T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BERNSTEİN POLİNOMLARI VE BAZI MODİFİKASYONLARININ YAKLAŞIMLARININ GRAFİK VE NÜMERİK TABLOLAR İLE KARŞILAŞTIRILMALARI

AYŞE URAL

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ŞANLIURFA

2012

Yrd. Doç. Dr. Aydın İZGİ danışmanlığında, Ayşe URAL'ın hazırladığı "Bernstein Polinomları ve Bazı Modifikasyonlarının Yaklaşımlarının Grafik ve Nümerik Tablolar İle Karşılaştırılmaları" konulu bu çalışma 20/06/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Aydın İZGİ

Üye: Doç. Dr. Seyit TEMİR

Üye: Yrd. Doç. Dr. Mine Menekşe YILMAZ

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalı'nda Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım

Prof. Dr. Mehmet CİCİ

Enstitü Müdürü

Bu Çalışma HÜBAK Tarafından Desteklenmiştir.

Proje No: 1191

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZ……………………………………………………………………………………………….i
ABSTRACT………………………………………………………………………………….ii
TEŞEKKÜR…………………………………………………………………………………iii
ŞEKİLLER DİZİNİ……………………………………………………………….................iv
ÇİZELGELER DİZİNİ………………………………………………………………………v
KISALTMALAR DİZİNİ…………………………………………………….................iv
1.GİRİŞ……………………………………………………………………….................1
1.1.Ana Kavramlar…………………………………………………………….................2
2.ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR…………………………………………………………...12
3.MATERYAL ve YÖNTEM…………………………………………………………15
3.1.Materyal……………………………………………………………………………15
3.2. Yöntem……………………………………………………………………………..15
4.ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA…………………………………...16
5.SONUÇLAR ve ÖNERİLER……………………………………….................35
5.1.Sonuçlar……………………………………………………………………………35
5.2.Öneriler……………………………………………………………………………37
KAYNAKLAR…………………………………………………………………...38
ÖZGEÇMİŞ……………………………………………………………………...41
ÖZET……………………………………………………………………………..42
SUMMARY……………………………………………………………………...43

Öz

Yüksek Lisans Tezi

BERNSTEİN POLİNOMLARI VE BAZI MODİFİKASYONLARININ YAKLAŞIMLARININ GRAFİK VE NÜMERİK TABLOLAR İLE KARŞILAŞTIRILMALARI

Ayşe URAL

Harran Üniversitesi

Fen Bilimleri Ensitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Aydın İZGİ

Yıl:2012, Sayfa: 43

Bu tezde Bernstein polinomları ve Berntein polinomlarının bazı modifikasyonları ile ilgili yapılan çalışmalar incelenmiştir. İncelenen Bernstein polinomları ve modifikasyonları arasında grafik ve nümerik tablolar ile karşılaştırmalar yapılmıştır. Modifikasyonların farklı noktalarda sürekli herhangi bir f fonksiyonuna yaklaşımı değerlendirilmiştir. Ayrıca $[\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}]$ aralığında yeni bir $U_n(f;x)$ modifikasyonu tanımlanmıştır. Bu yeni modifikasyonun lineer pozitif operatör olduğu gösterilmiştir. Bu yeni modifikasyonun düzgün yaklaşımı, yaklaşım hızı ve asimptotik yaklaşımı incelenmiştir. Daha sonra tanımlamış olduğumuz polinom dizisi ile ele aldığımız diğer polinom dizileri ile tek tek grafik ve nümerik tablolar ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca hepsini içine alan tek bir grafik ile de karşılaştırma yapılmıştır. Bu modifikasyon birçok noktada diğer modifikasyonlardan incelenen f fonksiyonuna daha güzel yaklaştığı gözlenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Bernstein polinomları, yaklaşım, yaklaşım hızı, lineer pozitif operatörler, Weierstrass teoremi, Korovkin teoremi.

ABSTRACT

Master Thesis

COMPARASION OF BERNSTEIN POLYNOMIALS AND SOME MODIFICATIONS OF BERNSTEIN POLYNOMIALS BY GRAPHICS AND NUMERICAL TABLES

Ayşe URAL

Harran University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Aydın İZGİ

Year:2012, Page: 43

In this thesis, Bernstein polynomials and studises about some modifications of Bernstein polynomials were analysed. Bernstein polynomials and their modifications were compared with graphical and numerical tables. Approximation of modifications, to any continuous f function at different points has been evaluated. Moreover, a new modification of $U_n(f;x)$ has been defined in $[\frac{1}{n},\frac{n-1}{n}]$ interval. It is indicated that this new modification is a pozitive lineer operator. Uniform approximating, rate of approximation and asymptotic approximation of this new modification has been analysed. The sequences of polynomials which have been described and the other sequences of polynomials that were handled are compared with graphical and numerical tables. Moreover, comparison made with one graph which includes all of them. It is observed that this modification approximate to the analysed f function finely in many points than the other modifications.

KEYWORDS: Bernstein polynomials, approximation, ,rate of approximation, linear positive operators, Weierstrass theorem and Korovkin theorem.

TEŞEKKÜR

Uzun süren çaba ve zahmetler sonucu hazırlamış olduğum bu tezde benden her türlü desteğini esirgemeyen sayın danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Aydın İZGİ'ye, maddi ve manevi olarak her zaman yanımda olan anne- babam Teslime-Ahmet URAL'a, tezimi yazarken yardım eden kardeşim Elif URAL'a, yine bu yoğun çalışmalarım sürecinde bana manevi olarak destek olan kardeşlerim Rukiye, Zeynep, Alime ve Esma URAL'a ayrıca çok değerli arkadaşlarım Nesrin DURSUN, Hilal ŞEKER ve Hacer GÖKKAYA'ya çok teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 4.1. (2.1) ile (2.3) ün f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması…………………………...27

Şekil 4.2. (2.2) ile (2.3) ün f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması…………………………...28

Şekil 4.3. (2.1) ile (2.2) nin f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması………………………….29

Şekil 4.4. (2.1) ile (2.5) in f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması……………………………30

Şekil 4.5. (4.7) nin f fonksiyonuna yaklaşımının $n = 10,50,100$ için karşılaştırılması…………….31

Şekil 4.6. (2.1) ile (4.7) nin f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması………………………….32

Şekil 4.7. (2.5) ile (4.7) nin f fonksiyonuna yaklaşımın karşılaştırılması……………………………33

Şekil 4.8. (2.1), (2.2), (2.3), (2.5) ve (4.7) nin f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması……….34

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

Çizelge 4.1. (2.1) ile (2.2) nin f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması………………………..29
Çizelge 4.2. (2.1) ile (2.5) in f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması………………………...30
Çizelge 4.3. (4.7) nin f fonksiyonuna yaklaşımının $n = 10,50,100$ için karşılaştırılması………….31
Çizelge 4.4. (2.1) ile (4.7) nin f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması………………………..33
Çizelge 4.5. (2.5) ile (4.7) nin f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması………………………..34

KISALTMALAR DİZİNİ

$B_n(f;x)$	Bernstein Operatörü
$D_n(f;x)$	Durrmeyeer Operatörü
$K_nf(x)$	Kantrovich Operatörü
$L_n^*(f;x)$	Cihan AKSOP'un Tanımlamış Olduğu Operatör
$U_n(f;x)$	Bizim Tanımlamış Olduğumuz Operatör

1.GİRİŞ

Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1897), $C([a,b])$ uzayında tanımlı cebirsel polinomlarının yoğunluğunu ispatlamıştır. Pinkus (2000), temel sonuçların farklı ispatlarını vermiştir. Bernstein (1912), Weierstrass teoreminin ispatı için toplam biçiminde bir polinom tanımlamış ve sonraki yıllarda bu polinom Bernstein polinomları olarak adlandırılmıştır. Lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özelikleri çalışmaları daha ilginçtir. Eğer $(L_n)_{n\geq 1}$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi ise $(L_n f)_{n\geq 1}$ dizisi hangi şartları sağlamalı ki her bir sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsasın? Cevap birbirinden bağımsız olarak sırasıyla Popoviciu(1951), Bohman(1952) ve Korovkin(1953) tarafından keşfedilip tamamlanmıştır. Bu kriterler detaylı olarak Teorem1.1.8 de verilmiştir. Bu güzel ve kolay şartları farklı fonksiyon uzaylarında kullanmak için pek çok matematikçiye ilham kaynağı olmuştur. Korovkin tipi Yaklaşımlar Torisi denilen bu yol yaklaşımlar teorisinde özel bir dal olarak ortaya çıkmıştır. Bu tür çalışmalar Altomare ve Campiti(1994) nin kitabında detaylı olarak ele alınmıştır (Agratini, 2011).

Korovkin (1951), lineer pozitif operatörlerin yaklaşımı için verdiği çok önemli teoreminden sonra, Bernstein polinomları da bir lineer pozitif operatör olduklarından, bununla ilgili yapılan çalışmalar hız kazanmıştır. Bu çalışmalardan önemli olanlardan biri, Lorentz' in (1953) yazdığı "Bernstein Polynomials" adlı kitabıdır. Shisha ve Mond (1968), Bernstein polinomlarının yakınsaklık hızları ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Durrmeyer (1967), [0,1] aralığında Bernstein operatörlerinin integrallenebilir modifikasyonlarını tanımlamıştır. Benstein-Durrmeyer operatörleri olarak tanımlı operatörlerin sürekli fonksiyonlara yakınsaması birçok bilim adamı tarafından incelenmiştir (Walczak, 2004). Derriennic (1981), ilk kez böyle operatörlerin analizlerini yapmıştır (Walczak, 2004). King (2003), daha iyi yaklaşım veren Bernstein tipi bir modifikasyon yapmış ve o zamandan sonra bu tarz çalışmalar artmaya başlamıştır. Özarslan ve Duman (2009) daha hızlı yaklaşım sağlayan lineer pozitif operatörler için genel bir yaklaşım vermişlerdir. Yapılan bütün bu çalışmalarda operatörlerin birbiriyle karşılaştırıldığı bir çalışmaya (tarama yaptığımız son zamanlara kadar) rastlamadık. Yaptığımız grafik çalışmalarında ve nümerik değerlendirmelerde, ortaya koyduğumuz Bernstein polinomlarının yeni modifikasyonun daha avantajlı olduğunu gördük.

1.1. ANA KAVRAMLAR

Tanım 1.1.1.

Boş olmayan $X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\alpha \in X$ noktası verilmiş olsun. Eğer, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için $|x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu X kümesine göre süreklidir denir (Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Tanım 1.1.2.

$X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı ve $\forall x_1, x_2 \in X$ noktaları için $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde yalnızca ε na bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu X kümesi üzerinde düzgün süreklidir denir (Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Teorem 1.1.1. (Düzgün süreklilik üzerine Cantor Teoremi)

$\mathbb{R}$ nin Kompakt (kapalı ve sınırlı) alt kümesi üzerinde sürekli her fonksiyon bu küme üzerinde düzgün süreklidir (Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Tanım 1.1.3.

