

**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FARKLI ETKİLEŞİMLİ POTTS MODELİNİN İNCELENMESİ

HASAN DOĞAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA

2012

Yrd. Doç. Dr. Selman UĞUZ danışmanlığında, Hasan DOĞAN'nın hazırladığı “Farklı Etkileşimli Potts Modelinin İncelenmesi” konulu bu çalışma 25/06/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Selman UĞUZ

Üye: Doç. Dr. Seyit TEMİR

Üye: Yrd. Doç. Dr. Devrim TARHAN

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre

Düzenlendiğini Onaylarım

Prof. Dr. Mehmet CİCİ

Enstitü Müdürü

Bu Çalışma TÜBİTAK Tarafından Desteklenmiştir.

Proje No: 109T678

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZ.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
KISALTMALAR DİZİNİ	iv
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel Kavramlar	4
1.1.1. Ising Modelinin Tarihçesi	4
1.1.2. Potts Modelinin Tarihçesi	8
1.1.3. Örgü Modelleri (Latis)	9
1.1.4. Grafikler (Graf Yapısı).....	11
1.1.5. Cayley Ağacı	11
1.1.6. Cayley Ağacı Üzerindeki Komşuluklar	14
1.1.7. Spin Değerleri Kümesi S.....	17
1.1.8. Kronecker Sembolü δ	18
1.1.9. Potts Modelinin Uygulamaları.....	18
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	24
3. MATERYAL ve YÖNTEM	27
3.1. Materyal.....	27
3.2. Yöntem	27
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	29
4.1. Üçüncü Mertebeden Cayley Ağacı Üzerindeki Potts Modelin Temel Denklemleri	29
4.2. İkinci Mertebeden Cayley Ağacı Üzerindeki Spin Kümesi q-Elementli Olan Potts Modelin Denklemleri	44
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	56
5.1. Sonuçlar	56
5.2. Öneriler	58
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ.....	66
EK-1:.....	67

Ek.1.1. Dördüncü Mertebeden Cayley Ağacı Üzerindeki Üç Spin Değerli Potts Modeli İçin ($k=4$ $q=3$) Temel Denklemler	67
ÖZET	96
SUMMARY	98

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1.1. Spinlerin herhangi bir andaki durumları (Kindermann ve Snell, 1980).....	5
Şekil 1.2. Spin durumları (Kindermann ve Snell, 1980)	7
Şekil 1. 3. Petek latisi.....	9
Şekil 1. 4. Kare latisi.....	10
Şekil 1. 5. Üçgen latisi.....	10
Şekil 1. 6. Genel bir graf örneği (Beaudin, 2007).....	11
Şekil 1. 7. İkinci mertebeden üç kabuklu Cayley ağacı.....	12
Şekil 1. 8. Üçüncü mertebeden üç kabuklu Cayley Ağacı	13
Şekil 1. 9. İkinci mertebeden yarı-sonsuz bir Cayley ağacı (Gök, 2011).	14
Şekil 1. 10. En yakın komşuluk olan x,y köşe noktaları.....	14
Şekil 1. 11. Bir seviye ikinci komşuluk olan x ve y köşe noktaları (Gök, 2011).....	15
Şekil 1. 12. Uzatılmış ikinci komşuluk olan x, y köşe noktaları (Gök, 2011).....	15
Şekil 1. 13. İki seviye üçlü komşuluk olan x,y,z köşe noktaları (Gök, 2011).	16
Şekil 1. 14. Uzatılmış üçlü komşuluk olan x,y,z köşe noktaları (Gök, 2011).	16
Şekil 1. 15. Yönelim durumları	17
Şekil 1. 16. İnsanın biyolojik hücrelerini temsil eden latis.....	19
Şekil 1. 17. Tümör büyüme deneyinin sonuçları (Sun ve ark. 2004).....	20
Şekil 1. 18. İnsan davranışları (Beaudin, 2007).....	20
Şekil 1. 19. Dört farklı grup ile oluşan komşuluk.....	21
Şekil 1.20. Potts modelin fiziksel uygulamasında yangınla mücadele (Beaudin, 2007)	22
Şekil 1. 21. Köpükleri incelemek için kullanılan latis.....	22
Şekil 4. 1. $Z^{(n)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ üzerine kurulmuş olan dallar	37
Şekil 4. 2. $Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ üzerine kurulmuş olan dallar.....	38
Şekil 4. 3. $q=3$ ve $\gamma = 0$ için faz diyagramı.....	41
Şekil 4. 4. $q=3$ ve $\gamma = 1$ için faz diyagramı	42
Şekil 4. 5. $q=3$ ve $\gamma = -1$ için faz diyagramı.....	42
Şekil 4. 6. $q=3$ ve $\gamma = -2$ için faz diyagramı.....	43
Şekil 4. 7. Yarı sonsuz Cayley ağacı üzerindeki etkileşimler	44
Şekil 4. 8. $q=5$ ve $\gamma = 2$ için faz diyagramı.....	51

Şekil 4. 9. $q=6$ ve $\gamma = 0.001$ için faz diyagramı	51
Şekil 4. 10. $q=6$ ve $\gamma = 1$ için faz diyagramı.....	52
Şekil 4. 11. $q=6$ ve $\gamma = 2$ için faz diyagramı.....	52
Şekil 4. 12. $q=6$ ve $\gamma = -1$ için faz diyagramı.....	53
Şekil 4. 13. $q=6$ ve $\gamma = -2$ için faz diyagramı	53
Şekil 4. 14. $q=10$ ve $\gamma = 0.001$ için faz diyagramı	54
Şekil 4. 15. $q=10$ ve $\gamma = 2$ için faz diyagramı.....	54
Şekil 4. 16. $q=10$ ve $\gamma = 0$ için faz diyagramı.....	55
Şekil 4. 17. $q=20$ ve $\gamma = 0$ için faz diyagramı.....	55
Şekil 5.1. Herhangi k -mertebeden yarı-sonsuz Cayley ağacı.....	58
Şekil 5.2. Birinci seviye Cayley-benzeri üçgensel avize (Triangular Chandelier) ağacı	59
Şekil 5.3. Cayley-benzeri üçgensel avize (Triangular Chandelier) ağacı.....	59
Şekil 5.4. Birinci seviye Cayley-benzeri dörtgensel avize (Rectangular Chandelier) ağacı (Bakınız kaynaklar).	60
Şekil 5.5. Cayley-benzeri dörtgensel avize (Rectangular Chandelier) ağacı.....	60
Şekil 5.6. Cayley-benzeri beşgensel avize (Pentagonal Chandelier) ağacı.....	61
Şekil 5.7. Cayley-benzeri beşgensel avize (Pentagonal Chandelier) ağacı.....	61
Şekil 5.8. Yarı sonsuz k -mertebeli Cayley ağacı.....	62
Şekil Ek-1.1 $Z^{(n)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ üzerine kurulmuş olan dallar	88
Şekil Ek-1.2: $q=3$ ve $\gamma = 0$ için faz diyagramı	95
Şekil Ek-1.3: $q=3$ ve $\gamma = 1$ için faz diyagramı.....	95
Şekil Ek-1.4: $q=3$ ve $\gamma = -1$ için faz diyagramı	96

ÖZ

Yüksek Lisans Tezi

FARKLI ETKİLEŞİMLİ POTTS MODELİNİN İNCELENMESİ

Hasan DOĞAN

**Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Selman UĞUZ

Yıl: 2012, Sayfa: 98

Bu tezde q -durumlu Potts modeli için iterasyon denklemleri elde ederek denklem sistemi nümerik olarak incelenmiştir. İkinci mertebeden bir Cayley ağacı üzerinde en yakın komşuluk,uzatılmış ikinci komşuluk ve iki seviyeli üçlü komşuluk etkileşimli $S=\{1, 2, 3, \dots, q\}$ spin durumlu Potts modelinin lineer olmayan denklem sistemleri ve onlara karşılık gelen faz diyagramları daha önceki çalışmalardan esinlenerek elde edilmiştir. Ayrıca üçüncü mertebeden bir Cayley ağacı üzerinde en yakın komşuluk uzatılmış ikinci komşuluk ve iki seviye üçlü komşuluk etkileşimli Potts modelinin $q=3$ spin durumlu faz diyagramları incelenmiştir. Bu tez çalışmamızda genelleştirilmiş üçlü kronecker deltası kullanılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Cayley Ağacı, Potts Modeli, Karşılıklı Etkileşim, Faz Diyagramı

ABSTRACT

Master Thesis

INVESTIGATION OF POTTS MODEL WITH DIFFERENT COMPETING INTERACTIONS

Hasan DOĞAN

**Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Selman UĞUZ

Year: 2012, Page: 98

In this thesis, q -state Potts model by achieving a system of equations numerically for the iteration equations were investigated. The second-order nearest neighbor on a Cayley tree, the second neighborhood and extended neighborhood of two-level interactive triple $S = \{1, 2, 3, \dots, q\}$ spin-state Potts model and their corresponding phase diagrams of systems of nonlinear equations inspired by earlier studies were obtained. In addition, a third-order Cayley tree extended over the second nearest neighbor neighborhood, and two levels of interactive three-state Potts model, $q = 3$ spin phase diagrams were investigated. In this thesis study the generalized triple Kronecker delta has been used.

KEY WORDS: Cayley Tree, Potts Model, Competing Interactions, Phase Diagram

TEŞEKKÜR

Yoğun alıőma ve uęraőlar sonucu ortaya ıkan bu tezimin hazırlanmasında benden hibir yardımı esirgemeyen değerli danışman hocam Yrd. Do. Dr. Selman UğUZ'a ve fikirleriyle beni yönlendiren çok değerli hocalarım Prof. Dr. Nasir GANIKHODJAEV, Doç. Dr. Seyit TEMİR ve Doç. Dr. Hasan AKIN'a ayrıca bu çalışmada bilgisayar yazılımı alanında verdiği desteklerden dolayı değerli arkadaşlarım Ahmet AVCI ve Abdulkadir TEKPINAR' a çok teşekkür ederim.

KISALTMALAR DİZİNİ

ANNNI Modeli	Axial Next-Nearest-Neighbor Ising Modeli
NN	Nearest- Neighbor
NNN	Next-Nearest-Neighbor

1.GİRİŞ

Doğa kanunlarını anlamının bir yolu, mikroskopik seviyedeki madde içeriklerinin, örneğin atom ve moleküllerin dinamik davranışlarının araştırılması ve görüp dokunabildiğimiz nesnelerin içeriğinde çok sayıda var olan bu atom ve moleküllerin davranışlarının belirlenmesidir. İstatistik mekaniğinin ve fiziğin güncel bir araştırma alanı olan bu konu, yüksek yapı seviyeli iyi organize olan bir sistem için matematiksel bir çerçeve imkânı sağlamakta ve çok sayıda etkileşimli düşük seviye nesnelerin yönlendirilmemiş hareketleri ve rastgele davranışlarından kaynaklanan davranışları incelenmektedir.

Makroskopik bazı sistemlerin davranışlarının farklı yönden anlaşılması, örneğin suyun kaynaması ve donması gibi, atom etkileşimleri ve yapılarının basite indirgenmiş modellerinden elde edilebilir. İstatistik mekanik küçük parçacıkların etkileşimli davranışlarını makroskopik olaylarda nasıl cerayan ettiğini açıklamaktadır.

İstatistik mekaniğin önemli bir örneği denge sistemlerindeki faz geçiş olayıdır. Bu olayların bazıları birbirinden bağımsız ve atomların basitçe birbiri ile olan etkileşimleridir. Örneğin, bir kap içerisinde yer alan gaz moleküllerinin kap içerisindeki çepere devamlı oluşturduğu basınçtır.

Örgü modelleri genel manada temel istatistik mekaniğin farklı yönlerini açığa çıkarmak için oluşturulan karikatürlerdir, özellikle faz geçiş olayı ve kendiliğinden simetri kırılması durumunda olduğu gibi. Bütün modeller içerisinde en basiti Ising modelidir. Orijinalinde ferromanyetik model olarak görülen Ising modelinin, fizik, kimya, biyoloji, tıp, bilgisayar bilimleri ve hatta sosyoloji alanında birçok uygulamaları bulunmaktadır.

Ising, 1925 yılında kendi danışmanı Lenz tarafından önerilen ve bugün Ising modeli olarak adlandırılan modeli bir-boyutlu olarak çözmüştür. Ising, bir-boyutta hatta herhangi bir boyutta faz geçişinin olmadığını öne sürmüştür. Fakat literatür özetinde de bahsedileceği gibi bu önermesinin yanlış olduğu ispatlanmıştır (detaylı

literatür için kaynaklara bakınız). Potts modeli, Ising modelinin bir genelleştirilmesidir. Ising modelinde spin sayısı iki ($q=2$) (*pozitif ve negatif -1, +1*) iken Potts modelinde ise spin sayısı ikiden büyüktür ($q>2$) (*sıfır 0, pozitif ve negatif -1, +1*)'dir.

Örgü modelleri, özellikle faz geçiş olayı ve kendiliğinden simetri kırılması durumunda olduğu gibi, istatistik mekaniğin farklı yönlerini açığa çıkarmak için oluşturulan karikatürlerdir. Bütün örgü modeller içerisinde en basit olanı Ising modelidir. Bu modelde yaygın olarak istatistik mekaniğin konularından birisi olarak incelenmektedir.

Hemen her zaman karşı karşıya bulunduğumuz doğada mevcut olan kanunları anlamının bir yolu, mikroskobik seviyedeki madde içeriklerinin, örneğin atom ve moleküllerin dinamik davranışlarının araştırılması ve görüp dokunabildiğimiz nesnelerin içeriğinde çok sayıda var olan bu atom ve moleküllerin davranışlarının belirlenmesidir. Bu konu istatistik mekaniğinin güncel araştırma konularından birisidir.

Sonlu sayıda dala sahip olan Cayley ağacı (literatürde diğer kullanılan adı: Bethe örgüsü) üzerinde verilen Hamiltonyanlarla belirlenen Ising ve Potts modellerinin dinamik davranışları uzun yıllardan beri incelenmesine rağmen bu konu bütün detayları ile henüz çözülememiştir. Tez kapsamında incelediğimiz modeller her ne kadar temel bilimlerdeki konulara karşılık gelen realistik modellere örnek teşkil etmeseler de bu modellerimizin temel bilimlerdeki yeni problemlere ilham kaynağı olacağını inanmaktayız.

Cayley ağacı elastik yapıda bir latis olmadığı bilinmektedir. Fakat ağacın şaşırtıcı topolojisi pek çok kez çözümün elde edilmesini mümkün kılar. Ağaç üzerinde pek çok problemin çözümü düzenli latislerden daha basittir ve standart Bethe-Pierls teoremine eşittir (Katsura and Takizawa, 1974).

Ising modeli (ANNNI modeli) farklı şekillerde ortaya atılmıştır. Ostlund ve Huse (1981) de Kiral Potts modelini öne sürmüştür ve modüle edilmiş yönelim için

idealleşmiş sistemler arasında orijinal olarak Elliot (1981) tarafından pek çok teknikte günümüzde yaygın olarak çalışmaktadır.

Cayley ağacı üzerinde bu modeller tanımladığı zaman, rekabetçi etkileşimden oluşan Ising modelinin durumu Vannimenus (1981) tarafından incelenmiştir. Çekici dönüşümlerin ilginç fiziksel çözümlere karşılık geldiğini Vannimenus (1981) göstermiştir. Bu durum tüm faz diyagramlarının detaylı çalışmasını ve nümeriksel işlemlerin oldukça sadeleştirmeyi mümkün kılmıştır

Fazların iç yapısını, fazın dengesini ve bir fazdan diğer bir faza geçişi faz diyagramı olarak ifade edilir. Cayley ağacı üzerinde aşık olmaya manyetik yönelimlerin görünümünden dolayı Potts modeli de Ising modeli gibi yaygın olarak çalışmaktadır.

Vannimenus (1981) en yakın komşuluk (NN) etkileşimleri bağlantı sabiti J ve uzatılmış komşuluk etkileşimlerinin J_p bağlantı sabiti içeren bir Ising modeli durumunda paramanyetik ve ferromanyetik fazlar dışında yeni fazlarda bulmuştur. Basit nümeriksel metotlar kullanılarak kesin çözümler ile Ising modelinin daha detaylı çalışması yapılmıştır.

Bu durum yeni fazları keşfetmek ve farklı davranış tiplerini ortaya çıkarmak umuduyla daha karmaşık modellerde çalışabileceğini belirtmektedir.

Cayley ağacı üzerindeki latis modellerini karşılık gelen dinamik sistemlerin limit davranışlarını belirlemek için farklı yaklaşımlar literatürde yer almaktadır. Bunlardan birisi dinamik sistemlere karşılık gelen ayrışım fonksiyonlarına bağlı olan yinelemeleri denklemler ile alakalıdır.

Diğeri ise Cayley ağacı üzerindeki Markov random alanlarının özellikleriyle ilgilidir. Çoğu sistem çözümlerinde ise dinamik sistemlere karşılık gelen bölüşüm (partition) fonksiyonlarına bağlı olan rekursif (recursive) denklemleri ile ilişkilidir. Örgü modelleri için faz geçiş problemlerinin tam çözümünün bulunması genel olarak zordur. Ancak bazı yaklaşım metotları kullanılarak tam çözümleri elde edilebilir.

Bu çalışmada, yukarıda bahsedilen birinci yaklaşım metodu kullanılacaktır. Cayley ağacı üzerindeki latis modelleri için yinelemeli denklemlerin elde edilmesi

analizi ve bu denklemlere karşılık gelen faz diyagramlarının bilgisayar program dili kullanılarak çözümlenmesi hedeflenmektedir.

Potts modelinin ikinci ve üçüncü komşuluklar arasındaki etkileşmeleri de içeren yeni Hamilton denklemleri yardımıyla rekursif(Birbirini tekrar eden) denklemler Vannimenus'den esinlenerek elde edilecek bir metotla bulunacaktır. Bu modeller için elde edilecek olan rekursif denklemlerin $(z_i^{(n+1)})$ analizleri yapılacaktır. Daha sonra bulunan denklemler yardımı ile iterasyon denklemleri elde edilecektir. Burada etkileşime bağlı olarak elde edilen $(x^{(n)}, y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, y_3^{(n)}) \in \mathbb{R}^4$ iterasyon denklemlerinde belli başlangıç değerlerine göre elde edilen denklem sistemlerin limit davranış analizleri yapılacaktır.

1.1. Temel Kavramlar

1.1.1. Ising Modelinin Tarihçesi

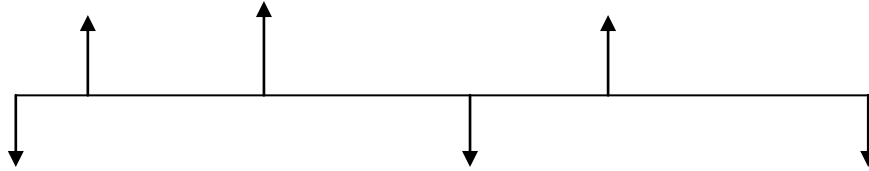
Ising, 1925 yılında kendi danışmanı Lenz tarafından önerilen ve bugün Ising modeli olarak adlandırılan modeli bir-boyutlu olarak çözmüştür. Orijinalinde ferromanyetik model olarak görülen Ising modelin, bir-boyutta hatta herhangi bir boyutta faz geçişinin olmadığını önerilmiştir. Ancak pek çok çalışmada faz geçişinin varlığı açıkça ispatlanmıştır. Ağaç örgüleri üzerindeki istatistik mekaniğin önemli bir noktası lineer olmayan yinelemeli denklemler ile ilgilidir ve bunlar doğal olarak dinamik sistemlerin zengin dünyası ile bağlantılıdır. Aynı zamanda yoğun olarak çalışılan güncel bir konudur.

Ising modelleri ilk olarak manyetik sistemler için ortaya konmakla beraber günümüzde çok geniş bir yelpazedeki araştırma konularının incelemesinde kullanılmaktadırlar. Bu sistemlere örnek olarak moleküler nanomıknatıslar, manyetik ince filmler, manyetik akışkanlar ve spin camları verilebilir. Tüm bu sistemler günümüz teknolojisinde büyük önem arz etmekte ve teknolojinin geliştirilmesine yönelik çalışmaların konusu olmaktadır. Örneğin kuantum bilgisinin depolanmasında kullanılabileceği düşünülen moleküler mıknatıslar ileride bilişim teknolojisinde devrim yapacağına inanılan kuantum bilgisayarlarında kullanılma

potansiyeline sahiptirler. Bu model fiziksel sistemlere ek olarak birçok disiplinler arası konuda da kullanılmaktadır. Bu alanlara örnek olarak ekonomi ve sosyoloji verilebilir.

Ising, Lenz'in öğrencisiydi ve Ising modeli olarak adlandırılan konu üzerine doktora tezini yazdı. Ising (1925) ,bu modeli kullanarak deneysel anlamda ferromanyetik maddeler hakkında bazı gerçekleri inceledi. Ising (1925), bulduğu sonuçların bir özetini yayımladığı zaman modelin Lenz tarafından önerildiğini söyledi. Lenz tarafından yayımlanan makalede modelin yüzeysel bir düşüncesi verilmiştir.

Ising, eksen üzerinde noktaların bir dizisini $0,1,2,\dots, n$ şeklinde düşünmüştür. Her bir nokta veya köşe de küçük bir dipol veya spin vardır. Spin verilen herhangi bir anda yukarı veya aşağı durumlardan birisidir. Bu genel olarak aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi konfigürasyonlar formunda spin durumlarını belirtir.



Şekil 1.1. Spinlerin herhangi bir andaki durumları (Kindermann ve Snell, 1980)

Ising (1925), tüm mevcut konfigürasyonların kümesi üzerine bir olasılık ölçümü yerleştirmiştir. Böyle bir ölçüm Random alanı olarak adlandırılır. Güncel olasılık notasyonu kullanılarak tüm dizilerin Ω uzayını en basit uzay olarak aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$$

burada $\omega_j = +$ veya $\omega_j = -$ dir. “+” spin yukarısını “-” spin aşağısını belirtmektedir. O halde Ω üzerinde tanımlı σ_j spinini bir fonksiyon olarak düşünebiliriz. Eğer $\omega_j = +$ ise $\sigma_j(\omega) = 1$ ve eğer $\omega_j = -$ ise $\sigma_j(\omega) = -1$ dir.

Ising (1925), Ω üzerinde bir olasılık ölçümünü aşağıdaki şekilde tanımlamıştır. Her bir ω konfigürasyonu için $U(\omega)$ enerjisi;

$$U(\omega) = -J \sum_{i,j} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega) - mH \sum_i \sigma_i(\omega) \quad (1.1)$$

denklemleri ile belirlenmektedir (Kindermann ve Snell, 1980).

Burada ilk toplam bir ünitenin parçası olan noktaların tüm i,j çiftleri üzerinde alınmıştır. İlk terim, spinlerin etkileşiminden meydana gelen enerjiyi temsil eder. Ising, sadece hesaba katılacak komşu spinler arasındaki etkileşimleri basit olarak toplamıştır. J bağlantı sabiti, düşünülen maddenin bir özelliğidir.

$J > 0$ durumu çekici durum olarak adlandırılır. Bunun sebebi etkileşim içinde olan komşu spinlerin aynı seviyede kalma eğiliminde olduğu içindir.

$J < 0$ durumu itici durum olarak adlandırılır. Çünkü etkileşim içindeki spin çiftlerinin birbirlerini zıt yöne itme eğiliminde oldukları içindir.

İkinci terim, bir H yoğunluğunun dış manyetik alanının etkisini gösterir. $m > 0$ sabiti, maddenin bir özelliği olup çekici durumda, ilk terimdeki tüm spinlerin yönelimleri yukarı olduğu zaman minimum enerjiye katkı sağlamaktadır. İkinci terimde ise tüm spinlerin yönü dış alanla aynı yönde olursa minimum enerjiye katkı sağlamaktadır.

Ising (1925), ω konfigürasyonları için olasılıkları;

$$e^{-\frac{1}{kT}U(\omega)} \quad (1.2)$$

şeklindeki bir oran ile belirlemiştir (Kindermann ve Snell, 1980).

Burada T sıcaklık ve k bir evrensel sabittir. Ω üzerinde ki olasılık ölçümü;

$$P(\omega) = \frac{e^{-\frac{1}{kT}U(\omega)}}{Z} \quad (1.3)$$

burada normalleştirme sabiti Z ise;

$$Z = \sum_{\omega} e^{-\frac{1}{kT}U(\omega)} \quad (1.4)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada Z ayrışım fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır (Kindermann ve Snell, 1980). Bu ölçümü düşünmenin yararlı bir yolu aşağıdaki gibi açıklanmıştır. Her bir i noktasıyla ilişkili bir U_i enerjisi;

$$U_i(\omega) = \frac{-J}{2} \sum_{|i-j|=1} \sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega) - mH\sigma_i(\omega) \quad (1.5)$$

şeklinindedir (Kindermann ve Snell, 1980).

O halde
$$P(\omega) = \frac{1}{Z} \prod_i e^{-\frac{1}{kT}U(\omega)} \quad (1.6)$$

şeklinde yazılabilir (Kindermann ve Snell, 1980). Bu yüzden bir konfigürasyonun göreceli olasılığı, tüm noktalar üzerinde bir çarpım olarak basit bir şekilde elde edilebilir ve noktanın ağırlığını belirlemek için her bir noktada var olan enerji kullanılmaktadır.

