem 8: $0 \leq \alpha < 1$ ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ (1) denkleminin $0 < x_{-1} \leq 1$ ve $x_0 \geq 1/(1-\alpha)$ olacak şekilde pozitif bir çözümü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1. $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \infty$.

2. $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \alpha$.

İspat: $1/(1-\alpha) > \alpha + 1$ ve $x_0 > \alpha + 1$ olduğu görülür. İspat için $x_1 \in (\alpha, 1]$ ve $x_2 \geq \alpha + x_0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten,

$x_1 = \alpha + x_{-1} / x_0 > \alpha$.

Ayrıca,

$$x_1 = \alpha + \frac{x_{-1}}{x_0} \leq \alpha + \frac{1}{x_0} \leq \alpha + (1-\alpha) = 1,$$

Ve dolayısıyla $x_1 \in (\alpha, 1]$. Böylece $x_2 = \alpha + x_0 / x_1 \geq \alpha + x_0$.

$\alpha = 1$ **Olması Durumu**

Bu kısımda $\alpha = 1$ olması durumu ele alınacaktır ve (1) denkleminin her pozitif çözümlerinin iki devirliye yakınsadığı gösterilecektir. Açıkça $\alpha = 1$ ise, (1) denkleminin tek denge noktası $\bar{x} = 2$.

Teorem 9: $\alpha = 1$ ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, tek yarı devirliden oluşsun. Bu durumda $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ monotonik olarak $\bar{x} = 2$ ye yakınsar.

2. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ en az iki devirliden oluşsun. Bu durumda $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ (1) denkleminin iki asal peryotlu bir çözümüne yakınsar.

İspat: Lemma 5'ten eğer $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ tek yarı devirliden oluşuyorsa bu durumda $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ monotonik olarak $\bar{x}$ ye yakınsar. Bu da $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ in en az iki yarı devirli olması durumunu elde etmek için yeterlidir. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ in en az iki yarı devirli olduğunu varsayalım. Lemma 6'dan $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ in salınımlı olduğunu biliyoruz. İlk yarı devirli hariç ve her yarı devirlinin boyu 1 ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ in her terimi $\alpha = 1$ den büyüktür. Şimdi $n \geq 0$ için,

$$x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + x_n - x_{n-1} x_n}{x_n}$$

denklemini inceleyelim.

Lemma 7'den aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(a) $x_{-1} < x_1$ olsun. Bu durumda,

$$x_{-1} < x_1 < x_3 < \ldots$$

ve

$$x_0 < x_2 < x_4 < \ldots$$

(b) $x_{-1} = x_1$ olsun. Bu durumda,

$$x_{-1} = x_1 = x_3 = \ldots$$

ve

$$x_0 = x_2 = x_4 = \ldots$$

(c) $x_{-1} > x_1$ olsun. Bu durumda,

$$x_{-1} > x_1 > x_3 > \ldots$$

ve

$$x_0 > x_2 > x_4 > \ldots$$

İspat: Lemma 4.

$\alpha > 1$ **Olması Durumu**

Bu kısımda $\alpha > 1$ olması durumu ele alınacaktır ve Teorem 11'de (1) denkleminin denge noktası $\overline{x} = \alpha + 1$ in global olarak asimptotik stabil olduğu gösterilecektir.

Lemma 10: $\alpha > 1$ ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ (1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Bu durumda

$$\alpha + \frac{\alpha - 1}{\alpha} \leq \liminf_{n \to \infty} x_n \leq \limsup_{n \to \infty} x_n \leq \frac{\alpha^2}{\alpha - 1}.$$

İspat: Lemma 5 ve 6 dan $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ in her yarı devirlilerinin uzunluğunun 1 ve her $n \geq -1$ için $\alpha < x_n$ ve $\alpha < x_0 < \alpha + 1 < x_{-1}$ olduğunu varsayalım. Öncelikle

$\limsup_{n\to\infty} x_n \le \dfrac{\alpha^2}{\alpha-1}$ olduğunu gösterelim. $n \ge 0$ için $x_{2n+1} < \alpha + \dfrac{x_{2n-1}}{\alpha}$. Fark denkleminin her $y_{m+1} = \alpha + \dfrac{1}{\alpha} y_m$, $m = 0,1,...$ çözümü $\dfrac{\alpha^2}{\alpha-1}$ e yakınsar. Böylece, $\limsup_{n\to\infty} x_n \le \dfrac{\alpha^2}{\alpha-1}$. Şimdi $\alpha + \dfrac{\alpha-1}{\alpha} \le \liminf_{n\to\infty} x_n$ olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ olsun. Açıkça tüm $n \ge N$ için $x_{2n-1} < \dfrac{\alpha^2+\varepsilon}{\alpha-1}$ olacak şekilde $N \ge 0$ vardır. $n \ge N$ olsun.

$$x_{2n} = \alpha + \frac{x_{2n-2}}{x_{2n-1}} > \alpha + \alpha\left(\frac{\alpha-1}{\alpha^2+\varepsilon}\right) = \frac{\alpha^3 + \alpha\varepsilon + \alpha(\alpha-1)}{\alpha^2+\varepsilon}.$$

Böylece,

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \ge \frac{\alpha^3 + \alpha\varepsilon + \alpha(\alpha-1)}{\alpha^2+\varepsilon} \quad .$$

ε keyfi olduğundan,

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \ge \frac{\alpha^3 + \alpha\varepsilon + \alpha(\alpha-1)}{\alpha^2+\varepsilon} = \alpha + \frac{\alpha-1}{\alpha}.$$

Teorem A: $f : (0,\infty)\times(0,\infty) \to (0,\infty)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Ve

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}),\ n = 0,1,... \tag{3}$$

fark denklemini ele alalım. Burada $x_{-1}, x_0 \in (0,\infty)$. f fonksiyonun aşağıdaki durumları sağladığını varsayalım.