$X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $|f(x)| \leq M, M > 0$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, f fonksiyonu X üzerinde sınırlıdır denir (Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Teorem 1.1.2. (Weierstrass)

Kapalı ve sınırlı aralık üzerinde sürekli her fonksiyon bu aralık üzerinde sınırlıdır (Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Tanım 1.1.4.

$(a, b) \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık ve f de (a, b) den $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun. $t, x \epsilon (a, b)$ olmak üzere $\lim_{t \to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = A(x)$ sonlu limiti varsa, bu $A(x)$ sayısına f fonksiyonunun x noktasındaki türevi denir ve $f'(x)$ (veya $Df(x)$ yada $\frac{df(x)}{dx}$ ile gösterilir. Bu durumda, f fonksiyonu x noktasında türevlenebilirdir (veya türevlidir) denir (Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Teorem 1.1.3. (Rolle Teoremi)

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve (a, b) üzerinde türevlenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \epsilon (a, b)$ noktası vardır (Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Teorem 1.1.4. (Lagrange Teoremi)

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve (a, b) üzerinde türevlenebilir olsun. Bu durumda, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ olacak şekilde en az bir $c \epsilon (a, b)$ noktası vardır (Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Bazı kaynaklarda bu teoreme Diferansiyel Hesabın Ortalama Değer Teoremi de denir.

Teorem 1.1.5 (Taylor Teoremi)

$(a, b) \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde $(n + 1)$. mertebeden türevlenebilen $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve bir $x_0 \in (a, b)$ noktası verilmiş olsun. Bu durumda

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad (1.1)$$

dir (Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Tanım 1.1.5.

a) X$\subset \mathbb{R}$ alt kümesi üstten sınırlı ise $B=\{b\in\mathbb{R}: b, X$ in üst sınırıdır $\}$ kümesinin minimal elemanına X kümesinin en küçük üst sınırı denir ve sup X (veya eküs X) ile gösterilir.

b) X$\subset \mathbb{R}$ alt kümesi alttan sınırlı ise $A=\{a\in\mathbb{R}: a, X$ in alt sınırıdır $\}$ kümesinin maksimal elemanına X kümesinin en büyük alt sınırı denir ve inf X (veya ebas X) ile gösterilir (Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Tanım 1.1.6.

N , bir lineer uzay olsun. $\|\ \|: N\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için

N1) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

N2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ $(\alpha\epsilon F)$ ve

N3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ üçgen eşitsizliği)

Şartları sağlanıyorsa$\|\ \|$ fonksiyonuna N de norm denir. Normlu uzaylar genellikle $(N,\|\ \|)$ ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Tanım 1.1.7.

L boş olmayan bir küme ve F, reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F üzerinde lineer uzay (veya vektör uzayı) denir (Bayraktar, 2006).

A) L, + işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1) Her $x,y\in L$ için $x+\ y\in L$dir (kapalılık özelliği).

G2) Her $x,y,z\in L$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$ dir (birleşme özelliği).

G3) Her $x\in L$ için $x+0=0+x=x$ olacak şekilde $0\in L$ vardır (özdeş elemanın varlığı).

G4) Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = 0$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır (ters eleman varlığı).

G5) Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir (değişme özelliği)

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \epsilon F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1) $\alpha . x \epsilon L$ dir (skalerle çarpmaya göre kapalılık).

L2) $\alpha . (x + y) = \alpha . x + \alpha . y$ dir.

L3) $(\alpha + \beta) . x = \alpha . x + \beta . x$ dir.

L4) $(\alpha . \beta) . x = \alpha . (\beta . x)$ dir.

L5) $1 . x = x$ dir. (Burada 1, F nin birim elemanıdır.)

Tanım 1.1.8.

Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 1.1.9.

Eğer $\forall x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \epsilon F$ için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y$ ise T ye lineer operatör denir.

Tanım 1.1.10.

$T: C[a, b] \to C[a, b]$ bir operatör olsun. Eğer $\forall x \in (a, b)$ ve $\forall f \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0$ iken $T(f)(x) \geq 0$ ise Tye pozitif operatör denir.

Tanım 1.1.11.

Eğer T operatörü hem lineer hem de pozitif ise buna lineer pozitif operatör denir.

Tanım 1.1.12.

$\tau = \{T: C[a, b] \to C[a, b] : T \text{ lineer pozitif operatör}\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ olsun.

T: $\mathbb{N} \rightarrow \tau$ şeklinde tanımlı T fonksiyonuna lineer pozitif operatör dizisi adı verilir. (T_n) ile gösterilir. $T(\mathbb{N}) = (T_1, T_2, \dots)$

Tanım 1.1.13.

X boş olmayan bir küme olsun. $d: X\text{x } X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri özelliği) ve

M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa d ye Xde bir metrik ve d ile birlikte X e metrik uzay denir ve genellikle (X, d) veya X_d ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Tanım 1.1.14.

(X, d) bir metrik uzay ve $(x_n), X$ de bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 \quad (1.2)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine X de yakınsaktır denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 1.1.15.

$f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonların bir dizisi olsun. Her bir $x \in [a, b]$ ve $\forall\varepsilon > 0$ olduğunda $n > n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde n_0 varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir.

Tanım 1.1.16.

$\forall x \in (a, b)$ ve $\forall\varepsilon > 0$ için öyle bir n_0 vardır ki $\forall n > n_0$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde n_0 varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir ve $f_n \rightrightarrows f$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.17.

[a, b] aralığında tanımlı f fonksiyonu verilsin. [0,b-a] aralığında tanımlı $\omega(\delta) \coloneqq \omega(\delta) = \{sup|f(x_2) - f(x_1)|: |x_2 - x_1| \leq \delta, x_1,\ x_2 \epsilon [a, b]\}$ fonksiyonuna f'nin süreklilik modülü denir (Shevchuk, 1992).

Teorem 1.1.6.

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda f fonksiyonunun süreklilik modülü,

i) $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$

ii) $0 < \delta_1 < \delta_2$ ise $\omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2)$

iii) $\omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$

iv) $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta), n \in \mathbb{Z}^+$

v) $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|$

vi) $\omega(f; |t - x|) \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) \omega(f; \delta)$

özelliklerini sağlar (Altomare ve Campiti, 1994).

Tanım 1.1.18.

f fonksiyonu $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı olsun. $\exists M > 0$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ öyleki her $x_1,\ x_2 \epsilon I$ için,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^{\alpha} \qquad (1.3)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu α. mertebeden Lipschitz koşulunu sağlıyor denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Teorem 1.1.7. (Weierstrass)

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Öyle bir P_n polinomu vardır ki $\forall n < n_0$ için $|P_n(x) - P(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

H. Bohman (1951), toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin [0, 1] aralığında sürekli $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Teorem 1.1.8. (Korovkin teoremi)

$x \in [0,1], 0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$ olduğunda

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\alpha_{k,n}) P_{k,n}(x)\,, \qquad P_{k,n}(x) \geq 0 \qquad (1.4)$$

pozitif operatör dizisinin $n \to \infty$ için [0, 1] aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşulları üç tanedir. Bunlar

(i) $L_n(1;x) \rightrightarrows 1$

(ii) $L_n(t;x) \rightrightarrows x$

(iii) $L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$

şeklinde ifade edilirler (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Aşikardır ki Bohman'ın araştırdığı operatörlerin değeri f fonksiyonunun [0,1] aralığının dışındaki değerlerinden bağımsızdır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

P.P. Korovkin (1953), genel bir teorem ispatlamış ve göstermiş ki Bohman'ın koşulları genel halde de gerçeklenir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Teorem 1.1.9.

Eğer L_n lineer pozitif operatörler dizisi $[a,b]$ aralığında i), ii), iii) koşullarını gerektiriyorsa o takdirde $C(a,b)$ uzayında olan ve tüm reel eksende sınırlı her hangi bir f fonksiyonu için $n \to \infty$ olduğunda;

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x), \;\; a \leq x \leq b \qquad (1.5)$$

elde edilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

İspat

f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğu için öyle bir M pozitif sayısı bulabiliriz ki tüm $x \in [a,b]$ için

$$|f(x)| \leq M \qquad (1.6)$$

sağlanır. $f \in C(a,b)$ olduğunda her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulabiliriz ki $t \in (-\infty,\infty)$ ve $x \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \qquad (1.7)$$

sağlanır.

$x, t \in [a,b]$ olduğunda (1.7) eşitsizliği f fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli olduğu için gerçeklenir. $x \in [a,b], t \notin [a,b]$ olduğunda ise (1.7) eşitsizliği f fonksiyonu a ve b noktalarından sırasıyla soldan ve sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için gerçeklenir.
(1.6) ve (1.7) eşitsizliklerinden dolayı tüm $t \in (-\infty,\infty)$ ve $x \in [a,b]$ için,

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \qquad (1.8)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Çünkü $|t-x| < \delta$ olduğunda (1.8) eşitsizliği (1.7) eşitsizliğinden dolayı $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2$ ifadesi pozitif olduğu için sağlanır. $|t-x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ olacağından $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 2M$ eşitsizliği sağlanır. Bu durumda $\varepsilon > 0$ olduğu için (1.6) eşitsizliğinden (1.8) eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan

$$\|L_n(f;x) - f(x)\|_C = \left\|L_n\big((f;x) - f(x);x\big) + f(x)L_n(1;x) - f(x)\right\|_C$$

$$\leq \|L_n(|(f;x) - f(x)|;x)\|_C + \|f\|_C\|L_n(1;x) - 1\|_C$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikteki ikinci terim $n \to \infty$ için (i) den dolayı sıfıra yakınsar. Yani $\|f\|_C\|L_n(1;x) - 1\|_C \leq \varepsilon_n, \varepsilon_n \to 0$ dır. O halde

$$\|L_n(f;x) - f(x)\|_C \leq \|L_n(|(f;x) - f(x)|;x)\|_C + \varepsilon_n \qquad (1.9)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Birinci terime bakarsak (1.8) eşitsizliğinden dolayı

$$L_n(|(f;x)-f(x)|;x) \leq \varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n((t-x)^2;x)$$

$$=\varepsilon[L_n(1;x)-1] + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}[L_n(t^2;x) - 2xL_n(t,x)$$

$$+x^2 L_n(1;x)]$$

$$=\varepsilon[L_n(1;x)-1] + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\{[L_n(t^2;x) - x^2]$$

$$-2x[L_n(t,x)-x] + x^2[L_n(1;x)-1]$$

elde ederiz. O halde ;

$$\|L_n(|(f;x)-f(x)|;x)\|_C \leq C_1\|L_n(t^2;x)-x^2\|_C + C_2\|L_n(1;x)-1\|_C \quad (1.10)$$

yazılabilir. (i), (ii) ve (iii) koşullarından dolayı $n \to \infty$ için

$$\|L_n(|(f;x)-f(x)|;x)\|_C \to 0 \quad (1.11)$$

elde edilir. Bu sonuç ve (1.9) eşitsizliğinden yararlanırsak;

$$\|L_n(f;x)-f(x)\|_C \to 0 \quad (1.12)$$

olduğunu görürüz.