İki boyutlu bir latis üzerinde tipik bir konfigürasyon aşağıdaki şekilde düşünülmüştür (Kindermann ve Snell, 1980). Bir nokta ve bu noktanın komşusu arasındaki etkileşimle enerji tanımlanmıştır. Olasılık ölçümü de (1.2), (1.3) ve (1.4)' de olduğu gibi tanımlanmaktadır. Aşağıdaki şekilde iki boyutta sınır olmaksızın bir noktanın 4 komşusu vardır.

```

+ + - - + - - + + - + - + + +
+ + - + + - + - + - + - + + +
+ + + + - - - + + + - - + + +
+ + + + + - - - - + + + + + +
+ + - - - - + + - + - + - - +

```

Şekil 1.2. Spin durumları (Kindermann ve Snell, 1980)

Ising (1925), sadece manyetik yorumu dikkate alırken bu model birçok fiziksel ve biyolojiksel alanda da örneğin gazlar, ikili alaşımlar ve hücre yapılarında da uygulanabilir olarak bulunmuştur.

Sosyolojik olarak Potts modelinin bir uygulaması, Weidlich (1971) tarafından yapılmıştır. Burada bir grup insan düşünülmüştür. İnsanların her birinin durumu verilen bir anda ya özgürlükçü (aşağı) ya da tutucu (yukarı) olarak seçilmiştir. Burada meydana gelecek enerji gerilim olarak adlandırılmıştır. (1.1)' deki birinci ifade insanların etkileşimlerinden meydana gelen gerilimdir. Buradaki dış alan ise hükümetin özgürlükçü ya da tutucu durumu olabilir.

Eğer tüm insanlar birbirleriyle ve hükümet ile aynı fikirde iseler minimum gerilim meydana gelmektedir. Tabi ki böyle bir uygulamada özel komşulukların ve düzenli latis için sınırlamanın ihmal edilmesi gerekebilir (Weidlich, 1971).

1.1.2. Potts Modelinin Tarihçesi

Potts modelinin kökeni 1900 yılların ortalarına dayanmaktadır. Cyril Domb, doktora öğrencisi Renfrey B. Potts'a bu modeli doktora tez konusu olarak önermiştir. Bir sistem içindeki çeşitli elemanların davranışlarını göstermek için matematiksel bir model kullanılan ilk kişiler arasında Julius Ashkin ve Edward Teller (Baxter , 1982), vardır.

Ashkin ve Teller'in kurduğu temel ile Potts, çok faydalı bir model inşa etmiştir ve bu önemli modeli 1952 yılında yayınladığı çalışmada açıklamıştır. Modelin formu günümüzde q - durumlu potts modeli olarak bilinmektedir

Potts modeli, ikiden fazla bileşen ($q>2$) için Ising modelinin bir genelleştirmesidir. Ayrıca istatistiksel fizikte ki pek çok problemin çözümünü Potts modeli içermektedir (Wu,1982).

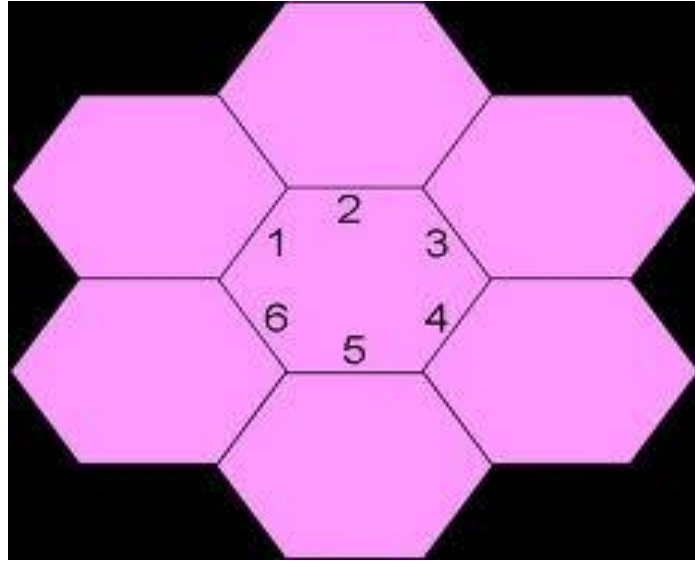
Potts modeli kompleks sistemlerin stokastik sonuçlarını tahmin etmek için bilim adamları ve matematikçiler tarafından kullanılmaktadır. Bundan dolayı Potts modeli kullanılarak istatistiksel mekanik alanında pek çok uygulama yapılmaktadır.

Potts modeli sistem elemanlarının birbirleriyle olan etkileşimlerini incelemektedir Potts modeli fizik, kimya, biyoloji ve sosyoloji gibi alanlarda çok geniş uygulama sahasına sahip kullanışlı bir matematiksel modelleme aracı olarak görev görmektedir.

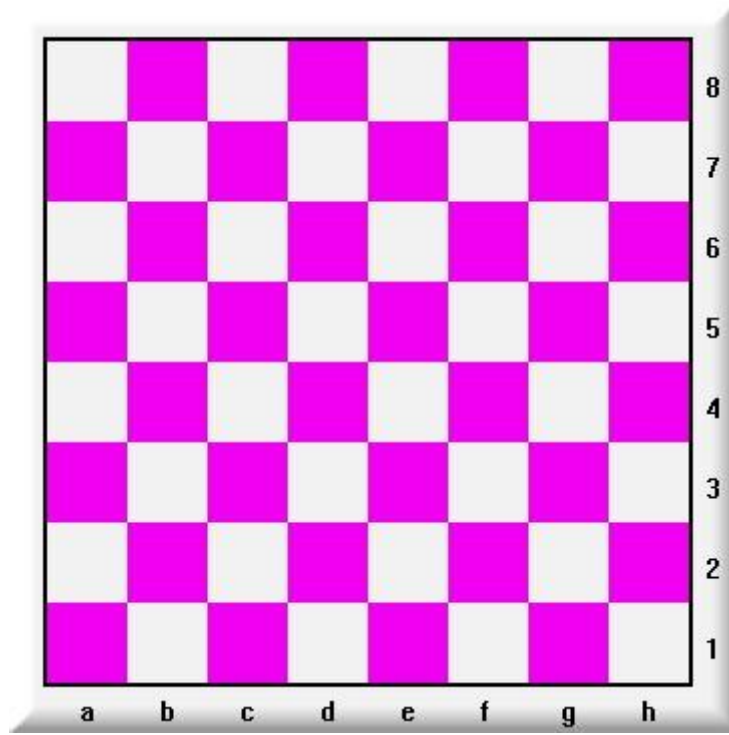
1.1.3. Örgü Modelleri (Latis)

Örgü modelleri, geometrik örgü şekillerine veya modellerine denir. Örgü modelleri sonlu, sonsuz veya periyodik olabileceği için bunlar değişik şekillerde isimlendirilebilir.

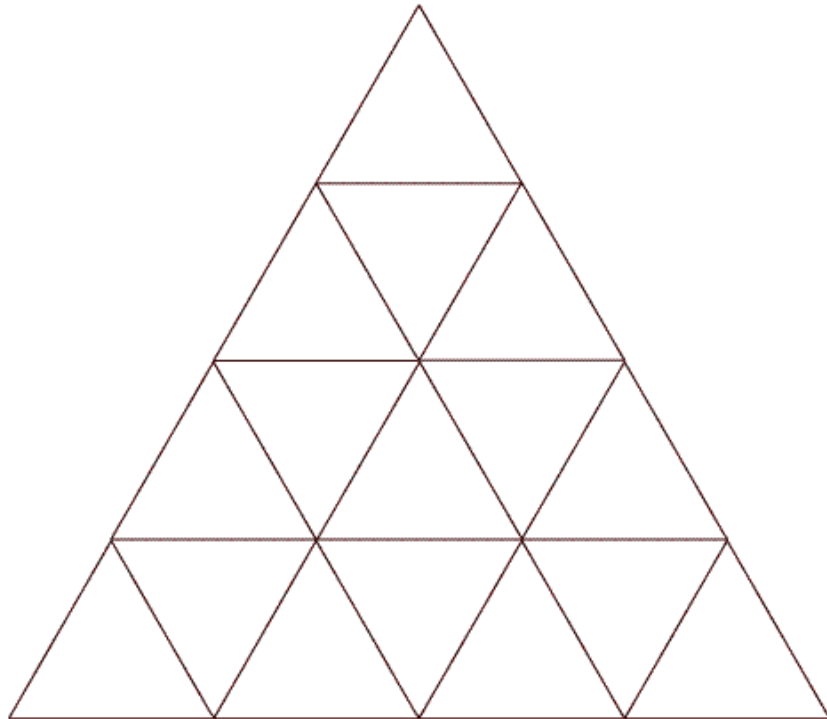
Örgü modelleri düzenli bir yapıya sahiptir. Aşağıdaki gibi bazı genel latis örnekleri verilebilir.



Şekil 1. 3. Petek latisi



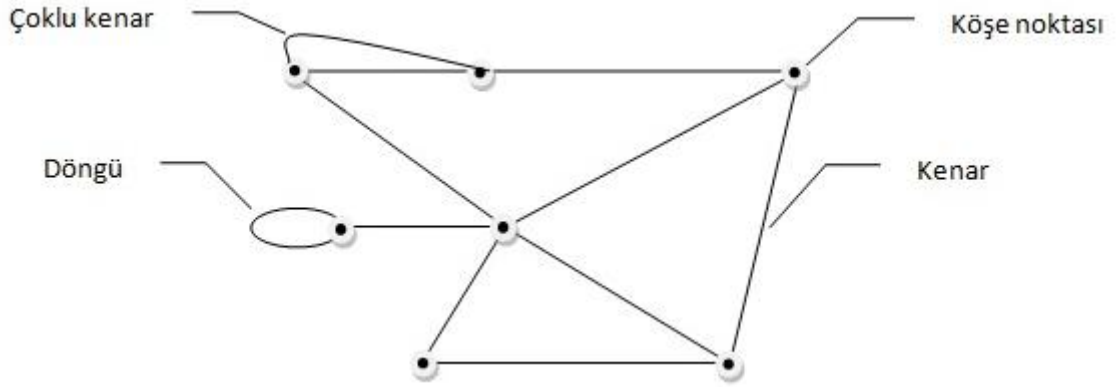
Şekil 1. 4. Kare latisi



Şekil 1. 5. Üçgen latisi

1.1.4. Grafikler (Graf Yapısı)

$G=(\wedge, \vee)$ ikilisi genel bir grafi temsil eder. Burada \wedge , G grafi üzerindeki kenarların kümesini, \vee ise G grafi üzerindeki köşe noktalarının kümesini temsil eder. Eleman çiftleri arasındaki potansiyel etkileşimleri kenarlar temsil eder, bir nesnenin veya sistemin iç elemanlarını ise köşe noktaları ifade etmektedir.



Şekil 1. 6. Genel bir graf örneği (Beaudin, 2007)

Tanım 1.1.1. iki köşe noktası $x, y \in V$ olmak şartıyla bir kenarla bu noktalar birbirine bağlanabiliyorsa bu iki köşe noktası birbirinin komşusudur denir.

Tanım 1.1.2. Bir graf tarafından modelleneyen nesnelere meydana gelen yapıya kompleks sistem denir.

İnsanlar, hayvanlar, bitkiler, hücre organizasyonları ve atomlar kompleks sistemlere örnek olarak verilebilir.

Tanım 1.1.3. Herhangi iki köşe arasındaki kenarlarının bir yolu mevcut olan graf içindeki köşelerini maksimum alt kümesi, bir G grafının birbirine bağlı bir bileşenidir.

1.1.5. Cayley Ağacı

Cayley Ağacı oluşturulurken merkezi bir "0" noktasından başlar ve tümü "0" noktasına bağlı bir q nokta ilave edilir. Bu q noktaları takımı birinci kabuk (shell)

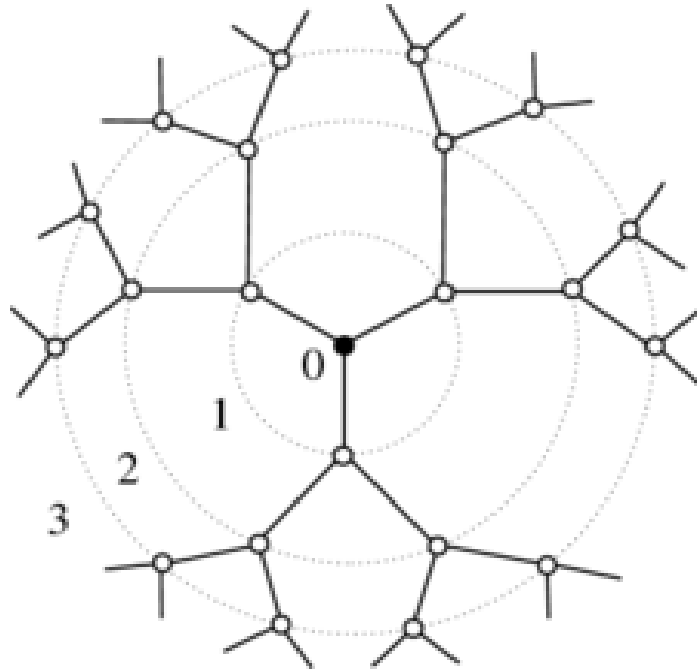
olarak adlandırılır. Daha fazla kabuk oluşturmak için r . kabukta bir nokta alınır ve bu noktaya

$(q-1)$ tane yeni nokta eklenir. Bu işlem r . kabuktaki bütün noktalar için yapılır ve bu yeni noktalar takımı $(r+1)$. kabuk olarak adlandırılır.

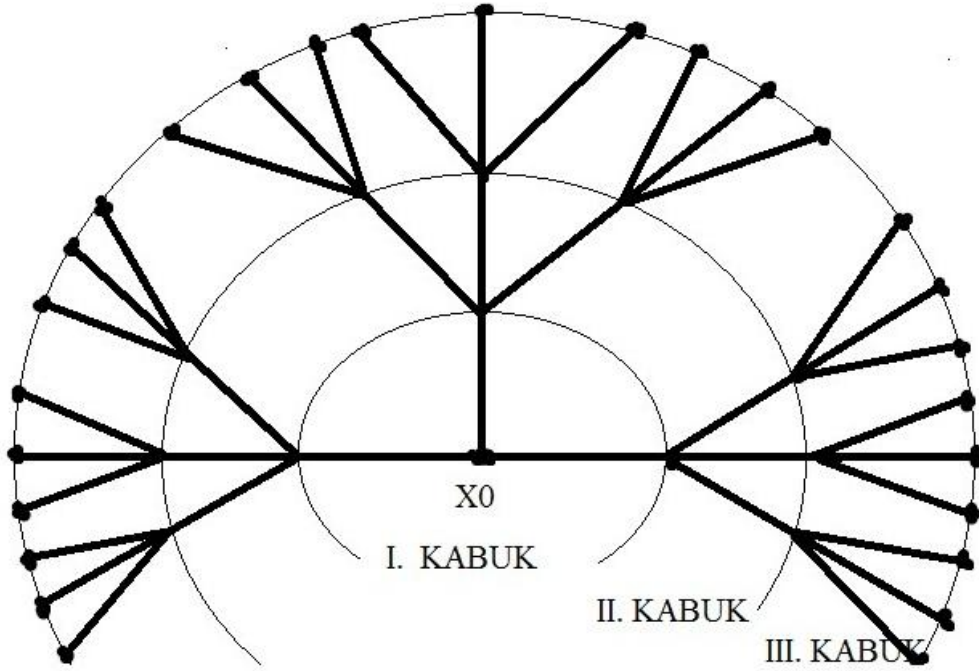
Bu şekilde iterasyonel olarak ilerleyerek; $2, 3, \dots, n$ kabukları oluşturulur. Burada sınır noktaları hariç her bir noktanın q tane en yakın komşusu vardır. r . kabukta $q(q-1)^{r-1}$ nokta ve grafikteki toplam nokta sayısı

$$\frac{q[(q-1)^n - 1]}{(q-2)} \quad (1.7)$$

ile verilir n . Kabuktaki noktalar sınır noktalarıdır. Bunların sadece birer tane komşuları olması nedeniyle diğerlerinden farklıdır, fakat diğer bütün noktaların (iç noktalar) her birinin q tane komşusu vardır. Bu şekildeki bağlantısız olarak oluşturulan grafik Cayley Ağacı olarak tanımlanır.



Şekil 1. 7. İkinci mertebeden üç kabuklu Cayley ağacı

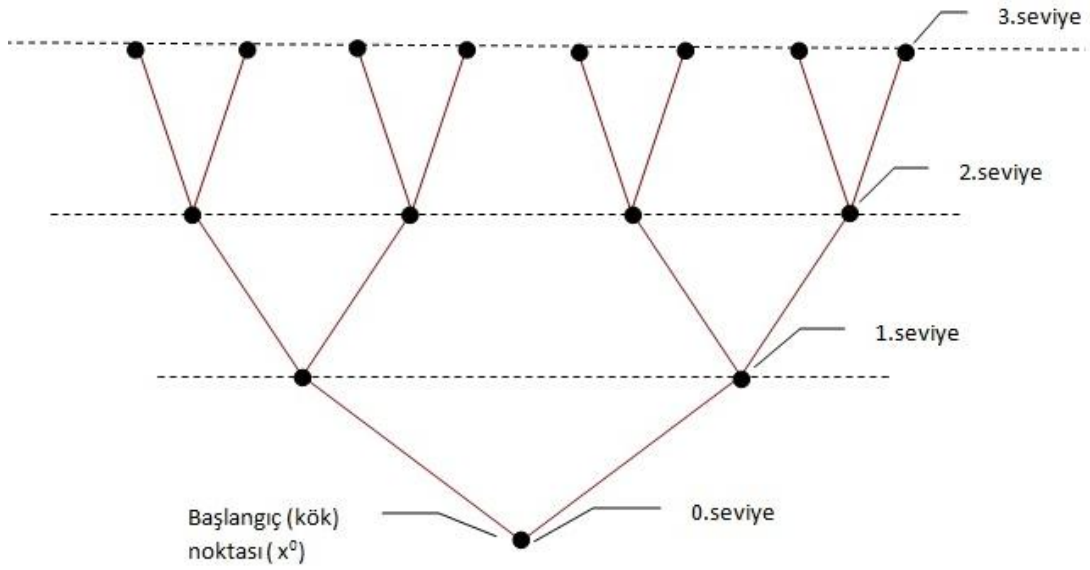


Şekil 1. 8. Üçüncü merteben üç kabuklu Cayley Ağacı

Cayley ağacının diğer bir tanımı ise;

k -mertebeden ($k \geq 1$) Cayley ağacı Γ^k , her bir köşe kenarından (X^0 hariç) $k+1$ tane kenarın sonsuz şekilde uzandığı bir latis modelidir. $\Gamma^k = (V, \wedge)$ şekilde ifade edilen Cayley ağacı için köşe noktalarının kümesini V ve kenarının kümesini ise \wedge ile gösterilmektedir.

$x, y \in V$ olmak üzere x ve y arasındaki en kısa yol üzerindeki kenarların sayısı, $d(x, y)$ olarak tanımlanır. $X^0 \in V$ herhangi belirlenmiş bir nokta olmak üzere bu noktaya göre seviyeler kümesi $W_n = \{x \in V(d(x, X^0)) = n\}$ ve $V_n = \{x \in V(d(x, X^0)) \leq n\}$ şeklinde tanımlanır.

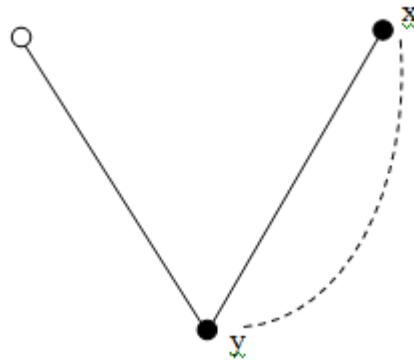


Şekil 1. 9 . İkinci mertebeden yarı-sonsuz bir Cayley ağacı (Gök, 2011).

1.1.6. Cayley Ağacı Üzerindeki Komşuluklar

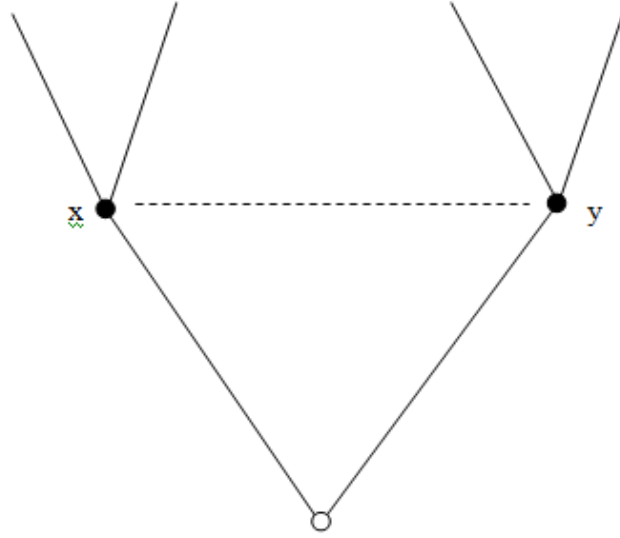
Cayley ağacı üzerinde, en yakın komşuluk, bir seviye ikinci komşuluk, uzatılmış ikinci komşuluk, iki seviye üçlü komşuluk ve uzatılmış üçlü komşuluklar vardır.

Eğer iki köşe nokta x ve y yi birleştiren bir kenar varsa “ en yakın komşuluk “ olarak tanımlanır ve $\langle x,y \rangle$ şeklinde ifade edilir.



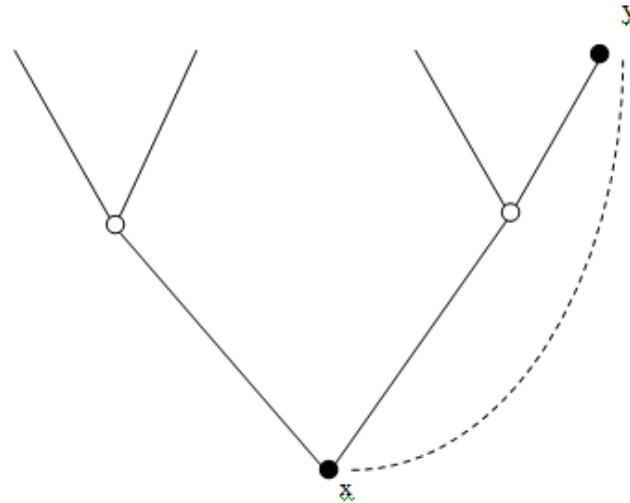
Şekil 1. 10. En yakın komşuluk olan x,y köşe noktaları

Uzatılmış ikinci komşuluk ise $x, y \in V$ köşe noktaları arasındaki uzaklığın $d(x, y) = 2$ olmasıdır. Uzatılmış ikinci komşuluğun iki farklı durumu vardır. Bunlardan birine bir seviye ikinci komşuluk adı verilir ve $\overline{\langle x, y \rangle}$ şeklinde gösterilir



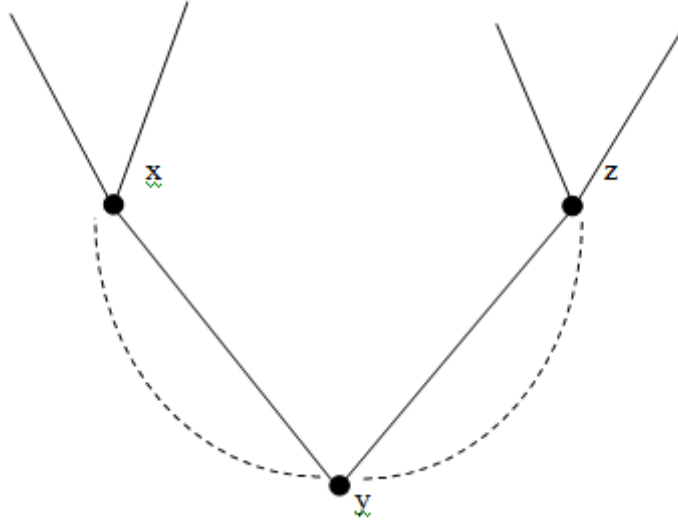
Şekil 1. 11. Bir seviye ikinci komşuluk olan x ve y köşe noktaları (Gök, 2011).

Diğerine ise uzatılmış ikinci komşuluk adı verilir ve $\overline{\langle x, y \rangle}$ ile gösterilir. Şekli aşağıdaki gibidir.



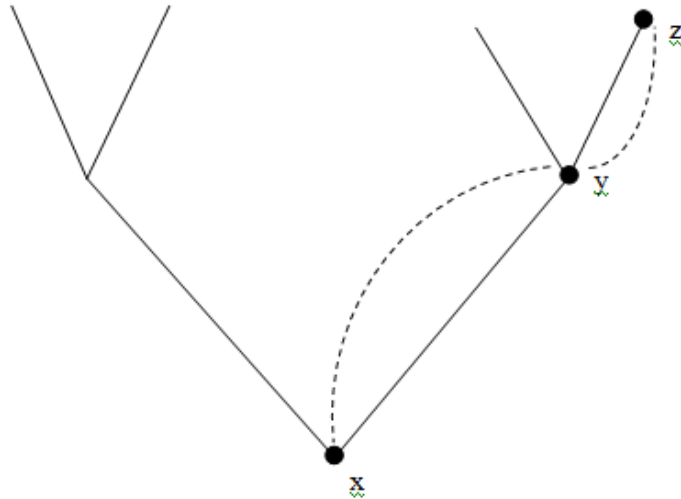
Şekil 1. 12. Uzatılmış ikinci komşuluk olan x, y köşe noktaları (Gök, 2011).

Üçlü komşuluklar ; $x, y, z \in V$ köşe noktaları arasında $\langle x, y \rangle$ ve $\langle y, z \rangle$, $x \neq z$ olacak biçimde en yakın komşuların var olmasıdır. Üçlü komşuluklar ikiye ayrılır. Birincisi iki seviye üçlü komşuluktur ve $\langle x, y, z \rangle$ şeklinde gösterilir. Burada x ve z aynı seviyededir.



Şekil 1. 13. İki seviye üçlü komşuluk olan x, y, z köşe noktaları (Gök, 2011).