(a) Tüm $x \in [a,b]$ için $a \le f(x,y) \le b$ olacak şekilde a,b $(a<b)$ pozitif sayları vardır.

(b) $\forall y \in [a,b]$ için $x \in [a,b]$ iken $f(x,y)$ artmayandır ve $\forall x \in [a,b]$ için $y \in [a,b]$ iken $f(x,y)$ azalmayandır.

(c) $[a,b]$ de (3) denkleminin asal iki peryotlu hiç çözümü yoktur. Bu halde, $[a,b]$ aralığında (3) denkleminin $\bar{x}$ tek denge noktası vardır. Üstelik $[a,b]$ aralığındaki (3) denkleminin her çözümü $\bar{x}$ e yakınsar. Şimdi bu bölümün esas sonucuna hazırız.

Teorem 11: $\alpha > 1$ olsun. Bu durumda $\bar{x} = \alpha + 1$, (1) denkleminin global olarak asimptotik stabil (denge) noktasıdır.

İspat: Lemma 1'den $\overline{x} = \alpha + 1$, (1) denkleminin lokal olarak asimptotik stabil (denge) noktası olduğunu biliyoruz. Bu taktirde $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha + 1$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$x, y \in (0,\infty)$ için $f(x,y) = \alpha + \dfrac{y}{x}$ olsun. $f:(0,\infty)\times(0,\infty)\to(0,\infty)$ sürekli bir fonksiyon, f, $\forall y \in (0,\infty)$ için $x \in (0,\infty)$ da azalandır ve f, $\forall x \in (0,\infty)$ için $y \in (0,\infty)$ da artandır. Lemma 2'den (1) denkleminin iki asal periyotlu hiç çözümü yoktur. $\varepsilon > 0$ olsun.

$$a = \alpha \text{ ve } b = \frac{\alpha^2 + \varepsilon}{\alpha - 1} \ .$$

$$f\left(\frac{\alpha^2+\varepsilon}{\alpha-1}\right) = \alpha + \alpha\left(\frac{\alpha-1}{\alpha^2+\varepsilon}\right) > \alpha \text{ ve}$$

$$f\left(\alpha, \frac{\alpha^2+\varepsilon}{\alpha-1}\right) = \alpha + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^2+\varepsilon}{\alpha-1} = \frac{\alpha^3+\varepsilon}{\alpha^2-\alpha} < \frac{\alpha^3+\varepsilon\cdot\alpha}{\alpha^2-\alpha} = \frac{\alpha^2+\varepsilon}{\alpha-1} .$$

Böylece tüm $x, y \in \left[\alpha, \dfrac{\alpha^2+\varepsilon}{\alpha-1}\right]$ için, $\alpha < f(x,y) < \dfrac{\alpha^2+\varepsilon}{\alpha-1}$.

Sonuç olarak Lemma 10'dan,

$$\alpha < \alpha + \frac{\alpha-1}{\alpha} \le \liminf_{n\to\infty} x_n \le \limsup_{n\to\infty} x_n \le \frac{\alpha^2}{\alpha-1} < \frac{\alpha^2+\varepsilon}{\alpha-1}$$

ve Teorem A'dan,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha + 1 .$$

(1) denkleminin stabilitesi, negatif olmayan keyfi α reel sayısı ve x_{-1} ve x_0 başlangıç koşulları pozitif olan reel sayılar için ele alındı. $\alpha = -1$ durumunda (1) denklemi bir tek üç devirliye (cycle) sahip olmakla beraber çözümlerin var olduğu bölge verilmiştir.

Çözülmemiş Problem:

(1) (1) denkleminin iyi bir G kümesini bulalım.

(2) $\alpha < -2$ veya $\alpha > 1$ olduğunda, (1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktasının çekim (atraksiyon) merkezini bulalım.

Burada $p < -2$ durumu için (1) denkleminin çözümünün varlık bölgesi sergilendi. Bu denklemin stabilite problemini ve çözümlerin en geniş varlık alanını bulmak halen çözülmemiştir. Bu çalışma, α nın ve başlangıç koşullarının negatif olma durumu için, (1) denkleminin salınımı ve stabilitesi ile ilgilidir. Ayrıca $\alpha < -2$ için bir çekim merkezi bulunur.

Yine bu çalışmada, $\alpha \in (-2,0) - \{-1\}$ için $\bar{x}$ in kararsızlığı (anstabilitesi) ve $\alpha < -2$ için $\bar{x} = \alpha + 1$ tek denge noktasının asimptotik stabilitesi ispatlanacaktır. $\bar{x}$ in, α ya bağlı global bir çekim merkezi olduğu gösterilir.