Bu teoremin ispatından yararlanarak aşağıdaki sonucu verebiliriz (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Sonuç 1.1.1.

Eğer $\{L_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi, $[a,b]$ aralığında

(i) $L_n(1;x) \rightrightarrows 1$

(ii) $L_n((t-x)^2;x) \rightrightarrows 0$

koşullarını sağlıyorsa o takdirde $C(a,b)$ uzayından olan ve tüm reel eksende sınırlı, her hangi bir f fonksiyonu için $n \to \infty$ da

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x) \qquad\qquad a \le x \le b \qquad (1.13)$$

sağlanır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 1.1.18.

$x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ limitleri sırasıyla x_0 ve y_0 olan diziler olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} \frac{|y_n - y|}{|x_n - x|} = 0$ veya $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_n - x|}{|y_n - y|} = \infty$ ise y x'den daha hızlı yakınsar denir (Brezinki, 2000).

Tanım 1.1.19.

$x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ limitleri sırasıyla x_0 ve y_0 olan diziler olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} \frac{|y_n - y|}{|x_n - x|} = M < \infty$ ise x ve y denk yakınsar denir. Yani her $n \ge n_0$ için eşitsizlik $|y_n - y| \le M|x_n - x|$ dir. $0 < M < 1$ ise y'nin yakınsaması x'in yakınsamasından daha iyidir ve $1 < M < \infty$ ise x'in yakınsaması y'nin yakınsamasından daha iyidir denir (Theodore Ho Hsu, 1968).

Tanım 1.1.20.

$X \to Y$, $(X, \|\|), (Y, \|\|)$ fonksiyonları (L_n) ve (M_n) uzayında iki lineer pozitif operatör dizileri olsun ve bu operatör dizileri tek noktaya yakınsasın. Eğer $\frac{\|L_n(f;x) - f(x)\|}{\|M_n(f;x) - f(x)\|} = 0$ veya $\frac{\|M_n(f;x) - f(x)\|}{\|L_n(f;x) - f(x)\|} = \infty$ ise her$f \in X$ için (L_n), (M_n)'den daha hızlı yaklaşır denir. $\frac{\|L_n(f;x) - f(x)\|}{\|M_n(f;x) - f(x)\|} = K$ ise (L_n), (M_n) denk yaklaşır denir. Eğer $0 < K < 1$ ise (L_n)'nin yaklaşımı (M_n)'nin yaklaşımından daha iyidir ve $1 < K < \infty$ ise (M_n) nin yaklaşımı (L_n) 'nin yaklaşımından daha iyidir denir(İzgi,2012).

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

S. Bernstein (1912), [0, 1] aralığında verilmiş sürekli bir fonksiyona yakınsayan polinom dizisi tanımlanmıştır.

$0 \leq x \leq 1$ olmak üzere bu polinom dizisi;

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k \, x^k (1-x)^{n-k} \qquad (2.1)$$

şeklindedir, $x^k(1-x)^{n-k} \geq 0$ olduğunda $B_n(f;x)$ pozitif lineer bir operatördür (Bernstein, 1913).

Daha sonra birçok bilim adamı Bernstein operatörlerinin modifikasyonları ve genellemeleri üzerinde çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmaların bazılarını verelim:

L.V.Kantorovich(1930) $K_n: L_1([0,1]) \to C([0,1])$, her$f \in L_1([0,1])$ ve negatif olmayan her hangi $n \in \mathbb{N}$ için

$$(K_n f)(x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} \binom{n}{k} s^k (1-s)^{n-k} f(s) ds \quad (2.2)$$

lineer pozitif operatörünü tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir (Kantrovich, 1930). Bu operatör Kantrovich operatörü olarak bilinir. Bu operatörler klasik Bernstein operatöründe f nin $\frac{k}{n}$ civarında integralle yaklaşan $f\left(\frac{k}{n}\right)$ değerini yerine yazarak elde edilir.

Durrmeyer (1967), [0,1] aralığında Bernstein operatörlerinin

$$D_n(f;x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_{o}^{1} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f(t) dt \qquad (2.3)$$

şeklinde integrallenebilen bir modifikasyonunu tanımlamıştır. Bu operatörler Bernstein-Durrmeyer operatörleri olarak bilinir. Bu operatörlerin düzgün fonksiyonlara yaklaşımı pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır (Walczak, 2004). Derriennic (1981), böyle operatörlerin analizini ilk kez incelemiştir. Derriennic (1981), aşağıdakileri ispatlamıştır.

i) $D_n f$ bir pozitif operatör,

ii) $D_n(1;x) = 1$

iii) $\lim_{n\to\infty} \| D_n(f;x) - f(x) \| = 0,\ f \in C_{[0,1]}$

Daha sonra Ditzian ve Ivanov (1989), Ditzian –Totik süreklilik modulünün yaklaşım hızını çalışmışlardır (Walczak, 2004).

Cao (1997), aşağıdaki şekilde tanımlı Bernstein operatörlerinin bir genellemesini yapmıştır. ℕ doğal sayılar kümesi üzerinde s_n bir dizi ve $s_n \geq 1$ olsun.

$$C_n(f;x) = \frac{1}{s_n} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{s_n - 1} f\left(\frac{k+j}{n+s_n-1}\right)\right) P_{n,k}(x) \qquad (2.4)$$

Gerçekten de $s_n = 1$ için $B_n(f;x) = C_n(f;x)$ olduğu görülür. Cao bu operatörlerin yakınsaklık şartlarını incelemiş ve yakınsaklık hızlarını süreklilik modulünü kullanarak hesaplamıştır (Cao, 1997).

Ding (2004), Cao'nun tanımlamış olduğu operatörün yakınsaklık özelliklerini incelemiştir. Direk ve ters teoremler ile bazı yaklaşımlarla ilgili tanımlar elde etmiştir. Farklı şartlarda tanımlı s_n parametresi için bazı asimptotik yaklaşımlarını vermiştir (Ding, 2004).

Aksop (2009), $[\frac{1}{2n}, 1 + \frac{1}{2n}]$ aralığı üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlı lineer pozitif bir operatör tanımlamıştır(Aksop, 2009).

$$L_n^*(f;x) = \frac{n}{n-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x - \frac{1}{2n}\right)^k \left(1 - x + \frac{1}{2n}\right)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad (2.5)$$

Duchon (2011), m boyutlu Bernstein operatörlerini ve bu operatörlerin $[0,1]^m$ üzerinde $m-1$ boyutunun yaklaşım özelliklerini incelemiştir (Duchon, 2011).

3.MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu çalışmada incelediğimiz kaynaklar; internet üzerinden veya kütüphanelerden ulaştığımız makale veya kitaplardan elde edilmiştir.

3.2.Yöntem

Elde edilen çalışmalardaki operatörler incelenmiş ve bu operatörlerin herhangi bir $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşımı grafik çizerek ve nümerik değerler hesaplanarak incelenmiştir. Daha sonra kendi tanımlamış olduğumuz operatör ile yine bu çalışmalar karşılaştırılmıştır. En son olarak da tüm çalışmalar tek bir grafik üzerinde karşılaştırılmıştır.

Bu çalışmada grafik çizerken ve nümerik değerleri hesaplarken Maple bilgisayar programından yararlanılmıştır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Her $x \in [0,1]$ için $P_{nk}(x) \geq 0$ dır. Eğer

$f \geq 0 \Rightarrow B_n(f;x) = \sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x) f(\frac{k}{n}) \geq 0 \;\Rightarrow B_n(f;x) \geq 0$

$$B_n(\alpha f + \beta g; x) = \sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x)[\alpha f\left(\frac{k}{n}\right) + \beta\, g\left(\frac{k}{n}\right)]$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x) f\left(\frac{k}{n}\right) + \beta \sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x) g\left(\frac{k}{n}\right)$$

dir. Buradan da Bernstein operatörünün lineer ve pozitif olduğu anlaşılır.

Bernstein operatörlerinde Korovkin teoreminin koşullarını araştıralım.

$$B_n(f;x) = \sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad f \in C([0,1])\; P_{nk}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (4.1)$$

olmak üzere;

$$B_n(1;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (1-x+x)^n = 1$$

$$B_n(t;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k}{n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k}{n}$$

$$= x \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} = x$$

$$B_n(t^2;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k^2}{n^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k(k-1)+k}{n^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \frac{(n-1)}{n}$$

$$+\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k}{n}$$

$$= \frac{(n-1)}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n}$$

$$= x \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} x^{k-2} (1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} x^k (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} x^k (1-x)^{n-k-2} + \frac{x}{n}$$

$$= x^2 + \frac{x-x^2}{n}$$

olur.

Dolayısıyla

$$\|B_n(1;x)-1\|_{C(0,1)} \to 0\ ,\ (n\to\infty) \qquad (4.2)$$

$$\|B_n(t;x)-x\|_{C(0,1)} \to 0\ ,\ (n\to\infty) \qquad (4.3)$$

elde edilir.

$(t-x)^2 = t^2-2xt+x^2$ olduğundan ve B_n'nin lineerliğinden

$$B_n((t-x)^2;x) = B_n(t^2;x)+B_n(-2t;x)+B_n(x^2;x)$$

$$= B_n(t^2;x)-2xB_n(t;x)+x^2B_n(1;x)$$

$$= x^2+\frac{x-x^2}{n}-2x^2+x^2$$

$$= \frac{x-x^2}{n}$$

elde edilir.

$y=\frac{x-x^2}{n}$ olsun. $y'=\frac{1-2x}{n}$ olur. $y'=\frac{1-2x}{n}=0$ olursa $x=\frac{1}{2}$ olur.

$max_{0\le x\le 1}B_n((t-x)^2;x)=\frac{1}{4n}$ $(n\to\infty)$ olur.

$\|B_n(t^2;x)-x^2\|_{C(0,1)} = max_{0\le x\le 1}\left|\frac{x-x^2}{n}\right| = \frac{1}{4n} \to 0\ (n\to\infty)$

sağlanır. Teorem 1.1.9. a göre $f\in C(0,1)$ için

$$\|B_n(f;x)-f(x)\|_{C(0,1)} \to 0 \qquad (4.4)$$

gerçeklenir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Teorem 4.1.