Diğer durum ise; uzatılmış üçlü komşuluktur. $\overline{\langle x, y, z \rangle}$ şeklinde gösterilir. Burada $x \in W_n$, $y \in W_{n+1}$ ve $z \in W_{n+2}$ biçimde ifade edilir.

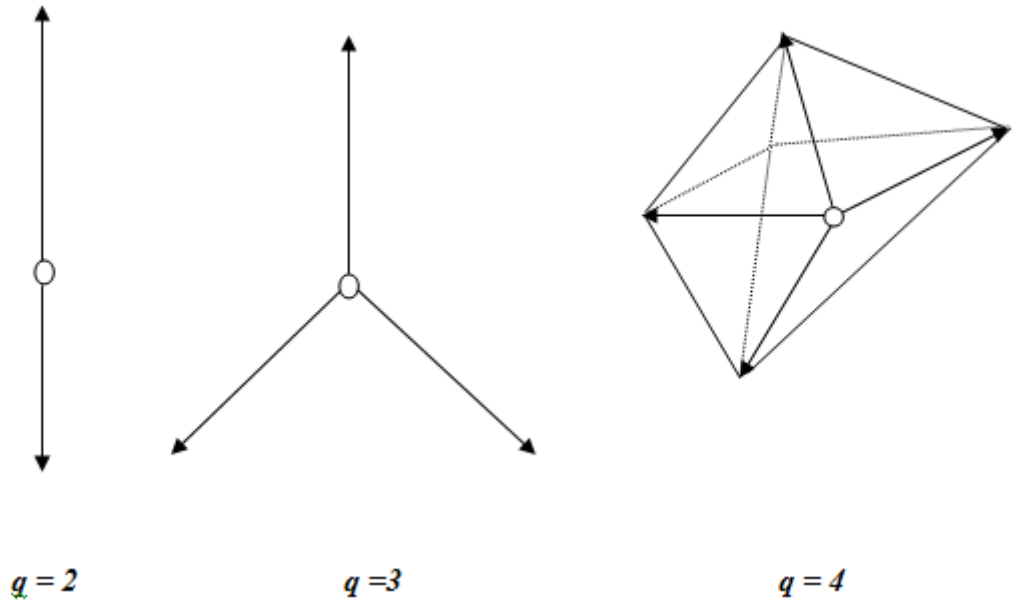


Şekil 1. 14. Uzatılmış üçlü komşuluk olan x, y, z köşe noktaları (Gök, 2011).

1.1.7. Spin Değerleri Kümesi S

Potts modelinde genel olarak spin kümesi $S=\{1, 2, 3, \dots, q\}$ olarak kullanılmaktadır. Ising modeli için spin kümesi iki bileşenden meydana gelir yani $S=\{+1, -1\}$ dir. Burada $q=|S|$ 'dir. $q=2$ spin durumunda Potts modeli olarak bilinmektedir.

Pozitif veya negatif (magnetik moment), yukarı, aşağı veya diğer yönler(yön), mavi sarı, kırmızı veya diğer renkler (renk) genel spin kümesine örnek olarak verilebilir.



Şekil 1. 15.Yönelim durumları

1.1.8. Kronecker Sembolü δ

δ kronecker sembolüdür. Genelleştirilmiş üçlü kronecker sembolü

$$\delta_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)} = \begin{cases} 1, \sigma(x) = \sigma(y) = \sigma(z) \\ \frac{1}{2}, \sigma(x) = \sigma(y) \neq \sigma(z) \text{ veya } \sigma(x) \neq \sigma(y) = \sigma(z) \\ 0, \text{ aksitakdirde} \end{cases} \quad (1.8)$$

Şeklinde ifade edilir. Burada $\sigma(x), \sigma(y)$ ve $\sigma(z)$ köşelere atanan spinin değeridir.

1.1.9. Potts Modelinin Uygulamaları

Potts model mikroskopik özelliklerden makroskopik özelliklere kadar günlük hayatta gözlemlenebilen olaylarla ilgili faydalı bir sistem sunar.

Potts model biyoloji, fizik, sosyoloji, tıp, mühendislik ve bilgisayar bilimlerinde birçok uygulama alanına sahiptir. Bu bölümde biyolojik, fiziksel ve sosyolojik uygulamalardan bahsedilecektir (Beaudin, 2007) ilk olarak tümörlerin büyüme şeklini izlemek için kullanılan Potts modeli uygulamasına değinilecektir.

Potts modelinin biyolojik uygulaması kanserli bir tümörün büyümesi ile ilgilidir. “Besin etkinliği ile ilgili tümör büyümesinin ayrı bir örneklenmesi” adlı makalelerinde Sun ve ark. (2004) yaptıkları deneyi izah etmişlerdir.

Deney ilk olarak şekil(1.16) deki gibi bir latisin incelenmesiyle başlamıştır.

1	1	3	3	5	5
1	1	3	3	5	5
1	2	3	3	5	5
2	2	2	4	4	4
2	2	2	4	4	1
2	2	2	4	1	1

Şekil 1. 16. İnsanın biyolojik hücrelerini temsil eden latis

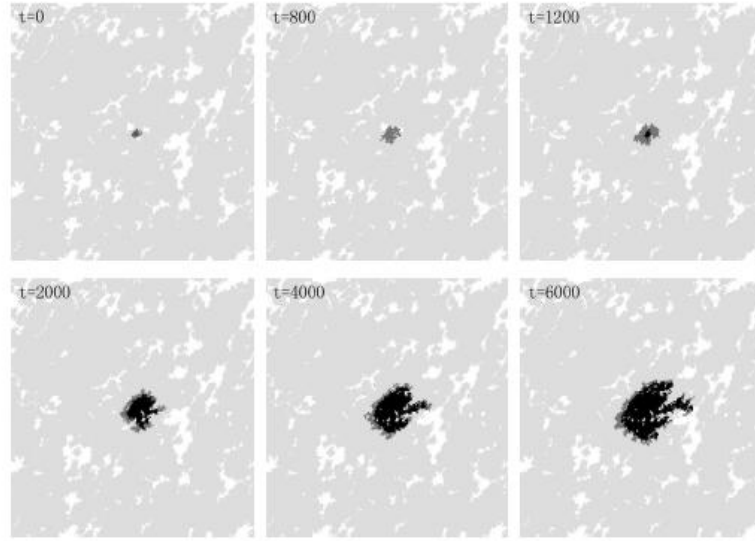
Tek bir hücreyi temsil eden, aynı spinlerle birleşen latis bölgeleridir. Şekil () de 6 tane hücre vardır. Hücrelerin 2 tanesi 1 ile ifade edilen aynı tip hücrelerdir. Bu deneyde kullanılan Hamiltonyen denklemi aşağıdaki gibidir

$$H = \sum_{ij} \sum_{ij} J_{\tau(\sigma_{ij})\tau(\sigma_{ij})} \{1 - \delta_{\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^*}\} + \sum_{\sigma} \lambda (v_{\sigma} - V_T)^2 + Kp(i, j)$$

Deneyde hücre tipi $\Gamma(\sigma_{ij})$ ile gösterilmektedir ve J değeri hücrenin türüne göre değişmektedir. Hücrenin deformasyonu ve büyüme enerjisi $\lambda(v_{\sigma} - v_T)^2$ ile gösterilmektedir. Hücreye herhangi bir dış etki olmadığı andaki hacmi v_T değeridir. Sonuç olarak ij durumunda ve ne kadar besin var olduğunu $P(i,j)$ göstermektedir.

Bu deneyde gerçekçi bir hücre döngüsünün gelişimi hücre bölünmeleri ve çevre besinin kontrolü olmak üzere üç aşama vardır. Burada hücre bölünmesi zamanın bir fonksiyonu olarak düşünülmüştür. Ayrıca deneydeki tek besin kaynağı tümörün sol tarafındaki toplardamardır. Tüm değerlerin belirlenmesi ve ne kadar tümör büyüklüğü Monte-Carlo simülasyonları ile incelenebilir.

Bu simülasyon aşağıdaki şekilde görüldüğü gibidir.



Şekil 1. 17. Tümör büyüme deneyinin sonuçları (Sun ve ark. 2004)

Sun ve ark. (2004) deneyin sonunda önemli iki sonuç bulmuşlardır. Bunlardan birisi tümör toplardamara doğru yol almaktadır. Diğerisi ise, başlangıç seviyesinde tümör büyümesinin üstel şekilde artmasıdır.

Sosyolojik uygulaması insan davranışlarını incelemektedir. Fouladvand ve ark.(2005) şehirlerinin iç mahallelerindeki Ghetto'lar için Potts modeli gibi bir model kullanmışlardır. Bu deney schelling (2005) deneyinin genelleştirilmiş şeklidir.



Şekil 1. 18. İnsan davranışları (Beudin, 2007)

Potts modeli aşağıdaki yöntemlerle insan davranışlarını belirlemek için düşünülmüştür. İnsanların komşuluklarını, şehirlerini, işlerini veya insanların birbirleriyle etkileştikleri diğer durumları belirlemek için bir latis kullanılmıştır. Bu deneyde kullanılan gruplar; yaşlı insanlar, üniversiteli oda arkadaşları, büyük çocuklu aileler ve küçük çocuklu ailelerdir. Burada yaşlılar 1, üniversiteli oda arkadaşları 2, büyük çocuklu aileler 3, küçük çocuklu aileler 4 ile gösterilmiştir. Başlangıç latisi aşağıdaki şekilde gibidir.

1	2	3	4	1
2	2	1	2	3
4	1	3	4	2
3	3	2	4	4
1	3	4	2	1

Şekil 1. 19. Dört farklı grup ile oluşan komşuluk

Dört grubun üyeleri yokluklarında yaşayacak olan insanlar hakkında tercih haklarına sahiplerdir. Örneğin çocukları evlerinden uzaklaşmaması için küçük çocuklu aileler birbirlerine yakın yaşamayı istemektedirler.

Sonuç olarak ayrımcılık oluşumunda rol oynayan tercihleri görebilmekteyiz.

Son olarak Potts modelinin fiziksel uygulaması “akışkan köpükler içindeki yapışkan kararsızlıklar: Hücresel bir Potts modeli” adlı makalede Sanyal ve Glazier

(2006) tarafından yapılmıştır köpük akışkanın pek fazla uygulama alanına sahip olmadığı düşünülebilir fakat petrol elde etme, yangınla mücadele ve mayalanma gibi pek çok uygulama alanı vardır.



Şekil 1.20. Potts modelin fiziksel uygulamasında yangınla mücadele (Beaudin, 2007)

Köpük akışkanın hızı arttıkça ne gibi değişiklikler meydana geleceğini görmek için Sanyal ve Glazier (2006) şekil (1.21) deki gibi bir latis inceleyerek deney yapmışlardır.

1	1	2	2
1	2	2	3
4	4	3	3
4	3	3	3
3	3	3	3

Şekil 1. 21. Köpükleri incelemek için kullanılan latis

Deneyde kullanılan Hamiltonyen denklemi aşağıdaki gibidir.

$$H = \sum_{ij} J(1 - \delta_{\sigma_i \sigma_j}) + \lambda \sum_n (a_n - A_n)^2 \quad (1.9)$$

Burada A_n değeri baloncuk üzerinde hiçbir etkinin olmadığı andaki baloncuk yüzeyindeki alanı a_n de baloncuğun şu andaki yüzey alanını göstermektedir. λ değeri ise baloncuk üzerindeki sınırlanan alan genişliğini ifade etmektedir.

Araştırmacılar deneyin sonunda köpüğün kontrolsüz olarak akışmaya başladığı yerde kritik bir hızın var olduğunu ispatlamışlardır. Ayrıca köpük içerisinde tek büyük bir baloncuk izlenerek büyük köpüklerin küçük köpüklerden daha hızlı aktığını tespit etmişlerdir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Ising modeli ilk olarak manyetik sistemler için ortaya konmakla beraber günümüzde çok geniş bir yelpazedeki araştırma konularının incelemesinde kullanılmaktadırlar. Bu sistemlere örnek olarak moleküler nanomiktatıslar, manyetik ince filmler, manyetik akışkanlar ve spin camları verilebilir. Tüm bu sistemler günümüz teknolojisinde büyük önem arz etmekte ve teknolojinin geliştirilmesine yönelik çalışmaların konusu olmaktadır. Örneğin kuantum bilgisinin depolanmasında kullanılabileceği düşünülen moleküler miktatıslar ileride bilişim teknolojisinde devrim yapacağına inanılan kuantum bilgisayarlarında kullanılma potansiyeline sahiptirler. Bu model fiziksel sistemlere ek olarak birçok disiplinler arası konuda da kullanılmaktadır. Bu alanlara örnek olarak ekonomi ve sosyoloji verilebilir.

Domb tarafından ilk olarak önerilen, Potts modeli, Ising modelinin bir genelleştirilmesidir. Ising modelinde spin sayısı $q=2$ iken Potts modelinde ise spin sayısı ikiden büyüktür ($q>2$). Potts modelinin yayınlandığı yıllarda bu problem fazla ilgi çekmemiştir. Ancak son yıllarda, modelin içerik olarak çok zengin olmasından dolayı, çok sayıda matematikçi ve fizikçi tarafından incelenmektedir, hatta kimya, biyoloji, sosyoloji ve bilgisayar bilimleri alanlarında birçok uygulamaları bulunmaktadır.

1981 yılında Vannimenus en yakın ve uzatılmış en yakın etkileşimli Ising modeli için bir module edilmiş (modulated) faz diyagramının varlığını ispatlamıştır. Yazar çoklu-kritik Lifshitz noktanın sıfır sıcaklıkta olduğunu göstermiştir. Bu çalışmadan itibaren pek çok araştırmacı modellerinin faz diyagramları ve Lifshitz noktalarının bulunması problemi ile ilgilenen Cayley ağacı üzerinde en yakın ve uzatılmış en yakın etkileşimli Ising ve Potts diler. Potts modeli ile ilgili ayrıntılı bir çalışma için Wu kaynak gösterilebilir.

1983 yılında Inawashiro ve ark. Vannimenus'ten bağımsız olarak en yakın komşuluk ve uzatılmış (prolonged) sonraki en yakın komşuluk etkileşimli Ising

modelini, $J_p=J_0$ durumunda incelemiştirlerdir, burada J_0 bir-seviyeli sonraki en yakın komşuluk etkileşimidir. Mariz ve ark. bu sonuçları bir-seviyeli sonraki en yakın komşuluğa dış manyetik alanı da ilave ederek genelleştirmişlerdir. En yakın komşuluk ve üçlü komşuluk etkileşimli Potts modelin faz geçişlerinin olup olmadığını araştırmak için Ganikhodjaev ve ark. matematiksel analizler yapmışlardır.

2008 yılında Ganikhodjaev ve ark. Cayley ağacı üzerinde iki mertebeli sonraki en yakın komşuluk ve en yakın komşuluk etkileşimli üç durumlu Potts modelin faz diyagramını incelemiştirlerdir. Bu çalışmada yazarlar Vannimendus'un bulunduğu paramanyetik, ferromanyetik ve modulated fazlara ilave olarak paramodulated diye adlandırılan yeni fazın varlığını nümerik olarak göstermişlerdir. Bu yeni fazı, modulated fazın içinde kalan sıfır ortalama magnetizasyon ile karakterize etmişlerdir. Potts modeli için elde edilen bu faz çeşidi Ising modelinden farklıdır.

Konunun tarihi akışını hızlıca aşağıdaki şekli ile özetleyebiliriz.

1925 yılında Ernst Ising ferromanyetizmayı bir boyutta açıklayan Ising modelini kurmuştur (Ising, 1925). Daha sonraki yıllarda bu modeli 2 ve 3 boyuta genişletip 2 boyutta kritik sıcaklık için matematiksel olarak tam değer bulmuştur.

Ernst Ising doktora tezinde hocası Wilhelm Lenz tarafından önerilen manyetik faz geçişi problemini incelemiştir. Tezinde manyetik momentlerin bir zincir üzerindeki özel dizilimini araştırmıştır. Bu dizilimde momentlerin özel olarak sadece aşağı ve yukarı yönelimlere sahip olduğu ve sadece en yakın komşuları ile çiftler halinde etkileştirdiği varsayıldı. Ising, bir boyutta sadece sıfır sıcaklıkta manyetik faz gelişimini olduğu göstermiştir (Ising,1925).

1941 yılında Hendrik Kramers ve Gregery Wannier dış manyetik alan olmaması durumunda Keve Latis için kritik sıcaklık değerini veren bir ifade bulmuştur (Kramers ve Wannier, 1941).

1960 yılında Cyril Domb tarafından Ising modelini 2 boyutta bal peteği ve üçgen latis için kesin çözümü bulmuştur (Domb, 1960).

Potts modeli, ilk olarak Domb tarafından önerilmiştir (Potts, 1952). Ising modelinde spin sayısı $q=2$ iken Potts modelinde spin sayısı ikinden büyüktür ($q>2$). Yani Potts modeli Ising modelinin bir genelleştirilmiş halidir. En yakın ve uzatılmış en yakın etkileşimleri Ising modeli için Vannimenus (1981) ispatlamıştır.

Bir seviyeli sonraki en yakın komşuluk etkileşimine dış manyetik alanı da ilave ederek önceki sonuçları Meriz ve ark. (1985) genelleştirmişlerdir.

Ganikhodjaev ve ark. (2008) en yakın komşuluk ve üçlü komşuluk Potts modeline faz geçişlerinin olup olmadığını araştırmak için matematiksel analizler yapmışlardır. Ganikhodjaev ve ark. (2009) iki mertebeli sonraki en yakın komşuluk ve en yakın komşuluk etkileşimli üç durumlu Potts modelinin faz diyagramını Cayley ağacı üzerinde incelemişlerdir. Vannimenus bulduğu ferromanyetik, paramanyetik ve modulated fazlara ek olarak paramodüle edilmiş fazın da varlığını nümerik olarak çözmüşlerdir. Hamiltonyen denklemi ile elde edilen Potts modelinin faz diyagramını delphi bilgisayar programlama dili yardımıyla Ganikhodjaev ve ark. (2009, 2011) elde etmişlerdir.

Bu çalışmalardan yola çıkarak, bu tezde yeni bir yaklaşımla q -durumlu Potts modeli için iterasyon denklemleri elde ederek denklem sisteminin nümerik incelemesi yapılacaktır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Örgü modelleri genel manada temel istatistik mekaniğin farklı yönlerini açığa çıkarmak için oluşturulan geometrik karikatürlerdir. Özellikle bazı örgü modelleri üzerindeki faz geçiş olayı araştırılan sorulardandır. Bu olayların bazıları birbirinden bağımsız ve atomların basitçe birbiri ile olan etkileşimleridir. Ferromanyetik model olarak görülen Ising modelin, fizik, kimya, biyoloji, tıp, bilgisayar bilimleri ve hatta sosyoloji alanında birçok uygulamaları ve çözüm yaklaşımları bulunmaktadır. Bu çalışmamızda kullanılan materyaller konu hakkında yapılmış olan çalışmalar, çalışmanın yazarlarından, kütüphaneden veya internet aracılığıyla temin edilmiştir. Kullanılan kaynak kitaplar ise danışman hocamızdan temin edilmiştir.

3.2. Yöntem

Çalışmamızda temel olarak Cayley ağacı üzerinde Ising modelinin bir genelleştirilmesi olan Potts modelinin ikinci ve üçüncü komşuluklar arasındaki etkileşimleri de içeren yeni Hamilton denklemleri yardımıyla rekursif denklemler bulunacaktır. Bu modeller için elde edilecek olan rekursif denklemlerin $(Z_i^{(n+1)})$ analizleri yapılacaktır. Daha sonra bulunan denklemler yardımı ile iterasyon denklemleri elde edilecektir. Burada etkileşime bağlı olarak elde edilen $(x^{(n)}, y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, y_3^{(n)}) \in \mathbb{R}^4$ iterasyon denklemlerinde belli başlangıç değerlerine göre elde edilen denklemlerin limit davranış analizleri yapılacaktır.

Önceki çalışmalar incelenerek uygulanan metotlar hakkında bilgi edinilmiştir. İncelenen kaynaklar değerlendirilerek ilave sonuçlar bulunmuştur. Uğuz ve ark. (2010) Ganikhodjaev ve ark. (2009) ın yaptığı çalışmalardan faydalanılmıştır. İkili ve üçlü etkileşimli bir Potts modelinin faz diyagramını $s = \{1, 2, 3\}$ spin durumunu değiştirerek Temir ve ark. (2010) incelenmiştir. Ayrıca farklı bir Hamiltonyen

denklemleri düşünülerek modelin faz diyagramını Ganikhodjaev ve ark. (2009) bulmuşlardır.

Bu çalışmada, üçüncü mertebeden bir Cayley ağacı üzerinde en yakın komşuluk, uzatılmış ikinci komşuluk ve ikinci seviye üçlü komşuluk etkileşimlerinden meydana gelen potts modelinin faz diyagramları incelenmiştir. Ayrıca ikinci mertebeden Cayley ağacı üzerinde ikili ve üçlü etkileşimli keyfi q durumlu Potts modelinin faz diyagramları incelenmiştir

Bu tezde, önceki çalışmalardan farklı olarak üçlü kronecker sembolü kullanılmıştır. Faz diyagramlarını görebilmek için iterasyon denklemleri mantığıyla çalışan bilgisayar programlama dilinden faydalanılmıştır.

İterasyon denklemlerinde, denklemlerin iteratif çözümünün yakınsaklık koşulunu sağlayabilmesi için, 10.000 ve üzerinde iterasyon yapılarak yüksek performanslı bilgisayarlarda hesaplamaların uzun süreli çalışmaları gerekmektedir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Üçüncü Mertebeden Cayley Ağacı Üzerindeki Potts Modelin Temel Denklemleri

Bu kısımda Cayley ağacının mertebesi olan $k=3$ ve spin değerleri kümesi üç elemanlı olacak şekilde $S=\{1, 2, 3\}$ olarak alınacaktır.

En yakın komşuluk, uzatılmış ikinci komşuluk ve iki seviye üçlü komşuluk etkileşimli 3-durumlu Potts modelinin Hamitonyen denklemi;

$$H(\sigma) = -J_T \sum_{\langle x,y,z \rangle} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)} - J_P \sum_{\langle x,y \rangle} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - J_1 \sum_{\langle x,y \rangle} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} \quad (4.1.1)$$

şeklinde tanımlıdır.

Kronecker deltası;

$$\delta_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)} = \begin{cases} 1, \sigma(x) = \sigma(y) = \sigma(z) \\ \frac{1}{2}, \sigma(x) = \sigma(y) \neq \sigma(z) \text{ veya } \sigma(x) \neq \sigma(y) = \sigma(z) \\ 0, \text{ aksitakdirde} \end{cases} \quad (4.1.2)$$

şeklindedir.

Toplam ayrışım fonksiyonu;

$$Z^n = \sum_{i_0, i_1, i_2, i_3=1}^3 Z^n \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ i_0 \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlıdır.

Ayrışım fonksiyonları ilk olarak hesaplanacaktır.