Lineerize Edilmiş Denge Noktasının Stabilite Analizi

Bu kısımda, $\alpha < 0$ olduğunda,

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \; n = 0,1,... \tag{3}$$

tekrarlı (rekursif) dizisi için asimptotik stabilite çalışılacaktır. Burada, (3) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktası civarında lineerize edilmiş denklemi,

$$y_{n+1} + \frac{1}{\alpha+1} y_n - \frac{1}{\alpha+1} y_{n\text{-}1} = 0, \; n = 0,1,... \tag{4}$$

(4) ün karekteristik denklemi,

$$\lambda^2 + \theta\lambda - \theta = 0 \tag{5}$$

Burada, $\theta = 1/(\alpha+1)$. (5) denkleminin $\lambda_{1,2} = \frac{\theta}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1+\frac{4}{\theta}}\right)$ şeklinde iki kökü vardır.

Bu kısmın sonuçları aşağıda verilmiştir.

Teorem 12:

(1) Eğer $\alpha \in (-1,0)$ ise $\bar{x}$ stabil değildir

(2) Eğer $\alpha \in (-2,-1)$ ise $\bar{x}$ stabil değildir.

(3) Eğer $\alpha < -2$ ise $\bar{x}$ lokal olarak asimptotik stabildir.

İspat:

(1) $\alpha \in (-1,0)$ olsun. Bu durumda $-1-\sqrt{5} < -1-\sqrt{1+(4/\theta)} < -2$ ve $\theta/2 > 1/2$.

$$|\lambda_2| = \frac{\theta}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{\theta}}\right) > 1 \ .$$

Bu nedenle $\bar{x}$ stabil değildir.

(2) $\alpha \in (-2,-1)$ olsun. Bu durumda $-3 < 1+(4/\theta) < 1$ ve $\theta < -1$. Aşağıdaki iki durum elde edilir.

1. Durum: $0 \le 1+(4/\theta) < 1$. Bu durumda,

$$|\lambda_1| = -\frac{\theta}{2}\left(1-\sqrt{1+\frac{4}{\theta}}\right) > 1 .$$ Böylece $\bar{x}$ stabil değildir.

2. Durum: $-3 < 1+(4/\theta) < 0$. Bu durumda $\left|\lambda_{1,2}\right|^2 = -\theta > 1$. Böylece $\bar{x}$ stabil değildir. $\alpha < -2$ olsun. Böylece $-1 < \theta < 0$ ve $\bar{x}$ asimptotik stabildir.

Global Çekim Merkezi

Bu kısımda, (1)

tekrarlı dizisinin, $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktasının global çekiciliği çalışılacaktır. Burada $\alpha < -1$ ve başlangıç koşulları negatiftir.

Tanım 13: Reel sayıların bir I aralığı, $\forall x, y \in I$ için $G(x,y) \in I$ ise bir $G(x,y)$ reel fonksiyon altında değişmezdir (invaryant).

Lemma 14: Her $y \in I$ için x e göre artmayan ve her $x \in I$ için y ye göre azalmayan sürekli bir $G(x,y)$ fonksiyonu altında $I = [a,b]$ değişmez bir aralık olsun. $\bar{y} \in I$ nın

$$y_{n+1} = G(y_n, y_{n-1}), \; n = 0,1,... \tag{*}$$

denkleminin bir tek denge noktası olsun. Eğer,

$$x = G(y,x) \text{ ve } y = G(x,y) \tag{6}$$

sistemi I^2 de bir tek çözüme sahipse, $\bar{y}$, I^2 de global çekicidir.

İspat: $\{y_n\}_{n\ge 0}$, $y_{-1}, y_0 \in I$ başlangıç koşulları, $\lambda = \liminf_{n\to\infty} y_n$ ve $\Lambda = \limsup_{n\to\infty} y_n$ ile birlikte (*) denkleminin bir çözümü olsun. $U_1 = G(\lambda,\Lambda)$ ve $L_1 = G(\Lambda,\lambda)$ alalım. Her $\varepsilon \in (0, \lambda - a)$ için $\lambda - \varepsilon < y_n < \Lambda + \varepsilon, \; \forall n \ge n_0$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda,

$$L_1 \le \lambda \le \Lambda \le U_1 .$$

$$U_{n+1} = G(L_n, U_n) \text{ ve } L_{n+1} = G(U_{n+1}, L_n),\ n = 1, 2, ...$$

olsun. Buradan,

$$a \le ... \le L_2 \le L_1 \le \lambda \le \Lambda \le U_1 \le U_2 \le ... \le b .$$

Böylece $\{U_n\}$ monotonik olarak $U \in I$ sayısına artar, $\{L_n\}$ ise monotonik olarak bir $L \in I$ sayısına azalır. Bu da $(U, L) \in I^2$ nin (6) sisteminin bir çözümü olduğunu gösterir. Bu nedenle $U = L = \overline{y} = \lambda = \Lambda$.

Sonuç 15: $I = [a, b]$, her $y \in I$ için x e göre artmayan ve her $x \in I$ için x ye göre azalmayan sürekli bir $G(x, y)$ fonksiyonu altında değişmez bir aralık olsun.

$\overline{y} \in I$, (*) denkleminin bir tek denge noktası olsun.