$f\in C_{[0,1]}$ ve $\omega(f;x)$ klasik süreklilik modülü için

$$|B_n(f(t);x)-f(x)| \le \frac{3}{2}\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ \ n\in\mathbb{N} \qquad (4.5)$$

dir (Walczak,2004).

İspat

$|B_n(f(t);x) - f(x)| \leq B_n\left(1 + \frac{|t-x|}{\delta};x\right)\omega(f;\delta)$ (Teorem1.1.6. nın vı.özelliğinden)

$=[B_n(1;x) + \frac{1}{\delta}B_n(|t-x|;x)](\omega(f;|t-x|);x)\omega(f;\delta)$

$\leq (1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{B_n((t-x)^2;x)})\omega(f;\delta)$ (Cauchy-Schwartz Eşitsizliğinden)

$\leq \omega(f;\delta)(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{x-x^2}{n}})$

$\leq (1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{1}{4n}})\omega(f;\delta)$

$= (1 + \frac{1}{2})\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ($\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ seçildiğinde)

$= \frac{3}{2}\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

elde edilir.

Teorem 4.2.

$f \epsilon C^2_{[0,1]}$ ve her $x \in [0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} n\{B_n(f(t);x) - f(x)\} = \frac{x(1-x)}{2}f''(x) \qquad (4.6)$$

dir (Walczak,2004).

İspat

η, [0,1] aralığında sınırlı bir fonksiyon olsun.

$$f(t) = f(x) + (t-x)f'(x) + \frac{(t-x)^2}{2}f''(x) + (t-x)^2\eta(t-x;x)$$

B_n nin lineerliğinden

$$\{B_n(f(t);x)-f(x)\}=f'(x)B_n(t-x;x)+\frac{f''(x)}{2}B_n((t-x)^2;x)$$

$$+B_n((t-x)^2;x)\,\eta(t-x;x)$$

$$n\{B_n(f(t);x)-f(x)\}=\frac{x-x^2}{2}f''(x)$$

elde edilir.

Şimdi de $[\frac{1}{n},\frac{n-1}{n}]$ aralığında $n\geq 3$ için tanımlamış olduğumuz

$$U_n(f;x)=\left(\frac{n}{n-2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n}\right)^k\left(\frac{n-1}{n}-x\right)^{n-k}f\left(\frac{(n-2)k+n}{n^2}\right) \tag{4.7}$$

operatörünün sırasıyla Teorem 1.1.8 deki özellikleri sağladığını, Tanım1.1.17 ile yakınsaklık hızını ve asimptotik yaklaşımını inceleyelim.

Teorem 4.3.

Her $x\in[0,1]$ için $f(x)\geq 0\Rightarrow U_n(f;x)\geq 0$ dır.

İspat

$$U_n(f;x)=\left(\frac{n}{n-2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n}\right)^k\left(\frac{n-1}{n}-x\right)^{n-k}f\left(\frac{(n-2)k+n}{n^2}\right)$$

$$\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n}\right)^k\left(\frac{n-1}{n}-x\right)^{n-k}\geq 0, f(x)\geq 0$$

$\Rightarrow U_n(f;x)\geq 0$ dır.

Teorem 4.4.

Her $x\in[0,1]$ için $U_n(f;x)$ operatörü lineerdir.

İspat

$$U_n(\alpha f+\beta g;x)=\left(\frac{n}{n-2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n}\right)^k\left(\frac{n-1}{n}-x\right)^{n-k}[\alpha f\left(\frac{(n-2)k+n}{n^2}\right)$$

$$+\beta g\left(\frac{(n-2)k+n}{n^2}\right)]$$

$$=\left(\frac{n}{n-2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n}\right)^k\left(\frac{n-1}{n}-x\right)^{n-k}\alpha f\left(\frac{(n-2)k+n}{n^2}\right)$$

$$+\left(\frac{n}{n-2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n}\right)^k\left(\frac{n-1}{n}-x\right)^{n-k}\beta g\left(\frac{(n-2)k+n}{n^2}\right)$$

dir. Dolayısıyla operatörümüz lineerdir.

Teorem 4.5.

$\lim_{n\to\infty}U_n(f;x)=f(x)$ (düzgündür).

İspat

Teorem 1.1.8 in üç şartını sağladığını gösterelim.

$$U_n(1;x)=\left(\frac{n}{n-2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n}\right)^k\left(\frac{n-1}{n}-x\right)^{n-k}$$

$$=\left(\frac{n}{n-2}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}-\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1$$

$$U_n(t;x)=\left(\frac{n}{n-2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n}\right)^k\left(\frac{n-1}{n}-x\right)^{n-k}\left(\frac{(n-2)k+n}{n^2}\right)$$

$$=\left(\frac{n}{n-2}\right)^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n}\right)^k\left(\frac{n-1}{n}-x\right)^{n-k}\frac{k}{n}\frac{n-2}{n}$$

$$+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n}\right)^{k}\left(\frac{n-1}{n}-x\right)^{n-k}$$

$$=\left(\frac{n}{n-2}\right)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n}\right)^{k}\left(\frac{n-1}{n}-x\right)^{n-k}\frac{k}{n}+\frac{1}{n}$$

$$=\left(\frac{n}{n-2}\right)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\left(x-\frac{1}{n}\right)^{k}\left(\frac{n-1}{n}-x\right)^{n-k}\frac{k}{n}+\frac{1}{n}$$

$$=\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-2}\right)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(x-\frac{1}{n}\right)^{k}\left(\frac{n-1}{n}-x\right)^{n-k+1}$$

$$+\frac{1}{n}$$

$$=x-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$$

$$=x$$

$$U_n(t^2;x)=\left(\frac{n}{n-2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n}\right)^{k}\left(\frac{n-1}{n}-x\right)^{n-k}\left(\frac{(n-2)k+n}{n^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{n}{n-2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n}\right)^{k}\left(\frac{n-1}{n}-x\right)^{n-k}\frac{(n-2)^2k^2+2(n-2)nk+n^2}{n^4}$$

$$=\left(\frac{n}{n-2}\right)^{n-2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n}\right)^{k}\left(\frac{n-1}{n}-x\right)^{n-k}\frac{k^2}{n^2}$$

$$+\frac{2}{n}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{n-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n}\right)^{k}\left(\frac{n-1}{n}-x\right)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$+\frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{n}\right)^{k}\left(\frac{n-1}{n}-x\right)^{n-k}$$

$$= \left(\frac{n}{n-2}\right)^{n-2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x - \frac{1}{n}\right)^{k} \left(\frac{n-1}{n} - x\right)^{n-k} \frac{k(k-1)+k}{n^2} + \frac{2}{n}\left(x - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}$$

$$= \left(\frac{n}{n-2}\right)^{n-2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x - \frac{1}{n}\right)^{k} \left(\frac{n-1}{n} - x\right)^{n-k} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \frac{(n-1)}{n}$$

$$+ \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{n-2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x - \frac{1}{n}\right)^{k} \left(\frac{n-1}{n} - x\right)^{n-k} \frac{k}{n} + \frac{2}{n}\left(x - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}$$

$$= (\frac{n-1}{n}) \left(\frac{n}{n-2}\right)^{n-2} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} \left(x - \frac{1}{n}\right)^{k} \left(\frac{n-1}{n} - x\right)^{n-k}$$

$$+(\frac{n-2}{n}) \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \left(x - \frac{1}{n}\right)^{k} \left(\frac{n-1}{n} - x\right)^{n-k} + \frac{2}{n}\left(x - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}$$

$$= (\frac{n-1}{n})(x - \frac{1}{n})^2 \left(\frac{n}{n-2}\right)^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \left(x - \frac{1}{n}\right)^{k} \left(\frac{n-1}{n} - x\right)^{n-k+2}$$

$$+ \left(\frac{n-2}{n^2}\right)(x - \frac{1}{n}) \left(\frac{n}{n-2}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(x - \frac{1}{n}\right)^{k} \left(\frac{n-1}{n} - x\right)^{n-k+1} + \frac{2}{n}\left(x - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n-2}{n^2}\right)(x - \frac{1}{n}) + \frac{2}{n}\left(x - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}$$

$$= \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{n}\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(x - \frac{1}{n}\right) - \frac{2}{n^2}\left(x - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}$$

$$= x^2 - \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\left(x^2 - \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{x}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{2x}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \frac{2x}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2}$$

$$= x^2 - \frac{x^2}{n} + \frac{x}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - \frac{n-1}{n^3}$$

Bulunur. Dolayısıyla

$$\|U_n(1;x) - 1\|_{C(0,1)} \to 0 \ (n \to \infty) \qquad (4.8)$$

$$\|U_n(t;x) - x\|_{C(0,1)} \to 0 \ (n \to \infty) \qquad (4.9)$$

$(t-x)^2 = t^2 - 2xt + x^2$ olduğundan ve U_n'nin lineerliğinden

$$U_n((t-x)^2;x) = U_n(t^2;x) + U_n(-2t;x) + U_n(x^2;x)$$

$$= U_n(t^2;x) - 2xU_n(t;x) + x^2U_n(1;x)$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - \frac{n-1}{n^3} - 2x^2 + x^2$$

$$= \frac{x(1-x)}{n} - \frac{n-1}{n^3}$$

$y = \frac{x(1-x)}{n} - \frac{n-1}{n^3}$ olsun. $y' = \frac{1-2x}{n}$ olur. $y' = \frac{1-2x}{n} = 0$ olursa $x = \frac{1}{2}$ olur.

$max_{0\le x\le 1} U_n((t-x)^2;x) = \frac{1}{4n} - \frac{n-1}{n^3}$ olur.

$$\|U_n(t^2;x) - x^2\|_{C(0,1)} = max_{0\le x\le 1}\left|\frac{x(1-x)}{n} - \frac{n-1}{n^3}\right| = \frac{1}{4n} \to 0 \ (n \to \infty) \qquad (4.10)$$

sağlanır. Böylece Korovkin'in birinci teoremine göre $f \in C(0,1)$ için

$$\|U_n(f;x) - f(x)\|_{C(0,1)} \to 0 \qquad (4.11)$$

olduğu görülür.

Teorem 4.6.

$f \in C_{[0,1]}$ ve $\omega(f;x)$ klasik süreklilik modülü için

$$|U_n(f(t);x) - f(x)| < \frac{3}{2}\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad n \in \mathbb{N} \qquad (4.12)$$

dir .

İspat

$|U_n(f;x) - f(x)| \leq U_n\left(1 + \frac{|t-x|}{\delta};x\right)\omega(f;\delta)$ (Teorem 1.1.6. nın vı.özelliğinden)

$=[U_n(1;x) + \frac{1}{\delta}U_n(|t-x|;x)](\omega(f;|t-x|);x)\omega(f;\delta)$

$\leq (1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{U_n((t-x)^2;x)})\omega(f;\delta)$ (Cauchy-Schwartz Eşitsizliğinden)

$\leq \omega(f;\delta)(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n} - \frac{n-1}{n^3}})$

$< (1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{1}{4n}})\omega(f;\delta)$

$= (1 + \frac{1}{2})\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ $\quad (\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ seçildiğinde)

$= \frac{3}{2}\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

elde edilir.