$k=3$ ve $S=\{1, 2, 3\}$ olduğu için 81 tane toplam ayrışım fonksiyonu vardır. Bunlar;

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^9 c^3 Z^n(1,1)Z^n(1,1)Z^n(1,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^6 c^2 Z^n(1,1)Z^n(1,1)Z^n(1,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^6 c^2 Z^n(1,1)Z^n(1,1)Z^n(1,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^6 c^2 Z^n(1,2)Z^n(1,1)Z^n(1,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^6 c^2 Z^n(1,1)Z^n(1,2)Z^n(1,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^6 c^2 Z^n(1,3)Z^n(1,1)Z^n(1,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^6 c^2 Z^n(1,1)Z^n(1,3)Z^n(1,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^{9/2} c Z^n(1,1)Z^n(1,2)Z^n(1,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^{9/2} c Z^n(1,2)Z^n(1,1)Z^n(1,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^{9/2} c Z^n(1,2)Z^n(1,2)Z^n(1,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^{9/2} c Z^n(1,2)Z^n(1,2)Z^n(1,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^3 c Z^n(1,1)Z^n(1,2)Z^n(1,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^3 c Z^n(1,1)Z^n(1,3)Z^n(1,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^3 c Z^n(1,3)Z^n(1,1)Z^n(1,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^3 c Z^n(1,2)Z^n(1,1)Z^n(1,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^3 c Z^n(1,2)Z^n(1,3)Z^n(1,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^3 c Z^n(1,3)Z^n(1,2)Z^n(1,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^{3/2} Z^n(1,2)Z^n(1,2)Z^n(1,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^{3/2} Z^n(1,2)Z^n(1,3)Z^n(1,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^{3/2} Z^n(1,3)Z^n(1,3)Z^n(1,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^{9/2} c Z^n(1,1)Z^n(1,3)Z^n(1,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^{9/2} c Z^n(1,3)Z^n(1,1)Z^n(1,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^{9/2} c Z^n(1,3)Z^n(1,3)Z^n(1,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^{3/2} Z^n(1,2)Z^n(1,3)Z^n(1,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^{3/2} Z^n(1,3)Z^n(1,2)Z^n(1,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^{3/2} Z^n(1,3)Z^n(1,3)Z^n(1,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ & 1 & \end{pmatrix} = a^{9/2} Z^n(1,3)Z^n(1,3)Z^n(1,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^{9/2} Z^n(2,1)Z^n(2,1)Z^n(2,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^{9/2} c Z^n(2,1) Z^n(2,1) Z^n(2,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^{3/2} Z^n(2,1) Z^n(2,1) Z^n(2,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^{9/2} c Z^n(2,2) Z^n(2,1) Z^n(2,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^{9/2} c Z^n(2,1) Z^n(2,2) Z^n(2,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^{3/2} Z^n(2,3) Z^n(2,1) Z^n(2,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^{3/2} Z^n(2,1) Z^n(2,3) Z^n(2,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^6 c^2 Z^n(2,1) Z^n(2,2) Z^n(2,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^6 c^2 Z^n(2,2) Z^n(2,1) Z^n(2,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^6 c^2 Z^n(2,2) Z^n(2,2) Z^n(2,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^9 c^3 Z^n(2,2) Z^n(2,2) Z^n(2,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^3 c Z^n(2,1) Z^n(2,2) Z^n(2,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^3 c Z^n(2,2) Z^n(2,1) Z^n(2,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^3 c Z^n(2,2) Z^n(2,3) Z^n(2,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^3 c Z^n(2,3) Z^n(2,1) Z^n(2,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^3 c Z^n(2,3)Z^n(2,2)Z^n(2,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^3 c Z^n(2,1)Z^n(2,3)Z^n(2,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^6 c^2 Z^n(2,2)Z^n(2,2)Z^n(2,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^6 c^2 Z^n(2,2)Z^n(2,3)Z^n(2,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^6 c^2 Z^n(2,3)Z^n(2,2)Z^n(2,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^{3/2} Z^n(2,1)Z^n(2,3)Z^n(2,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^{3/2} Z^n(2,3)Z^n(2,1)Z^n(2,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^{3/2} Z^n(2,3)Z^n(2,3)Z^n(2,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^{9/2} c Z^n(2,2)Z^n(2,3)Z^n(2,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^{9/2} c Z^n(2,3)Z^n(2,2)Z^n(2,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^{9/2} c Z^n(2,3)Z^n(2,3)Z^n(2,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ & 2 & \end{pmatrix} = a^{9/2} Z^n(2,3)Z^n(2,3)Z^n(2,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^{9/2} Z^n(3,1)Z^n(3,1)Z^n(3,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^{3/2} Z^n(3,1)Z^n(3,1)Z^n(3,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^{9/2} Z^n(3,1) Z^n(3,1) Z^n(3,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^{3/2} Z^n(3,2) Z^n(3,1) Z^n(3,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^{3/2} Z^n(3,1) Z^n(3,2) Z^n(3,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^{9/2} c Z^n(3,3) Z^n(3,1) Z^n(3,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^{9/2} c Z^n(3,1) Z^n(3,3) Z^n(3,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^{3/2} Z^n(3,1) Z^n(3,2) Z^n(3,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^{3/2} Z^n(3,2) Z^n(3,1) Z^n(3,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^{3/2} Z^n(3,2) Z^n(3,2) Z^n(3,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^{9/2} Z^n(3,2) Z^n(3,2) Z^n(3,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^{3/2} c Z^n(3,1) Z^n(3,2) Z^n(3,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^3 c Z^n(3,2) Z^n(3,1) Z^n(3,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^3 c Z^n(3,2) Z^n(3,3) Z^n(3,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^3 c Z^n(3,3) Z^n(3,1) Z^n(3,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^3 c Z^n(3,3) Z^n(3,2) Z^n(3,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^3 c Z^n(3,1) Z^n(3,3) Z^n(3,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^{9/2} c Z^n(3,2) Z^n(3,2) Z^n(3,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^{9/2} c Z^n(3,2) Z^n(3,3) Z^n(3,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^{9/2} c Z^n(3,3) Z^n(3,2) Z^n(3,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^6 c^2 Z^n(3,1) Z^n(3,3) Z^n(3,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^6 c^2 Z^n(3,3) Z^n(3,1) Z^n(3,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^6 c^2 Z^n(3,3) Z^n(3,3) Z^n(3,1)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^6 c^2 Z^n(3,2) Z^n(3,3) Z^n(3,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^6 c^2 Z^n(3,3) Z^n(3,2) Z^n(3,3)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^6 c^2 Z^n(3,3) Z^n(3,3) Z^n(3,2)$$

$$Z^n \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ & 3 & \end{pmatrix} = a^9 c^3 Z^n(3,3) Z^n(3,3) Z^n(3,3)$$

şeklinde hesaplanır. Bu denklemler içinde birbirinden bağımsız ayrışım fonksiyonlarını seçmek için $\bar{\sigma}^n \left(\frac{v}{v_n} \right) \equiv 1$ sınır şartı ve Hamiltonyen denklemindeki komşuluk türleri dikkate alınırsa 5 bağımsız ayrışım fonksiyonuna sadeleşmiş olur. Bunlar;

$$\begin{aligned}
Z^n & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \\
Z^n & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix} \\
Z^n & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 2 & \end{pmatrix} \\
Z^n & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ & 2 & \end{pmatrix} \\
Z^n & \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ & 2 & \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

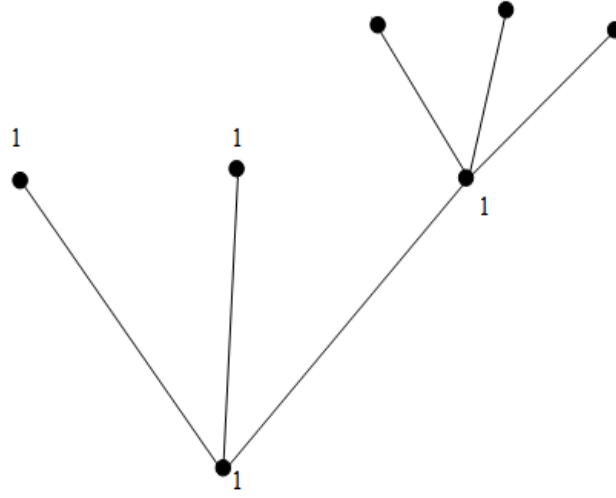
şeklinde. Bu denklemleri aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned}
U_1^n & = \sqrt[3]{Z^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}} \\
U_2^n & = \sqrt[3]{Z^n \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix}} \\
U_3^n & = \sqrt[3]{Z^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 2 & \end{pmatrix}} \\
U_4^n & = \sqrt[3]{Z^n \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ & 2 & \end{pmatrix}} \\
U_5^n & = \sqrt[3]{Z^n \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ & 2 & \end{pmatrix}}
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Cayley ağacı üzerindeki uzatılmış (prolonged) komşuluk etkileşimlerine bakarak

U_1^n , U_2^n , U_3^n , U_4^n ve U_5^n denklemlerini hesaplayacağız. $Z^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ üzerine kurulan

etkileşim olasılıkları düşünerek U_1^n denklemini hesaplayacağız.



Şekil 4. 1. $Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & & \end{smallmatrix}\right)$ üzerine kurulmuş olan dallar

$$U_1^{(n)} = a^3 c \left[\begin{array}{l} b^3 Z^n \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & & \end{smallmatrix}\right) + 3b^2 Z^n \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & & \end{smallmatrix}\right) + 3b^2 Z^n \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & & \end{smallmatrix}\right) + 3b Z^n \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & & \end{smallmatrix}\right) \\ + 6b Z^n \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & & \end{smallmatrix}\right) + 3b Z^n \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & & \end{smallmatrix}\right) + Z^n \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & & \end{smallmatrix}\right) + 3Z^n \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & & \end{smallmatrix}\right) \\ + 3Z^n \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & & \end{smallmatrix}\right) + Z^n \left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & & \end{smallmatrix}\right) \end{array} \right] \quad (4.1.5)$$

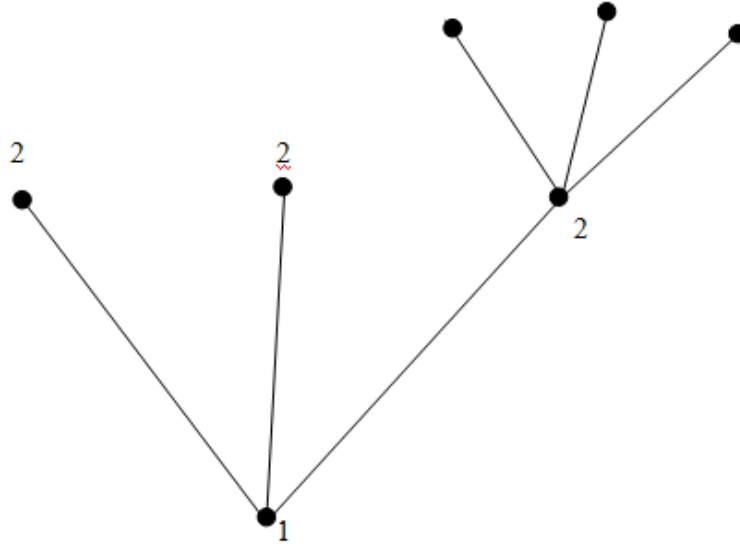
Denklem içindeki ayrışım fonksiyonlarının değerleri yerine yazılırsa;

$$U_1^{(n)} = a^3 c \left[\begin{array}{l} b^3 (U_1^n)^3 + 3b^2 a^{-3/2} (U_1^n)^2 U_2^n \\ + (6ba^{-3/2} + 6ba^{-3}) U_1^n (U_2^n)^2 + (6a^{-3} + 2) (U_2^n)^3 \end{array} \right]$$

şeklinde olur.

$U_2^{(n)}$ denklemi, $Z^n \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & & \end{smallmatrix}\right)$ ayrışım fonksiyonu üzerindeki uzatılmış ikinci

komşuluk etkileşimleriyle hesaplanırsa;



Şekil 4. 2. $Z^{(n)} \left(\begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ & 1 & \end{matrix} \right)$ üzerine kurulmuş olan dallar

$$U_2^{(n)} = a^{3/2} \left[\begin{array}{l} b^3 Z^n \binom{1}{21} \binom{1}{21} \binom{1}{21} + 3b^2 Z^n \binom{1}{2} \binom{1}{2} \binom{2}{2} + 3b^2 Z^n \binom{1}{2} \binom{1}{2} \binom{3}{2} + 3b Z^n \binom{1}{2} \binom{2}{2} \binom{2}{2} \\ + 6b Z^n \binom{1}{2} \binom{2}{2} \binom{3}{2} + 3b Z^n \binom{1}{2} \binom{3}{2} \binom{3}{2} + Z^n \binom{2}{2} \binom{2}{2} \binom{2}{2} + 3Z^n \binom{2}{2} \binom{2}{2} \binom{3}{2} \\ + 3Z^n \binom{2}{2} \binom{3}{2} \binom{3}{2} + Z^n \binom{3}{2} \binom{3}{2} \binom{3}{2} \end{array} \right] \quad (4.1.6)$$

Ayrışım fonksiyonlarının eşitlikleri yerine yazılırsa;

$$U_2^{(n)} = a^{3/2} \left[\begin{array}{l} b^3 (U_3^n)^3 + 3b^2 a^{-3/2} U_4^n (U_3^n)^2 \\ + 3b^2 a^{-3} (U_3^n)^2 U_5^n + 3b a^{-3/2} (U_4^n)^2 U_3^n \\ + 6b a^{-3} U_3^n U_4^n U_5^n + 3b a^{-3} U_3^n (U_5^n)^2 + (U_4^n)^3 \\ + 3a^{-3/2} (U_4^n)^2 U_5^n + 3a^{-3/2} U_4^n (U_5^n)^2 + (U_5^n)^3 \end{array} \right]$$

şeklinde bulunur.

$U_3^{(n)}$, $U_4^{(n)}$, $U_5^{(n)}$ denklemleri $Z^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, $Z^n \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, $Z^n \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ üzerlerine

inşa edilen dallardaki komşuluk etkileşimleri ile hesaplanırsa;

$$U_3^{(n)} = a^{3/2} \left[\begin{array}{l} (U_1^n)^3 + (3ba^{-3/2} + 3a^{-3/2})(U_1^n)^2(U_2^n) \\ + (3b^2a^{-3/2} + 6ba^{-6} + 3a^{-3/2})U_1^n(U_3^n)^2 \\ + (b^3 + 3b^2a^{-1} + 3ba^{-1} + 1)(U_2^n)^3 \end{array} \right] \quad (4.1.7)$$

$$U_4^{(n)} = a^3 c \left[\begin{array}{l} (U_3^n)^3 + 3ba^{-3/2}(U_4^n)(U_3^n)^2 + 3a^{-3}(U_3^n)^2U_5^n \\ + 3b^2a^{-3/2}(U_4^n)^2U_3^n + 6ba^{-3}U_3^nU_4^nU_5^n + 3a^{-3}U_3^n(U_5^n)^2 \\ + b^3(U_4^n)^3 + 3b^2a^{-3/2}(U_4^n)^2U_5^n + 3ba^{-3/2}U_4^n(U_5^n)^2 \\ + (U_5^n)^3 \end{array} \right] \quad (4.1.8)$$

$$U_5^{(n)} = a^{3/2} \left[\begin{array}{l} (U_3^n)^3 + 3ba^{-3}(U_3^n)^2(U_5^n) + 3a^{-3/2}(U_3^n)^2U_4^n \\ + 3b^2a^{-3}(U_5^n)^2U_3^n + 6ba^{-9/2}U_3^nU_4^nU_5^n + 3a^{-3/2}U_3^n(U_4^n)^2 \\ + b^2(U_5^n)^3 + 3b^2a^{-3/2}(U_5^n)^2U_4^n + 3ba^{-3/2}U_5^n(U_4^n)^2 \\ + (U_4^n)^3 \end{array} \right] \quad (4.1.9)$$

şeklinde bulunmuş olur.

Sistemin yinelemeli denklemleri olan A_1, A_2, A_3, A_4 ve D;

$$\begin{aligned} A_1 = & 2a^{3/2}[b^3(x+y_3-3y_2)^3 + 6b^2a^{-3/2}(1-y_1)(x+y_3-3y_2)^2 + 3b^2a^{-3}(x+y_3-3y_2)^2(x+y_2-3y_3) \\ & + 12ba^{-3/2}(1-y_1)^2(x+y_3-3y_2) + 12ba^{-3}(x+y_3-3y_2)(1-y_1)(x+y_2-3y_3) \\ & + 3ba^{-3}(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3)^2 + 8(1-y_1)^3 + 12a^{-3/2}(1-y_1)^2(x+y_2-3y_3) \\ & + 6a^{-3/2}(1-y_1)(x+y_2-3y_3)^2 + (x+y_2-3y_3)^3] + a^{3/2}[8(1+y_1)^3 \\ & + (12ba^{-3/2} + 12a^{-3/2})(1+y_1)^2(x+y_2+y_3) + (6b^2a^{-3/2} + 12ba^{-6} + 6a^{-3/2})(1+y_1)(x+y_2+y_3)^2 \\ & + (b^3 + 3b^2a^{-1} + 3ba^{-1} + 1)(x+y_2+y_3)^3] + a^{3/2}[(x+y_3-3y_2)^3 + 3ba^{-3}(x+y_3-3y_2)^2(x+y_2-3y_3) \\ & + 6a^{-3/2}(1-y_1)(x+y_3-3y_2)^2 + 3b^2a^{-3}(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3)^2 \\ & + 12ba^{-9/2}(x+y_3-3y_2)(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 12a^{-3/2}(x+y_3-3y_2)(1-y_1)^2 + b^2(x+y_2-3y_3)^3 \\ & + 6b^2a^{-3/2}(1-y_1)(x+y_2-3y_3)^2 + 12ba^{-3/2}(1-y_1)^2(x+y_2-3y_3) + 8(1-y_1)^3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 = & a^3c[8b^3(1+y_1)^3 + 24b^2a^{-3/2}(1+y_1)^2(x+y_2+y_3) + (12ba^{-3/2} + 12ba^{-3})(1+y_1)(x+y_2+y_3)^2 \\
& + (6a^{-3} + 2)(x+y_2+y_3)^3] - a^3c[(x+y_3-3y_2)^3 + 6a^{-3/2}b(1-y_1)(x+y_3-3y_2)^2 \\
& + 3a^{-3}(x+y_3-3y_2)^2(x+y_2-3y_3) + 12b^2a^{-3/2}(1-y_1)^2(x+y_3-3y_2) \\
& + 12ba^{-3}(x+y_3-3y_2)(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 3a^{-3}(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3)^2 \\
& + 8b^3(1-y_1)^3 + 12b^2a^{-3/2}(1-y_1)^2(x+y_2-3y_3) + 6ba^{-3/2}(1-y_1)(x+y_2-3y_3)^2 + (x+y_2-3y_3)^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 = & a^{3/2}[b^3(x+y_3-3y_2)^3 + 6b^2a^{-3/2}(1-y_1)(x+y_3-3y_2)^2 + 3b^2a^{-3}(x+y_3-3y_2)^2(x+y_2-3y_3) \\
& + 12ba^{-3/2}(1-y_1)^2(x+y_3-3y_2) + 12ba^{-3}(x+y_3-3y_2)(1-y_1)(x+y_2-3y_3) \\
& + 3ba^{-3}(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3)^2 + 8(1-y_1)^3 + 12a^{-3/2}(1-y_1)^2(x+y_2-3y_3) \\
& + 6a^{-3/2}(1-y_1)(x+y_2-3y_3)^2 + (x+y_2-3y_3)^3] - a^{3/2}[8(1+y_1)^3 \\
& + (12ba^{-3/2} + 12a^{-3/2})(1+y_1)^2(x+y_2+y_3) + (6b^2a^{-3/2} + 12ba^{-6} + 6a^{-3/2})(1+y_1)(x+y_2+y_3)^2 \\
& + (b^3 + 3b^2a^{-1} + 3ba^{-1} + 1)(x+y_2+y_3)^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 = & a^{3/2}[b^3(x+y_3-3y_2)^3 + 6b^2a^{-3/2}(1-y_1)(x+y_3-3y_2)^2 + 3b^2a^{-3}(x+y_3-3y_2)^2(x+y_2-3y_3) \\
& + 12ba^{-3/2}(1-y_1)^2(x+y_3-3y_2) + 12ba^{-3}(x+y_3-3y_2)(1-y_1)(x+y_2-3y_3) \\
& + 3ba^{-3}(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3)^2 + 8(1-y_1)^3 + 12a^{-3/2}(1-y_1)^2(x+y_2-3y_3) \\
& + 6a^{-3/2}(1-y_1)(x+y_2-3y_3)^2 + (x+y_2-3y_3)^3] - a^{3/2}[(x+y_3-3y_2)^3 \\
& + 3ba^{-3}(x+y_3-3y_2)^2(x+y_2-3y_3) + 6a^{-3/2}(1-y_1)(x+y_3-3y_2)^2 \\
& + 3b^2a^{-3}(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3)^2 + 12ba^{-9/2}(x+y_3-3y_2)(1-y_1)(x+y_2-3y_3) \\
& + 12a^{-3/2}(x+y_3-3y_2)(1-y_1)^2 + b^2(x+y_2-3y_3)^3 + 6b^2a^{-3/2}(1-y_1)(x+y_2-3y_3)^2 \\
& + 12ba^{-3/2}(1-y_1)^2(x+y_2-3y_3) + 8(1-y_1)^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D = & a^3c[8b^3(1+y_1)^3 + 24b^2a^{-3/2}(1+y_1)^2(x+y_2+y_3) + (12ba^{-3/2} + 12ba^{-3})(1+y_1)(x+y_2+y_3)^2 \\
& + (6a^{-3} + 2)(x+y_2+y_3)^3] + a^3c[(x+y_3-3y_2)^3 + 6a^{-3/2}b(1-y_1)(x+y_3-3y_2)^2 \\
& + 3a^{-3}(x+y_3-3y_2)^2(x+y_2-3y_3) + 12b^2a^{-3/2}(1-y_1)^2(x+y_3-3y_2) \\
& + 12ba^{-3}(x+y_3-3y_2)(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 3a^{-3}(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3)^2 \\
& + 8b^3(1-y_1)^3 + 12b^2a^{-3/2}(1-y_1)^2(x+y_2-3y_3) + 6ba^{-3/2}(1-y_1)(x+y_2-3y_3)^2 + (x+y_2-3y_3)^3]
\end{aligned}$$

şeklindedir.

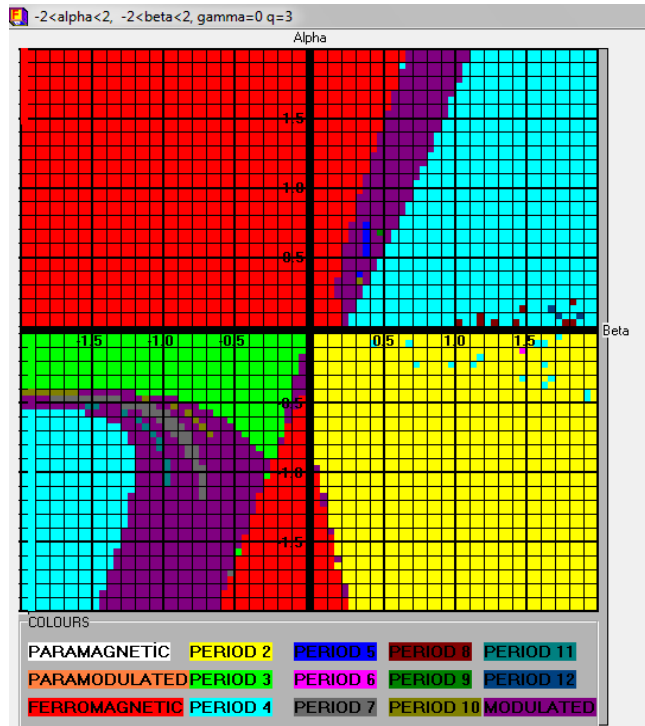
Cayley ağacının mertebe sayısı $k=3$ olduğu için,

$$a = \exp\left(\frac{J_T}{3T}\right); b = \exp\left(\frac{J_P}{T}\right); c = \exp\left(\frac{J}{T}\right) \text{ dir.}$$

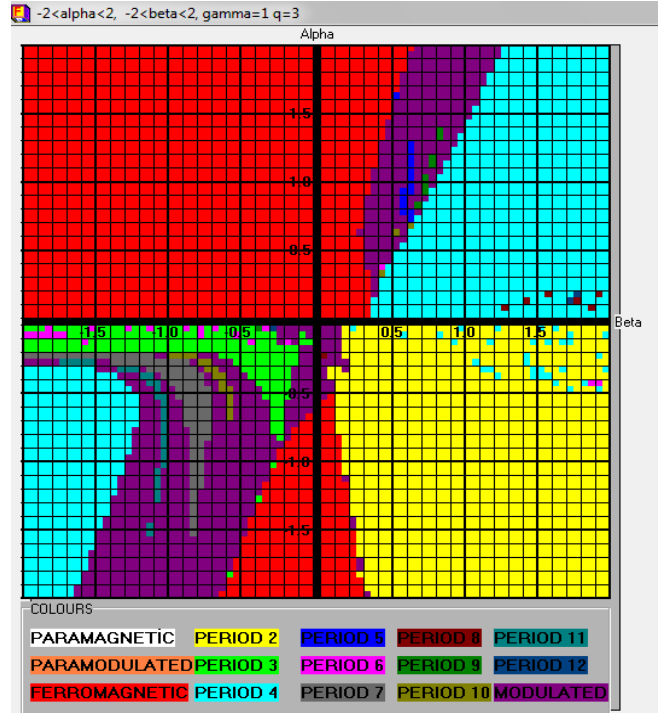
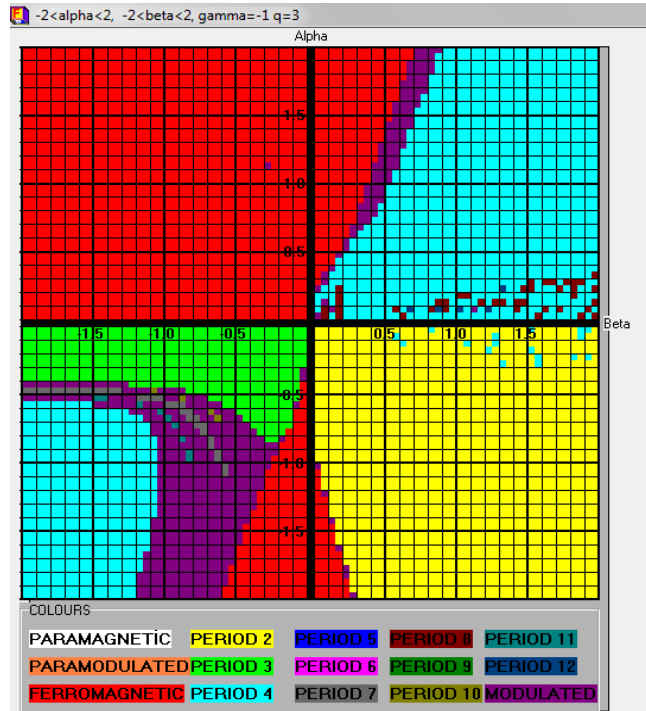
$\bar{\sigma} \left(\frac{v}{v_n}\right) \equiv 1$ sınır şartına karşılık gelen başlangıç koşulları ise;

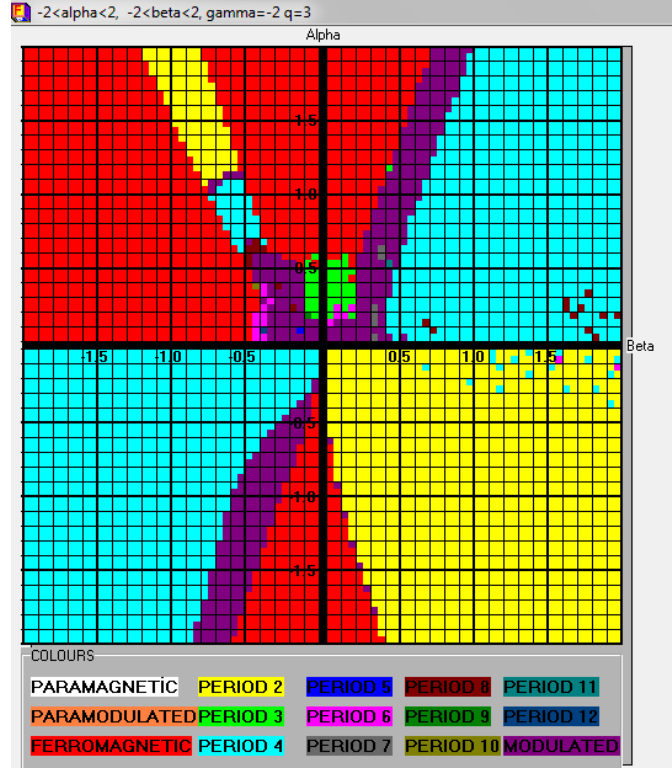
$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{2a^2b^3 + a^{7/2}c + a^2}{a^4b^3c^4 + a^{5/2}c} \\ y_1^{(1)} &= \frac{a^{3/2}b^3c^3 - 1}{a^{3/2}b^3c^3 + 1} \\ y_2^{(1)} &= \frac{a^2b^3 - a^{7/2}c^3}{a^4b^3c^4 + a^{5/2}c} \\ y_3^{(1)} &= \frac{a^{7/2}c^3 - a^2}{a^4b^3c^4 + a^{5/2}c} \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

şeklinde olur. A_1, A_2, A_3, A_4 ve D yinelemeli denklemleri ve bu denklemler ile başlangıç koşullarının belirlediği $\gamma = 0, 1, -1, -2$ için faz diyagramları;



Şekil 4. 3. $q=3$ ve $\gamma = 0$ için faz diyagramı

Şekil 4. 4. $q=3$ ve $\gamma = 1$ için faz diyagramıŞekil 4. 5. $q=3$ ve $\gamma = -1$ için faz diyagramı



Şekil 4. 6. $q=3$ ve $\gamma = -2$ için faz diyagramı

Yinelemeli denklemlere birçok iterasyon yapıldıktan sonra faz diyagramlarının davranışlarını görebilmekteyiz. İterasyonlardan sonra en basit sabit nokta olan $(x^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ ' a ulaşılır. Bu durumda eğer $y_1^* = y_2^* = y_3^* = 0$ ise bu durum paramanyetik faza karşılık gelir. Eğer $y_1^*, y_2^*, y_3^* \neq 0$ ise bir ferromanyetik faz belirtir. İkinci olarak, sistem p periyodu ile periyodik olabilir burada $p = 2$ durumu anti-ferromanyetik fazdır ve $p = 4$ durumu antifaz olarak adlandırılır. Ayrıca sistem periyodik olmayabilir. Çok uzun bir periyot ve periyodik olmayan durum arasındaki farkı nümeriksel olarak düşünmek zordur bunun için $p \leq 12$ olduğu durumları p periyotlu fazlar olarak düşüneceğiz. $p > 12$ için tüm periyodik fazları ve periyodik olmayan fazları modüle edilmiş faz olarak düşüneceğiz.