J , $\forall x, y \in J$ için $G(x, y) \in I$ olacak şekilde kapalı bir aralık olsun. Eğer,

$$x = G(y, x) \text{ ve } y = G(x, y)$$

sistemi I^2 de bir tek çözüme sahipse, $\overline{y}$, J^2 de global olarak çekicidir.

$$\frac{-m}{M(1-M)} \le \alpha \le \frac{-M}{m(1-m)} \tag{7}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $m, M \in (0,1)$ olsun.

Lemma 16: Eğer $m \le M$ ve (7) durumu sağlanacak şekilde $m, M \in (0,1)$ varsa, bu durumda $I_0 = [\alpha M, \alpha m]$ $\overline{x} = \alpha + 1$ i kapsar ve $G(x, y) = \alpha + \dfrac{x}{y}$ fonksiyonu altında değişmez. Üstelik herhangi $k \in \mathbb{N}$ için

$$\forall x, y \in J_k = [k\alpha M, k\alpha m],\ G(x, y) \in I_0 .$$

İspat: (7) eşitsizliğiden $\overline{x} \in I_0$. $x, y \in [\alpha M, \alpha m]$ olsun. Bu durumda, $\alpha y \le \alpha^2 M$ ve $x/(1-M) \le \alpha m/(1-M)$. (7) eşitsizliğinden $\alpha y + (x/(1-M)) \le 0$ elde edilir.

Böylece $(1-M)\alpha + (x/y) \ge 0$ ve $G(x, y) \ge \alpha M$. Benzer olarak $G(x, y) \le \alpha m$ olduğu görülebilir. $k \in \mathbb{N}$ ve $x, y \in J_k$ olsun.

$\alpha y \le k\alpha^2 M$ ve $x/(1\text{-}M) \le \alpha k m/(1\text{-}M)$ elde edilir. Tekrar (7) eşitsizliğinden

$$\alpha y + \frac{x}{1-M} \le k\alpha^2 M + \frac{\alpha k m}{1-M} \le 0 .$$

Böylece $(1-M)\alpha+(x/y)\geq 0$ ve $G(x,y)\geq \alpha M$. Benzer olarak $G(x,y)\leq \alpha m$.

Lemma 17: Eğer $\alpha\neq 1$ ise bu durumda,

$$\alpha+\frac{x}{y}=x \text{ ve } \alpha+\frac{y}{x}=y$$

sistemi bir tek $(x,y)=(\overline{x},\overline{x})$ çözümüne sahiptir.

İspat: (x,y) sistemin bir çözümü olsun. Bu durumda $(x-y)/(1-\alpha)=0$. Böylece $x=y=\alpha+1$.

Sonuç 15, Lemma 16 ve 17 nin birleşiminden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 18: Eğer $m\leq M$ ve (7) eşitsizliği sağlanacak şekilde $m,M\in(0,1)$ varsa $\overline{x}=\alpha+1$, $\bigcup\limits_{k\geq 1}[k\alpha M,k\alpha m]^2$ ile (6) denklemine global çekicidir. Bizim amacımız $m\leq M$ ve (7) eşitsizliği sağlanacak şekilde m, M olmak üzere, $\forall m,\ M\in\left(\frac{2}{3},1\right)$ $\left(m\leq M\Rightarrow\frac{-m}{M(1-M)}\leq\frac{-M}{m(1-m)}\right)$ bulmaktır. Bir sonraki teoremde,

$$0<\theta<\min\left\{-2\left(\frac{\alpha}{9}+\frac{1}{3}\right),\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{4}}\right\},\text{ eğer } \alpha\leq -4 \text{ ise} \tag{8}$$

ve

$$0<\theta<-2\left(\frac{\alpha}{9}+\frac{1}{3}\right),\text{ eğer } -4<\alpha<-3 \text{ ise,} \tag{9}$$

olacak şekilde $\alpha<-3$ ve θ nın bir pozitif sayı olsun.

$$f(x)=x^2-x-\frac{1}{\alpha}(\theta+x),\ x\geq 0. \text{ Buradan}$$

$$\theta<-2((\alpha/9)+1/3)\Leftrightarrow f(2/3)<0$$

olduğu görülür. Ve $f(1)=-(\theta+1)/\alpha>0$. Bu durumda f ,

$$m_0=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)+\sqrt{\frac{\theta}{\alpha}+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^2}$$

bağıntısı ile verilen $m_0\in(2/3,1)$ sıfırına sahiptir.

Teorem 19: θ, $\alpha\leq -4$ olduğunda, (8) eşitsizliğini ve $-3>\alpha>-4$ olduğunda, (9) eşitsizliğini sağlasın. Eğer $m_0\in(2/3,1)$ olacak şekilde,

$$f(x) = x^2 - x - \frac{1}{\alpha}(\theta + x),\ x \geq 0$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun sıfırı ise bu durumda $\overline{x} = \alpha + 1$,

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[k\alpha(m_0 + \theta) + akm_0\right]^2$$

ile (6) denkleminin bir global çekicisidir (atraksiyonudur).