Teorem 4.7.

$f \epsilon C^2_{[0,1]}$ ve her $x \in [0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} n\{U_n(f(t);x) - f(x)\} = \frac{x(1-x)}{2}f''(x) \qquad (4.13)$$

dir.

İspat

η, sınırlı bir fonksiyon olmak üzere

$$f(t) = f(x) + (t-x)f'(x) + \frac{(t-x)^2}{2} f''(x) + (t-x)^2 \eta(t-x;x)$$

U_n nin lineerliğinden

$$\{U_n(f(t);x) - f(x)\} = f'(x)U_n(t-x;x) + \frac{f''(x)}{2} U_n((t-x)^2;x)$$

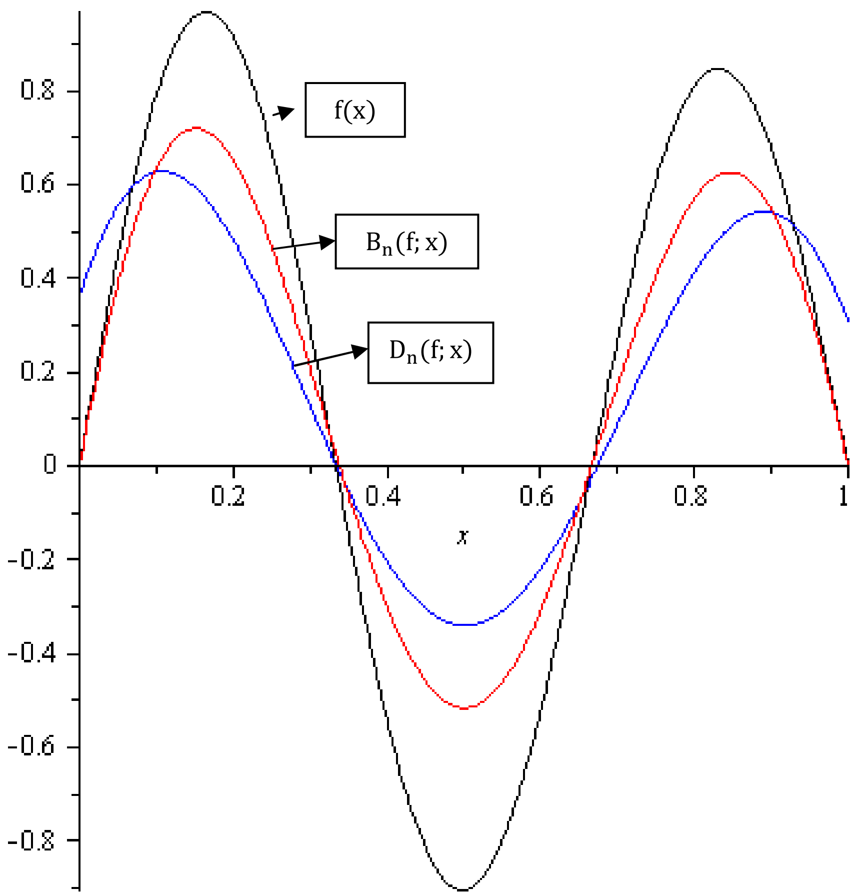
$$+U_n((t-x)^2;x)\,\eta(t-x;x)$$

$$n\{U_n(f(t);x) - f(x)\} = \frac{x(1-x)}{2} f''(x)$$

bulunur.

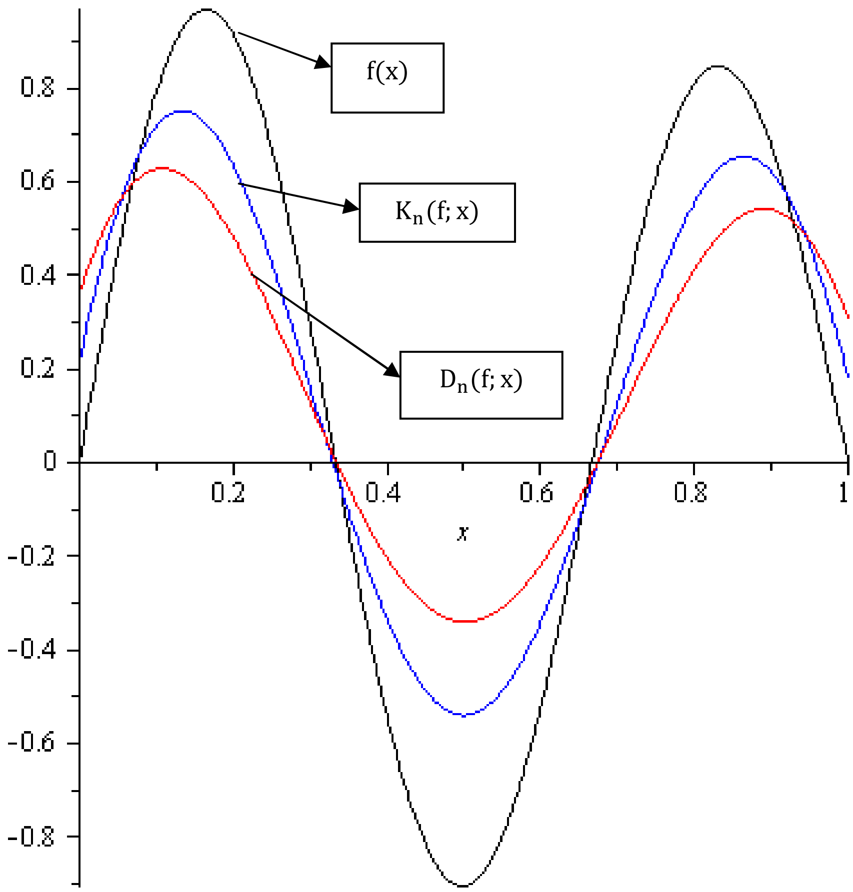
Farklı operatörlerin farklı n değerleri için $f(x) = \sin 3\pi x e^{-\frac{1}{5}x}$ şeklinde verilen sürekli bir $f$fonksiyonuna yaklaşımını grafik üzerinde görelim. Ayrıca bu yaklaşımları nümerik hesaplamalarla tablo üzerinde görelim.

Öncelikle $n = 20$ için (2.1) ve (2.3) ü inceleyelim.



Şekil 4.1. (2.1) ve (2.3) ün f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması

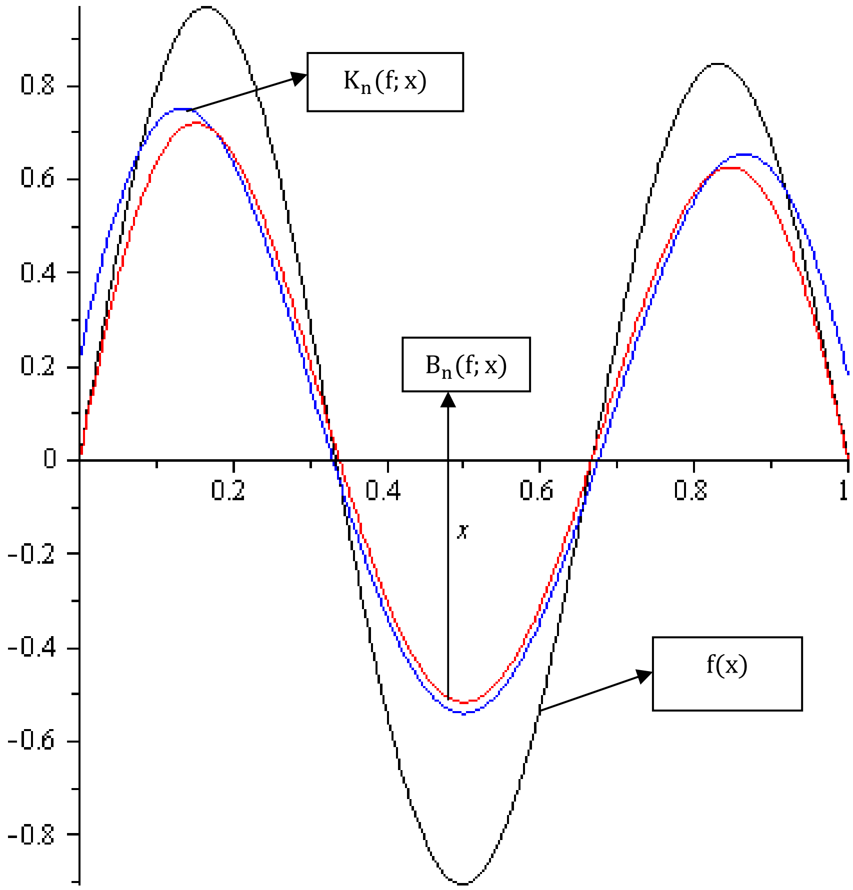
(2.2) ile (2.3) ün $n = 20$ ve $f(x) = \sin 3\pi x e^{-\frac{1}{5}x}$ şeklinde verilen sürekli bir f fonksiyonu için karşılaştıralım.



Şekil 4.2.(2.2) ve (2.3) ün f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması

Şekilden anlaşıldığı gibi birçok noktada (2.2), (2.3) den daha güzel yaklaşmaktadır.

(2.1) ile (2.2) nin $n = 20$ ve $f(x) = \sin 3\pi x e^{-\frac{1}{5}x}$ şeklinde verilen sürekli bir f fonksiyonu için karşılaştıralım.