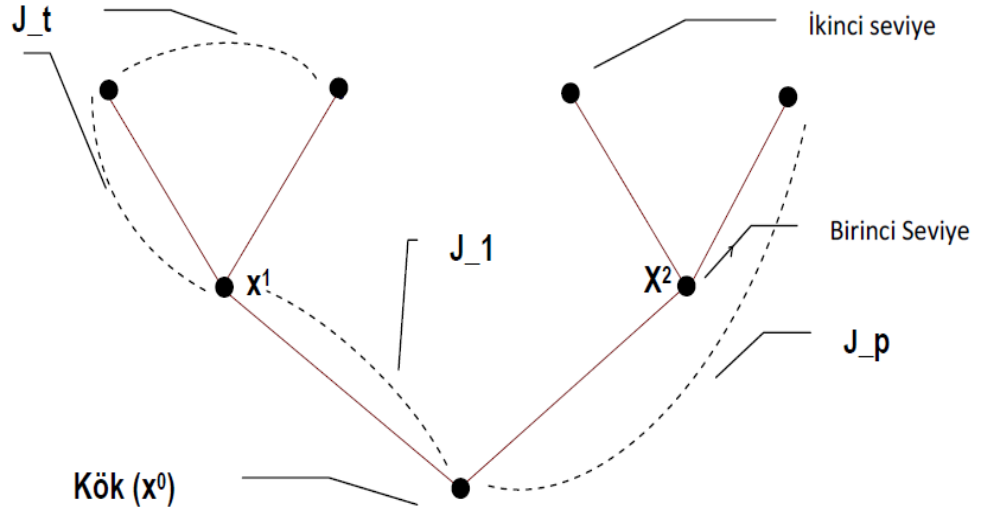
4.2. İkinci Mertebeden Cayley Ağacı Üzerindeki Spin Kümesi q-Elementli Olan Potts Modelin Denklemleri

Bu kısımda Cayley ağacının mertebesi olan $k=2$ ve spin kümesi elemanları q -değerli olacak şekilde $S=\{1, 2, \dots, q\}$ olarak alınacaktır.

En yakın komşuluk, uzatılmış ikinci komşuluk ve iki seviye üçlü komşuluk etkileşimli q -durumlu Potts modelinin Hamiltonyen denklemi;

$$H(\sigma) = -J_T \sum_{\langle x,y,z \rangle} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)} - J_P \sum_{\langle x,y \rangle} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - J_1 \sum_{\langle x,y \rangle} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} \quad (4.2.1)$$

olarak tanımlıdır. Çalıştığımız ikinci mertebeden Cayley ağacının etkileşimlerini aşağıdaki şekilden incelenebilir.



Şekil 4. 7. Yarı sonsuz Cayley ağacı üzerindeki etkileşimler

Hamilton denkleminde kullanacağımız Kronecker deltası;

$$\delta_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)} = \begin{cases} 1, \sigma(x) = \sigma(y) = \sigma(z) \\ \frac{1}{2}, \sigma(x) = \sigma(y) \neq \sigma(z) \text{ veya } \sigma(x) \neq \sigma(y) = \sigma(z) \\ 0, \text{ aksitakdirde} \end{cases} \quad (4.2.2)$$

şeklindedir.

Toplam ayrışım fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
z^{(n)}(1,1,1) &= a^2 c^2 z^{(n)}(1,1)z^{(n)}(1,1), \\
z^{(n)}(1,1,2) &= acz^{(n)}(1,1)z^{(n)}(1,2), \\
z^{(n)}(1,1,3) &= acz^{(n)}(1,1)z^{(n)}(1,3), \\
&\vdots \\
z^{(n)}(1,1,q) &= acz^{(n)}(1,1)z^{(n)}(1,q), \\
z^{(n)}(2,1,1) &= acz^{(n)}(1,2)z^{(n)}(1,1), \\
z^{(n)}(2,1,2) &= az^{(n)}(1,2)z^{(n)}(1,2), \\
z^{(n)}(2,1,3) &= z^{(n)}(1,2)z^{(n)}(1,3), \\
&\vdots \\
z^{(n)}(2,1,q) &= z^{(n)}(1,2)z^{(n)}(1,q), \\
z^{(n)}(3,1,1) &= acz^{(n)}(1,3)z^{(n)}(1,1), \\
z^{(n)}(3,1,2) &= z^{(n)}(1,3)z^{(n)}(1,2), \\
z^{(n)}(3,1,3) &= az^{(n)}(1,3)z^{(n)}(1,3) = az^{(n)}(1,2)z^{(n)}(1,2), \\
&\vdots \\
z^{(n)}(3,1,q) &= z^{(n)}(1,3)z^{(n)}(1,q), \\
z^{(n)}(1,2,1) &= az^{(n)}(2,1)z^{(n)}(2,1), \\
z^{(n)}(1,2,2) &= acz^{(n)}(2,1)z^{(n)}(2,2), \\
z^{(n)}(1,2,3) &= z^{(n)}(2,1)z^{(n)}(2,3), \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

$$\begin{aligned}
z^{(n)}(1,2,q) &= z^{(n)}(2,1)z^{(n)}(2,q), \\
z^{(n)}(2,2,1) &= acz^{(n)}(2,2)z^{(n)}(2,1), \\
z^{(n)}(2,2,2) &= a^2c^2z^{(n)}(2,2)z^{(n)}(2,2), \\
z^{(n)}(2,2,3) &= acz^{(n)}(2,2)z^{(n)}(2,3), \\
&\vdots \\
z^{(n)}(2,2,q) &= acz^{(n)}(2,2)z^{(n)}(2,q), \\
z^{(n)}(3,2,1) &= z^{(n)}(2,3)z^{(n)}(2,1), \\
z^{(n)}(3,2,2) &= acz^{(n)}(2,3)z^{(n)}(2,2), \\
z^{(n)}(3,2,3) &= z^{(n)}(2,3)z^{(n)}(2,3), \\
&\vdots \\
z^{(n)}(3,2,q) &= z^{(n)}(2,3)z^{(n)}(2,q), \\
z^{(n)}(1,3,1) &= az^{(n)}(3,1)z^{(n)}(3,1) = az^{(n)}(2,1)z^{(n)}(2,1), \\
z^{(n)}(1,3,2) &= z^{(n)}(3,1)z^{(n)}(3,2), \\
z^{(n)}(1,3,3) &= acz^{(n)}(3,1)z^{(n)}(3,3), \\
&\vdots \\
z^{(n)}(1,3,q) &= z^{(n)}(3,1)z^{(n)}(3,q), \\
z^{(n)}(2,3,2) &= az^{(n)}(3,2)z^{(n)}(3,2) = az^{(n)}(2,3)z^{(n)}(2,3), \\
z^{(n)}(2,3,1) &= z^{(n)}(3,2)z^{(n)}(3,1), \\
z^{(n)}(2,3,3) &= acz^{(n)}(3,2)z^{(n)}(3,3), \\
&\vdots \\
z^{(n)}(2,3,q) &= z^{(n)}(3,2)z^{(n)}(3,q), \\
z^{(n)}(3,3,1) &= acz^{(n)}(3,3)z^{(n)}(3,1), \\
z^{(n)}(3,3,2) &= acz^{(n)}(3,3)z^{(n)}(3,2),
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

$$z^{(n)}(3,3,3) = a^2 c^2 z^{(n)}(3,3) z^{(n)}(3,3) = a^2 c^2 z^{(n)}(2,2) z^{(n)}(2,2),$$

$$\vdots$$

$$z^{(n)}(3,3,q) = ac z^{(n)}(3,3) z^{(n)}(3,q),$$

$$\vdots$$

$$z^{(n)}(q,q,q) = a^2 c^2 z^{(n)}(q,q) z^{(n)}(q,q),$$

Burada beş tane bağımsız değişken seçebiliriz $z^{(n)}(1,1,1)$, $z^{(n)}(2,1,2)$, $z^{(n)}(1,2,1)$, $z^{(n)}(2,2,2)$, $z^{(n)}(3,2,3)$ ve yeni değişkenler aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$u_1^{(n)} = \sqrt{z^{(n)}(1,1,1)},$$

$$u_2^{(n)} = \sqrt{z^{(n)}(2,1,2)},$$

$$u_3^{(n)} = \sqrt{z^{(n)}(1,2,1)}, \quad (4.2.5)$$

$$u_4^{(n)} = \sqrt{z^{(n)}(2,2,2)},$$

$$u_5^{(n)} = \sqrt{z^{(n)}(3,2,3)}.$$

Basit hesaplamalardan sonra

$$u_1^{(n+1)} = ac \left[b^2 u_1^{(n)^2} + 2(q-1) a^{\frac{-1}{2}} b u_1^{(n)} u_2^{(n)} + (q-1)(q-2) a^{-1} u_2^{(n)^2} + (q-1) u_2^{(n)^2} \right],$$

$$u_2^{(n+1)} = a^{\frac{1}{2}} \left[b^2 u_3^{(n)^2} + 2ba^{\frac{-1}{2}} u_3^{(n)} u_4^{(n)} + 2(q-2) a^{-1} b u_3^{(n)} u_5^{(n)} + u_4^{(n)^2} \right. \\ \left. + 2(q-2) a^{\frac{-1}{2}} u_4^{(n)} u_5^{(n)} + (q-2)(q-3) a^{-1} u_5^{(n)^2} + (q-2) u_5^{(n)^2} \right],$$

$$u_3^{(n+1)} = a^{\frac{1}{2}} \left[u_1^{(n)^2} + 2ba^{\frac{-1}{2}} u_1^{(n)} u_2^{(n)} + 2(q-2) a^{\frac{-1}{2}} u_1^{(n)} u_2^{(n)} + b^2 u_2^{(n)^2} \right. \\ \left. + 2(q-2) a^{-1} b u_2^{(n)^2} + (q-2)(q-3) a^{-1} u_2^{(n)^2} + (q-2) u_2^{(n)^2} \right], \quad (4.2.6)$$

$$u_4^{(n+1)} = ac \left[u_3^{(n)^2} + 2ba^{\frac{-1}{2}} u_3^{(n)} u_4^{(n)} + 2(q-2) a^{-1} u_3^{(n)} u_5^{(n)} + b^2 u_4^{(n)^2} \right. \\ \left. + 2(q-2) a^{\frac{-1}{2}} b u_4^{(n)} u_5^{(n)} + (q-2)(q-3) a^{-1} u_5^{(n)^2} + (q-2) u_5^{(n)^2} \right],$$

$$u_5^{(n+1)} = a^{\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{l} u_3^{(n)^2} + 2a^{\frac{-1}{2}} u_3^{(n)} u_4^{(n)} + 2(b+q-3)a^{-1} u_3^{(n)} u_5^{(n)} + u_4^{(n)^2} \\ + 2(b+q-3)a^{\frac{-1}{2}} u_4^{(n)} u_5^{(n)} + b^2 u_5^{(n)^2} + 2(q-3)ba^{-1} u_5^{(n)^2} + (q-3)^2 u_5^{(n)^2} \end{array} \right],$$

şeklinde bulunur.

$$\text{Burada } a = \exp\left(\frac{J_t}{2T}\right), b = \exp\left(\frac{J_p}{T}\right), c = \exp\left(\frac{J_1}{T}\right) \text{ dir.}$$

Faz diyagramlarını incelemek için değişkenleri aşağıdaki gibi seçmek uygundur.

$$\begin{aligned} x &= \frac{2u_2 + u_3 + u_5}{u_1 + u_4}, \\ y_1 &= \frac{u_1 - u_4}{u_1 + u_4}, \\ y_2 &= \frac{u_2 - u_3}{u_1 + u_4}, \\ y_3 &= \frac{u_2 - u_5}{u_1 + u_4}. \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

En –yakın komşuluk titreşiminin bir ölçümü x - değişkenidir ve y_1, y_2, y_3 gibi sıralı bir parametre değildir.

$$\begin{aligned} x' &= \frac{A_1(x, y_1, y_2, y_3)}{D(x, y_1, y_2, y_3)}; \\ y_1' &= \frac{A_2(x, y_1, y_2, y_3)}{D(x, y_1, y_2, y_3)}; \\ y_2' &= \frac{A_3(x, y_1, y_2, y_3)}{D(x, y_1, y_2, y_3)}; \\ y_3' &= \frac{A_4(x, y_1, y_2, y_3)}{D(x, y_1, y_2, y_3)} \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
A_1 &= 2a^{\frac{1}{2}}[b^2(x+y_3-3y_2)^2 + 4a^{\frac{-1}{2}}b(x+y_3-3y_2)(1-y_1) \\
&+ 2(q-2)a^{-1}b(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4(1-y_1)^2 \\
&+ 4(q-2)a^{\frac{-1}{2}}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + (q-2)(q-3)a^{-1}(x+y_2-3y_3)^2 \\
&+ (q-2)(x+y_2-3y_3)^2] \\
&+ a^{\frac{1}{2}}[4(1+y_1)^2 + 4a^{\frac{-1}{2}}b(1+y_1)(x+y_2+y_3) + 4(q-2)a^{\frac{-1}{2}}(1+y_1)(x+y_2+y_3) + b^2(x+y_2+y_3)^2 \\
&+ 2(q-2)a^{-1}b(x+y_2+y_3)^2 + (q-2)(q-3)a^{-1}(x+y_2+y_3)^2 + (q-2)(x+y_2+y_3)^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ a^{\frac{1}{2}}[(x+y_3-3y_2)^2 + 4a^{\frac{-1}{2}}(x+y_3-3y_2)(1-y_1) + 2a^{-1}(b+q-3)(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) \\
&+ 4(1-y_1)^2 + 4a^{\frac{-1}{2}}(b+q-3)(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + b^2(x+y_2-3y_3)^2 \\
&+ 2ba^{-1}(q-3)(x+y_2-3y_3)^2 + (q-3)^2(x+y_2-3y_3)^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= ac[4b^2(1+y_1)^2 + 4(q-1)a^{\frac{-1}{2}}b(1+y_1)(x+y_2+y_3) + (q-1)(q-2)a^{-1}(x+y_2+y_3)^2 \\
&+ (q-1)(x+y_2+y_3)^2] - ac[(x+y_3-3y_2)^2 + 4ba^{\frac{-1}{2}}(x+y_3-3y_2)(1-y_1) \\
&+ 2(q-2)a^{-1}(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4b^2(1-y_1)^2 + 4(q-2)a^{\frac{-1}{2}}b(1-y_1)(x+y_2-3y_3) \\
&+ (q-2)(q-3)a^{-1}(x+y_2-3y_3)^2 + (q-2)(x+y_2-3y_3)^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= a^{\frac{1}{2}}[b^2(x+y_3-3y_2)^2 + 4a^{\frac{-1}{2}}b(x+y_3-3y_2)(1-y_1) \\
&+ 2(q-2)a^{-1}b(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4(1-y_1)^2 \\
&+ 4(q-2)a^{\frac{-1}{2}}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + (q-2)(q-3)a^{-1}(x+y_2-3y_3)^2 \\
&+ (q-2)(x+y_2-3y_3)^2]
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

$$\begin{aligned}
&- a^{\frac{1}{2}}[4(1+y_1)^2 + 4a^{\frac{-1}{2}}b(1+y_1)(x+y_2+y_3) + 4(q-2)a^{\frac{-1}{2}}(1+y_1)(x+y_2+y_3) \\
&+ b^2(x+y_2+y_3)^2 + 2(q-2)a^{-1}b(x+y_2+y_3)^2 \\
&+ (q-2)(q-3)a^{-1}(x+y_2+y_3)^2 + (q-2)(x+y_2+y_3)^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 &= a^{\frac{1}{2}}[b^2(x+y_3-3y_2)^2 + 4a^{\frac{-1}{2}}b(x+y_3-3y_2)(1-y_1) \\
&+ 2(q-2)a^{-1}b(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4(1-y_1)^2 \\
&+ 4(q-2)a^{\frac{-1}{2}}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + (q-2)(q-3)a^{-1}(x+y_2-3y_3)^2 + (q-2)(x+y_2-3y_3)^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a^{\frac{1}{2}}[(x+y_3-3y_2)^2 + 4a^{\frac{-1}{2}}(x+y_3-3y_2)(1-y_1) + 2a^{-1}(b+q-3)(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) \\
& + 4(1-y_1)^2 + 4a^{\frac{-1}{2}}(b+q-3)(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + b^2(x+y_2-3y_3)^2 \\
& + 2ba^{-1}(q-3)(x+y_2-3y_3)^2 + (q-3)^2(x+y_2-3y_3)^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D = & ac[4b^2(1+y_1)^2 + 4(q-1)a^{\frac{-1}{2}}b(1+y_1)(x+y_2+y_3) + (q-1)(q-2)a^{-1}(x+y_2+y_3)^2 \\
& + (q-1)(x+y_2+y_3)^2] - ac[(x+y_3-3y_2)^2 + 4ba^{\frac{-1}{2}}(x+y_3-3y_2)(1-y_1) \\
& + 2(q-2)a^{-1}(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4b^2(1-y_1)^2 + 4(q-2)a^{\frac{-1}{2}}b(1-y_1)(x+y_2-3y_3) \\
& + (q-2)(q-3)a^{-1}(x+y_2-3y_3)^2 + (q-2)(x+y_2-3y_3)^2]
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Başlangıç Koşulları

Bu kısımda Cayley ağacının mertebe sayısı olan $k=2$ olduğu için,

$\bar{\sigma}^{(n)}\left(\frac{v}{v_n}\right) \equiv 1$ sınır şartına karşılık gelen başlangıç koşulları;

$$x^{(1)} = \frac{2b^2a\sqrt{a} + a^2c^2\sqrt{a} + a\sqrt{a}}{a^3b^2c^3 + a^2c}$$

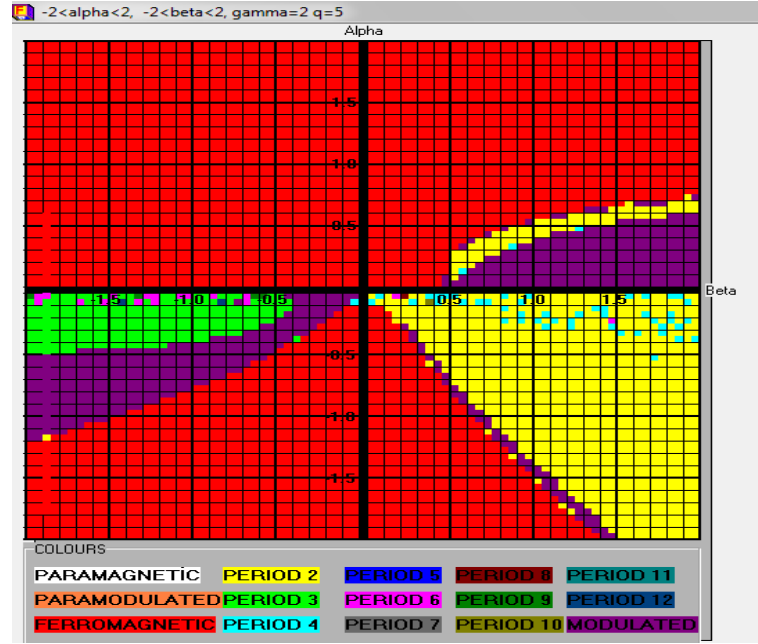
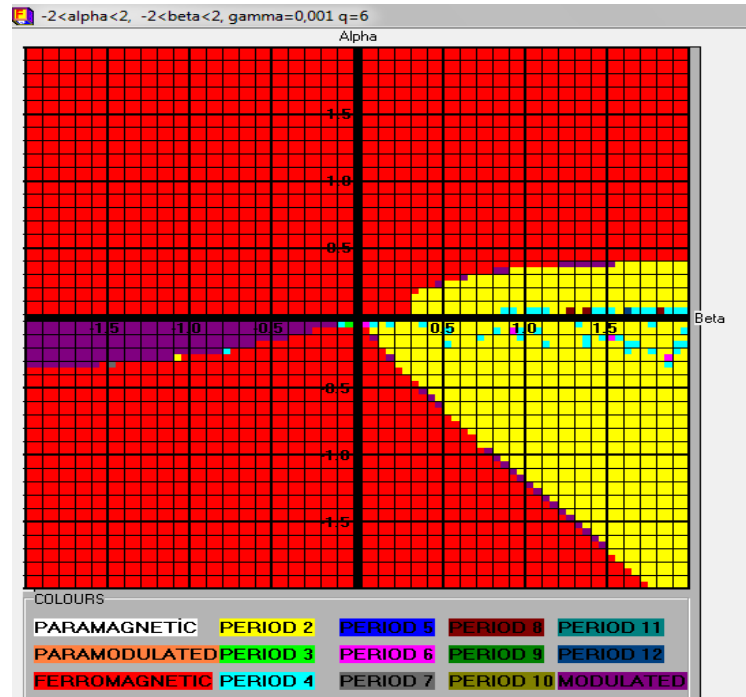
$$y_1^{(1)} = \frac{ab^2c^2 - 1}{ab^2c^2 + 1} \quad (4.2.10)$$

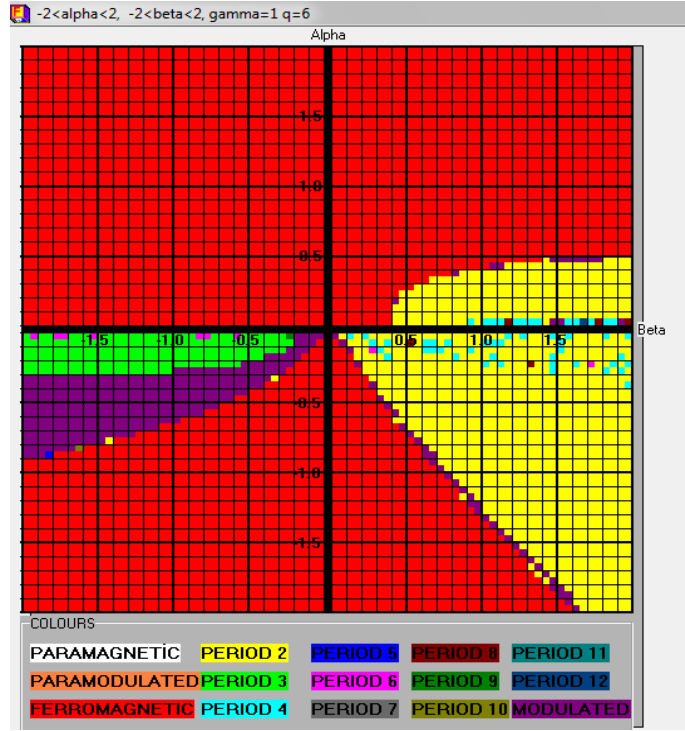
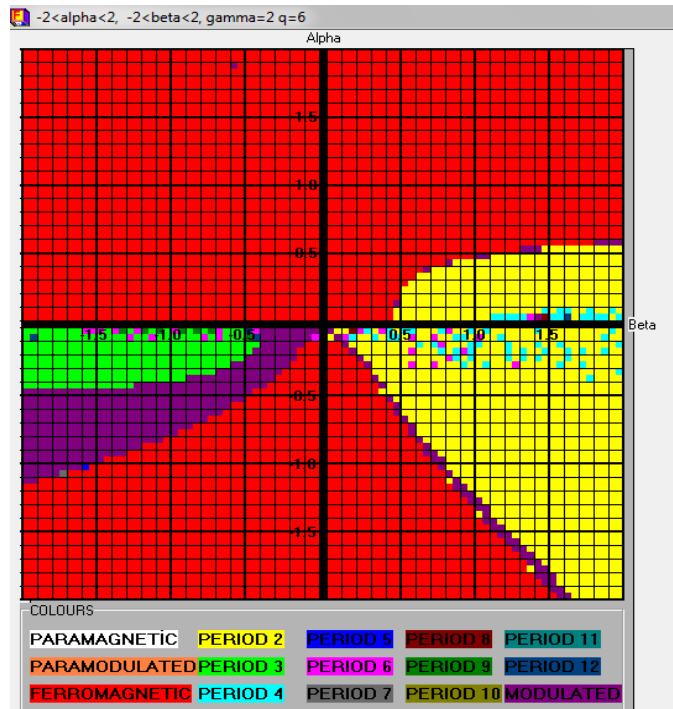
$$y_2^{(1)} = \frac{b^2a\sqrt{a} - a^2c^2\sqrt{a}}{a^3b^2c^3 + a^2c}$$