İspat:

$$M_0 = m_0 + \theta < 1.$$

$$M_0 - 1 = (m_0^2 - m_0)\alpha - 1 = \alpha\left(m_0^2 - m_0 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= \alpha\left(\left(m_0 + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{4}\right)\right).$$

$-4 < \alpha$ ise $M_0 < 1$. $-4 \geq \alpha$ ise (8) eşitsizliğinden $f((1/2) + \sqrt{(1/\alpha) + (1/4)}) < 0$ elde edilir. Dolayısıyla $m_0 > (1/2) + \sqrt{(1/\alpha) + (1/4)}$ ve $M_0 < 1$. Böylece $m_0, M_0 \in (2/3, 1)$ ve (7) durumu sağlanır. Teorem 18'den sonuç elde edilir.

Salınım Özelliği

Bu kısımda amacımız, (1) tekrarlı dizisinin salınım özelliğini araştırmaktır. Burada $\alpha < -1$.

Lemma 20: $\alpha < -1$ ve $\{x_n\}$, (1) denkleminin trivial olmayan bir çözümü olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(1) Eğer $\forall n \geq n_0 - 1$ için $x_n \geq \alpha + 1$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa bu durumda çözüm, monotonik olarak sıfıra yakınsaktır.

(2) Eğer $\forall n \geq n_0 - 1$ için $x_n < \alpha + 1$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa bu durumda çözüm, $-\infty$ a doğru azalır.

İspat:

(1) $\forall n \geq n_0 - 1$ için $x_n \geq \overline{x} = \alpha + 1$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ olsun. $x_{n_0+1} = \alpha + (x_{n_0-1} / x_{n_0}) \geq \alpha + 1$ elde edilir. $x_{n_0-1} / x_{n_0} \geq 1$. Bu durumda aşağıda verilen iki durum elde edilir.

Durum 1: $x_{n_0-1} > 0$. Bu durumda $0 < x_{n_0} \leq x_{n_0-1}$. Tümevarımdan

$$x_{n_0-1} \geq x_{n_0} \geq x_{n_0+1} \geq ... > 0.$$

Böylece $\{x_n\}$, sıfıra doğru azalır.

Durum 2: $x_{n_0-1} < 0$. Bu durumda $0 > x_{n_0} \geq x_{n_0-1}$. Tümevarımdan

$$\alpha + 1 \leq x_{n_0-1} \leq x_{n_0} \leq ... < 0.$$

Böylece $\{x_n\}$, sıfıra doğru artar.

(2) $\forall n \geq n_0 - 1$ için $x_n < \overline{x} = \alpha + 1$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ olsun. $x_{n_0+1} = \alpha + (x_{n_0-1} / x_{n_0}) < \alpha + 1$ elde edilir. Bu durumda $x_{n_0-1} / x_{n_0} < 1$. Böylece $x_{n_0} < x_{n_0-1} < \alpha + 1$. Tümevarımdan

$$\alpha + 1 > x_{n_0-1} > x_{n_0} > x_{n_0+1} > ....$$

Böylece $\{x_n\}$, $-\infty$ a doğru azalır.

Teorem 21: θ, $\alpha \leq -4$ olduğunda (8) eşitsizliğini ve $-3 > \alpha > -4$ olduğunda (9) eşitsizliğini sağlasın. Eğer $m_0 \in (2/3,1)$,

$$f(x) = x^2 - x - \frac{1}{\alpha}(\theta + x),\ x \geq 0$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun sıfırı ise bu durumda $\overline{x} = \alpha + 1$, (1) denkleminin her trivial olmayan çözümü,

$$(x_{-1}, x_0) \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[k\alpha(m_0 + \theta) + akm_0\right]^2$$

olacak şekilde x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları ile, (1) denkleminin her nantrivial çözümü salınımlıdır.

İspat: Tersine $\{x_n\}$ salınım yapmayan bir çözüm olsun. Lemma 20'den $\{x_n\}$, ya sıfıra ya da $-\infty$ a yakınsar. Teorem 19'da bu mümkün değildir.

$\alpha \in (0,\infty)$ ve $k = 1$ için, (1) tekrarlı dizisinin global stabilitesi, sınırlılık karakteri ve periyodik doğası incelenmiştir. Burada $\alpha \in (0,\infty)$, $k \in (0,\infty)$ ve x_{-1} ve x_0 başlangıç koşulları keyfi pozitif reel sayı olan durumlar için çalışılacaktır. I, $\mathbb{R}$ nin sınırlı veya sınırlı olmayan bir aralığı olsun.

$$f : I \times I \to I$$

sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Başlangıç koşulunun her $\{x_{-1}, x_0\} \subset I$ kümesi için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}),\ n = 0,1,2,... \tag{10}$$

fark denklemi $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ tek çözüme sahiptir.

$\overline{x}$, (10) denkleminin bir denge noktası olsun. Yani, $\overline{x} = f(\overline{x}, \overline{x})$. (10) denkleminde x_n ve x_{n-1} i, u ve v ile değiştirisek,

$$p = \frac{\partial f}{\partial u}(\overline{x}, \overline{x})$$

$$q = \frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{x}).$$

$$y_{n+1} = py_n + qy_{n-1},\ n = 0,1,2,... \tag{11}$$

denklemi $\overline{x}$ denge noktası etrafında (10) denkleminin lineerize edilmiş şeklidir. Karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0. \tag{12}$$

Teorem 22:

(i) Eğer (12) kuadratik denkleminin her iki kökü de $|\lambda| < 1$ yuvarı içindeyse (10) denkleminin $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik stabildir.