Şekil 4.3. (2.1) ile (2.2) nin f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması

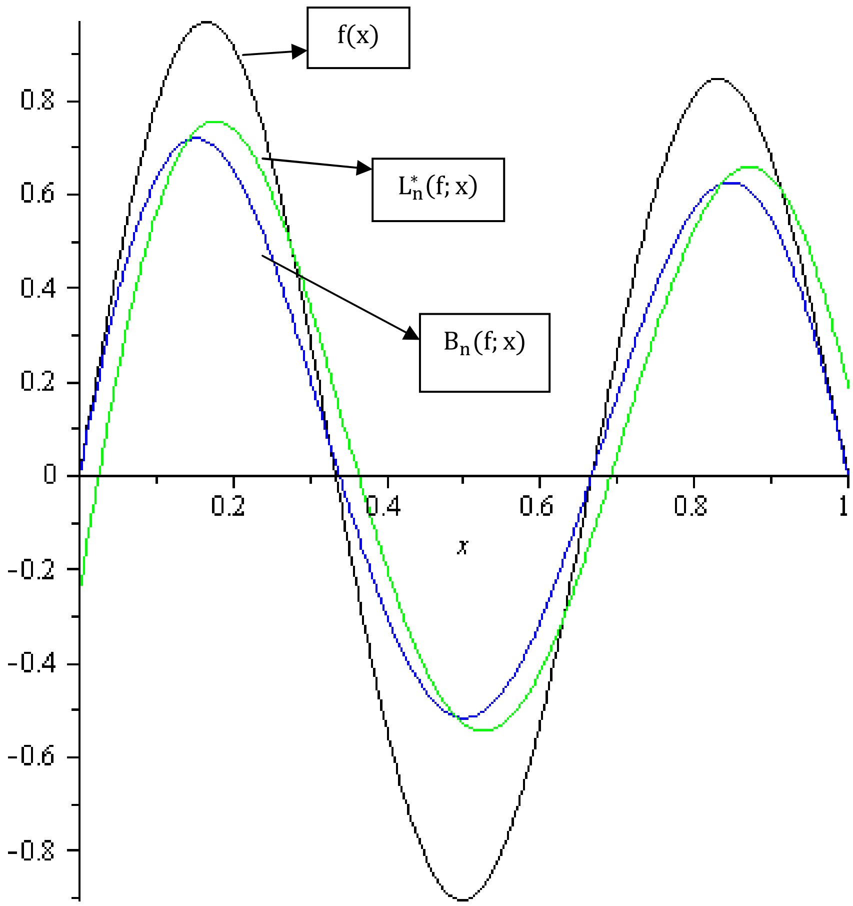
Şekle baktığımızda birçok noktada (2.2), (2.1) den daha güzel yaklaşmıştır. Bunu bir de nümerik tablo ile görelim.

$F_1(x) = \frac{|K_n(f;x)-f(x)|}{|B_n(f;x)-f(x)|}$ olsun.

Çizelge 4.1 (2.1) ile (2.2) nin f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması

$F_1(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
n=10	0.5102	1.0070	1.4766	0.8451	0.9112	0.8381	1.3781	1.0068	0.4885
n=50	0.4130	1.1992	1.6681	0.8713	0.9708	0.8582	1.5048	1.0941	0.3496
n=100	0.3863	1.1242	1.6935	0.8785	0.9844	0.8632	1.5246	1.1065	0.3141

Şimdi de (2.1) ile (2.5) i yine $n = 20$ ve $f(x) = \sin 3\pi x e^{-\frac{1}{5}x}$ şeklinde verilen sürekli bir f fonksiyonu için karşılaştıralım.



Şekil 4.4. (2.1) ile (2.5) in f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması

Grafiği incelediğimizde farklı noktalarda iki operatörün de birbirinden verilen fonksiyona daha iyi yaklaştığı noktalar olduğunu görürüz.

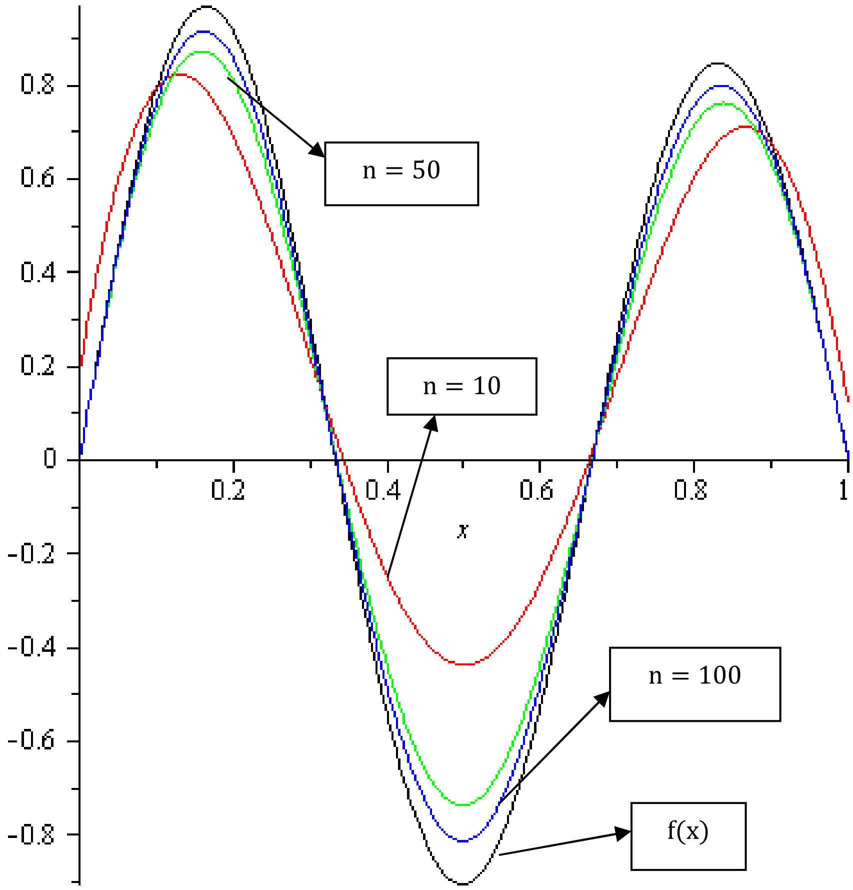
(2.1) ile (2.5) in $f(x) = \sin 3\pi x e^{-\frac{1}{5}x}$ şeklinde verilen sürekli bir f fonksiyonuna yaklaşımını nümerik hesaplamalarla tablo üzerinde görelim.

$F_2(x) = \frac{|L_n^*(f;x)-f(x)|}{|B_n(f;x)-f(x)|}$ olsun.

Çizelge 4.2. (2.1) ile (2.5) in f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması

$F_2(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
n=10	1.4583	0.7237	0.7122	1.3725	1.0150	0.6672	2.1733	1.2238	0.6437
n=50	1.5162	0.6378	0.9181	1.4511	0.9313	0.3529	2.3094	1.1218	0.0419
n=100	1.5379	0.6306	0.9236	1.4638	0.9167	0.3003	2.2946	1.0930	0.0604

Şimdi de farklı n değerleri için tanımlamış olduğumuz (4.7) nin $f(x) = \sin 3\pi x e^{-\frac{1}{5}x}$ şeklinde verilen sürekli bir f fonksiyonuna nasıl yaklaştığını grafik üzerinde görelim.



Şekil 4.5. (4.7) nin f fonksiyonuna yaklaşımının n=10, 50, 100 için karşılaştırılması

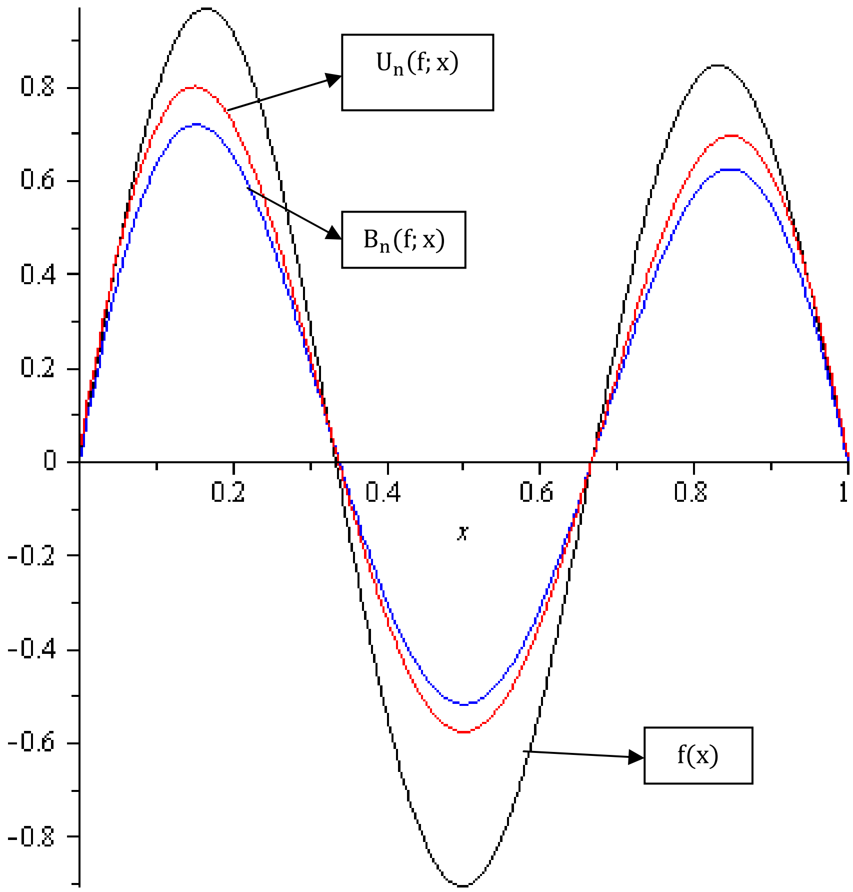
n sayısı fonksiyona büyüdükçe tanımlamış olduğumuz operatör fonksiyona yaklaşmaktadır.

Bunu bir de nümerik hesaplamalarla tablo üzerinde görelim. $F_3(x) = |U_n(f;x) - f(x)|$ olsun.

Çizelge 4.3. (4.7) nin f fonksiyonuna yaklaşımının n=10, 50, 100 için karşılaştırılması

$F_3(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
n=10	0.7929	0.2239	0.0721	0.2952	0.4680	0.2630	0.0899	0.2072	0.6757
n=50	0.0509	0.1042	0.0365	0.1031	0.1676	0.0893	0.0439	0.0953	0.0412
n=100	0.0289	0.0577	0.0207	0.0560	0.0915	0.0482	0.0248	0.0526	0.0233

Şimdi de (4.7) ile (2.1) i $n = 20$ ve $f(x) = \sin 3\pi x e^{-\frac{1}{5}x}$ şeklinde verilen sürekli bir f fonksiyonu için karşılaştıralım.



Şekil 4.6. (2.1) ile (4.7) nin f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması

Grafikten anlaşılacağı üzere (4.7) nin yaklaşımı (2.1) in fonksiyona yaklaşımından birçok noktada daha güzeldir. Çünkü (4.7), (2.1) den f fonksiyonuna her bir n için $\frac{n-1}{n^3}$ kadar daha fazla yaklaşmıştır. Ayrıca (2.1), (2.3) den birçok noktada verilen fonksiyona daha güzel yaklaştığı için (4.7) de (2.3) den fonksiyona daha güzel yaklaşmıştır.