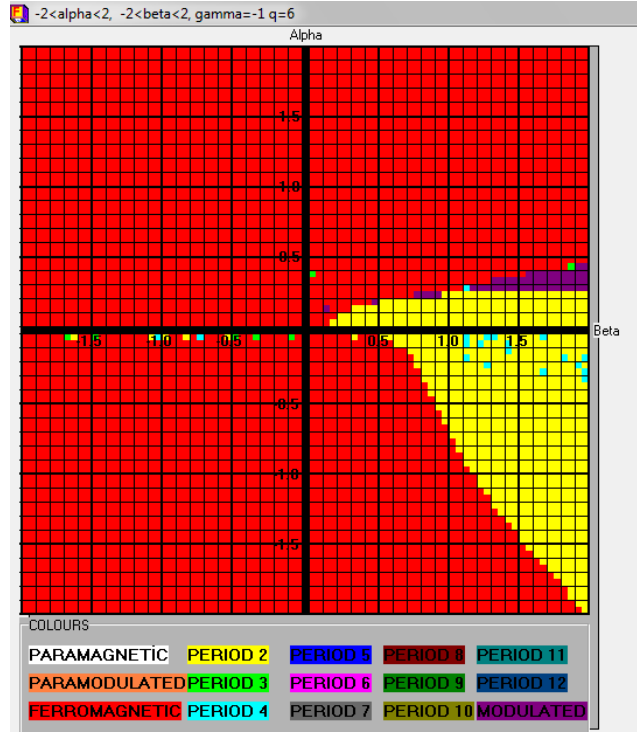
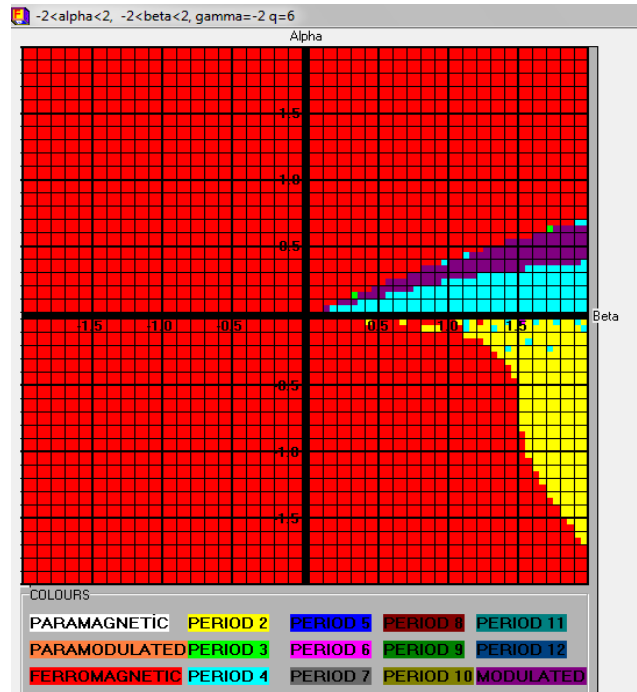
$$y_3^{(1)} = \frac{c^2a^2\sqrt{a} - a\sqrt{a}}{a^3b^2c^3 + a^2c}$$

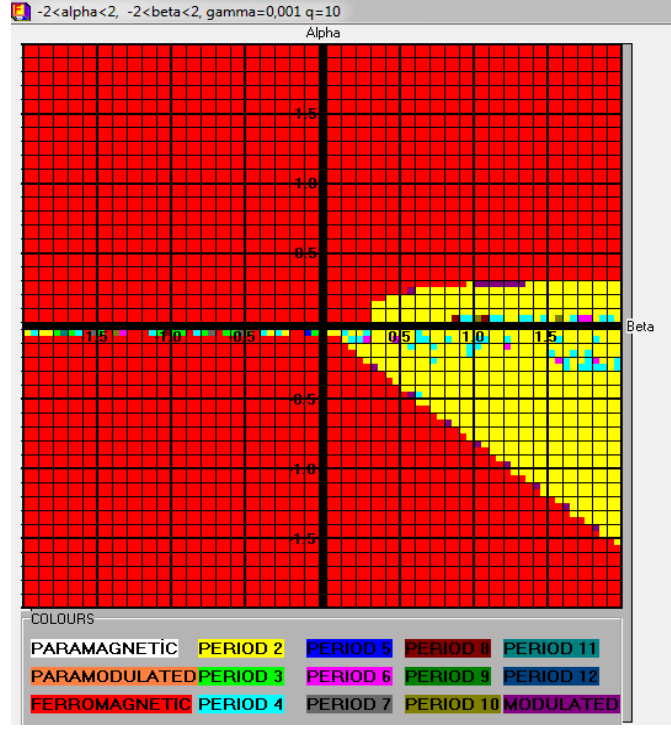
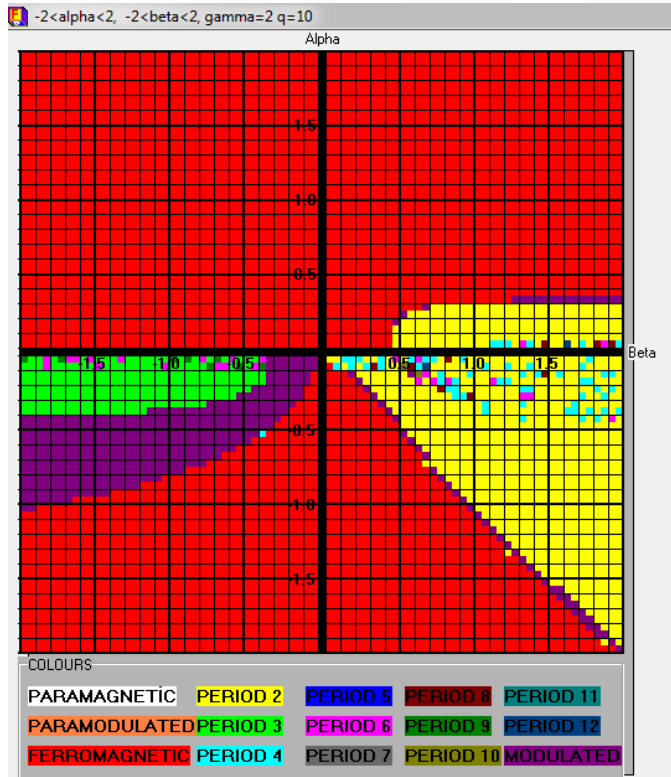
şeklinde bulunur.

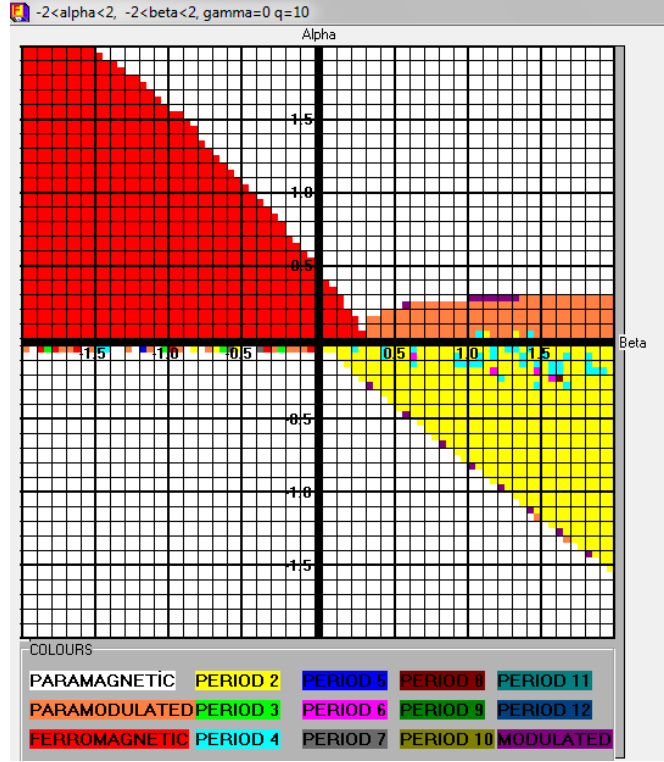
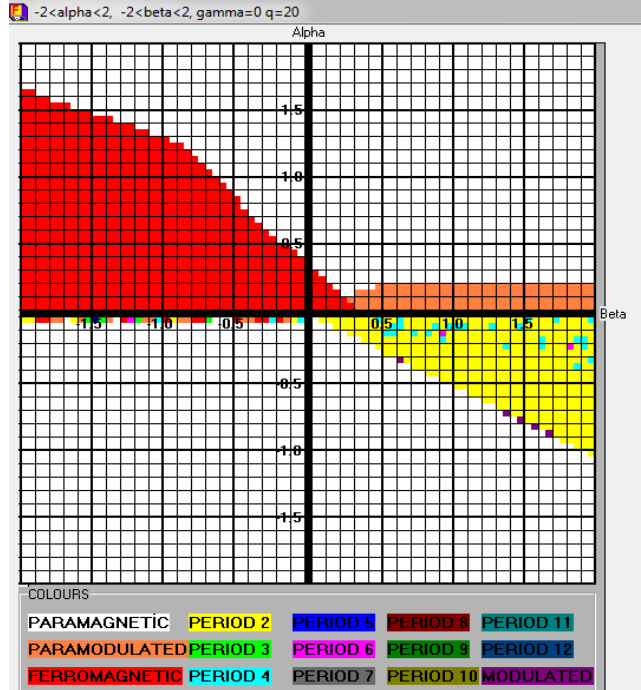
A_1, A_2, A_3, A_4 ve D yinelemeli denklemleri ve bu denklemler ile başlangıç koşullarının belirlediği $\gamma=0,1,-1,-2$ için faz diyagramları;

Şekil 4. 8. $q=5$ ve $\gamma=2$ için faz diyagramıŞekil 4. 9. $q=6$ ve $\gamma=0.001$ için faz diyagramı

Şekil 4. 10. $q=6$ ve $\gamma = 1$ için faz diyagramıŞekil 4. 11. $q=6$ ve $\gamma = 2$ için faz diyagramı

Şekil 4. 12. $q=6$ ve $\gamma = -1$ için faz diyagramıŞekil 4. 13. $q=6$ ve $\gamma = -2$ için faz diyagramı

Şekil 4. 14. $q=10$ ve $\gamma = 0.001$ için faz diyagramıŞekil 4. 15. $q=10$ ve $\gamma = 2$ için faz diyagramı

Şekil 4. 16. $q=10$ ve $\gamma=0$ için faz diyagramıŞekil 4. 17. $q=20$ ve $\gamma=0$ için faz diyagramı

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

İstatistiksel mekanik içinde Ising ve Potts modelleri için alınacak Hamilton denklemleri için faz diyagramları incelendi ve yeni faz geçişlerinin yerleri ve sistemin limit davranışları detaylı şekilde ilerideki tez çalışmalarında incelenebilecektir. Ayrıca buradan fiziksel yorumlar yapılarak yeni matematiksel modeller için fikirler edinilmeye çalışılacaktır. Bu tez çalışmamızın en özgün değerlerinden biriside keyfi q -değerli Potts modelin ikinci mertebeden Cayley ağacı üzerindeki etkisi görülmesidir. Daha farklı örgüler üzerinde incelenmeye çalışılarak, yeni bir bakış açısının başlatılması hedeflenmektedir. Bu tez çalışmasında birçok örgü çeşidinin sonuçlar üzerindeki etkisini, örgü çeşidinden bağımsız evrensel bir sınıfın bulunup/bulunmayacağını gelecek çalışma konuları olarak belirleyip, elde edilecek sonuçlar ile literatüre önemli bir katkıda bulunmayı bekliyoruz.

Bu tür hiyerarşik örgünün kaosa geçişi ve kaotik bölgenin özelliklerindeki benzerlik ve farklılıklar araştırılarak, önemli sonuçlar bulunabilme potansiyeli yüksektir. Bulacağımız bu sonuçlar mevcut yapılanlara ilave olarak gelecekte çalışılacak bilim insanlarına bir yol gösterecektir.

4. bölümün birinci kısmında üçüncü mertebeden bir Cayley ağacı üzerinde 3-durumlu Potts modellerinin en yakın komşuluk, uzatılmış ikinci komşuluk ve iki seviye üçlü komşuluk etkileşimleriyle belirtilen Hamiltonyen denkleminin belirlemiş olduğu modelin faz diyagramlarını incelenmiştir. Bu kısımda Cayley ağacının mertebesi olan k , 3 olarak alınmıştır.

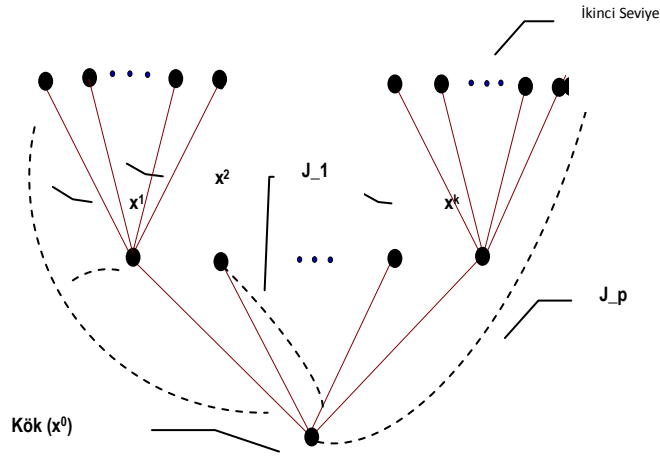
(4.1) kısmında $q=3$ durumlu Potts modelinde $\gamma=\{0,1,-1,-2\}$ değerlerinde ferromanyetik, modüle edilmiş faz, periyot 2, periyot 3 ve periyot 4 şeklinde toplam 5 faz gözlemlenmiştir. Şekil 4.3 - 4.4 - 4.5 -4.6' da 3. bölgede γ değeri büyüdükçe modüle edilmiş faz bölgesi genişlediği ve periyot 4' ün belirlemiş olduğu alanın ise daraldığı gözlemlenmektedir.

4. bölümün ikinci kısmında ise ikinci mertebeden bir Cayley ağacı üzerinde keyfi q -durumlu Potts modelinin en yakın komşuluk, uzatılmış ikinci komşuluk ve iki seviye üçlü komşuluk etkileşimleriyle meydana gelen faz diyagramları incelenmiştir. $q=5$ durumlu Potts modelinde $\gamma = \{2\}$ için Şekil 4.8 de 4 tane faz meydana gelmektedir. ferromanyetik, antiferromanyetik faza karşılık gelen 2 periyotlu faz, antifaza karşılık gelen 4 periyotlu faz ve modüle edilmiş faz gözlemlenmiştir. $q=6$ durumlu ve $\gamma = \{0.001, 1, 2\}$ için 3 faz gözlemlenmiş olup, ferromanyetik, antiferromanyetik faza karşılık gelen 2 periyotlu faz ve modüle edilmiş faz görülmektedir. $q=6$ durumunda γ değeri azaldıkça ferromanyetik fazın alanının genişlediği gözlemlenmektedir. Şekil 4.12-4.13' de 3 periyotlu fazın kaybolduğu görülmektedir. $\gamma = \{2\}$ için 3. bölgede modüle edilmiş fazın $q=5$ durumunda gözlemlendiği fakat $q=6$ durumunda ortadan kaybolduğu gözlemlenmiştir.

$\gamma = \{0\}$ için q değeri büyüdükçe paramagnetik fazın alanının bütün bölgelerde büyüdüğü ve ikinci bölgedeki paramodulated fazın alanının azaldığı görülmektedir (Şekil 4.16-4.17). $q=10$ durumunda $\gamma = \{2\}$ için 4 tane faz gözlemlenmiştir. Burada, ferromanyetik, periyot 2, periyot 3 ve modulated faz görülmektedir (Şekil 4.15).

5.2. Öneriler

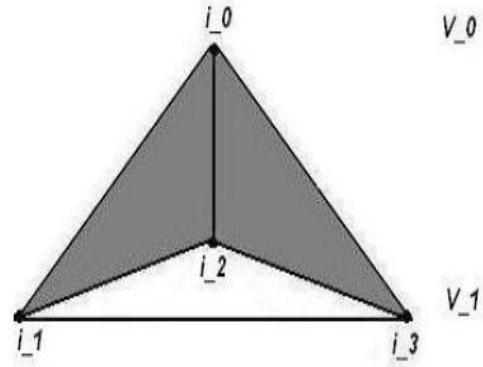
Bu tezden sonra ileride yapılabilecek çalışmalar ile ilgili şu konular önerilebilir. Elde edilen sonuç çalışmaların ışığında, tezde belirtilen Hamiltonyen denkleminin sonlu bir q durumlu ve k mertebeli Potts modeli için genellemesi yapılarak faz diyagramları incelenebilir. Ayrıca verilen Hamiltonyen



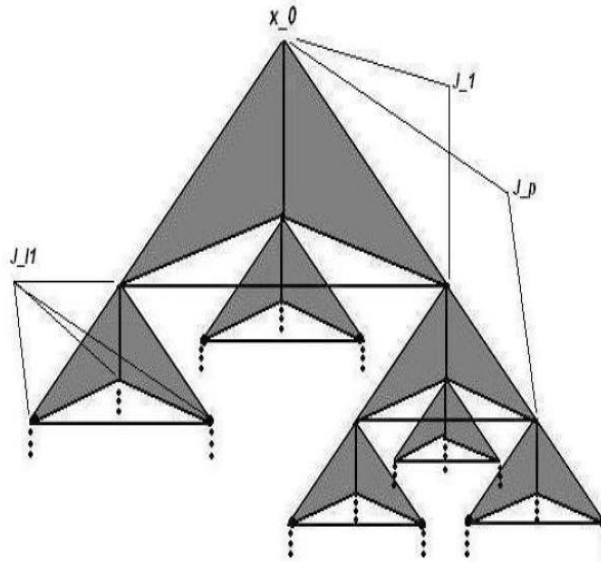
Şekil 5.1. Herhangi k -mertebeden yarı-sonsuz Cayley ağacı.

denkleminin benzer keyfi k ve sonlu bir q durumlu Potts modelinin faz diyagramları incelenebilir. Biraz karmaşık hesaplamalar gerektiren bu model için yapılabilecek en genel hali bu modelin incelenmesidir.

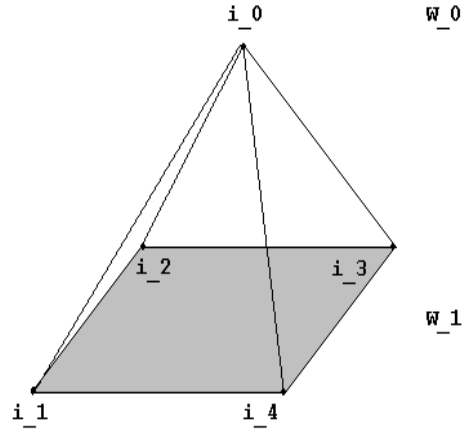
Cayley-Benzeri Ağaçlar (Avize Örgüsü): Cayley ağacı tanımında verilen yapılar, benzer şekilde Cayley-benzeri olarak adlandırdığımız örgüler üzerinde verilebilir. Şimdi avize olarak adlandırdığımız belli örgü modellerinin basit birinci seviye ve genel halleri aşağıdaki Şekil 5.2-5.3'de gösterilmiştir.



Şekil 5.2. Birinci seviye Cayley-benzeri üçgensel avize (Triangular Chandelier) ağacı.

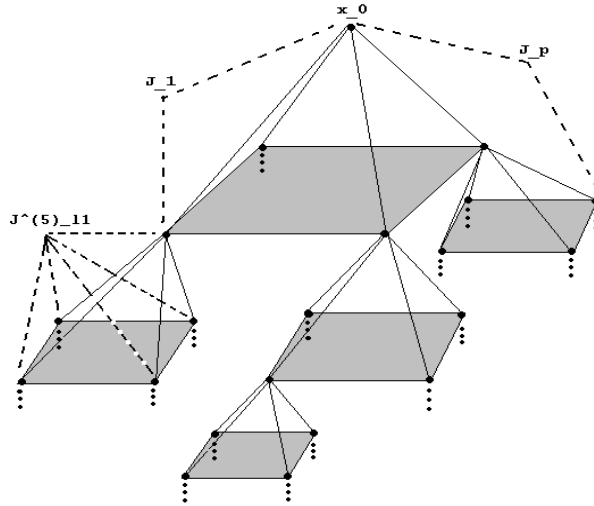


Şekil 5.3. Cayley-benzeri üçgensel avize (Triangular Chandelier) ağacı.

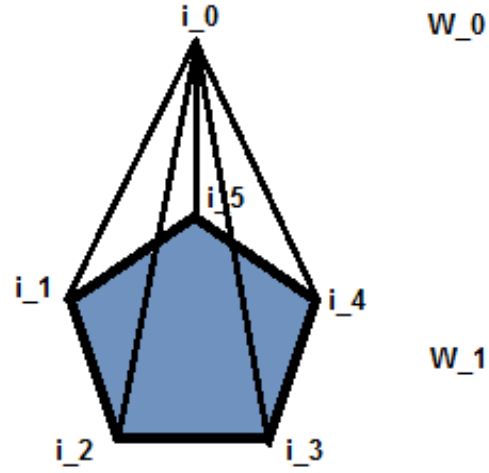


Şekil 5.4. Birinci seviye Cayley-benzeri dörtgensel avize (Rectangular Chandelier) ağacı (Bakınız kaynaklar).

Bu çalışmadan farklı olarak, farklı örgü modelleri (**Cayley ağacı haricindeki**) üzerinde ve farklı etkileşimli Ising ve Potts modellerin faz diyagramları, mıknatıslanması (magnetizasyonu) ve Lyapunov üstellerinin araştırılması incelenebilir.

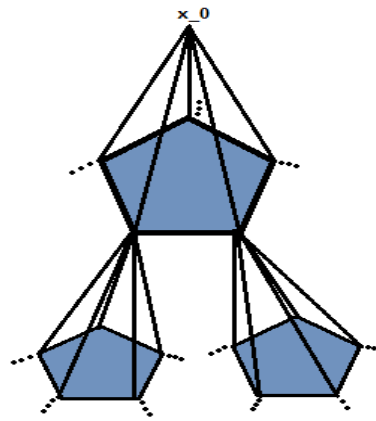


Şekil 5.5. Cayley-benzeri dörtgensel avize (Rectangular Chandelier) ağacı.

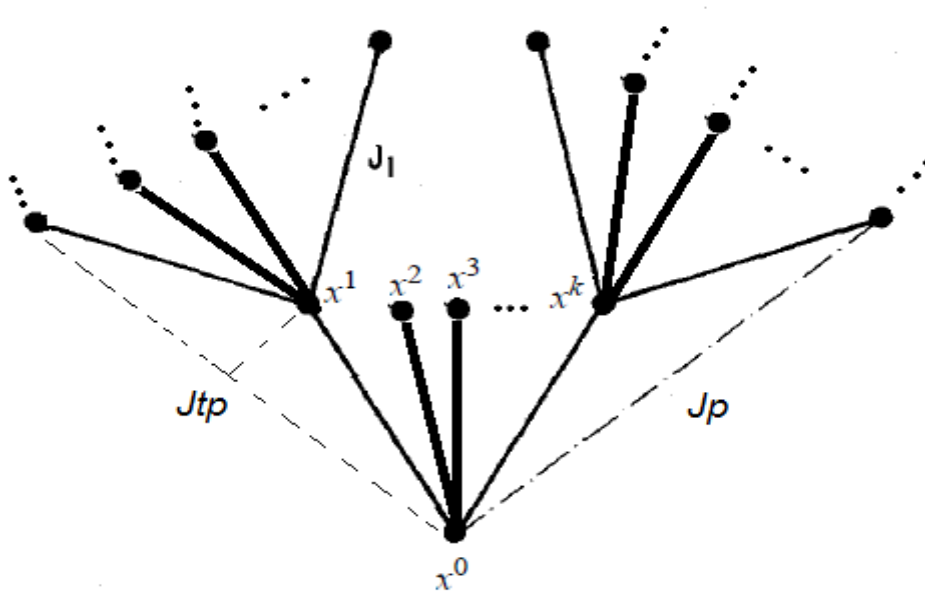


Şekil 5.6. Cayley-benzeri beşgensel avize (Pentagonal Chandelier) ağacı.

İleriki çalışmalarda elde edilen sonuçlar Cayley-benzeri (Örneğin: Avize örgüsü) ağaçlar üzerindeki karşılıklı etkileşimli Potts ve Ising modelleri için elde edilmeye çalışılabilir. Ancak bilgisayarların işletim hızları yeterli olmadığından dolayı elde edilen lineer olmayan denklem sistemlerinin çözümü algoritmik olarak detaylı biçimde kısa zamanda elde edilememektedir. Gerekli alt yapı imkanlarının sağlanması ile yeni ilginç sonuçlar beklediğimiz, farklı dizilişli örgü modelleri üzerindeki çalışmalarımız, bahsedilen farklı yönleri ile devam ettirilebilecektir.