(ii) (12) denkleminin her iki kökünün de $|\lambda| < 1$ yuvarı içinde olabilmesi için gerek ve yeter şart,

$$|p| < 1 - q < 2.$$

Bu durumda $\overline{x}$ lokal olarak asimptotik stabildir.

(iii) (12) denkleminin her iki kökünün de $|\lambda| < 1$ yuvarı dışında olabilmesi için gerek ve yeter şart,

$$|q| > 1 \text{ ve } |p| < |1 - q|.$$

Bu durumda $\overline{x}$ kararsızdır ve repeller noktası adı verilir.

(iv) (12) denkleminin bir kökünün $|\lambda| < 1$ yuvarı dışında diğer kökünün içinde olabilmesi için gerek ve yeter şart,

$$p^2 + 4q > 0 \text{ ve } |p| > |1 - q|.$$

Bu durumda $\overline{x}$ kararsızdır ve bir eyer noktası adı verilir.

(v) (12) denkleminin bir kökünün mutlak değer 1 e eşit olabilmesi için gerek ve yeter şart $|p| = |1-q|$ veya $q = -1$ ve $|p| \le 2$. Bu durumda $\overline{x}$ nanhiperbolik nokta diye adlandırılır.

Şimdi (1) dizisinin global davranışını incelenecektir. Burada x_n ve x_{n-1} pozitif sayılar, α ve k pozitif reel sayılardır.

Bir $\overline{x}$ noktasının (1) denkleminin denge noktası olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$g(x) = x - x^{1-k} - \alpha \tag{13}$$

fonksiyonu için bir kök olmasıdır.

$$\overline{x} - \overline{x}^{1-k} - \alpha = 0 \tag{14}$$

veya denk olarak

$$\overline{x}\left(1 - \frac{1}{\overline{x}^k}\right) = \alpha\ . \tag{15}$$

Lemma 23: Aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eğer $k = 1$ ise (1) denklemi $\overline{x} = \alpha + 1$ tek denge noktasına sahiptir.

(ii) Eğer $k \neq 1$ ise (1) denklemi $\overline{x} > 1$ tek denge noktasına sahiptir.

İspat:

(i) Eğer $k = 1$ ise denklem (14) den $\overline{x} = \alpha + 1.$ [1]

(ii) Eğer $k \neq 1$ ise aşağıdaki durumlar mevcuttur.

Durum (1): $(0 < k < 1)$

(6) denklemi ile tanımlanan g fonksiyonu $\left[0, (1-k)^{\frac{1}{k}}\right]$ aralığı üzerinde azalır. $\left[(1-k)^{\frac{1}{k}}, \infty\right[$ aralığı üzerinde artar. $g(1) = -\alpha < 0$ ve $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ den dolayı g fonksiyonu $\overline{x} > 1$ tek denge noktasına sahiptir.

Durum (2): $(1 < k)$

g, $[0, \infty[$ aralığında arttığından $g(1) = -\alpha < 0$ ve $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ den dolayı g fonksiyonu $\overline{x} > 1$ tek denge noktasına sahiptir.

Teorem 24: $\overline{x}$, (1) denkleminin denge noktası olsun.

(i) Eğer α,

$$k(1+k)^{\frac{1-k}{k}} < \alpha \tag{16}$$

şartını sağlıyorsa $\overline{x}$ lokal olarak asimptotik stabildir.

(ii) Eğer α ,

$$k(1+k)^{\frac{1-k}{k}} > \alpha \tag{17}$$

şartını sağlıyorsa $\overline{x}$ stabil değildir. Bir eyer noktasıdır.

(iii) Eğer α ,

$$\alpha = k(1+k)^{\frac{1-k}{k}} \tag{18}$$

şartını sağlıyorsa $\overline{x}$ nanhiperbolik noktadır.

İspat:

(1) , (10) denklemlerinden ve Teorem 22'den dolayı $f(u,v) = \alpha + u^{-k}v$.

$$p = \frac{-k}{x^{-k}},$$

$$q = \frac{1}{x^{-k}}. \tag{19}$$

(i) Teorem 22 kullanılarak $\overline{x}$ noktasının lokal olarak asimptotik stabil olabilmesi için gerek ve yeter şart $\overline{x}^k > k+1$ olmasıdır. (16) eşitsizliği kullanılarak yapılan basit bir hesaplama ile $g\left((k+1)^{\frac{1}{k}}\right) = k(k+1)^{\frac{1-k}{k}} - \alpha < 0$ elde edilir. $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

Buradan $x > (k+1)^{\frac{1}{k}}$.

(ii) Teorem 22'nin $p^2 + 4q > 0$ koşulu daima sağlanır ve dolayısıyla $\overline{x}^k < (k+1)$ ise $\overline{x}$ stabil değildir.

(17) şartından $g\left((k+1)^{\frac{1}{k}}\right) = k(k+1)^{\frac{1-k}{k}} - \alpha > 0$. $g(0) < 0$ olduğundan $\overline{x} > (k+1)^{\frac{1}{k}}$.

(iii) $|p| = |1-q|$ koşulu $\overline{x} = (k+1)^{\frac{1}{k}}$ şartına denktir. Benzer olarak koşul (18) den $g\left((k+1)^{\frac{1}{k}}\right) = 0$ ve $\overline{x} = (k+1)^{\frac{1}{k}}$.