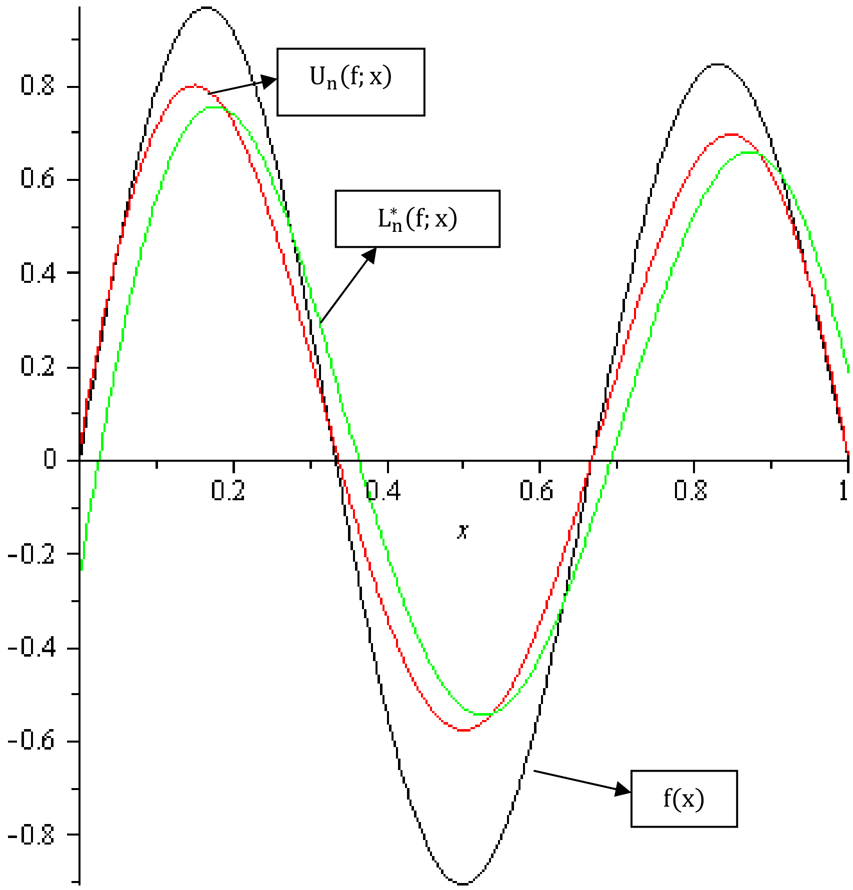
(2.1) ile (4.7) nin $f(x) = \sin 3\pi x e^{-\frac{1}{5}x}$ şeklinde verilen sürekli bir f fonksiyonuna yaklaşımını tablo yardımıyla inceleyelim.

$F_4(x) = \frac{|U_n(f;x) - f(x)|}{|B_n(f;x) - f(x)|}$ olsun.

Çizelge 4.4. (2.1) ile (4.7) nin f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması

$F_4(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
n=10	2.6474	0.5082	0.5954	0.7514	0.7552	0.7414	0.6455	0.5146	2.7162
n=50	0.7892	0.8846	0.9123	0.9264	0.9292	0.9256	0.9146	0.8849	0.7889
n=100	0.8920	0.9401	0.9544	0.9609	0.9624	0.9607	0.9550	0.9401	0.8919

(2.5) ile (4.7) nin $n = 20$ ve $f(x) = \sin 3\pi x e^{-\frac{1}{5}x}$ şeklinde verilen sürekli bir f fonksiyonu için karşılaştıralım.



Şekil 4.7. (2.5) ile (4.7) nin f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması

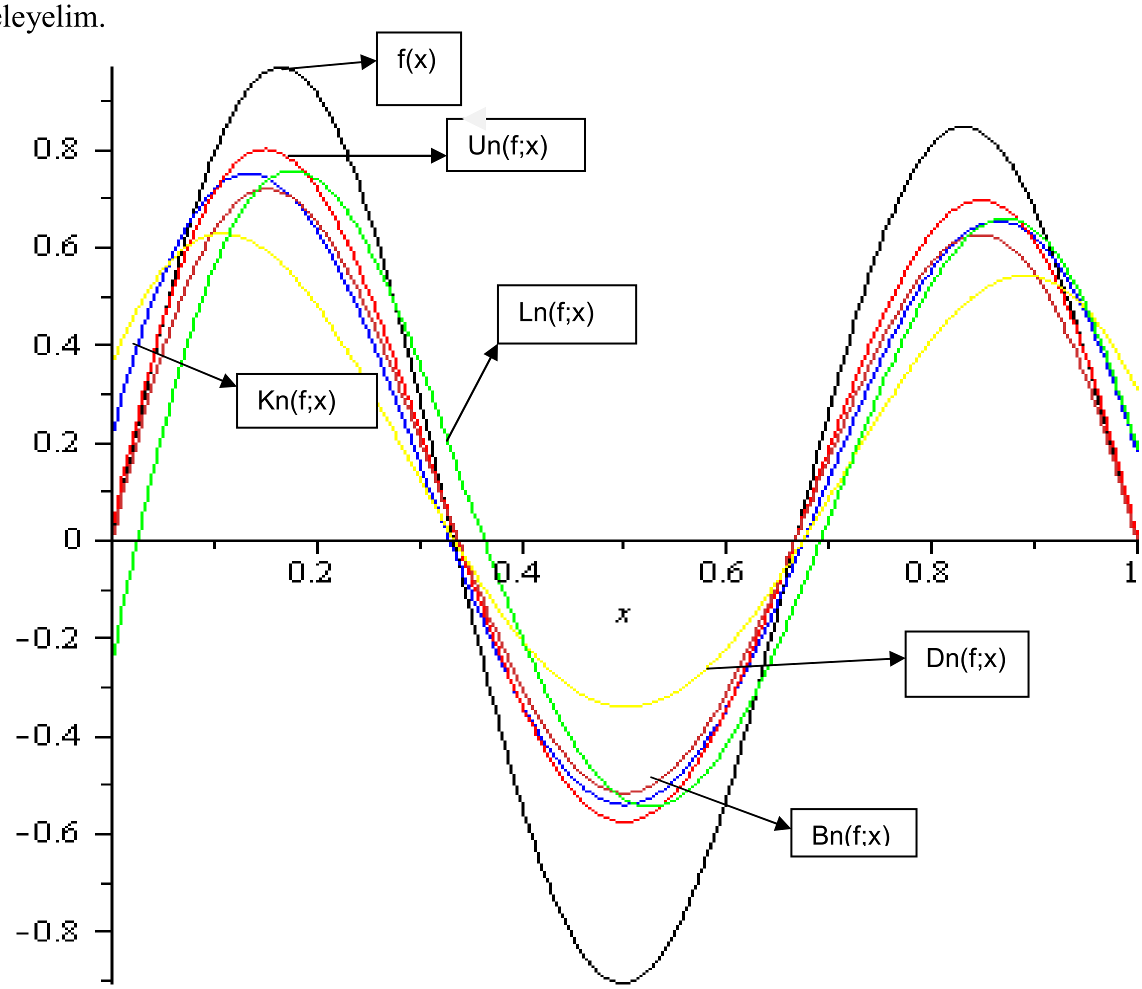
(2.5) ile (4.7) nin yaklaşımını tablo üzerinde görelim.

$F_5(x) = \frac{|U_n(f;x) - f(x)|}{|L_n^*(f;x) - f(x)|}$ olsun.

Çizelge 4.5. (2.5) ile (4.7) nin f fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması

$F_5(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
n=10	1.8153	0.7022	0.8359	0.5474	0.7440	1.1111	0.2970	0.4205	4.2192
n=50	0.5205	1.3868	0.9936	0.6384	0.9977	2.6229	0.3960	0.7887	18.807
n=100	0.5801	1.4906	1.0334	0.6564	1.0498	3.1990	0.4162	0.8601	14.742

Son olarak da karşılaştırmış olduğumuz tüm operatörleri bir grafik üzerinde inceleyelim.



Şekil 4.8.(2.1), (2.2), (2.3), (2.5) ve (4.7) nin f fonksiyonuna yaklaşımlarının karşılaştırılması

5.SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1.Sonuçlar

4. Bölümde öncelikle Bernstein operatörlerinin yakınsaklığı Korovkin Teoremi kullanılarak yapılan ispat detaylı olarak incelenmiştir. Süreklilik modulü yardımıyla yakınsaklık hızı hesaplanmıştır. Bernstein operatörlerinin asimptotik yaklaşımının hesaplanması verilmiştir.

$[\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}]$ aralığında tanımlamış olduğumuz (4.7) nin yakınsaklığı Teorem1.1.8. kullanılarak ispatlanmıştır. Tanım1.1.17. yardımıyla yakınsaklık hızı hesaplanmıştır. Son olarak da bu operatörün asimptotik yaklaşımı hesaplanmıştır.

Önceki çalışmalarda incelediğimiz operatörlerin herhangi sürekli bir $f$fonksiyonuna yaklaşımı $n = 20$ için yaklaşımları arasındaki fark grafik üzerinde gösterilmiştir. Ayrıca $n = 10, 50, 100$ için yaklaşımları nümerik değerler hesaplanarak bir tablo halinde verilmiştir. Çizdiğimiz grafikleri ve hazırladığımız nümerik değer tablolarını sırasıyla yaptığımız incelemede aşağıdaki sonuçları görebiliriz.

Şekil 4.1.'de (2.1) ile (2.3) ün sürekli bir $f$fonksiyonuna yaklaşımı karşılaştırılmıştır. [0,1] aralığının hemen hemen her yerinde (2.1) in fonksiyona yaklaşımı daha iyi olduğu gözlenmiştir. Sonlu sayıda süreksizlik noktasına sahip integrallenebilir fonksiyonlar için (2.3) kullanılabilir fakat (2.1) kullanılamaz. Bu tür fonksiyonlar çalışmamızın dışında olduğu için incelenmemiştir. Bu tez çalışmasında yapılan bütün karşılaştırmalarda sürekli fonksiyonlar kullanılmıştır.

Şekil 4.2.'de (2.2) ile (2.3) ün $\boldsymbol{f}$ fonksiyonuna yaklaşımı karşılaştırılmıştır. Şekilden de anlaşılacağı üzere (2.2) nin yaklaşımı birçok noktada daha iyi olmuştur.

Şekil 4.3.'de (2.1) ile (2.2) nin fonksiyonuna yaklaşımı karşılaştırılmıştır. (2.2) nin $\boldsymbol{f}$ fonksiyonuna çoğu noktada yaklaşımı daha güzel olmuştur. Çizelge 4.1.'i incelediğimizde ise Tanım1.1.20.'den $\boldsymbol{F_1(x)} < 1$ olduğu yerlerde (2.2) nin $\boldsymbol{f}$

fonksiyonuna daha güzel yaklaşmıştır. $\boldsymbol{F_1(x)} > 1$ olduğu yerlerde ise (2.1), $\boldsymbol{f}$ fonksiyonuna daha güzel yaklaşmıştır.