Şekil 5.7. Cayley-benzeri beşgensel avize (Pentagonal Chandelier) ağacı.



Şekil 5.8. Yarı sonsuz k -mertebeli Cayley ağacı.

Şekil 5.8 ile verilen yarı sonsuz Cayley ağacı üzerinde genel q -spin değerli olarak hesaplanan model, biraz karmaşık hesap gerektirdiği halde bu latis üzerinde de hesaplanabilir. Bu gelecek çalışmalar için açık bırakılmış bir problem olarak önerilmektedir.

KAYNAKLAR

BAK, P., BOEHM, J., 1980. Ising model with solitons, phasons, and the 'devil's staircase'. *Physics Review B*, 27; 5297-5308.

BAK, P., 1982. Commensurate phases, incommensurate phases and the 'devil's staircase'. *Rep. Prog. Phys.*, 45; 587-629.

BAXTER, R.J., 1982. Exactly solved models in statistical mechanics, *Journal of statistical physics*. London/ NewYork.

BEAUDIN, L., 2007. A Review of the Potts model: Its connection to the Tutte polynomial and its application to complex experiments. pp.1-25.

DOMB, C., 1960. "On the Theory of Cooperative Phenomena. " *Adv. Phys., Phil. Mag.* S9: 149-361

DOROGOVTSEV, S.N., GOLTSEV, A.V., MENDES, J.F.F., 2004. Potts model on complex Networks. *Eur. Phys. J. B*, 38;1-177.

ELLIOT, R.J., 1981. Phenomenological discussion of magnetic ordering in the heavy rare-earth metals. *Phys. Rev.*, 124; 346-353.

FISHER, M.E., SELKE, W., 1980. "Infinitely many commensurate phases in a simple Ising model". *Physics Review Letters*. 44; 1502-1505.

FOULADVAND, EBRAHIM, M., AMIR, H., 2005. Potts- like model for Ghetto formation in multi- cultural societies. *International Journal of Modern Physics C: Computational Physics and Physical computation*, 16(3); 351-355.

GANIKHODJAEV, N.N., 1990. On pure phases of the three state ferromagnetic Potts model on the second- order Bethe lattice. *Theor. Math. Phys.*, 85; 1125.

GANIKHODJAEV, N.N., TEMİR, S., AKIN, H., 2005. *Cubo. A mathematical journal*. 7; 37-38.

GANIKHODJAEV, N.N., AKIN, H., TEMİR, S., 2007. *Turkish journal of mathematics*. 31;229-238.

GANIKHODJAEV, N.N., MUKHAMEDOV, F.M., PAH., C.H., 2008. Phase diagram of the three states Potts model with next-nearest-neighbor interactions on the Bethe lattice. *Physics Letters A*, 373; 33-38.

GANIKHODJAEV, N.N., TEMİR, S., AKIN, H., 2009. Modulated phase of a Potts model with competing binary interactions on a Cayley tree. *Journal of statistical Physics*. 137(4); 701-715.

GANIKHODJAEV, N. N., TEMİR, S., AKIN, H. UGUZ, S., 2011. Potts Model with the Simplest Modulated Phase. *J. Korean Phys.Soc.* 59, 2971 [doi:10.3938/jkps.59.2971]

- GEORGI, H.O., 1988. Gibbs measures and phase transitions. Walter de Gruyter, Berlin.
- GÖK, G., 2011. İkinci ve üçüncü mertebeden Cayley ağacı üzerindeki farklı etkileşimli Potts modellerinin faz diyagramlarının incelenmesi Yüksek Lisans Tezi. Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- HUSE, D.A., 1981. Simple three- state model with infinitely many phases. Phys. Rev. B, 24; 5180-5194.
- ISING, E., 1925. Beitrag sur Theorie des Ferromagnetismus. Zeit. Fur Physik, 31;253-258.
- JAYNES, E.T., 1957. Information theory and statistical mechanics. Phys. Rev., 106; 620-630.
- INAWASHIRO, S., THOMPSON, C.J., 1983. Competing Ising iterations and chaotic glass-like behaviour on a Cayley tree, Physical Letters. 97(A); 245-248.
- JIANG, YI., GLAZIER, JAMES, A., 1996. Extended large-Q model simulation of foam drainage. Philosophical magazine letters, 74(2); 119-128.
- KATSURA, S., TAKIZAWA, W., 1974. Bethe lattice and the bethe approximation. Prog. Theorem Physic., 51; 82-98.
- KINDERMANN, R., SNEEL, J.L, 1980. Markov Random Fields and their Applications: Contemporary Mathematics. American Mathematical Society, Vol. 1; 141.
- KRAMERS H. A., WANNIER, G. H., (1941)., "Statistics of the two-dimensional ferromagnet". *Physical Review* **60**: 252–262
- LYONS, R., 2000. Phase transitions on nonamenable graphs. J. Math. Phys., 41; 1099.
- MARIZ, A.M., TSALLIS, C., ALBUQUERQUE, A.L., 1985. Phase diagram of the Ising model on a Cayley tree in the presence of competing interactions and magnetic field. J. Stat. Phys., 40; 577-592.
- OSTLUND, S., 1981. Incommensurate and commensurate phases in asymmetric clock models. Phys. Rev. B., 124; 398-405.
- PERUGGI, F., 1984. Probability measures and Hamiltonian models on Bethe lattices. I. Properties and construction of MRT probability measures. J. Math. Phys., 25; 3303.
- PERUGGI, F., 1984. Probability measures and Hamiltonian models on Bethe lattices. II. The solution of thermal and configurational problems, J. Math. Phys., 25; 3316.

- PERUGGI, F., DI LIBERTO, F., MONROY, G., 1983. Potts model on Bethe lattices. I. General results. *J. Phys. A*, 16: 811.
- PERUGGI, F., DI LIBERTO, F., MONROY, G., 1987. Phase diagrams of the q-state Potts model on Bethe lattices. *J. Phys. A*, 141: 151.
- PRESTON, C., 1974. Gibbs states on countable sets. Cambridge University Press, London.
- POTTS, R.B., 1952. Some generalized order-disorder transformations. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 48; 106.
- SANYAL, S., GLAZIER, J.A., 2006. Viscous instabilities in flowing foams: A cellular Potts model approach. *Journal of statistical mechanics*.
- SCHELLING, T.C., 1971. Dynamic models of segregation, *Journal of Sociology*. 1; 143-186.
- SINAI, YA G., 1982. Theory of phase transitions. Oxford, Pergamon
- SPITZER, F., 1971. Random fields and interacting particle systems. M. A. A. Summer Seminar notes.
- SUN, L., CHANG, F.Y., CAI, X., 2004. A discrete simulation of tumor growth concerning nutrient concentration. *International Journal of modern physics B: condensed matter Physics; Statistical Physics; Applied Physics*. 18(17-19); 2651-2657.
- TEMIR, S., GANIKHODJAEV, N.N., AKIN, H., UĞUZ, S., 2010. Phase diagrams of a Potts model with competing binary and ternary interactions. *AIP. Conf. Proc.* Vol. 1281; 2069-2073.
- TIMONIN, P.N., 2004. Inhomogeneity-induced second order phase transitions in the Potts models on hierarchical lattices. *JETP*, 99; 1044.
- TUCKER, A., 2002. Applied combinatorics, Hoboken. Forth Edition, N.J.
- UGUZ, S. AKIN, H., , 2010. Phase diagrams of competing quadruple and binary interactions on Cayley tree-like lattice: Triangular Chandelier. *Physica A*, 389, 1839-1848.
- UGUZ, S. AKIN, H., 2011. Modulated Phase of an Ising System with quinary and binary interactions on a Cayley tree-like lattice: Rectangular Chandelier. *Chinese Journal of Physics*, 49, 785-798.
- VANNIMENUS, J., 1981. Modulated phase of a Ising system with competing interactions on a Cayley tree. *Z. Physics B*, 43; 141-148.
- WEIDLICH, W., 1971. The statistical description of polarization phenomena in society. *Br. J. Math Statist. Psychol.*, 251-266.
- WU, F.Y., 1982. The Potts model. *Rev. Mod. Physics*, 54; 235-268.

ÖZGEÇMİŞ

01.01.1987 yılında Şanlıurfa'nın Bozova ilçesinde doğdu. İlk ve Ortaokulu Cengiz Topel İlköğretim okulunda, Lise öğrenimini Davut Zeki Akpınar Lisesinde tamamladı. 2006 yılında yerleştiği Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Matematik Bölümünden 2010 yılında birincilikle mezun oldu. Aynı yılın güz döneminde Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü matematik bölümünde yüksek lisansa başladı. Bu bölümde ayrıca "Cayley ağacı üzerindeki örgü modellerinin dinamik sistemlerinin limit davranışları ve faz diyagramları" adlı TÜBİTAK projesine bursiyer olarak kabul edildi.

EK-1:

Ek.1.1. Dördüncü Mertebeden Cayley Ağacı Üzerindeki Üç Spin Değerli Potts Modeli İçin (k=4 q=3) Temel Denklemler

Bu kısımda Cayley ağacının mertebesi olan k=4 olarak alınacaktır. En yakın komşuluk, uzatılmış ikinci komşuluk ve aynı seviye üçlü komşuluk etkileşimli 3-durumlu Potts modelinin Hamiltonyen denklemi;

$$H(\sigma) = -J_T \sum_{\langle x,y,z \rangle} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)} - J_P \sum_{\langle x,y \rangle} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - J_1 \sum_{\langle x,y \rangle} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} \quad (EK.1.1.1)$$

şeklindedir.

Toplam ayrışım fonksiyonu

$$Z^{(n)} = \sum_{i_0, i_1, i_2, i_3, i_4=1}^3 Z^{(n)} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ & i_0 & & \end{pmatrix} \quad (EK.1.1.2)$$

Kronecker deltası;

$$\delta_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)} = \begin{cases} 1 & , \sigma(x) = \sigma(y) = \sigma(z) \\ \frac{1}{2} & , \sigma(x) = \sigma(y) \neq \sigma(z) \text{ veya } \sigma(x) \neq \sigma(y) = \sigma(z) \\ 0 & , \text{ aksi takdirde} \end{cases} \quad (EK.1.1.3)$$

biçiminde tanımlıdır.

Bu modelde ilk önce ayrışım fonksiyonları hesaplanacaktır. Burada k=4 olduğu için denklem sayısı k ve q değerine bağlı olarak değişecektir. Hamiltonyen modelinin toplam ayrışım fonksiyonu sayısı 243 tanedir. Bunlar;

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & & \end{pmatrix} = a^{24} c^4 Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ & 1 & & \end{pmatrix} = a^{18} c^3 Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{18}c^3 Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{18}c^3 Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{14}c^2 Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{12}c^2 Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{18}c^3 Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & 2 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{12}c^2 Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & 3 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{14}c^2 Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{18}c^3 Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{14}c^2 Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{12}c^2 Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{14}c^2 Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 2 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{12}c Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 2 & 2 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{12} Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{12} c^2 Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 2 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 3 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{18} c^3 Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{12} c^2 Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{14} c^2 Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{12} c^2 Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 2 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 3 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{14} c^2 Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 2 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 3 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{12} c Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{18}c^3Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{14}c^2Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{12}c^2Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{14}c^2Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 2 & 2 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{12}cZ^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 2 & 3 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^8cZ^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 3 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{12}c^2Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 3 & 2 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^8cZ^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 3 & 3 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^8cZ^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{14}c^2Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{12}cZ^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^8cZ^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 2 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{12}cZ^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 2 & 3 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^6 Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 3 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 3 & 2 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^6 Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 3 & 3 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^4 Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{12} c^2 Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 2 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 2 & 2 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^6 Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 2 & 3 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^4 Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 3 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 3 & 2 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^4 Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 3 & 3 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^6 Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{smallmatrix}\right) = a^{18}c^3 Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{smallmatrix}\right) = a^{12}c^2 Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{smallmatrix}\right) = a^{14}c^2 Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 \end{smallmatrix}\right) = a^{12}c^2 Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ & & & 1 \end{smallmatrix}\right) = a^8c Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ & & & 1 \end{smallmatrix}\right) = a^8c Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ & & & 1 \end{smallmatrix}\right) = a^{14}c^2 Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ & & & 1 \end{smallmatrix}\right) = a^8c Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 3 & 3 \\ & & & 1 \end{smallmatrix}\right) = a^{12}c Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{smallmatrix}\right) = a^{12}c^2 Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{smallmatrix}\right) = a^8c Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{smallmatrix}\right) = a^8c Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ & & & 1 \end{smallmatrix}\right) = a^8c Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 \end{pmatrix} = a^6 Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 \end{pmatrix} = a^4 Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a^8 c Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 \end{pmatrix} = a^4 Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 \end{pmatrix} = a^6 Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a^{14} c^2 Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 \end{pmatrix} = a^8 c Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 3 \\ 1 \end{pmatrix} = a^{12} c Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a^8 c Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 \end{pmatrix} = a^4 Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 1 \end{pmatrix} = a^6 Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a^{12} c Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 \end{pmatrix} = a^6 Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 3 & 3 & 3 \\ & & & 1 \end{array}\right) = a^{12} Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^{12} Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^{12} c Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^6 Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^{12} c Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^{14} c^2 Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^6 c Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^{12} c Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & 2 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^6 c Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & 3 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^4 Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^{12} c Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^{14} c^2 Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^6 c Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^{14}c^2Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 2 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^{18}c^3Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^8c^2Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^6cZ^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 2 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^8c^2Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 3 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^8cZ^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^6Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^6cZ^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 3 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^4Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^6cZ^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 2 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^8c^2Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 3 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^8cZ^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^4Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 1\ 3\ 3\ 2 \\ 2 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 1\ 3\ 3\ 3 \\ 2 \end{array}\right) = a^6 Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 2\ 1\ 1\ 1 \\ 2 \end{array}\right) = a^{12} c Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 2\ 1\ 1\ 2 \\ 2 \end{array}\right) = a^{14} c^2 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 2\ 1\ 1\ 3 \\ 2 \end{array}\right) = a^6 c Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 2\ 1\ 2\ 1 \\ 2 \end{array}\right) = a^{14} c^2 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 2\ 1\ 2\ 2 \\ 2 \end{array}\right) = a^{18} c^3 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 2\ 1\ 2\ 3 \\ 2 \end{array}\right) = a^8 c^2 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 2\ 1\ 3\ 1 \\ 2 \end{array}\right) = a^6 c Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 2\ 1\ 3\ 2 \\ 2 \end{array}\right) = a^8 c^2 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 2\ 1\ 3\ 3 \\ 2 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 2\ 2\ 1\ 1 \\ 2 \end{array}\right) = a^{14} c^2 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 2\ 2\ 1\ 2 \\ 2 \end{array}\right) = a^{18} c^3 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 \end{matrix}\right) = a^8 c^2 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 \end{matrix}\right) = a^{18} c^3 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 \end{matrix}\right) = a^{24} c^4 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 \end{matrix}\right) = a^{18} c^3 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 \end{matrix}\right) = a^8 c^2 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 \end{matrix}\right) = a^{18} c^3 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 \end{matrix}\right) = a^{14} c^2 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 \end{matrix}\right) = a^6 c Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 \end{matrix}\right) = a^8 c^2 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 \end{matrix}\right) = a^8 c Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 \end{matrix}\right) = a^8 c^2 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 \end{matrix}\right) = a^{18} c^3 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 \end{matrix}\right) = a^{14} c^2 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 3 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 3 & 2 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^{14} c^2 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 3 & 3 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^{12} c Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^6 Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & 2 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^6 c Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & 3 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^4 Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^6 c Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 & 2 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^8 c^2 Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 & 3 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 3 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^4 Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 3 & 2 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 3 & 3 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^6 Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ & & & 2 \end{matrix}\right) = a^{12}c^2 Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ & & & 2 \end{matrix}\right) = a^8c Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{matrix}\right) = a^{12}c^2 Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ & & & 2 \end{matrix}\right) = a^{18}c^3 Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ & & & 2 \end{matrix}\right) = a^{14}c^2 Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ & & & 2 \end{matrix}\right) = a^8c Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ & & & 2 \end{matrix}\right) = a^{14}c^2 Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 2 & 3 & 3 \\ & & & 2 \end{matrix}\right) = a^{12}c Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ & & & 2 \end{matrix}\right) = a^4 Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ & & & 2 \end{matrix}\right) = a^8c Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 3 & 1 & 3 \\ & & & 2 \end{matrix}\right) = a^6 Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{matrix}\right) = a^8c Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ & & & 2 \end{matrix}\right) = a^{14}c^2 Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = a^{12}cZ^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = a^6Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = a^{12}cZ^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = a^{12}Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = a^{12}Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = a^6Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = a^{12}cZ^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = a^6Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = a^4Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = a^8cZ^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = a^{12}cZ^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = a^8cZ^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = a^{14}c^2Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 1\ 2\ 1\ 1 \\ 3 \end{array}\right) = a^6 Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 1\ 2\ 1\ 2 \\ 3 \end{array}\right) = a^4 Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 1\ 2\ 1\ 3 \\ 3 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 1\ 2\ 2\ 1 \\ 3 \end{array}\right) = a^4 Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 1\ 2\ 2\ 2 \\ 3 \end{array}\right) = a^6 Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 1\ 2\ 2\ 3 \\ 3 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 1\ 2\ 3\ 1 \\ 3 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 1\ 2\ 3\ 2 \\ 3 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 1\ 2\ 3\ 3 \\ 3 \end{array}\right) = a^{12} c^2 Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 1\ 3\ 1\ 1 \\ 3 \end{array}\right) = a^{12} c Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 1\ 3\ 1\ 2 \\ 3 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 1\ 3\ 1\ 3 \\ 3 \end{array}\right) = a^{14} c^2 Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{c} 1\ 3\ 2\ 1 \\ 3 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^8 c Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^{12} c^2 Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^{14} c^2 Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^{12} c^2 Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^{18} c^3 Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^6 Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^4 Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^8 c Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^4 Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^6 Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^8 c Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^8 c Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^8 c Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 3 & 3 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^{12}c^2 Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & 1 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^4 Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & 2 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^6 Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & 3 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 2 & 1 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^6 Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 2 & 2 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^{12} Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 2 & 3 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^{12} c Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 3 & 2 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^{12} c Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 3 & 3 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^{14} c^2 Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 1 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 2 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^8 c Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 3 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^{12} c^2 Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^8 c Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^{12} c Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^{14} c^2 Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^{12} c^2 Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^{14} c^2 Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^{18} c^3 Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^{12} c Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^8 c Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^{14} c^2 Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^8 c Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^8 c Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^{12} c^2 Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = a^{14} c^2 Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 3 & 2 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^{12}c^2 Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 3 & 3 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^{18}c^3 Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 1 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^8c Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 2 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^8c Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 3 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^{12}c^2 Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 2 & 1 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^8c Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 2 & 2 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^{12}c Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 2 & 3 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^{14}c^2 Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^{12}c^2 Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 3 & 2 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^{14}c^2 Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 3 & 3 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^{18}c^3 Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 3 & 1 & 1 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^{14}c^2 Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{cccc} 3 & 3 & 1 & 2 \\ & & & 3 \end{array}\right) = a^{12}c^2 Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 \end{pmatrix} = a^{18} c^3 Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 \end{pmatrix} = a^{12} c^2 Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a^{14} c^2 Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 \end{pmatrix} = a^{18} c^3 Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 \end{pmatrix} = a^{18} c^3 Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a^{18} c^3 Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 \end{pmatrix} = a^{24} c^4 Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3)$$

olarak hesaplanır. Bir birinden bağımsız fonksiyonları bu 243 ayrışım fonksiyonu içinden seçmeliyiz.

Bunun için $\bar{\sigma}^{(n)} \left(\frac{v}{v_n} \right) \equiv 1$ sınır şartı ve Hamiltonyen denklemi üzerindeki

komşuluk tipleri göz önüne alınırsa 5 bağımsız fonksiyonuna indirgenmiş olur.

Bunlar;

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu fonksiyonları aşağıdaki gibi bir notasyonla kullanırsak;

$$U_1^{(n)} = \sqrt[4]{Z^{(n)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$U_2^{(n)} = \sqrt[4]{Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$U_3^{(n)} = \sqrt[4]{Z^{(n)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \quad (EK.1.1.4)$$

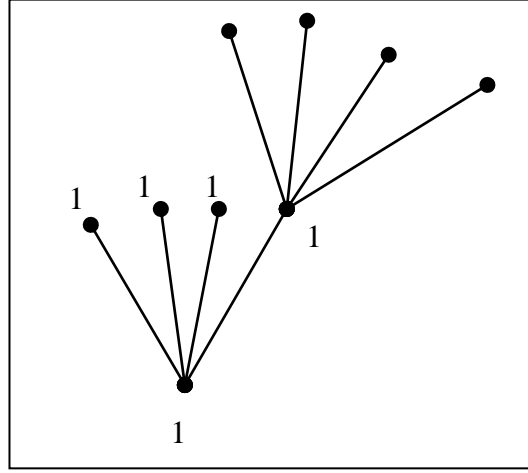
$$U_4^{(n)} = \sqrt[4]{Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$U_5^{(n)} = \sqrt[4]{Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

şeklini alır. Ağaç üzerindeki uzatılmış komşuluk etkileşimlerine bakarak $U_1^{(n)}$, $U_2^{(n)}$,

$U_3^{(n)}$, $U_4^{(n)}$ ve $U_5^{(n)}$ denklemlerini hesaplayacağız. $Z^{(n)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ üzerindeki olasılıkları

düşünerek $U_1^{(n)}$ denklemini hesaplayacağız.



Şekil Ek-1.1 $Z^{(n)} \binom{1111}{1}$ üzerine kurulmuş olan dallar

$U_1^{(n)}$ denklemi;

$$\begin{aligned}
 U_1^{(n)} = a^6 c & \left[b^4 Z^{(n)} \binom{1111}{1} + 4b^3 Z^{(n)} \binom{1112}{1} + 4b^3 Z^{(n)} \binom{1113}{1} \right. \\
 & + 6b^2 Z^{(n)} \binom{1122}{1} + 12b^2 Z^{(n)} \binom{1123}{1} + 6b^2 Z^{(n)} \binom{1133}{1} \\
 & + 4b Z^{(n)} \binom{1222}{1} + 12b Z^{(n)} \binom{1223}{1} + 12b Z^{(n)} \binom{1233}{1} \\
 & + 4b Z^{(n)} \binom{1333}{1} + Z^{(n)} \binom{2222}{1} + 4Z^{(n)} \binom{2223}{1} \\
 & \left. + 6Z^{(n)} \binom{2233}{1} + 4Z^{(n)} \binom{2333}{1} + Z^{(n)} \binom{3333}{1} \right] \quad (EK.1.1.5)
 \end{aligned}$$

şeklinindedir. Ayrışım fonksiyonlarının değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
U_1^{(n)} = a^6 c \left[& b^4 (U_1^{(n)})^4 + 8b^3 a^{-3} (U_1^{(n)})^3 U_2^{(n)} + 12b^2 a^{-4} (U_1^{(n)})^2 (U_2^{(n)})^2 \right. \\
& + 12b^2 a^{-6} (U_1^{(n)})^2 (U_2^{(n)})^2 + 8ba^{-3} U_1^{(n)} (U_2^{(n)})^3 + 24ba^{-7} U_1^{(n)} (U_2^{(n)})^3 \\
& \left. + 8a^{-6} (U_2^{(n)})^4 + 6a^{-8} (U_2^{(n)})^4 + 2(U_2^{(n)})^4 \right]
\end{aligned}$$

şeklini alır.

$$Z^{(n)} \binom{2 \ 2 \ 2 \ 2}{1} \text{ ayrışım fonksiyonu üzerindeki uzatılmış ikinci komşuluk}$$

etkileşimleriyle $U_2^{(n)}$ denklemi hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}
U_2^{(n)} = a^3 \left[& b^4 Z^{(n)} \binom{1 \ 1 \ 1 \ 1}{2} + 4b^3 Z^{(n)} \binom{1 \ 1 \ 1 \ 2}{2} + 4b^3 Z^{(n)} \binom{1 \ 1 \ 1 \ 3}{2} \right. \\
& + 6b^2 Z^{(n)} \binom{1 \ 1 \ 2 \ 2}{2} + 12b^2 Z^{(n)} \binom{1 \ 1 \ 2 \ 3}{2} + 6b^2 Z^{(n)} \binom{1 \ 1 \ 3 \ 3}{2} \\
& + 4b Z^{(n)} \binom{1 \ 2 \ 2 \ 2}{2} + 12b Z^{(n)} \binom{1 \ 2 \ 2 \ 3}{2} + 12b Z^{(n)} \binom{1 \ 2 \ 3 \ 3}{2} \quad (EK.1.1.6) \\
& + 4b Z^{(n)} \binom{1 \ 3 \ 3 \ 3}{2} + Z^{(n)} \binom{2 \ 2 \ 2 \ 2}{2} + 4Z^{(n)} \binom{2 \ 2 \ 2 \ 3}{2} \\
& \left. + 6Z^{(n)} \binom{2 \ 2 \ 3 \ 3}{2} + 4Z^{(n)} \binom{2 \ 3 \ 3 \ 3}{2} + Z^{(n)} \binom{3 \ 3 \ 3 \ 3}{2} \right]
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrışım fonksiyonlarının değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
U_2^{(n)} = a^3 \left[& b^4 (U_3^{(n)})^4 + 4b^3 a^{-3} (U_3^{(n)})^3 U_4^{(n)} + 4b^3 a^{-6} (U_3^{(n)})^3 U_5^{(n)} \right. \\
& + b^2 a^{-4} (U_3^{(n)})^2 (U_4^{(n)})^2 + 12b^2 a^{-9} (U_3^{(n)})^2 U_4^{(n)} U_5^{(n)} \\
& + 6b^2 a^{-8} (U_3^{(n)})^2 (U_5^{(n)})^2 + 4ba^{-3} U_3^{(n)} (U_4^{(n)})^3 + 12ba^{-10} U_3^{(n)} (U_4^{(n)})^2 U_5^{(n)} \\
& + 12ba^{-7} U_3^{(n)} U_4^{(n)} (U_5^{(n)})^2 + 4ba^{-6} U_3^{(n)} (U_5^{(n)})^3 + (U_4^{(n)})^4 \\
& \left. + 4a^{-3} (U_4^{(n)})^3 U_5^{(n)} + 6a^{-4} (U_4^{(n)})^2 (U_5^{(n)})^2 + 4a^{-3} U_4^{(n)} (U_5^{(n)})^3 + (U_5^{(n)})^4 \right]
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanmış olur.