Lemma 25: Eğer $\alpha \neq 1$ ise (1) denkleminin her $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar.

$$\alpha < x_{2n} < \alpha \frac{1-\beta^n}{1-\beta} + \beta^n x_0,\ n = 1,2,...$$

$$\alpha < x_{2n+1} < \alpha \frac{1-\beta^n}{1-\beta} + \beta^n x_1,\ n = 1,2,... \tag{20}$$

Burada $\beta = \frac{1}{\alpha^k}$.

İspat: $\alpha < x_{n+1} < \alpha + \beta x_{n-1},\ \forall n = 1,2,...$. Tümevarımla (20) eşitsizlikleri elde edilir. $\alpha > 1$ den dolayı

$$\alpha < x_{2n} < \frac{\alpha}{1-\beta} + x_0,\ n = 1,2,...$$

$$\alpha < x_{2n+1} < \frac{\alpha}{1-\beta} + x_1,\ n = 1,2,...$$

Teorem 26: $\bar{x}$, (1) denkleminin denge noktası olsun. Eğer $\alpha > k^{\frac{1}{k}} \geq 1$ ise $\bar{x}$ global olarak asimptotik stabildir.

İspat: İlk olarak $k \geq 1$ olduğu için $k^{\frac{1}{k}} \geq k(1+k)^{\frac{1-k}{k}}$ ve $\alpha > k^{\frac{1}{k}}$ dan dolayı $\alpha > k(1+k)^{\frac{1-k}{k}}$. Teorem 24'ten $\bar{x}$ lokal olarak asimptotik stabildir.

$\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (1) denkleminin bir çözümü olsun. Lemma 25'ten $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ sınırlıdır.

$$\lambda = \liminf x_n,\ \Lambda = \limsup x_n$$

olsun. Bu halde tüm $\varepsilon \in (0,\lambda)$ ve $n \geq n_0$ için $\lambda - \varepsilon < x_n < \Lambda + \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan,

$$\alpha + \frac{\lambda - \varepsilon}{(\Lambda + \varepsilon)^k} < x_{n+1} < \alpha + \frac{\Lambda + \varepsilon}{(\lambda - \varepsilon)^k},\ \forall n \geq n_0 + 1.$$

Bu halde,

$$\alpha + \frac{\lambda - \varepsilon}{(\Lambda + \varepsilon)^k} < \lambda \leq \Lambda < \alpha + \frac{\Lambda + \varepsilon}{(\lambda - \varepsilon)^k}. \tag{21}$$

(21) eşitsizliğinden

$$\alpha + \frac{\lambda}{\Lambda^k} \leq \lambda \leq \Lambda < \alpha + \frac{\Lambda}{\lambda^k}.$$

Buradan,

$$(\alpha \Lambda^k \lambda^{k-1} + \lambda^k) \leq (\Lambda^k \lambda^k) \leq (\alpha \Lambda^{k-1} \lambda^k + \Lambda^k).$$

Sonuç olarak,

$$(\alpha\Lambda^{k-1}\lambda^{k-1})(\Lambda-\lambda)\le(\Lambda^k-\lambda^k)\,.$$

$\Lambda\ne\lambda$ $(\Lambda>\lambda)$ varsayılırsa,

$$\alpha\Lambda^{k-1}\lambda^{k-1}\le\frac{\Lambda^k-\lambda^k}{\Lambda-\lambda}\,.$$

Burada $\dfrac{\Lambda^k-\lambda^k}{\Lambda-\lambda}=kC^{k-1}\le k\Lambda^{k-1}$ olacak şekilde $C\in(\lambda,\Lambda)$ vardır. Bu da $\alpha^k\le k$ demektir ki bu da bir çelişkidir.

Yarı Devir Analizi

Teorem 27: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (1) denkleminin en az iki yarı devirliyi içeren pozitif bir çözümü olsun. Bu durumda ilk yarı devirli dışında $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ salınımlıdır ve her yarı devirlinin uzunluğu 1 dir.

İspat: Bazı $n\ge 0$ için $x_{n-1}<\bar{x}\le x_n$ olsun. Bu durumda,

$$x_{n+1}<\alpha+\frac{\bar{x}}{\bar{x}^k}=\bar{x}\,,\ x_{n+2}>\alpha+\frac{\bar{x}}{\bar{x}^k}=\bar{x}\,.$$

İkinci olarak $x_n<\bar{x}\le x_{n-1}$ eşitsizliğini ele alalım.

$$x_{n+1}>\alpha+\frac{\bar{x}}{\bar{x}^k}=\bar{x}\,,\ x_{n+2}<\alpha+\frac{\bar{x}}{\bar{x}^k}=\bar{x}\,.$$

İki Peryotlu Çözümlerin Varlığı

Teorem 28: (1) denkleminin iki periyotlu bir $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahip olması için gerek ve yeter şart (x_{-1},x_0) ın

$$x=\alpha+\frac{x}{y^k}\,,\ y=\alpha+\frac{y}{x^k} \tag{22}$$

sisteminin bir çözümü olmasıdır. (Bu çözümlerin asal olması gerekmiyor.) Ayrıca eğer $x_{-1}\ne x_0$ ise $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ iki periyotlu asal bir çözüme sahiptir.