Şekil 4.4.'de de (2.1) ile (2.5) in $\boldsymbol{f}$ fonksiyonuna yaklaşımı karşılaştırılmıştır. (2.5) in f fonksiyonuna yaklaşımı çoğu noktada daha güzel olmuştur. Çizelge 4.2'.ü incelediğimizde ise Tanım1.1.20.'den $\boldsymbol{F_2(x)} < 1$ olduğu yerlerde (2.5), (2.1) den $\boldsymbol{f}$ fonksiyonuna daha güzel yaklaşmıştır. $\boldsymbol{F_2(x)} > 1$ olduğu yerlerde ise (2.1), (2.5) ten $\boldsymbol{f}$ fonksiyonuna daha güzel yaklaşmıştır.

Şekil 4.5.'de (4.7) nin $\boldsymbol{n = 10, 50, 100}$ için $\boldsymbol{f}$ fonksiyonuna yaklaşımı karşılaştırılmıştır. $\boldsymbol{n}$ sayısı büyüdükçe yaklaşım daha güzel olmuştur. Çizelge 4.3'.i incelediğimizde de aynı şekilde $\boldsymbol{n}$ sayısı büyüdükçe fonksiyona yaklaşımın daha güzel olduğunu görürüz. Çünkü $\boldsymbol{F_3(x)}$ değeri gittikçe sıfıra yaklaşmıştır.

Şekil 4.6.'da da (2.1) ile (4.7) nin $\boldsymbol{f}$ fonksiyonuna yaklaşımı karşılaştırılmıştır.(4.7) nin $\boldsymbol{f}$ fonksiyonuna yaklaşımı çoğu noktada daha güzel olmuştur. Çizelge 4.4.'yı incelediğimizde ise Tanım1.1.20.'den $\boldsymbol{F_4(x)} < 1$ olduğu yerlerde (4.7), $\boldsymbol{f}$ fonksiyonuna daha güzel yaklaşmıştır. $\boldsymbol{F_4(x)} > 1$olduğu yerlerde ise (2.1), $\boldsymbol{f}$ fonksiyonuna daha güzel yaklaşmıştır. Çünkü [0,1] aralığını (4.7) tanımlanırken (2.1) in tanımlı olduğu [0,1] aralığı aralığı $[\boldsymbol{\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}}]$ şeklinde daraltılmıştır.

Şekil 4.7.'de de (2.5) ile (4.7) nin $\boldsymbol{f}$ fonksiyonuna yaklaşımı karşılaştırılmıştır. (4.7) nin $\boldsymbol{f}$ fonksiyonuna yaklaşımı birçok noktada daha güzel olmuştur. Çizelge 4.5.'yi incelediğimizde Tanım1.1.20.'den ise $\boldsymbol{F_5(x)} < 1$ olduğu yerlerde (4.7), $\boldsymbol{f}$ fonksiyonuna daha güzel yaklaşmıştır. $\boldsymbol{F_5(x)} > 1$ olduğu yerlerde ise (2.5), $\boldsymbol{f}$ fonksiyonuna daha güzel yaklaşmıştır. İki operatörün de hemen hemen birbirine benzer olmasına rağmen aradaki fark tanım aralığıdır. Biz [0,1] aralığını sol ve sağdan $\boldsymbol{\frac{1}{n}}$ kadar daraltarak $[\boldsymbol{\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}}]$ şeklinde tanımladık. Aksop ise aynı aralığı $\boldsymbol{\frac{1}{2n}}$ kadar sağa kaydırarak $[\boldsymbol{\frac{1}{2n}, 1 + \frac{1}{2n}}]$ aralığını kullanmıştır. Dolayısıyla bazı noktalarda (4.7), fonksiyona daha iyi yaklaşırken bazı noktalarda (2.5) daha iyi yaklaşmıştır.

Son olarak da Şekil 4.8. ‘de incelediğimiz tüm operatörlerin $n = 20$ için f fonksiyonuna yaklaşımı incelenmiştir.

5.2. Öneriler

İntegralleri alınabilen fakat kapalı aralık üzerinde sonlu sayıda süreksiz noktaları olan fonksiyonları incelerken Durrmeyer operatörlerinden veya Kantrovich operatörlerinden yararlanılabilir. Sürekli fonksiyonlarda ise Bernstein operatörlerinden yararlanılabilir. Sürekli olan fonksiyonlar incelenirken daha güzel sonuçlar elde etmek isteniyorsa; Aksop’un yaptığı gibi aralık kaydırılarak hesaplamalar yapılabilir veya hata payını en aza indirmek için bizim yaptığımız gibi [0,1] aralığı daraltılarak yeni operatörlerle yaklaşımlar incelenebilir.

KAYNAKLAR

AGRATINI, O., 2011. Statistical convergence of a non-positive approximation process. Chaos, Solitons & Fractals, 44: 977-981.

Altomare, F., Campiti, M., 1994. Korovkin-type Approximation Theory and its Applications, Berlin: New York: de Gruyter.

BAYRAKTAR, M., 2006. Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitapevi,253, Ankara.

BERNSTEIN, S.N., 1913. Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur le calcul de probabilites. Commun. Soc. Math. Kharkow, 13(2): 1-2.

BOHMAN, H., 1954. On approximation of continuous and of analytic functions. Ark Math., 2: 47-63.

BREZINSKI, C., 2000. Convergence acceleration during 20 th century. J. Comput. Appl. Math., 122: 1-21.

CAO, J.D., 1997. J. Math. Apply., 209: 140-46.

DING, C., 2004. Approximation by Generalized Bernstein Polynomials. Department of Mathematics, College of Science, China Institute of Metrology, Hongzou, 310018, Zhejiang, People's Republic of China, 817-826.

DERRIENNIC, M. M., 1981.Sur l'approximation de fonctions integrable sur [0,1] par des polynomes de Bernstein modifies, J. Approx. Theory, 31: 325-345.

DITZIAN, Z., IVANOV, K. G., 1989. Bernstein-type operatorsand their derivatives. J. Approx. Theory 56: 72-90.

DUCHON, M., 2011. A Generalized Bernstein Approximation Theorem. Mathematical Publications, 99-109.

DURRMEYER, J. L., 1967. Une formule d'inversion de la transformee de Laplace: Aplication a la theorie des moments, These de 3e cyele. Faculte des Sciences de l'Universite de Paris.

HACISALİHOĞLU, H., HACIYEV, A., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. Ankara.

İZGİ, A., 2012. Approximation by a Class of New Type Bernstein Polynomials of one and Two Variables, Global Journal of Pure and Applied Mathematics (kabul edildi).

KANTOROVICH, L.V., 1930. Sur certain developpements suivant les polynomes de la forme de S. Bernstein, I, II, C.R. Acad. URSS, 563-568, 595-600.

KING, J. P., 2003. Positive Linear Operators Which Preserve x^2. Acta. Math. Hungar. ,99(3):203-208.

KOROVKIN, P.P., 1953. On Convergence of Linear Positive Operators in the space of continuous functions (Russian). Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.) 90: 961-964. MR 15:236. Sc. 1.2.

KOROVKIN, PP. , 1953. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. Dokl Akad Nauk SSSR, 90:961-4 Russian.

LORENTZ, G. G., 1953. Bernstein Polynomials. University of Toronto Press, Toronto.

MUSAYEV, B., ALP, M., MUSTAFAYEV, N., EKİNCİOĞLU, İ. 2007. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz1. Ankara.

ÖZARSLAN, M. A., DUMAN, O. A, 2009. New Approach In Obtaining A Beter Estimation In Approximation By Positive Linear Operators. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1. 58(1): 17-22.

PINKUS, A., 2000. Weierstrass and approximation theory. J. Approx Theory, 107: 1-66.

POPOVICIU, T., 1998. On the proof of Weierstras' theorem using interpolation polynomials. Lucrarile Sesiunii Gen. Şt. Acad. Romane, 2-12 iunie 1950

SHEVCHUK, I.A., 1992. Approximation by Polynomials and Traces of Functions Continuous on a Segment. Naukova Dymka, Kiev, 324.

SHISMA, By O., MOND, B., 1968. The Degree Convergence Of Sequences Of Linear Positive operators. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 60:1196-1200.

THEODORE HO HSU, B. S., 1968. Anon-linear transformation for sequences and integrals. Thesis master sciences. Graduate Faculty of Texas Thechnological College.

WALCZAK, Z., 2004. Bernstein-Durrmeyer type operators, Acta Mathematica Universitatis Ostraviensis, 12: 65-72.

ÖZGEÇMİŞ

03.07.1988 yılında Mersin'in Erdemli İlçesi'nde doğdu. İlköğretimine Erdemli'de Sultan Akın İlköğretim Okulu'nda başladı ve Atatürk İlköğretim Okulu'nda tamamladı. Daha sonra Erdemli Anadolu Lisesi'nde ortaöğretimini 2006 yılında tamamladı. Aynı yıl Harran Üniversitesi Matematik Bölümü'nü kazandı. 2010 yılında mezun olup yine aynı yıl Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı. Halen Harran Üniversitesi'nde öğrenimine devam etmektedir.

ÖZET

Birinci bölümde, gerekli tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, Bernstein operatörleri ve bu operatörlerin modifikasyonları ile ilgili önceki çalışmaların literatür taraması yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, bu tezde izlenecek metotlar hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde ilk olarak Bernstein operatörlerine Teorem 1.1.8 şartları uygulanmıştır. Bernstein operatörlerinin Teorem 1.1.6. yardımıyla yakınsaklık hızı hesaplanmıştır. Bernstein operatörlerinin Asimptotik yaklaşımı incelenmiştir. Ayrıca Bernstein operatörü ile ilgili birkaç teorem daha verilmiştir. Daha sonra tanımlamış olduğumuz operatör üzerinde Teorem 1.1.8. şartları incelenmiştir. Bu operatörün Teorem 1.1.6 yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanmıştır. Bu operatörün asimptotik yaklaşımı hesaplanmıştır. Son olarak da bu tezde incelenen tüm operatörler grafik ve nümerik hesaplamalarla tablo üzerinde karşılaştırılmıştır.

Sonuç olarak incelenen tüm operatörlerin yaklaşımları hakkında bilgi verilmiştir.

SUMMARY

In the first chapter, necessary definations and teorems have been introduced.

In the second chapter, scanning of literature about the operators of Bernstein and modification of this operators has been done.

In the third chapter, information about the methods which are applied in this theses has been given.

In the fourth cheapter, firstly the operators of Bernstein have been applied conditions of Theory 1.1.8. Convergence rate of operators Bernstein has been calculated with help of Theory 1.1.6. Asymtotic approach of operators of Bernstein has been examined. Besides, a few theory about Bernsteins operators have been given. Later, conditions of Theory 1.1.8. have been examined on the operators which we have defined. Convergence rate of operators of these operators has been calculated with the help of Theory 1.1.6. Asymtotic approach of this operators has been examined. Finally, all operators which are examined in the thesis have been compared with graphical and numerical calculations .

As a result informations about approximations of all the operators which have been examined have been given.