Aynı şekilde $U_3^{(n)}$, $U_4^{(n)}$ ve $U_5^{(n)}$ denklemleri $Z^{(n)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 2 & & \end{pmatrix}$, $Z^{(n)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ & 2 & & \end{pmatrix}$, $Z^{(n)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ & 2 & & \end{pmatrix}$ üzerlerine inşa edilen dallardaki komşuluk etkileşimleri hesaplanarak bulunur. Bunlar;

$$\begin{aligned} U_3^{(n)} = & a^3 \left[\left(U_1^{(n)} \right)^4 + 4ba^{-3} \left(U_1^{(n)} \right)^3 U_2^{(n)} + 4ba^{-3} \left(U_1^{(n)} \right)^3 U_2^{(n)} \right. \\ & + \left(6b^2a^{-4} + 12ba^{-6} + 6a^{-4} \right) \left(U_1^{(n)} \right)^2 \left(U_2^{(n)} \right)^2 \\ & + \left(4b^3a^{-3} + 12b^2a^{-7} + 12ba^{-7} + 4a^{-3} \right) U_1^{(n)} \left(U_2^{(n)} \right)^3 \\ & \left. + \left(b^4 + 4b^3a^{-6} + 6b^2a^{-8} + 4ba^{-6} + 1 \right) \left(U_2^{(n)} \right)^4 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_4^{(n)} = & a^3 c \left[\left(U_3^{(n)} \right)^4 + 4ba^{-3} U_4^{(n)} \left(U_3^{(n)} \right)^3 + 4a^{-6} \left(U_3^{(n)} \right)^3 U_5^{(n)} \right. \\ & + 6b^2a^{-4} \left(U_3^{(n)} \right)^2 \left(U_4^{(n)} \right)^2 + 12ba^{-9} \left(U_3^{(n)} \right)^2 U_4^{(n)} U_5^{(n)} \\ & + 6ba^{-8} \left(U_3^{(n)} \right)^2 \left(U_5^{(n)} \right)^2 + 4b^3a^{-3} U_3^{(n)} \left(U_4^{(n)} \right)^3 \\ & + 12b^2a^{-10} U_3^{(n)} \left(U_4^{(n)} \right)^2 U_5^{(n)} + 12ba^{-7} U_3^{(n)} U_4^{(n)} \left(U_5^{(n)} \right)^2 \\ & + 4a^{-6} U_3^{(n)} \left(U_5^{(n)} \right)^3 + b^4 \left(U_4^{(n)} \right)^4 + 4b^3a^{-3} \left(U_4^{(n)} \right)^3 U_5^{(n)} \\ & \left. + 6b^2a^{-4} \left(U_4^{(n)} \right)^2 \left(U_5^{(n)} \right)^2 + 4ba^{-3} U_4^{(n)} \left(U_5^{(n)} \right)^3 + \left(U_5^{(n)} \right)^4 \right] \end{aligned}$$

(EK.1.1.7)

$$\begin{aligned} U_5^{(n)} = & a^3 \left[\left(U_3^{(n)} \right)^4 + 4ba^{-6} \left(U_3^{(n)} \right)^3 U_5^{(n)} + 4a^{-3} \left(U_3^{(n)} \right)^3 U_4^{(n)} \right. \\ & + 6b^2a^{-8} \left(U_3^{(n)} \right)^2 \left(U_5^{(n)} \right)^2 + 12ba^{-9} \left(U_3^{(n)} \right)^2 U_4^{(n)} U_5^{(n)} \\ & + 6a^{-4} \left(U_3^{(n)} \right)^2 \left(U_4^{(n)} \right)^2 + 4b^3a^{-6} U_3^{(n)} \left(U_5^{(n)} \right)^3 \\ & + 12b^2a^{-7} U_3^{(n)} U_4^{(n)} \left(U_5^{(n)} \right)^2 + 12ba^{-6} U_3^{(n)} \left(U_4^{(n)} \right)^2 U_5^{(n)} \\ & + 4a^{-3} U_3^{(n)} \left(U_4^{(n)} \right)^3 + b^4 \left(U_5^{(n)} \right)^4 + 4b^3a^{-3} U_4^{(n)} \left(U_5^{(n)} \right)^3 \\ & \left. + 6b^2a^{-4} \left(U_4^{(n)} \right)^2 \left(U_5^{(n)} \right)^2 + 4ba^{-3} \left(U_4^{(n)} \right)^3 U_5^{(n)} + \left(U_4^{(n)} \right)^4 \right] \end{aligned}$$

şeklinde bulunmuş olur.

Sistemin yinelemeli denklemleri olan A_1, A_2, A_3, A_4 ve D aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
A_1 = & 2a^3 \left[b^4 (X + Y_3 - 3Y_2)^4 + 8b^3 a^{-3} (X + Y_3 - 3Y_2)^3 (1 - Y_1) \right. \\
& + 4b^3 a^{-6} (X + Y_3 - 3Y_2)^3 (X + Y_2 - 3Y_3) + 24b^2 a^{-4} (X + Y_3 - 3Y_2)^2 (1 - Y_1)^2 \\
& + 24b^2 a^{-9} (X + Y_3 - 3Y_2)^2 (1 - Y_1) (X + Y_2 - 3Y_3) + 6b^2 a^{-8} (X + Y_3 - 3Y_2)^2 (X + Y_2 - 3Y_3)^2 \\
& + 32ba^{-3} (X + Y_3 - 3Y_2) (1 - Y_1)^3 + 48ba^{-10} (X + Y_3 - 3Y_2) (1 - Y_1)^2 (X + Y_2 - 3Y_3) \\
& + 24ba^{-7} (X + Y_3 - 3Y_2) (1 - Y_1) (X + Y_2 - 3Y_3)^2 + 4ba^{-6} (X + Y_3 - 3Y_2) (X + Y_2 - 3Y_3)^3 \\
& + 16(1 - Y_1)^4 + 32a^{-3} (1 - Y_1)^3 (X + Y_2 - 3Y_3) + 24a^{-4} (1 - Y_1)^2 (X + Y_2 - 3Y_3)^2 \\
& \left. + 8a^{-3} (1 - Y_1) (X + Y_2 - 3Y_3)^3 + (X + Y_2 - 3Y_3)^4 \right] \\
& + a^3 \left[8(1 + Y_1)^4 + (32ba^{-3} + 32a^{-3})(1 + Y_1)^3 (X + Y_2 + Y_3) \right. \\
& + (24b^2 a^{-4} + 48ba^{-6} + 24a^{-4})(1 + Y_1)^2 (X + Y_2 + Y_3)^2 + (8ba^{-3} + 24b^2 a^{-7} \\
& + 24ba^{-7} + 8a^3)(1 + Y_1) (X + Y_2 + Y_3)^3 + (b^4 + 4b^3 a^{-6} + 6b^2 a^{-8} \\
& \left. + 4ba^{-6} + 1)(X + Y_2 + Y_3)^4 \right] \\
& + a^3 \left[(X + Y_3 - 3Y_2)^4 + 4ba^{-6} (X + Y_3 - 3Y_2)^3 (X + Y_2 - 3Y_3) + 8a^3 (X + Y_3 - 3Y_2)^3 \right. \\
& (1 - Y_1) + 6b^2 a^{-8} (X + Y_3 - 3Y_2)^2 (X + Y_2 - 3Y_3)^2 + 24ba^{-9} (X + Y_3 - 3Y_2)^2 (1 - Y_1) \\
& (X + Y_2 - 3Y_3) + 24a^{-4} (X + Y_3 - 3Y_2)^2 (1 - Y_1)^2 + 4b^3 a^{-6} (X + Y_3 - 3Y_2) (X + Y_2 - 3Y_3)^3 \\
& + 24b^2 a^{-7} (X + Y_3 - 3Y_2) (1 - Y_1) (X + Y_2 - 3Y_3)^2 + 48ba^{-6} (X + Y_3 - 3Y_2) (1 - Y_1)^2 \\
& (X + Y_2 - 3Y_3) + 32a^{-3} (X + Y_3 - 3Y_2) (1 - Y_1)^3 + b^4 (X + Y_2 - 3Y_3)^4 \\
& + 8b^3 a^{-3} (1 - Y_1) (X + Y_2 - 3Y_3)^3 + 24b^2 a^{-4} (1 - Y_1)^2 (X + Y_2 - 3Y_3)^2 \\
& \left. + 32ba^{-3} (1 - Y_1)^3 (X + Y_2 - 3Y_3) + 16(1 - Y_1)^4 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 = & a^6 c \left[16b^4 (1+Y_1)^4 + 64b^3 a^{-3} (1+Y_1)^3 (X+Y_2+Y_3) + (48b^2 a^{-4} \right. \\
& + 48b^2 a^{-6}) (1+Y_1)^2 (X+Y_2+Y_3)^2 + (16ba^{-3} + 48ba^{-7}) (1+Y_1) (X+Y_2+Y_3)^3 \\
& + (8a^{-6} + 6a^{-8} + 2) (X+Y_2+Y_3) \left. \right] - a^6 c \left[(X+Y_3-3Y_2)^4 \right. \\
& + 8ba^{-3} (1-Y_1) (X+Y_3-3Y_2)^3 + 4a^{-6} (X+Y_3-3Y_2)^3 (X+Y_2-3Y_3) \\
& + 24b^2 a^{-4} (X+Y_3-3Y_2)^2 (1-Y_1)^2 + 24ba^{-9} (X+Y_3-3Y_2)^2 (1-Y_1) (X+Y_2-3Y_3) \\
& + 6a^{-8} (X+Y_3-3Y_2)^2 (X+Y_2-3Y_3)^2 + 32b^3 a^{-3} (X+Y_3-3Y_2) (1-Y_1)^3 \\
& + 48b^2 a^{-10} (X+Y_3-3Y_2) (1-Y_1)^2 (X+Y_2-3Y_3) + 24ba^{-7} (X+Y_3-3Y_2) (1-Y_1) \\
& (X+Y_2-3Y_3)^2 + 4a^{-6} (X+Y_3-3Y_2) (X+Y_2-3Y_3)^3 + 16b^4 (1-Y_1)^4 \\
& + 32b^3 a^{-3} (1-Y_1)^3 (X+Y_2-3Y_3) + 24b^2 a^{-4} (1-Y_1)^2 (X+Y_2-3Y_3)^2 \\
& \left. + 8ba^{-3} (1-Y_1) (X+Y_2-3Y_3)^3 + (X+Y_2-3Y_3)^4 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 = & a^3 \left[b^4 (X+Y_3-3Y_2)^4 + 8b^3 a^{-3} (X+Y_3-3Y_2)^3 (1-Y_1) \right. \\
& + 4b^3 a^{-6} (X+Y_3-3Y_2)^3 (X+Y_2-3Y_3) + 24b^2 a^{-4} (X+Y_3-3Y_2) (1-Y_1)^2 \\
& + 24b^2 a^{-9} (X+Y_3-3Y_2)^2 (1-Y_1) (X+Y_2-3Y_3) + 6b^2 a^{-8} (X+Y_3-3Y_2)^2 (X+Y_2-3Y_3)^2 \\
& + 24ba^{-7} (X+Y_3-3Y_2) (1-Y_1) (X+Y_2-3Y_3)^2 + 4ba^{-6} (X+Y_3-3Y_2) (X+Y_2-3Y_3)^3 \\
& + 16(1-Y_1)^4 + 32a^{-3} (1-Y_1)^3 (X+Y_2-3Y_3) + 24a^{-4} (1-Y_1)^2 (X+Y_2-3Y_3)^2 \\
& + 8a^{-3} (1-Y_1) (X+Y_2-3Y_3)^3 + (X+Y_2-3Y_3)^4 \left. \right] - a^3 \left[8(1+Y_1)^4 \right. \\
& + (32ba^{-3} + 32a^{-3}) (1+Y_1)^3 (X+Y_2+Y_3) + (24b^2 a^{-4} + 48ba^{-6} + 24a^{-4}) \\
& (1+Y_1)^2 (X+Y_2+Y_3)^2 + (8ba^{-3} + 24b^2 a^{-7} + 24ba^{-7} + 8a^{-3}) \\
& \left. (1+Y_1) (X+Y_2+Y_3)^3 + (b^4 + 4b^3 a^{-6} + 6b^2 a^{-8} + 4ba^{-6} + 1) (X+Y_2+Y_3)^4 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 = & a^3 \left[b^4 (X + Y_3 - 3Y_2)^4 + 8b^3 a^{-3} (X + Y_3 - 3Y_2)^3 (1 - Y_1) + 4b^3 a^{-6} \right. \\
& (X + Y_3 - 3Y_2)^3 (X + Y_2 - 3Y_3) + 24b^2 a^{-4} (X + Y_3 - 3Y_2)^2 (1 - Y_1)^2 \\
& + 24b^2 a^{-9} (X + Y_3 - 3Y_2)^2 (1 - Y_1) (X + Y_2 - 3Y_3) + 6b^2 a^{-8} (X + Y_3 - 3Y_2)^2 (X + Y_2 - 3Y_3)^2 \\
& + 24ba^{-7} (X + Y_3 - 3Y_2) (1 - Y_1) (X + Y_2 - 3Y_3)^2 + 4ba^{-6} (X + Y_3 - 3Y_2) (X + Y_2 - 3Y_3)^3 \\
& + 16(1 - Y_1)^4 + 32a^{-3} (1 - Y_1)^3 (X + Y_2 - 3Y_3) + 24a^{-4} (1 - Y_1)^2 (X + Y_2 - 3Y_3)^2 \\
& + 8a^{-3} (1 - Y_1) (X + Y_2 - 3Y_3)^3 + (X + Y_2 - 3Y_3)^4 \left. \right] - a^3 \left[(X + Y_3 - 3Y_2)^4 + 4ba^{-6} (X + Y_3 - 3Y_2)^3 \right. \\
& (X + Y_2 - 3Y_3) + 8a^{-3} (X + Y_3 - 3Y_2)^3 (1 - Y_1) + 6b^2 a^{-8} (X + Y_3 - 3Y_2)^2 (X + Y_2 - 3Y_3)^2 \\
& + 24ba^{-9} (X + Y_3 - 3Y_2)^2 (1 - Y_1) (X + Y_2 - 3Y_3) + 24a^{-4} (X + Y_3 - 3Y_2)^2 (1 - Y_1)^2 \\
& + 4b^3 a^{-6} (X + Y_3 - 3Y_2) (X + Y_2 - 3Y_3)^3 + 24b^2 a^{-7} (X + Y_3 - 3Y_2) (1 - Y_1) \\
& (X + Y_2 - 3Y_3)^2 + 48ba^{-6} (X + Y_3 - 3Y_2) (1 - Y_1)^2 (X + Y_2 - 3Y_3) \\
& + 32a^{-3} (X + Y_3 - 3Y_2) (1 - Y_1)^3 + b^4 (X + Y_2 - 3Y_3)^4 + 8b^3 a^{-3} (1 - Y_1) \\
& (X + Y_2 - 3Y_3)^3 + 24b^2 a^{-4} (1 - Y_1)^2 (X + Y_2 - 3Y_3)^2 + 32ba^{-3} (1 - Y_1)^3 \\
& \left. (X + Y_2 - 3Y_3) + 16(1 - Y_1)^4 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D = & a^6 c \left[16b^4 (1 + Y_1)^4 + 64b^3 a^{-3} (1 + Y_1)^3 (X + Y_2 + Y_3) + (48b^2 a^{-4} \right. \\
& + 48b^2 a^{-6}) (1 + Y_1)^2 (X + Y_2 + Y_3)^2 + (16ba^{-3} + 48ba^{-7}) (1 + Y_1) (X + Y_2 + Y_3)^3 \\
& + (8a^{-6} + 6a^{-8} + 2) (X + Y_2 + Y_3) \left. \right] - a^6 c \left[(X + Y_3 - 3Y_2)^4 \right. \\
& + 8ba^{-3} (1 - Y_1) (X + Y_3 - 3Y_2)^3 + 4a^{-6} (X + Y_3 - 3Y_2)^3 (X + Y_2 - 3Y_3) \\
& + 24b^2 a^{-4} (X + Y_3 - 3Y_2)^2 (1 - Y_1)^2 + 24ba^{-9} (X + Y_3 - 3Y_2)^2 (1 - Y_1) (X + Y_2 - 3Y_3) \\
& + 6a^{-8} (X + Y_3 - 3Y_2)^2 (X + Y_2 - 3Y_3)^2 + 32b^3 a^{-3} (X + Y_3 - 3Y_2) (1 - Y_1)^3 \\
& + 48b^2 a^{-10} (X + Y_3 - 3Y_2) (1 - Y_1)^2 (X + Y_2 - 3Y_3) + 24ba^{-7} (X + Y_3 - 3Y_2) (1 - Y_1) \\
& (X + Y_2 - 3Y_3)^2 + 4a^{-6} (X + Y_3 - 3Y_2) (X + Y_2 - 3Y_3)^3 + 16b^4 (1 - Y_1)^4 \\
& + 32b^3 a^{-3} (1 - Y_1)^3 (X + Y_2 - 3Y_3) + 24b^2 a^{-4} (1 - Y_1)^2 (X + Y_2 - 3Y_3)^2 \\
& \left. + 8ba^{-3} (1 - Y_1) (X + Y_2 - 3Y_3)^3 + (X + Y_2 - 3Y_3)^4 \right]
\end{aligned}$$

Cayley ağacının mertebe sayısı olan $k=4$ olduğu için;

$$\begin{aligned}
a &= \exp\left(\frac{J_T}{4T}\right); \\
b &= \exp\left(\frac{J_P}{T}\right); \\
c &= \exp\left(\frac{J}{T}\right);
\end{aligned}
\tag{EK.1.1.8}$$

şeklindedir.

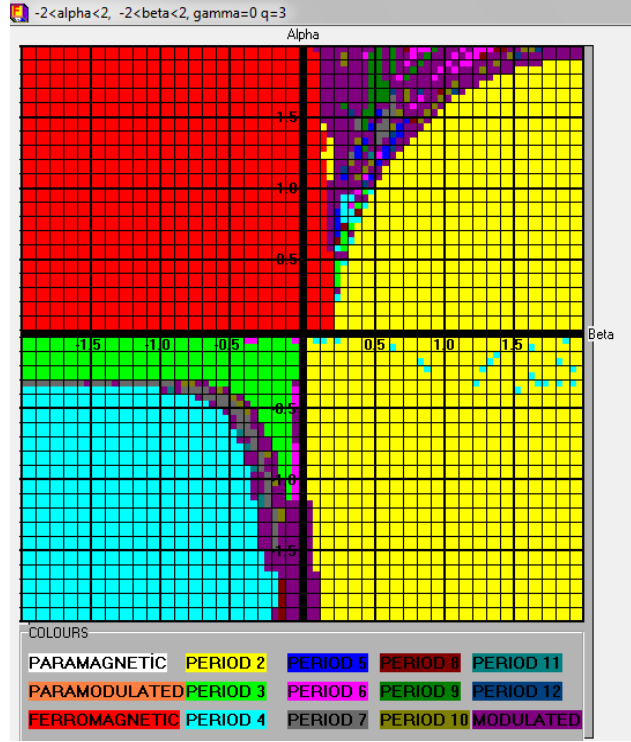
$$\bar{\sigma}^{(n)}\left(\frac{v}{v_n}\right) \equiv 1$$

sınır şartına karşılık gelen başlangıç koşulları;

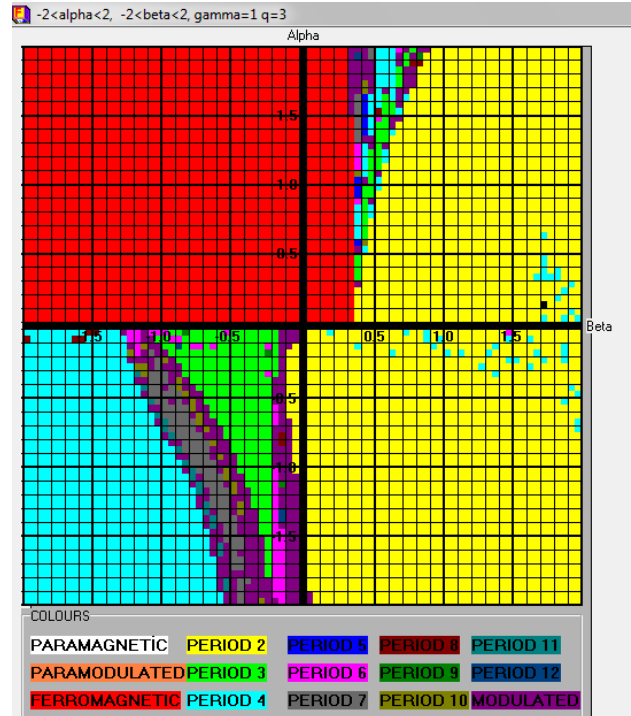
$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= \frac{2a^{5/2}b^4 + a^{9/2}c^4 + a^{5/2}}{a^5b^4c^5 + a^3c} \\
y_1^{(1)} &= \frac{a^2b^4c^4 - 1}{a^2b^4c^4 + 1} \\
y_2^{(1)} &= \frac{a^{5/2}b^4 - a^{9/2}c^4}{a^5b^4c^5 + a^3c} \\
y_3^{(1)} &= \frac{a^{9/2}b^4 - a^{5/2}}{a^5b^4c^5 + a^3c}
\end{aligned}
\tag{EK.1.1.9}$$

şeklinde bulunur.

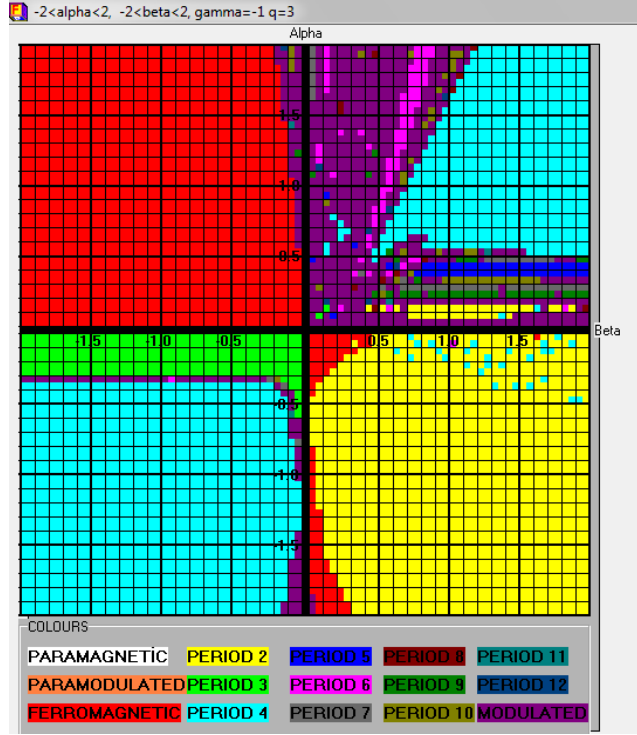
A_1, A_2, A_3, A_4 ve D yinelemeli denklemleri ve bu denklemler ile başlangıç koşullarının belirlediği $\gamma=0,1,-1,-2$ için faz diyagramları aşağıdaki gibidir.



Şekil Ek-1.2: $q=3$ ve $\gamma = 0$ için faz diyagramı



Şekil Ek-1.3: $q=3$ ve $\gamma = 1$ için faz diyagramı



Şekil Ek-1.4: $q=3$ ve $\gamma = -1$ için faz diyagramı

ÖZET

Birinci bölümde, genel olarak ihtiyaç duyulan teknik tanımlar çok fazla detaya girilmeden verilmiştir.

İkinci bölümde, Ising ve Potts modeli ve faz diyagramları için yapılan önceki çalışmalar hakkında literatür taraması verilmiştir.

Üçüncü bölümde bu tezde kullanılan modellerin analizi için uygulanan metotlar hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, ikinci mertebeden bir Cayley ağacı üzerinde keyfi q -durumlu spin durumu, ikili ve üçlü etkileşimli Potts modelinin iterasyon denklemleri bulunarak faz diyagramları incelenmiştir. Dördüncü bölümde ayrıca 3. mertebeden bir Cayley ağacı üzerinde yakın komşuluk, uzatılmış ikinci komşuluk ve iki seviye üçlü komşuluk etkileşimli üç durumlu bir Potts modelinin faz diyagramları analiz edilmiştir.

Bu tezde sonuç olarak, ikinci ve üçüncü mertebeden bir Cayley ağacı üzerinde bazı spin durumu Potts modellerinin meydana getirdiği faz diyagramları hakkında daha genel sonuçlar elde edilmiştir. İleride çalışılması muhtemel konular hakkında bilgi verilmiş ve örnek latisler sunulmuştur.

SUMMARY

In the first chapter, technical basic definitions have been introduced without going into details.

In the second chapter, a literature review for Ising and Potts model and their phase diagrams has been given.

In the third chapter, information about the methods which are applied for analyse of the models have been given.

In the fourth chapter, arbitrary q -state spin state on a second order Cayley tree, binary and ternary phase diagrams were found in the interactive Potts model equations of iteration. The fourth section also include, the prolonged neighborhood on a third order Cayley tree, the second neighborhood and extended neighborhood of two-level three-phase diagrams of interactive three-state Potts model is analyzed.

As a result of this thesis, Cayley tree of the second and third-order model caused by phase diagrams of some of the spin state of Potts model, a more general results have been obtained. Study subjects were informed about the possible future directions and the sample lattices are presented.