İspat: İlk olarak $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (1) denkleminin iki periyotlu bir çözümü olsun. Bu durumda,

$$x_{-1} = x_1 = \alpha + \frac{x_{-1}}{x_0^k},\ x_0 = x_2 = \alpha + \frac{x_0}{x_1^k} = \alpha + \frac{x_0}{x_{-1}^k}.$$

Bu durumda (x_{-1}, x_0), (22) sisteminin bir çözümüdür. İkinci olarak (x_{-1}, x_0), (22) sisteminin bir çözümü olsun. Bu durumda,

$$x_1 = \alpha + \frac{x_{-1}}{x_0^k} = x_{-1},\ x_2 = \alpha + \frac{x_0}{x_1^k} = \alpha + \frac{x_0}{x_{-1}^k} = x_0.$$

Tümevarımdan $\forall n \geq -1$ için $x_{n+2} = x_n$. Açıkça, $x_{-1} \neq x_0$ için $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ iki periyotlu asal bir çözümdür.

Teorem 28'in $k \in \mathbb{N}$ için direk bir sonucunu verelim.

Sonuç 29:

(i) $\alpha = 1$ olsun. Bu durumda (1) denkleminin iki peryotlu asal bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $k = 1$ olmasıdır.

(ii) $k = 1$ olsun. Bu durumda (1) denkleminin iki peryotlu asal bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $\alpha = 1$ olmasıdır.

İspat:

(i) $\alpha = 1$ ve (1) denklemi $k = 1$ için iki peryotlu asal bir çözüme sahip olsun. Bu nedenle Teorem 28'den (22) sistemi, $x \neq y \neq 1$ olacak şekilde (x, y) çözümüne sahiptir. $k \in \{2, 3, ...\}$ için tersini varsayalım. Buradan,

$$xy^k = y^k + x,\ yx^k = x^k + y.$$

Dolayısıyla,

$$xy^k - yx^k = y^k - x^k - (y - x)$$

$$xy(y^{k-1} - x^{k-1}) = (y^k - x^k) - (y - k)$$

$$xy(y^{k-2} + y^{k-3}x + ... + yx^{k-3} + x^{k-2}) = y^{k-1} + y^{k-2}x + ... + yx^{k-2} + x^{k-1} - 1$$

$$y^{k-1}(x-1) + y^{k-2}x(x-1) + ... + yx^{k-2}(x-1) = x^{k-1} - 1.$$

$x \neq 1$ olduğundan,

$$y^{k-1}(x-1) + y^{k-2}x + ... + yx^{k-2} = x^{k-2} + x^{k-3} + ... + 1$$

$$(y^{k-1} - 1) + (y^{k-2} - 1)x + ... + (y-1)x^{k-2} = 0.$$

$y \neq 1$ olduğundan,

$$(y^{k-2} + y^{k-3} + ... + y + 1) + (y^{k-3} + y^{k-4} + ... + y + 1)x + ... + x^{k-2} = 0,\ k \geq 2$$

Bu da bir çelişkidir.

Tersine $k=1$ olsun. Bu durumda, $\forall x \neq 1$ için $(x, \frac{x}{x-1})$ (22) sisteminin bir çözümüdür ve $x_0 = \frac{x_{-1}}{x_{-1}-1}, x_{-1} \neq 1$ olacak şekilde x_{-1}, x_0 başlangıç değerli her $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü iki periyotlu asal bir çözümdür.

(ii) $k=1$ ve (1) denkleminin iki periyotlu asal bir $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü olsun. Bu durumda, (x_{-1}, x_0), (22) sisteminin bir çözümüdür ve $x_{-1} \neq x_0$. Bu nedenle $\alpha(y-x)-(y-x)=0$. Buradan $\alpha = 1$. Tersine $\forall x \neq 1$ için eğer $\alpha = 1$ ise, $(x, \frac{x}{x-1})$ (22) sisteminin bir çözümüdür.

KAYNAKLAR

ELAYDİ, S. N., 1996. An Introduction to Difference Equations. Springer-Verlag Inc., 389p, New York.

SIROVICH, L., 1988. Introduction to Applied Mathematics. Spinringer-Verlag, Inc., 370p, New York.

AMLEH, A. M., GROVE E. A., LADAS G., GEORGİOU D. A., 1999. On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$. Journal of Mathematical Analysis and Applications, (233) **;** 790–798.

HAMZA, A. E., 2006. On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$. Journal of Mathematical Analysis and Applications, (322); 668–674.

HAMZA, A. E., MORSY, A., 2009. On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{(x_n)^k}$. Applied Mathematics Letters, (22); 91–95.

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Şanlıurfa'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Şanlıurfa'da tamamladı. 2002 yılında Şanlıurfa Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2003 yılında Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2007 yılında mezun oldu.

ÖZET

$F(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k)) = 0$, k. mertebeden bir fark denkleminin çözüm yöntemleri ve stabilitesi için gerekli analiz yapıldı. Literatürde önemli yere sahip olan kaynağın Türkçe çevirisi yapıldı. Bunun yanında daha önce yayınlanmış birkaç makale çalışıldı.

SUMMARY

In this thesis firstly, we look into some details of the k order equation $F(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k)) = 0$. We give all necessary tools in order to study the stabılity analysis of this equation. To reach our main goal, in the Literature one of the most important books is translated into Turkish. Some important published articles are studied.